

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques & Modélisation

présentée par

Benchelih youcef

L'influence des refuges sur l'évolution d'un modèle proie-prédateur avec réponse Holling type II

Soutenue devant le jury composé de :

M. Touaoula Tarik	Professeur	Université de Tlemccen	Président
Mme.Sari-Bouayad Agha Zakya	MCB	Université de Tlemccen	Examinatrice
Mme. Benzrdjeb Sarra	MCB	Université de Tlemccen	Encadrant

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents, tous deux ont su m'apprendre le respect, la volonté, le courage et tant d'autres valeurs importantes.

Mes frères, mes sœurs et toute ma famille paternelle et maternelle.

Mes amis, mes collègues et toute personne qui m'a aidé de loin et de près.

Remerciements

Tout d'abord , je remercie dieu de m'avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail.

J'adresse mes remerciement à ma famille qui m'a toujours aidé et encourager durant les années de mes études.

Un grand remerciement à mon encadrant Mme. Benzrdjeb Sarra. pour toute sa gentillesse, ses précieux conseils et son savoir .

Mes profonds remerciements pour les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail M. Touaoula Tarik et Mme.Bouayed Agha Zakia.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques, dont le précieux soutien m'a permis de progresser et de m'épanouir.

Résumé :

L'objectif principal de cette thèse est d'approfondir le développement et l'examen mathématique de multiples modèles issus d'enquêtes concernant le domaine de l'écologie.

L'influence des refuges sur un modèle proie-prédateur avec réponse de type Holling *II* est un sujet d'étude passionnant en écologie. Les refuges, où les proies peuvent échapper aux prédateurs, modifient la dynamique de ces interactions. Ils offrent une protection aux proies, ce qui peut augmenter leur nombre. Cependant, cela peut également stimuler la population des prédateurs. L'effet global dépend de facteurs tels que la densité des refuges et la capacité des proies à se déplacer. Les modèles mathématiques, tels que le modèle de Holling type *II* aident à comprendre ces interactions complexes. Cette recherche éclaire les mécanismes des écosystèmes, avec des implications potentielles pour la conservation et la gestion des populations dans la nature.

Mots clés : modèle proie-prédateur, point d'équilibre, systèmes d'équations différentielles, stabilité.

Abstract :

The influence of refuges on a prey-predator model with Holling Type *II* response is an exciting topic in ecology. Refuges, where prey can escape predators, alter the dynamics of these interactions. They provide protection to prey, which can increase their numbers. However, this can also stimulate the predator population. The overall effect depends on factors like refuge density and prey's ability to move. Mathematical models, such as the Holling Type *II* model, help understand these complex interactions. This research sheds light on ecosystem mechanisms, with potential implications for conservation and population management in nature.

Keywords : prey-predator model, equilibrium point, system of differential, stability.

Table des matières

Table des figures	6
1 Outils mathématiques	12
1.1 Définition d'un système dynamique	12
1.2 Problème de Cauchy	14
1.3 La stabilité en \mathbb{R}^2	19
1.4 Bifurcation de Hopf	29
1.4.1 Indice de Marsden MacCracken	30
2 Les modèles mathématiques	31
2.1 Modèle Malthusien	31
2.2 Modèle logistique	34
2.3 La prédation	35
2.4 Modèle de Lotka volterra	35
2.5 la réponse fonctionnelle de prédateurs	40
2.5.1 Réponse fonctionnelle de Holling type <i>I</i>	41
2.5.2 Réponse fonctionnelle de Holling type <i>II</i>	41
2.5.3 Réponse fonctionnelle de Holling type <i>III</i>	42
3 Etude d'un modèle proies-predateur intégrant les refuges des proies	43
3.1 Présentation du modèle mathématique	44
3.2 Existence de la solution	45
3.3 Analyse de l'équilibre	47
3.3.1 Les points d'équilibres	47
3.3.2 Comportement dynamique	49
3.3.3 Existence de cycle limite	51
3.4 Simulations numériques	56
3.5 Synthèse	64
Bibliographie	66

Table des figures

1.1	noeud instable	22
1.2	noeud stable	23
1.3	point selle	24
1.4	Centre	25
1.5	diagramme de la trace et le déterminant	27
2.1	Modèle Malthusien	33
2.2	verhulst	35
2.3	lotka volterra 1	39
2.4	lotka volterra2	40
2.5	Les 3 types de réponses fonctionnelles proposées par Holling . .	42
3.1	un diagramme de bifurcation pour le système 3.3.1 avec m comme paramètre de bifurcation, L'axe verticale mesurait à la fois X (ligne continue) et Y (ligne brisé)	56
3.2	le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.1$	57
3.3	le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.3$	58
3.4	courbe de solution pour $m = 0.32$ au point d'équilibre $P_2(13.0, 25.09)$	59
3.5	courbe de solution pour $m = 0.4$ le modèle proie prédateur converge vers leurs valeurs d'équilibres	60
3.6	le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.5$ et $P_2(17.65, 32.3)$ est un attracteur globale	61
3.7	courbe de solution pour $m = 0.85$ le modèle proie prédateur converge vers leurs valeurs d'équilibres $(58.82, 53.82)$	62
3.8	le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.95$ et il est remarquable $(100, 0)$ est un attracteur globale	63

Abbreviations :

EDO : Equation différentielle ordinaire.

ICPMP : Influence Comportement Prédateur Modèle proie.

OMD : Outils Mathématique.

Notation

Symbole

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

\mathbb{R}^2 :

\mathbb{R}^n :

\mathbb{R}^+ :

\in :

\subset :

$$x' = \frac{dx}{dt} :$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} :$$

Ω :

$C^k(\omega)$:

max :

Signification

Elément de \mathbb{R}^n

Module de x

Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R} * \mathbb{R} \dots * \mathbb{R}$ n fois

Ensemble des nombres réels positifs.

Appartient.

Inclus.

La première dérivée de x par rapport à t .

La dérivée partielle.

Ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Espace des fonctions de classe k dans ω .

maximum.

Introduction

La recherche en sciences biologiques a toujours montré un intérêt marqué pour les domaines de l'écologie et de la dynamique des populations. Pour mieux comprendre l'évolution des écosystèmes, il est crucial de comprendre les relations complexes entre les prédateurs et leurs proies. Un élément clé de la recherche en écologie mathématique est l'étude du modèle proie-prédateur, avec un accent particulier sur la réponse fonctionnelle de Holling de type *II*.

Bien que ces systèmes puissent paraître simples à première vue, ils révèlent souvent des comportements complexes résultant d'interactions subtiles. Les réponses fonctionnelles de Holling type *II*, caractérisées par une augmentation initiale rapide des taux de prédation suivie d'une saturation, sont l'un des modèles les plus couramment utilisés pour décrire ces interactions.

Cependant, dans ces modèles, l'incorporation du comportement anti-prédateur des proies est un facteur qui a une influence significative sur la dynamique évolutive. Le comportement anti-prédateur fait référence aux mécanismes et stratégies adoptés par les proies pour échapper aux prédateurs. Comprendre comment ces comportements anti-prédateurs interagissent avec les réponses fonctionnelles de Holling type *II* est essentiel pour des prédictions précises de l'évolution de la population.

Dans ce contexte, Les interactions proies-prédateurs jouent un rôle central dans la régulation des populations et la structuration des écosystèmes. Cependant, la réalité de ces interactions est bien plus nuancée que ne le suggèrent les modèles classiques. Les proies ne sont pas simplement des cibles passives, mais développent souvent des mécanismes de défense pour échapper aux prédateurs. Comprendre comment ces mécanismes influencent la dynamique des populations est essentiel pour une écologie plus précise et plus réaliste.

La question centrale de cette étude est de comprendre l'impact du comportement anti-prédateur des proies sur l'évolution des modèles proie-prédateur basés sur les réponses fonctionnelles de Holling type *II*. Cette question se pose en raison de la nécessité de prendre en compte des mécanismes comportementaux complexes dans les modèles écologiques afin de mieux prédire la réalité des interactions proies-prédateurs.

Cette recherche vise à atteindre les objectifs suivants : Une analyse approfondie

des modèles proies-prédateurs avec des réponses fonctionnelles de Holling type *II* en l'absence de comportement anti-prédateur des proies. Intégrez le comportement des proies anti-prédateurs dans le modèle et explorez son impact sur la dynamique évolutive. Étudiez comment les interactions entre les comportements anti-prédateurs et les réponses fonctionnelles de Holling de type *II* influencent la coévolution proie-prédateur.

Pour atteindre ces objectifs, nous utiliserons des techniques d'analyse mathématique et des simulations numériques. Nous explorerons différentes configurations du modèle pour étudier l'impact du comportement anti-prédateur sur la dynamique proie-prédateur.

Ce travail est divisé en trois chapitres, chacun explorant un aspect spécifique de notre sujet. Chapitre 1 Enquête sur les outils mathématiques en utilisant les systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques sont un domaine des mathématiques qui étudie le comportement temporel des systèmes qui évoluent au fil du temps. Pour analyser ces systèmes, divers outils mathématiques sont utilisés, notamment : Les équations différentielles qui sont souvent utilisées dans la modélisation des systèmes dynamiques. Ils décrivent l'évolution d'une variable en fonction de sa dérivée et sont souvent utilisés pour représenter l'évolution d'une population, la croissance d'une économie ou le mouvement d'objets dans l'espace. La bifurcation est un changement qualitatif dans le comportement d'un système dynamique. Ils peuvent être utilisés pour étudier la stabilité ou l'instabilité d'un système et prédire les points de transition de son évolution. La théorie de la stabilité est un concept fondamental de la modélisation mathématique. Il est largement utilisé pour déterminer si un système dynamique décrit par un modèle mathématique donné atteint un équilibre stable ou instable au fil du temps. La stabilité est essentielle pour comprendre comment un système réagit aux perturbations et comment il évolue au fil du temps.

Le chapitre 2 se concentre sur les modèles mathématiques.

Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ?

Un modèle mathématique est une représentation simplifiée d'un système réel utilisant des équations, des formules et des relations mathématiques. Ces modèles visent à capturer les caractéristiques essentielles d'un système tout en ignorant les détails moins importants. Ils nous permettent d'étudier, de prédire et de comprendre le comportement de systèmes complexes de manière analytique et

quantitative, Par exemple (Lotka-volterra, Maltus, Holling).

Et le dernier chapitre 3 à un but d'étudier l'offre d'opportunité et d'approfondir notre compréhension des interactions proies-prédateurs en considérant des mécanismes comportementaux complexes. Les résultats obtenus devraient permettre de mieux modéliser les écosystèmes et de prédire plus précisément l'évolution des populations dans des contextes écologiques. [5, 22, 24].

Chapitre 1

les outils mathématiques

Dans ce premier chapitre, nous allons voir quelques outils mathématiques qui permet d'étudier le comportement et l'évolution des systèmes dynamiques, Le plus souvent ce genre de systèmes sont décrit par les équations différentielles ordinaires (EDO) en particulier nous présenterons des théorèmes qui assure l'existence et unicité de la solution. De plus nous allons écrire les méthodes permettant de déterminer l'état d'équilibre de ces systèmes, Ainsi leurs stabilité, stabilité asymptotique et exponentielle seront examinées par la théorie de stabilité de Lyapunov . En résumé, les outils mathématiques pour les systèmes dynamiques utilisant les (EDO) constituent un ensemble puissant de techniques pour modéliser, analyser et comprendre le comportement du système à mesure qu'il évolue au fil du temps[4].

1.1 Définition d'un système dynamique

En général les équations différentielles ordinaires sont un moyen efficace de modéliser des systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 en décrivant comment les variables changent au fil du temps selon des règles mathématiques spécifiques. Considérons Ω est un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n , soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} .

Définition : (Equation différentielle)

Considérons une fonction $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle et Ω est l'ouvert de \mathbb{R}^n . L'équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à la fonction f est définie comme suit :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

x : représente l'état du système étudié, et :

$$f(t, x(t)) = (f_1(t, x); \dots; f_n(t, x))$$

C'est une fonction donnée est appelée champs de vecteur. 1.1 représente un système de n équations différentielles ordinaires. Si f ne dépend pas explicitement de t c'est-à-dire que :

$$f(t, x) = f(x)$$

Alors on parle d'une équation différentielle autonome. En revanche, si la fonction f dépend explicitement de la variable t , c'est-à-dire que $f(t, x)$ est une fonction de t et de x , alors on parle d'une équation différentielle ordinaire 1.1 non autonome.

Définition : (Solution locale)

Une solution locale d'un système d'EDO en dimension n est la donnée d'un couple (I, x) où l'intervalle I d'intérieur non vide de \mathbb{R} contenu dans un intervalle I_1 ,

est une fonction vectorielle $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable sur I , qui satisfait les équations différentielles du système sur l'intervalle I . En d'autres termes, pour chaque composante de x , les dérivées par rapport à t sont continues. Donc, si on veut appliquer cette définition sur 1.1, cette dernière doit vérifier les conditions suivantes :

- $(t, x(t)) \in I_1 \times \Omega$ pour tout $t \in I$
- $\dot{x} = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$

Définition : (Solution globale)

Considérons une fonction $f : I_1 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est vérifiant l'équation :

$$\dot{x} = f(., x)$$

(I_1, x) est solution globale de 1.1 si c'est une solution définie sur I_1 tout entier.

1.2 Problème de Cauchy

Considérons I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert connexe dans un espace de Banach E , et f une fonction continue de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R} . Étant donnée $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$, le problème de Cauchy vise à trouver un intervalle $I_1 \subset I$ contenant t_0 et une fonction $x : I_1 \rightarrow \Omega$ qui est dérivable sur I_1 , tout en satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t)), t \in I_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition : (Localement lipschitzienne en un point) [4, 3, 39]

La condition de Lipschitz en un point, également appelée Lipschitzité locale, est une propriété importante dans le contexte des équations différentielles. En effet, elle est utilisée pour garantir l'existence et l'unicité des solutions. Autrement dit, la fonction $f(t, x)$ est localement Lipschitzienne au point (t_0, x_0) si pour tout (t, x) au voisinage U de (t_0, x_0) , il existe une constante L telle que :

$$(\|f(t, x) - f(t, \hat{x})\|)_U \leq L\|x - \hat{x}\|_U$$

$$\forall ((t, x), (t, \hat{x})) \in U.$$

La Lipschitzianité locale est importante car elle garantit l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy en \mathbb{R}^2 au voisinage de (t_0, x_0) , conformément au théorème de Cauchy-Lipschitz. En d'autres termes, si $f(t, x)$ est localement Lipschitzienne en (t_0, x_0) , alors il existe une unique solution locale du problème de Cauchy correspondant avec la condition initiale (t_0, x_0) .

Théorème 1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)[39]

On considère l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Où f est une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Si (t_0, x_0) est un point de U , alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy 1.2.

Lemme 1.1 Lemme de Gronwall, forme intégrale [16] [17]

On a (f_1, f_2, y) trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives, et vérifiant l'inégalité suivante $\forall t \in [a, b]$:

$$y(t) \leq f_1(t) + \int_a^t f_2(s)y(s) ds \quad (1.3)$$

Alors $\forall t \in [a, b]$:

$$y(t) \leq f_1(t) + \int_a^t f_1(s)f_2(s) \exp\left(\int_a^s f_2(u) du\right) ds \quad (1.4)$$

L'interprétation du lemme de Gronwall est celle de l'inégalité intégrale liée à y , on trouve l'inégalité sur y . Ce lemme est fréquemment utilisé dans la théorie des équations différentielles ordinaires, notamment pour obtenir des bornes supérieures sur des solutions. Le principe des bornes a priori peut être combiné pour déterminer l'intervalle qui définit la solution maximale. Un cas particulier important est la fonction f_1 est une constante appelée $C \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que y vérifie l'inégalité :

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq C + \int_a^t f_2(s)y(s) ds$$

Nous déduisons donc :

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t f_2(s) ds\right)$$

PREUVE.

On pose :

$$R(t) = \int_a^t f_2(s)y(s) ds$$

Alors :

$$R'(t) = f_2(t)y(t) \leq f_2(t)f_1(t) + f_2(t)R(t)$$

On a :

$$\frac{d}{ds}[R(s) \exp(-\int_a^s f_2(v) dv)] \leq f_2(s)f_1(s) \exp(-\int_a^s f_2(v) dv)$$

En effectuant l'intégration de a à t , nous obtenons :

$$R(t) \leq \int_a^t f_2(s)f_1(s) \exp(\int_s^t f_2(v) dv)$$

Après avoir substitué les expressions dans l'inégalité 1.3, nous aboutissons à l'inégalité 1.4. Si f_1 est une fonction croissante, alors l'inégalité 1.4 se réécrit de la manière suivante :

$$y(t) \leq f_1(t)[1 + \int_a^t f_2(s) \exp(\int_s^t f_2(v) dv) ds], t \in [a, b]$$

Le lemme a été démontré [16]. ■

Lemme 1.2 *Lemme de Gronwall*[16][17]

Soient k et b deux constantes, avec $k > 0$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in I$, on ait :

$$\|y'(t)\| \leq k\|y(t)\| + b$$

Alors, pour tous t et t_0 dans I , on a l'estimation suivante :

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| \exp^{(k|t-t_0|)} + b \frac{\exp^{(k|t-t_0|)} - 1}{k}.$$

Remarque 1.1 [17]

Attention à ne pas oublier les valeurs absolues $|t - t_0|$ dans cet énoncé. Supposons, pour simplifier, que $b = 0$. Sous l'hypothèse faite, c'est-à-dire une majoration de la norme de y' , il est illusoire de vouloir montrer que $\|y(t)\|$ décroît une majoration en :

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k(t-t_0)}$$

Est donc absolument hors de question lorsque $t < t_0$

PREUVE. [17]

Si l'on décide de réaliser une translation, il est possible de considérer :

$$t_0 = 0$$

L'estimation de

$$\|y(t)\|$$

Dans le passé, c'est-à-dire pour $t < 0$, peut être obtenue en inversant le sens du temps, comme on le fait généralement. Pour ce faire, posons d'abord :

$$z(t) = y(-t)$$

qui vérifie encore :

$$\|z'(t)\| \leq k\|z(t)\| + b$$

Donc, pour $t \in I$ avec $t \geq 0$, notre objectif est de trouver une borne supérieure pour

$$\|y(t)\|$$

La première étape consiste à exprimer que :

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s) ds$$

Cela résulte initialement de l'application de l'inégalité triangulaire, suivie de l'utilisation de l'hypothèse, que :

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y(0)\| + \int_0^t \|y'(s)\| ds \\ \|y(t)\| &\leq \|y(0)\| + k \int_0^t \|y(s)\| ds + bt \end{aligned} \quad (1.5)$$

À ce point, nous avons obtenu une majoration de :

$$\|y(t)\|$$

qui dépend de tous les :

$$\|y(s)\|$$

pour $s \in [0, t]$. Cependant, on remarque que si l'on définit

$$v(t) := \int_0^t \|y(s)\| ds$$

alors la fonction v est de classe C^1 avec :

$$v'(t) = \|y(t)\|$$

Ainsi, l'inégalité 1.5 peut être reformulée comme suit :

$$v'(t) - kv(t) \leq \|y(0)\| + bt \tag{1.6}$$

Nous sommes sortis d'affaire. Maintenant, nous procédons comme dans la méthode de variation de la constante en multipliant l'inégalité 1.6 par \exp^{-kt} pour obtenir :

$$(v(t) \exp^{-kt})' \leq (\|y(0)\| + bt) \exp^{-kt}$$

Nous intégrons cette inégalité de 0 à t . Comme

$$v(0) = 0$$

Nous avons :

$$v(t) \leq \|y(0)\| \frac{1 - \exp^{-kt}}{k} + b \frac{1 - (1 + kt) \exp^{-kt}}{k^2}$$

Les résultats sont obtenus en utilisant les estimations de 1.5. (retour à la définition de v et observez que, puisque $k > 0$, multiplier l'inégalité par k préserve le sens de cette inégalité).

Le lemme a été démontré[17]. ■

1.3 La stabilité en \mathbb{R}^2

Les concepts d'existence et d'unicité des solutions sont des résultats locaux dans le temps et dans l'espace. Le concept de stabilité permet de comprendre leur comportement à mesure que le temps se rapproche de l'infini[2, 9]. Considérons le système décrit par l'équation différentielle 1.1 ; c'est un système autonome non linéaire :

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (1.7)$$

Afin de garantir l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Cauchy-Lipschitz 1.2, nous ferons dorénavant l'hypothèse que f est localement Lipschitzienne[2, 9].

Définition :(Point d'équilibre)[10]

On appelle point d'équilibre de l'équation 1.7 toute solution constante x^* qui vérifie :

$$f(x^*) = 0$$

Tout au long de ce manuscrit, nous étudions des systèmes de dimension deux non linéaires et autonomes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2) \\ x(0) & = x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \end{cases} \quad (1.8)$$

Les diagrammes de phases, qui sont des représentations graphiques illustrant l'évolution d'un système dynamique dans un espace multidimensionnel. Ces diagrammes permettent de visualiser les trajectoires et les points d'équilibre du système.

Définition :(stabilité)[2, 9, 33]

1-Stabilité à l'équilibre : Un point d'équilibre x^* est stable si, pour chaque perturbation $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toutes les conditions initiales $x(0)$ satisfaisant :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta$$

La solution du système satisfait :

$$\|x(t) - x^*\| < \epsilon, \forall t > 0$$

En d'autres termes, si les trajectoires initialement proches de x^* restent proches de x^* pour un temps suffisamment long, le point est stable.

2-Stabilité asymptotique : Un point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable si, en plus d'être stable, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toutes conditions initiales $x(0)$ satisfaisant :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta$$

La solution du système converge vers x^* lorsque $t \rightarrow \infty$. Autrement dit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

3-Instabilité : Un point d'équilibre x^* est instable si, pour chaque $\delta > 0$, il existe des conditions initiales $x(0)$ satisfaisant :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta$$

Tel que la solution du système s'éloigne de manière significative de x^* lorsque le temps évolue.

Définition[27]

Soit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ce système peut être :

$$Z' = JZ \tag{1.9}$$

avec $J(x_1^*, x_2^*)$ est sa matrice jacobienne et :

$$Z' = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

et :

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 - \text{Tr}\lambda + \det \lambda = 0 \tag{1.10}$$

Alors ces valeurs propres de 1.10 sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} \pm \sqrt{\text{Tr}^2 - 4\det}}{2}$$

Nous révélons maintenant les différentes possibilités pour que le point d'équilibre soit stable par rapport aux deux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

* Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$

1 - Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, le point d'équilibre est instable et est appelé « noeud instable ». Vous pouvez représenter cette situation dans un diagramme de phases à l'aide d'un logiciel tel que MATLAB.

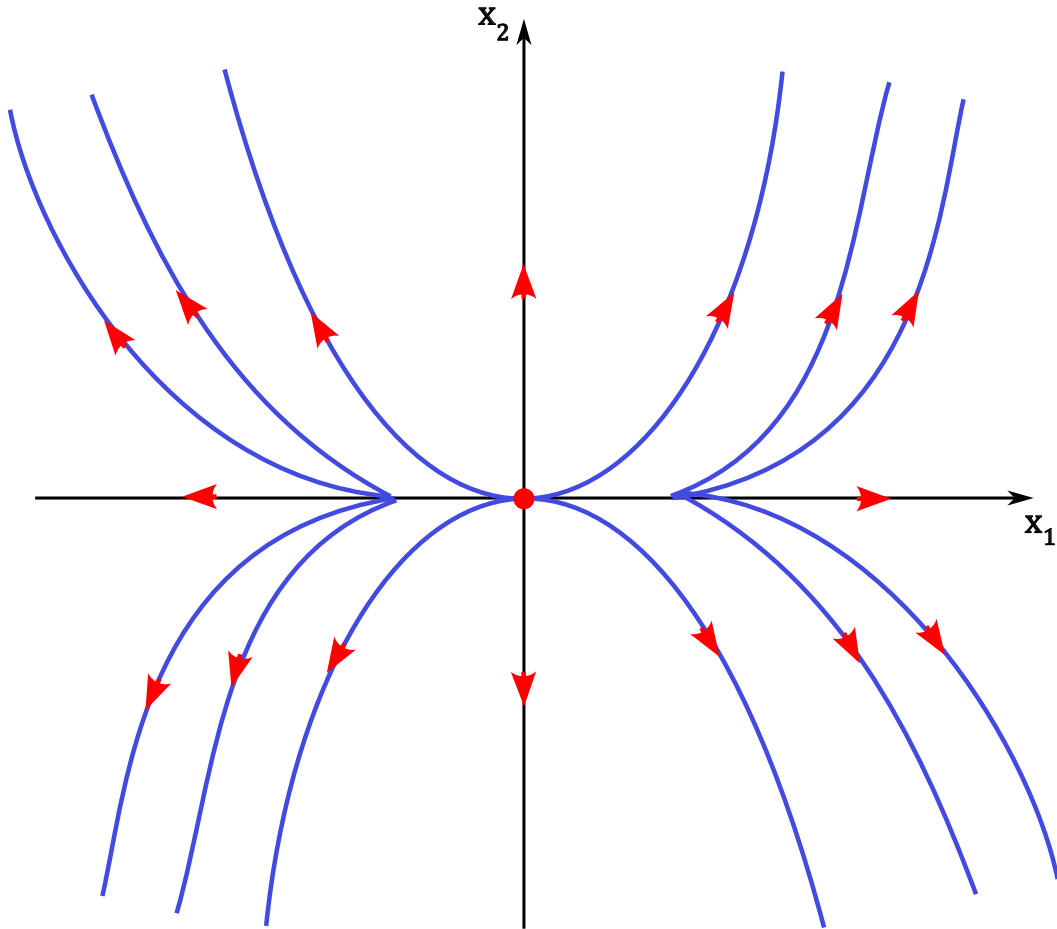


FIGURE 1.1 – noeud instable

2 - Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, Dans ce cas, le point d'équilibre est stable et est appelé "noeud stable". La représentation de cette situation est dans la figure 1.1 :

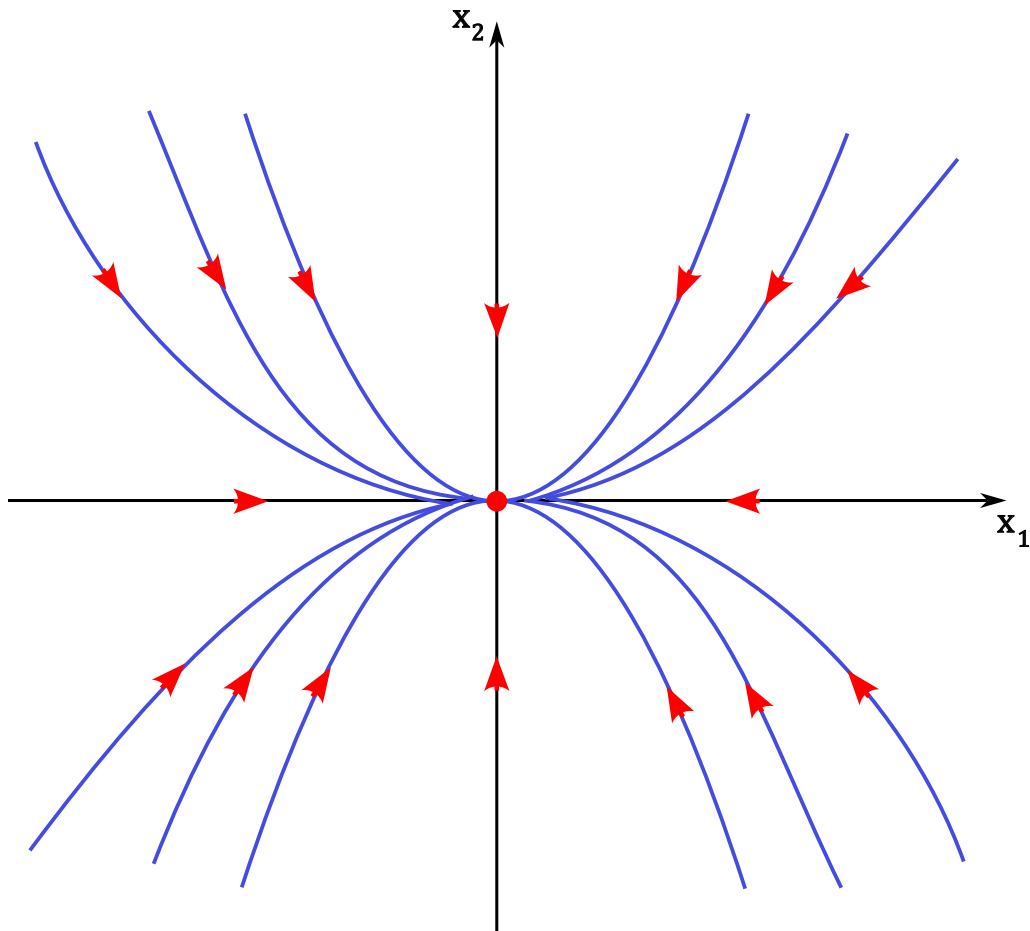


FIGURE 1.2 – noeud stable

3 - Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, Dans ce cas le point d'équilibre représente soit un col soit un point de selle :

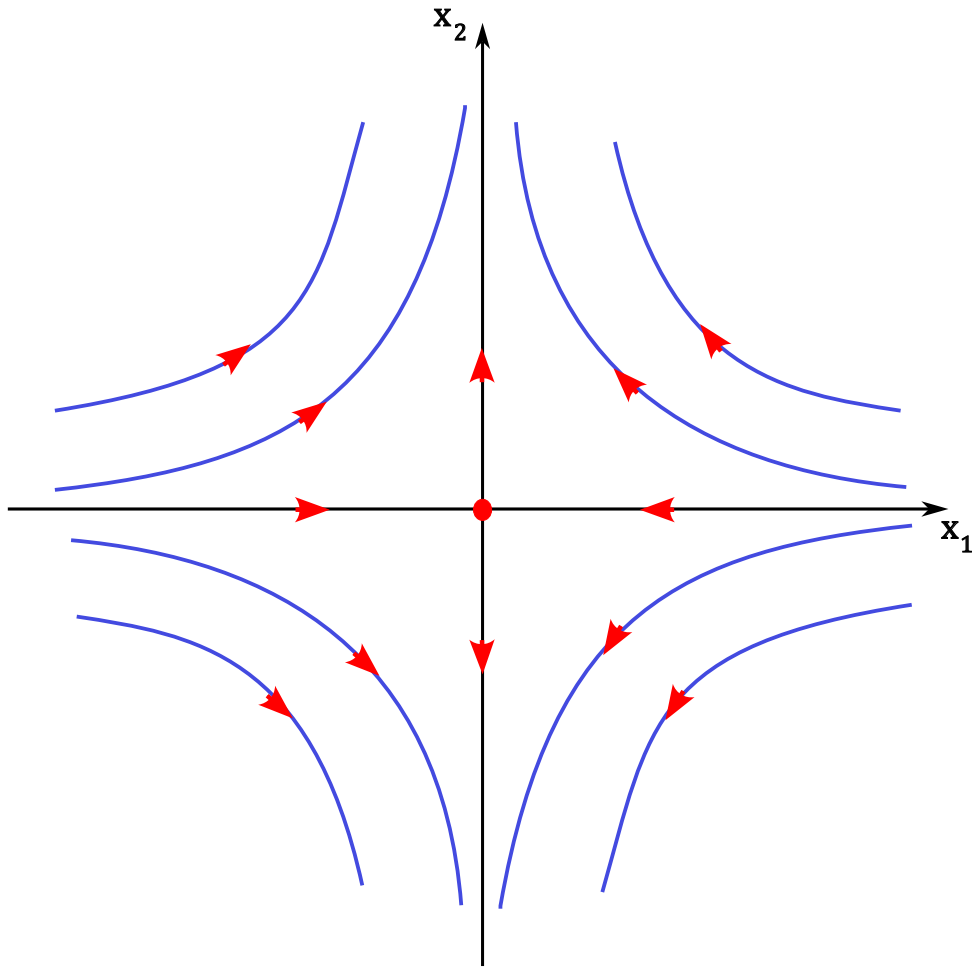


FIGURE 1.3 – point selle

* Si λ_1, λ_2 sont complexes on pose :

$$\lambda_1 = \gamma(\alpha) + i\beta(\alpha)$$

$$\lambda_2 = \gamma(\alpha) - i\beta(\alpha)$$

- Si $\alpha = 0$, les trajectoires sont des ellipses fermées avec une période $T = \frac{\beta}{2\pi}$.
Dans ce cas, le point d'équilibre est qualifié de "centre"[3, 27] :

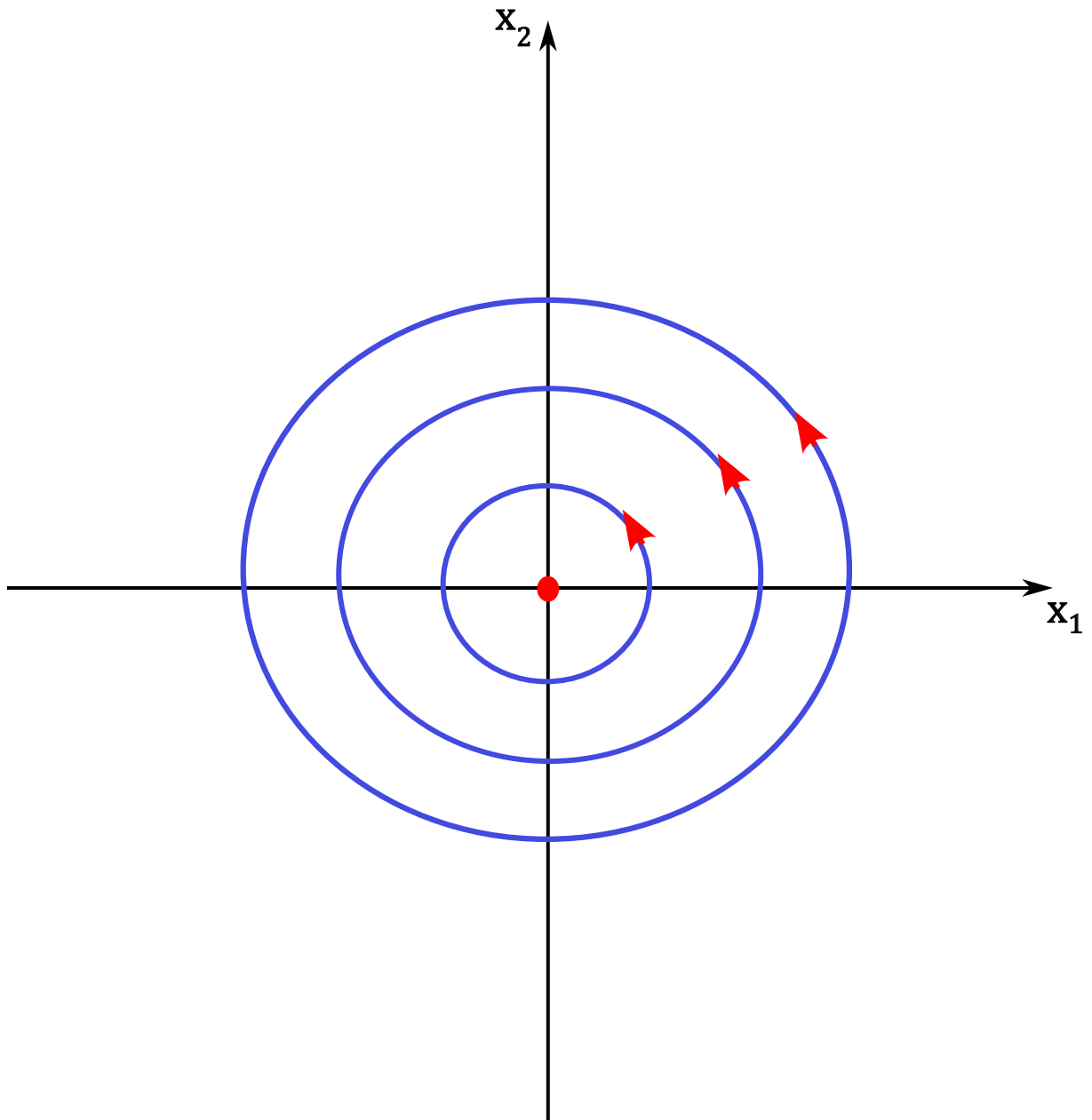


FIGURE 1.4 – Centre

Définition : (La linéarisation)[9, 27]

La linéarisation autour de l'équilibre (x_1^*, x_2^*) du système non linéaire 1.8 est définie par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On note :

$$J(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}$$
$$x^* = (x_1^*, x_2^*)$$

Pour simplifier les notations, on note par J la matrice jacobienne $J(x_1^*, x_2^*)$. Soient $\det(J^*)$ et $\text{Tr}(J^*)$ respectivement, le déterminant et la trace de la matrice jacobienne J calculée au point d'équilibre x^* .

Théorème 1.2 :

On suppose que, pour le système décrit par 1.8,

$$\det(J^*) \neq 0$$

Soit :

- *Si $\det(J^*) < 0$, alors le point d'équilibre x^* est un point-selle .*
- *Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{Tr}(J^*) < 0$, alors le point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable.*
- *Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{Tr}(J^*) \geq 0$, alors le point d'équilibre x^* est instable.*

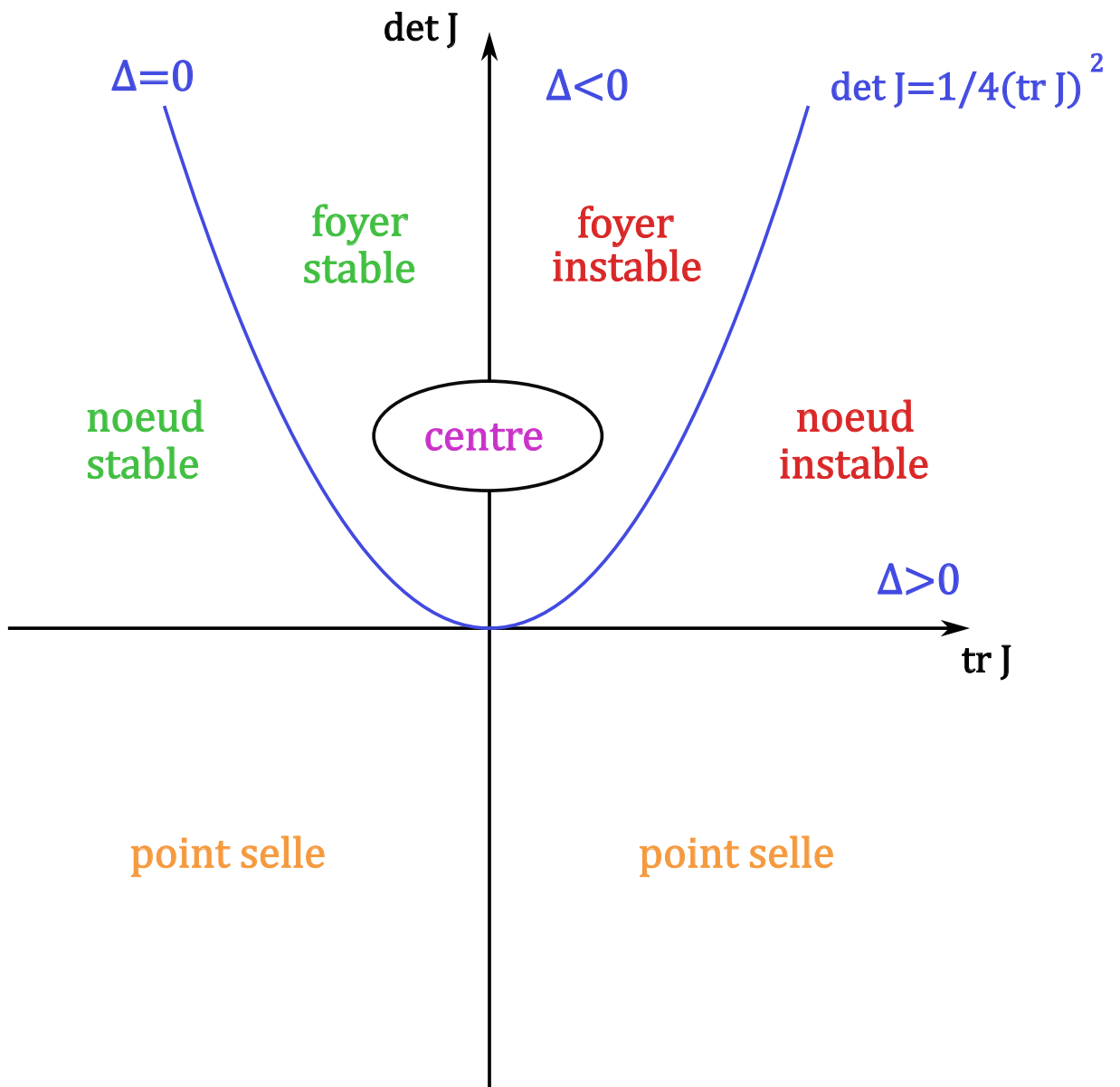


FIGURE 1.5 – diagramme de la trace et le déterminant

Théorème 1.3 :(Lyapunov)[27]

Soit le système dynamique 1.8 ayant l'origine comme point d'équilibre. Si une fonction réelle $V(x_1, x_2)$ définie dans un voisinage de l'origine satisfait les conditions suivantes :

- Les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ existent et sont continues.
- $V(x_1, x_2)$ est une fonction définie positive .
- La dérivée temporelle de V , notée \dot{V} , est une fonction définie négative, alors l'origine est un équilibre asymptotiquement stable. Dans ce cas, V est appelée fonction de Lyapunov forte.

Remarque 1.2 S'il s'avère impossible de trouver une fonction de Lyapunov forte, c'est-à-dire que l'on a seulement $\dot{V} \leq 0$ sur un domaine contenant l'équilibre, avec des points du domaine où $\dot{V} = 0$, alors on dit que la fonction de Lyapunov est faible. Dans ce cas, l'équilibre est stable, mais pas nécessairement asymptotiquement stable.

Proposition 1.1 :

Si V est une fonction de Lyapunov avec :

$$\lim_{\|(x_1, x_2)\| \rightarrow \infty} |V(x_1, x_2)| = \infty$$

Alors $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Définition :(Cycle limite)[3, 37]

Un cycle limite est une trajectoire périodique fermée qui est isolée. Une trajectoire fermée est une orbite qui ne se réduit pas à un point et qui revient à son état initial après une période de temps. Le terme isolée signifie que les trajectoires voisines du cycle limite ne forment pas de trajectoires fermées, au lieu de cela elles s'éloignent ou se rapprochent en formant des spirales autour du cycle limite

Si toutes les trajectoires voisines convergent vers le cycle limite, le cycle limite est stable ou attractif. En revanche, s'il existe des trajectoires voisines qui s'éloignent du cycle limite, celui-ci est considéré comme instable.

Le théorème de Bendixson énonce les conditions sous lesquelles il est possible de conclure l'absence de cycles limites (trajectoires périodiques) dans le plan phase (x_1, x_2)

Théorème 1.4 : (Bendixson)[26, 39]

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine connexe, supposons que (f_1, f_2) est continue différentiable dans D . Si la divergence :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0$$

Soit positive ou négative, alors le système 1.8 n'admet pas de solution périodique (cycle limite).

1.4 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est un type de bifurcation dans laquelle le système évolue d'un état stationnaire à un régime marqué par l'émergence d'un cycle limite due à la modification de propriétés stables à partir d'un point d'équilibre, Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases} \quad (1.11)$$

La bifurcation de Hopf dépend d'un paramètre scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit (x_1^*, x_2^*) un point d'équilibre du système 1.11 pour tout α . Le théorème suivant énonce les conditions nécessaires pour l'apparition de la bifurcation de Hopf[3, 4, 11]. La bifurcation est le point critique où le comportement qualitatif du système change de manière significative à mesure que les paramètres changent. Ils sont cruciaux pour comprendre les transitions de phase dans les systèmes dynamiques[4].

Théorème 1.5 On suppose que

$$H_1 : f_1(0, 0, \alpha) = f_2(0, 0, \alpha) = 0$$

H_2 : les valeurs propres (λ_1, λ_2) associé à la jacobienne $J(0, 0)$ sont des complexes tel que :

$$\lambda_1 = \gamma(\alpha) + i\beta(\alpha)$$

$$\lambda_2 = \gamma(\alpha) - i\beta(\alpha)$$

Si α^* vérifie :

$$i) \gamma(\alpha^*) = 0, \beta(\alpha^*) = \mu \neq 0$$

$$ii) \frac{\partial(\gamma)}{\partial(\alpha^*)} \neq 0$$

Alors le système 1.11 admet une bifurcation de Hopf en $\alpha = \alpha^*$

1.4.1 Indice de Marsden MacCracken

L'indice de Marsden-McCracken est un outil mathématique important pour l'étude des bifurcations dans les systèmes dynamiques, permettant de comprendre comment les solutions d'un système évoluent lorsque les paramètres changent il permet de caractériser la nature de ces bifurcations, qu'elles soient de type Hopf, de type selle-nœud, etc. Il est basé sur l'analyse des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système au point critique considéré :

$$M = \frac{1}{16}(f_{1x_1x_1x_1} + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_1x_1x_2} + f_{2x_2x_2x_2}) + \frac{1}{16\mu}[(f_{1x_1x_2}(f_{1x_1x_1} + f_{1x_2x_2})) - f_{2x_1x_2}(f_{2x_1x_1} + f_{2x_2x_2}) - f_{1x_1x_1}f_{2x_1x_1} + f_{1x_2x_2}f_{2x_2x_2}]$$

Avec :

$$f_{1x_1x_1x_2} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial^2 x_1 \partial x_2}(0, 0)$$

Et

$$f_{2x_1x_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0)$$

- * Si $M = 0$, alors on peut rien dire (bifurcation dégénérée) il n'y a pas de cycle limite mais il peut exister des centres pour cela on peut chercher une fonction de Lyapunov qui démontre l'existence de ces centres.
- * Si $M < 0$ alors le cycle est stable et la bifurcation est dite supercritique
- * Si $M > 0$ le cycle est instable et la bifurcation est souscritique

Chapitre 2

Les modèles mathématiques

Le but de ce deuxième chapitre est d'étudier les modèles mathématiques de base qui sont importants pour décrire l'évolution des populations. Ils consistent en des équations ou des règles mathématiques qui décrivent comment les variables d'un système évoluent au fil du temps. Les modèles mathématiques nous permettent de formuler des hypothèses, de prédire le comportement futur et d'explorer différentes conditions ou paramètres initiaux. On va analyser la stabilité de ces modèles par exemple :

- L'équation de Lotka-Volterra modélise l'interaction entre les populations de proies et de prédateurs.
- Des modèles de croissance exponentielle sont utilisés pour décrire la croissance démographique sans contrainte.
- Les modèles de réponse fonctionnelle des trois types de Holling.

L'analyse dynamique des systèmes consiste à étudier le comportement qualitatif et quantitatif des solutions aux modèles mathématiques.[3, 4, 21, 26, 27]

2.1 Modèle Malthusien[3, 29]

En 1798, Thomas Robert Malthus, économiste britannique, introduit le premier modèle de la dynamique des populations sous le nom "loi exponentielle". Son modèle examine la croissance d'une population similaire à un individu, représentée par la variable N , au fil du temps. Il se concentre sur deux facteurs constants et essentiels : les taux de natalité (N_n) et de mortalité (N_m) de la population, sans prendre en considération les facteurs de migration. Selon Malthus, ces deux taux sont supposés être proportionnels à la taille de la population. En

utilisant une formulation mathématique, nous pouvons exprimer cette relation de la manière suivante :

$$\begin{cases} N_m(t) = dN(t) \\ N_n(t) = bN(t) \end{cases}$$

- d est le taux de mortalité.
- b est le taux de natalité.

Où d et b sont strictement positifs. Dans un intervalle de temps Δt , on a ,

$$N(t+\Delta t)-N(t) = (N_n(t)-N_m(t))\Delta t$$

Autrement dit,

$$N(t+\Delta t)-N(t) = (dN(t)-bN(t))\Delta t$$

Ainsi,

$$N(t+\Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

Où $r = b-d$ est le coefficient de proportionnalité est appelé aussi coefficient de Malthus.

En divisant les deux membre de l'équation par Δt , on aura :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t)$$

par passage à la limite quand Δt tend vers zéro on obtient le modèle de Malthus :

$$N' = rN(t) \quad (2.1)$$

En intégrant l'équation on obtient la loi de croissance exponentielle :

$$N(t) = N(0) \exp(rt) \quad (2.2)$$

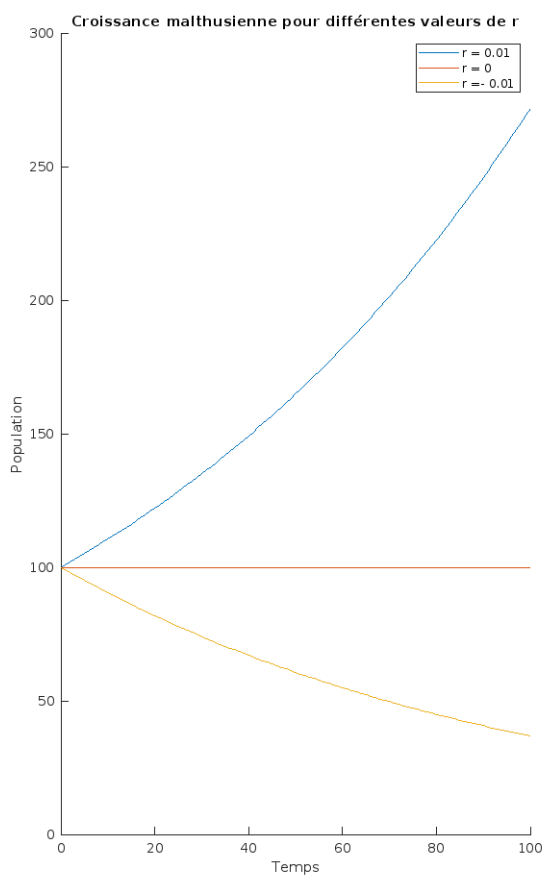


FIGURE 2.1 – Modèle Malthusien

2.2 Modèle logistique[3, 39, 40]

En 1837, le biologiste belge Pierre François Verhust a développé un modèle basé sur les principes de Malthus, en y incorporant des facteurs de correction et de retard. Il a pris en compte la limitation du taux de croissance de la population N et a formulé les hypothèses suivantes : Le nombre d'individus dans la population est limité par une capacité maximale, également appelée capacité de charge du support , À mesure que la population augmente, le taux de natalité diminue et le taux de mortalité augmente. En se basant sur ces hypothèses, Verhust a transformé et a exprimé ces taux en fonctions linéaires valides :

$$\begin{cases} c(N) = c_0 - \alpha N \\ d(N) = d_0 + \sigma N \end{cases} \quad (2.3)$$

Où c_0, d_0, α, σ sont des constantes positives et :

- c_0, d_0 les deux coefficients désignant les taux de mortalité et de natalité respectivement à l'instant t_0 .
- α, σ correspondent à la force de densité-dépendance des taux de naissance et de mortalité respectivement.

L'équation différentielle qui décrit ce modèle s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{dN}{dt} = (c - d)N \quad (2.4)$$

Si l'on insère les taux du système dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= [(c_0 - \alpha N) - (d_0 + \sigma N)]N \\ &= [(c_0 - d_0) - (\alpha + \sigma)N]N \end{aligned} \quad (2.5)$$

D'où :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right) \quad (2.6)$$

avec :

$$r = c - d$$

coefficient de Malthus est :

$$K = \frac{(c_0 - d_0)}{(\alpha + \sigma)}$$

La capacité limite

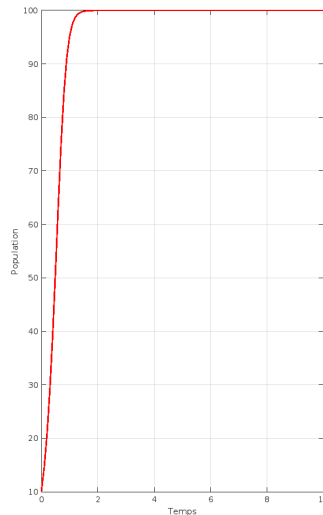


FIGURE 2.2 – verhulst

2.3 La prédation

- **Prédation** C'est un acte qui se produit lorsqu'un individu mange un autre vivant,[32]. Toute fois, on peut marquer ces éléments .
- **Proie** (prey),[35] c'est un organisme capturé par un autre organisme (prédateur) pour le consommer.
- **Prédateur**,[35] un corps (organisme) vivant qui est capable de capturer des proies vivantes pour se nourrir ou pour alimenter sa progéniture.
- **Interaction directe** ,[7]'est une activité exercée entre deux espèces (proie et prédateur).
- **La réponse fonctionnelle du prédateur** ,[18, 32] mesure la modification de la densité des prédateurs par rapport à celle des proies.

2.4 Modèle de Lotka volterra

Le modèle, formulé en 1925 et 1926 par Alfred James Lotka et Vito Volterra, consiste en un système de deux d'équations différentielles qui vise à décrire l'interaction entre un prédateur et sa proie. Le modèle repose sur trois hypothèses :

- Les proies N connaissent une croissance exponentielle, tandis que seuls les prédateurs P s'opposent à cette croissance (en raison de la disponibilité illimitée de nourriture pour les proies).
- Á chaque rencontre entre une proie et un prédateur, le nombre de prédateurs a tendance à augmenter, tandis que le nombre de proies diminue. Par conséquent, l'existence des prédateurs dépend des proies, car elles constituent leur source de nourriture.

- La notion de rencontre entre les proies et les prédateurs est représentée par le produit $N(t).P(t)$, qui est proportionnel à $N(t)$ et à $P(t)$.

Les équations différentielles pour les populations des proies(N) et des prédateurs(P) sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta NP \\ \frac{dP}{dt} = \delta PN - \gamma P \end{cases} \quad (2.7)$$

Où $\alpha, \delta, \beta, \gamma$ des constantes positives avec :

- N : la population de proie.
- P : la population de prédateur.
- α : le taux de reproduction des proies.
- β : le taux de prédation des proies par les prédateurs.
- δ : le taux de reproduction des prédateurs en présence des proies
- γ : le taux de mortalité des prédateurs en l'absence des proies.

que nous pouvons réécrire, en factorisant, sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha - \beta P) \\ \frac{dP}{dt} = P(\delta N - \gamma) \end{cases} \quad (2.8)$$

Les isoclines zéro sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 &\implies N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{dP}{dt} = 0 &\implies P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{\gamma}{\delta} \end{aligned}$$

Le modèle de Lotka-Volterra possède deux points d'équilibre, l'origine $(0, 0)$, qui correspond à l'absence totale de proie et de prédateur, ainsi qu'un point non trivial (N^*, P^*) situé dans le quadrant positif tel que :

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{\alpha}{\beta} \\ P^* &= \frac{\gamma}{\delta} \end{aligned}$$

Pour déterminer les caractéristiques de stabilité locale des points d'équilibre, il est nécessaire de calculer la matrice Jacobienne :

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta P & -\beta N \\ \delta P & -\gamma + \delta N \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne au point d'origine nous donne :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale admet deux valeurs propres réelles de signe opposées :

$$\lambda_1 = \alpha > 0$$

et

$$\lambda_2 = -\gamma < 0$$

Donc on a un point selle instable. En ce qui concerne le deuxième équilibre (N^*, P^*) on a :

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta P^* & -\beta N^* \\ \delta P^* & -\gamma + \delta N^* \end{pmatrix}$$

En remplaçant les valeurs de (N^*, P^*) par leurs expressions en fonction des paramètres, nous obtenons :

$$J(N^*, P^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme :

$$\text{tr}(A) = 0$$

et

$$\det(A) = \gamma\alpha > 0$$

on a un centre, donc on n'est pas sûr qu'il existe des trajectoires fermées entourant le point d'équilibre, d'après le théorème de linéarisation. Alors il faut chercher Une intégrale première avec un extremum au point (N^*, P^*) pour ce faire, nous devons éliminer le temps entre les deux équations du modèle, ce qui donne l'équation :

$$\frac{dN}{dP} = \frac{N(\alpha - \beta P)}{P(\delta N - \gamma)}$$

On obtient des variables séparables qui sont :

$$-\gamma \frac{dN}{N} + \delta dN = \alpha \frac{dP}{P} - \beta dP$$

L'intégrale de cette équation est :

$$-\gamma \ln N + \delta N = \alpha \ln P - \beta P + c$$

avec c constantes. On pose une fonction $L(N, P)$ qui égale à :

$$L(N, P) = -\gamma \ln N - \alpha \ln P + \delta N + \beta P$$

Ces dérivées partielles du premier ordre sont :

$$\frac{\partial L}{\partial N} = -\frac{\gamma}{N} + \delta$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = -\frac{\alpha}{P} + \beta$$

Les deuxièmes dérivées sont :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial N^2} = \frac{\gamma}{N^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P^2} = \frac{\alpha}{P^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial N \partial P} = 0$$

Par conséquent, les deux dérivées secondes sont positives au point d'équilibre. Cela veut dire que le développement limité du second ordre de la fonction $L(N, P)$ autour du point d'équilibre peut être exprimé comme :

$$L(N, P) = L(N^*, P^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial N^2} \right) (N - N^*)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial P^2} \right) (P - P^*)^2$$

Par conséquent, le signe de :

$$L(N, P) - L(N^*, P^*)$$

Reste constant et positif près de l'équilibre (N^*, P^*) , ce qui indique que la fonction $L(N, P)$ présente un minimum local à cet endroit. Les trajectoires autour de cet équilibre correspondent aux courbes de niveau de la première intégrale, ce qui signifie qu'elles se referment autour de ce point. En conséquence, nous pouvons conclure que le comportement central est préservé dans le modèle de Lotka-Volterra[3, 4, 26, 41].

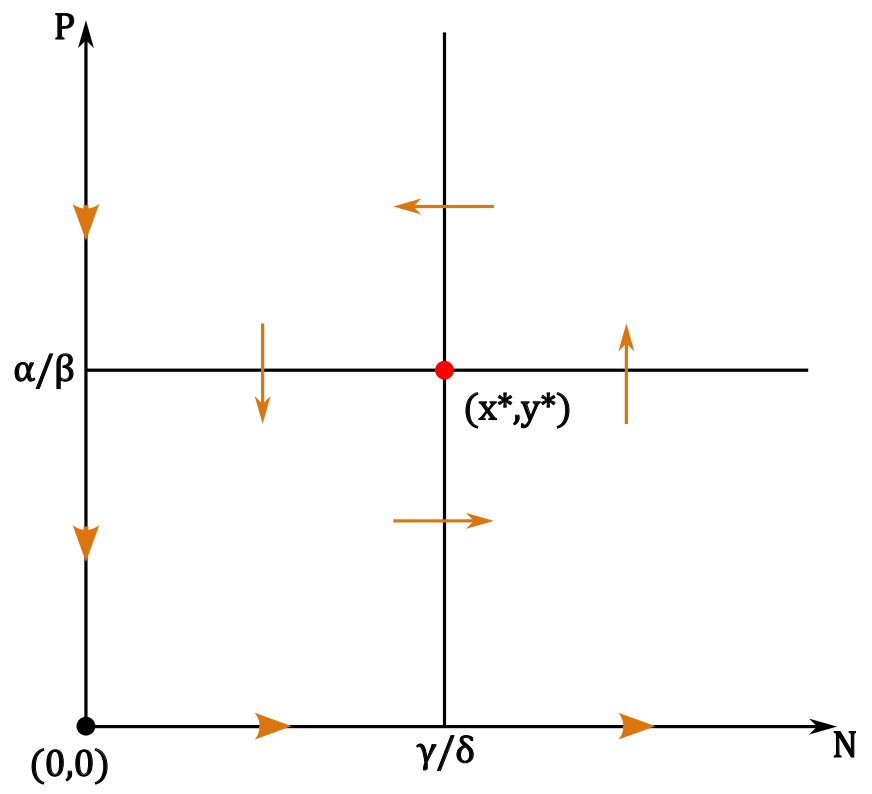


FIGURE 2.3 – lotka volterra 1

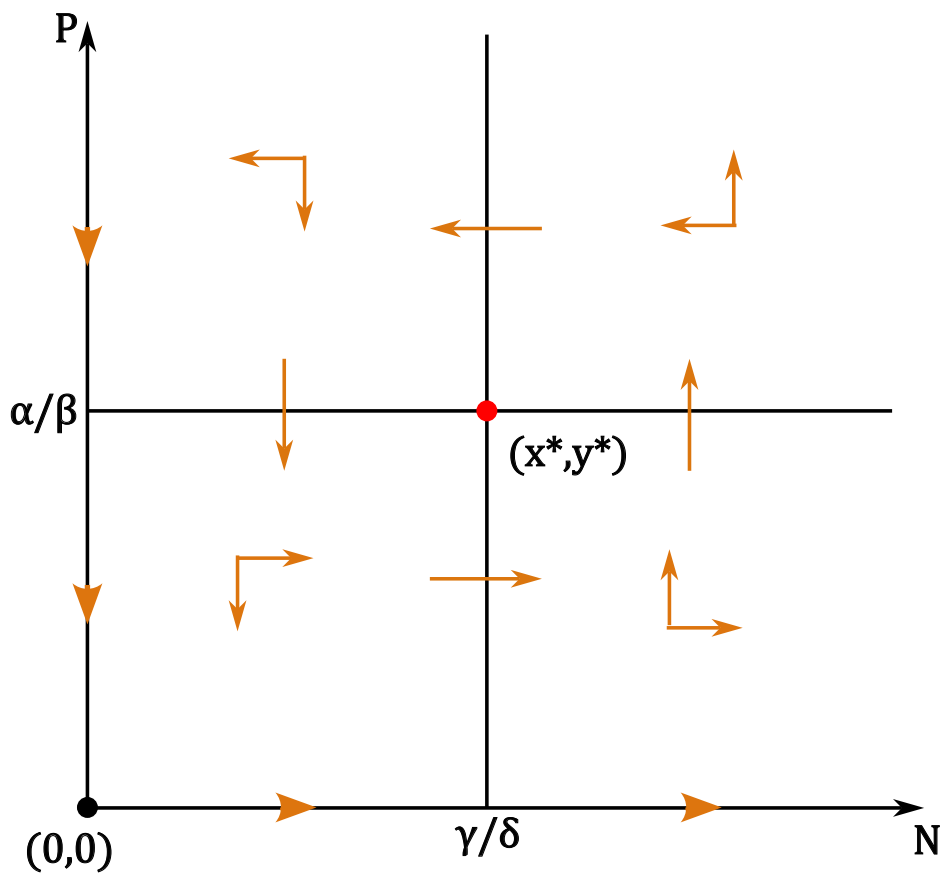


FIGURE 2.4 – lotka volterra2

2.5 la réponse fonctionnelle de prédateurs

La réponse fonctionnelle des prédateurs, également connue sous le nom de fonction prédateur, a été créée afin de modéliser le comportement des animaux en utilisant des fonctions mathématiques. Il existe diverses expressions de la réponse fonctionnelle, notée $F(x(t), y(t))$, qui dépendent de plusieurs hypothèses, dont l'une suppose que cette réponse dépend uniquement de la proie, ce qui signifie que $F(x(t), y(t)) = F(x(t))$ [2, 3, 21, 24, 31, 42].

Définition :(La fonction réponse)

Dans ce scénario particulier, la fonction de réponse fait allusion à la quantité de proie qu'un prédateur consomme au cours d'une période de temps définie. Vers la fin des années 1950, l'entomologue C. S. Holling a joué un rôle fondateur dans le domaine de l'étude des réponses fonctionnelles. Ses recherches se sont concentrées sur les densités et les caractéristiques des prédateurs ainsi que de leurs proies. Il a formulé et identifié trois types principaux de réponses fonctionnelles qui portent désormais son nom : la réponse fonctionnelle d'Holling type *I*, *II* et *III*.

2.5.1 Réponse fonctionnelle de Holling type I

La réponse fonctionnelle de Holling type I se caractérise par une croissance linéaire, ce qui signifie que le nombre de proies tuées est directement proportionnel à leur densité. Holling avance les hypothèses suivantes pour ce type de réponse fonctionnelle :

H₁ : Les prédateurs peuvent rechercher leurs proies de manière aléatoire, et le temps de recherche est négligeable.

H₂ : Le taux de recherche reste constant quelle que soit la densité de proies présentes.

H₃ : Il existe un niveau de saturation où le prédateur ne peut plus ingérer davantage d'individus.

$$F(x) = \begin{cases} \lambda x, \forall x < \bar{x} \\ \lambda \bar{x}, x \geq \bar{x} \end{cases}$$

- λ représente un coefficient constant de proportionnalité.

- \bar{x} représente le point de saturation des proies dans l'environnement.

2.5.2 Réponse fonctionnelle de Holling type II

En ce qui concerne le type II de Holling, également connue sous le nom de réponse fonctionnelle hyperbolique, se caractérise par le fait que le taux d'attaque, noté $a = bx$, du prédateur augmente lorsque le nombre de proies est faible, puis devient constant lorsque le prédateur atteint la saturation, et le temps t_h nécessaire pour capturer chaque proie, englobant le temps de chasse, de mise à mort, de dévoration et de digestion, est une valeur constante. En d'autres termes, le prédateur provoque une mortalité maximale à de faibles densités de proies. Par conséquent, les réponses fonctionnelles de type II sont typiques des prédateurs spécialisés dans l'attaque d'une ou de quelques proies, est représentée par l'expression suivante :

$$F(x) = \frac{bx}{1 + bt_h x} \quad (2.9)$$

Cette équation 2.9 a une autre écriture :

$$F(x) = \frac{Ax}{B + x}$$

Avec : $A = \frac{1}{t_h}$ et $B = \frac{1}{bt_h}$ constantes et positives.

2.5.3 Réponse fonctionnelle de Holling type III

La fonction de Holling type *III* est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux d'attaque du prédateur, noté $a = bx^2$, augmente initialement lorsque la densité des proies est faible, puis diminue lorsque le prédateur atteint la saturation. En d'autres termes, le prédateur intensifie sa recherche lorsque la densité des proies augmente, tandis que les proies à faible densité peuvent échapper aux prédateurs en se réfugiant. Cette dynamique est décrite par l'expression suivante :

$$F(x) = \frac{bx^2}{1 + bt_h x^2} \quad (2.10)$$

qui peut s'écrire comme :

$$F(x) = \frac{Ax^2}{B + x^2}$$

Avec

$$A = \frac{1}{t_h}$$

et

$$B = \frac{1}{\sqrt{bt_h}}$$

sont des constantes positives.

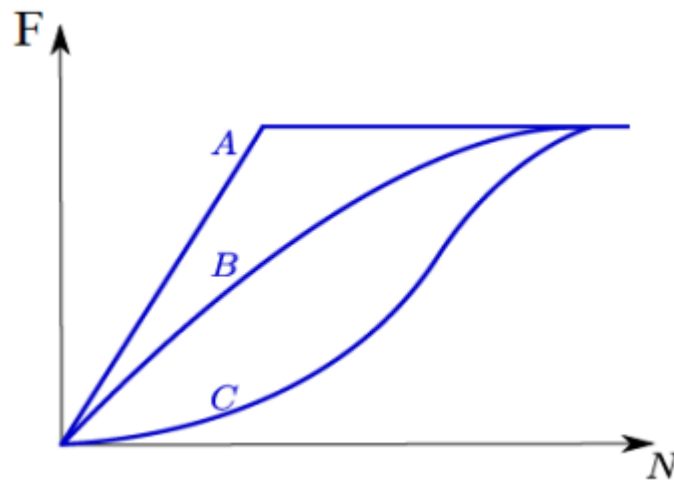


FIGURE 2.5 – Les 3 types de réponses fonctionnelles proposées par Holling [21, 24]

Dans la 2.5 les trois types de réponses fonctionnelles du prédateur sont distingués en fonction de la densité des proies : (A) Holling de type *I*, (B) Holling de type *II*, et (C) Holling de type *III*.

Chapitre 3

Etude d'un modèle proie-predateur intégrant les refuges des proies

Introduction

En raison de leur présence et de leur importance, la dynamique des prédateurs et des proies a longtemps été un thème central en écologie et en écologie mathématique [8, 20]. Bien que ces problèmes puissent paraître mathématiquement simples à première vue, ils deviennent en réalité souvent complexes et difficiles. Malgré les progrès considérables aient été réalisés dans la théorie des interactions prédateurs-proies au cours des quatre dernières décennies, de nombreuses questions mathématiques et écologiques restent sans réponse [12]. Les modèles d'équations différentielles appliqués aux interactions entre espèces sont l'une des applications classiques des mathématiques en biologie. À mesure que les techniques analytiques se développent et que la puissance de calcul des ordinateurs augmente, notre compréhension de ces modèles évolue également. Dans ce chapitre nous étudions un modèle proies-prédateur de type Lotka-Volterra. Dans ce modèle particulier, la densité de la population de proies est limitée par les ressources disponibles et, à mesure que la population de proies augmente, la réponse fonctionnelle du prédateur à la proie devient de plus en plus constante (correspondant à la réponse de type *II* de Holling [21]). De plus, les refuges spatiaux peuvent protéger une partie des espèces de proies de la prédation. Les interactions entre les acariens prédateurs et leurs proies sont souvent caractérisées par des refuges spatiaux, offrant ainsi aux proies un certain degré de protection contre la prédation et réduisant le risque d'extinction liée à la prédation.

Ce chapitre est structuré comme suit : La section 3.2 présente les résultats de base. Il vérifie la présence d'un équilibre et sa sensibilité aux paramètres m . En raison de notre intérêt pour la coexistence des espèces, nous accordons une attention particulière à l'équilibre interne du système. Nous analysons également les propriétés de stabilité et d'instabilité de l'équilibre et l'existence de cycles limites du système 3.2. La section 3.4 présente des simulations numériques

conçues pour illustrer les résultats ci-dessus. Enfin, la section 3.5 fournit des remarques finales.

3.1 Présentation d'un modèle mathématique

Maynard Smith [30] a démontré que la présence d'un refuge à échelle constante n'affecte pas la stabilité dynamique du modèle Lotka-Volterra, qui est neutrement stable. En revanche Selon les recherches de Hassel [22], les refuges qui restent de taille constante, quelle que soit leur quantité, peuvent transformer un comportement neutre en stabilité en un comportement stablement équilibré. Ces modèles mathématiques, combinés à diverses expériences, suggèrent que les refuges possèdent un impact stabilisateur sur l'interaction entre prédateurs et proies. Cependant, comme l'a souligné Taylor [38], le modèle examiné est fondé sur le système prédateur-proie :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{oxy}{1+ax} \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{daxy}{1+ax} \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec,

- x et y représentent respectivement le nombre de proies et de prédateurs à un instant t donné.
- Les paramètres b , k , c , d , a et o sont tous des constantes positives signifiant :.
 - b représente le taux de croissance des proies.
 - k correspond à la capacité de charge de la proie.
 - c est le taux de mortalité du prédateur.
 - $\frac{o}{a}$ représente le nombre maximum de proies que le prédateur peut consommer par unité de temps.
 - $\frac{1}{a}$ représente la portée. Ce rapport est la moitié de la densité de proies souhaitée.
 - d est le taux de conversion qui précise le nombre de prédateurs qui éclosent après la capture d'une proie.

- Le terme $\frac{ox}{1+ax}$ décrit la réponse fonctionnelle du prédateur.

Cette fonction de réponse est appelée fonction de Holling type II[21].

Ce chapitre élargit le modèle précédent en introduisant un refuge qui protège (mx) de la population de proies, où $m \in [0, 1)$ est une constante. $(1 - m)x$ Cela indique que les proies restent disponibles pour les prédateurs. La modification du 3.1 conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{o(1-m)xy}{1+a(1-m)x} \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{do(1-m)xy}{1+a(1-m)x} \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec m paramètres qui affectent la réponse fonctionnelle de l'espèce y est la densité des espèces x . On peut la considérer comme la proportion de proies capturées par unité de prédateur.

3.2 Existence de la solution

Pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système (3.2) on peut réécrire de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \\ x(0) = x_0, x_0 > 0 \\ y(0) = y_0, y_0 > 0 \end{cases}$$

Le résultat suivant montre que le système 3.2 admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 pour tout $x, y : x > 0, y > 0$.

Théorème 3.1 *Le système 3.2 admet une unique solution*

PREUVE.

Il est évident que F et G sont des fonctions de classe C^1 donc localement lipschitziennes. Par l'application du théorème de Cauchy lipchitz 1.1 pour toute condition initiale x_0, y_0 le système (3.2) possède une unique solution ■

Il est certain que x et y doivent être positives, cela entraînera que $x < K$ voir la partie 3.3.1 alors pour le moment nous allons l'utiliser comme un résultat pour prouver que la solution est bornée. Cette borniture est illustré par le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit l'ensemble B défini par*

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : w = x + \frac{1}{d}y \leq \frac{\theta}{v} \right\}$$

Alors toutes solutions qui commence dans B est bornée.

PREUVE.

Soit w une fonction telle que

$$w = x + \frac{1}{d}y$$

Le calcul de la dérivée temporelle de w donne :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{d} \frac{dy}{dt}$$

C-à-d :

$$\frac{dw}{dt} = bx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{o(1-m)xy}{1+a(1-m)x} - \frac{c}{d}y + \frac{o(1-m)xy}{1+a(1-m)x}$$

$\forall v > 0$ on a :

$$\frac{dw}{dt} + vw = bx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{c}{d}y + v(x + \frac{1}{d}y)$$

C-à-d :

$$\frac{dw}{dt} + vw = bx - \frac{bx^2}{k} - \frac{c}{d}y + vx + \frac{vy}{d}$$

D'où :

$$\frac{dw}{dt} + vw = x(b + v) - \frac{b}{k}x^2 - \frac{y}{d}(-v + c)$$

$$\frac{dw}{dt} + vw = -\frac{b}{k}[-\frac{xk}{b}(b + v) + x^2] - \frac{y}{d}(-v + c)$$

La factorisation donne :

$$\frac{dw}{dt} + vw = -\frac{b}{k}[(x - \frac{(b+v)k}{2b})^2 - \frac{k^2(b+v)^2}{4b^2}] - \frac{y}{d}(-v + c)$$

En se basant sur les conditions précédentes, on trouve cette majoration

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + vw &\leq \frac{k}{4b}(v + b)^2 - \frac{1}{d}(c - v) \\ \frac{dw}{dt} + vw &\leq \frac{k}{4b}(v + b)^2 \end{aligned}$$

Posons : $\theta > 0$

$$\frac{k}{4b}(v + b)^2 = \theta$$

D'après les résultats obtenus, l'inégalité précédente devient :

$$\frac{dw}{dt} + vw \leq \theta$$

maintenant si nous choisissons $v < c$ donc le côté droit est bornée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Ainsi nous choisissons $\theta > 0$ tel que :

$$\frac{dw}{dt} + vw < \theta.$$

En appliquant le lemme de Gronwall 1.2 nous obtenons :

$$0 < w(x, y) < \frac{\theta}{v}(1 - \exp^{-vt}) + w(x(0), y(0)) \exp^{-vt}$$

Par passage à la limite, on a $\lim_{t \rightarrow \infty}$, on conclut que

$$0 < w < \frac{\theta}{v}$$

[23]. ■

3.3 Analyse de l'équilibre

3.3.1 Les points d'équilibres

Ici, nous essayons de déterminer les points d'équilibres associés au système 3.2.

Considérons les isoclines suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} bx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{a(1-m)xy}{1+a(1-m)x} = 0 \\ -cy + \frac{d(1-m)xy}{1+a(1-m)x} = 0 \end{cases}$$

D'après cette équation :

$$bx(1 - \frac{x}{k}) = \frac{cy}{d}$$

On a :

$$x < k$$

L'équation :

$$-cy + \frac{do(1-m)xy}{1+a(1-m)x} = 0$$

Pour

$$y^* = 0$$

on trouve

$$x^* = 0$$

ou bien

$$x^* = k$$

et si :

$$x^* = \frac{c}{(do-ca)(1-m)}$$

on a :

$$y^* = \left(\frac{bd}{k}\right) \left(\frac{k(do-ca)(1-m)-c}{[(do-ca)(1-m)]^2}\right)$$

Pour que l'équilibre $P_2(x^*, y^*)$ soit positif, nous avons d'abord besoin de la condition suivante :

$$do - ca > 0. \quad (3.3)$$

De même, pour que y^* soit positif il faut la condition suivante :

$$0 \leq m < 1 - \frac{c}{k(do-ca)}. \quad (3.4)$$

Ainsi, pour l'existence de l'équilibre positif, les deux conditions $do > ca$ et $0 \leq m < 1 - \frac{c}{k(do-ca)}$ doivent être retenues. On voit que x^* augmente avec m . Le théorème suivant résume ces résultats.

Théorème 3.3 *Le système 3.2 admet trois points d'équilibres :*

1. L'équilibre trivial $P_0(0, 0)$
2. Équilibre en l'absence de prédateur $y = 0$, $P_1(k, 0)$
3. Si

$$do > ca$$

Et

$$m < 1 - \frac{c}{k(do-ca)}$$

Alors L'équilibre intérieur (positif) $P_2(x^*, y^*)$ existe est instable avec :

$$\begin{cases} x^* = \frac{c}{(do-ca)(1-m)} \\ y^* = \left(\frac{bd}{k}\right) \left(\frac{k(do-ca)(1-m)-c}{[(do-ca)(1-m)]^2}\right) \end{cases}$$

3.3.2 Comportement dynamique

Dans cette partie , nous examinerons la stabilité des points d'équilibres P_0, P_1 et P_2 .

Pour cela nous avons besoin de calculer la matrice jacobienne J avec :

$$J = \begin{pmatrix} b - 2\frac{bx}{k} - \frac{o(1-m)y}{(1+a(1-m)x)^2} & -\frac{o(1-m)x}{(1+a(1-m)x)} \\ \frac{do(1-m)y}{(1+a(1+m)x)^2} & -c + \frac{do(1-m)x}{1+a(1-m)x} \end{pmatrix}$$

Afin de faciliter les notations, posons :

$$m_0 = 1 - \frac{c}{k(do - ca)}$$

$$m_1 = m_0 - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

Théorème 3.4 *Le système 3.2 admet point d'équilibre tel que :*

- i) L'origine P_0 est un point selle.*
- ii) Si $m > m_0$ Alors P_1 est localement asymptotiquement stable.*

PREUVE.

Le jacobien du système autour du point d'équilibre $P_0(0, 0)$ est donné par :

$$J_0 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Il est clair que les valeurs propres associées à J_0 sont :

$$\lambda_1 = b$$

et

$$\lambda_2 = -c$$

elles sont de signe opposé. Par suite, l'origine est un équilibre instable.

Concernant le point d'équilibre $P_1(k, 0)$, la matrice jacobienne associée au système 3.2 est :

$$J_1 = \begin{pmatrix} -b & -\frac{o(1-m)k}{1+ka(1-m)} \\ 0 & -c + \frac{do(1-m)k}{1+ka(1-m)} \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = -b$$

et

$$\lambda_2 = -c + \frac{do(1-m)k}{1+ka(1-m)}$$

Ainsi, si

$$m > m_0$$

L'équilibre P_1 est localement asymptotiquement stable, sinon lorsque

$$m \leq m_0$$

Le point P_1 est instable. ■

Remarque 3.1 *Le théorème 3.3 présenté que si l'équilibre intérieur est instable, le point P_2 existe et les deux populations des proies et des prédateurs coexistent.*

Dans la suite, nous allons déterminer les conditions pour lesquelles le point P_2 soit stable

Théorème 3.5 *Si*

$$m_1 < m < m_0$$

Et

$$do > ca$$

Alors le point d'équilibre P_2 est localement asymptotiquement stable .

PREUVE.

La matrice jacobienne associée à (3.2) calculée autour de l'équilibre P_2 est donnée par J_2 .

$$J_2 = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$$

Où :

$$X = b - \frac{2b}{k} \frac{c}{(do-ca)(1-m)} - \frac{b}{kdo(1-m)} ([k(do-ca)(1-m) - c])$$

$$Y = -\frac{c}{d}$$

$$Z = \frac{b}{ko(1-m)([k(do-ca)(1-m) - c])}$$

L'équation caractéristique associée à J_2 est :

$$\lambda^2 - \lambda X + YZ = 0$$

Dont les solutions sont λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = X = \text{Tr}(J_2)$$

Ainsi leur produit est :

$$\lambda_1 * \lambda_2 = YZ = \det(J_2)$$

D'après la condition

$$m < m_0$$

Il en résulte que $\det(J_2) > 0$ cela signifie que les deux valeurs propres sont positives. Donc pour que P_2 soit localement asymptotiquement stable il faut que :

$$\text{Tr}(J_2) < 0$$

et ceci ne pourra se produire que si :

$$m > m_1 \tag{3.5}$$

Sinon, si :

$$m < m_1$$

Alors l'équilibre intérieur P_2 est instable.

Remarque 3.2 *Le théorème précédent montre que les proies et les prédateurs atteignent leur stade d'équilibre et sont en coexistence si :*

$$m_1 < m < m_0$$

Maintenant si

$$m = 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

On dit que le système 3.2 conduit à avoir des solutions périodiques de petite amplitude de type Hopf (cycles limite) près P_2 .

3.3.3 Existence de cycle limite

Dans deux dimensions, il est généralement admis que les modèles de systèmes compétitifs ou coopératifs ne peuvent pas représenter des cycles limites. De plus, dans le cas des systèmes prédateurs-proies, l'existence et la stabilité des cycles limites sont étroitement liées à l'existence et à la stabilité des équilibres positifs. Nous supposons qu'un équilibre positif existe, sinon les populations de prédateurs ont tendance à disparaître [14]. Si cet équilibre est asymptotiquement stable, alors des cycles limites peuvent se produire, exigeant que le cycle le plus interne soit instable en interne et le cycle le plus externe soit stable en externe.

Si des cycles limites ne se produisent pas dans ce cas, l'équilibre est globalement asymptotiquement stable. Si un équilibre positif existe et est instable, au moins un cycle limite doit se produire. Dans cette partie, nous montrerons qu'il existe un cycle limite stable unique pour le système 3.2 lorsque le point P_2 perd sa stabilité locale. Nous considérons le système 3.2 sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - yh(x), x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = y[-c + q(x)], y(0) > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où

$$g(x) = b\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

$$h(x) = \frac{o(1-m)x}{1+a(1-m)x}$$

Et

$$q(x) = \frac{do(1-m)x}{1+a(1-m)x}$$

Le but du théorème suivant est de montrer que le système 3.6 admet un cycle limite.

Théorème 3.6 *Supposons que dans le système 3.6 :*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\left(\frac{h'(x)}{h(x)}\right)}{-c + q(x)} \right) \leq 0$$

Pour

$$0 \leq x < x^*$$

Et

$$x^* < x \leq k$$

Alors le système 3.6 possède exactement un cycle limite qui est globalement asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble

$$\{(x, y) | x > 0, y > 0, P_2(x^*, y^*)\}$$

A l'aide du théorème 3.6, nous pouvons facilement prouver le théorème suivant.

Théorème 3.7 *Si*

$$m \leq 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

Le système 3.3.1 a exactement un cycle limite qui est globalement asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble

$$\{(x, y) | x > 0, y > 0, P_2(x^*, y^*)\}$$

PREUVE.

Montrons que :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\left(-\frac{b}{k}\right) + b\left(1 - \frac{x}{k}\right) - xb\left(1 - \frac{x}{k}\right)\left(\frac{1}{1+a(1-m)x}\right)}{-c + \frac{do(1-m)x}{1+a(1-m)x}} \right) \leq 0$$

Ou bien :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x(2x + \frac{1}{a(1-m)} - k)}{x - \lambda} \right] \geq 0$$

Où

$$\lambda = \frac{c}{(1-m)(do - ca)}$$

Est équivalent à prouver :

$$(x - \lambda)^2 + \lambda \left(\frac{k - \frac{1}{a(1-m)}}{2} \right) - \lambda^2 \geq 0$$

Avec :

$$\frac{k - \frac{1}{a(1-m)}}{2} \geq \lambda$$

C'est à dire :

$$m \leq 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

L'égalité est vraie si et seulement si

$$m = 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

En regroupant l'ensemble des résultats , nous pouvons formuler le théorème ci dessous. ■

Théorème 3.8 *Si $do > ac$ Alors les contraintes sur m pour l'existence et la stabilité de point d'équilibre positif sont les suivantes :*

1.

$$1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)} < m < 1 - \frac{c}{k(do - ca)}$$

Est un cycle limite globalement existe lorsque :

2.

$$m \leq 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)}$$

table 1 :

paramètre	$P_0(0, 0)$	$P_1(k, 0)$	$P_2(x^*, y^*)$
$m \in [0, A)$	instable	instable	instable, existence d'un cycle limite
$m = A$	instable	instable	solution périodique instable petite amplitude
$m(A, B)$	instable	instable	asymptotiquement stable
$m = B$	instable	instable	n'existe pas
$m \in (B, 1)$	instable	stable	n'existe pas

Par conséquent, en ajustant de manière appropriée le paramètre de refuge m , le cycle peut être éliminé et l'état du système devient stable, comme le montre le tableau 3.3.3.

$$A = 1 - \frac{c}{k(do - ca)} - \frac{do}{ka(do - ca)},$$

$$B = 1 - \frac{c}{k(do - ca)}$$

3.4 Simulations numériques

En utilisant les valeurs spécifiques des paramètres suivants : $b = 10$, $k = 100$, $a = 0.02$, $c = 0.09$, $o = 0.6$, $d = 0.02$, dans les unités appropriées. Nous allons vérifier si l'équilibre du système existe et aussi si ses caractéristiques de stabilité sont satisfaites

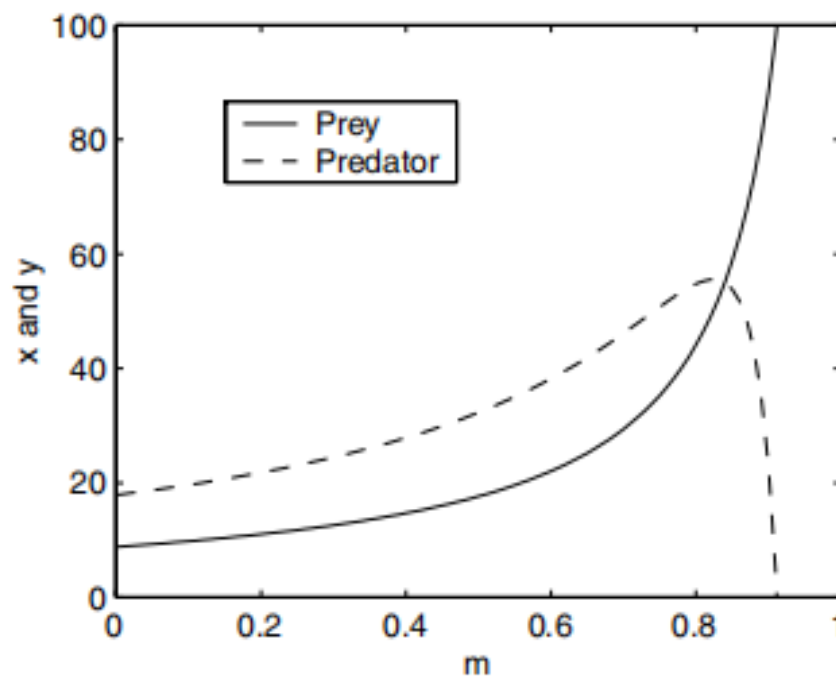


FIGURE 3.1 – un diagramme de bifurcation pour le système 3.3.1 avec m comme paramètre de bifurcation, L'axe verticale mesurait à la fois X (ligne continue) et Y (ligne brisé)

[11].

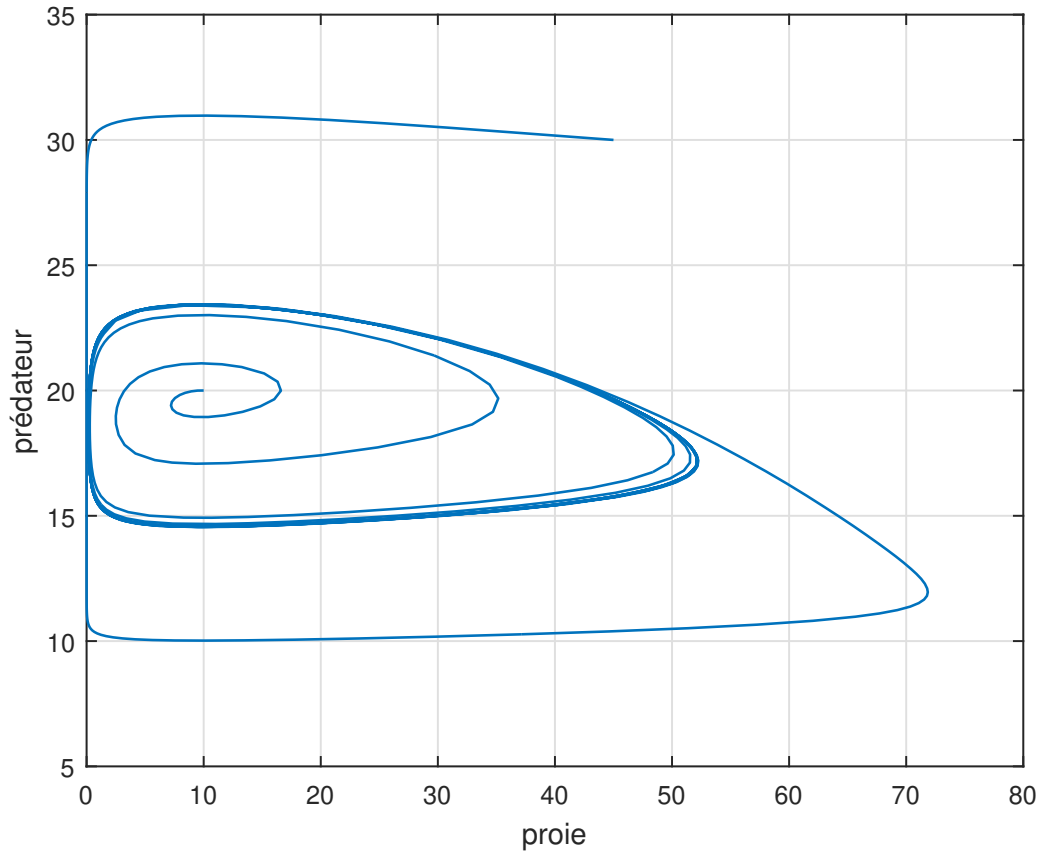


FIGURE 3.2 – le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.1$

De plus, nous établissons un cycle limite et confirmons sa stabilité globale. Nous constatons que lorsque $0,32 < m < 0,91$, le point d'équilibre interne est présent et stable, tandis que pour $0 \leq m \leq 0,32$, il devient instable, ce qui indique l'existence d'un cycle limite globalement stable. La figure 3.1 montre que nous avons pu voir le comportement de bifurcation du système 3.3.1. Par exemple, lorsque m vaut 0.1 le point d'équilibre interne lié aux coordonnées $(9.8, 19.65)$ est instable. Le diagramme de phase de la figure 3.2 illustre que toutes les solutions du système, à l'exception de l'équilibre, qui proviennent du quadrant positif du plan (x, y) , convergeront finalement vers un cycle limite solitaire.

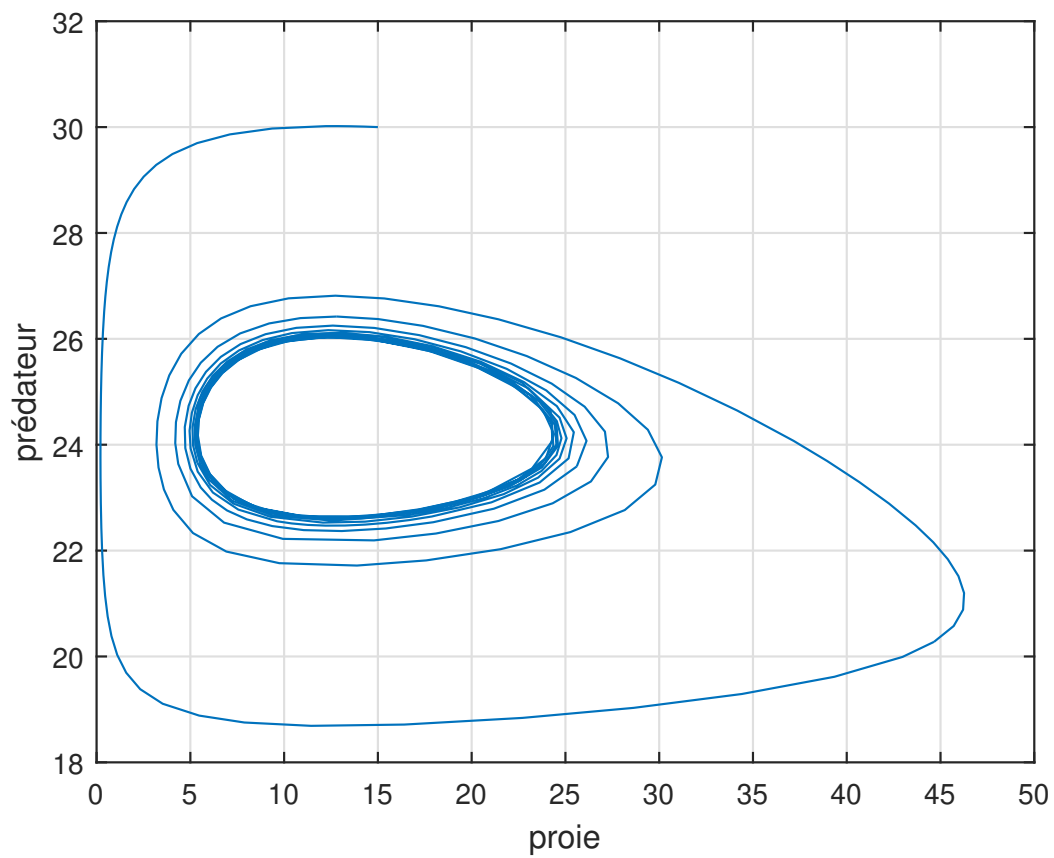


FIGURE 3.3 – le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.3$

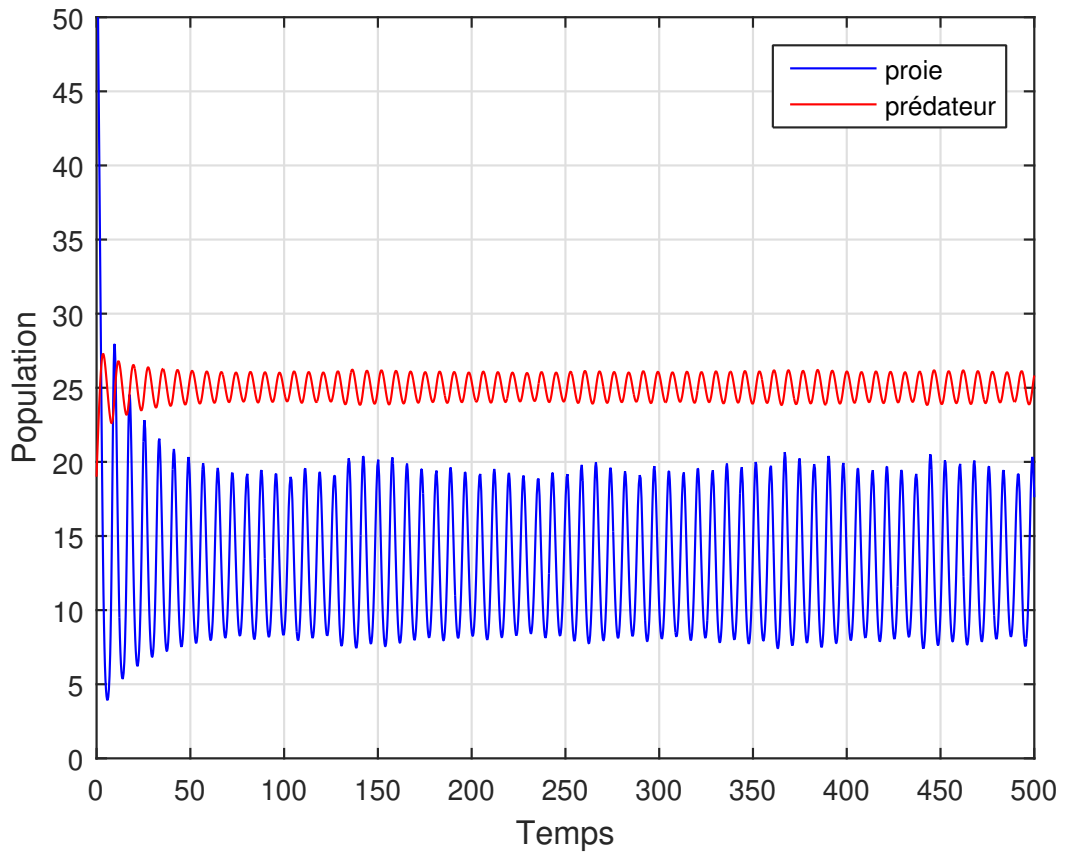


FIGURE 3.4 – courbe de solution pour $m = 0.32$ au point d'équilibre $P_2(13.0, 25.09)$

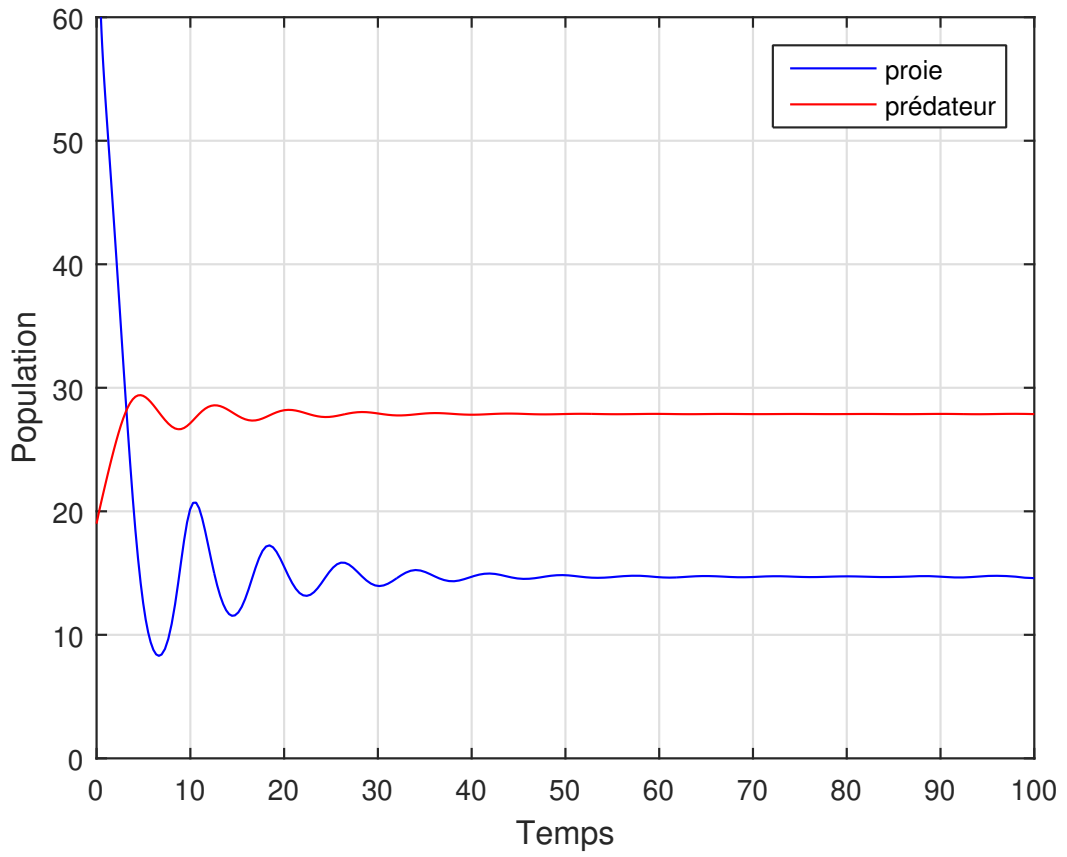


FIGURE 3.5 – courbe de solution pour $m = 0.4$ le modèle proie prédateur converge vers leurs valeurs d'équilibres

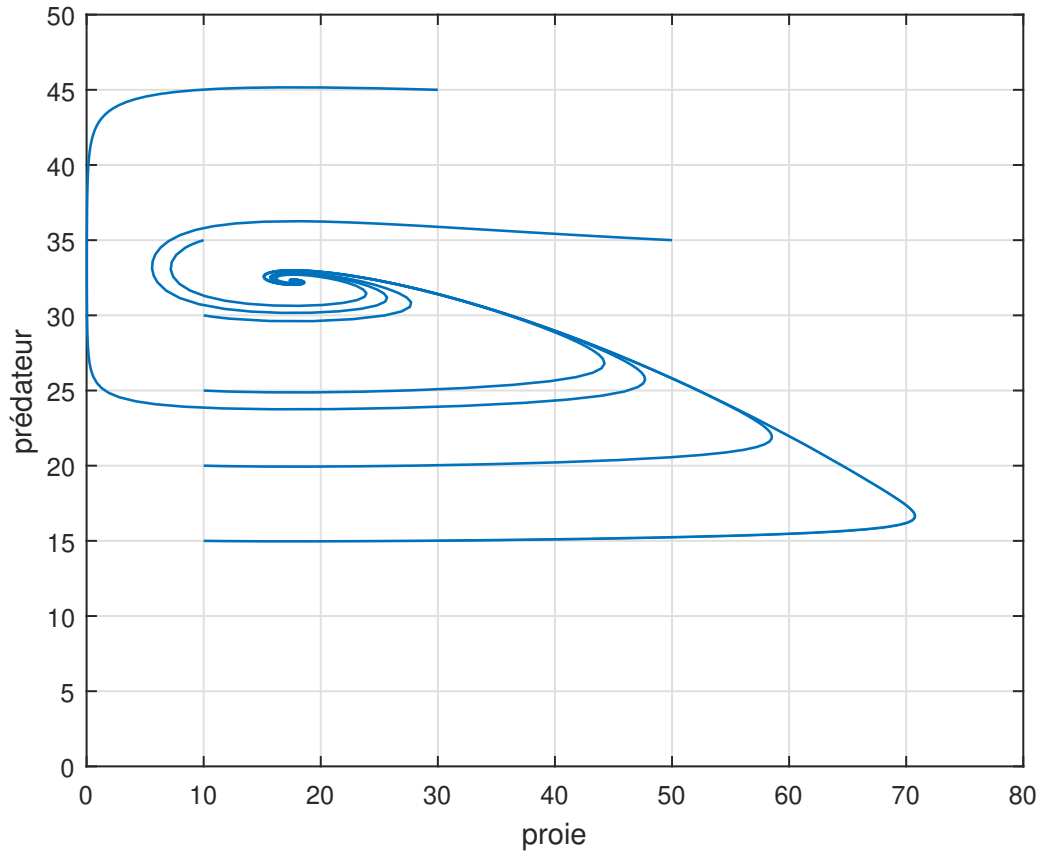


FIGURE 3.6 – le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.5$ et $P_2(17.65, 32.3)$ est un attracteur globale

D'après la figure 3.2, un constat clair s'impose : le système propose deux solutions distinctes. L'une de ces solutions commence à l'intérieur du cycle limite, tandis que l'autre commence en dehors de celui-ci, se rapprochant Du cycle limite . Une fois m établi comme constante à $m = 0.3$, il devient évident que le point d'équilibre intérieur $(12.6, 24.5)$ est également instable. Pour une représentation visuelle de ces informations, reportez-vous à la figure 3.3, qui affiche le portrait de phase.

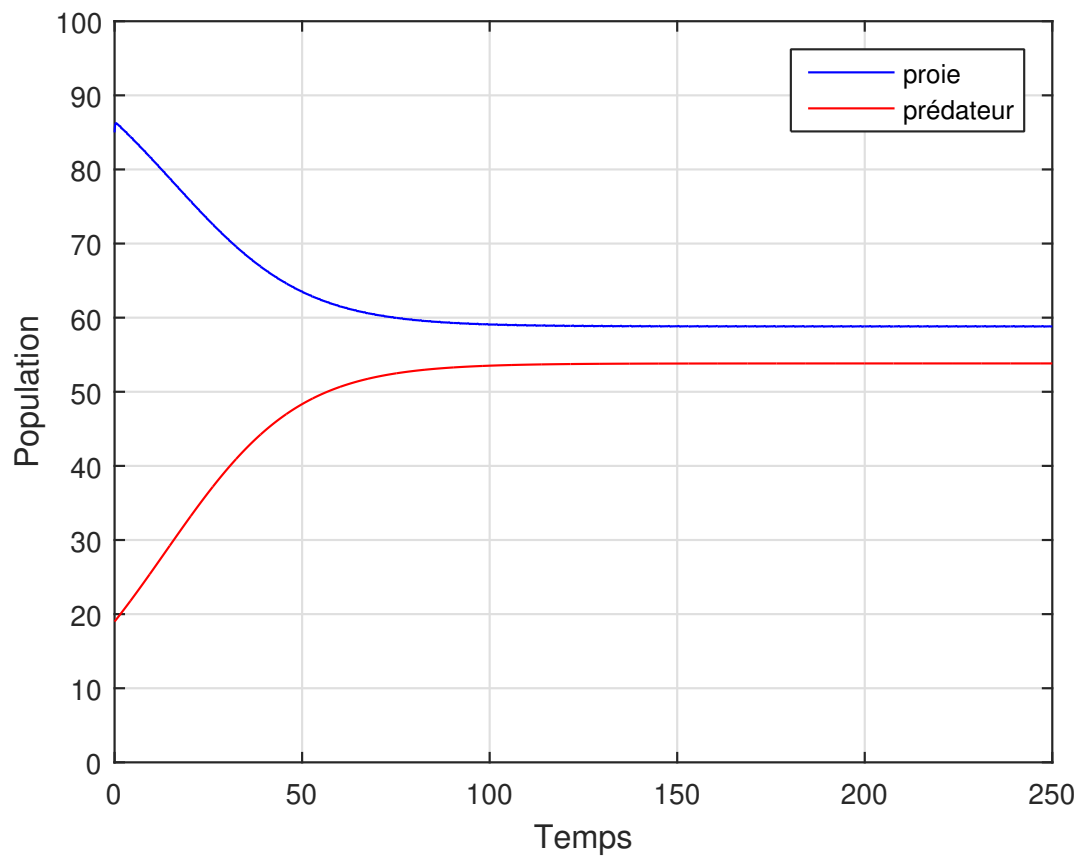


FIGURE 3.7 – courbe de solution pour $m = 0.85$ le modèle proie prédateur converge vers leurs valeurs d'équilibres (58.82, 53.82)

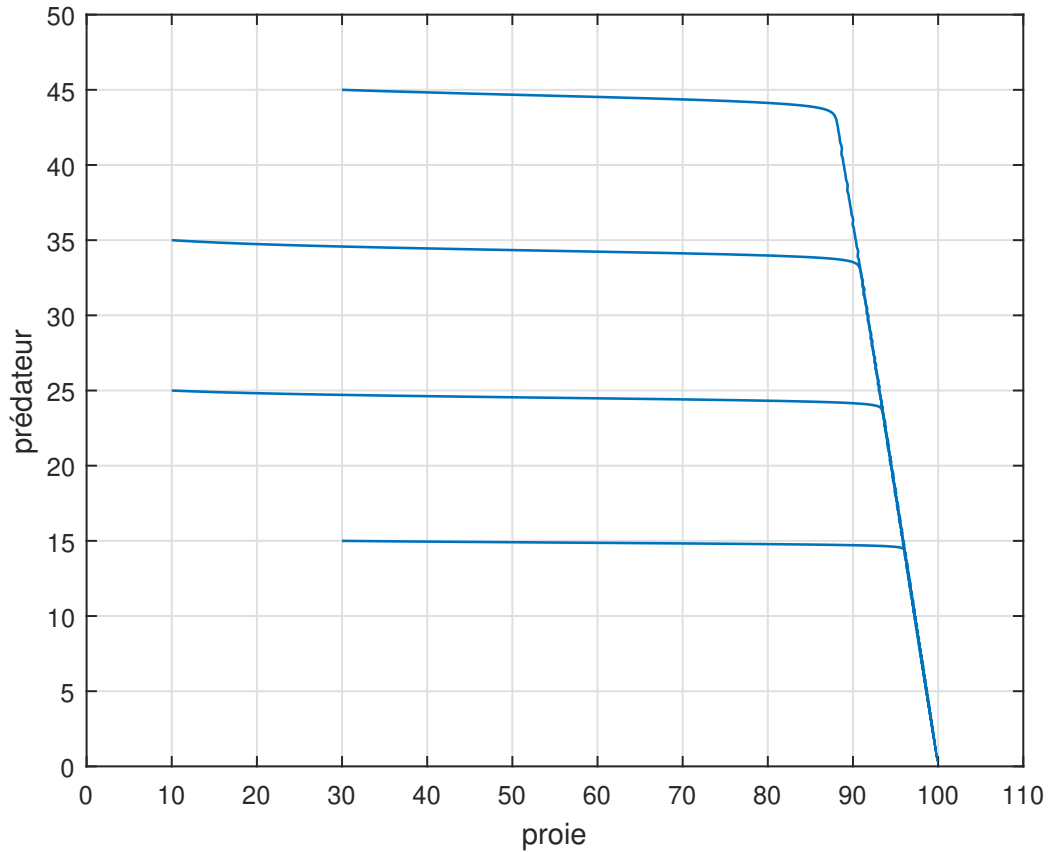


FIGURE 3.8 – le portrait de phase de système 3.3.1 pour $m = 0.95$ et il est remarquable $(100, 0)$ est un attracteur globale

Le comportement du système au point de bifurcation $m = 0,32$ est représenté sur la figure 3.53.6. Au dépassement de ce point critique, l'évolution du système est visualisée dans les graphiques 5 à 7. On constate que la stabilité du système est améliorée avec une augmentation de m , car il provoque une bifurcation de Hopf à $m = 0,32$. Cette bifurcation remplace à son tour la branche périodique par une branche d'équilibre stable.

La conduite du système 3.3.1 est présentée sur la figure 3.8 dans le cas où $m = 0,95$. Il est évident que le système ne possède pas d'équilibre interne dans ce scénario particulier. Au lieu de cela, le point d'équilibre au bord $(100, 0)$ est globalement et asymptotiquement stable.

3.5 Synthèse

Dans cette étude, nous analysons un système proie-prédateur qui comprend un refuge de proies et supposons que la fonction de réponse du prédateur suit un modèle de Holling de type *II*. L'introduction des refuges dans le système 3.1 permet de proposer un modèle plus réaliste, puisque des nombreuses populations des proies disposent effectivement de refuges. Les refuges sont importants pour la lutte biologique contre les ravageurs, mais leur augmentation peut également entraîner une augmentation de la densité des proies et des épidémies. Par exemple, Hoy [19] a mentionné que les « points chauds » avec de fortes densités de tétranyques dans les vergers d'amandiers peuvent déclencher des épidémies à l'échelle du verger. Ces hotspots correspondent à des zones où les prédateurs ne peuvent pas contrôler efficacement leurs proies et peuvent être considérés comme des refuges. A travers nos recherches, nous avons examiné la présence et la persistance d'équilibres dans un système donné, ainsi que les critères de persistance du dit système. Nos résultats indiquent que lorsque l'équilibre positif atteint un point d'instabilité, un cycle limite stable et solitaire émerge au sein du système. De plus, cette découverte nous amène à affirmer que la stabilité asymptotique locale de l'équilibre positif implique directement sa stabilité asymptotique globale. Afin d'affirmer davantage la validité de nos résultats, nous avons exécuté une simulation numérique qui a corroboré certaines de nos principales conclusions.[42, 12]

Conclusion générale

En résumé, l'étude de l'influence du comportement anti-prédateur sur l'évolution d'un modèle proie-prédateur avec une réponse de type Holling *II* a mis en lumière les subtilités de la relation entre ces deux populations. Cette étude a mis en évidence un certain nombre d'informations cruciales qui méritent de l'attention.

Lors d'une enquête initiale, il a été découvert que la réponse fonctionnelle de type Holling *II*, qui présente une croissance plafonnée du taux d'attaque des prédateurs par rapport à la densité des proies, peut produire des dynamiques complexes et diverses. Cette non-linéarité de la réponse fonctionnelle a des conséquences importantes en termes de stabilité de l'équilibre, de développement du cycle limite et de coexistence des populations.

Enfin, l'inclusion des méthodes anti-prédateurs dans le modèle a révélé que les mesures défensives des proies peuvent fortement influencer la dynamique du système. La population de proies peut s'adapter et évoluer pour produire des tactiques anti-prédateurs plus puissantes, qui peuvent ensuite affecter la population de prédateurs. Cette interaction complexe entre les deux groupes est captivante et constitue un excellent exemple de la nature complexe des écosystèmes naturels. L'importance des méthodologies mathématiques et des instruments de modélisation dans la compréhension des événements biologiques a été soulignée par cette recherche. L'examen des modèles prédateurs-proies, comme celui analysé dans cette étude, présente une opportunité efficace d'étudier l'impact de diverses suppositions et scénarios sur la dynamique des populations.[13]

Bibliographie

- [1] E. S. Allman et J. A. ROHDES, *Mathematical models in biology - An introduction*, Cambridge University Press, (2004) :3 – 40.
- [2] H. Amann, *Ordinary differential equations - An introduction to nonlinear analysis*, Walter de Gruyter, Berlin. New York, (1990).
- [3] P. Auger, *Modélisation mathématique en écologie*. Dunod. Paris,(2010) : 98.
- [4] P. Auger, C. Lett, et J.-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie : Cours et exercices corrigés*. Editions Tec & Doc, (2010).
- [5] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Academic Press, New York (1994).
- [6] D. Bernoulli, S. Blower, An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it. *Reviews in Medical Virology*, (2004), 14 (5) : 275–288.
- [7] N. Beroual, *Modèles mathématiques appliqués à la dynamique des populations*, (2015), Thèse de Doctorat
- [8] A. A. Berryman et P. PKINDELMANN, *Population Systems - A General Introduction*, Springer, (2008).
- [9] H. Dang-vu et C. Delcarte, *Bifurcations et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Eds Ellipses, Universités -Mécanique, (2000).
- [10] Découverte le calcule de point d'équilibres
<http://wwz.ifremer.fr/peche/Le-monde-de-la-peche/La-peche/co>.
- [11] Découverte le diagramme de bifurcation avec m paramètre de bifurcation
https://www.researchgate.net/publication/333905528_Hopf_bifurcation_analysis_of_a_predator-prey_model_with_Holling-II_type_functional_response_and_a_preym_refuge.
- [12] Berreta E, Kuang Y. Convergence results in a well known delayed predator-prey system. *J Math Anal Appl* (1996); 204 : 840–53.

- [13] Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos” par Morris W. Hirsch, Stephen Smale, et Robert L. Devaney - Un livre de référence pour l’étude des systèmes dynamiques, couvrant les équations différentielles, les bifurcations, le chaos, et bien plus encore.
- [14] A. Okubo S.A. Levin. Diffusion and ecological problems : modern perspectives. Interdisciplinary Applied Mathematics, 2nd Ed. Springer Verlag, New-York, (2001).
- [15] J. Hale H. Koçak, Dynamics and bifurcations. Texts in Applied Mathematics 3 Ed. Springer Verlag, Heidelberg, (1991).
- [16] Découverte le lemme de Gronwall
<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./g/gronwall.html>
- [17] Lemme de Gronwall
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~dominique.hulin/poly-cours-EDO.pdf>
- [18] A. Hasni, Les modèles et la modélisation vus par des enseignants de sciences et technologies du secondaire au Québec, Mugill journal, (2014) : 49.
- [19] Hoy MA. Almonds (California). In : Helle W, Sabelis MW, editors. Spider mites : their Biology, natural enemies and control. World crop pests, vol.1B. Amsterdam : Elsevier; (1985) : 229–310.
- [20] Berryman AA. The origins and evolutions of predator–prey theory. Ecology (1992); (1530) : 573
- [21] Holling CS. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulations. Mem Entomol Soc Can (1965); 45 : 3–60.
- [22] Hassel MP. The Dynamics of arthropod predator–prey Systems. Princeton : Princeton University Press; (1978).
- [23] H.Thiem, Mathématiques en biologie des populations, Princeton University Press,(2018).
- [24] Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. The Canadian Entomologist :91(7) : 385 – 398.
- [25] A. Lotka, Contributions to the analysis of malaria epidemiology I. General part. Amer J Hyg 3 (Suppl.1), (1923) : 1–121.
- [26] A.J. Lotka. Elements of mathematical biology. Dover Publications Inc., New York, (1956).
- [27] A.M Lyapunov, The general problem of the stability of motion (in Russian), Doctoral dissertation, Univ. Kharkov (1892).

- [28] H. Malchow, S. Petrovskii E. Venturino. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology. Theory, Models, and Simulation. Chapman Hall, CRC Mathematical and Computational Biology Series, (2000).
- [29] T. R. Malthus, Essai sur le principe de population, volume 2(5e) Edition de Jean-Paul Maréchal. Paris, Garnier-Flammarion, Traduit de l'anglais par P. et G.Prévost en (1823) sur l'édition de (1817), edition,(1992).
- [30] Maynard Smith J. Models in ecology. Cambridge : Cambridge University Press ; (1974).
- [31] J. D. Murray, Mathematical biology, Springer, 2nd Edition Berlin, (1993)
- [32] A. Pave, Modélisation Mathématique des systèmes vivants : de la cellule à l'éco-système, Lavoisier,(2012).
- [33] L. Perko, Diffèrential equations and dynamical systems, Springer 3rd Edition Verlag, New York (2001).
- [34] D. J. Rordriguez and L. Torres-Sorandpo. Models of Infectious Diseases in Spatially Heterogeneous Environments, Bulletin of Mathematical Biology (2001) : 63 : 547–571.
- [35] S. Sinha, R. Kumar G-S. Tyagi, A study of effect of pollution on the dynamique of predator-prey interaction, (2018).
- [36] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, New York, (2011).
- [37] M. E. Solomon, The natural control of Animal populations. Journal of Animal Ecology 18, (1949).
- [38] Taylor RJ. Predation. New York : Chapman Hall ; (1984).
- [39] F.Verhulst, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer-Verlag, New-York, (1990).
- [40] P.F. Verhulst, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, Correspondance Mathématique et Physique, (1838) : 10.
- [41] V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- [42] Skalski, G. T., Gilliam, J. F. (2002). Functional responses with predator interference : viable alternatives to the Holling type II model. Ecology, 83(11), 2991 – 3005.