THESE DE DOCTORAT D'ETAT

PRESENTEE
A
L'UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN
POUR L'OBTENTION
DU
DIPLÔME
DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Par

Malika KORSO FECIANE

Sujet

Estimation dans un processus de diffusion non linéaire à retards et tests

Soutenue à Tlemcen le Décembre 2010 devant le jury composé de:

Ghouali Noureddine	Président	Professeur	UABB Tlemcen
Bosq Denis	Examinateur	Professeur	Univ. Paris VI
Labbas Ahmed	Examinateur	Maître de Conférence	UABB Tlemcen
Laksaci Ali	Examinateur	Professeur	Univ. Sidi Belabès
Dib Hacen	Examinateur	Professeur	UABB Tlemcen
Kutoyants Yury	Rapporteur	Professeur	Univ.du Maine. Le Mans
Mourid Tahar	Rapporteur	Professeur	UABB Tlemcen

A la mémoire de mes parents et de mon frère Fouad

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements au Professeur Koutoyants Yury A. qui a été un directeur de thèse exemplaire. J'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines et professionnelles. Je le remercie donc pour la qualité et la rigueure de son suivi.

J'adresse également toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Mourid Tahar pour son suivi dans le cadre de mon travail.

J'exprime ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury de me faire l'honneur d'assister à ma soutenance. Je remercie très chaleureusement le Professeur Ghouali Noureddine pour avoir accepté de présider ma soutenance. J'adresse mes sincères remerciements aux Professeurs Bosq Denis, Dib Hacen, Labbas Ahmed et Laksaci Ali pour l'intéret qu'ils ont accordé à mon travail et pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie tous les membres du Département de Mathématique de l'Université de Tlemcen et du Département de Mathématique de l'Université du Maine pour leur aide précieuse et leur sympathie.

Pour finir, je tiens à remercier mon mari, mes frères, mes soeurs, mes deux filles et tous mes amis pour leurs encouragements réguliers et leur présence.

Table des matières

Table des matières **5**

Introduction générale **7**

1 Estimation d'un retard simple dans une diffusion non linéaire **11**
1 Introduction 11
2 Notations et hypothèses 12
3 Normalité asymptotique locale 14
4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance 22

2 Estimation de retards multiples dans une diffusion non linéaire **31**
1 Introduction 31
2 Notations et hypothèses 32
3 Normalité asymptotique locale 34
4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance 45

3 Tests sur les retards dans une diffusion non linéaire **55**
1 Introduction 55
2 Hypothèse simple contre alternative simple 56
2.1 Préliminaires - Notations 56
2.2 Test du rapport de vraisemblance 57
2.3 Test de niveau asymptotique α 59
2.4 Test de niveau α 61
3 Hypothèse simple contre alternative composée 63
3.1 Introduction 63
3.2 Test basé sur une fonction score 64
3.3 Test de niveau α 67
3.4 Test du rapport de vraisemblance 68
3.5 Test de l'estimateur du maximum de vraisemblance 69
4 Tests d'ajustement (sur hypothèses composées paramétriques et non paramétriques) 70
4.1 Hypothèse simple contre alternative composée 72

4.2 Hypothèse de base composée (paramétrique) 77

Bibliographie **81**

Introduction générale

Dans ce travail nous traitons de problèmes d'estimation paramétrique unidimensionnelle et multidimensionelle de retards ainsi que certains problèmes de tests d'hypothèses sur les paramètres de retard pour des processus de type diffusion non linéaire :

$$dX_t = \sum_{i=1}^{p} S_i(X_{t-\theta_i})dt + \varepsilon dW_t, \quad x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\vartheta = (\theta_1,...,\theta_p)^t \in \mathbb{R}^p$. L'inférence statistique porte sur la dérive non linéaire $S(.) = \sum_{i=1}^{p} S_i(.)$. Le coefficient de diffusion $\varepsilon \in (0,1)$ est supposé connu et W_t est un processus de Wiener standard. Notre étude est basée sur les observations $X^\varepsilon = \{X_t,\, 0 \leq t \leq T\}$ avec T fixé dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. La méthode d'estimation utilisée est basée sur des techniques statistiques introduites par J.Hajek , L. Le Cam, Ibragimov, R.Has'minskii et Y. Kutoyants et d'autres auteurs. En particulier l'introduction de la borne minimax des risques associés aux estimateurs dans un cadre plus général est due à J.Hajek et L. Le Cam et la théorie des méthodes d'estimation paramétrique en statistique asymptotique est due à I.Ibragimov, R.Has'minskii. Nous notons que dans ce type de problème d'estimation des retards nous avons la particularité suivante: si le paramètre à estimer est à deux dimensions $\vartheta = (\theta_1, \theta_2)^t \in \mathbb{R}^2$ alors l'écriture sous forme intégrale de l'équation étudiée au point $t - \theta_1$ donne

$$X_{t-\theta_1} = x_0 + \int_0^{t-\theta_1} (S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2}))ds + \varepsilon W_{t-\theta_1}$$

et nous remarquons que la trajectoire ($X_{t-\theta_1}$,$0 \leq t \leq T$) est du même ordre de régularité que les trajectoires du processus de Wiener
($W_{t-\theta_1}$,$0 \leq t \leq T$) par rapport au temps. Comme les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, il s'en suit que la dérive du modèle considéré $\{S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}), \quad 0 \leq t \leq T\}$ n'est pas différentiable par rapport au paramètre ϑ. Néanmoins, il est connu que pour certains problèmes d'estimation paramétrique de retards dans la dérive, l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistent , asymptotiquement normal et efficace [9]. Dans cette étude, nous montrons que le modèle en question est également régulier dans ce sens.
Le problème d'estimation de retards dans ce type de modèle étudié a été considéré en

premier par Y. Kutoyants [8] et [7](voir également [9] pour une étude exhaustive des systèmes dynamiques avec petit bruit, où plusieurs problèmes d'estimation de retard sont considérés avec des généralisations pour d'autres modèles. (voir aussi [13] et [12]). Nous notons aussi qu'un problème d'estimation de retards dans les systèmes non linéaires a été traité par Apoyan [1]. Recemment des problèmes d' estimations pour ces types de modèles de diffusions ont été considérés sous différentes asymptotiques. Particulièrement Kutoyants et Küchler [5] ont étudié un problème d'estimation de retard dans un modèle de diffusion linéaire sous l'asymptotique des grands échantillons ($T \to \infty$). Les auteurs montrent que à la différence des petites diffusions le problème d'estimation du retard devient singulier avec une vitesse de convergence des estimateurs proposés égale à T et des lois limites des estimateurs non gaussiennes.

La thèse comprend trois parties. Chacune étant rédigée pour permettre une lecture indépendante des parties précédentes. Il s'en suit quelques redondances dans l'ensemble du manuscrit.
Dans le chapitre 1, nous considérons l'équation différentielle stochastique de type diffusion non linéaire suivante

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T. \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0. \end{aligned}$$

où $S(\cdot)$ est une fonction régulière donnée. Nous nous proposons d'estimer le paramètre réel θ à partir des observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ sur l'intervalle de temps fixé $[0,T]$, et d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \to 0$). Nous montrons que cet estimateur est consistent, asymptotiquement normal et efficace.
Dans le deuxième chapitre nous regardons l'équation suivante

$$\begin{aligned} &dX_t = (S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}))dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T \\ &X_s = x_0, \quad s \le 0. \end{aligned}$$

où $S_1(\cdot)$ et $S_2(\cdot)$ sont deux fonctions régulières données, le paramètre à estimer est $\vartheta = (\theta_1, \theta_2)^t \in (0,T)^2$ et x_0 est fixé. Nous nous proposons d'estimer le paramètre ϑ à partir des observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ sur l'intervalle de temps fixé $[0,T]$, et d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \to 0$).Nous montrons des résultats dans un cadre matriciel et nous obtenons des résultats analogues au cas unidimentionnel.
Dans le troisème chapitre nous nous consacrons à des problèmes de tests d'hypothèses paramétriques et non paramétriques dans le même modèle. Le processus

observé est

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T. \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où le paramètre θ prend deux valeurs fixées $\theta = 0$ ou $\theta = \theta_1$. C'est dire que le processus n'a pas de retard ou il admet un retard égal à θ_1. Il s'agit de tester une hypothèse simple,

$$\mathcal{H}_0 : \quad \theta = 0 \quad \text{contre une alternative simple} \quad \mathcal{H}_1 : \quad \theta = \theta_1$$

Nous construisons dans la classe des tests $\mathcal{K}_\alpha$ au niveau α un test de type rapport de vraisemblance . Dans la suite nous proposons aussi dans une classe de tests $\mathcal{K}'_\alpha$ au niveau asymptotique α, un test de type Neyman-Pearson de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$. Une modification de ce dernier de test via un temps d'arret permet de construire un test au niveau α. Nous étendons ensuite ces résultats à des alternatives composées unilatéral en proposants plusieurs tests soit au niveau α ou asymptotiquement de niveau α. Nous montrons dans chaque cas la consistence des tests proposés. Dans la troisieme section nous construisons des tests d'ajustement de type Cramer von-Mises pour tester l'hypothèse simple de base

$$\mathcal{H}_0 : \quad \theta = \theta_0,$$

contre l'alternative composée non paramétrique suivante :

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

où $B(X_t) \neq S(X_{t-\theta_0})$ et B est une fonction inconnue. Nous montrons aussi la consistence du test proposé. Nous terminons par l'étude d'un test de type Cramer von-Mises pour tester l'hypothèse nulle composée $\mathcal{H}_0 : \quad \theta > 0$ contre l'alternative précédente $\mathcal{H}_1$ par construction d'une statistique utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance sous $\mathcal{H}_0$.

Chapitre 1

Estimation d'un retard simple dans une diffusion non linéaire

Nous considérons le problème de l'estimation d'un retard à partir de l'observation d'un processus réel de type diffusion non linéaire à temps continu, avec un petit coefficient de diffusion. Sous certaines conditions de régularité nous montrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre de retard est consistent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0.

1 Introduction

Nous considérons l'équation différentielle stochastique de type diffusion non linéaire suivante

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X_s &= x_0, \quad s \leq 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $S(\cdot)$ est une fonction régulière donnée, le paramètre à estimer est $\theta \in (0, T)$, x_0 est fixé et W_t est un mouvement Brownien, c'est à dire un processus Guaussien tel que $EW_t = 0$, $E(W_s W_t) = t \wedge s - st$. Nous nous proposons d'estimer le paramètre θ à partir des observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ sur l'intervalle de temps fixé [0,T], et d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \to 0$). Nous montrons que cet estimateur est consistent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace .

2 Notations et hypothèses

Nous nous proposons d'estimer le paramètre $\theta \in \Theta$, représentant un retard dans le processus $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ solution de l'équation (1.1):

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta}) + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0. \end{aligned}$$

Nous associons à (1.1) l'équation déterministe correspondant à ($\varepsilon = 0$) de solution $x = \{x_t, 0 \le t \le T\}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= S(x_{t-\theta}), \quad 0 \le t \le T \\ x_s &= x_0, \quad s \le 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

L'espace paramétrique Θ est défini par

$$\Theta = (\alpha, \beta), \quad 0 < \alpha < \beta < T$$

avec α, β connus. Nous supposons que le drift $S(\cdot)$ est également connu et défini sur $\mathbb{R}$ et l'asymptotique correspond à $\varepsilon \to 0$. Une condition de Lipschitz sur le drift est suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution, voir [15]. Nous ferons plutot une hypothèse de régularité plus forte pour résoudre notre problème d'estimation paramétrique

H: *S est une fonction positive deux fois continûment dérivable de dérivée non nulle sur un intervalle $[a,b] \subset [x_0, x_T]$ et bornée sur $\mathbb{R}$.*

En effet la fonction S admet une dérivée bornée sur l'intervalle compact $[x_0, x_T]$ alors elle est lipschitzienne. Le problème (1.1) admet alors une solution unique. De plus les mesures $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, induites par le processus solution de cette équation sur l'espace $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0,T]$, sont équivalentes (voir [15] chap.4 pour une étude exhaustive).

Nous rappelons les définitions suivantes [15] ; pour l'observation $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ de (1.1), le rapport de vraisemblance est défini pour deux valeurs du paramètre $\theta_0, \theta \in \Theta$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\theta, \theta_0; X) = \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_0}^{(\varepsilon)}}(X) = \exp\Big\{ &\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \big(S(X_{t-\theta}) - S(X_{t-\theta_0})\big) dX_t \\ &- \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T \Big(\big(S(X_{t-\theta})\big)^2 - \big(S(X_{t-\theta_0})\big)^2\Big) dt \Big\} \end{aligned}$$

l'estimateur du maximum de vraisemblance EMV $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est défini comme solution de l'équation suivante

$$\mathrm{L}(\widehat{\theta}_\varepsilon, \theta_0; X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} \mathrm{L}(\theta, \theta_0; X^\varepsilon) \tag{1.3}$$

où $\bar{\Theta}$ est l'adhérence de Θ et θ_0 est une valeur fixée dans Θ. Si cette équation admet plus d'une solution l'EMV est défini comme l'une de ces solutions. Nous donnons la condition LAN de Hajek [3] (voir aussi [9]).

Définition 2.1. *La famille de mesures* $\{P_\theta^{(\varepsilon)},\ \theta \in \Theta\}$ *induites par le processus solution de* (1.1) *possède la propriété de normalité asymptotique locale (LAN) au point* $\theta \in \Theta$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, s'il existe une fonction positive* $\varphi_\varepsilon(\theta)$*, telle que pour* $u \in \mathcal{U}_\varepsilon := \varphi_\varepsilon^{-1}(\alpha-\theta,\beta-\theta)$*, le rapport de vraisemblance normalisé*

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(u) = \mathrm{L}(\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u, \theta; X^\varepsilon)$$

admet la représentation

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(u) = \exp\{u\Delta_\varepsilon(\theta,X^\varepsilon) - \frac{1}{2}u^2 + \Psi_\varepsilon(u,\theta,X^\varepsilon)\} \tag{1.4}$$

$$\Delta_\varepsilon(\theta,X^\varepsilon) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1),\ \ P_\theta - \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon(u,\theta,X^\varepsilon) = 0. \tag{1.5}$$

Cette famille de mesures est dite uniformément LAN sur Θ *si les convergences dans* (1.5) *sont uniformes sur les compacts* $\mathcal{K} \subset \Theta$.

Introduisons l'ensemble $\mathbf{W}_{e,2}$ des fonctions réelles l définies sur $\mathbb{R}$ et ayant les propriétés suivantes:
- les fonctions $l(\cdot)$ sont symétriques, i.e. $l(u) = l(-u)$, continues en $u = 0$, $l(0) = 0$ mais non identiquement nulles, $l(u) \geq 0$,
- les ensembles $\{u : l(u) < C\}$ sont convexes pour tout $C > 0$,
- $l(u)$ est majorée quand $|u| \to \infty$ par les fonctions de type $\exp\{\gamma u^2\}$, pour tout $\gamma > 0$.

$\mathbf{W}_{e,2}$ est dit ensemble des fonctions de perte à majorant exponentiel.
Nous rappelons le résultat suivant appelé inégalité de Hajek-Le Cam [3]:
si une famille de lois $\{P_\theta^{(\varepsilon)},\ \vartheta \in \Theta\}$ satisfait la condition LAN en tout point $\theta \in \Theta$ avec une constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(\theta)$ alors pour tout estimateur $\widetilde{\theta}_\varepsilon$, toute fonction de perte $l \in \mathbf{W}_{e,2}$ et $\delta > 0$ nous avons l'inégalité suivante

$$\lim_{\delta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbb{E}_\theta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\widetilde{\theta}_\varepsilon - \theta)\right) \geq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} l(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans l'inégalité de Hajek-Le Cam sont dits estimateurs asymptotiquement efficaces. Nous introduisons la quantité

$$I(\theta) = \int_0^T S^2(x_{t-2\theta}) S'^2(x_{t-\theta}) dt$$

qui va intervenir comme Information de Fisher dans ce problème, ici x est la solution du problème déterministe (1.2). Sous l'hypothèse **H**, nous montrons dans la section suivante que le problème (1.1) devient régulier au sens classique, voir [9] p.49.

3 Normalité asymptotique locale

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (1.1) et les observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ sur l'intervalle fixé $[0,T]$. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre $\theta \in \Theta$ est défini dans (1.3). Le Théorème suivant donne la condition LAN uniforme de la famille de lois $\{P_\theta^{(\varepsilon)},\ \theta \in \Theta\}$ solution de (1.1) et l'inégalité de Hajek.

Théorème 3.1. *Si la condition* **H** *est satisfaite, alors la famille des lois* $\{P_\theta^{(\varepsilon)},\, \theta \in \Theta\}$ *solution de* (1.1) *est uniformément LAN , de constante de normalisation dans la représentation* (1.4) $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon I^{-1/2}(\theta)$ *et la variable aléatoire*

$$\Delta_\varepsilon(\theta,X) = \varepsilon^{-1} I^{-1/2}(\theta) \int_0^T S_(x_{t-2\theta}) S'(x_{t-\theta})[dX_t - S(X_{t-\theta})dt]$$

qui admet la loi $\mathcal{N}(0,1)$ *sous* $P_\theta^{(\varepsilon)}$.
De plus pour tout estimateur $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ *,* $l \in \mathbf{W}_{e,2}$ *et* $\delta > 0$ *nous avons l'inégalité de Hajek-Le Cam*

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbb{E}_\theta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\widetilde{\theta}_\varepsilon - \theta)\right) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} l(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Pour démontrer le Théorème 3.1 nous suivons [4] et [9] et nous avons besoin d'etablir les Lemmes suivants

Lemme 3.1. *Soient* C_0,C_1,C_2 *des constantes non négatives,* $u(t),v(t)$ *des fonctions bornées non négatives,* $t \in [0,T]$ *et telles que*

$$u(t) \leq C_0 + C_1 \int_0^t v(s)u(s)ds + C_2 \int_0^t v(s)\big[\int_0^s u(r)dK(r)\big]ds,$$

où $K(.)$ *est une fonction non décroissante continue à droite et*
$0 \leq K(t) \leq K_0$*,* K_0 *est une constante. Alors*

$$u(t) \leq C_0 \exp\left\{(C_1 + C_2 K_0) \int_0^t v(s)ds\right\}.$$

Pour la preuve de ce Lemme, voir par exemple [15] Lemme 4.13. Par le Lemme suivant, nous établissons les inégalités fondamentales vérifiées par le processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ solution de (1.1)

Lemme 3.2. *Sous la condition* **H***, nous avons,* $P_\theta^{(\varepsilon)}$ *p.s. les majorations suivantes*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_s| \qquad (1.6)$$

$$\mathbb{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (1.7)$$

Démonstration. 1. Posons $u(t) := |X_t - x_t|$, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse **H**, pour $K = \sup_{y\in\mathbb{R}} |S'(y)|$ comme la forme intégrale de (1.1) et de (1.2) respectivement donne

$$X_t = \int_0^t S(X_{s-\theta})dt + \varepsilon W_t\,, \quad x_t = \int_0^t S(x_{s-\theta})dt$$

nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= \left| \int_0^t (S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}))ds + \varepsilon W_t \right| \\ &\leq \int_0^t |S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})|ds + \varepsilon |W_t| \\ &\leq K \int_0^t |X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq K \int_0^t u(s-\theta)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\ &= K \int_{-\theta}^{t-\theta} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\ &= K \int_{-\theta}^{0} u(s)ds + K \int_0^{t-\theta} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\ &= K \int_0^{t-\theta} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\ &\leq K \int_0^{t} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s|. \end{aligned}$$

En effet, pour $s \leq 0$, nous avons $X_s = x_s$ et u est une fonction non négative. Par le Lemme de Grönwall (3.1) nous déduisons

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \exp K \int_0^t dr \\ &\leq \varepsilon \exp(KT) \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| = K_1 \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \end{aligned}$$

et

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|$$

Avec $K_1 = \varepsilon \exp(KT)$

2. Pour la seconde inégalité, en utilisant également la forme intégrale de (1.1) et

(1.2), l'hypothèse **H** et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2 &= \mathbb{E}_\theta|\int_0^t \big(S(X_{s-\theta})-S(x_{s-\theta})\big)ds+\varepsilon W_t|^2\\
&\leq 2\mathbb{E}_\theta\Big(\int_0^t (S(X_{s-\theta})-S(x_{s-\theta}))ds\Big)^2+2\varepsilon^2\mathbb{E}W_t^2\\
&\leq 2t\int_0^t \mathbb{E}_\theta(K|X_{s-\theta}-x_{s-\theta}|)^2ds+2\varepsilon^2 t\\
&\leq 2t\int_{-\theta}^{t-\theta} \mathbb{E}_\theta(K|X_s-x_s|)^2ds+2\varepsilon^2 t\\
&\leq 2K^2t\int_0^{t-\theta} \mathbb{E}_\theta|X_s-x_s|^2dr+2\varepsilon^2 t\\
&\leq 2K^2t\int_0^{t} \mathbb{E}_\theta|X_s-x_s|^2ds+2\varepsilon^2 t
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $|X_s-x_s|^2=0$ pour $s\leq 0$ et $|X_s-x_s|^2\geq 0$ lorsque $s\geq 0$.

Posons alors $u(t)=\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2$ nous avons

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq 2K^2t\int_0^t u(s)ds+2\varepsilon^2 t\\
&\leq 2K^2T\int_0^t u(s)ds+2\varepsilon^2 T.
\end{aligned}$$

Le Lemme 3.1 implique alors

$$u(t)\leq 2\varepsilon^2T\exp(2K^2T\int_0^t ds)$$

Ainsi $\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2\leq 2\varepsilon^2T\exp(2K^2Tt)$
et pour $K_2=2\varepsilon^2T\exp(2K^2T^2)$ nous avons les inégalités

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2\leq K_2\varepsilon^2$$

$$\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\theta|X_t-x_t|^2\leq K_2\varepsilon^2$$

□

Le Lemme suivant permet d'établir une certaine régularité de la fonction drift $S(\cdot)$ par rapport au paramètre de retard.

Lemme 3.3. *Sous la condition* **H**, *pour tout compact $\mathcal{K}\subset\Theta$, $v\in\varepsilon^{-1}(\Theta-\vartheta)$, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}_\theta|S'(X_{t-\theta-\varepsilon v})-S'(X_{t-\theta})|=0 \tag{1.8}$$

où X est le processus solution du problème (1.1)

Dans toutes les démonstrations qui suivent nous notons C une constante générique pouvant varier d'une ligne à une autre.

Démonstration. : Par l'hypothèse **H**, $K = \sup_{y\in\mathbb{R}} |S'(y)|$, nous avons

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\theta |S'(X_{t-\theta-\varepsilon v}) - S'(X_{t-\theta})| \leq K \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\theta |X_{t-\theta-\varepsilon v} - X_{t-\theta}|$$
$$\leq K \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}_\theta |X_{t-\theta-\varepsilon v} - X_{t-\theta}|^2\right)^{1/2}.$$

D'autre part l'inégalité (1.7), et la continuité uniforme de x donnent

$$\sup_{\theta\in\mathcal{K}} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\theta |X_{t-\theta} - x_{t-\theta}|^2 \leq C\varepsilon^2,$$
$$\sup_{\theta\in\mathcal{K}} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\theta |X_{t-\theta-\varepsilon v} - x_{t-\theta-\varepsilon v}|^2 \leq C\varepsilon^2,$$
$$\sup_{\theta\in\mathcal{K}} \sup_{0\leq t\leq T} |x_{t-\theta-\varepsilon v} - x_{t-\theta}|^2 \leq C\varepsilon^2,$$

et tenant compte de ces trois majorations, nous obtenons

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta-\varepsilon v} - X_{t-\theta}|^2 \leq C\varepsilon^2, \tag{1.9}$$

d'où

$$\sup_{\theta\in\mathcal{K}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\theta |S'(X_{t-\theta-\varepsilon v}) - S'(X_{t-\theta})| \longrightarrow 0$$

□

Démonstration. (Théorème 3.1)
Soit $\mathcal{K}$ un compact de Θ et $\theta + \varepsilon v \in \Theta$ pour $\theta \in \mathcal{K}$ et (v_ε) une suite réelle telle que $v_\varepsilon \longrightarrow v$.
notons $\theta_{\varepsilon,v} = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta) v_\varepsilon$

Par l'hypothèse **H** , toutes les mesures $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ sont équivalentes [15] et Le logarithme du rapport de vraisemblance normalisé est tel que

$$\ln \widetilde{Z}_\varepsilon(v) = \ln \frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon}}{dP^{(\varepsilon)}_\theta} = \int_0^T \Delta S_t(v) dW_t - \frac{1}{2} ||\Delta S(v)||^2 \tag{1.10}$$

$||\cdot||$ est la norme de $\mathbf{L}^2([0,T])$ et

$$\varphi_\varepsilon(\theta) := \varepsilon I(\theta)^{-1/2} = \varepsilon \left(\int_0^T S'^2(x_{t-\theta}) S^2(x_{t-2\theta}) dt \right)^{-1/2}$$
$$\Delta S_t(v) := \varepsilon^{-1} [S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta})].$$

Pour le terme $||\Delta S(v)||^2$ nous montrons la convergence

$$P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} || \left(S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta})\right) - S'(x_{t-\theta})S(x_{t-2\theta})\varphi_\varepsilon(\theta)v||^2 = 0 \qquad (1.11)$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
||\Delta S(v)||^2 &= \int_0^T \varepsilon^{-2}(S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta}))^2 dt. \\
&= \int_0^T \varepsilon^{-2} S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})^2 dt \\
&+ \int_0^T \varepsilon^{-2} \left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})\right\}^2 dt \qquad (1.12) \\
&+ 2\int_0^T \varepsilon^{-2} S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta}) \times \left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta})\right. \\
&\left. - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})\right\} dt.
\end{aligned}$$

Où nous avons ajouté et retranché la quantité

$$2\int_0^T \varepsilon^{-2} S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})^2 dt$$

1. Si l'on note $\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ un certain point intermédiaire entre $X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ et $X_{t-\theta}$, par l'hypothèse **H**, le second terme de (1.12) est tel que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T \left\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S(X_{t-\theta}) - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})\right\}^2 dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T \Big\{S'(\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta}) \\
&\quad - S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})\Big\}^2 dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta \int_0^T (S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S'(X_{t-\theta}))^2 (X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})^2 dt.
\end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité (1.9)

$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}_\theta |X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta}|^2 \le C\varepsilon^2,$$

comme $\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ est un point intermédiaire entre $X_{t-\theta}$ et $X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ nous avons aussi

$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}_\theta |\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta}|^2 \le C\varepsilon^2, \qquad (1.13)$$

il s'en suit alors

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2} \sup_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_\theta \int_0^T (S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S'(X_{t-\theta}))^2 (X_{t-\theta_{\varepsilon,v}} - X_{t-\theta})^2 dt \\
&\qquad \le CT \sup_{\theta\in\Theta} \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}_\theta |S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}) - S'(X_{t-\theta})|^2.
\end{aligned}$$

Grâce à l'uniforme continuité de S', comme $\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ est compris entre $X_{t-\theta}$ et $X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}$ nous déduisons du Lemme 3.3 que le second membre de l'inégalité précédente converge vers 0 et il en est de même pour

$$\sup_{\theta\in\Theta}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\int_0^T(S'(\tilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S'(X_{t-\theta}))^2(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})^2dt.$$

2. D'autre part, pour le dernier terme de (1.12) par la condition **H** nous avons également

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\int_0^T\{S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S(X_{t-\theta})-S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})\}\\
&\qquad\times S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})dt\\
&=\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\int_0^T\Big\{\big(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}\big)S'(\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})\\
&\qquad-S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})\Big\}S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})dt\\
&\le\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\int_0^T|X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}|^2|S'(X_{t-\theta})|S'(\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S'(X_{t-\theta})|dt\\
&\le CK\mathbb{E}_\theta\int_0^T|S'(\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S'(X_{t-\theta})|dt
\end{aligned}\tag{1.14}$$

puis par l'estimation 1.13 et la continuité uniforme de S' nous déduisons la convergence

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{0\le t\le T}\sup_{\theta\in\Theta}\mathbb{E}_\theta|S'(\widetilde{X}_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S'(X_{t-\theta})|=0.$$

Ainsi les deux derniers termes de (1.12) convergent vers 0 lorsque ε tend vers 0 uniformément en θ.

3. Le premier terme de (1.12) peut être réécrit

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-2}\Big(&\int_0^T S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})^2\\
&-\int_0^T\big(v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big)^2dt\\
&+\int_0^T\big(v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big)^2dt\Big)
\end{aligned}$$

et nous considérons d'abord les deux premiers termes; en appliquant l'inégalité de Schwartz nous avons,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\Big[\int_0^T S'^2(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta})^2 \\
&\qquad -\int_0^T \big(v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big)^2 dt\Big] \\
&\le \varepsilon^{-2}\Big[\int_0^T \big[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}) \\
&\qquad - v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big]^2 dt\Big]^{1/2} \\
&\quad \times\Big[\int_0^T \big[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}) \\
&\qquad + v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big]^2 dt\Big]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Le second terme obtenu est borné car les fonctions S et S' sont bornées et grâce à la majoration (1.9). Moyennant l'hypothèse **H** et la forme intégrale de (1.1), le premier facteur est tel que

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^T \big[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}) \\
&\qquad - v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big]^2 dt\Big]^{1/2} \\
&\le K\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^T \big[\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,v}} (S(X_{s-\theta})-S(x_{t-2\theta}))ds\big]^2\Big]^{1/2}+\varepsilon o(v_\varepsilon) \\
&\le K^2\varepsilon^{-2}\Big[\int_0^T \big[\int_{t-\theta}^{t-\theta_{\varepsilon,v}} \mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2 ds\big]dt\Big]^{1/2}+\varepsilon o(v_\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Pour l'espérance mathématique $\mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2$, par (1.7) et la dérivabilité de la fonction x_t sur l'intervalle compact $[0,T]$ nous avons la majoration

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t-\theta\le s\le t-\theta_{\varepsilon,v}} \mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2 \\
&\le 2\sup_{t-\theta\le s\le t-\theta_{\varepsilon,v}} \mathbb{E}_\theta|X_{s-\theta}-x_{s-\theta}|^2+2\sup_{t-\theta\le s\le t-\theta_{\varepsilon,v}}|x_{s-\theta}-x_{t-2\theta}|^2 \\
&\le 2(K_2+\max_{0\le t\le T}|\varphi_\varepsilon(\theta)v_\varepsilon\dot{x}_t|^2)\varepsilon^2\le C\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

car $\varphi_\varepsilon(\theta)=\varepsilon I(\theta)^{-1/2}$ est une fonction bornée puique S et S' le sont.
Il en découle alors

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^T \big[S'(X_{t-\theta})(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}}-X_{t-\theta}) \\
&\qquad - v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})\big]^2 dt\Big]^{1/2}=0,
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit que pour toute suite (v_ε) convergente vers v,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\theta\varepsilon^{-2}||S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S(X_{t-\theta})-v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})||=0,$$

ainsi, rappelant les notations

$$\Delta S_t(v)=\varepsilon^{-1}\big(S(X_{t-\theta_{\varepsilon,v}})-S(X_{t-\theta})\big),\quad \varphi_\varepsilon(\theta)=\varepsilon I(\theta)^{-1/2}$$

nous avons pour toute suite (v_ε) convergente vers v

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\theta||\Delta S(v)-I(\theta)^{-1/2}S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})v_\varepsilon||=0. \tag{1.15}$$

Comme

$$\begin{aligned}&||\Delta S(v)-I(\theta)^{-1/2}S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})v||\\ &\qquad\le ||\Delta S(v)-I(\theta)^{-1/2}S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})v_\varepsilon||+||v_\varepsilon-v||,\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\big(\Delta S_t(v)\big)^2dt=v^2\quad\text{uniformément en }\theta$$

D'autre part, pour l'intégrale stochastique

$$\Delta_\varepsilon=\int_0^T\Delta S_t(v)dW_t$$

nous avons également

$$\begin{aligned}&P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{\Big|\int_0^T[\Delta S_t(v)-vI^{-1/2}(\theta)S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})]dW_t\Big|>\delta\right\}\\ &\le\frac{\gamma}{\delta^2}+P_\theta^{(\varepsilon)}\left\{||\Delta S_t(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(vI(\theta)^{-1/2}S(x_{t-2\theta})S'(x_{t-\theta})]||^2>\gamma\right\}\end{aligned}$$

choisissant alors γ et δ assez petits de sorte que $\gamma\delta^{-2}$ reste petit, nous déduisons que le majorant précédent tend vers 0 et par suite

$$\Delta_\varepsilon\Longrightarrow\mathcal{N}(0,1) \tag{1.16}$$

convergence en loi uniformément en $\vartheta\in\mathcal{K}$. Ce ci achève la preuve de la condition LAN uniforme des observations de notre problème. □

Tenant compte des résultats (1.15) et (1.16), nous pouvons conclure que le rapport de vraisemblance admet la représentation

$$Z_\varepsilon(\theta,v)=L(\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)v,\theta;X)=\exp\left\{v\Delta_\varepsilon-\frac{1}{2}v^2+\Psi_\varepsilon(v_\varepsilon,v,\theta)\right\} \tag{1.17}$$

avec les convergences uniformes en θ: $\Delta_\varepsilon\Longrightarrow\mathcal{N}(0,1)$ et pour tout $\delta>0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}P_\theta\{|\Psi_\varepsilon(v_\varepsilon,v,\theta)|>\delta\}=0$

4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Le Théorème suivant donne la convergence, la normalité asymptotique, l'efficacité asymptotique et la convergence des moments de l'EMV.

Théorème 4.1. *Si l'hypothèse* **H** *est remplie, alors uniformément sur tout compact* $\mathcal{K} = [a, b]$ *de* $\Theta = (\alpha, \beta)$*, l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\widehat{\theta}_\varepsilon$ *vérifie*

1. $P_\theta - \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\theta}_\varepsilon = \theta$.
2. $\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
3. *La convergence des moments* $\mathbb{E}_\theta|\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)|^p$ *vers les moments* $\mathbb{E}|\Delta|^p$ *pour tout* $p > 0$*, où* Δ *est une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite.*
4. *L'EMV est localement asymptotiquement minimax au sens de Hajek pour les fonctions de pertes* $l(\cdot) \in \mathbf{W}_{e,2}$ *i.e*

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} \mathbb{E}_\theta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta_0)(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} l(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Les deux Lemmes suivants montrent que la familles des lois des processus du rapport de vraisemblance $(Z_\varepsilon(u),\ u \in \varepsilon^{-1}(\Theta - \vartheta))$ est tendue dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini.

Lemme 4.1. *Soit* $\mathcal{K}$ *un compact de* Θ*.Alors pour* u_1, u_2 *et pour tout* $R > 0$ *nous avons la majoration suivante*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \sup_{|u_1| < R, |u_2| < R} |u_2 - u_1|^{-2} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C(1 + R^6)$$

où C *est une constante qui dépend de* $\mathcal{K}$*.*

Démonstration. Notons

$$\theta_i = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u_i, \quad i = 1,2, \quad \Delta S_t = \varepsilon^{-1}(S(X_{t-\theta_1}) - S(X_{t-\theta_2}))$$

et considérons le processus

$$Y_t = \exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds\right\}.$$

Le processus Y_t ainsi défini satisfait $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ presque sûrement l'égalité

$$Y_T = \left\{\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X)\right\}^{1/4}$$

Posons alors :

$$V_t = \frac{1}{4}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{8}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds = \ln Y_t.$$

La formule de Itô appliquée au processus $f(V_t) := \exp V_t = Y_t$ donne

$$\begin{aligned}
dY_t &= \left\{ f'_v(V_t)\left(-\frac{1}{8}(\Delta S_t)^2\right) + \frac{1}{2}f''_{vv}(V_t)\frac{1}{16}(\Delta S_t)^2 \right\} dt \\
&\quad + f'_v(V_t)\frac{1}{4}(\Delta S_t)dW_t \\
&= \left\{ \exp V_t(-\frac{1}{8}(\Delta S_t)^2) + \frac{1}{2}\exp V_t \frac{1}{16}(\Delta S_t)^2 \right\} dt + \exp V_t \frac{1}{4}(\Delta S_t)dW_t \\
&= -\frac{3}{32}(\Delta S_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{4}(\Delta S_t)Y_t dW_t, \qquad Y_0 = 1 \quad (V_0 = 0)
\end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit

$$Y_T = 1 - \frac{3}{32}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{4}\int_0^T (\Delta S_t)Y_t dW_t \tag{1.18}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 = \mathbb{E}_\theta \left| Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)\left(1 - \frac{Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)}{Z_\varepsilon^{1/4}(u_2)}\right)\right|^4$$

Comme $Z_\varepsilon(u_2) = dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}/dP_\theta^{(\varepsilon)}$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &= \mathbb{E}_\theta \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/4} (1 - Y_T)\right|^4 \\
&= \mathbb{E}_\theta |1 - Y_T|^4 \left|\frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}\right| = \mathbb{E}_{\theta_2}|1 - Y_T|^4
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression (1.18) de Y_T et l'inégalité $(a+b)^4 \leq 2^3(a^4 + b^4)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &= \mathbb{E}_{\theta_2}|1 - Y_T|^4 \\
&= \mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt - \frac{1}{4}\int_0^T (\Delta S_t)Y_t dW_t\right|^4 \\
&\leq 8\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{3}{32}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt\right|^4 + 8\mathbb{E}_{\theta_2}\left|\frac{1}{4}\int_0^T (\Delta S_t)Y_t dW_t\right|^4 \\
&\leq \frac{8.3^4}{32^4}T^3 \int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} Y_t^4 (\Delta S_t)^8 dt + \frac{9T}{8}\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} Y_t^4 (\Delta S_t)^4 dt.
\end{aligned}$$

En effet par la formule (voir par exemple [9]):

$$\mathbb{E}(\int_0^T (f(t)dW_t))^{2m} \leq \big(m(2m-1)\big)^m T^{m-1}\int_0^T \mathbb{E}f^{2m}(t)dt \quad m \in \mathbb{N} \tag{1.19}$$

nous déduisons pour la deuxième intégrale

$$
\begin{aligned}
8\mathbb{E}_{\theta_2}\Big(\frac{1}{4}(\Delta S_t)Y_t dW_t\Big)^4 &\leq 8\frac{1}{4^4}\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}(\Delta S_t)^4 {Y_t}^4 dt(2(4-1))^2 T \\
&= \frac{9}{8}T\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}(\Delta S_t)^4 {Y_t}^4 dt,
\end{aligned}
$$

et pour la première intégrale, par l'inégalité de Hölder nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_2}\Big|\frac{3}{32}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt\Big|^4 &\leq \frac{3^4}{32^4}\mathbb{E}_{\theta_2}\Big|\Big(\int_0^T (\Delta S_t)^8 {Y_t}^4 dt\Big)^{\frac{1}{4}.4}\Big(\int_0^T dt\Big)^{\frac{3}{4}.4}\Big| \\
&= \frac{3^4}{32^4}T^3\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2}(\Delta S_t)^8 {Y_t}^4 dt.
\end{aligned}
$$

Finalement nous obtenons

$$
\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} Y_t^4(\Delta S_t)^8 dt + C_2\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_2} Y_t^4(\Delta S_t)^4 dt,
$$

puis par changement de mesure, comme

$$
Y_t = \left\{\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X)\right\}^{1/4}
$$

nous avons

$$
\mathbb{E}_\theta|Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 dt + C_2\int_0^T \mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^4 dt. \tag{1.20}
$$

Il nous faut majorer le second membre obtenu et nous ferons le calcul pour $\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8$ uniquement.

Par **H**, en posant $K = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}}|S'(y)|$ et par le Théorème des accroissements finis nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 &= \mathbb{E}_{\theta_1}\frac{1}{\varepsilon^8}\big(S(X_{t-\theta_1}) - S(X_{t-\theta_2})\big)^8 \\
&\leq \frac{K^8}{\varepsilon^8}\mathbb{E}_{\theta_1}|X_{t-\theta_1} - X_{t-\theta_2}|^8
\end{aligned}
$$

puis en utilisant la représentation de (1.1) sous forme intégrale,

$$
X_t = x_0 + \int_0^t S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon W_t, \quad 0 \leq t \leq T,
$$

l'inégalité $(a+b)^{2m} \leq C(a^{2m} + b^{2m})$, $C = 2^{2m-1}$ ainsi que la propriété du processus de Wiener: $\mathbb{E}|W_t - W_s|^2 = |t-s|$, nous déduisons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 &\leq \frac{K^8}{\varepsilon^8}\mathbb{E}_{\theta_1}\Big|\int_0^{t-\theta_1} S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon W_{t-\theta_1} - \int_0^{t-\theta_2} S(X_{s-\theta})ds - \varepsilon W_{t-\theta_2}\Big|^8 \\
&= \frac{K^8}{\varepsilon^8}\mathbb{E}_{\theta_1}\Big(\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} S(X_{s-\theta})ds + \varepsilon(W_{t-\theta_1} - W_{t-\theta_2})\Big)^8 \\
&\leq C\frac{K^8}{\varepsilon^8}\left\{|\theta_2-\theta_1|^7\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1}\mathbb{E}_{\theta_1}S^8(X_{s-\theta})ds + \varepsilon^8|\theta_2-\theta_1|^4\right\} \\
&= C\frac{K^8}{\varepsilon^8}|\theta_2-\theta_1|^7\int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1}\mathbb{E}_{\theta_1}S^8(X_{s-\theta})ds + CK^8|\theta_2-\theta_1|^4.
\end{aligned}
$$

Montrons alors que $\mathbb{E}_{\theta_1} S^8(X_{s-\theta})$ reste bornée; grâce à l'inégalité (1.7) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1} S^8(X_{s-\theta}) &= \mathbb{E}_{\theta_1} |S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta}) + S(x_{s-\theta})|^8 \\
&\leq 2^7 \mathbb{E}_{\theta_1} |S(X_{s-\theta}) - S(x_{s-\theta})|^8 + 2^7 S^8(x_{s-\theta}) \\
&\leq 2^7 \mathbb{E}_{\theta_1} \Big(K |X_{s-\theta} - x_{s-\theta}|^8 \Big) + 2^7 S^8(x_{s-\theta}) \\
&\leq 2^7 K_2 \varepsilon^8 K^8 + 2^7 S^8(x_{s-\theta}) \\
&\leq 2^7 K_2 \varepsilon^8 K^8 + 2^7 \sup_{0\leq s\leq T} S^8(x_{s-\theta}).
\end{aligned}$$

La fonction $S(x.)$ étant uniformément bornée, nous avons alors une majoration de $\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8$ de type

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^8 &\leq \frac{K^8}{\varepsilon^8} |\theta_2 - \theta_1|^8 (C\varepsilon^8 K_2 K^8 + 2^7 \sup_{0\leq s\leq T} S^8(x_{s-\theta})) + CK^8 |\theta_2 - \theta_1|^4 \\
&\leq \Big(CK_2 K^{16} + \frac{K^8}{\varepsilon^8} 2^7 \sup_{0\leq s\leq T} S^8(x_{s-\theta}) \Big) |\theta_2 - \theta_1|^8 + CK^8 |\theta_2 - \theta_1|^4 \\
&= \Big(CK_2 K^{16} + \frac{K^8}{\varepsilon^8} 2^7 \sup_{0\leq s\leq T} S^8(x_{s-\theta}) \Big) \varphi_\varepsilon^8(\theta) |u_2 - u_1|^8 + CK^8 \varphi_\varepsilon^4(\theta) |u_2 - u_1|^4 \\
&\leq \Big(CK_2 K^{16} \varepsilon^8 + K^8 2^7 \sup_{0\leq s\leq T} S^8(x_{s-\theta}) \Big) I^{-4}(\theta) |u_2 - u_1|^8 \\
&\quad + CK^8 I(\theta)^{-2} \varepsilon^4 |u_2 - u_1|^4 \\
&\leq C_1 |u_2 - u_1|^8 + C_2 \varepsilon^4 |u_2 - u_1|^4
\end{aligned} \tag{1.21}$$

et de la même manière

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\Delta S_t)^4 \leq C_3 |u_2 - u_1|^4 + C_4 \varepsilon^2 |u_2 - u_1|^2. \tag{1.22}$$

Finalement regroupant les estimations: (1.20), (1.21), et (1.22) nous obtenons

$$\mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C_1 |u_2 - u_1|^8 + C_2 |u_2 - u_1|^4 + C_3 |u_2 - u_1|^4 + C_4 |u_2 - u_1|^2$$

$$\begin{aligned}
\sup_{|u_i|<R} |u_2 - u_1|^{-2} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &\leq C_4 + (C_2 + C_3) |u_2 - u_1|^2 + C_1 |u_2 - u_1|^6 \\
&\leq C_4 + (C_2 + C_3)(2R)^2 + C_1 (2R)^6 \\
&\leq C_{\mathcal{K}} (1 + R^6)
\end{aligned}$$

où la constante $C_{\mathcal{K}}$ ne dépend pas de ε. □

Soit G l'ensemble défini par

$$G = \{ g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad \lim_{y\to\infty} y^N \exp(-g(y)) = 0, \text{ pour tout } N > 0 \}.$$

Lemme 4.2. *Sous* **H**, *pour* $p \in (0,1)$ *et* $\mathcal{K}$ *un compact de* (α,β), *il existe une fonction* $g \in G, g(u) = \kappa u^2$, *(*$\kappa$ *une constante) telle que:*

$$\sup_{\theta\in\mathcal{K}} \mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \exp(-\kappa u^2)$$

Démonstration. en suivant Kutoyants, posons

$$a = S(X_{t-\theta-u}) - S(X_{t-\theta}) \quad \text{et} \quad b = S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta}),$$

d'après l'inégalité: $a^2 \geq b^2 - 2|b(a-b)|$ nous avons,

$$\begin{aligned}
\big(S(X_{t-\theta-u}) - S(X_{t-\theta})\big)^2 \geq & \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 - 2|S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})| \\
& \times |S(X_{t-\theta-u}) - S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta-u}) + S(x_{t-\theta})| \\
\geq & \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 - 2|S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})| \\
& \times \big(|S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})| + |S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|\big) \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

S et x sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ et $[-\beta, T-\alpha]$ respectivement. Par un développement de Taylor de $S(x.)$ au voisinage de $t-\theta$, pour $|u| < \delta$, nous avons pour le premier terme du majorant obtenu

$$\begin{aligned}
\int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt &= \int_0^T \big(S'(x_{t-\theta})\dot{x}_{t-\theta}\, u\big)^2 dt + \circ(u^2) \\
&= \int_0^T \big(S'(x_{t-\theta})\big)^2 \big(S(x_{t-2\theta})\big)^2 dt + \circ(u^2) \\
&= I(\theta)u^2 + \circ(u^2) \\
&= u^2\big(I(\theta) + \circ(1)\big) \\
&> u^2\big(\inf_{\alpha<\theta<\beta} I(\theta) + \circ(1)\big) > A_{1,\mathcal{K}}^2 u^2
\end{aligned}$$

$\inf_{\alpha<\theta<\beta} I(\theta)$ étant positif grâce à l'hypothèse **H**. Ainsi pour une certaine constante non nulle $A_{1,\mathcal{K}}$:

$$\inf_{\theta\in\mathcal{K}} \inf_{|u|<\delta,\theta+u\in\Theta} \int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt > A_{1,\mathcal{K}}^2 u^2$$

Remarquons également que si l'on pose

$$m(\delta) := \inf_{\theta\in\mathcal{K}} \inf_{|u|>\delta,\theta+u\in\Theta} \int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt,$$

alors par l'hypothèse **H**, $m(\delta) > 0$ et pour tout u tel que $|u| > \delta$ comme $(\frac{u}{\beta-\alpha})^2 \leq 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt &\geq m(\delta) \\
&\geq (\frac{u}{\beta-\alpha})^2 m(\delta) = \frac{m(\delta)}{(\beta-\alpha)^2} u^2 = A_{2,\mathcal{K}}^2 u^2
\end{aligned}$$

$A_{2,\mathcal{K}}$ est une constante non nulle. Enfin on note $A^2_{\mathcal{K}} = \min(A^2_{1,\mathcal{K}},A^2_{2,\mathcal{K}})$ et l'on obtient:

$$\inf_{\theta\in\mathcal{K}} \inf_{u\in\mathbb{R},\theta+u\in\Theta} \int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt \geq A^2_{\mathcal{K}} u^2$$

D'autre part, et grâce à l'hypothèse **H**

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt &\leq \int_0^T K^2 |x_{t-\theta-u} - x_{t-\theta}|^2 dt \\ &\leq TK^2u^2 \sup_{t\in[0,T]} \dot{x}_t^2 \leq B^2u^2\end{aligned}$$

pour une certaine constante B,$\dot{x}$ étant uniformément continue, donc bornée sur $[0,T]$. Nous obtenons ainsi la double inégalité

$$A^2_{\mathcal{K}} u^2 \leq \int_0^T \big(S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2 dt \leq B^2u^2 \tag{1.24}$$

Quant au dernier terme dans (1.23), en appliquant l'inégalité de Schwartz et par l'hypothèse **H** ainsi que la majoration (1.24) nous avons également

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})][S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})]dt\right)^2 \\ &\leq \int_0^T [S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt \int_0^T [S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt \\ &\leq B^2u^2 \int_0^T [S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})]^2 dt\end{aligned}$$

puis moyennant l'inégalité 1.6 il s'en suit

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|dt\right)^2 \\ &\leq B^2u^2TK^2 \sup_{0\leq t\leq T} |X_{t-\theta} - x_{t-\theta}|^2 \\ &\leq B^2u^2TK^2 \sup_{0\leq t\leq T} |X_t - x_t|^2\end{aligned}$$

et nous obtenons l'estimation

$$\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|dt \leq B\sqrt{T}KK_1\varepsilon|u| \sup_{0\leq t\leq T} |W_t| \tag{1.25}$$

De la même façon, nous avons également la majoration:

$$\int_0^T |S(x_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta})||S(X_{t-\theta-u}) - S(x_{t-\theta-u})|dt \leq B\sqrt{T}KK_1\varepsilon|u| \sup_{0\leq t\leq T} |W_t| \tag{1.26}$$

Enfin, notant encore $\Delta S_t(v) = \varepsilon^{-1}[S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(X_{t-\theta})]$ et par l'inégalité de Hölder, pour tout p_1 et p_2 tels que $1/p_1 + 1/p_2 = 1$
nous avons la majoration

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) = \mathbb{E}_\theta \exp\big(-\frac{1}{2}p||\Delta S||^2 + p\int_0^T \Delta S_t dW_t\big)\\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\exp\big(-\frac{p-q}{2}||\Delta S||^2\big)\exp\big(p\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}||\Delta S||^2\big)\right]\\
&\le \left[\mathbb{E}_\theta \exp\big(-\frac{p-q}{2}p_1||\Delta S||^2\big)\right]^{1/p_1}\\
&\quad\times\left[\mathbb{E}_\theta \exp\big(pp_2\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}p_2||\Delta S||^2\big)\right]^{1/p_2}.
\end{aligned}$$

Si l'on choisit q,p_1,p_2 tels que

$$0 < p^2 < q < p < 1,\; p_1 = \frac{q}{q-p^2},\; p_2 = \frac{q}{p^2}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \quad &\le \quad \left[\mathbb{E}_\theta \exp\big(-\frac{p-q}{2}\frac{q}{q-p^2}||\Delta S||^2\big)\right]^{(q-p^2)/q}\\
&\quad\times\left[\mathbb{E}_\theta \exp\big(p\frac{q}{p^2}\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}\frac{q}{p^2}||\Delta S||^2\big)\right]^{p^2/q}
\end{aligned}$$

et nous apliquons ensuite la propriété de l'intégrale stochastique (voir par exemple [9] p.18.)

$$\mathbb{E}_\theta \exp\Big(\int_0^T \frac{q}{p}\Delta S_t dW_t - \frac{1}{2}||\frac{q}{p}\Delta S||^2\Big) \le 1.$$

Alors

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \le \left[\mathbb{E}_\theta \exp\big(-\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}||\Delta S||^2\big)\right]^{(q-p^2)/q} \tag{1.27}$$

posons

$$\gamma := \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)} > 0$$

Nous aurons ainsi, en tenant compte des estimations: (1.23), (1.24), (1.25) et (1.26)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \exp(-\gamma||\Delta S||^2)\\
&\quad\le \exp\left(-\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T \big(S(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(x_{t-\theta})\big)^2\right)dt\\
&\quad\times \mathbb{E}_\theta \exp\Big(2\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T |S(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(x_{t-\theta})|\\
&\quad\times\big(|S(X_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u}) - S(x_{t-\theta-\varphi_\varepsilon(\theta)u})| + |S(X_{t-\theta}) - S(x_{t-\theta})|\big)dt\Big)\\
&\quad\le \exp(-\gamma\varepsilon^{-2}A_{\mathcal{K}}^2\varphi_\varepsilon^2(\theta)|u|^2)\mathbb{E}\exp(2\gamma\varepsilon^{-2}B\sqrt{T}KK_1\varepsilon\varphi_\varepsilon(\theta)|u|\sup_{0\le t\le T}|W_t|)\\
&\le \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2)\mathbb{E}\exp(2\gamma B\sqrt{T}KK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\sup_{0\le t\le T}|W_t|)
\end{aligned}$$

il s'en suit

$$\mathbb{E}_\theta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) \leq \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2)$$
$$\times \mathbb{E}\exp\left(2\gamma B\sqrt{T}KK_1 I(\theta)^{-1/2}|u| \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|\right)$$

Nous appliquons à ce niveau la propriété qui suit pour un processus de Wiener (voir par exemple [9])

$$\forall\lambda > 0 \quad \mathbb{E}\{\exp(\lambda \sup_{0\leq t\leq T}|W_t|)\} \leq 1 + \lambda\sqrt{8\pi T}\exp(T\frac{\lambda^2}{2})$$

nous obtenons alors l'estimation:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) &\leq \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}u^2) \\
&\times \left(1 + 2\gamma BTKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\sqrt{8\pi}\exp(2\gamma^2B^2T^2K^2K_1^2I(\theta)^{-1}|u|^2)\right) \\
&\leq \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2) + 2\gamma BTKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\sqrt{8\pi} \\
&\times \exp\left(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2 + 2\gamma^2B^2T^2K^2K_1^2I(\theta)^{-1}|u|^2\right)
\end{aligned}$$

Ensuite, choisissant q assez voisin de p de sorte que:

$$\gamma = \frac{1}{4T^2K^2}$$

nous avons:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) \leq \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2) \\
&\quad \times \left\{1 + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\exp(2T^2\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}K^2|u|^2\frac{1}{4T^2K^2})\right\} \\
&= \exp\big(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big) + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big) \\
&\leq \exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big) + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big) \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big)\big(1 + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\big)
\end{aligned}$$

De (1.27), nous obtenons au final

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \big(\mathbb{E}_\theta \exp(-\gamma||\Delta S||^2)\big)^{(q-p^2)/q} \\
&\leq \left[\exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big)\big(1 + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\big)\right]^{(q-p^2)/q} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}\frac{q-p^2}{q}A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\right)\left(1 + 2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\right)^{(q-p^2)/q} \\
&\leq \exp\big(-\frac{1}{4}(p-q)A_{\mathcal{K}}^2 I(\theta)^{-1}|u|^2\big)\exp\big(2\sqrt{8\pi}T\gamma BKK_1 I(\theta)^{-1/2}|u|\frac{q-p^2}{q}\big) \\
&\leq \exp\big(-\kappa(u^2)\big)
\end{aligned}$$

Où nous appliquons l'inégalité: $1 + x \leq \exp x$ $\square$

Les Lemmes 4.1 et 4.2 impliquent que la famille des lois des processus de rapport de vraisemblance $(Z_\varepsilon(u),\, u \in \varepsilon^{-1}(\alpha-\theta,\beta-\theta)$ est tendue sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (voir [15] ou [9]) et le Théorème 3.1 implique la convergence des lois de dimensions finies. Par conséquent les processus $(Z_\varepsilon(u), u \in \varepsilon^{-1}(\alpha - \theta, \beta - \theta)$ convergent faiblement dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ vers un processus que l'on note $(Z(u))$. Pour démontrer le Théorème 4.1 nous suivons exactement la preuve du Théorème 1.1 p. 174 [4] ou du Théorème 5.3.3 p.188 [6].

Chapitre 2

Estimation de retards multiples dans une diffusion non linéaire

Nous considérons le problème de l'estimation des retards multiples à partir de l'observation d'un processus de type diffusion non linéaire à temps continu, avec un petit coefficient de diffusion. Sous certaines conditions de régularité nous montrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres de retards est consistent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0.

1 Introduction

Nous considérons l'équation différentielle stochastique de type diffusion non linéaire suivante

$$\begin{aligned} dX_t &= (S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}))dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $S_1(\cdot)$ et $S_2(\cdot)$ sont deux fonctions régulières données, le paramètre à estimer est $\vartheta = (\theta_1, \theta_2)^t \in (0,T)^2$ et x_0 est fixé. Nous nous proposons d'estimer le paramètre ϑ à partir des observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ sur l'intervalle de temps fixé $[0,T]$, et d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre dans le cadre des petites diffusions ($\varepsilon \to 0$). Nous montrons que cet estimateur est consistent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace .

2 Notations et hypothèses

Nous nous proposons d'estimer le paramètre $\vartheta = (\theta_1,\theta_2)^t \in \Theta$, représentant deux retards dans le processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ solution de l'équation (2.1):

$$\begin{aligned} dX_t &= (S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}))dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_s &= x_0, \quad s \leq 0. \end{aligned}$$

Nous associons à (2.1) l'équation déterministe correspondant à ($\varepsilon = 0$) de solution $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2}), \quad 0 \leq t \leq T \\ x_s &= x_0, \quad s \leq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

L'espace paramétrique Θ est défini par

$$\Theta = (\alpha_1,\beta_1) \times (\alpha_2,\beta_2), \quad 0 < \alpha_1 < \beta_1 < T, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2 < T$$

avec $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ connus. Nous supposons que le drift $S(\cdot) = S_1(\cdot) + S_2(\cdot)$ est également connu avec des fonctions S_1 et S_2 définies sur $\mathbb{R}$ et l'asymptotique correspond à $\varepsilon \to 0$. Une condition de Lipschitz sur le drift est suffisante pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution [15]. Nous ferons plutôt une hypothèse de régularité plus forte pour résoudre notre problème d'estimation paramétrique

H$_1$: *S_1 et S_2 sont des fonctions deux fois continûment dérivables de dérivées bornées sur $\mathbb{R}$.*

En effet les fonctions S_1 et S_2 admettent des dérivées bornées sur l'intervalle compact $[\min_{0\leq t\leq T} x_t, \max_{0\leq t\leq T} x_t]$ alors elles sont lipschitziennes. Le problème (2.1) admet alors une solution unique. De plus les mesures $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)}, \vartheta \in \Theta\}$, induites par le processus solution de cette équation sur l'espace $(\mathcal{C}_T,\mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0,T]$, sont équivalentes (voir [15] chap.4 pour une étude exhaustive).

Nous imposons aussi une hypothèse d'identifiabilité pour ce problème

H$_2$: *les fonctions S_1 et S_2 sont telles que pour tout $\delta > 0$, et tout compact $\mathcal{K}$ de Θ,*

$$\inf_{\vartheta\in\mathcal{K}} \inf_{|\vartheta-\widetilde{\vartheta}|>\delta} \int_a^b \left(S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2}) - S_1(x_{t-\widetilde{\theta}_1}) - S_2(x_{t-\widetilde{\theta}_2})\right)^2 dt > 0$$

où $\vartheta = (\theta_1,\theta_2)^t$, $\widetilde{\vartheta} = (\widetilde{\theta}_1,\widetilde{\theta}_2)^t$ et x est solution de l'équation différentielle (2.2).

Nous rappelons les définitions suivantes [15] ; pour l'observation $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ de (2.1), le rapport de vraisemblance est défini pour deux valeurs du paramètre $\vartheta_0 = (\theta_{0,1}, \theta_{0,2})^t$, $\vartheta = (\theta_1, \theta_2)^t \in \Theta$ par

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\vartheta,\vartheta_0; X) &= \frac{dP_\vartheta^{(\varepsilon)}}{dP_{\vartheta_0}^{(\varepsilon)}}(X) \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \Big(S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}) - S_1(X_{t-\theta_{0,1}}) - S_2(X_{t-\theta_{0,2}})\Big)dX_t \right. \\
&\left. -\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T \Big(\big(S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2})\big)^2 - \big(S_1(X_{t-\theta_{0,1}}) + S_2(X_{t-\theta_{0,2}})\big)^2\Big)dt\right\}.
\end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance EMV $\widehat{\vartheta}_\varepsilon$ est défini comme solution de l'équation suivante

$$\mathrm{L}(\widehat{\vartheta}_\varepsilon,\vartheta_0; X) = \sup_{\vartheta\in\bar{\Theta}} \mathrm{L}(\vartheta,\vartheta_0; X) \tag{2.3}$$

où $\bar{\Theta}$ est l'adhérence de Θ et ϑ_0 est une valeur fixée dans Θ. Si cette équation admet plus d'une solution l'EMV est défini comme l'une de ces solutions. Nous donnons la condition LAN de Hajek [3] (voir aussi [9]).

Définition 2.1. *La famille de mesures* $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)},\ \vartheta \in \Theta\}$ *induites par le processus solution de* (2.1) *possède la propriété de normalité asymptotique locale (LAN) au point* $\vartheta \in \Theta$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, s'il existe une matrice non dégénérée (*2×2*)* $\varphi_\varepsilon(\vartheta)$*, telle que pour tout* $u \in \mathcal{U}_\varepsilon := \varphi_\varepsilon(\vartheta)^{-1}(\Theta - \vartheta)$*, le rapport de vraisemblance normalisé*

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(u) = \mathrm{L}(\vartheta + \varphi_\varepsilon(\vartheta)u, \vartheta; X^\varepsilon)$$

admet la représentation

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(u) = \exp\left\{(u,\Delta_\varepsilon(\vartheta,X^\varepsilon)) - \frac{1}{2}|u|^2 + \Psi_\varepsilon(u,\vartheta,X^\varepsilon)\right\} \tag{2.4}$$

avec

$$\Delta_\varepsilon(\vartheta,X^\varepsilon) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,Id), \quad P_\vartheta - \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon(u,\vartheta,X^\varepsilon) = 0 \tag{2.5}$$

Id étant la matrice identité. Cette famille de mesures est dite uniformément LAN sur Θ *si les convergences dans* (2.5) *sont uniformes sur les compacts* $\mathcal{K} \subset \Theta$.

Introduisons l'ensemble $\mathbf{W}_{e,2}$ des fonctions réelles l définies sur $\mathbb{R}^p$ et ayant les propriétés suivantes:

- les fonctions $l(\cdot)$ sont symétriques, i.e. $l(u) = l(-u)$, continues en $u = 0$, $l(0) = 0$ mais non identiquement nulles, $l(u) \geq 0$,
- les ensembles $\{u : l(u) < C\}$ sont convexes pour tout $C > 0$,
- Les fonctions $l(u)$ sont majorées quand $|u| \to \infty$ par les fonctions de type $\exp\{\gamma|u|^2\}$, pour tout $\gamma > 0$.

$\mathbf{W}_{e,2}$ est dit ensemble des fonctions de perte à majorant exponentiel.
Nous rappelons le résultat suivant appelé inégalité de Hajek-Le Cam [3]

si une famille de lois $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)},\ \vartheta \in \Theta\}$ satisfait la condition LAN en tout point $\vartheta \in \Theta$ avec une matrice de normalisation $\varphi_\varepsilon(\vartheta)$ alors pour tout estimateur $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$, toute fonction de perte $l \in \mathbf{W}_{e,2}$ nous avons l'inégalité suivante

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta}\mathbb{E}_\vartheta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta_0)(\widetilde{\vartheta}_\varepsilon-\vartheta)\right)\geq\frac{1}{(2\pi)^{p/2}}\int_{\mathbb{R}^p}l(x)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx.$$

Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans l'inégalité de Hajek-Le Cam sont dits estimateurs asymptotiquement efficaces. Nous introduisons la matrice de Fisher associée à ce problème, définie par

$$I(\vartheta)=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12}\\ I_{12} & I_{22}\end{pmatrix}$$

et ayant pour termes:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_0^T \left(S_1(x_{t-2\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\right)^2 S_1'^2(x_{t-\theta_1})dt,\\
I_{12} &= \int_0^T \left(S_1(x_{t-2\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\right) S_1'(x_{t-\theta_1})S_2'(x_{t-\theta_2})\\
&\quad\times\left(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2})+S_2(x_{t-2\theta_2})\right)dt,\\
I_{22} &= \int_0^T \left(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2})+S_2(x_{t-2\theta_2})\right)^2 S_2'^2(x_{t-\theta_2})dt,
\end{aligned}$$

où x est la solution du problème déterministe (2.2). Nous ferons enfin l'hypothèse suivante

$\mathbf{H}_3$: *$I(\vartheta)$ est une matrice définie positive uniformément par rapport à $\vartheta \in \Theta$: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \neq 0$*

$$\inf_{\vartheta\in\Theta}(I(\vartheta)\lambda,\lambda)>0$$

Sous les hypothèses $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{H}_3$ nous montrons dans la section suivante que le problème (2.1) devient régulier au sens classique, voir [9] p.49.

3 Normalité asymptotique locale

Nous considérons l'équation différentielle stochastique (2.1) et les observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ sur l'intervalle fixé $[0,T]$. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\vartheta = (\theta_1,\theta_2)^t \in \Theta$ est défini dans (2.3). Le Théorème suivant donne la condition LAN uniforme de la famille de lois $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)},\ \vartheta \in \Theta\}$ induite par le processus solution de (2.1) et l'inégalité de Hajek-Le Cam.

Théorème 3.1. *Si les conditions* $\mathbf{H}_1$ *et* $\mathbf{H}_3$ *sont satisfaites, alors la famille des lois* $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)},\ \vartheta \in \Theta\}$ *est uniformément LAN, de matrice de normalisation dans la représentation* (2.4) $\varphi_\varepsilon(\vartheta) = \varepsilon I^{-1/2}(\vartheta)$ *et de vecteur aléatoire*

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon(\vartheta,X) =&\varepsilon^{-1} I^{-1/2}(\vartheta) \int_0^T \begin{pmatrix} \big(S_1(x_{t-2\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)S_1'(x_{t-\theta_1}) \\ \\ \big(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2}) + S_2(x_{t-2\theta_2})\big)S_2'(x_{t-\theta_2}) \end{pmatrix} \\ &\times \left[dX_t - (S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}))dt\right]\end{aligned}$$

qui admet la loi $\mathcal{N}(0,Id)$ *sous* $P_\vartheta^{(\varepsilon)}$.
De plus pour tout estimateur $\widetilde{\vartheta}_\varepsilon$, $l \in \mathbf{W}_{e,2}$ *nous avons l'inégalité de Hajek-Le Cam*

$$\lim_{\delta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta} \mathbb{E}_\vartheta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta_0)(\widetilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta)\right) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} l(x)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx.$$

Pour montrer le Théorème nous suivons [4] et [9]. Pour cela nous avons besoin des trois Lemmes suivants. Nous commençons par l'inégalité de Grönwall

Lemme 3.1. *Soient* C_0,C_1,C_2 *des constantes non négatives,* $u(t)$,$v(t)$ *des fonctions bornées non négatives,* $t \in [0,T]$ *et telles que*

$$u(t) \leq C_0 + C_1\int_0^t v(s)u(s)ds + C_2\int_0^t v(s)\big[\int_0^s u(r)dK(r)\big]ds,$$

où $K(.)$ *est une fonction non décroissante continue à droite et* $0 \leq K(t) \leq K_0$, K_0 *est une constante positive. Alors*

$$u(t) \leq C_0 \exp\left\{(C_1 + C_2K_0)\int_0^t v(s)ds\right\}.$$

Pour la preuve de ce Lemme, voir par exemple [15] Lemme 4.13. Le Lemme suivant donne les inégalités fondamentales sur les trajectoires du processus solution de (2.1)

Lemme 3.2. *sous la condition* $\mathbf{H}_1$ *nous avons* $P_\vartheta^{(\varepsilon)}$*-p.s*

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - x_t| \leq K_1\varepsilon \sup_{0\leq s\leq T}|W_s| \tag{2.6}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\vartheta|X_t - x_t|^2 \leq K_2\varepsilon^2 \tag{2.7}$$

où K_1 *et* K_2 *sont des constantes.*

Démonstration. Grâce à l'hypothèse $\mathbf{H}_1$, soit $K = \max(\sup_{y\in\mathbb{R}} |S_1'(y)|, \sup_{y\in\mathbb{R}} |S_2'(y)|)$ et comme [9]P.30, posons $u(t) = |X_t - x_t|$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \left| \int_0^t (S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2}) - S_1(x_{s-\theta_1}) - S_2(x_{s-\theta_2}))ds + \varepsilon W_t \right| \\
&\leq \int_0^t \left(|S_1(X_{s-\theta_1}) - S_1(x_{s-\theta_1})| + |S_2(X_{s-\theta_2}) - S_2(x_{s-\theta_2})| \right) ds + \varepsilon |W_t| \\
&\leq K \int_0^t \left(|X_{s-\theta_1} - x_{s-\theta_1}| + |X_{s-\theta_2} - x_{s-\theta_2}| \right) ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\
&\leq K \int_0^t \left(u(s-\theta_1) + u(s-\theta_2) \right) ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s|
\end{aligned}$$

u étant une fonction positive,

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq K \int_{-\max\{\theta_1,\theta_2\}}^{t-\min\{\theta_1,\theta_2\}} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\
&= K \int_{-\max\{\theta_1,\theta_2\}}^{0} u(s)ds + K \int_0^{t-\min\{\theta_1,\theta_2\}} u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\
&\leq K \int_0^t u(s)ds + \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s|
\end{aligned}$$

en effet, pour $s \leq 0$, $X_s = x_s$. Par le lemme 3.1 nous avons alors:

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \varepsilon \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \exp K \int_0^t ds \\
&\leq \varepsilon \exp(KT) \sup_{0\leq s\leq t} |W_s| \\
&\leq K_1 \sup_{0\leq s\leq t} |W_s|
\end{aligned}$$

et nous avons également

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|$$

où $K_1 = \varepsilon \exp(KT)$.

Pour la seconde inégalité nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta |X_t - x_t|^2 = \\
&= \mathbb{E}_\vartheta \left| \int_0^t \Big(S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2}) - S_1(x_{s-\theta_1}) - S_2(x_{s-\theta_2}) \Big) ds + \varepsilon W_t \right|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}_\vartheta \Big(\int_0^t (S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2}) - S_1(x_{s-\theta_1}) - S_2(x_{s-\theta_2}))ds \Big)^2 \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \mathbb{E} W_t^2 \\
&\leq 2t \int_{-\max\{\theta_1,\theta_2\}}^{t-\min\{\theta_1,\theta_2\}} \mathbb{E}_\vartheta |S_1(X_s) - S_1(x_s) + S_2(X_s) - S_2(x_s)|^2 + 2\varepsilon^2 t \\
&\leq 2K^2 t \int_{-\max\{\theta_1,\theta_2\}}^{t-\min\{\theta_1,\theta_2\}} \mathbb{E}_\vartheta |X_s - x_s|^2 ds + 2\varepsilon^2 t.
\end{aligned}$$

Pour $u(t) := \mathbb{E}_\vartheta |X_t - x_t|^2$ nous avons alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq 2K^2 t \int_0^t u(s)ds + 2\varepsilon^2 t \\ &\leq 2K^2 T \int_0^t u(s)ds + 2\varepsilon^2 T. \end{aligned}$$

Puis par le lemme 3.1 nous obtenons:

$$u(t) \leq 2\varepsilon^2 T \exp(2K^2 T \int_0^t ds)$$

ainsi

$$\mathbb{E}_\vartheta |X_t - x_t|^2 \leq 2\varepsilon^2 T \exp(2K^2 T t)$$

et pour $K_2 = 2\varepsilon^2 T \exp(2K^2 T^2)$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\vartheta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2$$
$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\vartheta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2$$

□

Le Lemme qui suit montre une certaine régularité du drift par rapport aux paramètres.

Lemme 3.3. *Sous la condition* $\mathbf{H}_1$*, pour tout compact* $\mathcal{K} \subset \Theta$*, pour* $\vartheta = (\theta_1,\theta_2)^t$ *et* $v = (v_1,v_2)^t \in \varepsilon^{-1}(\Theta - \vartheta)$*, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\vartheta\in\mathcal{K}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\vartheta |S_1'(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2}) - S_1'(X_{t-\theta_1}) - S_2'(X_{t-\theta_2})| = 0$$

où X *est le processus solution de* (2.1)

Dans toutes les preuves qui suivent les constantes C sont génériques et varient d'une ligne à une autre.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, et l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ nous avons

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2}) - S_1'(X_{t-\theta_1}) - S_2'(X_{t-\theta_2})| \\ &\leq \mathbb{E}_\vartheta |S_1'(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) - S_1'(X_{t-\theta_1})| + \mathbb{E}_\vartheta |S_2'(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2}) - S_2'(X_{t-\theta_2})| \end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\vartheta |S_1'(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) - S_1'(X_{t-\theta_1})| \leq K \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1} - X_{t-\theta_1}| \\ &\leq K \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1} - X_{t-\theta_1}|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

l'inégalité (2.7), et la continuité uniforme de x donnent

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\vartheta|X_{t-\theta_1}-x_{t-\theta_1}|^2\leq C\varepsilon^2,$$
$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\vartheta|X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}-x_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}|^2\leq C\varepsilon^2,$$
$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}|x_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}-x_{t-\theta_1}|^2\leq C\varepsilon^2,$$

et tenant compte de ces trois majorations, nous avons

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}_\vartheta|X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}-X_{t-\theta_1}|^2\leq C\varepsilon^2. \tag{2.9}$$

D'où la convergence vers 0 du premier terme du majorant obtenu dans (2.8) et il en est de même pour le second terme. □

Démonstration. (Théorème 3.1)
Soit $\mathcal{K}$ un compact de Θ et $\vartheta+\varepsilon u\in\Theta$ pour $\vartheta\in\mathcal{K}$, $u=(u_1,u_2)^t$ et une suite quelconque (u_ε),$u_\varepsilon\longrightarrow u$, $u_\varepsilon=(u_{\varepsilon,1},u_{\varepsilon,2})^t$.
Sous $\mathbf{H}_1$, les mesures $\{P_\vartheta^{(\varepsilon)},\vartheta\in\Theta\}$ sont équivalentes [15](chapitre 7), et le logarithme du rapport de vraisemblance est tel que

$$\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon)=\ln\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\vartheta+\varepsilon u_\varepsilon}}{dP^{(\varepsilon)}_\vartheta}=\int_0^T\Delta S_t(u_\varepsilon)dW_t-\frac{1}{2}||\Delta S(u_\varepsilon)||^2$$

où

$$\Delta S_t(u_\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}})+S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_1(X_{t-\theta_1})-S_2(X_{t-\theta_2})\Big)$$

Pour étudier le terme $||\Delta S(u_\varepsilon)||^2$ nous montrons que

$$\begin{aligned}P_\vartheta^{(\varepsilon)}-\lim_{\varepsilon\to0}||\varepsilon^{-1}&\left(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}})+S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_1(X_{t-\theta_1})-S_2(X_{t-\theta_2})\right)\\&-\Big(S_1'(x_{t-\theta_1})\big(S_1(x_{t-2\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)u_{\varepsilon,1}\\&+S_2'(x_{t-\theta_2})\big(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2})+S_2(x_{t-2\theta_2})\big)u_{\varepsilon,2}\Big)||^2=0\end{aligned}\tag{2.10}$$

en utilisant $a^2=(a-b+b)^2=(a-b)^2+b^2+2(a-b)b$, $||\Delta S(u_\varepsilon)||^2$ peut être réécrite

$$
\begin{aligned}
&||\Delta S(u_\varepsilon)||^2 \\
&= \int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) \\
&+ S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}) - S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt \\
&+ 2\int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) \\
&+ S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}) - S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big) \\
&\times \Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big) dt \\
&+ \int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) \\
&+ S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Nous considérons chacun des trois termes de (2.11) séparément, pour établir la convergence (2.10); pour le premier terme et utilisant $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) \\
&\qquad + S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}) - S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt \\
&\leq 2\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1(X_{t-\theta_1}) \\
&\qquad - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})\Big)^2 dt \\
&\qquad + 2\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T \varepsilon^{-2}\Big(S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}) - S_2(X_{t-\theta_2}) \\
&\qquad - S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt.
\end{aligned}
$$

Montrons que chaque terme du majorant obtenu converge vers 0 uniformément; pour $\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ un certain point intermédiaire entre $X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ et $X_{t-\theta_1}$, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T \Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1(X_{t-\theta_1}) \\
&\quad - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})\Big)^2 dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T \Big(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) \\
&\quad - S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})\Big)^2 dt \\
&= \varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta \int_0^T (S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1}))^2 (X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})^2 dt
\end{aligned}
$$

Comme $\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ est compris entre $X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ et $X_{t-\theta_1}$, de (2.9) on déduit

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}_\vartheta|\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1}|^2\le C\varepsilon^2$$

et en intégrant on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta\int_0^T&(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1'(X_{t-\theta_1}))^2(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})^2dt\\&\le CT\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}_\vartheta|S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1'(X_{t-\theta})|^2\end{aligned}$$

Par $\mathbf{H}_1$ et le Lemme 3.3 nous déduisons que le majorant précédent tend vers 0, ainsi

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta\int_0^T(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1'(X_{t-\theta_1}))^2(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})^2dt\to 0$$

et de la même manière nous avons

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta\int_0^T(S_2'(\widetilde{X}_{t,\theta_2,\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_2'(X_{t-\theta_2}))^2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})^2dt\to 0.$$

Le second terme de (2.11) vérifie

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\vartheta\int_0^T\varepsilon^{-2}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1(X_{t-\theta_1})-S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})\\&+S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_2(X_{t-\theta_2})-S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\Big)\\&\times\Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})+S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\Big)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\mathbb{E}_\vartheta\int_0^T\varepsilon^{-2}\Big(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,u_{\varepsilon,1}})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})\\&-S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})\\&+S_2'(\widetilde{X}_{t,\theta_2,u_{\varepsilon,2}})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})-S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\Big)\\&\times\Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})+S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\Big)dt.\end{aligned}$$

Le second terme de de (2.11) peut alors être réécrit:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\vartheta\varepsilon^{-2}\int_0^T&\Big\{\big(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1'(X_{t-\theta_1})\big)S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})^2\\&+\big(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}})-S_1'(X_{t-\theta_1})\big)S_2'(X_{t-\theta_2})\\&\times(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\\&+\big(S_2'(\widetilde{X}_{t,\theta_2,\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_2'(X_{t-\theta_2})\big)S_1'(X_{t-\theta_1})\\&\times(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}-X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})\\&+\big(S_2'(\widetilde{X}_{t,\theta_2,\varepsilon u_{\varepsilon,2}})-S_2'(X_{t-\theta_2})\big)S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}}-X_{t-\theta_2})^2\Big\}dt\end{aligned}\tag{2.12}$$

on montre alors que chaque terme tend vers 0; en utilisant $\mathbf{H}_1$, l'inégalité de Schwartz ainsi que (2.7) nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \varepsilon^{-2} \int_0^T \big(S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})\big) S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})^2 dt \\
&\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^T \big(\mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}|^4\big)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})|^2\right)^{1/2} dt \\
&\leq C \int_0^T \left(\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})|^2\right)^{1/2} dt
\end{aligned}$$

$\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ étant un point intermédiaire entre $X_{t-\theta_1}$ et $X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}}$ grâce à la continuité uniforme de S_1' et du Lemme 3.3, nous déduisons la convergence uniforme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})| = 0 \tag{2.13}$$

et par suite

$$\mathbb{E}_\vartheta \varepsilon^{-2} \int_0^T (S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})) S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})^2 dt$$

converge vers 0 , et il en est de même pour le quatrième terme de (2.12)

$$\mathbb{E}_\vartheta \varepsilon^{-2} \int_0^T (S_2'(\widetilde{X}_{t,\theta_2,\varepsilon u_{\varepsilon,2}}) - S_2'(X_{t-\theta_2})) S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})^2 dt$$

pour le second terme de (2.12), l'inégalité de Schwartz, $\mathbf{H}_1$ et l'inégalité (2.7) permettent d'avoir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \varepsilon^{-2} \int_0^T |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})||S_2'(X_{t-\theta_2})| \\
&\qquad |X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}||X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2}| dt \\
&\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^T \left(\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})|^2\right)^{1/2} \\
&\quad \big(\mathbb{E}_\vartheta(|X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}|^2 |X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2}|^2)\big)^{1/2} dt \\
&\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^T \left(\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})|^2\right)^{1/2} \\
&\quad \big(\mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}|^4\big)^{1/4} \big(\mathbb{E}_\vartheta |X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2}|^4\big)^{1/4} dt \\
&\leq CK \int_0^T \left(\mathbb{E}_\vartheta |S_1'(\widetilde{X}_{t,\theta_1,\varepsilon u_{\varepsilon,1}}) - S_1'(X_{t-\theta_1})|^2\right)^{1/2} dt
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 uniformément comme nous l'avons vu plus haut ((2.13)) et de la même façon le troisième terme converge vers 0. Ainsi le second membre de (2.12)

converge uniformément vers 0.
On note

$$q(\vartheta,x,t) := \begin{pmatrix} \big(S_1(x_{t-2\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)S_1'(x_{t-\theta_1}) \\ \\ \big(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2}) + S_2(x_{t-2\theta_2})\big)S_2'(x_{t-\theta_2}) \end{pmatrix},$$

le dernier terme de (2.11) peut alors être réécrit:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2}\Big(\int_0^T \Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt \\ &- \int_0^T \big(q(\vartheta,x,t)^t,\, \varepsilon u_\varepsilon\big)^2 dt + \int_0^T \big(q(\vartheta,x,t)^t,\, \varepsilon u_\varepsilon\big)^2 dt\Big) \end{aligned}$$

et nous considérons les deux premiers termes séparément. Moyennant l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et l'inégalité de Schwartz nous avons

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2}\int_0^T \Big[\Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 \\ &\quad - \big(q(\vartheta,x,t)^t,\, \varepsilon u_\varepsilon\big)^2\Big] dt \\ &\le \varepsilon^{-2}\Big[\int_0^T \big[S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2}) \\ &\quad - \big(q(\vartheta,x,t)^t,\, \varepsilon u_\varepsilon\big)\big]^2 dt\Big]^{1/2} \\ &\quad \times \Big[\int_0^T \big[S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2}) \\ &\quad + \big(q(\vartheta,x,t)^t,\, \varepsilon u_\varepsilon\big)\big]^2 dt\Big]^{1/2}. \end{aligned}$$

Le second facteur obtenu est borné car les fonctions $S_1(\cdot), S_2(\cdot), S_1'(\cdot)$ et $S_2'(\cdot)$ sont bornées et par la majoration (2.9). Moyennant l'hypothèse $\mathbf{H}_1$, la forme intégrale de

(2.1) et l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, le premier facteur est tel que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta\Big[\int_0^T \big[S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1}) + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\\
&\quad - \varepsilon u_{\varepsilon,1}\big(S_1(x_{t-2\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)S_1'(x_{t-\theta_1})\\
&\quad - \varepsilon u_{\varepsilon,2}\big(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2}) + S_2(x_{t-2\theta_2})\big)S_2'(x_{t-\theta_2})\big]^2 dt\Big]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta\Big[\int_0^T \Big[\int_{t-\theta_1}^{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} \big(S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2})\\
&\quad - S_1(x_{t-2\theta_1}) - S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)ds + \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2\varepsilon}} \big(S_1(X_{s-\theta_1}) + S_2(X_{s-\theta_2})\\
&\quad - S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2}) - S_2(x_{t-2\theta_2})\big)ds\Big]^2 dt\Big]^{1/2} + \varepsilon o(|u_\varepsilon|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\varepsilon^{-2}\mathbb{E}_\vartheta\Big[\int_0^T \Big[\int_{t-\theta_1}^{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} L(|X_{s-\theta_1} - x_{t-2\theta_1}| + |X_{s-\theta_2} - x_{t-\theta_1-\theta_2}|)ds\\
&\quad + \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} L(|X_{s-\theta_1} - x_{t-\theta_1-\theta_2}| + |X_{s-\theta_2} - x_{t-2\theta_2}|)ds\Big]^2 dt\Big]^{1/2} + \varepsilon o(|u_\varepsilon|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\varepsilon^{-2}C\Big[\int_0^T \Big[\int_{t-\theta_1}^{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} (\mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_1} - x_{t-2\theta_1}|^2 + \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_2} - x_{t-\theta_1-\theta_2}|^2)ds\\
&\quad + \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} (\mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_1} - x_{t-\theta_1-\theta_2}|^2 + \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_2} - x_{t-2\theta_2}|^2)ds\Big]dt\Big]^{1/2} + \varepsilon o(|u_\varepsilon|).
\end{aligned}$$

Pour la première espérance mathématique, par (2.7) et la dérivabilité de la fonction x_t sur l'intervalle compact $[0,T]$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned}
&\sup_{t-\theta_1\leq s\leq t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_1} - x_{t-2\theta_1}|^2\\
&\leq 2\sup_{t-\theta_1\leq s\leq t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_1} - x_{s-\theta_1}|^2 + 2\sup_{t-\theta_1\leq s\leq t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} |x_{s-\theta_1} - x_{t-2\theta_1}|^2\\
&\leq 2(K_2 + u_{\varepsilon,1}\max_{0\leq t\leq T}|\dot{x}_t|)^2\varepsilon^2 \leq C\varepsilon^2
\end{aligned}$$

et nous obtenons également des majorations du même ordre pour les termes:

$$\begin{aligned}
&\sup_{t-\theta_1\leq s\leq t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_2} - x_{t-\theta_1-\theta_2}|^2, \quad \sup_{t-\theta_2\leq s\leq t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_1} - x_{t-\theta_1-\theta_2}|^2,\\
&\sup_{t-\theta_2\leq s\leq t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} \mathbb{E}_\vartheta|X_{s-\theta_2} - x_{t-2\theta_2}|^2.
\end{aligned}$$

Il en découle alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}} \mathbb{E}_\vartheta\varepsilon^{-2}\Big(\int_0^T \Big(S_1'(X_{t-\theta_1})(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_{\varepsilon,1}} - X_{t-\theta_1})\\
&\qquad + S_2'(X_{t-\theta_2})(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_{\varepsilon,2}} - X_{t-\theta_2})\Big)^2 dt - \int_0^T \big(\varepsilon u_\varepsilon, q(\vartheta,x,t)\big)^2 dt = 0,
\end{aligned}$$

puis en tenant compte des convergences précédentes nous déduisons

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta||\Delta S(u_\varepsilon)-\varepsilon u_{\varepsilon,1}\big(S_1(x_{t-2\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_1-\theta_2})\big)S_1'(x_{t-\theta_1})$$
$$-\varepsilon u_{\varepsilon,2}\big(S_1(x_{t-\theta_1-\theta_2})+S_2(x_{t-2\theta_2})\big)S_2'(x_{t-\theta_2})||^2=0,$$

ou encore

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta||\Delta S(u_\varepsilon)-\big(\varepsilon u_\varepsilon,q(\vartheta,x,t)\big)||^2=0.$$

Posons $u_\varepsilon=I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon$ où (v_ε) est une suite telle que $\vartheta+v_\varepsilon\in\Theta$, $v=\lim\limits_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon$, et $u=I(\vartheta)^{-1/2}v$ nous avons alors

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta||\Delta S(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon,q(\vartheta,x,t)\big)||^2=0$$

et comme

$$||\Delta S(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(I(\vartheta)^{-1/2}v,q(\vartheta,x,t)\big)||$$
$$\leq||\Delta S(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon,q(\vartheta,x,t)\big)||+|v_\varepsilon-v|$$

il s'en suit

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta||\Delta S(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-v||^2=0 \tag{2.14}$$

d'autre part, pour l'intégrale stochastique

$$\Delta_\varepsilon=\int_0^T\Delta S_t(u_\varepsilon)dW_t$$

nous avons

$$P_\vartheta^{(\varepsilon)}\Big\{\Big|\int_0^T\Big(\Delta S_t(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(I(\vartheta)^{-1/2}v,q(\vartheta,x,t)\big)\Big)dW_t\Big|>\delta\Big\}$$
$$\leq\frac{\gamma}{\delta^2}+P_\vartheta^{(\varepsilon)}\Big\{||\Delta S_t(I(\vartheta)^{-1/2}v_\varepsilon)-\big(I(\vartheta)^{-1/2}v,q(\vartheta,x,t)\big)||^2>\gamma\Big\}$$

choisissant alors γ et δ assez petits de sorte que $\gamma\delta^{-2}$ reste petit, nous déduisons que le majorant précédent tend vers 0 et par suite

$$\Delta_\varepsilon\Longrightarrow\mathcal{N}(0,Id) \tag{2.15}$$

convergence en loi uniformément en $\vartheta\in\mathcal{K}$. Ce ci achève la preuve de la condition LAN uniforme des observations de notre problème: des résultats (2.14) et (2.15), nous concluons que le rapport de vraisemblance normalisé admet la représentation:

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(v)=\exp\big\{(v,\Delta_\varepsilon)-\frac{1}{2}|v|^2+\Psi_\varepsilon(v_\varepsilon,v,\vartheta)\big\} \tag{2.16}$$

où $\Delta_\varepsilon\Longrightarrow\mathcal{N}(0,Id)$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0}P_\vartheta\{|\Psi_\varepsilon(v_\varepsilon,v,\vartheta)|>\delta\}=0.$ □

Le Théorème suivant donne la convergence, la normalité asymptotique, l'efficacité asymptotique et la convergence des moments de l'EMV.

4 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Théorème 4.1. *Si les hypothèses* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ *et* $\mathbf{H}_3$ *sont réalisées, alors uniformément sur tout compact* $\mathcal{K}$ *de* Θ*, l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\widehat{\vartheta}_\varepsilon$ *vérifie*

1. $P_\vartheta - \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{\vartheta}_\varepsilon = \vartheta.$
2. $\varphi_\varepsilon(\vartheta)^{-1}(\widehat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,Id)$ *où* Id *est la matrice unité.*
3. *La convergence des moments* $\mathbb{E}_\vartheta|\varphi_\varepsilon(\vartheta)^{-1}(\widehat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta)|^p$ *vers les moments* $\mathbb{E}|\Delta|^p$ *pour tout* $p > 0$*, où* Δ *est un vecteur aléatoire de loi* $\mathcal{N}(0,Id)$*.*
4. *L'EMV est localement asymptotiquement minimax au sens de Hajek pour les fonctions de pertes* $l(\cdot) \in \mathbf{W}_{e,2}$ *i.e*

$$\lim_{\delta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta} \mathbb{E}_\vartheta l\left(\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta_0)(\widehat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} l(x)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx.$$

Les deux Lemmes suivants montrent que la familles des lois des processus du rapport de vraisemblance $(Z_\varepsilon(u),\ u \in \varepsilon^{-1}(\Theta - \vartheta))$ est tendue dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ et tendant vers 0 à l'infini.

Lemme 4.1. *Soit* $\mathcal{K}$ *un compact de* Θ*. Alors pour* u,v*, et pour tout* $R > 0$*, nous avons l'inégalité suivante*

$$\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}} \sup_{|u|<R,|v|<R} |v-u|^{-3}\mathbb{E}_\vartheta|Z_\varepsilon^{1/6}(v) - Z_\varepsilon^{1/6}(u)|^6 \leq C(1+R^9)$$

où C *est une constante qui dépend de* $\mathcal{K}$*.*

Démonstration. Notons

$$\begin{aligned}
&\vartheta = (\theta_1,\theta_2)^t,\\
&\vartheta_1 = \vartheta + \varepsilon u = (\theta_1 + \varepsilon u_1, \theta_2 + \varepsilon u_2)^t,\\
&\vartheta_2 = \vartheta + \varepsilon v = (\theta_1 + \varepsilon v_1, \theta_2 + \varepsilon v_2)^t,\\
&\Delta S_t = \varepsilon^{-1}\Big(\big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_1}) + S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_2})\big) - \big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) + S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2})\big)\Big)
\end{aligned}$$

et considérons le processus:

$$Y_t = \exp\left\{\frac{1}{6}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{12}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds\right\}$$

qui satisfait $P_{\vartheta_2}^{(\varepsilon)}$ p.s. l'égalité

$$Y_T = \left\{\frac{dP_{\vartheta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\vartheta_2}^{(\varepsilon)}}(X)\right\}^{1/6}$$

posons alors

$$V_t = \ln Y_t = \frac{1}{6}\int_0^t \Delta S_s dW_s - \frac{1}{12}\int_0^t (\Delta S_s)^2 ds.$$

La formule de Itô appliquée au processus $f(V_t) := \exp V_t = Y_t$ donne

$$\begin{aligned} dY_t &= \left\{ f_v'(V_t)\left(-\frac{1}{12}(\Delta S_t)^2\right) + \frac{1}{2} f_{vv}''(V_t)\frac{1}{36}(\Delta S_t)^2 \right\} dt \\ &+ f_v'(V_t)\frac{1}{6}\Delta S_t dW_t \\ &= -\frac{5}{72}(\Delta S_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{6}\Delta S_t Y_t dW_t, \qquad Y_0 = 1 \quad (V_0 = 0) \end{aligned}$$

par suite

$$Y_T = 1 - \frac{5}{72}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{6}\int_0^T \Delta S_t Y_t dW_t \tag{2.17}$$

d'autre part, nous avons

$$\mathbb{E}_\vartheta |Z_\varepsilon^{1/6}(v) - Z_\varepsilon^{1/6}(u)|^6 = \mathbb{E}_\vartheta \left| Z_\varepsilon^{1/6}(v)\left(1 - \frac{Z_\varepsilon^{1/6}(u)}{Z_\varepsilon^{1/6}(v)}\right)\right|^6$$

or $Z_\varepsilon(v) = dP_{\vartheta_2}^{(\varepsilon)}/dP_\vartheta^{(\varepsilon)}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\vartheta |Z_\varepsilon^{1/6}(v) - Z_\varepsilon^{1/6}(u)|^6 &= \mathbb{E}_\vartheta \left| \left(\frac{dP_{\vartheta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\vartheta^{(\varepsilon)}}\right)^{1/6} (1 - Y_T)\right|^6 \\ &= \mathbb{E}_\vartheta |1 - Y_T|^6 \frac{dP_{\vartheta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\vartheta^{(\varepsilon)}} = \mathbb{E}_{\vartheta_2}|1 - Y_T|^6 \end{aligned}$$

de l'expression (2.17) de Y_T et $(a+b)^6 \leq 2^5(a^6 + b^6)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\vartheta \left| Z_\varepsilon^{1/6}(v) - Z_\varepsilon^{1/6}(u)\right|^6 &= \mathbb{E}_{\vartheta_2}|1 - Y_T|^6 \\ &= \mathbb{E}_{\vartheta_2}\left| \frac{5}{72}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt - \frac{1}{6}\int_0^T \Delta S_t Y_t dW_t \right|^6 \\ &\leq 2^5 \mathbb{E}_{\vartheta_2}\left| \frac{5}{72}\int_0^T (\Delta S_t)^2 Y_t dt \right|^6 + 2^5 \mathbb{E}_{\vartheta_2}\left| \frac{1}{6}\int_0^T \Delta S_t Y_t dW_t \right|^6 \end{aligned}$$

en utilisant la formule (voir par exemple [9] p.18)

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f_t(\omega) dW_t\right)^{2m} \leq [m(2m-1)]^m T^{2m-1}\int_0^T \mathbb{E}(f_t(\omega))^{2m} dt \tag{2.18}$$

nous déduisons pour la deuxième intégrale:

$$\begin{aligned} 2^5 \mathbb{E}_{\vartheta_2}\left| \frac{1}{6}\int_0^T \Delta S_t Y_t dw_t \right|^6 &\leq \frac{2^5}{6^6}\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_2}(\Delta S_t)^6 Y_t^6 dt (3(6-1))^3 T^2 \\ &= \frac{5^3}{2.3^3} T^2 \int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_2}(\Delta S_t)^6 Y_t^6 dt \end{aligned}$$

puis l'inégalité de Hölder donne la majoration suivante pour la première intégrale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\vartheta_2}\Big|\int_0^T(\Delta S_t)^2 Y_t dt\Big|^6 &\leq \mathbb{E}_{\vartheta_2}\Big|\Big(\int_0^T(\Delta S_t)^{12}Y_t^6 dt\Big)^{\frac{1}{6}.6}\Big(\int_0^T dt\Big)^{\frac{5}{6}.6}\Big|\\ &= T^5\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_2}(\Delta S_t)^{12}Y_t^6 dt.\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\vartheta}|Z_\varepsilon^{1/6}(v)-Z_\varepsilon^{1/6}(u)|^6\\ &\quad\leq \frac{5^6}{2^{13}3^{12}}T^5\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_2}Y_t^6(\Delta S_t)^{12}dt+\frac{5^3}{2.3^3}T^2\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_2}Y_t^6(\Delta S_t)^6 dt\end{aligned}$$

et par changement de mesure, comme $Y_t=\left\{\frac{dP^{(\varepsilon)}_{\vartheta_1}}{dP^{(\varepsilon)}_{\vartheta_2}}(X)\right\}^{1/6}$ nous avons

$$\mathbb{E}_{\vartheta}|Z_\varepsilon^{1/6}(v)-Z_\varepsilon^{1/6}(u)|^6\leq C_1\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}dt+C_2\int_0^T \mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^6 dt. \tag{2.19}$$

Il reste à majorer les deux termes précédents et nous ne ferons le calcul que pour $\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}$.

Par $\mathbf{H}_1$, en posant $K=\max(\sup_{y\in\mathbb{R}}|S_1'(y)|,\sup_{y\in\mathbb{R}}|S_2'(y)|)$ et par le Théorème des accroissements finis nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}&=\mathbb{E}_{\vartheta_1}\varepsilon^{-12}\Big(S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_1})+S_2(X_{t-\theta_1-\varepsilon u_2})\\ &\qquad\qquad -S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1})-S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2})\Big)^{12}\\ &\leq\frac{K^{12}}{\varepsilon^{12}}\mathbb{E}_{\vartheta_1}\Big((X_{t-\theta_1-\varepsilon u_1}-X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1})+(X_{t-\theta_2-\varepsilon u_2}-X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2})\Big)^{12}\end{aligned}$$

puis en utilisant la représentation de (2.1) sous forme intégrale,

$$X_t=x_0+\int_0^t(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2}))ds+\varepsilon W_t,\quad 0\leq t\leq T,$$

l'inégalité $(a+b+c)^{2m}\leq C(a^{2m}+b^{2m}+c^{2m});\quad C=2^{4m-2}$ ainsi que la propriété du processus de Wiener: $\mathbb{E}|W_t-W_s|^2=|t-s|$, nous déduisons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}\leq C\frac{K^{12}}{\varepsilon^{12}}\Big\{&\mathbb{E}_{\vartheta_1}\Big|\int_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}^{t-\theta_1-\varepsilon u_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)ds\Big|^{12}\\ &+\mathbb{E}_{\vartheta_1}\Big|\int_{t-\theta_2-\varepsilon v_2}^{t-\theta_2-\varepsilon u_2}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)ds\Big|^{12}\\ &+\varepsilon^{12}\big(|(t-\theta_1-\varepsilon u_1)-(t-\theta_1-\varepsilon v_1)|\\ &+|(t-\theta_2-\varepsilon u_2)-(t-\theta_2-\varepsilon v_2)|\big)^6\Big\}\end{aligned}$$

par suite, grâce à la propriété (2.18) nous avons la majoration

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}\\
&\le C\frac{K^{12}}{\varepsilon^{12}}\Big\{\varepsilon^{11}|v_1-u_1|^{11}\int_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}^{t-\theta_1-\varepsilon u_1}\mathbb{E}_{\vartheta_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)^{12}ds\\
&\quad+\varepsilon^{11}|v_2-u_2|^{11}\int_{t-\theta_2-\varepsilon v_2}^{t-\theta_2-\varepsilon u_2}\mathbb{E}_{\vartheta_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)^{12}ds\\
&\quad+\varepsilon^{12}\varepsilon^{6}|u-v|^{6}\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

nous montrons ensuite que $\mathbb{E}_{\vartheta_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)^{12}$ est borné, pour cela nous utilisons l'inégalité $(a+b+c)^{2m}\le C(a^{2m}+b^{2m}+c^{2m})$ et $\mathbf{H}_1$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\vartheta_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)^{12}&\le C\mathbb{E}_{\vartheta_1}\Big(|S_1(X_{s-\theta_1})-S_1(x_{s-\theta_1})|^{12}\\
&\quad+|S_2(X_{s-\theta_2})-S_2(x_{s-\theta_2})|^{12}\Big)+C|S_1(x_{s-\theta_1})+S_2(x_{s-\theta_2})|^{12}\\
&\le C\mathbb{E}_{\vartheta_1}|X_{s-\theta_1}-x_{s-\theta_1}|^{12}|S_1'(\widetilde{X}_{s,\theta_1})|^{12}+C\mathbb{E}_{\vartheta_1}|X_{s-\theta_2}-x_{s-\theta_2}|^{12}|S_2'(\widetilde{X}_{s,\theta_2})|^{12}\\
&\quad+C|S_1(x_{s-\theta_1})+S_2(x_{s-\theta_2})|^{12}
\end{aligned}
$$

avec $\widetilde{X}_{s,\theta_1}$ et $\widetilde{X}_{s,\theta_2}$ des points intermédiaires entre $X_{s-\theta_1}$ et $x_{s-\theta_1}$ puis $X_{s-\theta_2}$ et $x_{s-\theta_2}$ respectivement, ainsi par l'estimation (2.7),nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\vartheta_1}\big(S_1(X_{s-\theta_1})+S_2(X_{s-\theta_2})\big)^{12}\\
&\qquad\le 2CK_2^6\varepsilon^{12}K^{12}+C\sup_{0\le s\le T}|S_1(x_{s-\theta_1})+S_2(x_{s-\theta_2})|^{12}
\end{aligned}
$$

$S_1(x.)$ et $S_2(x.)$ sont uniformément bornées , de (2.20) nous déduisons la majoration suivante

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{12}\le C\frac{K^{12}}{\varepsilon^{12}}\Big\{\varepsilon^{12}\big(|v_1-u_1|^{12}+|v_2-u_2|^{12}\big)\\
&\times\big(2CK_2^6\varepsilon^{12}K^{12}+C\sup_{0\le s\le T}|S_1(x_{s-\theta_1})+S_2(x_{s-\theta_2})|^{12}\big)+\varepsilon^{12}\varepsilon^{6}|u-v|^{6}\Big\}\\
&\le C_1\varepsilon^{12}|u-v|^{12}+C_2|u-v|^{12}+C_3\varepsilon^{6}|u-v|^{6}\\
&\le C_4|u-v|^{12}+C_3\varepsilon^{6}|u-v|^{6}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

de la même manière:

$$
\mathbb{E}_{\vartheta_1}(\Delta S_t)^{6}\le C_6|u-v|^{6}+C_5\varepsilon^{3}|u-v|^{3}\tag{2.22}
$$

et en regroupant les estimations: (2.19),(2.20), (2.21), et (2.22) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\vartheta}|Z_\varepsilon^{1/6}(u)-Z_\varepsilon^{1/6}(v)|^{6}\le{}&C_4|u-v|^{12}+C_3|u-v|^{6}+C_6|u-v|^{6}\\
&+C_5|u-v|^{3}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\sup_{|u|<R,|v|<R} & |u-v|^{-3}\mathbb{E}_\vartheta|Z_\varepsilon^{1/6}(u)-Z_\varepsilon^{1/6}(v)|^6 \\
& \leq C_5+(C_3+C_6)|u-v|^3+C_4|u-v|^9 \\
& \leq C_{\mathcal{K}}(1+R^9).
\end{aligned}
$$

où la constante $C_{\mathcal{K}}>0$ ce qui termine la preuve. □

On définit l'ensemble G:

$$
G=\{g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad \lim_{y\to\infty} y^N\exp(-g(y))=0, \textit{ pour tout } N>0\}
$$

Lemme 4.2. *Sous* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ *et* $\mathbf{H}_3$*, pour* $p\in(0{,}1)$ *et* $\mathcal{K}$ *un compact de* Θ*, il existe une* $g\in G$, $g(u):=\kappa|u|^2$*, (*κ *une constante) telle que:*

$$
\sup_{\vartheta\in\mathcal{K}}\mathbb{E}_\vartheta Z_\varepsilon^p(u)\leq\exp(-\kappa(|u|^2))
$$

pour $u\in\mathcal{U}_\varepsilon:=\varphi_\varepsilon(\vartheta)^{-1}(\Theta-\vartheta)$

Démonstration. En suivant le même raisonnement que Kutoyants ([9]), posons tout d'abord

$$
\begin{aligned}
a&=S_1(X_{t-\theta_1-u_1})-S_1(X_{t-\theta_1})+S_2(X_{t-\theta_2-u_2})-S_2(X_{t-\theta_2})\\
b&=S_1(x_{t-\theta_1-u_1})-S_1(x_{t-\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_2-u_2})-S_2(x_{t-\theta_2})
\end{aligned}
$$

par l'inégalité $a^2\geq b^2-2|b(a-b)|$ et l'inégalité triangulaire nous avons

$$
\begin{aligned}
&\big(S_1(X_{t-\theta_1-u_1})-S_1(X_{t-\theta_1})+S_2(X_{t-\theta_2-u_2})-S_2(X_{t-\theta_2})\big)^2\\
&\geq\big(S_1(x_{t-\theta_1-u_1})-S_1(x_{t-\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_2-u_2})-S_2(x_{t-\theta_2})\big)^2\\
&\qquad-2|S_1(x_{t-\theta_1-u_1})-S_1(x_{t-\theta_1})+S_2(x_{t-\theta_2-u_2})-S_2(x_{t-\theta_2})|\\
&\qquad\times\big(|S_1(X_{t-\theta_1-u_1})-S_1(x_{t-\theta_1-u_1})|+|S_2(X_{t-\theta_2-u_2})-S_2(x_{t-\theta_2-u_2})|\\
&\qquad+|S_1(X_{t-\theta_1})-S_1(x_{t-\theta_1})+S_2(X_{t-\theta_2})-S_2(x_{t-\theta_2})|\big)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

S_1, S_2 et x sont continûment dérivables, un développement de Taylor de S_1 et de S_2 au voisinage de $t-\theta_1$ et $t-\theta_2$ respectivement pour $|u|\leq\delta$, donne pour le premier terme du second membre de (2.23)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\right)^2 dt \\
&= \int_0^T \Big(u_1^2(S_1'(x_{t-\theta_1}))^2(\dot{x}_{t-\theta_1})^2 + u_2^2(S_2'(x_{t-\theta_2}))^2(\dot{x}_{t-\theta_2})^2 \\
&\quad + 2u_1S_1'(x_{t-\theta_1})\dot{x}_{t-\theta_1}u_2S_2'(x_{t-\theta_2})\dot{x}_{t-\theta_2}\Big)dt + \circ(|u|^2) \\
&= u_1^2I_{11} + u_2^2I_{22} + 2u_1u_2I_{12} + \circ(|u|^2) \\
&= (I(\vartheta)u,u) + \circ(|u|^2) \\
&\geq |u|^2\left(\inf_{|\lambda|=1}(I(\vartheta)\lambda,\lambda) + \circ(1)\right) > A_{1,\mathcal{K}}^2|u|^2
\end{aligned}$$

$I(\vartheta)$ étant définie positive par $\mathbf{H}_3$ où les I_{ij} sont définis dans la section 2 et $A_{1,\mathcal{K}}$ est une constante non nulle.
D'autre part , pour $|u| > \delta$, posons

$$\begin{aligned}
m(\delta) = \inf_{\vartheta\in\mathcal{K}}\ \inf_{|u|>\delta,\vartheta+u\in\Theta}\int_0^T &\big(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) \\
&+ S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\big)^2 dt
\end{aligned}$$

ainsi par $\mathbf{H}_2$ $m(\delta) > 0$ et comme $|u_i| \leq |\beta_i - \alpha_i|$, $i \in \{1,2\}$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\right)^2 dt \geq m(\delta) \\
&\geq \left(\frac{|u_1| + |u_2|}{|\beta_1-\alpha_1| + |\beta_2-\alpha_2|}\right)^2 m(\delta) \geq \frac{m(\delta)}{(|\beta_1-\alpha_1| + |\beta_2-\alpha_2|)^2}|u|^2 = A_{2,\mathcal{K}}^2|u|^2
\end{aligned}$$

où $A_{2,\mathcal{K}}$ est une constante non nulle. Enfin on note $A_{\mathcal{K}}^2 = \min(A_{1,\mathcal{K}}^2,A_{2,\mathcal{K}}^2)$ et l'on obtient la minoration

$$\int_0^T \left(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\right)^2 dt \geq A_{\mathcal{K}}^2|u|^2.$$

D'autre part, par $\mathbf{H}_1$, en posant $K = \max(\sup_{y\in\mathbb{R}}|S_1'(y)|, \sup_{y\in\mathbb{R}}|S_2'(y)|)$ par le Théorème des accroissements finis et $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\right)^2 dt \\
&\leq \int_0^T \left(2(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}))^2 + 2(S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2}))^2\right) dt \\
&\leq 2K^2\int_0^T \left(|x_{t-\theta_1-u_1} - x_{t-\theta_1}|^2 + |x_{t-\theta_2-u_2} - x_{t-\theta_2}|^2\right) dt \\
&\leq 2TK^2|u|^2 \max_{t\in[0,T]} \dot{x}_t^2 \\
&\leq B^2|u|^2
\end{aligned}$$

où $\dot{x}$ étant bornée sur $[0,T]$ et B est une constante non nulle. Par conséquent nous obtenons la double inégalité

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{K}}^2|u|^2 \leq \int_0^T \big(S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) \\ + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})\big)^2 dt \leq B^2|u|^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Considérons à présent le dernier terme du second membre dans (2.23), après intégration sur $[0,T]$ et par l'inégalité de Schwartz nous avons

$$\begin{aligned} &\Big(\int_0^T [S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})] \\ &\quad \times [S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]dt\Big)^2 \\ &\leq \int_0^T [S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]^2 dt \\ &\quad \times \int_0^T [S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]^2 dt \end{aligned}$$

et chacun des deux termes obtenus est majoré grâce à $\mathbf{H}_1$, (2.6) et (2.24) comme suit

$$\begin{aligned} &\int_0^T [S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]^2 dt \\ &\leq \int_0^T \Big(2[S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1(x_{t-\theta_1})]^2 + 2[S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]^2\Big) dt \\ &\leq 2TK^2 (\sup_{0\leq t\leq T} |X_{t-\theta_1} - x_{t-\theta_1}|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} |X_{t-\theta_2} - x_{t-\theta_2}|^2) \\ &\leq 4TK^2C^2\varepsilon^2 \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|^2 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^T [S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})]^2 dt \leq B^2|u|^2$$

par suite

$$\begin{aligned} &\int_0^T (|S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})| \\ &\times |S_1(X_{t-\theta_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})|\,)dt \\ &\leq 2B\sqrt{T}KC\varepsilon|u| \sup_{0\leq t\leq T} |W_t| \end{aligned} \tag{2.25}$$

pour le second terme du second membre de (2.23) nous avons également

$$\begin{aligned} &\int_0^T (|S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1}) + S_2(x_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2})| \\ &\times |S_1(X_{t-\theta_1-u_1}) - S_1(x_{t-\theta_1-u_1}) + S_2(X_{t-\theta_2-u_2}) - S_2(x_{t-\theta_2-u_2})|\,)dt \\ &\quad \leq 2B\sqrt{T}KC\varepsilon|u| \sup_{0\leq t\leq T} |W_t| \end{aligned} \tag{2.26}$$

posons à présent

$$S(X_{t,\vartheta}) := S_1(X_{t-\theta_1}) + S_2(X_{t-\theta_2}), \quad v := I(\vartheta)^{-1/2}u$$

alors

$$S(X_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u}) = S_1(X_{t-\theta_1-\varepsilon v_1}) + S_2(X_{t-\theta_2-\varepsilon v_2})$$

notant cette fois

$$\Delta S_t(u) = \varepsilon^{-1}[S(X_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u}) - S(X_{t,\vartheta})]$$

par l'inégalité de Hölder, pour $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta Z_\varepsilon^p(u) &= \mathbb{E}_\vartheta \exp\big(-\frac{1}{2}p||\Delta S||^2 + p\int_0^T \Delta S_t dW_t\big) \\
&= \mathbb{E}_\vartheta\left[\exp\big(-\frac{p-q}{2}||\Delta S||^2\big)\exp\big(p\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}||\Delta S||^2\big)\right] \\
&\leq \left[\mathbb{E}_\vartheta \exp\big(-\frac{p-q}{2}p_1||\Delta S||^2\big)\right]^{1/p_1} \\
&\quad \times \left[\mathbb{E}_\vartheta \exp\big(pp_2\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}p_2||\Delta S||^2\big)\right]^{1/p_2}
\end{aligned}$$

en choisissant $0 < p^2 < q < p < 1$, $p_1 = q/(q-p^2)$, $p_2 = q/p^2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta Z_\varepsilon^p(u) \quad &\leq \quad \left[\mathbb{E}_\vartheta \exp\big(-\frac{p-q}{2}\frac{q}{q-p^2}||\Delta S||^2\big)\right]^{(q-p^2)/q} \\
&\quad \times \left[\mathbb{E}_\vartheta \exp\big(p\frac{q}{p^2}\int_0^T \Delta S_t dW_t - \frac{q}{2}\frac{q}{p^2}||\Delta S||^2\big)\right]^{p^2/q}
\end{aligned}$$

D'autre part , on a (voir par exemple [9] p.18):

$$\mathbb{E}_\vartheta \exp\Big(\int_0^T \frac{q}{p}\Delta S_t dW_t - \frac{1}{2}||\frac{q}{p}\Delta S||^2\Big) \leq 1$$

Donc

$$\mathbb{E}_\vartheta Z_\varepsilon^p(u) \leq \left[\mathbb{E}_\vartheta \exp\big(-\frac{q(p-q)}{2(q-p^2)}||\Delta S||^2\big)\right]^{(q-p^2)/q} \tag{2.27}$$

Soit $\gamma := \frac{q(p-q)}{2(q-p^2)} > 0$. En tenant compte des estimations: (2.23), (2.24) (2.25) et (2.26) nous obtenons dans (2.27)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) \leq \exp\Big(-\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T \big(S(x_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u}) - S(x_{t,\vartheta})\big)^2\Big)dt \\
&\times \mathbb{E}_\vartheta \exp\Big(2\gamma\varepsilon^{-2}\int_0^T |S(x_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u}) - S(x_{t,\vartheta})| \\
&\times \big(|S(X_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u}) - S(x_{t,\vartheta+\varphi_\varepsilon(\vartheta)u})| + |S(X_{t,\vartheta}) - S(x_{t,\vartheta})|\big)dt\Big) \\
&\leq \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2)\mathbb{E}\exp(4\gamma B\sqrt{T}K|I(\vartheta)^{-1/2}u|C\sup_{0\leq t\leq T}|W_t|)
\end{aligned}$$

et de l'inégalité suivante [9] (Lemme 1.14)

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sup_{0\le t\le T}|W_t|\right\} \le 1+\lambda\sqrt{8\pi T}\exp\frac{T\lambda^2}{2}$$

nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) \le \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2)\\
&\quad\times\Big(1+4\gamma BTKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\sqrt{8\pi}\exp(8\gamma^2B^2T^2K^2C^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2)\Big)\\
&\le \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2)+4\gamma BTKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\sqrt{8\pi}\\
&\quad\times\exp\left(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2+8\gamma^2B^2T^2K^2C^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\right)
\end{aligned}$$

un choix de q voisin de p et tel que $\gamma=\frac{1}{16T^2L^2}$ permet d'avoir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta \exp(-\gamma||\Delta S||^2) \le \exp(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2)\\
&\times\left\{1+4\sqrt{8\pi}T\gamma BKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\exp(8T^2\gamma A_{\mathcal{K}}^2K^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\frac{1}{16T^2K^2})\right\}\\
&=\exp\big(-\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\big)\\
&\quad+4\sqrt{8\pi}T\gamma BKCI|(\vartheta)^{-1/2}u|\exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\big)\\
&\le \exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\big)\big(1+4\sqrt{8\pi}T\gamma BKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\big)
\end{aligned}$$

Finalement de (2.27) et en utilisant $1+x\le\exp x$ nous déduisons que le rapport de vraisemblance est tel que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\vartheta Z_\varepsilon^p(u)\le\big(\mathbb{E}_\vartheta\exp(-\gamma||\Delta S||^2)\big)^{(q-p^2)/q}\\
&\le\left(\exp\big(-\frac{1}{2}\gamma A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\big)\big(1+4\sqrt{8\pi}T\gamma BKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\big)\right)^{(q-p^2)/q}\\
&\le\exp\left(-\frac{1}{4}(p-q)A_{\mathcal{K}}^2|I(\vartheta)^{-1/2}u|^2\right)\exp\left(4\sqrt{8\pi}T\gamma BKC|I(\vartheta)^{-1/2}u|\frac{q-p^2}{q}\right)\\
&\le\exp\big(-\kappa(|u|^2)\big)
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Les Lemmes 4.1 et 4.2 impliquent que la famille des lois des processus de rapport de vraisemblance $(Z_\varepsilon(u),\, u\in\varepsilon^{-1}(\Theta-\vartheta))$ est tendue sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ (voir [15] ou [9]) et le Théorème 3.1 implique la convergence des lois de dimensions finies. Par conséquent les processus $(Z_\varepsilon(u), u\in\varepsilon^{-1}(\Theta-\vartheta))$ convergent faiblement dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ vers un processus que l'on note $(Z(u))$.
La preuve du Théorème 4.1 utilise le Théorème 3.1 et les Lemmes 4.1 et 4.2 et elle est similaire à celle du Théorème 1.1 p. 174 dans [4] ou du Théorème 5.3.3 p. 188 dans [6] et donc elle est omise.

Nous remarquons que le problème d'estimation étudié peut se généraliser à plusieurs retards seulement nous avons des difficultés de notations supplémentaires. Nous notons aussi que l'estimation par la méthode de Bayes est également possible.

Chapitre 3

Tests sur les retards dans une diffusion non linéaire

Les tests d'hypothèses permettent de vérifier si le modèle mathématique proposé reflète bien les observations. Dans ce chapitre, notre but est de présenter certains tests pour un système dynamique avec petit bruit. Pour une étude détaillée de la théorie des tests d'hypothèses, voir par exemple [14].

1 Introduction

Dans cette section, nous considérons deux problèmes: tester une hypothèse simple contre une alternative simple puis contre une alternative composite unilatérale. Le processus observé est toujours la diffusion

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \\ X_s &= x_0, \quad s \leq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où le paramètre inconnu θ peut prendre deux valeurs fixées $\theta = 0$ ou $\theta = \theta_1$ c'est à dire le processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ n'a pas de retard dans la première situation sinon il admet un retard égal à θ_1. C'est notre premier problème. Le second problème est le cas d'alternative composée unilatérale.
Le coefficient de diffusion ε et la condition initiale x_0 sont supposés connus. La dérive S(.) est supposée connue également. Nous nous plaçons dans les conditions d'existence et d'unicité du processus solution de (3.1) sous l'hypothèse et les alternatives. Alors (3.1) admet une solution unique. De plus les mesures induites par le processus solution de (3.1) sur l'espace $(\mathcal{C}_T, \mathcal{B}_T)$ des fonctions continues sur $[0,T]$, sous l'hypothèse et l'alternative respectivement $P_0^{(\varepsilon)}$ et $P_1^{(\varepsilon)}$ sont équivalentes pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. (voir [15] chap.4).

2 Hypothèse simple contre alternative simple

2.1 Préliminaires - Notations

Nous avons à tester une hypothèse simple:

$$\mathcal{H}_0 : \quad \theta = 0 \quad \text{contre une alternative simple} \quad \mathcal{H}_1 \quad \theta = \theta_1$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$ fixé, notons $\mathcal{K}_\alpha$ la classe des tests ϕ_ε de niveau α

$$\mathcal{K}_\alpha = \{\phi_\varepsilon : \mathbb{E}_0 \phi_\varepsilon(X) \leq \alpha\}$$

$\phi_\varepsilon(X)$ est la probabilité d'accepter l'alternative $\mathcal{H}_1$ à partir de l'observation: $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ et notons $\beta_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$ la probabilité de la bonne décision sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$

$$\beta_\varepsilon(\phi_\varepsilon) = \mathbb{E}_{\theta_1} \phi_\varepsilon(X)$$

$\beta_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$ est dite puissance du test ϕ_ε. La définition suivante permet de comparer différents tests de la classe $\mathcal{K}_\alpha$

Définition 2.1. *Un test $\phi_\varepsilon \in \mathcal{K}_\alpha$ est le plus puissant dans la classe $\mathcal{K}_\alpha$ si pour tout autre test $\psi_\varepsilon \in \mathcal{K}_\alpha$, nous avons $\beta_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \geq \beta_\varepsilon(\psi_\varepsilon)$.*

Précisons à présent quelques notations relatives à notre problème

1. L'accroissement de la dérive

$$\Delta S^\varepsilon = S(X_{t-\theta_1}) - S(X_t) \quad t \in [0,T]$$

2. $x^0_\cdot$ étant la solution de l'équation différentielle ordinaire sans retard

$$\frac{dx^0_t}{dt} = S(x^0_t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \tag{3.2}$$

soit

$$I_0 = \int_0^T \left(S(x^0_t) - S(x^0_{t-\theta_1})\right)^2 dt$$

notons également

$$I_1 = \int_0^T \left(S(x^1_t) - S(x^1_{t-\theta_1})\right)^2 dt$$

où $x^1_\cdot$ est la solution de l'équation différentielle avec retard

$$\frac{dx^1_t}{dt} = S(x^1_{t-\theta_1}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \tag{3.3}$$

3. Nous définissons d'autre part les variables aléatoires $\xi_0^{(\varepsilon)}$ *et* $\xi_1^{(\varepsilon)}$

$$\xi_0^{(\varepsilon)} =: \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)}{\sqrt{I_0}} dW_t \quad , \quad \xi_1^{(\varepsilon)} =: \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)}{\sqrt{I_1}} dW_t$$

2.2 Test du rapport de vraisemblance

Nous rappelons la définition [15]; pour l'observation $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ de (2.1), le logarithme du rapport de vraisemblance est défini pour les deux valeurs 0 et θ_1 du paramètre par

$$\ln L(\theta_1,0,X) = \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon^2} \quad dX_t - \int_0^T \frac{S(X_{t-\theta_1})^2 - S(X_t)^2}{2\varepsilon^2} dt \tag{3.4}$$

et $P_0^{(\varepsilon)}$ presque sûrement nous avons aussi

$$\ln L(\theta_1,0,X) = \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon} dW_t - \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2} dt. \tag{3.5}$$

D'après le Lemme de Neymann Pearson, le test basé sur la statistique du rapport de vraisemblance est le plus puissant dans la classe $\mathcal{K}_\alpha$, pour chaque valeur fixée $\theta = \theta_1$ de l'hypothèse alternative (voir par exemple ([14]). C'est le test

$$\widehat{\phi}_\varepsilon(X) = \chi_{\{L(\theta_1,0,X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\}}$$

où $c_{\alpha,\varepsilon}$ est la constante définie par l'équation

$$\mathbb{E}_0 \widehat{\phi}_\varepsilon(X) = P_0^{(\varepsilon)}\{L(\theta_1,0,X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\} = \alpha.$$

Cette dernière équation en c_α peut cependant être difficile à résoudre. Pour faciliter la construction du test nous aurons recours à l'approche asymptôtique lorsque $\varepsilon \to 0$. Cela consiste à considérer la classe de tests de niveau asymptôtique α : (voir par exemple [10])

$$\mathcal{K}'_\alpha = \{\phi_\varepsilon : \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}_0 \phi_\varepsilon(X) \leq \alpha\}$$

et pour construire le test $\widehat{\phi}_\varepsilon$ dans la classe $\mathcal{K}'_\alpha$ nous établissons le Lemme suivant

Lemme 2.1. *La condition* **H** *étant satisfaite, nous avons les convergences:*

$$\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0} dt \longrightarrow 1 \quad quand \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ *et*

$$\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1} dt \longrightarrow 1 \quad quand \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

sous l'alternative $\mathcal{H}_1$.

Démonstration. Par l'hypothèse **H** et moyennant la majoration (1.6) nous avons

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |S(X_t) - S(x_t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |S'(\widetilde{X}_t)||X_t - x_t| \leq K K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|$$

$\widetilde{X}_t$, étant un certain point intermédiaire entre X_t et x_t. De la même manière, nous avons

$$\sup_{0\leq t\leq T} |S(X_{t-\theta_1}) - S(x_{t-\theta_1})| \leq KK_1\varepsilon \sup_{0\leq t\leq T} |W_t|$$

dans ces deux inégalités le majorant tend vers 0 avec ε, d'autre part sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, le procesuus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = S(X_t)dt + \varepsilon dW_t\,, \quad 0 \leq t \leq T; \quad X_s = x_0\,, \quad s \leq 0$$

il s'en suit alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \frac{\big(S(X_{t-\theta_1}) - S(X_t)\big)^2}{I_0}dt$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{I_0}\int_0^T \Big(\big(S(X_{t-\theta_1}) - S(x_{t-\theta_1})\big) + \big(S(x_{t-\theta_1}) - S(x_t)\big) + \big(S(x_t) - S(X_t)\big)\Big)^2 dt$$
$$= \frac{1}{I_0}\int_0^T \big(S(x_{t-\theta_1}) - S(x_t)\big)^2 dt = 1$$

La deuxième assertion du Lemme est établie de la même manière. □

Construction du test: supposons $\mathcal{H}_0$ vraie, le niveau du test $\widehat{\phi}_\varepsilon$ est tel que

$$\begin{aligned}
\alpha &= E_0\widehat{\phi}_\varepsilon(X) = P_0^{(\varepsilon)}\{L(\theta_1,0,X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\} \\
&= P_0^{(\varepsilon)}\{\ln L(\theta_1,0,X) \geq \ln c_{\alpha,\varepsilon}\} \\
&= P_0^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}dW_t \geq \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2}dt + \ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\} \\
&= P_0^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \Delta S^\varepsilon dW_t \geq \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon}dt + \varepsilon\ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\} \\
&= P_0^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_0}}dW_t \geq \sqrt{I_0}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon I_0}dt + \varepsilon\frac{\ln c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_0}}\right\} \\
&= P_0^{(\varepsilon)}\left\{\xi_0^{(\varepsilon)} \geq \sqrt{I_0}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon I_0}dt + \varepsilon\frac{\ln c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_0}}\right\}
\end{aligned}$$

si on note $z_\alpha^{(\varepsilon)}$ le quantile de la loi de la variable aléatoire $\xi_0^{(\varepsilon)}$, nous avons pour chaque valeur fixée de $\varepsilon \in (0,1)$

$$\sqrt{I_0}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon I_0}dt + \varepsilon\frac{\ln c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_0}} = z_\alpha^{(\varepsilon)}$$
$$c_{\alpha,\varepsilon} = \exp\left\{\frac{\sqrt{I_0}}{\varepsilon}z_\alpha^{(\varepsilon)} - \frac{\sqrt{I_0}}{2\varepsilon^2}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0}dt\right\}$$

on définit ainsi une suite de réels $c_{\alpha,\varepsilon}$; il parait cependant difficile de calculer $c_{\alpha,\varepsilon}$ à partir de cette dernière équation; la loi de $\xi_0^{(\varepsilon)}$ étant inconnue. Pour ε fixé, l'alternative $\mathcal{H}_1$ est retenue si:

$$\ln L(\theta_1,0,X) \geq \frac{\sqrt{I_0}}{\varepsilon}z_\alpha^{(\varepsilon)} - \frac{\sqrt{I_0}}{2\varepsilon^2}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0}dt.$$

Nous proposons à présent un calcul de la puissance asymptotique de ce test. Sous $\mathcal{H}_1$, pour tout ε fixé

$$
\begin{aligned}
\beta_\varepsilon(\widehat{\phi}_\varepsilon)(X) &= \mathbb{E}_1\widehat{\phi}_\varepsilon(X) = P_1^{(\varepsilon)}\{L(\theta_1,0,X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon^2}[dX_t - S(X_t)dt] \geq \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2}dt + \ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon^2}[S(X_{t-\theta_1})dt + \varepsilon dW_t - S(X_t)dt] \geq \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2}dt + \ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}dW_t \geq \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2}dt - \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}dt + \ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}dW_t \geq \int_0^T -\frac{1}{2\varepsilon^2}(\Delta S^\varepsilon)^2dt + \ln c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\xi_1^{(\varepsilon)} \geq -\frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt + \frac{\varepsilon \ln c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_1}}\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\xi_1^{(\varepsilon)} \geq -\frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt + \frac{\varepsilon}{\sqrt{I_1}}\left(\frac{\sqrt{I_0}}{\varepsilon}z_\alpha^{(\varepsilon)} - \frac{\sqrt{I_0}}{2\varepsilon^2}\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0}dt\right)\right\}\\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\xi_1^{(\varepsilon)} \geq -\left(\frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon\sqrt{I_0}}\right)\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt + \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_1}}z_\alpha^{(\varepsilon)}\right\}
\end{aligned}
$$

asymptotiquement (quand ε tend vers 0), par le Lemme 2.1

$$\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

enfin le théorème de la limite centrale pour les intégrales stochastiques (voir par exemple [10] (p.44)) donne

$$\xi_1^{(\varepsilon)} \Longrightarrow \xi \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1)$$

il s'en suit la convergence

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_1^{(\varepsilon)}\left\{\xi_1^{(\varepsilon)} \geq -\left(\frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon\sqrt{I_0}}\right)\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt + \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_1}}z_\alpha^{(\varepsilon)}\right\} = 1$$

en effet,

$$-\left(\frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{I_1}}{2\varepsilon\sqrt{I_0}}\right) \longrightarrow -\infty\ , \qquad \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1}dt \longrightarrow 1\ , \quad z_\alpha^{(\varepsilon)} \longrightarrow z_\alpha$$

où z_α est le quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2.3 Test de niveau asymptotique α

Soit α fixé dans (0,1), pour tester l'hypothèse simple ($\mathcal{H}_0 :\ \theta = 0$) contre une alternative simple ($\mathcal{H}_1 :\ \theta = \theta_1$) nous considérons à présent la statistique:

$$\Delta_\varepsilon(X) = \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}[dX_t - S(X_t)dt]$$

le test ϕ est alors défini par

$$\phi(X) = 1_{\{\Delta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\}}$$

où $c_{\alpha,\varepsilon}$ est solution de l'équation

$$P_0^{(\varepsilon)}\{\Delta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\} = \alpha$$

ainsi sous $\mathcal{H}_0$

$$\Delta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon} \Longleftrightarrow \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_0}} dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_0}}$$

Nous proposons une approximation de la valeur de c_α; nous adoptons alors une approche asymptotique où ϕ est considéré comme élément de $\mathcal{K}'_\alpha$, la classe des tests de niveau asymptotique α. Par le Lemme 2.1, nous avons la convergence

$$\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_0} dt \longrightarrow 1$$

puis, en appliquant le théorème de la limite centrale pour les intégrales stochastiques, la variable

$$\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_0}} dW_t$$

converge en loi vers une variable aléatoire ξ de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La distribution limite de ce test ne dépend pas de la dérive $S(X_{t-\bullet})$ donc elle ne dépend pas de l'hypothèse de base.

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} P_0^{(\varepsilon)} \left\{ \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_0}} dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_0}} \right\} = P\{\xi \geq c_\alpha \sqrt{I_0}\}$$
$$\text{avec } c_\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} c_{\alpha,\varepsilon}$$

et si z_α est le quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ nous aurons: $c_\alpha = \sqrt{I_0} z_\alpha$. Le test ϕ est donc de niveau asymptotique α. Sous $\mathcal{H}_1$ nous avons:

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon} &\Longleftrightarrow \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}[dX_t - S(X_t)dt] \geq c_{\alpha,\varepsilon} \\
&\Longleftrightarrow \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}[S(X_{t-\theta_1})dt + \varepsilon dW_t - S(X_t)dt] \geq c_{\alpha,\varepsilon} \\
&\Longleftrightarrow \int_0^T \Delta S^\varepsilon dW_t \geq c_{\alpha,\varepsilon} - \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{\varepsilon} dt \\
&\Longleftrightarrow \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_1}} dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_1}} - \sqrt{I_1} \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{\varepsilon I_1} dt
\end{aligned}$$

$x_\bullet^{(1)}$ étant la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta_1}), \quad x_s = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad s \leq 0$$

sous $\mathcal{H}_1$, et par le Lemme 2.1

$$\int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1} dt \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

et le Théorème de la limite centrale (voir [10] Lemme 1.9) donne dans ce cas la convergence en loi de l'intégrale stochastique

$$\int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_1}} dW_t \Longrightarrow \xi$$

ξ de loi $\mathcal{N}(0,1)$, il s'en suit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_1^{(\varepsilon)} \left\{ \int_0^T \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_1}} dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_1}} - \frac{\sqrt{I_1}}{\varepsilon} \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1} dt \right\} = P(\xi \geq -\infty)$$

en effet

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\sqrt{I_1}}{\varepsilon} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{I_1} dt = 1.$$

Nous remarquons ainsi que la puissance $\beta_{\alpha,\varepsilon}$ converge vers une puissance asymptotique égale à 1 comme pour le test basé sur le rapport de vraisemblance. Pour mieux décrire le comportement asymptotique de la fonction puissance $\beta_{\alpha,\varepsilon}$, nous aurions esoin du principe sur les larges déviations; ce principe permet l'étude de la vitesse de convergence de la fonction puissance, voir par exemple []

2.4 Test de niveau α

Avec les mêmes hypothèse et alternative $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$, $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$, nous proposons un test de niveau α pour chaque ε fixé dans (0,1) à la différence des deux tests précédents qui sont de niveau asymptotique α.
Pour $t \in [T,T+1]$ posons $\Delta S^\varepsilon := \sqrt{I_1}$, et remarquons toutefois que les observations X_t, sont en fait définies sur $[0,T]$ uniquement. Comme Kutoyants ([10] p.44) introduisons le temps d'arrêt

$$\tau_\varepsilon = \inf \left\{ t \in [0,T+1] : \int_0^t (\Delta S^\varepsilon)^2 dt \geq I_1 \right\}$$

et notons que $P_o^{(\varepsilon)}$, respectivement $P_1^{(\varepsilon)}$, p.s. nous avons $\tau_\varepsilon \leq T+1$. Considérons alors la statistique

$$\Delta_\tau(\theta_1,0,X) := \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon} \left[dX_t - S(X_t) dt \right]$$

avec

$$dX_t - S(X_t)dt = \varepsilon dW_t, \text{ pour } t \in [T,T+1]$$

$X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ étant le processus solution du problème (3.1), lorsque $\theta = 0$ et W_t est un Wiener indépendant du processus X. Ainsi, si $\tau_\varepsilon > T$ et sous $\mathcal{H}_0$, la statistique Δ_τ est définie par

$$\Delta_\tau(\theta_1,0,X) = \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon} \left[dX_t - S(X_t)dt\right] = \int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta S^\varepsilon dW_t$$

si z_α est le quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. et pour tout ε fixé dans $(0,1)$, le test $\phi_\varepsilon^*(X)$ est tel que

$$\phi_\varepsilon^*(X) = \chi_{\{\Delta_\tau(\theta_1,0,X) \geq z_\alpha \sqrt{I_1}\}}.$$

Pour montrer que le test ϕ_ε^* est dans la classe $\mathcal{K}_\alpha$ des tests de niveau α nous rappelons le Lemme suivant établi dans [10] (P.21 Lemme 1.2).
On note $\mathcal{M}_\varepsilon$ la classe des fonctions aléatoires progressivement mesurables $h(\cdot)$ telles que

$$P\left\{\int_0^T h(t,\omega)^2 dt < \infty\right\} = 1$$

et $\mathcal{M}_\varepsilon^2$ la sous classe de $\mathcal{M}_\varepsilon$ des fonctions aléatoires $h(\cdot)$ vérifiant en plus

$$\mathbb{E}\int_0^T h(t,\omega)^2 dt < \infty.$$

Lemme 2.2. *Soit $h(\cdot) \in \mathcal{M}_\varepsilon^2$, et telle que pour un certain $H > 0$, nous avons p.s.*

$$\int_0^T h(t,\omega)^2 dt \geq H$$

alors le temps d'arrêt

$$\tau_H = \inf\left\{t : \int_0^t h(s,\omega)^2 ds \geq H\right\}$$

est bien défini et

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{\tau_H} h(t,\omega) dW_t\right\} = \mathcal{N}(0,H).$$

Nous déduisons ainsi que, l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta S^\varepsilon dW_t$$

est de loi $\mathcal{N}(0, I_1)$ pour chaque valeur de ε et

$$\alpha = P_o^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta S^\varepsilon dW_t \geq c_{\alpha,\varepsilon}\right\} = P\left\{\xi \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I_1}}\right\}$$

alors $c_{\alpha,\varepsilon} = z_\alpha \sqrt{I_1}$ où z_α est le quantile de ξ de loi normale centrée réduite. Le test $\phi_\varepsilon^*(X)$ est bien de niveau α pour chaque valeur fixée de ε.

Nous proposons à présent un calcul de la puissance du test $\phi_\varepsilon^*(X)$, sous $\mathcal{H}_1$ le processus X vérifie

$$dX_t = S(X_{t-\theta_1}) + \varepsilon dW_t$$

et la statistique Δ_τ est définie par:

$$\Delta_\tau(\theta_1,0,X) = \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{\Delta S^\varepsilon}{\varepsilon}\left[dX_t - S(X_t)dt\right] = \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{\varepsilon}dt + \int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta S^\varepsilon dW_t$$

pour tout ε, la puissance de ce test est telle que

$$\begin{aligned}
\beta_{\alpha,\varepsilon} &= P_1^{(\varepsilon)}\{\Delta_\tau \geq z_\alpha\sqrt{I_1}\} \\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta S^\varepsilon dW_t \geq z_\alpha\sqrt{I_1} - \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{(\Delta S^\varepsilon)^2}{\varepsilon}dt\right\} \\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_1}}dW_t \geq z_\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{I_1}\right\}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.2, nous déduisons que l'intégrale stochastique

$$\xi = \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{\Delta S^\varepsilon}{\sqrt{I_1}}dW_t$$

suit une loi normale centrée et réduite, ainsi pour tout ε fixé, la puissance de $\phi_\varepsilon^*(X)$ est

$$\beta_{\alpha,\varepsilon} = P\{\xi \geq z_\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{I_1}\}$$

quant à la puissance asymptotique de ce test nous avons

$$\beta_\alpha = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\beta_{\alpha,\varepsilon} = 1$$

car $z_\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{I_1} \longrightarrow -\infty$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$
le test $\phi_\varepsilon^*(X)$ est donc consistent.

3 Hypothèse simple contre alternative composée

3.1 Introduction

Remarquons tout d'abord que dans le cas de tests d'hypothèses composites, nous ne pouvons pas utiliser directement le Lemme de Neyman-Pearson. Ce Lemme démontre l'optimalité du test basé sur le rapport de vraisemblance, dans le cas d'hypothèse et d'alternative simples. En effet, si les alternatives sont composites nous ne pouvons pas connaitre la vraie valeur du paramètre θ sous l'alternative. Il existe des voisinages Θ_ε de $\theta_0 = 0$ tels que, si $\theta_\varepsilon \in \Theta_\varepsilon$, la fonction puissance $\beta_\varepsilon(\phi_\varepsilon,\theta_\varepsilon)$ admet une limite non dégénérée (i.e. $\neq \alpha$, $\neq 1$). Il est alors interessant de comparer les puissances de différents tests pour de telles valeurs de θ. Cette approche est due à Pitman [16], et dans cette optique, pour α fixé dans (0,1), nous

nous proposons de construire certains tests usuels dans la classe $\mathcal{K}'_\alpha$ et de décrire leur fonction puissance. Nous étudions la fonction puissance pour les alternatives locales uniquement.
Le processus observé est toujours solution du problème (3.1):

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0 \end{aligned}$$

et nous avons à tester les deux hypothèses suivantes:
$\mathcal{H}_0 :\ \theta = 0$ (pas de retard)
$\mathcal{H}_1 :\ \theta > 0$.
Les alternatives contigües correspondent à $\theta = \varepsilon u$. En effet remarquons que le rapport de vraisemblance

$$Z_\varepsilon(u) = L(\varepsilon u, 0, X)$$

a une limite non dégénérée car, la condition **H** étant satisfaite, les mesures induites $P_0^{(\varepsilon)}$ et $P_1^{(\varepsilon)}$, respectivement sous $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$, par le processus solution de (3.1) sont équivalentes donc contigües. Voir [18] p.87 pour plus de détails sur la notion de contiguité. Nous pouvons réécrire le problème de test d'hypothèses:
$\mathcal{H}_0 :\ u = 0$ (pas de retard)
$\mathcal{H}_1 :\ u > 0$

3.2 Test basé sur une fonction score

Rappelons que pour le processus solution du problème (3.1) et pour toute valeur θ du paramètre, l'Information de Fisher est la quantité (voir le chapitre 1)

$$I(\theta) = \int_0^T (S'(x_{t-\theta}))^2 (S(x_{t-2\theta}))^2 dt \tag{3.6}$$

en particulier, sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$

$$I(0) = \int_0^T (S'(x_t))^2 (S(x_t))^2 dt$$

et sous l'alternative $\mathcal{H}_1$

$$I(\varepsilon u) = \int_0^T (S'(x_{t-\varepsilon u}))^2 (S(x_{t-2\varepsilon u}))^2 dt$$

nous définissons le test ϕ_ε au moyen de la statistique

$$\Delta_\varepsilon(X) = \int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\varepsilon} (dX_t - S(X_t)dt)$$

par $\quad \phi_\varepsilon(X) := \chi_{\{\Delta_\varepsilon(X)\geq c_{\alpha,\varepsilon}\}}$
sous $\mathcal{H}_0$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon} &\Longleftrightarrow \int_0^T S'(X_t)S(X_t)dW_t \geq c_{\alpha,\varepsilon}\\ &\Longleftrightarrow \int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\sqrt{I(0)}}dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I(0)}}\end{aligned}$$

Gràce à la condition **H** , ainsi que le Lemme 3.3 du chapitre 1 , nous avons les majorations

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}|S'(X_t)S(X_t)-S'(x_t)S(x_t)|\\ &\quad\leq \sup_{0\leq t\leq T}\left(|S'(X_t)||S(X_t)-S(x_t)|+|S(x_t)||S'(X_t)-S'(x_t)|\right)\\ &\quad\leq \sup_{0\leq t\leq T}\left(K^2K_1\varepsilon|W_t|+CKK_1\varepsilon|W_t|\right)\end{aligned}$$

qui converge vers 0, quand $\varepsilon \to 0$, uniformément en θ, donc

$$\int_0^T \frac{(S'(X_t))^2(S(X_t))^2}{I(0)}dt \longrightarrow 1 \quad quand \quad \varepsilon\to 0,$$

en appliquant alors le Théorème de la limite centrale pour les intégrales stochastiques (voir par exemple [9] P.26 Lemme 1.9) nous avons la convergence

$$\int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\sqrt{I(0)}}dW_t \Longrightarrow \xi$$

ξ de loi normale centrée et réduite, et

$$\alpha = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} P_0^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\sqrt{I(0)}}dW_t \geq \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\sqrt{I(0)}}\right\} = P\left\{\xi \geq \frac{c_\alpha}{\sqrt{I(0)}}\right\},$$

on rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ si $\Delta_\varepsilon(X)\geq c_\alpha$. z_α étant le quantile d'ordre $1-\alpha$ de ξ , c_α est tel que

$$\frac{c_\alpha}{\sqrt{I(0)}} = z_\alpha \Longleftrightarrow c_\alpha = \sqrt{I(0)}z_\alpha.$$

Ainsi $\phi_\varepsilon \in \mathcal{K}'_\alpha$. Pour calculer la puissance asymptotique de ce test, nous aurons besoin du Lemme suivant

Lemme 3.1. *Si l'hypothèse* **H**, *est satisfaite, alors pour tout* $R>0$ *nous avons la convergence*

$$\sup_{|u|\leq R}|I(\varepsilon u)-I(0)| \longrightarrow 0 \quad quand \quad \varepsilon\to 0.$$

Démonstration. Notons $x^{(\varepsilon)}$ et $x^{(0)}$, les solutions respectives des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = S(x_{t-\varepsilon u}),\, x_0 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = S(x_t),\, x_0.$$

Gràce à l'hypothèse **H** nous avons les estimations:

$$\begin{aligned}
&\sup_{|u|\leq R} |I(\varepsilon u) - I(0)| \\
&= \quad \sup_{|u|\leq R} |\int_0^T \left(S'^2(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S^2(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S'^2(x^{(0)}_t)S^2(x^{(0)}_t)\right) dt| \\
&\quad \leq T \sup_{|u|\leq R} |S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S'(x^{(0)}_t)S(x^{(0)}_t)| \\
&\quad\quad \times \sup_{|u|\leq R} |S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) + S'(x^{(0)}_t)S(x^{(0)}_t)| \\
&\quad \leq 2TK \sup_{0\leq t\leq T} |S(x^{(0)}_t)| \sup_{|u|\leq R} |S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S'(x^{(0)}_t)S(x^{(0)}_t)|.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons également

$$\begin{aligned}
&|S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S'(x^{(0)}_t)S(x^{(0)}_t)| \\
&\quad \leq |S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})||S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S(x^{(0)}_t)| + |S(x^{(0)}_t)||S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u}) - S'(x^{(0)}_t)|.
\end{aligned}$$

Les fonctions S et S' sont bornées et uniformément continues et la fonction x est uniformément continue , il s'en suit la convergence

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|u|\leq R} |S'(x^{(\varepsilon)}_{t-\varepsilon u})S(x^{(\varepsilon)}_{t-2\varepsilon u}) - S'(x^{(0)}_t)S(x^{(0)}_t)| = 0$$

Finalement, d'après ce qui précède nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|u|\leq R} |I(\varepsilon u) - I(0)| = 0$$

□

Nous avons d'autre part

$$\int_0^T S'(X_t)S(X_t)\frac{\Delta S_\varepsilon}{\varepsilon}dt \longrightarrow u\int_0^T \left(S'(x_t)S(x_t)\right)^2 dt = I(0)u \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Sous $\mathcal{H}_1$ et notant $\quad \Delta S_\varepsilon = S(X_{t-\varepsilon u}) - S(X_t) \quad$ un calcul de la puissance donne

$$\begin{aligned}
\beta(u,\phi_\varepsilon) &= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\Delta_\varepsilon(X) \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha\right\} \\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\varepsilon}\big(dX_t - S(X_t)dt\big) \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha\right\} \\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\varepsilon}\Big(S(X_{t-\varepsilon u})dt + \varepsilon dW_t - S(X_t)dt\Big) \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha\right\} \\
&= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T S'(X_t)S(X_t)dW_t \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha - \int_0^T S'(X_t)S(X_t)\frac{\Delta S_\varepsilon}{\varepsilon}dt\right\} \\
\beta = \lim_{\varepsilon\to 0}\beta(u,\phi_\varepsilon) &= P\left\{\sqrt{I(0)}\xi \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha - I(0)u\right\} \\
&= P\left\{\xi \geq z_\alpha - \sqrt{I(0)}u\right\}
\end{aligned}$$

3.3 Test de niveau α

On veut construire un test de niveau α pour chaque $\varepsilon > 0$; pour cela nous utiliserons la même technique que pour une hypothèse et une alternative simple; Sous $\mathcal{H}_0$, pour tout $t \in [T,T+1]$ posons:

$$\begin{aligned} dX_t - S(X_t)dt &= \varepsilon dW_t, \\ S'(X_t)S(X_t) &= S'(x_t)S(x_t) \end{aligned}$$

où W_t est un Wiener indépendant du processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$.
Définissons alors le temps d'arrêt:

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t \in [0,T+1] : \int_0^t (S'(X_t))^2 (S(X_t))^2 dt \geq I(0)\}$$

Nous notons que $P_o^{(\varepsilon)}$ respectivement $P_1^{(\varepsilon)}$ p.s., nous avons $\tau_\varepsilon \leq T+1$ et nous définissons alors la statistique

$$\Delta_\tau(\varepsilon,0,X) = \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\varepsilon} \left[dX_t - S(X_t)dt\right].$$

Sous $\mathcal{H}_0$ et d'après le Lemme (1.2) dans [10] P.21. $\Delta_\tau(\varepsilon,0,X) \sim \mathcal{N}(0,I(0))$.
Le test $\phi_\varepsilon^* = \chi_{\{\Delta_\tau(\varepsilon,0,X) \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha\}}$ est de niveau α, z_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée et réduite.Nous proposons un calcul de la puissance du test:

sous l'alternative $\mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned} \beta(u,\phi_\varepsilon^*) &= P_1^{(\varepsilon)}\{\Delta_\tau(\varepsilon,0,X) \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha\} \\ &= P_1^{(\varepsilon)}\Big\{ \int_0^{\tau_\varepsilon} \frac{S'(X_t)S(X_t)}{\varepsilon} \left[dX_t - S(X_t)dt\right] \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha \Big\} \\ &= P_1^{(\varepsilon)}\Big\{ \int_0^{\tau_\varepsilon} S'(X_t)S(X_t)dW_t \geq \sqrt{I(0)}z_\alpha - \int_0^{\tau_\varepsilon} S'(X_t)S(X_t)\frac{\Delta S_\varepsilon}{\varepsilon}dt \Big\} \end{aligned}$$

Nous avons aussi la convergence

$$\int_0^{\tau_\varepsilon} S'(X_t)S(X_t)\frac{\Delta S_\varepsilon}{\varepsilon}dt \longrightarrow u\int_0^T (S'(x_t))^2(S(x_t))^2 dt = I(0)u \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

et la loi de $\int_0^{\tau_\varepsilon} S'(X_t)S(X_t)dW_t$ est $\mathcal{N}(0,I(0))$.

La puissance du test est telle que

$$\beta^*(u,\phi_\varepsilon) \longrightarrow \beta_\alpha^* = P\{\xi \geq z_\alpha - \sqrt{I(0)}u\}$$

pour chaque alternative $\theta_1 = \varepsilon u$ fixée.

3.4 Test du rapport de vraisemblance

Introduisons la statistique δ_ε et le test Ψ_ε définis par

$$\delta_\varepsilon(X) = \sup_{u>0} Z_\varepsilon(u), \quad \Psi_\varepsilon(X) = \chi_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$$

pour α fixé dans (0,1). $\{Z_\varepsilon(\cdot)\}$ est le processus du rapport de vraisemblance défini dans le chapitre 1 (voir aussi [15] ou [18])

$$Z_\varepsilon(u) = \exp\left\{\int_0^T \frac{S(X_{t-\varepsilon u}) - S(X_t)}{\varepsilon^2} dX_t - \int_0^T \frac{S^2(X_{t-\varepsilon u}) - S^2(X_t)}{2\varepsilon^2} dt\right\}.$$

Nous avons montré dans le chapitre 1 que les distributions marginales du processus $Z_\varepsilon(\cdot)$ convergent, sous $\mathcal{H}_0$, vers les distributions marginales du processus

$$Z(u) := \exp\left\{uI(0)^{1/2}\xi - \frac{u^2}{2} I(0)\right\}$$

où ξ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$I(0) = \int_0^T S'^2(x_t) S^2(x_t) dt.$$

De plus nous avons établi les inégalités suivantes

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \sup_{|u_1|<R, |u_2|<R} |u_2 - u_1|^{-2} \mathbb{E}_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 \leq C(1+R^6)$$

et pour $p \in (0,1)$

$$\mathbb{E}_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq \exp(-\kappa u^2)$$

alors 3.1 la distribution du processus stochastique $\{Z_\varepsilon(u), u \in \mathbb{R}^+\}$ converge faiblement vers la distribution du processus $\{Z(u), u \in \mathbb{R}^+\}$ dans l'espace mesurable $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et par suite sous $\mathcal{H}_0$

$$\begin{aligned}
&P_0^{(\varepsilon)}\big\{\delta_\varepsilon(X) > c_\alpha\big\} = P_0^{(\varepsilon)}\big\{\sup_{u\geq 0} Z_\varepsilon(u) > c_\alpha\big\} \\
&\longrightarrow P\big\{\sup_{u\geq 0} Z(u) > c_\alpha\big\} = P\left\{\sup_{u\geq 0}\big(uI(0)^{1/2}\xi - \frac{u^2}{2}I(0)\big) > \ln c_\alpha\right\} \\
&= P\left\{\max(0,\xi)^2 > 2\ln c_\alpha\right\} = P\left\{\xi > \sqrt{2\ln c_\alpha}\right\} = \alpha.
\end{aligned}$$

Soit $z_\alpha = \sqrt{2\ln c_\alpha}$, ou encore $c_\alpha = \exp\frac{z_\alpha^2}{2}$ le test Ψ_ε est donc de niveau asymptotique α.

Fixons une alternative $\theta_1 = \varepsilon u$ et considérons la fonction puissance $\beta_\varepsilon(u, \Psi_\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Là aussi, avec les mêmes arguments mais cette fois sous l'alternative nous obtenons que la distribution du processus stochastique
$\{Z_\varepsilon(u), u \in \mathbb{R}^+\}$ converge faiblement vers la distribution du processus

$\{Z(u), u \in \mathbb{R}^+\}$ dans l'espace mesurable $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ (Théorème 3.1) avec, dans ce cas aussi

$$Z(u) = \exp\left\{uI(0)^{1/2}\xi - \frac{u^2}{2}I(0)\right\}$$

où ξ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
En effet, par le Lemme 3.1

$$I(\varepsilon u) = \int_0^T S'^2(x_{t-\varepsilon u})S^2(x_{t-2\varepsilon u})dt \longrightarrow I(0)$$

et on a

$$\beta(u,\Psi_\varepsilon) = P_1^{(\varepsilon)}\big\{\delta_\varepsilon(X) > c_\alpha\big\} = P_1^{(\varepsilon)}\big\{\sup_{u\geq 0} Z_\varepsilon(u) > c_\alpha\big\}$$
$$\longrightarrow \beta_\alpha = P\big\{\sup_{u\geq 0} Z(u) > c_\alpha\big\} = P\left\{\sup_{u\geq 0}\big(uI(0)^{1/2}\xi - \frac{u^2}{2}I(0)\big) > \ln c_\alpha\right\}$$
$$= P\left\{\max(0,\xi)^2 > 2\ln c_\alpha\right\} = P\left\{\xi > z_\alpha\right\}$$

z_α étant le quantile d'ordre $1-\alpha$ de ξ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3.5 Test de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Nous avons toujours les mêmes possibilités d'hypothèses $\mathcal{H}_0$: $u = 0$ (pas de retard) contre l'alternative composite $\mathcal{H}_1$: $u > 0$.
Introduisons la statistique η_ε et le test $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ définis par

$$\eta_\varepsilon(X) := \frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \widehat{\Psi}_\varepsilon := \chi_{\{\eta_\varepsilon(X)\geq c_{\alpha,\varepsilon}\}}.$$

Pour chaque ε fixé, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est défini dans ce problème par

$$\mathrm{L}(\widehat{\theta}_\varepsilon, \theta_0; X^\varepsilon) = \sup_{\theta\in\bar{\Theta}} \mathrm{L}(\theta, \theta_0; X^\varepsilon) = \sup_{\theta\in\bar{\Theta}} \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_0}^{(\varepsilon)}}(X)$$

Lorsque la condition **H** est satisfaite, d'après le Théorème 4.1 chapitre 1 nous avons la convergence en loi

$$\varphi_\varepsilon(\theta)^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) = \frac{I(\theta)^{1/2}}{\varepsilon}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

uniformément en θ sur tout compact de Θ.
Le test $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ est de niveau asymptotique α ($\widehat{\Psi}_\varepsilon \in \mathcal{K}'_\alpha$) en effet
sous $\mathcal{H}_0$: $u = 0$ et pour tout $\alpha \in (0,1)$ fixé

$$I(0)^{1/2}\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon} \Longrightarrow \xi, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0(\widehat{\Psi}_\varepsilon)(X) = P_0^{(\varepsilon)}\left\{\eta_\varepsilon(X) \geq c_{\alpha,\varepsilon}\right\} &= P_0^{(\varepsilon)}\left\{\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon} \geq c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\ &= P_0^{(\varepsilon)}\left\{I(0)^{1/2}\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon} \geq I(0)^{1/2}c_{\alpha,\varepsilon}\right\}\\ &\longrightarrow P\left\{\xi \geq I(0)^{1/2}c_\alpha\right\} = \alpha.\end{aligned}$$

Soit z_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$z_\alpha = I(0)^{1/2}c_\alpha \iff c_\alpha = \frac{z_\alpha}{I(0)^{1/2}},$$

on rejette $\mathcal{H}_0$ si

$$\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon} \geq \frac{z_\alpha}{I(0)^{1/2}}.$$

Un calcul de la puissance asymptotique donne:
sous $\mathcal{H}_1 : u > 0$ et par le Théorème 4.1

$$I(\varepsilon u)^{1/2}\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon - \varepsilon u}{\varepsilon} \Longrightarrow \xi, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0,1)$$

et d'autre part par le Lemme 2.1 $I(\varepsilon u) \longrightarrow I(0)$ alors

$$\begin{aligned}\beta(u,\widehat{\Psi}_\varepsilon) = \mathbb{E}_1(\widehat{\Psi}_\varepsilon)(X) = P_1^{(\varepsilon)}\left\{\eta_\varepsilon(X) \geq c_\alpha\right\} &= P_1^{(\varepsilon)}\left\{\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon}{\varepsilon} \geq c_\alpha\right\}\\ &= P_1^{(\varepsilon)}\left\{I(\varepsilon u)^{1/2}\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon - \varepsilon u}{\varepsilon} \geq I(\varepsilon u)^{1/2}c_\alpha - I(\varepsilon u)^{1/2}u\right\}\\ &\longrightarrow P\left\{\xi \geq I(0)^{1/2}c_\alpha - I(0)^{1/2}u\right\}\\ \beta_\alpha &= P\left\{\xi \geq z_\alpha - I(0)^{1/2}u\right\}\end{aligned}$$

4 Tests d'ajustement (sur hypothèses composées paramétriques et non paramétriques)

Nous considérons le problème de tests d'ajustement pour une équation différentielle stochastique avec petit bruit.i.e. les observations $X^\varepsilon = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ proviennent de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T$$

avec la valeur initiale x_0 déterministe et le coefficient de diffusion connu $\varepsilon > 0$. L'inférence statistique concerne le coefficient de la dérive $S(\cdot)$ uniquement. Nous

proposons des tests d'ajustement pour vérifier si le modèle est effectivement à retard ou pas. Le problème considéré correspond à l'asymptotique d'un petit bruit; $\varepsilon \longrightarrow 0$. La première section est consacrée au cas où l'hypothèse de base est simple et décrite par le coefficient de dérive connu à un paramètre de retard près. Nous proposons un test de type Cramer-von Mises et le comportement asymptotique de la fonction puissance est étudié pour les alternatives non paramétriques. Dans la seconde section l'hypothèse de base est supposée composée paramétrique et dans ce cas nous proposons un test basé sur une statistique dépendant d'un estimateur du paramètre inconnu ayant de bonnes propriétés asymptotiques, en occurence l'EMV. Le voisinage de la fonction puissance sous les alternatives non paramétriques est également discuté. L'approche est similaire à celle utilisée pour le test classique de Cramer-von Mises (voir par exemple Lehmann et Romano [14]). Le test de Cramer-von Mises a la bonne qualité que sa loi limite ne dépend pas de l'hypothèse de base (distribution free). Rappelons alors les propriétés de ce test.
Supposons que nous disposons d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(X_1,...,X_n) = X^n$ de fonction de répartiton continue $F(x)$ et l'hypothèse de base est simple

$$\mathcal{H}_0 \quad : \quad F(x) = F_*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors la statistique de Cramer-von Mises est

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\widehat{F}_n(x) - F_*(x)\right)^2 dF_*(x),$$

où $\widehat{F}_n(x)$ est la fonction de répartition empirique. Le test correspondant est

$$\psi_n(X^n) = \chi_{\{W_n^2 > c_\alpha\}}$$

et la constante c_α est définie comme suit. Introduisons le mouvement Brownien $\{W_0(s), 0 \leq s \leq 1\}$, i.e un processus Gaussien continu tel que

$$\mathbb{E}W_0(s) = 0, \qquad \mathbb{E}W_0(s)W_0(t) = t \wedge s - st.$$

Alors le comportement asymptotique de cette statistique peut être décrit au moyen de ce processus comme suit

$$W_n^2 \Longrightarrow \int_0^1 W_0(s)^2 ds$$

Ainsi pour fixer la probabilité asymptotique $\alpha \in (0,1)$ de l'erreur de première espèce nous choisissons la constante c_α comme solution de l'équation

$$P\left\{\int_0^1 W_0(s)^2 ds > c_\alpha\right\} = \alpha$$

Ce test est donc indépendant de l'hypothèse de base. On peut montrer également qu'il est consistent contre toute alternative fixée (voir Durbin [2]).

4.1 Hypothèse simple contre alternative composée

Choix du seuil

Considérons le problème de tests d'ajustement pour l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T. \\ X_s &= x_0, \quad s \le 0. \end{aligned}$$

où $\{W_t,0 \le t \le T\}$ est un processus de Wiener. L'hypothèse de base est simple

$$\mathcal{H}_0 : \quad \theta = \theta_0,$$

i.e. le processus $X = \{X_t,0 \le t \le T\}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = S(X_{t-\theta_0})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \le t \le T$$

où S est une fonction positive connue et θ_0 est connu. L'alternative est composée non paramétrique comme c'est le cas en général pour les tests d'ajustement,

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \le t \le T \tag{3.7}$$

où $B(X_t) \ne S(X_{t-\theta_0})$ et B est une fonction inconnue.
Pour le choix du seuil c_α sous l'hypothèse nous utilisons la condition de régularité suivante

H: *S est une fonction positive deux fois continûment dérivable de dérivées bornées sur $\mathbb{R}$ et telle que sa première dérivée est non nulle sur au moins un intervalle inclus dans $[x_0,x_T]$.*

Rappelons (voir par exemple [15]) que cette condition est suffisante pour l'existence et l'unicité du processus solution de (3.7)et que cette solution converge uniformément en t, $(0 \le t \le T)$ vers la solution déterministe de l'équation différentielle ordinaire à retard

$$\frac{dx_t}{dt} = S(x_{t-\theta_0}), \quad x_0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.8}$$

Nous notons dans la suite $x(\theta_0)$ la solution de cette dernière équation différentielle.
Pour construire le test de type Cramer-von Mises nous proposons la statistique suivante

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon := &\left(\int_0^T \exp\left\{ -2 \int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr \right\} ds \right)^{-2} \\ &\times \int_0^T \exp^2 \Big(-2 \int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr \Big) \left(\frac{X_t - x_t(\theta_0)}{\varepsilon} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Dans la suite c_α est la solution de l'équation

$$P\left\{\int_0^1 w_v^2\, dv > c_\alpha\right\} = \alpha$$

où $w_v, 0 \leq v \leq 1$ est un certain processus de Wiener.
Le comportement asymptotique de la statistique δ_ε est décrit moyennant le Lemme suivant similaire au Lemme établi par Kutoyants ([9] Lemme 3.2) où la notation "$^{(1)}$" correspond à la dérivée en ε et "$'$" correspond à la dérivée par rapport à l'argument x.

Lemme 4.1. *Si la fonction $S(x_{\cdot-\theta})$ admet deux dérivées continues et bornées par rapport à x, alors le processus stochastique solution de* (3.1) *a, presque sûrement une dérivée par rapport à ε et le processus $x_t^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} X_t$ satisfait l'équation différentielle stochastique linéaire*

$$dx_t^{(1)} = S'(x_{t-\theta})x_{t-\theta}^{(1)}dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0^{(1)} = 0. \tag{3.9}$$

Démonstration. Considérons la différence

$$\begin{aligned} Z(t) &= h^{-1}[X_t(\varepsilon+h) - X_t(\varepsilon)] - x_t^{(1)} \\ &= h^{-1}\left[\int_0^t S\big(X_{s-\theta}(\varepsilon+h)\big)ds + (\varepsilon+h)W_t - \int_0^t S\big(X_{s-\theta}(\varepsilon)\big)ds - \varepsilon W_t\right] \\ &\quad - \int_0^t S'(x_{s-\theta})x_{s-\theta}^{(1)}ds - W_t \\ &= \int_0^t \left\{\big[S\big(X_{s-\theta}(\varepsilon+h)\big) - S\big(X_{s-\theta}(\varepsilon)\big)\big]h^{-1} - S'(x_{s-\theta})x_{s-\theta}^{(1)}\right\} ds. \end{aligned}$$

On note $\widetilde{X}_{s,\theta}$ un certain point intermédiaire entre $X_{s-\theta}(\varepsilon+h)$ et $X_{s-\theta}(\varepsilon)$, par le Théorème de la moyenne nous avons

$$\begin{aligned} |Z(t)| &= |\int_0^t \left\{S'(\widetilde{X}_{s,\theta})[X_{s-\theta}(\varepsilon+h) - X_{s-\theta}(\varepsilon)]h^{-1} - S'(x_{s-\theta})x_{s-\theta}^{(1)}\right\} ds| \\ &\leq \int_0^t |S'(\widetilde{X}_{s,\theta}) - S'(x_{s-\theta})||x_{s-\theta}^{(1)}|ds + \int_0^t |S'(\widetilde{X}_{s,\theta})||Z(s-\theta)|ds \end{aligned}$$

Soit $K = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S'(x)|$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} |Z(t)| &\leq \int_0^t |S'(\widetilde{X}_{s,\theta}) - S'(x_{s-\theta})||x_{s-\theta}^{(1)}|ds + K\int_0^t |Z(s-\theta)|ds \\ &\leq \int_0^t |S'(\widetilde{X}_{s,\theta}) - S'(x_{s-\theta})||x_{s-\theta}^{(1)}|ds + K\int_{-\theta}^{t-\theta} |Z(s)|ds. \end{aligned}$$

Or $Z(s) = 0$ lorsque $s \leq 0$ et $|Z(s)| \geq 0$ pour $s > 0$ alors

$$|Z(t)| \leq \int_0^t |S'(\widetilde{X}_{s,\theta}) - S'(x_{s-\theta})||x^{(1)}_{s-\theta}|ds + K\int_0^t |Z(s)|ds.$$

D'autre part le Lemme de Grönwall ((3.1, chapitre 1) permet d'écrire

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}|X_t(\varepsilon+h) - X_t(\varepsilon)| = 0$$

pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\Theta = (\alpha, \beta)$. Il s'en suit que $\widetilde{X}_{s,\theta} \longrightarrow x_{s-\theta}$ uniformément par rapport à s et θ quand $h \longrightarrow 0$. Puis en utilisant encore ce Lemme nous obtenons finalement

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\theta\in\mathcal{K}}\sup_{0\leq t\leq T}|Z(t)| = 0.$$

Ainsi la dérivée $x^{(1)}_t$ satisfait l'équation (3.9). □

Considérons la classe

$$\mathcal{K}'_\alpha = \{\phi_\varepsilon : \limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}_0\phi_\varepsilon(X) \leq \alpha\}$$

des tests de niveau asymptotique α nous avons alors

Proposition 4.1. *Si la condition* **H** *est satisfaite alors le test* $\psi_\varepsilon = \chi_{\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\}}$ *est dans la classe* $\mathcal{K}'_\alpha$.

Démonstration. En suivant la preuve de Kutoyants **??**nous remarquons d'abord que le processus stochastique $\varepsilon^{-1}(X_t - x_t(\theta_0))$ converge en probabilité et uniformément en $t \in [0, T]$ vers $x^{(1)}_t$ solution de l'équation (3.9), alors pour tout $\kappa > 0$

$$P_0^{(\varepsilon)}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_t - x_t(\theta_0)}{\varepsilon} - x^{(1)}_t\right| > \kappa\right\} \longrightarrow 0.$$

Cette solution peut être réécrite de manière explicite comme suit

$$x^{(1)}_t = \int_0^t \exp\left\{\int_s^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\}dW_s. \tag{3.10}$$

Alors en posant

$$\tau_T = \int_0^T \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\}ds$$

et d'après le Lemme 4.1 nous avons

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &= \tau_T^{-2}\int_0^T \exp^2\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right)\left(\frac{X_t - x_t(\theta_0)}{\varepsilon}\right)^2 dt \\ &\longrightarrow \tau_T^{-2}\int_0^T \exp^2\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right)\left(x^{(1)}_t\right)^2 dt =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau_T^{-2} \int_0^T \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) \left\{\int_0^t \exp\left(\int_s^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) dW_s\right\}^2 \\
&\quad \times \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau_T^{-2} \int_0^T \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) \\
&\quad \times \exp\left(2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) \left(\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} dW_s\right)^2 \\
&\quad \times \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) dt
\end{aligned}
$$

$$
= \tau_T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} dW_s\right)^2 \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) dt.
$$

Considérons alors le changement de variable

$$
\tau = \int_0^t \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} ds
$$

alors

$$
0 \leq \tau \leq \tau_T = \int_0^T \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} ds
$$

et

$$
d\tau = d\left(\int_0^t \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} ds\right) = \exp\left\{-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} dt
$$

ou encore

$$
dt = \exp\left\{2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} d\tau.
$$

Alors en utilisant la propriété des processus de Wiener

$$
\int_0^t f(s)dW_s = W\left(\int_0^t f^2(s)ds\right)
$$

lorsque f est une fonction déterministe à carré intégrable (voir les propriétés d'un processus de Wiener dans [15] chapitre 4), nous déduisons

$$
\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &\longrightarrow \tau_T^{-2} \int_0^T \left(\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} dW_s\right)^2 \exp\left(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right) dt \\
&= \tau_T^{-2} \int_0^T \left(W\Big(\int_0^t \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} ds\Big)\right)^2 \exp\left\{-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} dt \\
&= \tau_T^{-2} \int_0^{\tau_T} (W(\tau))^2 \exp\left\{-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} \exp\left\{2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} d\tau \\
&= \tau_T^{-2} \int_0^{\tau_T} (W(\tau))^2 \, d\tau
\end{aligned}
$$

Considérons enfin le changement de variable suivant
$\tau = s\tau_T$ alors $s \in [0,1]$ et $d\tau = \tau_T\, ds$, ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \longrightarrow & \tau_T^{-2} \int_0^T (W(\tau))^2 d\tau = \tau_T^{-2}\tau_T \int_0^1 (W(s\tau_T))^2 ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{W(s\tau_T)}{\sqrt{\tau_T}}\right)^2 ds = \int_0^1 w_s^2 ds \end{aligned}$$

ici $w_s = \tau_T^{-1/2} W(s\tau_T)$ est un processus de Wiener. Ainsi, sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$

$$\delta_\varepsilon \longrightarrow \int_0^1 w_s^2 ds$$

et pour l'erreur de première espèce nous avons

$$\alpha_\varepsilon(\delta_\varepsilon) = P_0^{(\varepsilon)}\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\} \longrightarrow P\left\{\int_0^1 w_s^2 ds > c_\alpha\right\} = \alpha.$$

$\square$

Alternatives (non paramétriques)

Considérons à présent des alternatives non paramétriques et supposons que l'observation $\{X_t, 0 \le t \le T\}$ correspond à l'équation différentielle stochastique (3.7):

$$\mathcal{H}_1 : \quad dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \le t \le T$$

où $B(X_t) \neq S(X_{t-\theta_0})$ et B est une fonction inconnue et comme précédemment, nous imposons la condition

H: *B est une fonction positive deux fois continûment dérivable de dérivées bornées sur $\mathbb{R}$ et telle que sa première dérivée est non nulle sur au moins un intervalle inclus dans $[x_0, x_T]$.*

Alors la solution de (3.7) converge vers une autre fonction déterministe notée $x(B)$ et solution de l'équation différentielle ordinaire sans retard

$$\frac{dx_t}{dt} = B(x_t), \quad x_0, \quad 0 \le t \le T.$$

Pour démontrer la consistence du test ψ_ε nous remarquons que la statistique

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon := & \left(\int_0^T \exp\left\{-2\int_0^s S'(x_{r-\theta_0})dr\right\} ds\right)^{-2} \\ & \times \int_0^T \exp^2\Big(-2\int_0^t S'(x_{r-\theta_0})dr\Big)\left(\frac{X_t - x_t(\theta_0)}{\varepsilon}\right)^2 dt \end{aligned}$$

est telle que $\delta_\varepsilon \longrightarrow \infty$, en effet X_t converge uniformément vers $x_t(B) \neq x_t(\theta_0)$ sous les alternatives et comme $\varepsilon \longrightarrow 0$ il s'en suit que

$$\left(\frac{X_t - x_t(\theta_0)}{\varepsilon}\right)^2 \longrightarrow \infty.$$

Notant encore $P_1^{(\varepsilon)}$ la mesure de probabilité induite par le processus $\{X_t, 0 \le t \le T\}$ sous les alternatives, nous avons

$$\beta_\varepsilon(\psi_\varepsilon) = P_1^{(\varepsilon)}\{\delta_\varepsilon > c_\alpha\} \longrightarrow 1$$

Le test ψ_ε est consistent uniformément par rapport à toute alternative $B(\cdot)$.

4.2 Hypothèse de base composée (paramétrique)

Supposons que sous l'hypothèse de base $\mathcal{H}_0$ le processus de diffusion observé est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = S(X_{t-\theta})dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \le t \le T$$

où le coefficient de la dérive $S(X_{t-\theta})$ est une fonction régulière connue qui dépend du paramètre inconnu $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta)$. Alors la solution limite x_t dépend de la vraie valeur θ, c'est à dire $x_t = x_t(\theta)$ et la modification naturelle pour le test est qu'il soit basé sur la statistique

$$\frac{X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

à une normalisation adéquate près laquelle dépend de l'EMV.

Choix du seuil

Rappelons (voir le premier chapitre) que sous la condition

H: *S est une fonction positive deux fois continûment dérivable de dérivées bornées sur $\mathbb{R}$ et telle que sa première dérivée est non nulle sur au moins un intervalle inclus dans $[x_0, x_T]$,*

l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre de retard $\widehat{\theta}_\varepsilon$ est consistent

$$P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\theta}_\varepsilon = \theta$$

et asymptotiquement normal

$$\mathcal{L}_\theta \left\{\varepsilon^{-1} I(\theta)^{1/2}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)\right\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1). \tag{3.11}$$

où l'information de Fisher $I(\theta)$ est définie par

$$I(\theta) = \int_0^T S^2(x_{t-2\theta}) S'^2(x_{t-\theta}) dt \tag{3.12}$$

Considérons alors

$$\widetilde{\delta}_\varepsilon := \int_0^T \left(\frac{X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 dt$$

et notons $c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon)$ la solution de l'équation

$$P\left\{ \widetilde{\delta}_\varepsilon > c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon) \right\} = \alpha.$$

Proposition 4.2. *Si la condition* **H** *est satisfaite alors le test* $\widetilde{\psi}_\varepsilon(X^\varepsilon) = \chi_{\{\widetilde{\delta}_\varepsilon > c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon)\}}$ *est dans la classe* $\mathcal{K}'_\alpha$.

Démonstration. Nous suivons la preuve de Rabhi pour un problème analogue [17]. Notons θ la vraie valeur du paramètre de retard, nous avons

$$\frac{X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{X_t - x_t(\theta)}{\varepsilon} + \frac{x_t(\theta) - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

et rappelons que par le Lemme 4.1, le processus stochastique $\varepsilon^{-1}(X_t - x_t(\theta))$ converge uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ vers le processus gaussien

$$x^{(1)}(\theta) = \{x_t^{(1)}(\theta), 0 \le t \le T\}$$

solution de l'équation (3.9) et qui peut être écrit sous la forme explicite

$$\begin{aligned}
x_t^{(1)}(\theta) &= \int_0^t \exp\left\{ \int_s^t S'(x_{r-\theta}) dr \right\} dW_s \\
&= \int_0^t \exp\left\{ \int_0^t S'(x_{r-\theta}) dr - \int_0^s S'(x_{r-\theta}) dr \right\} dW_s \\
&= \exp \int_0^t S'(x_{r-\theta}) dr \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^s S'(x_{r-\theta}) dr \right\} dW_s.
\end{aligned}$$

D'autre part notons

$$\dot{x}_t(\theta) := \frac{\partial}{\partial \theta} x_t(\theta)$$

la dérivée partielle en θ de la solution du problème déterministe et qui est bien définie grâce à l'hypothèse **H**, nous pouvons alors écrire

$$\frac{x_t(\theta) - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta}{\varepsilon} \dot{x}_t(\widetilde{\theta}). \tag{3.13}$$

$\widetilde{\theta}$ est un certain point intermédiaire entre $\widehat{\theta}_\varepsilon$ et θ. Nous déduisons alors de l'écriture sous forme intégrale de $x_t^{(1)}$, de la limite (3.11) et de (3.13) la convergence en loi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_\varepsilon \Longrightarrow \int_0^T & \left[x_t^{(1)}(\theta) - \frac{\dot{x}_t(\theta)}{I(\theta)^{1/2}} \int_0^T S'(x_{s-\theta}) S(x_{s-2\theta}) dW_s \right]^2 dt = \\
= \int_0^T & \Big[\exp \int_0^t S'(x_{r-\theta}) dr \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^s S'(x_{r-\theta}) dr \right\} dW_s \\
& - \frac{\dot{x}_t(\theta)}{I(\theta)^{1/2}} \int_0^T S'(x_{s-\theta}) S(x_{s-2\theta}) dW_s \Big]^2 dt.
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{aligned}\xi_t(\theta) :&= \exp\int_0^t S'(x_{r-\theta})dr \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s S'(x_{r-\theta})dr\right\} dW_s \\ &\quad - \frac{\dot{x}_t(\theta)}{I(\theta)^{1/2}} \int_0^T S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})dW_s \\ &= \int_0^T \Big[\exp\int_0^t S'(x_{r-\theta})dr\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\exp\left\{-\int_0^s S'(x_{r-\theta})dr\right\} \\ &\quad - \frac{\dot{x}_t(\theta)}{I(\theta)^{1/2}} S'(x_{s-\theta})S(x_{s-2\theta})\Big] dW_s\end{aligned}$$

alors

$$\widetilde{\delta}_\varepsilon \Longrightarrow \int_0^T \big(\xi_t(\theta)\big)^2 dt \equiv \xi(\theta)^2.$$

Le processus limite $\{\xi_t(\theta), 0 \leq t \leq T\}$ est un processus gaussien centré, de fonction de covariance dépendant du paramètre θ. Ainsi nous n'avons plus la propriété de "distribution free" même asymptotiquement, contrairement au cas d'hypothèse de base simple. Le seuil $c_\alpha(\theta)$ est alors défini par l'équation

$$P\left\{\int_0^T \xi_t^2(\theta)dt > c_\alpha(\theta)\right\} = \alpha$$

où $c_\alpha(\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon)$, l'EMV étant consistent. En effet la continuité de la fonction $c_\alpha(.)$ se déduit comme suit:
notons $F(\theta,x)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\xi(\theta)^2$. Alors $c_\alpha(\theta)$ est une fonction implicite définie par l'équation

$$1 - F(\theta, c) = \alpha$$

puis par dérivation

$$\dot{c}(\theta) = -\frac{\dot{F}(\theta, c)}{f(\theta, c)},$$

où $f(\theta, c)$ est la fonction de densité de la variable aléatoire $\xi(\theta)^2$. La continuité de $c(\cdot)$ découle alors de l'existence de ces deux fonctions et de $f(\theta, c_\alpha(\theta)) > 0$. $\square$

Alternatives (non paramétriques)

Supposons à présent que le processus observé $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ est régi par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = B(X_t)dt + \varepsilon dW_t, \quad X_s = x_0, \quad s < 0 \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.14}$$

où $B(X_t) \neq S(X_{t-\theta})$ pour tout $\theta \in \Theta$ et B est une fonction inconnue. Comme précédemment, nous supposons que la fonction B satisfait la condition **H**, alors cette solution converge vers une autre fonction déterministe que l'on note y_t, solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy_t}{dt} = B(y_t), \quad y_s = x_0, \quad s < 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Vérifions que le test $\widetilde{\psi}_\varepsilon(X^\varepsilon) = \chi_{\{\widetilde{\delta}_\varepsilon > c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon)\}}$ est consistent:
remarquons tout d'abord que

$$0 < \inf_{\theta\in\Theta} ||y_t - x_t(\theta)||^2 = \inf_{\theta\in\Theta} \int_0^T (y_t - x_t(\theta))^2 dt$$

car sinon il existe une certaine valeur $\theta \in \Theta$ telle que $y_t = x_t(\theta)$ pour tout $t \in [0, T]$ ce qui contredit le fait $B(X_t) \neq S(X_{t-\theta})$ pour tout $t \in [0, T]$, ainsi

$$0 < \inf_{\theta\in\Theta} ||y_t - x_t(\theta)|| \leq ||y_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)||. \tag{3.15}$$

Dans ce cas, sous les alternatives, en notant $y_t^{(1)}$ le processus gaussien défini par l'équation linéaire

$$dy_t^{(1)} = B'(y_t)y_t^{(1)}dt + dW_t, \quad y_0^{(1)} = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

nous avons aussi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} \left| \frac{X_t - y_t}{\varepsilon} - y_t^{(1)} \right| = 0. \tag{3.16}$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned}\sqrt{\widetilde{\delta}_\varepsilon} = \left(\int_0^T \left(\frac{X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 dt \right)^{1/2} &= ||\varepsilon^{-1}(X_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon))|| \\ &= ||\varepsilon^{-1}(y_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)) + \varepsilon^{-1}(X_t - y_t)|| \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon}||y_t - x_t(\widehat{\theta}_\varepsilon)|| - ||\varepsilon^{-1}(X_t - y_t)||\end{aligned}$$

et le second terme dans l'expression obtenue reste borné en probabilité quad $\varepsilon \to 0$ grâce à la convergence (3.16), le processus $\{y_t, 0 \leq t \leq T\}$ étant gaussien. Le premier terme tend vers ∞ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ par (3.15). Ainsi $\widetilde{\delta}_\varepsilon \longrightarrow \infty$ et si on note P_B la mesure de probabilité induite par le processus solution sous toute alternative fixée et décrite par (3.14), la puissance asymptotique de ce test est

$$\beta(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} P_B\{\widetilde{\delta}_\varepsilon > c_\alpha(\widehat{\theta}_\varepsilon)\} = 1$$

et donc le test $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ est consistent.

Bibliographie

[1] Apoyan G.T., 1986, Parameter estimation of non differentiable trend coefficient, Uchen. Zap. Erevan Univ. , 1, 33-62 (in Russian).

[2] Durbin, J., 1973, Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function. Conference Board of the Mathematical sciences Regional conference series in Applied mathematics, No.9 Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.,.

[3] Hajek, J., 1972. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. In Proc6-th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1, 175-194.

[4] Ibragimov, I.A., Khasminskii, R.Z., 1981. Statistical Estimation: Asymptotic Theory. Springer-Verlag, New York.

[5] Küchler U., Kutoyants Yu. A., 2000, Delay estimation for some stationary diffusion-type processes, Scandinavian Journal of Statistics, 27, 3, 405-414.

[6] Kutoyants Yu. A.,1984, Parameter Estimation for Stochastic Process, Berlin, Heldermann.

[7] Kutoyants, Yu, Non parametric estimation of trend coefficients in diffusion process, in sta.and contr. of stoch. process, N. Krylov éd., Steklov Sem. 1984.0.Software. New York. 1985 p.230-250.

[8] Kutoyants, Yu. A., 1988. An example of estimating a Parameter of a Nondifferentiable Drift, Theory Proba. Appl. , vol. 33, No.1, p. 175-179.

[9] Kutoyants Yu. A., 1994. Identification of Dynamical Systems with Small Noise. Dordrecht: Kluwer.

[10] Kutoyants, Yu. A., 2004. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes, London: Springer-Verlag.

[11] Yury A.Kutoyants , 2010. Goodness-of-Fit Tests for perturbed Dynamical Systems. (Soumis)

[12] Kutoyants Yu. A., Mourid T., 1994, Estimation par la distance minimale pour un processus de type diffusion avec retards, Publications de l'ISUP.

[13] Kutoyants Yu. A., Mourid T. et Bosq D.,1992, Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards, Ann. Inst. H. Poincaré Proba. Statist., 28, No.1, p.95-106.

[14] Lehmann, E.L. and Romano, J.P. (2005) Testing Statistical Hypotheses. (3rd ed.) Springer, N.Y.

[15] R.S.Lipster, A.N.Shiryayev,1977, 1978 Statistics of Random Processes,I, Springer-Verlag, New York.

[16] Pitman, E.J.G. (1948) Lecture Notes on Nonparametric Statistical Inference. Lectures given at the University of North Carolina, Institute of Statistics.

[17] Rabhi, A. (2008) On the goodness-of-fit testing of composite hypothesis for dynamical systems with small noise, prepublication **08−6**, Université du Maine, (http://www.univ-lemans.fr/sciences/statist/download/Rabhi/GoFpaper.pdf).

[18] A.W.Van Der Vaart, 1998. Asymptotic Statistics, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.

Résumé Dans cette thèse nous traitons des problèmes d'estimation paramétrique unidimensionnelle et multidimensionnelle de retards ainsi que certains problèmes de tests d'hypothèses sur les paramètres de retard pour des processus de type diffusion non linéaire. Nous nous basons sur l'observation d'un processus de type diffusion non linéaire à temps continu, avec un petit coefficient de diffusion et supposons satisfaites certaines conditions de régularité sur la dérive, qui demeure par ailleur non différentiable par rapport aux paramètres inconnus. Nous démontrons alors que l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres de retards est consistent, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0. Nous utilisons principalement les techniques de la théorie des méthodes d'estimation paramétrique en statistique asymptotique due à I.Ibragimov, R.Has'minskii, Y. Kutoyants et d'autres auteurs, ainsi que la borne minimax des risques associés aux estimateurs dans un cadre plus général qui est due à J.Hajek et L. Le Cam. Nous discutons d'autre part les qualités de certains tests d'hypothèses simples et composites. Il est montré que les distributions limites de ces statistiques sont indépendantes de l'hypothèse de base, ce qui simplifie le calcul du seuil. Nous démontrons également que ces tests sont consistents en étudiant le comportement des statistiques qui les définissent sous les alternatives. Pour traiter les hypothèses de base composites nous avons besoin de connaitre le comportement asymptotique des estimateurs statistiques des paramètres inconnus. L'utilisation de l'estimateur du maximum de vraisemblance nous ramène à construire un test de type Cramer von-Mises correspondant et à étudier sa distribution limite.

Mots clés: *estimation paramétrique, processus de type diffusion non linéaire, estimateur du maximum de vraisemblance, efficacité asymptotique. tests d'hypothèses, tests d'ajustement.*

Abstract In this thesis we handle problems of unidimensional and multidimensional prametric estimation of delays as well as as some hypothesis testing problems on delay parameters for nonlinear diffusion processes. We rely on the observation of a nonlinear diffusion process of continuous time, with a small diffusion coefficient and assume satisfied some regularity conditions on the trend coefficient which, otherwise, remains nondifferentiable with respect to unknown parameters. We show then that the maximum likelihood estimator of delays parameters is consistent, asymptotically normal and uniformly LAM (locally asymptotically minimax) when the diffusion coefficient tends to 0. We mainly use the techniques of the parametric estimation methods theory in asymptotic statistics due to I. Ibragimov, R. Has' minskii, Y. Kutoyants and others, as well as the LAM bound on the risks of estimators in a more general framework which is due to J. Hajek and L. Cam. We discuss, on the other hand, the qualities of some tests of simple and composite hypothesis. It is shown that the limit distributions of these statistics are independent of the basic hypothesis, which simplifies the calculation of the threshold. We also demonstrate that these tests are consistent by studying the behavior of statistics that define them under the alternatives. To handle the basic composite hypothesis we need to know the asymptotic behavior of statistic estimators of unknown parameters. The use of the maximum likelihood estimator brings us back to build the Cramer-von Mises corresponding test and study its limit distribution.

Keywords: *parametric estimation, nonlinear diffusion process, maximum likelihood estimator, asymptotic efficiency. hypotheses testing, goodness-of-fit test.*

Abstract