Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Equations elliptiques quasilinéaires avec données dans L^1

Thèse de magister En Mathématiques

(Spécialité Analyse : E.D.P et Applications)

Présentée par

Benguessoum Aissa

Composition du jury

Président :	S.M. Bouguima	Professeur à l'université Abou Bekr Belkaid
Directeur de thèse :	B. Abdellaoui	Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
Examinateurs :	G. Senouci Bereksi	Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
	M.T.Touaoula	Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid

Table des matières

Notations

Notations générales

Symbole	Signification
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Element de $I\!R^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$\alpha \wedge \beta$	$\max\{\alpha,\ \beta\}$
$D_i u = \partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par aport a x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Deuxième dérivée partielle de u par rapport a x_i, x_j
$Du = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
$D^2 u = (D_{ij} u)$	Matrice Hessienne de u
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$	p Laplacien de u
p'	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
$\partial \Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$\|A\|$	mesure de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in I\!R^N$
ω_N	mesure de la sphère unité dans $I\!R^N$
$\omega_N^{'}$	mesure de la boule unité de $I\!R^N$

Symbole	Signification
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire de $I\!R^N$ / dualité X, X'
$\setminus$	Moins ensembliste
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
δ_{ij}	symbol de Kronecker
δ_{x_0}	Delta de Dirac en x_0
$p.p.$	presque pour tous les points
$s.c.i.$	Semi continue inferierement
$s.c.s.$	Semi continue superierement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Partie negative de la fonction V, $V^- = \max(-V, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ó $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Fonctions continues dans Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Fonctions continues dans Ω a support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Fonctions Hölder continues dans Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Fonctions Hölder continues de classe k dans Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ a support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Fonctions indéfiniment differentiables dans Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a support compacte
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ non négatives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c.a.d espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable et $\exists C$ tel que $\|u(x)\| \le C$ dans p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace zero
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\mathcal{D}^{1,2}(I\!R^N)$	Completion de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ par apport a la norme $\|\|\phi\|\|_{\mathcal{D}^{1,2}(I\!R^N)} \equiv \int\limits_{I\!R^N} \|\nabla\phi\|^2 dx$
$\mathcal{D}_{-\gamma}^{-1,p'}$	Espace dual $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espace des mesures de Radon dans Ω

Introduction

Ce mémoire est dédié a l'étude des équations elliptiques quasi-linéaires avec données dans L^1, la difficulté majeure rencontrée lorsque l'on s'intéresse à de tels problèmes est que les théories classiques d'existence, soit en utilisant des méthodes variationnelle ou des méthodes de compacité, ne sont pas applicables. D'où la nécessité d'utiliser de nouvelles techniques pour prouver l'existence et l'unicité des solutions pour de tels problèmes.

Notons que l'importance de chercher à résoudre des problèmes avec données dans L^1 ne se limite pas à un cadre purement théorique , mais aussi pour des raisons applicables, pour s'en convaincre on recommande au lecteur différentes références comme par exemple : [5], [7] et [30] où différents exemples d'équations ayant une application en physique sont présentés.

La première avancée significative dans cette direction est due à Stampacchia dans [30], où il considére des opérateurs elliptiques linéaires de second ordre avec données non régulières de la forme

$$L(u) = f$$

où

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\, u$$

où a_{ij}, b_i, c sont des fonctions avec des hypothèses précises.

Dans ses fameux travaux, Stampacchia utilise la notion de la dualité pour résoudre ces classes de problèmes. Des résultats d'existence et d'unicité ont été prouvés dans cette direction grâce au caractère linéaire et à "l'effet régularisant" de l'opérateur. Notons que dans le cas ou $L \equiv \Delta$ alors la notion de dualité coïncide avec la notion de la solution au sens des distributions. Dans le cadre linéaire, et avec la notion de dualité on peut même considérer des données mesures.

L'extension des travaux de Stampacchia aux opérateurs non linéaires a été réalisé par plusieurs mathématiciens. Les premiers travaux ont été réalisé par Boccardo, Murat, Gallouet et leurs collaborateurs. Les difficultés principales pour les opérateurs non linéaires consistent en deux points :

1- Le sens dans lequel la solution est définie (le sens de la bonne solution et la méthode de sa construction).

2-L'unicité de la "bonne" solution.

Notons que la deuxième question est légitime vu le contre exemple de Serrin pour la non unicité de la solution, voir [31].

Pour aller au delà de la première difficulté on procède par approximation en revenant au cadre variationnel, l'étape principale est de démontrer des propriétés des solutions pour des problèmes approximés qui restent conservées par passage à la limite. Ce passage est réalisable en imposant des conditions naturelles sur l'espace des fonctions tests.

Concernant la deuxième difficulté, on démontre des résultats partiels, en particulier pour l'opérateur Δ_p on est apte à démontrer l'unicité de la solution. On notera que l'unicité de la solution n'est en général vraie.

Description du contenu du mémoire.

Dans le premier chapitre on fait un bref rappel des espaces fonctionnels de Sobolev et de Marcinkiewicz qui seront d'une très grande utilité dans ce travail. Dans la Sousection 1.2.3 on définit la notion de la solution faible. En utilisant des techniques variationnelles on démontre l'existence et l'unicité de la solution d'énergie pour le problème

$$-\Delta_p \, u = f, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ce résultat est une extension naturelle du Théorème de Lax-Milgram au cas non linéaire. Dans la Section 1.3 on présente la démonstration de l'inégalité de Picone dans sa version générale et comme conséquence on obtient un principe de comparaison pour des problèmes quasi-linéaires avec un terme "concave" par rapport au p laplacien. Ce résultat généralise celui de Brezis-Kamin dans [16] pour le laplacien. Les résultats obtenus dans ce chapitre font partie de l'article [2].

Le deuxième chapitre est consacré à définir la notion d'entropie dans laquelle on va étudier notre problème. On commence par définir le cadre fonctionnel qui sera donné à l'aide de la fonction troncature, c.à.d on analyse les propriétés fonctionnelles de $T_k(u)$ au lieu de u. Notons que $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k, \\ k \, sign(s) & \text{si} \quad |s| > k. \end{cases}$$

Après avoir donné la définition de solution au sens d'entropie, on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans ce cadre. Quelques propriétés de la solution d'entropie dans les espaces de Marcinkiewicz seront déduites. A la fin du chapitre quelques généralisations pour des opérateurs quasilineaires non homogènes et avec second membre pouvant dépendre de u seront présentées. Le contenu de ce chapitre n'est autre qu'une présentation détaillée et développée de l'article [5].

Le chapitre 3 est consacré a l'étude des problèmes elliptique quasilineaires avec une dépendance en gradient, en particulier on se focalise sur le cas où le terme contenant le gradient apparaît comme un terme d'absorption. On commence par l'équation

$$-\Delta_p u + |\nabla u|^p = f,$$

on démontre que ce problème admet une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $f \in L^1$ et que si $f \geq 0$, alors il n'y a qu'une solution positive. L'idée de la démonstration est de procéder par approximation et de passer à la limite en utilisant des résultats de compacité. Notons que la difficulté principale consiste à passer à la limite dans le terme $|\nabla u|^p$, pour surmonter cette difficulté on utilise une fonction test particulière introduite par Boccardo-Gallouët dans [7].

Dans la dernière partie du chapitre 3 en étudiera le problème

$$-\Delta_p u + g(u)|\nabla u|^p = f.$$

Sous des condition naturelles sur g on démontre l'existence d'une solution au sens d'entropie et comme dans le cas précédent, si $f \geq 0$, alors la solution positive est unique.

Ce chapitre est librement mais largement inspiré par les articles [7],[8] et une partie de l'article [3].

Mots clés : Equations elliptiques quasilineaires, méthodes variationnelles, espaces fonctionnels, arguments de compacité, problèmes avec dépendance en gradient.

Chapitre 1

Préliminaires.

1.1 Rappels et quelques définitions.

Définition 1.1 (Fonction de Carathéodory) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :*

1. *L'application : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x,t)$ est continue presque partout $x \in \Omega$.*
2. *L'application : $\Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.2 (Fonction convexe) *Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dite convexe si :*

$$\forall\,(x,y) \in X^2, \quad \forall\,\lambda \in]0,1[, \qquad J\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$$

Définition 1.3 (Fonction semi continue inférieurement (s.c.i)) *Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Elle est dite semi continue inférieurement (s.c.i.) en x si, pour toute suite $\{x_n\}$ telle que x_n converge vers x, on a :*

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n).$$

En dite semi continue inférieurement faiblement si le convergence étant pour la topologie faible.

Définition 1.4 (Fonction coercive) *Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable X est dite coercive si :*

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

Définition 1.5 (Fonctions équi-intégrable dans L^1) *Soit X un ensemble de $\mathbb{R}^N$. On dit qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $L^1(X)$ est équi-intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $mes(E) < \delta$ avec $E \subset X$ entraîne pour tout n,*

$$\int_E |f_n(x)|dx \leq \varepsilon.$$

On utilise souvent le résultat suivant de compacité dans L^1

Lemme 1.1 (Lemme de Vitali : compacité dans L^1)
Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui converge presque partout vers f, et qui est équi-intégrable. Alors $f \in L^1(X)$ et $\{f_n\}$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

Ce résultat est faux si la mesure de X n'est pas finie.
Le résultat analogue pour L^p, $1 < p < \infty$: si $\{f_n\}$ converge *p.p.* vers f et si $|f_n|^p$ est équi-intégrable, alors $\{f_n\}$ converge fortement vers f dans L^p.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

I-Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \textit{tel que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \Big\},$$

on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

où parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{i=N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{si} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$, en muni $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \Big(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |\nabla u| \Big).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif si $1 < p < \infty$, il est séparable si $1 \leq p < \infty$.

On pose $\quad H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

II- Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$.
Soit $m > 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On définit

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \forall \alpha \text{ multi-indice} \quad \textit{avec} \quad |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad \textit{tel que}$$
$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\},$$

un multi-indice α est une suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ avec $\alpha_i \geq 0$ entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \qquad \textit{et} \qquad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi,$$

et on note $D^\alpha u = g_\alpha$.
Notons que par récurrence, en a

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, 3, \cdots, N \Big\}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach.
On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v\Big)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

III- Les espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Soit $1 \leq p \leq \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Si Ω est un ouvert borné, on a le Théorème suivant

Théorème 1.1 (Inégalité de Poincaré)
On suppose que Ω est un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier en peut munir $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la norme équivalente suivante $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

IV-Injections de Sobolev.
Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes L^p. Un exemple type très courant est : si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

et donc, si $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^6 dx\right)^{\frac{1}{3}} \leq C\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Pour le cas general, en pose $p^* = \frac{pN}{N-p}$, alors en a le Théorème suivant

Théorème 1.2 (Inégalité de Sobolev)

Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < N$. Alors il existe une constante C (dépendant de p et N) telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pour l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, en a le résultat suivant.

Théorème 1.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier. Soient $m \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors*
1. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, on a $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.
2. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, on a $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$, (mais pas pour $q = +\infty$ si $p > 1$).

3. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, *on a* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$. *Dans ce cas, si* $m - \frac{N}{p} > 0$ *n'est pas un entier, alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{s,\beta}(\Omega)$, *où* $s = [m - \frac{N}{p}]$ *et* $\beta = m - \frac{N}{p} - s$,
les injections restent valables si $m = 1$ *et* $p \in [1, +\infty]$.
Toutes ces injections sont continues.
Sans hypothèse de régularité sur Ω, *les injections sont vrai localement, i.e. dans tout ouvert bornée inclus dans* Ω. *En d'autres termes, on a* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}_{loc}(\Omega)$, *etc. Elles restent globalement vraies si on remplace* $W^{m,p}(\Omega)$ *par* $W^{m,p}_0(\Omega)$.

Concernant la compacité des injections précédentes, en a le Théorème suivant prouvé par Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.4 ***(Théorème de Rellich-Kondrachov)***
On suppose Ω *borné de classe* C^1. *On a*
Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
Si $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,
Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,
toutes ces injections sont compactes.

Pour le cas $q = p^*$, l'injection n'est pas compact, ce défaut est du à l'invariance de la norme de gradient dans L^p et la norme de u dans L^{p^*} par le changement de fonction suivant : $v \mapsto v_1$, où $v_1(x) = \mu^{-\frac{p^*}{p}} v(\frac{x}{\mu}), \mu > 0$.
La condition sur le domaine est nécessaire, si Ω n'est pas borné alors les injections ne sont pas compact en général comme le démontre le contre example suivant : Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(I\!R^N)$ tel que $\phi \geq 0$, on pose $\phi_n(x) = \phi(x + ne), e = (1, 1, 1..., 1)$, il est facile de voir que $\phi_n \to 0$ p.p. et $||\phi_n||_{L^q} = ||\phi||_{L^q} > 0$.

1.2.2 Les espaces de Marcinkiewicz.

Définition 1.6 *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, sa fonction de distribution par*

$$\phi_f(k) = mes\Big\{x \in \Omega : |f(x)| > k\Big\} \quad k > 0,$$

Il est clair que ϕ_f est une fonction décroissante continue à droite.

Définition 1.7 *[5] Soit* $0 < q < \infty$ *et* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, *l'espace Marcinkiewicz* $\mathcal{M}^q(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$\phi_f(k) \leq Ck^{-q}, \qquad C < \infty, \tag{1.2.1}$$

Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$ nous utilisons le notation $mes(A) = |A|$ pour dénoter sa mesure.

L'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{M}^q(\Omega)} = \inf\Big\{C : \phi_f(k) \le Ck^{-q}, \quad \text{pour tout} \quad k > 0\Big\}.$$

est un espace de Banach.
Notons que si $f \in L^q(\Omega)$, on a

$$\int_{\{|f|>k\}} dx \le \int_\Omega \Big|\frac{f}{k}\Big|^q dx \le k^{-q}\int_\Omega |f|^q dx,$$

donc

$$\phi_f(k) \le k^{-q}\|f\|_q^q \tag{1.2.2}$$

et comme conclusion en aura $L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega)$.
Pour analyser les propriétés des espaces $\mathcal{M}^q(\Omega)$, en a besoin de lemme suivant

Lemme 1.2 *Si $f \in L^q(\Omega)$ alors*

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx = q\int_0^{+\infty} t^{q-1}\phi_f(t)dt. \tag{1.2.3}$$

Preuve.
On commence par le cas où $q = 1$. Soit

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

alors

$$H(|f(x)| - k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |f(x)| > k, \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| < k, \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \phi_f(k)\,dk &= \int_0^{+\infty}\Big[\int_\Omega H(|f(x)|-k)\,dx\Big]\,dk, \\ &= \int_\Omega\Big[\int_0^{+\infty} H(|f(x)|-k)\,dk\Big]\,dx, \qquad \text{(grâce à Fubini)} \\ &= \int_\Omega\Big[\int_{\{|f(x)|>k\}} \mathbb{1}\,dk\Big]\,dx = \int_\Omega\Big[\int_0^{|f(x)|}\mathbb{1}\,dk\Big]\,dx, \\ &= \int_\Omega |f(x)|\,dx, \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi_f(k)\,dk = \int_\Omega |f(x)|\,dx$
et le résultat est démontré

On considére maintenant le cas général $q > 1$. En pose $g(x) = |f(x)|^q$ alors, $g \in L^1(\Omega)$ et

$$\phi_g(k) = mes\{|g| > k\} = mes\{|f|^q > k\} = mes\{|f| > k^{\frac{1}{q}}\},$$

i.e. $\phi_g(k) = \phi_f(k^{\frac{1}{q}})$,

donc

$$\int_\Omega |g(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} \phi_f(k^{\frac{1}{q}})\, dk,$$

on pose $t = k^{\frac{1}{q}}$ alors $k = t^q$ et $dk = q\, t^{q-1}$, de sorte que

$$\int_\Omega |f(x)|^q\, dx = q \int_0^{+\infty} t^{q-1}\, \phi_f(t)\, dt.$$

$\blacksquare$

Corollaire 1.1 *Si $q \in]1, \infty[$, alors*

$$L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega) \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{1.2.4}$$

et pour tout q, $\hat{q} \in [1, \infty[$ on a

$$\mathcal{M}^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^{\hat{q}}(\Omega) \qquad si \qquad q \geq \hat{q}. \tag{1.2.5}$$

Preuve.
Supposant que $f \in \mathcal{M}^q(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^{q-\varepsilon}\, dx &= \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x)|^{q-\varepsilon}\, dx + \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^{q-\varepsilon}\, dx, \\ &\leq c_1 + \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^{q-\varepsilon}\, dx, \\ &\leq c_1 + \int_\Omega |f(x)|^{q-\varepsilon} \mathbb{1}_{\{|f|>1\}}\, dx, \\ &\leq c_1 + \int_\Omega |g(x)|^{q-\varepsilon}\, dx, \end{aligned}$$

où $g(x) = |f(x)|\, \mathbb{1}_{\{|f|>1\}}$, donc

$$\phi_g(t) = mes\{|g| > t\} \leq mes\{|f(x)|\, \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} > t\}$$

implique que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^{q-\varepsilon}\,dx &\leq c_1 + \int_\Omega |g(x)|^{q-\varepsilon}\,dx,\\
&\leq c_1 + (q-\varepsilon)\int_0^{+\infty} t^{q-\varepsilon-1}\,\phi_g(t)\,dt,\\
&\leq c_1 + (q-\varepsilon)\int_0^{1} t^{q-\varepsilon-1}\,\phi_g(t)\,dt + (q-\varepsilon)\int_1^{+\infty} t^{q-\varepsilon-1}\,\phi_g(t)\,dt,\\
&\leq c_1 + c_2(q-\varepsilon)\int_0^{1} t^{q-\varepsilon-1}\,dt + c_3(q-\varepsilon)\int_1^{+\infty} t^{q-\varepsilon-1}\,t^{-q}\,dt,\\
&\leq c_1 + c_2(q-\varepsilon) + c_3(q-\varepsilon)\int_1^{+\infty} t^{-\varepsilon-1}\,dt,\\
&\leq c_4 + (q-\varepsilon)\Big[-\frac{t^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\Big]_1^{+\infty},\\
&\leq C<\infty.
\end{aligned}$$

alors $f\in L^{q-\varepsilon}(\Omega)$, et alors il résulte que $\mathcal{M}^q(\Omega)\subset L^{q-\varepsilon}(\Omega)$.
Comme $L^q(\Omega)\subset\mathcal{M}^q(\Omega)\subset L^{q-\varepsilon}(\Omega)\subset\mathcal{M}^{q-\varepsilon}(\Omega)$ pour tout $q\in]1,\infty[$ et pour tout $\varepsilon>0$, donc on déduit pour tout q, $\hat{q}\in]1,\infty[$ on a

$$\mathcal{M}^q(\Omega)\subset\mathcal{M}^{\hat{q}}(\Omega)\qquad\text{si}\qquad q\geq\hat{q}.$$

■

Notons que $L^q(\Omega)\subsetneq\mathcal{M}^q(\Omega)$. Plus précisément on a le contre exemple suivant : Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{|x|^2}$, $x\in\Omega\equiv B_r(0)\subset I\!\!R^N$, $N\geq 2$, il est clair que

$$f\in\mathcal{M}^{\frac{N}{2}}(\Omega)\qquad\text{et}\qquad f\notin L^{\frac{N}{2}}(\Omega).$$

Car :

$$\begin{aligned}
f\in\mathcal{M}^{\frac{N}{2}}(\Omega) &\Leftrightarrow mes\Big\{|\frac{1}{|x|^2}|>k\Big\}\leq Ck^{-\frac{N}{2}},\\
&\Rightarrow \int_\Omega mes\Big\{|\frac{1}{|x|^2}|>k\Big\}\,dx\leq C\int_\Omega k^{-\frac{N}{2}}\,dx,\\
&\Rightarrow \int_\Omega mes\Big\{|\frac{1}{|x|^2}|>k\Big\}\,dx\leq Ck^{-\frac{N}{2}}|\Omega|<\infty\qquad\text{(car }\Omega\text{ est bornée)},
\end{aligned}$$

Mais :

$$\int_\Omega\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big)^{\frac{N}{2}}\,dx=\int_\Omega\frac{1}{|x|^N}\,dx=\infty.$$

1.2.3 Problèmes elliptiques et la notion de la solution faible.

Soit $p > 1$ et Ω un ouvert borné de $I\!R^N$, pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut considérer la forme linéaire continue $-\Delta_p u$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ définie par

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle \equiv \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla v\,dx.$$

Il est clair que $-\Delta_p u \in (W_0^{1,p}(\Omega))' = W_0^{-1,p'}(\Omega)$ et que $||-\Delta_p u||_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} = ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Comme conséquence, on a la definition suivante

Définition 1.8 *Soit $f \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$, on dit que u est une solution faible du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u = f & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u(x) = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla\varphi\,dx = \langle -\Delta_p u, \varphi\rangle \qquad \forall\,\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Les inégalités suivantes seront systématiquement utiliser dans ce mémoire.

Lemme 1.3 *Soient $\xi_1,\,\xi_2 \in I\!R^N$, on a*

1) *Si $p \le 2$,*

$$|\xi_1+\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2\rangle \le C(p)|\xi_2|^p, \tag{1.2.6}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2-\xi_1\rangle \ge C(p)\frac{|\xi_2-\xi_1|^2}{(|\xi_2|+|\xi_1|)^{2-p}}. \tag{1.2.7}$$

2) *Si $p > 2$,*

$$|\xi_1+\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2\rangle \le \frac{p(p-1)}{2}(|\xi_1|+|\xi_2|)^{p-2}|\xi_2|^2, \tag{1.2.8}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2-\xi_1\rangle \ge \frac{C(p)}{2^p-1}|\xi_2-\xi_1|^p. \tag{1.2.9}$$

Pour la démonstration, voir [27] et [21].

Pour démontrer l'existence d'une solution faible pour le problème précédent, on utilise souvent les techniques variationnelles et des arguments de minimisation des fonctionnelles convexes. Plus précisément on a le résultat suivant.

Théorème 1.5 *[28] Soient V est un espace de Banach réflexif, $K \subset V$ est un convexe fermé non vide, et $J : K \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction coercive semi-continue inférieurement (s.c.i) faiblement sur K.*
Alors $\inf\limits_{u\in K} J(u) < \infty$ *et* $\exists\, u_0 \in K,\quad J(u_0) = \min\limits_{u\in K} J(u).$
De plus si J est strictement convexe, u_0 est unique. Si J est différentiable au sense de Gateaux et K ouvert alors $J'(u_0) = 0$.

Comme application directe du Théorème précédent on a le résultat suivant qui généralise le Théorème de Lax-Milgram pour le cas non-linéaire

Théorème 1.6 *Soient Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,\infty[$. On suppose que $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq \overline{q} = \frac{Np}{N(p-1)+p}$, alors il existe une solution faible unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & si \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Preuve.
Notons que $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Il est clair que les solutions faibles du problème (1.2.10) sont les points critique de fonctionnelle J définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ par

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega f\,u\,dx.$$

Comme $1 < p < \infty$, alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif,

(i) J est coercive

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega f\,u\,dx, \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \left(\int_\Omega |f|^{\overline{q}}\,dx\right)^{\frac{1}{\overline{q}}}\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}}, \qquad avec \quad p^* = \frac{Np}{N-p} \\ &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - c\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|\nabla u\|_p, \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \\ &\geq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\left(\frac{1}{p}\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\right), \end{aligned}$$

lorsque $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$, on a $J(u) \to \infty$, donc J est coercive.

(ii) J est s.c.i faiblement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$
Soit $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty}\inf \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

et

$$\int_\Omega f\,u_0\,dx = \lim_{n\to\infty}\inf \int_\Omega f\,u_n\,dx,$$

car

$$\left|\int_\Omega f\,u\,dx\right| \leq c\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|\nabla u\|_p \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

donc la forme linéaire $u \mapsto \int_\Omega f\, u\, dx$ est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et

$$\int_\Omega f\, u_0\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\, u_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f\, u_n\, dx,$$

comme conclusion on obtient que

$$\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega f\, u_0\, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f\, u_n\, dx$$

i.e.,

$$J(u_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n),$$

donc résulte que J est s.c.i faiblement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On pose $m = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u)$, alors d'après le Théorème 1.5, il existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $m = J(u_0)$. Il est clair que

$$\langle J'(u_0), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\, \nabla u_0\, \nabla v\, dx - \int_\Omega fv\ dx.$$

Comme $J'(u_0) = 0$, on conclut que u_0 est une solution faible du problème (1.2.10).

(iii) u_0 est unique

Supposons u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ deux solution de (1.2.10), impliquant

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u = f, \\ -\Delta_p\, v = f, \end{cases}$$

il détient

$$-\Delta_p u + \Delta_p v = 0,$$

donc, en utilisant la fonction $u - v$ comme fonction test, il résulte que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\Delta_p u + \Delta_p v)(u - v)\, dx = 0, \\ \Rightarrow\quad &\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v)\, dx = 0. \end{aligned}$$

Si $p > 2$, d'après l'inégalité (1.2.9) on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^p\, dx = 0.$$

Donc $u = v$.
Si $p < 2$, d'après l'inégalité (1.2.7) on obtient que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}} dx = 0.$$

Donc $\nabla u = \nabla v$ et alors $u - v = cont$. Comme $u - v = 0$ sur $\partial\Omega$, alors on conclu que $u = v$. ■

1.3 Inégalité de Picone pour le p-Laplacien et application.

On commence par formuler l'inégalité de Picone ponctuelle pour le cas du $p-$ *Laplacien*.

Théorème 1.7 *Soit $v > 0, u \geq 0$ deux fonctions positive de classe C^1, on pose*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u.$$

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Alors $L(u,v) = R(u,v)$, $L(u,v) \geq 0$ et $L(u,v) = 0$, p.p. dans Ω si $u = kv$ dans chaque composante connexe de Ω.

La démonstration du Théorème 1.7 est simple, elle est basée sur le développement de terme $\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v$.
Pour appliquer l'inégalité de Picone a des équations elliptiques non linéaires on a besoin de démontrer une extension de Théorème 1.7 dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, plus précisément on a le lemme suivant

Lemme 1.4 *Soit $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $v \geq \delta > 0$ dans Ω. alors pour tous $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \geq \int_\Omega (\frac{|u|^p}{v^{p-1}})(-\Delta_p v).$$

Preuve.
Comme $v \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \geq \delta > 0$ dans Ω, alors il existe une suite $\{v_n\}$ des fonctions régulières telle que

$$\left\{\begin{array}{c} v_n \to v \text{ dans } W^{1,p}(\Omega),\ v_n \in C^1(\Omega), \\ v_n \to v,\ p.p.,\ \text{ et } v_n > \frac{\delta}{2} \text{ dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.3.1}$$

Comme conséquence de la continuité de l'opérateur $-\Delta_p$ (de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$) on obtient que $-\Delta_p v_n \to -\Delta_p v$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$. (voir [24]). En utilisant l'identité de Picone a v_n, il résulte

$$|\nabla u|^p \geq \nabla(\frac{u^p}{v_n^{p-1}})|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\Delta_p v_n \frac{u^p}{v_n^{p-1}} &= \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\langle \nabla v_n, \nabla(\frac{u^p}{v_n^{p-1}})\rangle \\ &= p\int_\Omega \frac{u^{p-1}}{v_n^{p-1}}|\nabla v_n|^{p-2}\langle \nabla v_n, \nabla u\rangle - (p-1)\int_\Omega \frac{u^p}{v_n^p}|\nabla v_n|^p. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse sur v_n et par le Théorème de la convergence dominée on conclut que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \geq \int_\Omega (\frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}})u^p, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),\ u \geq 0.$$

∎

Dans un cadre plus général, on a le résultat suivant

Théorème 1.8 *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \geq 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $-\Delta_p v \geq 0$ *est une mesure de Radon bornée,* $v|_{\partial\Omega} = 0$, $v \gneq 0$, *alors*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \geq \int_\Omega (\frac{u^p}{v^{p-1}})(-\Delta_p v).$$

Preuve. D'après le principe de Maximum fort on a $v > 0$ dans Ω. (Voir [33]). On pose $v_m(x) = v(x) + \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Donc $\Delta_p v_m = \Delta_p v$ et $\{v_m\}$ converge dans $W^{1,p}(\Omega)$ et p.p. vers v. Par conséquence, en utilisant le Lemme 1.4, on obtient le résultat pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$. Maintenant en passe au cas général, par densité on déduit l'existence de $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ et $u_n \geq 0$, alors

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \geq \int_\Omega (\frac{-\Delta_p v_n}{v_n^{p-1}})u_n^p = \int_\Omega (\frac{-\Delta_p v}{v_n^{p-1}})u_n^p.$$

Par l'hypothèse imposée sur u et d'après le Lemme de Fatou on obtient le résultat. ∎

1.3.1 Principe de comparaison.

Comme application de Lemme 1.4, on démontre le résultat suivant de comparaison qui généralise le Lemme 3.3 dans [4] pour le cas de *p-laplacien.*

Lemme 1.5 *Soit* f *une fonction positive continue telle que* $\frac{f(u)}{u^{p-1}} \downarrow$ *avec* $1 < p$. *On suppose que* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ *sont tels que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(u), & u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(v), & v > 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Alors $u \geq v$ *dans* Ω.

Preuve. L'inégalité (1.3.2) implique que

$$\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} \geq \frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}.$$

Multiplions par $w = (v^p - u^p)^+$, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}})(v^p - u^p)^+ &\geq \int_\Omega (\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}})(v^p - u^p)^+ \\ &= \int_{[v>u]} (\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}})(v^p - u^p)^+. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse sur f, on conclut que le terme a droite dans l'égalité précédente est positive. D'autre par comme $w = (v^p - u^p)^+$, alors $\nabla w = p(v^{p-1}\nabla v - u^{p-1}\nabla u)\chi_{[v\geq u]}$, donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}})w = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(\frac{w}{u^{p-1}})\rangle - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla(\frac{w}{v^{p-1}})\rangle \\
= &\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \frac{u^{p-1}\nabla w - (p-1)u^{p-2}w\nabla u}{u^{2(p-1)}}\rangle \\
- &\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \frac{v^{p-1}\nabla w - (p-1)v^{p-2}w\nabla v}{v^{2(p-1)}}\rangle \\
= &\int\limits_{\Omega\cap[v>u]} [p\frac{v^{p-1}}{u^{p-1}}|\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle - (p-1)\frac{v^p}{u^p}|\nabla u|^p - |\nabla u|^p] \\
+ &\int\limits_{\Omega\cap[v>u]} [p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\langle \nabla v, \nabla u\rangle - (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - |\nabla v|^p] \\
:= &\int\limits_{\Omega\cap[v>u]} K_1(x)dx + \int\limits_{\Omega\cap[v>u]} K_2(x)dx
\end{aligned}$$

et comme $u > 0$ et $v > 0$ dans Ω, en utilisant l'inégalité de Picone, $K_1 \leq 0$ et $K_2 \leq 0$. Alors

$$\int_\Omega (\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}})w \leq 0$$

et par conséquence,

$$\int_{\Omega\cap[v\geq u]} (\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}})(v^p - u^p) \leq 0.$$

Mais sur l'ensemble $[v > u]$, $\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}} \geq 0$, donc $|[v > u]| = 0$, et on déduit que $v \leq u$. ■

En démontre facilement l'extension suivant de Lemme 1.5

Lemme 1.6 (Principe de comparaison) *Soit $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ tels que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq h(x)f(u), & u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq h(x)f(v), & v > 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

où h est une fonction positive telle que $h \neq 0$. Alors $u \geq v$ dans Ω.

Remarque 1.1 *Le résultat du Lemme 1.6 reste valable si $h(x) = |x|^{-p}$.*

Comme application directe de Lemme 1.6, on obtient le résultat d'unicité suivant

Théorème 1.9 *Le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda h(x) u^q \;\; dans \;\; \Omega, \quad 0 < q < p-1, \\ u > 0 \;\; dans \;\; \Omega, \\ u\mid_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

où h est dans les conditions de théorème précédent, admet une solution unique.

Remarque 1.2 *En général, on a le même résultat d'unicité si on remplace u^q par une fonction de Carathéodory $f(x,u)$ telle que $\frac{f(x,u)}{u^{p-1}}$ est décroissante uniformément en $x \in \Omega$. Pour démontrer l'existence on a besoin d'imposer plus de conditions sur f.*

Chapitre 2

Théorie d'existence et d'unicité des solutions pour des problème elliptiques non linéaires avec données dans L^1

2.1 Introduction

Considérons le problème de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $1 < p < \infty$, f est une fonction mesurable telle que $f \in L^1(\Omega)$.
Il y a trois difficultés associées à l'étude de l'équation (2.1.1), même dans un domaine borné.
1- Trouver le sens pour lequel l'équation précédente est bien définie.
2- La construction d'une solution dans le sens obtenu.
3- Unicité de la solution trouvée.

Notons que le sens le plus général que l'on peut utiliser est le sens de distribution, c.à.d, u vérifie

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla \phi\, dx = \int_\Omega f \phi\, dx \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

sauf que le problème dans ce cadre est qui l'on a pas un argument de construction (l'espace des fonctions test étant trop "petit"), et le deuxième problème est l'unicité de la solution (l'opérateur est non linéaire). Notons que pour le cas $p = 2$, le cadre distributional est un cadre naturel pour étudier des équations avec second membre dans L^1, car $\Delta u = 0$ au sens des distributions implique que u est harmonique au sens classique.

Pour résoudre le problème non linéaire on a besoin d'introduire un nouvel espace $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ dans lequel nous pouvons donner un sens au gradient de u, qui en général n'est pas localement intégrable. Donc l'idée est de travailler avec les troncatures $T_k(u)$ de la solution u et d'élargir l'espace des fonctions test a des fonctions bornées avec un gradient dans un espace de Lebesgue convenable.

Les arguments qu'on va introduire seront applicables à une classe d'équations générale de la forme

$$-\Delta_p\; u = F(x,u) \qquad \text{dans} \qquad D'(\Omega). \tag{2.1.2}$$

où F est une fonction Carathéodory, continue et décroissante en u pour x fixe , et mesurable en x pour u fixe. De plus, $F(x,0) \in L^1(\Omega)$ et $F(x,c) \in L^1_{loc}(\Omega)$ si $c \neq 0$, et si

$$G_c(x) = \sup_{|u|\leq c} |F(x,u)|,$$

alors $G_c \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $c > 0$.
Le but de ce chapitre est de développer le contenu de l'article [5].

2.2 Cadre fonctionnel

Avant de discuter le concept de la solution d'entropie, on va présenter le cadre fonctionnel dans lequel la solution est bien définie.

Nous commençons par l'introduction de l'opérateur de troncature. Pour une constante $k > 0$, nous définissons la fonction $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k, \\ k\, sign(s) & \text{si} \quad |s| > k. \end{cases}$$

Donc pour une fonction mesurable u définie dans Ω, $T_k u$ est définie par $(T_k u)(x) = T_k(u(x))$.

Les espaces fonctionnels que nous utiliserons dans se chapitre sont :
i) $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $k > 0$, la fonction de troncature $T_k(u)$ appartient à $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.
ii) Pour $p \in]1, \infty[$, $\tau^{1,p}_{loc}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ composé par des fonctions u telles que $|\nabla(T_k(u))| \in L^p_{loc}(\Omega)$ pour tout $k > 0$
iii) De même, $\tau^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ composé des fonctions u, telles que, de plus $|\nabla T_k(u)| \in L^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
iv) Enfin, $\tau^{1,p}_0(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,p}(\Omega)$, composé des fonctions qui peuvent être approchées par des fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω dans le sens suivant : une fonction $u \in \tau^{1,p}(\Omega)$ appartient à $\tau^{1,p}_0(\Omega)$, si pour tout $k > 0$, il existe une suite $(\phi_n) \subset C^\infty_0(\Omega)$ tels que

$$\phi_n \to T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

$$\nabla\phi_n \to \nabla T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

Cet espace va jouer un rôle important dans ce qui suit.

On a le lemme suivant donnant quelques propriétés des espaces précédents

Lemme 2.1 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, on a*

1) $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subset \tau^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *et* $W^{1,p}_0(\Omega) \subset \tau^{1,p}_0(\Omega)$,

2) $\tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) = W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$,

3) $\nabla T_k(u) = \nabla u \, \mathbb{1}_{\{|u|<k\}}$,

où $\mathbb{1}_A$ *désigne la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable* $A \subset \mathbb{R}^N$.

Preuve.
1) On a

$$\begin{aligned} u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \;&\Rightarrow\; u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla u \in L^p_{loc}(\Omega), \\ &\Rightarrow\; T_k(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T_k(u) \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \forall\, k > 0, \\ &\Rightarrow\; u \in \tau^{1,p}_{loc}(\Omega), \end{aligned}$$

donc $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subset \tau^{1,p}_{loc}(\Omega)$.
Pour le deuxième point, on a

$$\begin{aligned} u \in W^{1,p}_0(\Omega) \;&\Rightarrow\; u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \exists\, \{\phi_n\} \subset C^\infty_0(\Omega) \quad \text{tel que} \\ &\qquad \begin{cases} \phi_n \to u & \text{dans} \quad L^p(\Omega) \\ \nabla\phi_n \to \nabla u & \text{dans} \quad L^p(\Omega) \end{cases} \\ &\Rightarrow\; u \in \tau^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \exists\, \{\phi_n\} \subset C^\infty_0(\Omega) \quad \text{tel que} \\ &\qquad \begin{cases} \phi_n \to T_k(u) & \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \\ \nabla\phi_n \to \nabla T_k(u) & \text{dans} \quad L^p(\Omega) \end{cases} \quad \forall\, k > 0, \\ &\Rightarrow\; u \in \tau^{1,p}_0(\Omega), \end{aligned}$$

donc $W^{1,p}_0(\Omega) \subset \tau^{1,p}_0(\Omega)$.

2) Comme

$$\begin{aligned} u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) \;&\Rightarrow\; u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega), \\ &\Rightarrow\; u \in \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega), \\ &\Rightarrow\; u \in \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega), \end{aligned}$$

alors $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) \subset \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$.

On a aussi

$$\begin{aligned}
u \in \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) &\Rightarrow u \in \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega),\\
&\Rightarrow T_k(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T_k(u) \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega),\\
&\Rightarrow u \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla u \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega),\\
&\Rightarrow u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{loc}(\Omega),\\
&\Rightarrow u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega),
\end{aligned}$$

alors $\quad \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) \subset W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega).$

Donc $\quad \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) = W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega).$

3) On a

$$T_k(u) = \begin{cases} u & \text{si} \quad |u| \le k,\\ k\frac{u}{|u|} & \text{si} \quad |u| > k, \end{cases}$$

implique

$$\nabla T_k(u) = \begin{cases} \nabla u & \text{si} \quad |u| \le k,\\ 0 & \text{si} \quad |u| > k, \end{cases}$$

donc $\qquad \nabla T_k(u) = \nabla u \, \mathbb{1}_{\{|u|<k\}}.$

■

Notons que si $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, alors ∇u n'est pas défini même au sens des distributions, pourtant on a le lemme suivant qui donne un sens à ∇u.

Lemme 2.2 *[5] Soit $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, il existe une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mesurable unique telle que*

$$\nabla T_k(u) = v \, \mathbb{1}_{\{|u|<k\}} \qquad p.p. \tag{2.2.1}$$

En outre, $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, et alors $v \equiv \nabla u$ dans le sens faible habituel.

Preuve.
On a $\ \nabla T_k(u) = \nabla u \, \mathbb{1}_{\{|u|<k\}}$,
donc pour tout $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ il existe une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mesurable telle que $v \equiv \nabla u$ p.p. et $v \in L^1_{loc}(\Omega)$.
v est unique dans le sens presque partout, car :
Pour tout $k, \varepsilon > 0$, nous avons $T_k(T_{k+\varepsilon}(u)) = T_k(u)$. Par conséquent, nous obtenons dans $\Omega_k = \{|u| < k\}$ l'égalité $\nabla T_{k+\varepsilon} = \nabla T_k$ p.p. Mais, $\displaystyle\bigcup_{k>0} \Omega_k = \Omega$, d'où (2.2.1) est vraie et donc v unique p.p..
Il reste a montrer que $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. En effet, dans ce cas $\nabla T_k(u) \to v$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, donc il nous reste a prouver que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Par contradiction, si $u \notin L^1_{loc}$, il existera une boule fermée $B \subset \Omega$ telle que

$$t_k = \|T_k(u)\|_{L^1(B)} \to \infty \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

par normalisation, $v_k = \frac{T_k(u)}{t_k}$. Alors $v_k \to 0$ p.p., $\|v_k\|_{L^1(B)} = 1$ et $\|\nabla v_k\|_{L^1(B)} \to 0$, contradiction avec la compacité de l'injection de $W^{1,1}(B)$ dans $L^1(B)$.

■

2.3 Solutions au sens d'entropie

Dans ce chapitre nous allons développer le concept de la solution au sens d'entropie qui nous permettra d'étudier les équations elliptiques avec second membre dans L^1. Supposons que $f \in L^1(\Omega)$ et considérons l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rclcc} -\Delta_p u & = & f(x) & \text{dans} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.3.1}$$

Soit $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ une solution de l'équation (2.3.1) dans $D'(\Omega)$, alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \; \nabla u \; \nabla\phi \; dx = \int_\Omega f\phi \, dx \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.3.2}$$

Notons que $f \in L^1(\Omega)$, donc par densité et si on impose des condition de type "Dirichlet homogène", alors on peut prendre $T_k(u-\phi)$, $k > 0$, comme fonction test dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \; \nabla u \; \nabla T_k(u-\phi) \; dx = \int_\Omega T_k(u-\phi) f \; dx,$$

donc

$$\int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p-2} \; \nabla u \; \nabla(u-\phi) \; dx = \int_\Omega T_k(u-\phi) f \; dx. \tag{2.3.3}$$

Notons que chaque terme dans (2.3.3) est bien défini : comme $\phi \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\begin{array}{rcl} |u-\phi| < k & \Rightarrow & |u| - |\phi| < |u-\phi| < k, \\ & \Rightarrow & |u| < k + |\phi|, \\ & \Rightarrow & |u| < k + \|\phi\|_\infty, \\ & \Rightarrow & |u| < \overline{k}, \end{array}$$

où $\overline{k} = k + \|\phi\|_\infty$.

Comme $|\nabla u|^{p-1} \in L^1(\Omega)$, donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u\ \nabla(u-\phi)\ dx \\
&\qquad = \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p}\ dx - \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u\ \nabla\phi\ dx, \\
&\qquad \leq \int_{\{|u|<\bar{k}\}} |\nabla u|^{p}\ dx + \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p-1}\ |\nabla\phi|\ dx, \\
&\qquad \leq \int_{\Omega} |\nabla T_{\bar{k}}(u)|^{p}\ dx + c_1 \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p}\ dx + c_2 \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla\phi|^{p}\ dx, \\
&\qquad \leq c_3 \int_{\Omega} |\nabla T_{\bar{k}}(u)|^{p}\ dx + c_2 \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla\phi|^{p}\ dx, \\
&\qquad \leq C\bigg(\int_{\Omega} |\nabla T_{\bar{k}}(u)|^{p}\ dx + \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla\phi|^{p}\ dx\bigg),
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u\ \nabla(u-\phi)\ dx \leq C\bigg(\int_{\Omega} |\nabla T_{\bar{k}}(u)|^{p}\ dx + \int_{\{|u-\phi|<k\}} |\nabla\phi|^{p}\ dx\bigg). \tag{2.3.4}$$

Puisque $T_{\bar{k}}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ i.e., $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ et $\phi \in L^{\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, le deuxième membre dans (2.3.4) est borné, et donc le premier membre de (2.3.3) est bien défini.

On est en position de donner la definition suivante

Définition 2.1 (Solution au sens d'entropie) *Soit $f \in L^1(\Omega)$, on dit que $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution d'entropie du problème (2.3.1) si (2.3.3) est vérifié pour chaque $\phi \in L^{\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$.*

Commençons par la démonstration de quelques propriétés de la solutions d'entropie.

Lemme 2.3 *Si $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution d'entropie de* (2.3.1) *alors pour tout $k > 0$*

$$\frac{1}{k} \int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^{p}\ dx \leq \int_{\Omega} |f|\, dx = \|f\|_1. \tag{2.3.5}$$

Par conséquent, on obtient l'estimation suivante dans $L^p(\Omega)$

$$\|\nabla T_k(u)\|_p^p \leq k\|f\|_1. \tag{2.3.6}$$

Preuve.
Comme $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow T_k(u) \in L^p(\Omega)$. Si $\phi = 0$ et grâce à (2.3.3) on aura

$$\int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u\ \nabla u\, dx = \int T_k(u)\, f\, dx = \int_{\{|u|<k\}} u\, f\, dx \leq k \int_{\{|u|<k\}} |f|\, dx \leq k \int_{\Omega} |f|\, dx,$$

d'où $\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^{p}\ dx \leq k\, \|f\|_1.$

2.4 Estimations à priori

Avant de démontrer l'existence de la solution d'entropie, nous allons prouver quelques estimations apriori basées sur l'estimation (2.3.6). Ces estimations seront relatives à u et à $|\nabla u|$ dans des espaces de Marcinkiewicz et on peut les considérer comme des clés pour démontrer des résultats de compacité dans des espace $L^q(\Omega)$ avec q convenablement choisi. Le premier résultat principal est le lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit* $1 < p < N$ *et* Ω *une domaine borné de* $\mathbb{R}^N$. *Considérons* $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ *tel que*

$$\frac{1}{k}\int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^p \, dx \leq M, \tag{2.4.1}$$

pour tout $k > 0$. *Alors* $u \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega)$ *avec* $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$. *Plus précisément, il existe* $C = C(N,p) > 0$ *tel que*

$$mes\Big\{|u| > k\Big\} \leq CM^{\frac{N}{N-p}}k^{-p_1}. \tag{2.4.2}$$

Preuve.
Soient $1 < p < N$ et $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$, donc $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et d'après l'inégalité de Sobolev on a

$$\|T_k(u)\|_{p^*} \leq c(N,p)\|\nabla T_k(u)\|_p \qquad \text{où} \qquad p^* = \frac{Np}{N-p},$$

grâce à (2.4.1), on a $\displaystyle\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \leq kM$, i.e. $\|\nabla T_k(u)\|_p^p \leq kM$,

et par conséquence $\|\nabla T_k(u)\|_p \leq (kM)^{\frac{1}{p}}$, donc $\|T_k(u)\|_{p^*} \leq c(N,p)(kM)^{\frac{1}{p}}$.

Pour $0 < \varepsilon \leq k$, nous avons $\Big\{|u| > \varepsilon\Big\} = \Big\{|T_k(u) > \varepsilon|\Big\}$, donc

$$mes\Big\{|u| > k\Big\} \leq \varepsilon^{-p^*}\|T_k(u)\|_{p^*}^{p^*} \leq c_1(N,p)(kM)^{\frac{p^*}{p}}\varepsilon^{-p^*} \leq c_1(N,p)M^{\frac{N}{N-p}}k^{\frac{N}{N-p}}\varepsilon^{-\frac{Np}{N-p}}.$$

Pour $\varepsilon = k$, $mes\Big\{|u| > k\Big\} \leq c_1(N,p)M^{\frac{N}{N-p}}k^{-\frac{N(p-1)}{N-p}}$, on obtient

$$mes\Big\{|u| > k\Big\} \leq Ck^{-p_1},$$

où $C = c_1(N,p)M^{\frac{N}{N-p}}$ et $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$. Donc il résulte que $\phi_u(k) \leq Ck^{-p_1}$, et comme conclusion it résulte que $u \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega)$.

■

Remarque 2.1 *Ces estimations ont été prover par Talenti pour les équations quasilinéaires en utilisant la théorie de rearrangement. La démonstration de [5] que nous avons adapter ici semble être plus élémentaire et plus simple et peut être généralisée pour d'autre classe d'équations.*

Nous prouvons maintenant des estimations sur le gradient de u.

Lemme 2.5 *Soit* $1 < p < N$ *et supposons que* $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ *satisfait* (2.4.1) *pour tout* k. *Alors pour tout* $h > 0$

$$mes\Big\{|\nabla u| > h\Big\} \leq C(N,p)M^{\frac{N}{N-1}}h^{-p_2}, \qquad p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}. \tag{2.4.3}$$

Preuve.
Pour $k, \lambda > 0$, on pose

$$\Phi(k,\lambda) = mes\Big\{|\nabla u|^p > \lambda,\ |u| > k\Big\},$$

d'après le Lemme 2.5 nous avons

$$\Phi(k,0) \leq C(N,p)M^{\frac{N}{N-p}}h^{-p_1}. \tag{2.4.4}$$

Comme la fonction $\lambda \mapsto \Phi(k,\lambda)$ est décroissante, on obtient pour $k, \lambda > 0$ et pour $0 \leq s \leq \lambda$, $\Phi(0,\lambda) \leq \Phi(0,s)$, donc

$$\begin{aligned}\Phi(0,\lambda) \leq \Phi(0,s) \ &\Rightarrow \ \int_0^\lambda \Phi(0,\lambda)ds \leq \int_0^\lambda \Phi(0,s)ds,\\ &\Rightarrow \ \Phi(0,\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(0,s)ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(0,s)ds &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(k,s)ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \big(\Phi(0,s)-\Phi(k,s)\big)ds,\\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(k,0)ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \big(\Phi(0,s)-\Phi(k,s)\big)ds,\\ &\leq \Phi(k,0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \big(\Phi(0,s)-\Phi(k,s)\big)ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(0,\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(0,s)\,ds \leq \Phi(k,0) + \int_0^\lambda \big(\Phi(0,s)-\Phi(k,s)\big)\,ds. \tag{2.4.5}$$

Remarquons que

$$\Phi(0,s) - \Phi(k,s) = mes\big\{|u| < k, |\nabla u|^p > s\big\},$$

et grâce à (2.4.2), on aura

$$\int_0^\infty \big(\Phi(0,s)-\Phi(k,s)\big)ds = \int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^p\,dx \leq kM. \tag{2.4.6}$$

Enfin d'après (2.4.5) et en utilisant (2.4.4) et (2.4.6), nous arrivons à

$$\Phi(0,\lambda) \leq \frac{Mk}{\lambda} + C(N,p)M^{\frac{N}{N-p}}k^{-p_1}. \tag{2.4.7}$$

On pose $P(k) = \frac{Mk}{\lambda} + cM^{\frac{N}{N-p}}k^{-p_1}$, donc en minimisant $P(k)$, en k, on aura à résoudre l'équation $P'(k) = 0$, se qui entraîne que

$$\frac{M}{\lambda} - cp_1 M^{\frac{N}{N-p}}k^{-p_1-1} = 0$$

et donc $k = \left(c\lambda p_1 M^{\frac{p}{N-p}}\right)^{\frac{1}{p_1+1}}$.
Par conséquence,

$$\begin{aligned}
\Phi(0,\lambda) &\leq k\left[\frac{M}{\lambda} + cM^{\frac{N}{N-p}}k^{-p_1-1}\right] \leq k\left[\frac{M}{\lambda} + \frac{M}{\lambda p_1}M^{\frac{N}{N-p}}M^{-\frac{N}{N-p}}\right] \\
&\leq k\frac{M}{\lambda}\left[1+\frac{1}{p_1}\right] \leq \frac{M}{\lambda}\left[1+\frac{1}{p_1}\right]\left(c\lambda p_1 M^{\frac{p}{N-p}}\right)^{\frac{1}{p_1+1}} \\
&\leq \frac{M}{\lambda}\left[1+\frac{1}{p_1}\right]\left(c\lambda p_1 M^{\frac{p}{N-p}}\right)^{\frac{N-p}{p(N-1)}} \leq \frac{M}{\lambda}\left[1+\frac{1}{p_1}\right](cp_1)^{\frac{N-p}{p(N-1)}}\lambda^{-\frac{N-p}{p(N-1)}}M^{\frac{p}{N-p}\frac{N-p}{p(N-1)}} \\
&\leq \left[1+\frac{1}{p_1}\right](cp_1)^{\frac{N-p}{p(N-1)}}\lambda^{-\frac{N(p-1)}{p(N-1)}}M^{\frac{N}{N-1}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(0,\lambda) \leq C(N,p)M^{\frac{N}{N-1}}\lambda^{-\frac{N(p-1)}{p(N-1)}}, \qquad \text{avec} \qquad C(N,p) = \left[1+\frac{1}{p_1}\right](cp_1)^{\frac{N-p}{p(N-1)}},$$

posons $\lambda = h^p$, alors

$$mes\left\{|\nabla u|^p > h^p\right\} \leq C(N,p)M^{\frac{N}{N-1}}h^{-\frac{N(p-1)}{(N-1)}}.$$

et par conséquence

$$mes\left\{|\nabla u| > h\right\} \leq C(N,p)M^{\frac{N}{N-1}}h^{-p_2} \qquad \text{avec} \qquad p_2 = \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

D'où le résultat.

■

2.5 Existence de la solution d'entropie

On est en position de démontrer le résultat principal de ce chapitre, plus précisément on a le théorème suivant

Théorème 2.1 *Soit $1 < p < N$ et Ω un domaine borné, alors il existe u une solution d'entropie du problème (2.1.2) avec $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$. De plus,*

$$u \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega) \qquad et \qquad |\nabla u| \in \mathcal{M}^{p_2}(\Omega), \tag{2.5.1}$$

où $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$ *et* $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$.
Dans le cas $p > 2 - \frac{1}{N}$ *la solution u appartient à* $W_0^{1,q}(\Omega)$ *pour tout* $q < p_2$.

Preuve.
L'idée principale de la démonstration est de procéder par approximation.
Étape 1.

Comme $f \in L^1(\Omega)$ il existe une suite de fonctions $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ tel que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$.

Pour $f_n \in L^\infty(\Omega)$ il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = f_n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Notons que $T_k(u_n) \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour tout $k > 0$, donc en prenant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.5.2) on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n)\, dx = \int_\Omega f_n T_k(u_n)\, dx,$$

donc

$$\int_{\{|u_n|<k\}} |\nabla u_n|^p\, dx \le k\, c,$$

et alors

$$\frac{1}{k} \int_{\{|u_n|<k\}} |\nabla u_n|^p\, dx \le c, \tag{2.5.3}$$

i.e.,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p\, dx \le k\, c, \tag{2.5.4}$$

par conséquence on conclu que $\{\nabla T_k(u_n)\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Donc il existe w_k tel que $T_k(u_n) \rightharpoonup w_k$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour chaque $k > 0$, et $T_k(u_n) \to w_k$ p.p. dans Ω. On pose $w_k \equiv T_k(u)$ dans l'ensemble où $|w_k| < k$, il est clair que u est bien définie car $T_{k+h}(u_n) = T_k(T_h(u_n))$ et par conséquence $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < p^*$.
D'après les lemmes 2.4 et 2.5, on a

$$u_n \in \mathcal{M}^{p_1}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad |\nabla u_n| \in \mathcal{M}^{p_2}(\Omega),$$

avec $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$ et $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$, alors

$$\|u_n\|_{\mathcal{M}^{p_1}(\Omega)} \le C \qquad \text{et} \qquad \|\nabla u_n\|_{\mathcal{M}^{p_2}(\Omega)} \le \overline{C},$$

et comme $L^q(\Omega) \subset \mathcal{M}^q(\Omega) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega)$ pour tout q, $\varepsilon > 0$, d'où

$$\|u_n\|_{L^{p_1-\varepsilon}(\Omega)} \leq C \qquad \text{et} \qquad \|\nabla u_n\|_{L^{p_2-\varepsilon}(\Omega)} \leq \overline{C}.$$

Notons que si $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $p_2 > 1$ et par conséquence $\{u_n\}$ sera bornée dans $W_0^{1,p_2-\varepsilon}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec $p_2 - \varepsilon \geq 1$, donc $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p_2-\varepsilon}(\Omega)$. Donc pour tout $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f_n \varphi \, dx,$$

comme $|\nabla u_n|^{p_2-\varepsilon} \equiv \left(|\nabla u_n|^{p-1}\right)^{\frac{N}{N-1}-\varepsilon}$ et $p-1 < p_2$, alors pour $p - 1 < p_2 - \varepsilon$ $|\nabla u_n|^{p-1} \in L^{\frac{N}{N-1}-\varepsilon}(\Omega)$.
Comme $|\nabla \varphi| \in L^\infty(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, donc passant à la limite quand $n \to \infty$, on trouve que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

Il est clair que $u_n \to u$ fortement dans $L^{\overline{q}}(\Omega)$ tel que $1 \leq \overline{q} < \overline{p}^*$ avec $\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}} > 1$ où $\overline{p} = p_2 - \varepsilon$.
Étape 2. Pour analyser le cas général $1 < p$, nous commençons par démontrer que $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$.
On pose $\nabla T_k(u) = \nabla w_k$, il est clair que $\nabla T_k(u)$ est bien définie car $w_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pour passer à la limite en k on va commencer par montrer que ∇u_n converge vers ∇u localement en mesure. Pour le prouver nous montrons que $\{\nabla u_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure.
Soit t et $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned}\{|\nabla u_n - \nabla u_m| > t\} \;\; &\subset \;\; \{|\nabla u_n| > A\} \cup \{|\nabla u_m| > A\} \cup \{|u_n - u_m| > k\} \\ &\cup \;\; \{|u_n - u_m| \leq k, \; |\nabla u_n| \leq A, \; |\nabla u_m| \leq A, \; |\nabla u_n - \nabla u_m| > t\}.\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Nous choisissons A d'abord assez grand tel que

$$mes\{|\nabla u_n| > A\} \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N},$$

(ceci est possible par le Lemme 2.5).

Pour estimer le dernier terme dans (2.5.5), on utilise les inégalités algébriques suivantes.

Pour tout $\xi, \; \eta \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\langle |\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta \; , \; \xi - \eta \rangle \geq 0,$$

de plus si $\xi \neq \eta$ alors
$$\langle |\xi|^{p-2}\,\xi - |\eta|^{p-2}\,\eta \ , \ \xi - \eta\rangle > 0,$$
et si $|\xi| < A,\ |\eta| < A$ et $|\xi - \eta| > t$, alors il existe $\mu > 0$ tel que
$$\langle |\xi|^{p-2}\,\xi - |\eta|^{p-2}\,\eta \ , \ \xi - \eta\rangle \geq \mu.$$
Sachant que $-\Delta_p\ u_n = f_n$ et $-\Delta_p\ u_m = f_m$, donc par soustraction et en utilisant $T_k(u_n - u_m)$ comme fonction test, on obtient
$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n-u_m|\leq k\}} \langle\ |\nabla u_n|^{p-2}\,\nabla u_n \ &- \ |\nabla u_m|^{p-2}\,\nabla u_m\ ,\ \nabla u_n - \nabla u_m\ \rangle\ dx \\ &= \ \int_\Omega (f_n - f_m)\ T_k(u_n - u_m)\ dx\ \leq\ 2ck.\end{aligned}$$
D'après le Lemme 2.4, on a
$$\begin{aligned}&\ mes\big\{|u_n - u_m| \leq k,\ |\nabla u_n| \leq A,\ |\nabla u_m| \leq A,\ |\nabla u_n - \nabla u_m| > t\big\} \\ \leq&\ mes\{|u_n - u_m| \leq k,\ (|\nabla u_n|^{p-2}\,u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\,u_m).(\nabla u_n - \nabla u_m) \geq \mu\} \\ \leq&\ \frac{1}{\mu}\int_{\{|u_n-u_m|\leq k\}} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\,u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\,u_m\ ,\ \nabla u_n - \nabla u_m\rangle\,dx \qquad (2.5.6) \\ \leq&\ \frac{1}{\mu}2ck \leq \varepsilon,\end{aligned}$$
si k est assez petit, tel que $k \leq \frac{\mu\varepsilon}{2c}$.

Donc on fixant A et k, si n_0 assez grand, on a pour $n,\ m \geq n_0$, $mes\{|u_n - u_m| > k\} \leq \varepsilon$, et alors $mes\{|\nabla u_n - \nabla u_m| > k\} \leq 2\ \varepsilon$.

Donc $\{\nabla u_n\}$ converge localement en mesure vers une fonction v et comme conséquence p.p. dans Ω. Puisque $\{\nabla T_k(u_n)\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et $\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u)$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, on déduit alors que $v = \nabla u$ p.p.. Notons que en général $v \notin (L^1(\Omega))^N$. Il est clair que si $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $v \notin (L^1(\Omega))^N$, et donc $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et d'après le Lemme 2.2 on déduit $\nabla u = v$ *p.p.*.
Et par conséquence $u \in \tau_0^{1,1}(\Omega)$.
Pour voir que $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$, on considère $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que
$$\|\nabla\phi_n - \nabla T_k(u_n)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|\phi_n - T_k(u_n)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \frac{1}{n}.$$
Nous avons alors
$$\nabla\phi_n \longrightarrow \nabla T_k(u) \qquad \text{fortement dans} \quad L^p(\Omega)$$
et
$$\phi_n \longrightarrow T_k(u) \qquad \text{fortement dans} \quad L^q_{loc}(\Omega) \quad \text{pour} \quad q < p^*.$$
Comme conclusion on obtient que ϕ_n converge fortement vers $T_k(u)$ et par conséquence $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$.

Étape 3. Dans cette étape on va démontrer la convergence forte des troncatures dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, c.à.d pour $k > 0$ fixé on a $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Notons que $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
Soient $k,\ h > 0$ tel que $h > k > 0$, on suppose

$$w_n = T_{2k}\big(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)\big).$$

En prenant w_n comme fonction test dans (2.5.2), il résulte

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx = \int_\Omega f_n\ w_n\ dx,$$

on pose $I = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx$, lorsque $k \to \infty$ et $h \to \infty$ on a $\displaystyle\int_\Omega f_n\ w_n\ dx \to 0$, donc $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx \to 0$.

On pose $M = 4k + h$. Si $|u_n| > M$, $\nabla w_n = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\{|u_n|<M\}} |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx,\\
&= \int_{\{|u_n|<k\}} |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx\ + \int_{\{k<|u_n|<M\}} |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx,\\
&= \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\ \nabla T_k(u_n)\ \nabla\big(T_k(u_n) - T_k(u)\big)\ dx\\
&+ \int_{\{k<|u_n|<M\}} |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx.
\end{aligned}$$

Notons que
1-si $k < |u_n| \leq h$ alors $\nabla w_n = \nabla T_k(u)$
et
2-si $h < |u_n| < M$ alors $\nabla w_n = \nabla T_k(u)$,
d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\{k<|u_n|<M\}} |\nabla u_n|^{p-2}\ \nabla u_n\ \nabla w_n\ dx &= \int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\ \nabla T_M(u_n)\ \nabla T_k(u)\ dx,\\
&\geq -\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}\ |\nabla T_k(u)|\ dx,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
I &\geq \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\ \nabla T_k(u_n)\ \nabla\big(T_k(u_n) - T_k(u)\big)\ dx\\
&- \int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1}\ |\nabla T_k(u)|\ dx.
\end{aligned}$$

Comme $\{|\nabla T_M(u_n)|^{p-1}\}$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $|\nabla T_k(u)|\mathbb{1}_{\{|u_n|>k\}}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et $|\nabla T_k(u)|\mathbb{1}_{\{|u_n|>k\}} \to 0$ fortement dans $L^p(\Omega)$ quand $k \to \infty$, on obtient que

$$\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla T_M(u_n)|^{p-1} \, |\nabla T_k(u)| \; dx \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad k \to \infty.$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \, \nabla T_k(u_n) \; \nabla\big(T_k(u_n) - T_k(u)\big) \; dx \\ &= \int_\Omega \Big(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \, \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \, \nabla T_k(u)\Big)\big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big) \; dx \\ &+ \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p-2} \, \nabla T_k(u) \; \big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big) \; dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{p-2} \, \nabla T_k(u) \; \big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big) \; dx \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

alors

$$J = \int_\Omega \Big(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \, \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \, \nabla T_k(u)\Big)\big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big) \; dx + o(1).$$

Donc

$$\begin{aligned} I &\geq \int_\Omega \Big(|\nabla T_k(u_n)|^{p-2} \, \nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2} \, \nabla T_k(u)\Big)\big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big) \; dx + o(1), \\ &\geq c \int_\Omega \big|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big|^p \; dx + o(1) \qquad \text{si} \quad p \geq 2 \end{aligned}$$

et

$$I \geq C(p) \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}} dx + o(1) \qquad \text{si} \quad p < 2.$$

Il vient alors que

$$\int_\Omega \big|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big|^p \; dx \leq o(1) + \int_\Omega f_n w_n \; dx \qquad \text{si} \quad p \geq 2,$$

et

$$C(p) \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)| + |\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}} dx \leq o(1) + \int_\Omega f_n w_n \qquad \text{si} \quad p < 2.$$

Par conséquence

$$\int_\Omega \big|\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big|^p \; dx \to 0 \qquad \text{si} \quad p \geq 2,$$

et
$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)|+|\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}}dx \to 0 \qquad \text{si} \quad p<2.$$
Pour le deuxième cas on a
$$\int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\right|^p\,dx = \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^p}{(|\nabla T_k(u)|+|\nabla T_k(u_n)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}(|\nabla T_k(u)|+|\nabla T_k(u_n)|)^{\frac{p(2-p)}{2}}dx$$
$$\leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)|^2}{(|\nabla T_k(u)|+|\nabla T_k(u_n)|)^{2-p}}dx\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(\int_\Omega (|\nabla T_k(u_n)|^p+|\nabla T_k(u)|^p)dx\Big)^{\frac{2-p}{2}}.$$
Donc pour $p<2$,
$$\int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\right|^p\,dx \to 0 \text{ pour } n\to\infty.$$
Comme conclusion on obtient que $T_k(u_n)\to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k>0$.

Étape 4. Pour compléter la preuve il reste à montrer que u est une solution d'entropie. Rappelons que
$$\begin{cases} -\Delta_p\, u_n = f_n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$
Soit $v\in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout k fixé >0, on a
$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\,\nabla u_n\,\nabla T_k(u_n-v)\,dx = \int_\Omega f_n T_k(u_n-v)\,dx,$$
Comme $u_n \longrightarrow u$ *p.p.* dans Ω, et $f_n\to f$ dans $L^1(\Omega)$.
Donc $\displaystyle\int_\Omega f_n T_k(u_n-v)\,dx \to \int_\Omega f\;T_k(u-v)\,dx$ pour $n\to\infty$.

Comme $v\in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une constante positive $c>0$ tel que
$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\,\nabla u_n\,\nabla T_k(u_n-v)\,dx = \int_{\{|u_n|\leq c\}} |\nabla T_c(u_n)|^{p-2}\,\nabla T_c(u_n)\,\nabla T_k(u_n-v)\,dx.$$
Notons qu'il suffit de prendre $c\geq k+||v||_\infty$. Comme $T_k(u_n)\to T_k(u)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors on conclut que
$$\int_{\{|u_n|\leq c\}} |\nabla T_c(u_n)|^{p-2}\,\nabla T_c(u_n)\,\nabla T_k(u_n-v)\,dx \to \int_{\{|u|\leq c\}} |\nabla T_c(u)|^{p-2}\,\nabla T_c(u)\,\nabla T_k(u-v)\,dx$$
pour $n\to\infty$. Par conséquence et pour $n\to\infty$ on obtient que
$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\,\nabla T_k(u-v)\,dx = \int_\Omega f T_k(u-v)\,dx.$$
Donc u est une solution d'entropie du problème (2.1.2).

■

2.6 Unicité de la solution au sens d'entropie

Nous traitons ici la question de l'unicité de solutions d'entropie $u \in \tau_0^{1,p}(\Omega)$ pour le problème (2.3.1), notons que apriori u vérifie (2.3.3) pour chaque $\phi \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant

Théorème 2.2 *Soit u_1 et u_2 deux fonctions dans $\tau_0^{1,p}(\Omega)$, tels que u_1 et u_2 sont des solutions d'entropie du problème*

$$-\Delta_p \; u = f(x)$$

alors $u_1 = u_2$.

Preuve.
Notons que $f \in L^1(\Omega)$, on substituant dans la relation (2.3.3) avec des fonction test $T_h(u_1)$ et $T_h(u_2)$ et par addition en obtient que

$$\int_{\{|u_1 - T_h(u_2)| < k\}} |\nabla u_1|^{p-2} \; \nabla u_1 \; \nabla(u_1 - T_h(u_2)) \; dx = \int_\Omega f T_k(u_1 - T_h(u_2)) \; dx,$$

$$\int_{\{|u_2 - T_h(u_1)| < k\}} |\nabla u_2|^{p-2} \; \nabla u_2 \; \nabla(u_2 - T_h(u_1)) \; dx = \int_\Omega f T_k(u_2 - T_h(u_1)) \; dx.$$

Par combinant les deux résultats nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u_1 - T_h(u_2)| < k\}} |\nabla u_1|^{p-2} \; \nabla u_1 \; \nabla(u_1 - T_h(u_2)) \; dx \\ &\qquad + \int_{\{|u_2 - T_h(u_1)| < k\}} |\nabla u_2|^{p-2} \; \nabla u_2 \; \nabla(u_2 - T_h(u_1)) \; dx \qquad (2.6.1) \\ &\qquad = \int_\Omega f\left(T_k(u_1 - T_h(u_2)) + T_k(u_2 - T_h(u_1))\right) dx. \end{aligned}$$

La conclusion $u_1 = u_2$ sera atteinte après le passage à la limite $h \to \infty$ dans cette formule. Soit

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{|u_1 - T_h(u_2)| < k\}} |\nabla u_1|^{p-2} \; \nabla u_1 \; \nabla(u_1 - T_h(u_2)) \; dx \\ &+ \int_{\{|u_2 - T_h(u_1)| < k\}} |\nabla u_2|^{p-2} \; \nabla u_2 \; \nabla(u_2 - T_h(u_1)) \; dx. \end{aligned}$$

On pose

$$A_0 = \left\{ x \in \Omega : |u_1 - u_2| < k, \; |u_1| < h, \; |u_2| < h \right\}.$$

Dans A_0 le premier membre de (2.6.1) est réduit au terme suivant

$$I_0 = \int_{A_0} \big(|\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big)\ \big(\nabla u_1 - \nabla u_2\big)\ dx.$$

Soit maintenant

$$A_1 = \big\{x \in \Omega : |u_1 - T_h(u_2)| < k,\ |u_2| \geq h\big\},$$

donc

$$\int_{A_1} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla(u_1 - T_h(u_2))\ dx = \int_{A_1} |\nabla u_1|^p\ dx \geq 0,$$

et sur l'ensemble

$$A_2 = \big\{x \in \Omega : |u_1 - T_h(u_2)| < k,\ |u_2| < h,\ |u_1| \geq h\big\},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla(u_1 - T_h(u_2))\ dx &= \int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ (\nabla u_1 - \nabla u_2)\ dx, \\ &\geq -\int_{A_2} \big|\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx.\end{aligned}$$

De la même façon, on peut définir les ensemble A_1' et A_2' comme suivant

$$A_1' = \{x \in \Omega : |u_2 - T_h(u_1)| < k,\ |u_1| \geq h\},$$

et

$$A_2' = \{x \in \Omega : |u_2 - T_h(u_1)| < k,\ |u_1| < h, |u_2| \geq h\}.$$

Alors le deuxième terme de (2.6.1) peut s'écrire comme somme de

$$\int_{A_1'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big(\nabla u_2 - \nabla T_h(u_1)\big)\ dx = \int_{A_1'} |\nabla u_2|^p\ dx \geq 0$$

et

$$\begin{aligned}\int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big(\nabla u_2 - \nabla T_h(u_1)\big)\ dx &= \int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big(\nabla u_2 - \nabla u_1\big)\ dx, \\ &\geq -\int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\ \nabla u_1\ dx.\end{aligned}$$

Par conséquence on conclut que

$$\begin{aligned} I &\geq I_0 + \int_{A_1} |\nabla u_1|^p\ dx - \int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx \\ &+ \int_{A_1'} |\nabla u_2|^p\ dx - \int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\ \nabla u_1\ dx, \\ &\geq I_0 - \left(\int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx + \int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\ \nabla u_1\ dx\right), \\ &\geq I_0 - I_3,\end{aligned}$$

où

$$I_3 = \int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx + \int_{A_2'} |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\ \nabla u_1\ dx.$$

Le premier terme de I_3 peut être estimé par

$$\begin{aligned}
\int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx &\leq \int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-1}\ |\nabla u_2|\ dx, \\
&\leq \left(\int_{A_2} |\nabla u_1|^{p}\ dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{A_2} |\nabla u_2|^{p}\ dx\right)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \|\nabla u_1\|^{p-1}_{L^p(\{h\leq|u_1|\leq h+k\})} \|\nabla u_2\|_{L^p(\{h-k\leq|u_2|\leq h\})}.
\end{aligned}$$

Comme
$\|\nabla u_1\|^{p-1}_{L^p(\{h\leq|u_1|\leq h+k\})} \|\nabla u_2\|_{L^p(\{h-k\leq|u_2|\leq h\})} \to 0$ quand $h \to \infty$ pour tout $k > 0$, il résulte que $\int_{A_2} |\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1\ \nabla u_2\ dx$ converge vers 0 quand $h \to \infty$ pour tout $k > 0$. De la même façon on obtient la même conclusion pour le deuxième terme de I_3. Donc on conclut que I_3 tend vers 0 quand $h \to \infty$.

Concernant le deuxième membre de (2.6.1), sachant que

$$T_k(u_1 - T_h(u_2)) + T_k(u_2 - T_h(u_1)) \to 0 \ \text{ p.p. dans } \ \Omega \ \text{ pour } \ h \to \infty$$

$$|T_k(u_1 - T_h(u_2)) + T_k(u_2 - T_h(u_1))| \leq 2k$$

et que $f \in L^1(\Omega)$, donc en utilisant le Théorème de la convergence dominée on obtient que

$$\int_\Omega f(T_k(u_1 - T_h(u_2)) + T_k(u_2 - T_h(u_1)))\, dx \to 0 \text{ quand } h \to \infty \text{ pour chaque } k > 0.$$

En combinant les estimations précédentes il résulte que

$$\int_{A_0(h,k)} \big(|\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big)\big(\nabla u_1 - \nabla u_2\big)\ dx \leq \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to \infty$ pour tout k fixe > 0. Puisque $A_0(h,k)$ converge vers

$$\{x \in \Omega : |u_1 - u_2| < k\},$$

nous concluons que

$$\int_{\{|u_1-u_2|<k\}} \big(|\nabla u_1|^{p-2}\ \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\ \nabla u_2\big)\big(\nabla u_1 - \nabla u_2\big)\ dx \leq 0.$$

Comme

$$\lambda\|\nabla u_1-\nabla u_2\|^p_{L^p(\{|u_1-u_2|<k\})} \leq \int_{\{|u_1-u_2|<k\}} \big(|\nabla u_1|^{p-2}\,\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\,\nabla u_2\big)\big(\nabla u_1-\nabla u_2\big)dx$$

si $p > 2$ et

$$\int_{\{|u_1-u_2|<k\}} \frac{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}}dx \leq$$
$$\int_{\{|u_1-u_2|<k\}} \big(|\nabla u_1|^{p-2}\,\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\,\nabla u_2\big)\big(\nabla u_1 - \nabla u_2\big)dx$$

pour $p < 2$, alors $\nabla u_1 - \nabla u_2 = 0$ p.p. et par conséquence $T_k(u_1) = T_k(u_2)$ pour tous $k > 0$. Il est clair que $u_1 - u_2 = c$, en utilisant le fait que $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$, alors on conclut que $u_1 = u_2$ p.p.. D'où le résultat.

■

2.7 Quelques généralisations

La notion de la solution d'entropie peut être définie pour une très grande classe d'opérateurs elliptique non linéaire, par exemple si on considère le problème suivant

$$-\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u)) = F(x, u)$$

avec $a(x, s, \xi) : I\!R^N \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant

(**H1**) : $|a(x, s, \xi)| \leq c(|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + k(x)),\ p.p.\ \ x \in \Omega,\ (s, \xi) \in I\!R^N \times I\!R,$

(**H2**) : $a(x, s, \xi)\xi \geq \lambda|\xi|^p,\ p.p.\ \ x \in \Omega,\ \ (s, \xi) \in I\!R^N \times I\!R,$

(**H3**) : F est une fonction Carathéodory, continue et décroissante en u pour x fixe et mesurable en x pour u fixe. De plus, $F(x, 0) \in L^1(\Omega)$ et $F(x, c) \in L^1_{loc}(\Omega)$ si $c \neq 0$, et si

$$G_c(x) = \sup_{|u|\leq c} |F(x, u)|,$$

$G_c \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $c > 0$.

Alors sous les conditions (**H1**), (**H2**) et (**H3**) on peut définir la notion de la solution au sens d'entropie. Concernant l'unicité de la solution, en général le résultat n'est pas vrai mais si $\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u)) = \Delta_p u$, alors on peut démontrer l'unicité de la solution au sens d'entropie.

Chapitre 3

Existence de solution d'entropie pour quelques problèmes elliptiques non linéaires avec une dépendance en gradient.

Dans ce chapitre on va étudier une classe du problèmes elliptiques non linéaires ou il y a une dépendance par rapport au gradient, notre but est de démontrer un résultat d'existence général pour des données dans $L^1(\Omega)$.

3.1 Existence et unicité de la solution positive de l'équation $-\Delta_p\ u + |\nabla u|^p = f$.

Dans cette section on va se concentrer sur le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p\ u + |\nabla u|^p = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ u \geq 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ et f une fonction positive appartenant à $L^1(\Omega)$.

• **Existence**

On procède par approximation, dans une première étape on va considerer f régulière($f \in L^\infty(\Omega)$) et après on passe à la limite on utilisant des résultats de compacité.

Étape 1. Pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$, soit $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta_p\ w_n + \frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} = f & \text{dans} & \Omega, \\ \\ w_n \geq 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \\ w_n = 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1.2}$$

Notons que l'existence de w_n est une conséquence facile du résultat de Leray-Lions, voir [23]. Donc $-\Delta_p\ w_n \leq f$ dans Ω. Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta_p\ v = f & \text{dans} & \Omega, \\ \\ v \geq 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \\ v = 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1.3}$$

Il est clair que $w_n \leq v \in L^\infty(\Omega)$, d'où $\|w_n\|_\infty \leq M$.
On utilisant w_n comme une fonction test dans (3.1.2), on obtient

$$-\int_\Omega \Delta_p\ w_n\ w_n\ dx + \int_\Omega \frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ w_n\ dx = \int_\Omega f\ w_n\ dx,$$

ce qui implique que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p\ dx \leq \int_\Omega f\ w_n\ dx \leq \int_\Omega f\ v\ dx \leq C,$$

donc $\{\nabla w_n\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et alors $\{w_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$,
Donc $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et par suite $w_n \rightharpoonup w$ p.p. et $w \in L^\infty(\Omega)$, de plus $0 \leq w \leq v \leq M \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On considère $\phi(s) = se^{\gamma s^2}$ avec $\gamma > \frac{1}{8}$ (on remarquant $\phi(0) = 0$), et en prenant $\phi(w_n - w)$ comme une fonction test dans (3.1.2) on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n\ \nabla\phi(w_n - w)\ dx + \int_\Omega \frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx = \int_\Omega f\ \phi(w_n - w)\ dx.$$

On pose

$$I_1 = \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n\ \nabla\phi(w_n - w)\ dx,$$

$$I_2 = \int_\Omega \frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx,$$

$$I = \int_\Omega f\ \phi(w_n - w)\ dx.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a $|\phi(w_n - w)| \leq \overline{M}$ puisque ϕ est bornée par rapport à la topologie faible $*$ dans $L^\infty(\Omega)$ alors $\phi(w_n - w) \to 0$ p.p. et donc $\displaystyle\int_\Omega f\ \phi(w_n - w)\ dx \to 0$, d'où $I \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n\ \nabla\phi(w_n - w)\ dx,\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w)\ \phi'(w_n - w)\ dx\\
&+ \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx,
\end{aligned}$$

Comme $\{|\nabla w|^{p-1}\}$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\nabla(w_n - w) \to 0$ et $\phi'(w_n - w) \to 1$, on conclut que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où

$$I_1 \geq c' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx + o(1).$$

Notons que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Omega \frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx\\
&\leq \int_\Omega |\nabla w_n|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq \int_\Omega |\nabla(w_n - w) + \nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq c'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx\\
&+ c'' \int_\Omega |\nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,
\end{aligned}$$

Il est clair que, en utilisant le Théorème de la convergence dominée, on obtient que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors

$$\int_\Omega \frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx \leq c'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx + o(1).$$

Donc quand $n \to \infty$ et pour $p > 2$,

$$\begin{aligned}
I &\geq c' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx - c'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx + o(1),\\
&\geq c''' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \Big[\phi'(w_n - w)\ - |\phi(w_n - w)|\Big]\ dx + o(1),
\end{aligned}$$

Rappelons que $I \to 0$, donc

$$o(1) \geq c''' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \Big[\phi'(w_n - w) \ - \ |\phi(w_n - w)|\Big] \ dx.$$

Comme $\phi(s) = se^{\gamma s^2}$, alors $\phi'(s) = e^{\gamma s^2} + 2\gamma s^2 e^{\gamma s^2}$, et

$$\phi'(s) - |\phi(s)| = e^{\gamma s^2}\Big[2\gamma s^2 - |s| + 1\Big] \geq c,$$

d'où

$$o(1) \geq C \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \ dx = C\|\nabla(w_n - w)\|_p^p.$$

alors, $\|w_n - w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq o(1)$, implique $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_n - w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$.
Pour $p < 2$, on a besoin de faire quelques calcul fine. Notons que

$$I_1 \geq \int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2} \ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w) \ \phi'(w_n - w) \ dx.$$

On utilisant le même calcul pour la fonction test $\phi((w_n - w)_+)$ on conclut que

$$\int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2} \ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w)_+ \ \phi'((w_n - w)_+) \ dx \leq o(1).$$

De la même façons, choisissons comme fonction test $\phi((w_n - w)_-)$, il résulte que

$$\int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2} \ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w)_- \ \phi'((w_n - w)_-) \ dx \leq o(1).$$

Donc, en utilisant le fait que $\phi'(w_n - w) \geq c > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big|(\nabla w_n - \nabla w)_+\big|^p \ \phi'((w_n - w)_+)dx = \\
&\int_{w_n \geq w} \frac{|\nabla w_n - \nabla w|^p}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \phi'(w_n - w)dx \\
\leq &\Big(\int_{w_n \geq w} \frac{|\nabla w_n - \nabla w|^2}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{2-p}} \phi'(w_n - w)dx\Big)^{\frac{p}{2}} \Big(\int_{w_n \geq w} (|\nabla w_n|^p + |\nabla w|^p)\phi'(w_n - w)dx\Big)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq o(1).
\end{aligned}$$

De la même façons on obtient que

$$\int_\Omega \big|(\nabla w_n - \nabla w)_+\big|^p \ \phi'((w_n - w)_+)dx \leq o(1).$$

Donc pour $p < 2$, il résulte que

$$\int_\Omega \big|\nabla w_n - \nabla w\big|^p dx \leq o(1)$$

et alors $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour le cas $p > 2$, si γ est grand on conclut que $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
En particulier on déduit

$$\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \to |\nabla w|^p \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

par le Théorème de convergence dominée

$$\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \to |\nabla w|^p \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Comme $-\Delta_p\ w_n \to -\Delta_p\ w$ au sens de distributions, on conclut que w satisfait le problème

$$-\Delta_p\ w + |\nabla w|^p = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad w \geq 0 \qquad \text{et} \qquad w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Donc on déduit que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ $(f \geq 0)$, il existe une solution faible w positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p\ w + |\nabla w|^p = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ w \geq 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Donc la première partie est prouvée.

Étape 2. Il reste à montrer que pour tout $f \in L^1(\Omega)$ $(f \geq 0)$, il existe une solution du problème (3.1.1).
Comme $f \in L^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ tel que $f_m \nearrow f$ dans $L^1(\Omega)$.
Grâce à la première étape pour tout $f_m \in L^\infty(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$, il existe une solution w_m du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p\ w_m + |\nabla w_m|^p = f_m & \text{dans} \quad \Omega, \\ w_m \geq 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ w_m = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

On décompose la preuve en trois parties.

$1^{ère}$ **partie.** Convergence des troncatures.
On multipliant (3.1.5) par $T_k(w_m)$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_k(w_m)\ dx + \int_\Omega |\nabla w_m|^p\ T_k(w_m)\ dx = \int_\Omega f_m\ T_k(w_m)\ dx,$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx + \int_\Omega |\nabla w_m|^p\ T_k(w_m)\ dx = \int_\Omega f_m\ T_k(w_m)\ dx, \tag{3.1.6}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_m|^p\ dx &\leq \int_{w_m\leq k} |\nabla w_m|^p\ dx + \int_{w_m\geq k} |\nabla w_m|^p\ dx\\
&\leq \int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx + \int_{w_m\geq k} |\nabla w_m|^p\ T_k(w_m)\ dx\\
&\leq k\int_\Omega f_m\ dx,\\
&\leq ck,
\end{aligned}$$

par conséquence il résulte que

$$\int_\Omega |\nabla w_m|^p\ dx \leq ck,$$

et par suite

$$w_m \rightharpoonup w \qquad \text{faiblement dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

D'après (3.1.6), on a

$$\int_{w_m<k} |\nabla w_m|^p\ dx + k\int_{w_m>k} |\nabla w_m|^p\ dx + \int_{w_m<k} |\nabla w_m|^p\ w_m\ dx \leq k\int_\Omega f_m\ dx \leq c(k),$$

donc

$$\int_{w_m<k} |\nabla w_m|^p\ dx + k\int_{w_m>k} |\nabla w_m|^p\ dx \leq c(k). \tag{3.1.7}$$

Nous affirmons que $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p\ dx = 0$.

Pour démontrer l'affirmation on va choisir comme fonction test $T_1(G_{k-1}(w_m))$ où $G_k(w_m) = w_m - T_k(w_m)$ et donc

$$T_1(G_k(w_m)) = \begin{cases} w_m - T_k(w_m) & \text{si} \quad |w_m - T_k(w_m)| \leq 1\\[2ex] \frac{w_m - T_k(w_m)}{|w_m - T_k(w_m)|} & \text{sinon}\end{cases}$$

c.à.d

$$T_1(G_{k-1}(w_m)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |w_m| \leq k-1\\ w_m - k + 1 & \text{si} \quad k-1 < |w_m| < k\\ 1 & \text{si} \quad |w_m| \geq k\end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx \quad &+ \quad \int_\Omega |\nabla w_m|^p\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx\\
&= \int_\Omega f_m\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx,
\end{aligned}$$

comme $w_m \geq 0$ on obtient que

$$\int_{\{k-1<w_m<k\}} |\nabla w_m|^p \, dx + \int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \, dx \leq \int_\Omega f_m \; T_1(G_{k-1}(w_m)) \, dx,$$

et par conséquent

$$\int_{\{k-1<w_m<k\}} |\nabla w_m|^p \, dx + \int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \, dx \leq \int_{\{w_m>k\}} f_m \, dx \leq \int_\Omega f_m \, dx < c. \quad (3.1.8)$$

Notons que $\{w_m\}_{m\in I\!N}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc $w_m \to w$ p.p. dans Ω, et comme conséquence on conclut que $\lim\limits_{k\to\infty} mes\{w_m \geq k\} = 0$. En utilisant le fait que $f_m \to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$, il résulte que

$$\int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \leq \int_{\{w_m>k\}} f_m \, dx.$$

Passant à la limite en m et k, on conclut que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \, dx = 0. \quad (3.1.9)$$

Donc l'affirmation est prouvée.

$2^{ème}$ **partie.** Convergence forte des troncatures.

On est en mesure maintenant de démontrer la convergence forte des $T_k(w_m)$. On va donner deux démonstrations différentes, l'une étant basée sur des estimations a priori qui est valable pour $p \geq 2$ et qui peut être généraliser pour tous p, en utilisant des techniques Porretta-Segura. La deuxième méthode est plus générale, elle est basée sur des résultats de [18].

On commence par le cas $p \geq 2$. Choisissons $\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)$ comme fonction test avec $\phi(s) = se^{\gamma s^2}$ ($\gamma > 0$ à déterminer), donc on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2} \, \nabla w_m \; \nabla\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx + \int_\Omega |\nabla w_m|^p \; \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx \\ &= \int_\Omega f_m \; \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2} \, \nabla w_m \; \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \; \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx \\ &+ \int_\Omega |\nabla w_m|^p \; \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx, \\ &= \int_\Omega f_m \; \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \, dx. \end{aligned}$$

On pose

$$J_1 = \int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx,$$

il découle que

$$\begin{aligned} J_1 \quad &= \quad \int_{\{w_m<k\}} |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla\big(w_m - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx \\ &- \quad \int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_k(w)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx, \end{aligned}$$

puisque $|\nabla w_m|^{p-1}$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\lim\limits_{m\to\infty} \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) = 1$ et puisque $w_m \to w$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il résulte que

$$\int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^{p-2}\,\nabla w_m\,\nabla T_k(w)\,\phi'\big(T_k(w_m){-}T_k(w)\big)\,dx \to \int_{\{w>k\}} |\nabla w|^{p-2}\,\nabla w\,\nabla T_k(w)\,dx$$

quand $m \to \infty$. Maintenant, comme chaque terme est borné dans la dernière intégrale, alors en passant à la limite quand $k \to \infty$, on obtient que

$$-\int_{\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_k(w)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx \to o(1).$$

alors

$$\begin{aligned} J_1 \quad &= \quad \int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^{p-2}\ \nabla T_k(w_m)\ \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx, \\ &= \quad \int_\Omega \big(|\nabla T_k(w_m)|^{p-2}\ \nabla T_k(w_m)\ \ - |\nabla T_k(w)|^{p-2}\ \nabla T_k(w)\big)\ \big(\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)\big)\ \phi'\ dx, \\ &+ \quad \int_\Omega |\nabla T_k(w)|^{p-2}\ \nabla T_k(w)\ \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx, \\ &\geq \quad c_1 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx, \\ &+ \quad \int_\Omega |\nabla T_k(w)|^{p-2}\ \nabla T_k(w)\ \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx, \end{aligned}$$

comme

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w)|^{p-2}\ \nabla T_k(w)\ \nabla\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx \to 0$$

lorsque $m \to \infty$, on obtient

$$J_1 \geq c_1 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p\ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)\ dx + o(1). \tag{3.1.10}$$

On considére maintenant

$$J_2 = \int_\Omega |\nabla w_m|^p \ \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx,$$

alors

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\{w_m > k\}} |\nabla w_m|^p \ \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx + \int_{\{w_m < k\}} |\nabla w_m|^p \ \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx \\ &= \int_{\{w_m > k\}} |\nabla w_m|^p \ \phi\big(k - T_k(w)\big) \ dx + \int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p \ \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx, \end{aligned}$$

comme $|\nabla w_m|^p \ \phi\big(k - T_k(w)\big) \geq 0$ dans $\{w_m > 0\}$, il résulte que

$$\begin{aligned} J_2 &\geq \int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p \ \phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx, \\ &\geq -\int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w) + \nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx, \\ &\geq -\ c_2 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx \\ &- \ c_2 \int_\Omega |\nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx. \end{aligned}$$

Notons que $\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \to 0$ lorsque $m \to \infty$ et $|\nabla T_k(w)|^p$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, donc en utilisant le Théorème de la convergence dominée on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx \to 0,$$

et par conséquence

$$J_2 \geq -c_2 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx + o(1). \tag{3.1.11}$$

Donc on combinant (3.1.10) et (3.1.11),

$$\begin{aligned} J &\geq c_1 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ \phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) \ dx \\ &- c_2 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)| \ dx + o(1), \\ &\geq c_3 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ \Big(\phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) - c|\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)|\Big) \ dx \\ &+ o(1), \end{aligned}$$

lorsque $m \to \infty$.

D'un autre coté et comme $|\phi(T_k(w_m) - T_k(w))| \leq \overline{M}$ et $\phi(T_k(w_m) - T_k(w)) \to 0$, en utilisant le Théorème de la convergence dominée, il résulte que

$$\int_\Omega f_m \ \phi(T_k(w_m) - T_k(w)) \ dx \to 0$$

d'où $J \to 0$ lorsque $m \to \infty$. Donc

$$o(1) \geq c_3 \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ \big(\phi'\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big) - |\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)|\big) \ dx,$$

comme en peut choisir $\gamma > 0$ tel que $\phi' - c|\phi| \geq c_0 > 0$, on conclut que

$$o(1) \geq C \int_\Omega |\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)|^p \ dx = C\|\nabla T_k(w_m) - \nabla T_k(w)\|_p^p,$$

et alors

$$T_k(w_m) \to T_k(w) \qquad \text{fortement dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Notons que pour démontrer la convergence forte des troncatures dans le cas $p < 2$, on utilise l'inégalité (1.2.7) et on procède comme dans la démonstration du la première étape ($f \in L^\infty(\Omega)$).

$3^{ème}$ **partie.** L'existence d'une solution positive pour le problème (3.1.1).
Pour terminer la démonstration de notre résultat principal d'existence, on a besoin de prouver que $w_m \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $T_k(w_m) \to T_k(w)$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\nabla w_m \to \nabla w$ p.p. dans Ω, donc pour conclure on va appliquer le lemme de Vitali.
Soit E un sous ensemble mesurable de Ω, tel que $mes(E) < \delta << 1$.
Comme

$$\int_E |\nabla w_m|^p \ dx = \int_{E\cap\{w_m<k\}} |\nabla w_m|^p \ dx + \int_{E\cap\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \ dx,$$

d'après (3.1.9) on a $\displaystyle\int_{E\cap\{w_m>k\}} |\nabla w_m|^p \ dx < \frac{\varepsilon}{2}$.
D'un autre coté on a $\displaystyle\int_{E\cap\{w_m<k\}} |\nabla w_m|^p \ dx \leq \int_E |\nabla T_k(w_m)|^p \ dx$.
Comme $|\nabla T_k(w_m)|^p \to |\nabla T_k(w)|^p$ fortement dans $L^1(\Omega)$, il résulte que

$$\int_{E\cap\{w_m<k\}} |\nabla w_m|^p \ dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors on conclut que la suite $\{|\nabla T_k(w_m)|^p\}$ est équi-intégrable et d'après le théorème de Vitali on déduit que $|\nabla w_m|^p$ convergence fortement a $|\nabla w|^p$ dans $L^1(\Omega)$. Donc

$$w_m \to w \qquad \text{fortement dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Soit alors $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega |\nabla w_m|^p\ \varphi\ dx = \int_\Omega f_m\ \varphi\ dx,$$

en passant à la limite quand $m \to \infty$ et grâce aux résultats de compacité prouvés on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega |\nabla w|^p\ \varphi\ dx = \int_\Omega f\ \varphi\ dx.$$

et comme conséquence w est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p\ w + |\nabla w|^p = f & \text{dans}\ \ \Omega, \\ \qquad w \geq 0 & \text{dans}\ \ \Omega, \\ \qquad w = 0 & \text{sur}\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

ce qui achève la preuve du théorème.

• **Unicité de la solution positive.**

Nous prouvons maintenant l'unicité de la solution du problème (3.1.1).
On considére le changement de fonction suivant : pour une solution du problème (3.1.1), soit $v = 1 - e^{-\alpha u} = H(u)$, il est clair que $v \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leq v \leq 1$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $\alpha > 0$.
Comme $u \geq 0$, et $\alpha > 0$, d'où $0 \leq v < 1$.
Par un calcul directe on déduit que $|\nabla v|^{p-2} = (H'(u))^{p-2}|\nabla u|^{p-2}$, et donc

$$|\nabla v|^{p-2}\ \nabla v = (H'(u))^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\ \nabla u,$$

alors,

$$-\Delta_p\ v = (H'(u))^{p-1}\ (-\Delta_p\ u) - (p-1)\ H''(u)(H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p, \tag{3.1.12}$$

et par conséquence

$$\begin{aligned} -\Delta_p\ v &= (H'(u))^{p-1}\big(f - |\nabla u|^p\big) - (p-1)\ H''(u)(H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p, \\ &= (H'(u))^{p-1}\ f - (H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p\big(H'(u) - (p-1)\ H''(u)\big). \end{aligned}$$

Comme $H'(s) = \alpha e^{-\alpha s}$, $H''(s) = -\alpha^2 e^{-\alpha s}$, il résulte que

$$H'(u) - (p-1)\ H''(u) = e^{-\alpha s}\big(\alpha - (p-1)\alpha^2\big) = \alpha e^{-\alpha s}\big(1 - (p-1)\alpha\big).$$

Pour $\alpha = \frac{1}{p-1}$ il découle que $1 - (p-1)\alpha = 0$, donc si $v = 1 - e^{-\frac{u}{p-1}}$, alors $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifie

$$\begin{aligned} -\Delta_p\ v &= \Big(\frac{1}{p-1}\ e^{-\frac{u}{p-1}}\Big)^{p-1} f \\ &= \Big(\frac{1}{p-1}(1-v)\Big)^{p-1} f. \end{aligned}$$

Donc $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution borné du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p\ v = \left(\frac{1}{p-1}(1-v)\right)^{p-1} f(x), \\ \\ v_{|\partial\Omega} = 0, \\ \\ 0 \leq v < 1. \end{cases} \tag{3.1.13}$$

On pose

$$h(s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{p-1}(1-s)\right)^{p-1} & \text{si} \quad 0 \leq s < 1, \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 1. \end{cases}$$

Comme

$$\frac{h(s)}{s^{p-1}} = \left(\frac{1}{p-1}\frac{1-s}{s}\right)^{p-1} = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{s}-1\right)^{p-1},$$

il résulte que $\frac{h(s)}{s^{p-1}} \searrow$ est décroissante en s pour tout $s \geq 0$, donc comme application directe de principe de comparaison dans le Théorème 1.9, il résulte que le problème (3.1.13) admet une solution unique et par conséquence le problème (3.1.1) admet une solution positive unique.

■

3.2 Existence et unicité de solution positive du problème $-\Delta_p\ u + g(u)|\nabla u|^p = f$.

Comme extension du problème précédent on va étudier la forme général suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p\ u + g(u)|\nabla u|^p = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $g(s)\ sign(s) \geq 0$(condition de signe) et f une fonction dans $L^1(\Omega)$ non identiquement nulle qui peut changer de signe.
Notre but est de démontrer que le problème (3.2.1) admet une solution, et, sous quelques conditions sur f, cette solution est unique.

- **Existence**

Comme dans l'étude précédente, on va procéder par approximation, et on passe à la limite en utilisant des résultats de compacité.

Étape 1. On suppose que $f \in L^\infty(\Omega)$, soit $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p \ w_n + g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ w_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

En utilisant w_n comme une fonction test, alors on obtient

$$-\int_\Omega \Delta_p \ w_n \ w_n \ dx + \int_\Omega g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \ w_n \ dx = \int_\Omega f \ w_n \ dx,$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p \ dx \le \int_\Omega f \ w_n \ dx,$$

par conséquence, on applicant l'inégalité de Poincaré on conclut facilement que $\{\nabla w_n\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, ce qui implique que $\{w_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On déduit alors que $w_n \rightharpoonup w$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $w_n \to w$ p.p. dans Ω et $w \in L^\infty(\Omega)$ (Cette dernière confirmation et conséquence du fait que f est bornée, $g(s)s \ge 0$ et on appliquant les techniques de Stampachia, voir [30]).

On démontre maintenant que $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On considère $\phi(s) = se^{\gamma s^2}$ avec $\gamma > 0$, a déterminé, choisissons $\phi(w_n - w)$ comme une fonction test dans (3.2.2), il résulte que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \ \nabla w_n \ \nabla\phi(w_n - w) \ dx$$
$$+ \int_\Omega g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \ \phi(w_n - w) \ dx = \int_\Omega f \ \phi(w_n - w) \ dx.$$

On pose

$$I_1 = \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \ \nabla w_n \ \nabla\phi(w_n - w) \ dx,$$

$$I_2 = \int_\Omega g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1+\frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \ \phi(w_n - w) \ dx,$$

$$I = \int_\Omega f \ \phi(w_n - w) \ dx.$$

Puisque $|\phi(w_n - w)| \le \overline{M}$, $\phi(w_n - w) \to 0$ p.p. dans Ω et par le fait que $f \in L^\infty$, on conclut que $\displaystyle\int_\Omega f \ \phi(w_n - w) \ dx \to 0$, donc $I \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour analyser I_1 et I_2, on divise la preuve en deux parties, suivant la valeur de p :
Premier cas : $p \geq 2$
On a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n\ \nabla\phi(w_n - w)\ dx,\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w)\ \phi'(w_n - w)\ dx\\
&+ \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx,\\
&\geq c_1' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx + \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx,
\end{aligned}$$

Comme $|\nabla w|^{p-1}$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\nabla(w_n - w) \to 0$ et $\phi'(w_n - w) \to 1$, on déduit que $\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où

$$I_1 \geq c_1' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx + o(1).$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Omega g(w_n) \frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx\\
&\leq \int_\Omega |g(w_n)||\nabla w_n|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq \overline{c} \int_\Omega |\nabla(w_n - w) + \nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq c_1'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx\\
&+ c_1'' \int_\Omega |\nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx.
\end{aligned}$$

Sachant que $\int_\Omega |\nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors il résulte que

$$I_2 \leq c_1'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx + o(1).$$

Donc, pour $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
I &\geq c_1' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx - \overline{c} \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx + o(1),\\
&\geq c_1''' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \Big[\phi'(w_n - w)\ - |\phi(w_n - w)|\Big]\ dx + o(1),
\end{aligned}$$

Deuxième cas $1 < p < 2$
On a

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n\ \nabla\phi(w_n - w)\ dx,\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla w_n|^{p-2}\ \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\big)(\nabla w_n - \nabla w)\ \phi'(w_n - w)\ dx\\
&+ \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx,\\
&\geq c_2' \int_\Omega \frac{|\nabla(w_n - w)|^2}{(|\nabla w_n| + |\nabla w|)^{2-p}}\ \phi'(w_n - w)\ dx + \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla(w_n - w)\ \phi'(w_n - w)\ dx,
\end{aligned}
$$

Comme dans le premier cas, on déduit facilement que

$$I_1 \geq c_2' \int_\Omega \frac{|\nabla(w_n - w)|^2}{(|\nabla w_n| + |\nabla w|)^{2-p}}\ \phi'(w_n - w)\ dx + o(1).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on conclut que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \big|\nabla w_n - \nabla w\big|^p\ \phi'(w_n - w) dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla w_n) - \nabla w|^p}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \phi'(w_n - w) dx\\
&\leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla w_n - \nabla w|^2}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{2-p}} \phi'(w_n - w) dx\Big)^{\frac{p}{2}} \Big(\int_\Omega (|\nabla w_n|^p + |\nabla w|^p)\phi'(w_n - w) dx\Big)^{\frac{2-p}{2}}\\
&\leq C I_1
\end{aligned}
$$

Donc

$$I_1 \geq c_2'' \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ \phi'(w_n - w)\ dx + o(1).$$

Notons maintenant que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Omega g(w_n) \frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p}\ \phi(w_n - w)\ dx\\
&\leq \int_\Omega |g(w_n)||\nabla w_n|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq \bar{c} \int_\Omega |\nabla(w_n - w) + \nabla w|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq \bar{c} \int_\Omega \Big(|\nabla(w_n - w)|^p + p|\nabla(w_n - w)|^{p-2}\langle\nabla(w_n - w), \nabla w\rangle + c(p)|\nabla w|^p\Big)|\phi(w_n - w)|\ dx,\\
&\leq \bar{c} \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\ |\phi(w_n - w)|\ dx + \bar{c}\ c(p) \int_\Omega |\nabla w|^p |\phi(w_n - w)|\ dx\\
&+ p\ \bar{c} \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^{p-2}\langle\nabla(w_n - w), \nabla w\rangle|\phi(w_n - w)|\ dx.
\end{aligned}
$$

Donc en utilisant le Théorème de la convergence dominée il résulte que

$$|I_2| \leq \bar{c} \int_\Omega \; |\nabla(w_n - w)|^p \; |\phi(w_n - w)| \; dx + o(1).$$

Alors on conclut que dans les deux cas on obtient

$$o(1) = I \geq \bar{\bar{c}} \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \Big[\phi'(w_n - w) \; - c_0|\phi(w_n - w)|\Big] \; dx + o(1).$$

Choisissons γ large tel que $\phi'(s) - c_0|\phi(s)| \geq c > 0$, il résulte que $\|w_n - w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq o(1)$, d'où $w_n \to w$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
En particulier on déduit

$$g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \to g(w)|\nabla w|^p \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

par le Théorème de convergence dominée

$$g(w_n)\frac{|\nabla w_n|^p}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^p} \to g(w)|\nabla w|^p \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Comme $-\Delta_p \; w_n \to -\Delta_p \; w$ dans sens de distributions, on conclut que w est une solution du problème

$$-\Delta_p \; w + g(w)|\nabla w|^p = f \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Donc on déduit que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$, il existe une solution faible w de le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p \; w + g(w)|\nabla w|^p = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Donc on arrive a montrer l'existence de la solution du problème (3.2.1).
Notons que notre solution n'est pas forcement positive.

Étape 2. Il reste à montrer que pour tout $f \in L^1(\Omega)$, il existe une solution du problème (3.2.1).
Comme $f \in L^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ tel que $f_m \to f$ dans $L^1(\Omega)$.
Grâce à la première étape pour tout $f_m \in L^\infty(\Omega)$, il existe une solution w_m du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p \; w_m + g(w_m)|\nabla w_m|^p = f_m & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ w_m = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

On décompose la démonstration en trois parties.

$1^{ère}$ **partie.** Convergence des troncatures.
On multipliant par $T_k(w_m)$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_k(w_m)\ dx + \int_\Omega g(w_m)|\nabla w_m|^p\ T_k(w_m)\ dx = \int_\Omega f_m\ T_k(w_m)\ dx,$$

on peut écrire que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx + \int_\Omega g(w_m)|\nabla w_m|^p\ T_k(w_m)\ dx = \int_\Omega f_m\ T_k(w_m)\ dx, \tag{3.2.5}$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx \quad + \quad \int_{|w_m|\le k} w_m\ g(w_m)|\nabla w_m|^p\ dx + \int_{|w_m|\ge k} T_k(w_m)\ g(w_m)|\nabla w_m|^p\ dx \le C.$$

Notons que par la condition de signe sur g, on aura que $g(w_n)w_n \ge 0$, donc

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx + \int_{|w_m|\ge k} T_k(w_m)\ g(w_m)|\nabla w_m|^p\ dx \le C.$$

D'autre part, si $w_m \ge k$, alors $g(w_m) \ge 0$ et si $w_m \le -k < 0$, alors $g(w_m) \le 0$, donc pour tout $k > 0$, $T_k(w_m)g(w_m) \ge 0$ et par conséquence on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_m)|^p\ dx \le C.$$

Donc $\{T_k(w_m)\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, d'où $T_k(w_m) \rightharpoonup T_k(w)$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$2^{ème}$ **partie.** Convergence forte des troncatures.
Pour démonter la convergence forte des troncatures on a besoin seulement de prouver que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p\ dx = 0. \tag{3.2.6}$$

Le reste de la démonstration résulte en utilisant les mêmes techniques développées dans la Section 3.1.
Pour prouver (3.2.6), on prend $T_1(G_{k-1}(w_m))$ comme fonction test dans (3.2.4), alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx \quad &+ \quad \int_\Omega g(w_m)|\nabla w_m|^p\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx \\ &= \quad \int_\Omega f_m\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\int_{\{k-1<|w_m|<k\}} |\nabla w_m|^p\ dx + \int_{\{|w_m|>k\}} |\nabla w_m|^p\ dx \\ + \quad &\int_{\{k-1<|w_m|<k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx + \int_{\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx \\ \le \quad &\int_\Omega f_m\ T_1(G_{k-1}(w_m))\ dx,\end{aligned}$$

et par conséquence

$$\begin{aligned}
&\int_{\{k-1<|w_m|<k\}} |\nabla w_m|^p \, dx + \int_{\{|w_m|>k\}} |\nabla w_m|^p \, dx + \int_{\{k-1<|w_m|<k\}} w_m \, g(w_m) \, |\nabla w_m|^p \, dx \\
+ \quad &\int_{\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx \\
\leq \quad &\int_\Omega f_m \, T_1(G_{k-1}(w_m)) \, dx.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\int_\Omega f_m \, T_1(G_{k-1}(w_m)) \, dx \to 0 \quad \text{pour} \quad k \to \infty, \text{ uniformément en } m,$$

par conséquence on conclut que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx = 0. \tag{3.2.7}$$

Pour démontrer la convergence forte des troncatures dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on utilise $\phi\big(T_k(w_m) - T_k(w)\big)$ comme fonction test et on procède comme dans la section précédente.

$3^{ème}$ **partie.** Pour achever la démonstration de l'existence, on va utiliser le Lemme de Vitali.

Maintenant soit E une sous ensemble mesurable de Ω, telle que $mes(E) < \delta << 1$.

Comme

$$\int_E g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx = \int_{E\cap\{|w_m|<k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx + \int_{E\cap\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx,$$

d'après (3.2.7) on a $\displaystyle\int_{E\cap\{|w_m|>k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sachant que $\displaystyle\int_{E\cap\{|w_m|<k\}} g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx \leq \int_E g(w_m)|\nabla T_k(w_m)|^p \, dx$, et puisque $|\nabla T_k(w_m)|^p$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$, on déduit que

$$\int_E g(w_m)|\nabla T_k(w_m)|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquence on conclu que

$$\int_E g(w_m)|\nabla w_m|^p \, dx < \varepsilon.$$

Donc d'après le Lemme de Vitali on déduit que

$$g(w_m)|\nabla w_m|^p \to g(w)|\nabla w|^p \qquad \text{fortement dans} \quad L^1(\Omega).$$

Comme
$$w_m \rightharpoonup w \qquad \text{faiblement dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$
et comme pour tout $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, on a
$$\int_\Omega |\nabla w_m|^{p-2}\ \nabla w_m\ \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega g(w_m)|\nabla w_m|^p\ \varphi\ dx = \int_\Omega f_m\ \varphi\ dx,$$
en passant à la limite on obtient
$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\ \nabla w\ \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega g(w)|\nabla w|^p\ \varphi\ dx = \int_\Omega f\ \varphi\ dx.$$
et donc w est solution de
$$\begin{cases} -\Delta_p\ w + g(w)|\nabla w|^p = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

■

• **Unicité dans le cas où** $f \geq 0$
Dans cette partie on suppose que $f \geq 0$, alors on peut démontrer que le problème (3.2.1) admet une solution positive unique.
Soit u une solution positive de (3.2.1), on pose $v = H(u)$, avec
$$H(u) = \int_0^u e^{-\frac{1}{p-1}\int_0^s g(\sigma)d\sigma}\ ds,$$
alors d'après (3.2.1) on a
$$\begin{aligned} -\Delta_p\ v &= (H'(u))^{p-1}\ (-\Delta_p\ u) - (p-1)\ H''(u)(H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p, \\ &= (H'(u))^{p-1}\big(f - g(u)|\nabla u|^p\big) - (p-1)\ H''(u)(H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p, \\ &= (H'(u))^{p-1}\ f - (H'(u))^{p-2}|\nabla u|^p\Big(g(u)H'(u) + (p-1)\ H''(u)\Big). \end{aligned}$$
et par conséquence on conclu que v vérifie
$$-\Delta_p\ v = f\ e^{-\int_0^u g(\sigma)d\sigma}.$$
Comme $H' > 0$, donc H est strictement croissante et on peut définir H^{-1}, alors comme $u = H^{-1}(v)$, il résulte que
$$-\Delta_p\ v = f\ e^{-\int_0^{H^{-1}(v)} g(\sigma)d\sigma}. \tag{3.2.8}$$
Maintenant on pose
$$K(v) = e^{-\int_0^{H^{-1}(v)} g(\sigma)d\sigma}.$$

Comme

$$\frac{K(v)}{v^{p-1}} = \frac{e^{-\int_0^{H^{-1}(v)} g(\sigma)d\sigma}}{v^{p-1}} = \frac{e^{-\int_0^{u} g(\sigma)d\sigma}}{(H(u))^{p-1}},$$

pour un calcul simple on trouve que $\frac{K(s)}{s^{p-1}} \searrow$ décroissante en s pour tout $s \geq 0$, donc d'après l'extension du principe de comparaison 1.9, on arrive à conclure que v est la seule solution positive de (3.2.8), donc la problème (3.2.1) admet une solution positive unique.

$\blacksquare$

Notons que si $f \geq 0$, alors sous la condition signe sur g, si w est une solution de (3.2.1), alors $w \geq 0$. Pour démontrer cette affirmation, en utilise $T_k(w_-)$ comme fonction test dans (3.2.1), alors

$$-\int_\Omega |\nabla T_k(w_-)|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla w|^p T_k(w_-) \, g(w) = \int_\Omega f T_k(w_-) \, dx.$$

Notons que si $w_+ > 0$ alors $T_k(w_-) \equiv 0$, alors

$$T_k(w_-) \, g(w) = T_k(w_-) \, g(-w_-) \leq 0.$$

Donc on conclut que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(w_-)|^p \, dx \leq 0,$$

comme k est arbitraire, il découle que $w_- \equiv 0$ et alors $w \geq 0$.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui & A. Dall'Aglio & I. Peral, *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient,* J. Differential Equations 222, p. 21 - 62, (2006).

[2] B. Abdellaoui & I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian with a critical potential,* Annali di Mathematica 182, p. 247 - 270, (2003).

[3] B. Abdellaoui & I. Peral, & A. Primo, *Breaking of resonance and regularizing effect of a first order quasi-linear term in some elliptic equations*, Ann. I. H. Poincaré - AN 25, p. 969 - 985, (2008).

[4] Ambrosetti, A. ; Brezis, H. ; Cerami, G. Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in some Elliptic Problems. Jour. Funct. Anal. **1994**, 122 (2), 519-543.

[5] P. Bénilan & L. Boccardo & T. Gallouët & R. Gariepy & M. Pierre & J. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 22, n^o2, p. 241 - 273, (1995).

[6] L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral, *A Dirichlet problem involving critical exponents*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 11, 1639–1648.

[7] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), no. 1, 149–169.

[8] L. Boccardo & T. Gallouët & L. Orsina, *Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations,* Journal D'analyse Mathématique, Vol 73, p. 203 - 223, (1997).

[9] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence des solutions non bornées pour certains équations quasi-linéaires*, Portugal Math. **41** (1982), 507–534.

[10] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, in Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. IV (J.-L. Lions and H. Brezis, eds.), Research Notes in Math,**84**, Pitman, London, 1983, 19–73.

[11] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Resultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasi-linéaires*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **11** (1984), 183–196.

[12] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems*, Ann. Mat. Pura Appl. **152** (1988), 183–196.

[13] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *L^∞ estimates for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result*, SIAM J. Math. Anal. **2** (1992), 326–333.

[14] L. Boccardo, S. Segura de León, C. Trombetti, *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term*, J. Math. Pures Appl. **80** (2001), no. 9, 919–940.

[15] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle théorie et applictions,* Dunod, Belgique, 2005.

[16] Brezis, H. ; Kamin, S. Sublinear equations in $I\!R^N$. Mauscripta Math. **1992**, 74 (1), 87-106.

[17] J. Chabrowski, *On elliptic problems with a nonlinearity depending on the gradient*, Opuscula Mathematica. Vol. 29. No. 4, p. 377 - 391, (2009).

[18] G. Dal maso & F. Murat & L. Orsina & A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data,* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 28, $n^o 4$, p. 741 - 808, (1999).

[19] F. Demengel & G. Demengel, *Espaces fonctionnels Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles,* EDP Sciences \ CNRS E'ditions, 2007.

[20] C. Leone & A. Porretta, *Entropy solutions for nonlinear elliptic equations in L^1,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol 32, No 3, p. 325 - 334, (1998).

[21] P. Lindqvist,*On the equation $\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 109, no. 1 (1990), 157-164.

[22] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod & Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[23] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.

[24] Peral, I. Multiplicity of solutions for the p- Laplacian. Lecture Notes of the Second School of Nonlinear Functional Analysis and Aplications to Differential Equations, I.C.T.P., Trieste, Italy, 1997.

[25] A. Porretta, *Nonlinear equations with natural growth terms and measure data,* Electronic Journal of Differential Equations, Conference 09, p. 183 - 202, (2002).

[26] A. Porretta & S. Segura de León, *Nonlinear ellptic equations having a gradient term with natural growth,* J. Math. Pures Appl. 85, p. 465 - 492, (2006).

[27] I. Shafrir, *Asymptotic behaviour of minimizing sequences for Hardy inequality.* Commun. Contemp. Math. no. 2 (2000), 151-189.

[28] M. Struwe, *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltnian Systems,* Springer, Berlin, 1996.

[29] M. Thérèse & L. Sonrier, *Distributions Espaces de Sobolev Applications,* Ellipses, Paris, 1998.

[30] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, Les presse de l' univeersité de Montreal, 1966.

[31] Serrin, J. Pathological solutions of elliptic differential equations. Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Cl. Sci. **1964**, 18 (3), 385-387.

[32] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, Les presse de l' univeersité de Montreal, 1966.

[33] Vázquez, J.L. A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations. Applied Math. and Optimization **1984**, 12 (3), 191-202.