

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : Construction Mécanique

**Par** : HOUMAT Mohammed Salah Eddine

### **Sujet**

**Etude dynamique d'une plaque en matériau à gradient fonctionnel (FGM)  
par la méthode des éléments finis**

Soutenu publiquement, le 06 / 06 / 2023, devant le jury composé de :

M MEFTAH Khouane

M SERDOUN Nadjib

M BELKAID Mohammed

PR

MCA

MAA

Université de Tlemcen

Ecole supérieure de Tlemcen

Université de Tlemcen

Président

Examinateur

Encadreur

Année universitaire : 2022 /2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## **DEDICACES**

Je dédie ce travail

A mes chers parents,

A mes grands-parents que dieu les accueille dans son vaste paradis,

A toute ma famille,

A tous mes amis,

A mes collègues de la promotion Construction Mécanique,

Et à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien moral.

## **REMERCIEMENTS**

Tout d'abord, je tiens à présenter toute ma gratitude à ALLAH le miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage pour avoir réalisé ce modeste travail de recherche.

Je tiens à remercier mon encadreur Mr BELKAID Mohammed pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche pour son aide précieuse. Je tiens aussi à remercier mon père Mr HOUMAT Abderrahim pour ses conseils précieux tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Mr MEFTAH Khouane pour avoir accepté de présider le jury de soutenance et Mr SERDOUN Nadjib pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je remercie mes chers parents, mes frères, et mes sœurs pour leur support moral durant mon parcours universitaire.

Enfin, je remercie mes enseignants, mes amis, mes collègues de la promotion, et toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche.

## RESUME

Une analyse du comportement dynamique des plaques de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé est présentée. Une méthode de calcul numérique basée sur la méthode de superposition modale est proposée. L'avantage de cette méthode est qu'elle est indépendante de l'intervalle de temps sélectionné. La propriété d'orthogonalité des modes propres simplifie grandement les équations du mouvement. Il s'agit de transformer les équations de mouvement exprimées dans les coordonnées originales en les équations de mouvement exprimées dans les coordonnées normales. Cette transformation permet de découpler les équations du mouvement. Le but de cette étude est d'effectuer une analyse dynamique d'une plaque de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé en utilisant la méthode des éléments finis basée sur un élément quadrilatéral isoparamétrique à huit nœuds. Un modèle analytique est utilisé pour l'étude comparative.

**Mots clés :** Plaque de Mindlin ; Matériau fonctionnellement gradé ; Analyse dynamique ; Méthode de superposition modale ; Méthode des Eléments Finis.

## **ABSTRACT**

An analysis of the dynamic behavior of functionally graded Mindlin plates is presented. A numerical calculation method based on the modal superposition method is proposed. The advantage of this method is that it is independent of the selected time interval. The orthogonality property of the eigenmodes greatly simplifies the equations of motion. It is a question of transforming the equations of motion expressed in the original coordinates into the equations of motion expressed in the normal coordinates. This transformation makes it possible to decouple the equations of motion. The aim of this study is to perform a dynamic analysis of a Mindlin plate with functionally graded material using the finite element method based on an eight-node isoparametric quadrilateral element. An analytical model is used for the comparative study.

**Keywords:** Mindlin plate; Functionally graded material; Dynamic analysis; Modal superposition method; Finite Element Method.

## ملخص

يتم تقديم تحليل للسلوك الديناميكي لألواح Mindlin المتدرجة وظيفيًا. تم اقتراح طريقة حساب رقمية تعتمد على طريقة التراكب الشرطي. ميزة هذه الطريقة هي أنها مستقلة عن الفاصل الزمني المحدد. تعمل خاصية التعامد الخاصة بـ  $eigenmodes$  على تبسيط معادلات الحركة بشكل كبير. إنها مسألة تحويل معادلات الحركة المعبر عنها في الإحداثيات الأصلية إلى معادلات الحركة المعبر عنها في الإحداثيات العادية. هذا التحويل يجعل من الممكن فصل معادلات الحركة. الهدف من هذه الدراسة هو إجراء تحليل ديناميكي للوحة Mindlin بمواد متدرجة وظيفيًا باستخدام طريقة العناصر المحدودة بناءً على عنصر رباعي متساوي الأضلاع من ثماني عقد. تم استخدام نموذج تحليلي للدراسة المقارنة.

**الكلمات الرئيسية:** لوحة Mindlin ؛ مواد متدرجة وظيفيا ؛ تحليل ديناميكي ؛ طريقة التراكب الشرطي ؛ طريقة العناصر المحدودة .

# SOMMAIRE

Sommaire	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Chapitre 1 : Introduction	1
1.1. Définition du problème	1
1.2. Matériaux à gradient fonctionnel	1
1.2.1. Introduction	1
1.2.2. Evolution des FGM	3
1.2.3. Processus de fabrication des FGM	4
1.2.4. Technique de dépôt en phase vapeur	5
1.2.5. Métallurgie des poudres	7
1.2.6. Coulée par centrifugation	7
1.2.7. Méthode de fabrication par normes libres solides	7
1.3. Théorie des plaques	8
1.4. Méthode des éléments finis	9
1.5. Objectif et structure du mémoire	11
Chapitre 2 : Base théorique	12
2.1. Introduction	12
2.2. Champ de déplacements	12
2.3. Relations déformations-déplacements	13
2.4. Relations contraintes-déformations	13
2.5. Energie de déformation due à la flexion	15
2.6. Energie de déformation due au cisaillement transversal	15
2.7. Energie cinétique	16
Chapitre 3 : Formulation par la MEF	17
3.1. Introduction	17
3.2. Matrices de rigidité et masse	17
3.3. Intégration numérique	20
3.4. Etude dynamique	21
Chapitre 4 : Programmation	26
4.1. Introduction	26



4.2. Organigramme	26
4.3. Sous-programmes	26
4.3.1. Sous-programme « INPUT »	26
4.3.2. Sous-programme « GAUSS »	28
4.3.3. Sous-programme « CONST »	28
4.3.4. Sous-programme « STIFFB »	28
4.3.5. Sous-programme « STIFFS »	28
4.3.6. Sous-programme « MASS »	28
4.3.7. Sous-programme « JACOBI »	29
4.3.8. Sous-programme « SORT »	29
4.3.9. Sous-programme « DRESP »	29
4.3.10. Sous-programme « OUTPUT »	29
4.3.11. Sous-programme « JAC »	29
4.3.12. Sous-programme « LOADF »	29
4.3.13. Sous-programme « GFONCT »	29
Chapitre 5 : Résultats et interprétation	30
5.1. Introduction	30
5.2. Validation	30
5.3. Etude paramétrique	32
5.3.1. Effet du matériau FGM	32
5.3.2. Effet de l'exposant de la fraction volumique	33
5.3.3. Effet du taux d'amortissement	35
Chapitre 6 : Conclusion	38
Bibliographie	39

## LISTE DES FIGURES

<b>Fig. 1.1</b> : Variation des propriétés dans les composites conventionnels et FGM	2
<b>Fig. 1.2</b> : Représentation hiérarchique des matériaux modernes [16]	4
<b>Fig. 2.1</b> : Déformation d'une plaque de Mindlin	12
<b>Fig. 2.2</b> : Champ de contraintes	13
<b>Fig. 3.1</b> : Élément fini quadrilatéral à huit nœuds et coordonnées	17
<b>Fig. 3.2</b> : Interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale [45]	23
<b>Fig. 3.3</b> : Chargement à étape	25
<b>Fig. 4.1</b> : Organigramme	27
<b>Fig. 5.1</b> : Quart de la plaque carrée simplement appuyée et charge à étape	30
<b>Fig. 5.2</b> : Comparaison des résultats de la flèche centrale $w$	31
<b>Fig. 5.3</b> : Effet du type de matériau FGM sur la flèche centrale $w$	33
<b>Fig. 5.4</b> : Effet de l'exposant de la fraction volumique $n$ sur la flèche centrale $w$ (FGM1)	34
<b>Fig. 5.5</b> : Effet de l'exposant de la fraction volumique $n$ sur la flèche centrale $w$ (FGM2)	34
<b>Fig. 5.6</b> : Effet de l'exposant de la fraction volumique $n$ sur la flèche centrale $w$ (FGM3)	35
<b>Fig. 5.7</b> : Effet du taux d'amortissement $\xi$ sur la flèche centrale $w$ (FGM1)	36
<b>Fig. 5.8</b> : Effet du taux d'amortissement $\xi$ sur la flèche centrale $w$ (FGM2)	36
<b>Fig. 5.9</b> : Effet du taux d'amortissement $\xi$ sur la flèche centrale $w$ (FGM3)	37

## **LISTE DES TABLEAUX**

<b>Tableau 1.1</b> : Méthodes de fabrication des FGM [18]	5
<b>Tableau 1.2</b> : Comparaison des différents processus de traitement des FGM	6
<b>Tableau 3.1</b> : Constantes d'intégration de Gauss-Legendre	21
<b>Tableau 5.1</b> : Propriétés mécaniques des matériaux utilisés [46]	32

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1. Définition du problème

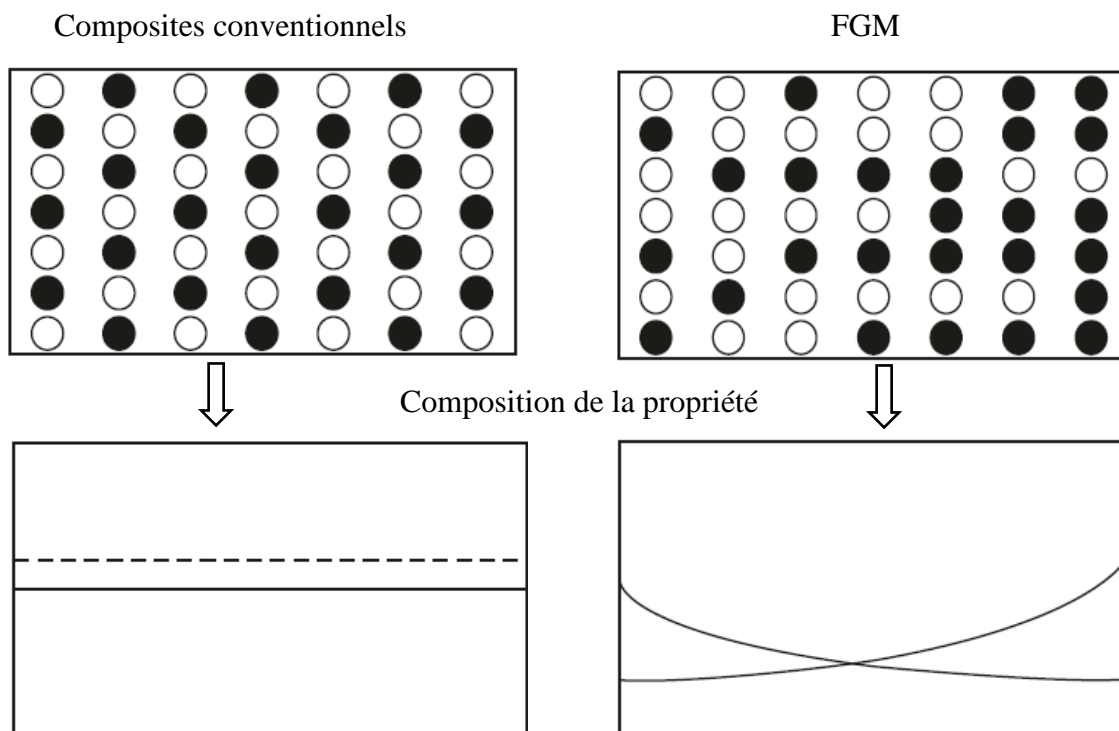
L'analyse dynamique de structures est une tâche complexe. Les ingénieurs ont besoin de beaucoup de connaissances pour identifier les paramètres et les propriétés qui ont le plus d'impact sur le comportement dynamique des structures. Une analyse du comportement dynamique d'une plaque de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé est présentée. Une méthode numérique basée sur la méthode de superposition modale est proposée. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle n'est pas influencée par l'intervalle de temps choisi. La propriété d'orthogonalité des modes propres permet une grande simplification des équations générales du mouvement. Cette simplification consiste à transformer les équations du mouvement exprimées dans un repère en des équations du mouvement exprimées dans un ensemble de coordonnées dites normales. Cette transformation permet de découpler toutes les équations. Le but de ce travail est l'analyse dynamique d'une plaque à matériau fonctionnellement gradé à l'aide de la méthode des éléments finis basée sur un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 nœuds. Un modèle analytique simplifié est utilisé pour les études comparatives.

### 1.2. Matériaux à gradient fonctionnel

#### 1.2.1. Introduction

Les matériaux jouent un rôle important dans la vie des êtres humains depuis l'apparition du premier homme sur Terre. À différentes époques, l'homme a utilisé différents matériaux ou fabriqué des composites pour leur facilité d'utilisation dans de nombreuses applications. Au départ, on utilisait fréquemment le bronze, qui est en fait un alliage d'étain et de cuivre. Le bronze a été inventé pour la première fois en 3700 avant J-C, l'ère connue sous le nom d'âge du bronze [1]. En 1200 avant J-C, le fer a également été découvert et a continué à intéresser les gens pour produire différents objets à l'époque connue sous le nom d'âge du fer. Par la suite, un certain nombre d'alliages différents de métaux et de non-métaux ont été conçus à des fins multiples. Les matériaux composites ont attiré l'attention des chercheurs en raison de leur large éventail d'applications. Les matériaux composites sont plus légers et plus solides et peuvent également offrir une certaine souplesse de conception. Ils offrent une résistance à la corrosion et à l'usure.

L'inconvénient des matériaux composites est une transition brutale des propriétés à la jonction des matériaux qui conduit à la défaillance du composant par le processus de délamination. Pour surmonter les inconvénients des matériaux composites conventionnels, une nouvelle race de matériaux composites, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), a été inventée en 1984 par des chercheurs japonais pour l'objectif principal de leur projet aérospatial [2] qui exigeait une barrière thermique d'une température extérieure de 2000k et intérieure de 1000k dans une épaisseur de 10mm. Dix ans plus tôt, Shen et Bever [3] ont également travaillé sur des matériaux composites à structure graduelle, mais leurs travaux ont été retardés en raison du manque de sophistication des équipements de fabrication [4]. Jusqu'à présent, ils ont été utilisés dans presque tous les domaines, par exemple dans les domaines biomédical, chimique, nucléaire, minier et dans les centrales électriques. Les FGM sont présents dans la nature sous forme d'os, de dents, de bambous, de peau humaine, etc. pour répondre aux besoins spécifiques des êtres humains et de l'environnement. Le nombre de publications de recherche a considérablement augmenté au cours des deux dernières décennies [5]. Les FGM remplacent la transition brutale des propriétés par des propriétés physiques, chimiques et mécaniques qui varient de façon régulière et continue, comme le module de Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement, la densité et le coefficient de dilatation thermique dans une direction spatiale souhaitée [6-9] (figure 1.1).



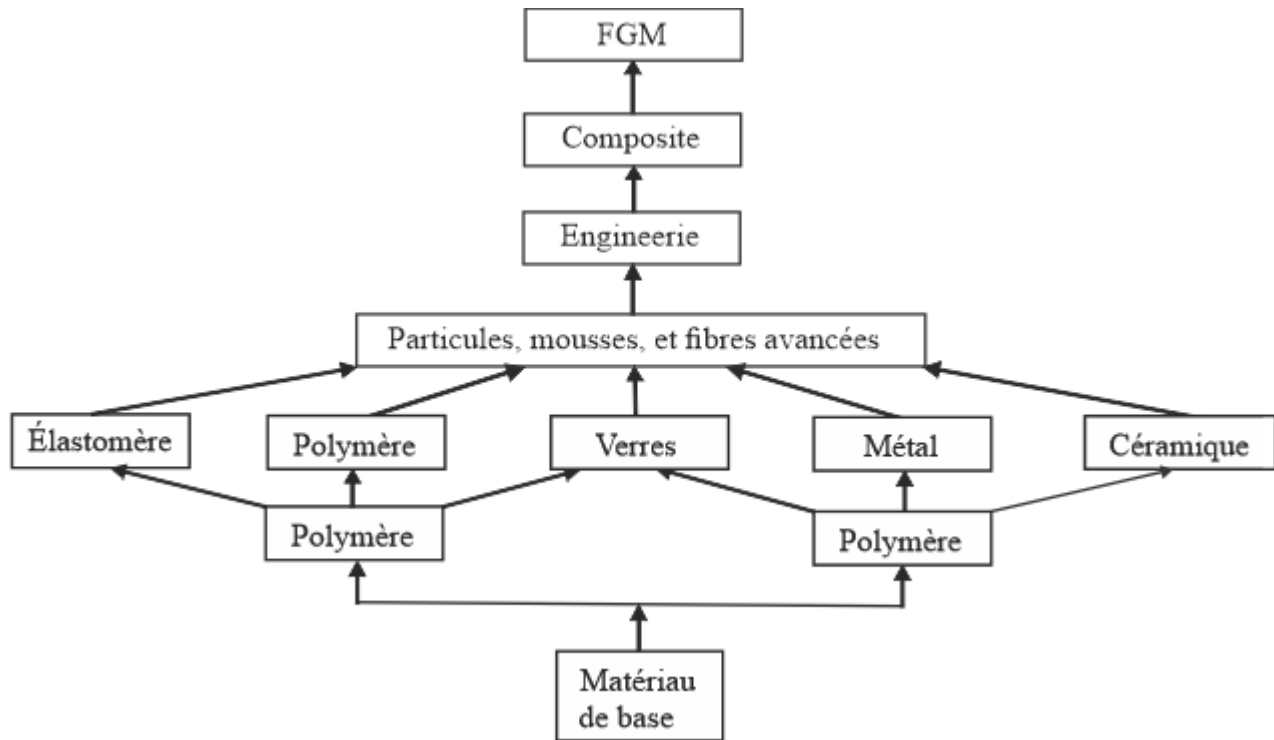
**Fig. 1.1** : Variation des propriétés dans les composites conventionnels et FGM.

Les changements progressifs de la fraction volumique des constituants et la structure non identique dans la direction préférée donnent des propriétés continues et graduelles comme la conductivité thermique, la résistivité à la corrosion, la chaleur spécifique, la dureté et le rapport de rigidité [11]. Tous ces avantages ont rendu les FGM bien meilleurs que les matériaux composites homogènes pour une utilisation dans de multiples applications. En raison des caractéristiques importantes des FGM, plusieurs efforts ont été déployés de temps à autre par les chercheurs pour améliorer les propriétés des FGM. Plusieurs types de FGM ont été introduits jusqu'à présent en fonction de leur taille et de leur structure. En outre, un certain nombre de procédés de fabrication peuvent être adoptés pour fabriquer des FGM, comme la méthode à base de gaz, la méthode par voie liquide et la méthode par voie solide.

### **1.2.2. Evolution des FGM**

Le terme "matériau à gradient fonctionnel" a été introduit par un scientifique japonais en 1984 alors qu'il travaillait sur un matériau capable de résister à des températures élevées. Rapidement, l'importance pour promouvoir la recherche dans ce domaine, un projet national de recherche de cinq ans, d'un coût de 11 millions de dollars, a été lancé sous le nom de "Recherche sur la technologie de base pour le développement des FGM pour la relaxation des contraintes thermiques" (FGM PART 1) [12]. A la fin de ce projet, les chercheurs ont pu développer une coque carrée de 300 mm et un bol hémisphérique de 50 mm pour les cônes de nez en SiC-C FGM [13]. Un autre projet de 5 ans, conséquence de FGM PART1, a été lancé en 1992 pour un coût de 9 millions de dollars. Il s'intitule "Research on Energy Conversion Materials with Functionally Graded Structures" (FGM part 2). Ce projet visait à améliorer l'efficacité de la conversion énergétique en utilisant la technologie des structures à gradient fonctionnel [14]. En outre, en avril 1996, l'Organisation du département des nouvelles énergies et des technologies industrielles (NEDO) a financé un projet doté d'un budget de 2,5 millions de dollars intitulé "Traitement et caractérisation pré-concurrentiels des matériaux à gradient fonctionnel". Le projet a été poursuivi jusqu'en mars 2000. L'objectif du projet était de développer des FGM métallo-céramiques à un niveau industriel en utilisant la technique de frittage par plasma d'étincelles (SPS). Le polyamide/Cu a été l'un des FGM fabriqués avec succès par la technique SPS [13]. La plupart des recherches ont été menées sur l'évaluation des propriétés mécaniques et thermiques. Cependant, il était nécessaire de travailler sur les propriétés de base comme les propriétés physiques et

chimiques. Afin de combler cette lacune, les ministères de l'éducation, des sciences, des sports et de la culture ont accordé un programme de recherche en avril 1996 intitulé "Physique et chimie des FGM", qui s'est poursuivi pendant les trois années suivantes, jusqu'en 1999. Les domaines étudiés dans le cadre de ce projet sont la physique, la chimie, la biologie, l'agriculture, etc. La figure 2 représente la hiérarchie des matériaux modernes.



**Fig. 1.2 :** Représentation hiérarchique des matériaux modernes [16].

### 1.2.3. Processus de fabrication des FGM

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus cruciaux de la recherche sur les FGM. Un certain nombre d'articles de recherche ont été publiés jusqu'à présent sur les techniques de traitement des FGM, ce qui a permis d'élaborer de nouvelles méthodes de fabrication des FGM. Sur la base des techniques de traitement constructif et de traitement par transport masse, les FGM peuvent être divisés en deux grandes catégories [17]. Dans le traitement constructif, les FGM sont fabriqués couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement fabriqués dans l'espace, tandis que dans le transport masse, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent des phénomènes de transport naturels, tels que la conduction thermique, la diffusion des espèces atomiques et l'écoulement des fluides [10].

Cependant, l'avancement de la technologie d'automatisation au cours des deux dernières décennies a rendu le processus de gradation constitutive à la fois techniquement et économiquement plus faisable. Le tableau 1.1 présente les méthodes de fabrication tandis que le tableau 1.2 compare les procédés de traitement des FGM. Les techniques les plus récentes de traitement des FGM sont expliquées ci-dessous.

**Tableau 1.1** : Méthodes de fabrication des FGM [18].

Procédé à l'état liquide	Procédé à l'état solide	Procédé de dépôt
Décantation	Collage par diffusion	Électro-dépôt
Coulée centrifuge		Dépôt laser
Infiltration		Dépôt de vapeur
Remplissage directionnel	Métallurgie des poudres	
Solidification		Dépôt par pulvérisation
Méthode contrôlée		

#### 1.2.4. Technique de dépôt en phase vapeur

Un certain nombre de techniques de dépôt en phase vapeur sont désormais adoptées par les fabricants, notamment le dépôt par pulvérisation cathodique, le dépôt chimique en phase vapeur, le dépôt physique en phase vapeur, le dépôt chimique en phase vapeur amélioré par plasma, etc. Avec la méthode de dépôt en phase vapeur, le matériau est utilisé pour se condenser en phase vapeur par réaction chimique, condensation ou conversion pour former un matériau solide [17]. Les techniques susmentionnées permettent de modifier les propriétés des matériaux, notamment électriques, mécaniques, optiques et thermiques. Ces méthodes permettent de déposer des revêtements de surface à gradient fonctionnel qui, à leur tour, peuvent fournir une microstructure merveilleuse pour les revêtements de surface minces. Les techniques de dépôt en phase vapeur génèrent des gaz toxiques comme sous-produits [21].



**Tableau 1.2** : Comparaison des différents processus de traitement des FGM.

Numéro	Processus	Variabilité de la transition fonction	Polyvalence en la phase contenu	Type de FGM	Polyvalence des composants géométrie
1	Empilement de poudre	Très bien	Très bien	En gros	Modéré
2	Feuille de laminage	Très bien	Très bien	En gros	Modérée
3	Poudre humide	Très bien	Très bien	En gros	Modéré
4	Trempage de lisier	Très bien	Très bien	enrobage	Bien
5	Trempage de lisier	Très bien	Très bien	En gros	Très bien
6	PVD, CVD	Très bien	Très bien	En gros	Modéré
7	Processus GMFC	Très bien	Modéré	En gros	Bien
8	Filtration/glissade	Très bien	Très bien	En gros	Bien
9	Revêtement laser	Très bien	Très bien	En gros	Très bien
10	Projection thermique	Très bien	Très bien	Revêtement en vrac	Bien
11	Sédimentation	Bien	Très bien	Revêtement en vrac	Pauvre
12	La diffusion	Modérée	Très bien	Rejoindre en masse	Bien
13	Solidification dirigée	Modérée	Modérée	En gros	Pauvre
14	Gradient électrochimique	Modéré	Bien	En gros	Bien
15	Moussage de polymère	Modéré	Bien	En gros	Bien

### **1.2.5. Métallurgie des poudres**

Quatre étapes sont impliquées dans la métallurgie des poudres pour la production de matériaux à gradient fonctionnel [22-24]. Il s'agit de la préparation des poudres, de la pesée et du mélange des poudres, de l'empilage et du battage des poudres pré-mélangées, et enfin du frittage [25].

Un certain nombre de méthodes sont utilisées pour la préparation de la poudre, comme la réaction chimique, le dépôt électrolytique, l'atomisation, la réduction à l'état solide, la désintégration centrifuge, le broyage, la pulvérisation, etc. Le processus de formage comprend le compactage de la poudre en une forme géométrique, et le pressage est généralement effectué à température ambiante [21]. La compatibilité assure la résistance de la partie frittée et non frittée [25]. La pièce frittée est généralement fabriquée sans structure particulière. Au cours du processus, quelques pores peuvent apparaître, qui peuvent être éliminés par un processus secondaire [10].

### **1.2.6. Coulée par centrifugation**

Dans la méthode de coulée par centrifugation, le matériau à gradient fonctionnel est produit en faisant tourner le moule sous l'effet de la force de gravité. Le métal à l'état fondu est utilisé pour mettre dans le moule de filage, et il continue à tourner jusqu'à ce que le métal soit solidifié [10]. Les pièces cylindriques sont généralement fabriquées par cette méthode. En utilisant cette méthode, la densité du métal augmente et les propriétés mécaniques de la pièce moulée peuvent augmenter de 10 à 15% [19]. La différence de force centrifuge produite par la différence de densité entre les particules fondues et solides crée un gradient de composition dans les FGM [4, 26]. La revue de la littérature a montré qu'il existe une limitation du gradient en raison de sa production par un processus naturel (c'est-à-dire la force centrifuge et la différence de densité).

### **1.2.7. Méthode de fabrication par normes libres solides**

La méthode de fabrication de formes libres solides est l'une des méthodes les plus adaptées pour la production de formes physiques à l'aide d'informations générées par ordinateur sur l'objet [10]. Cette méthode a la capacité de faire varier la composition interne des matériaux [27, 28]. Cette méthode présente de nombreux avantages par rapport aux autres méthodes, notamment une consommation d'énergie moindre, une vitesse de fabrication plus élevée, une utilisation efficace

des matériaux et la possibilité de produire des formes et des conceptions complexes [27]. Dans la méthode de fabrication de formes libres solides, le procédé au laser est largement utilisé pour la fabrication de FGM [21].

### **1.3. Théorie des plaques**

La flexion des plaques fait référence à la déflexion d'une plaque perpendiculairement à son plan sous l'action de forces et de moments externes. La quantité de déviation peut être déterminée en résolvant les équations différentielles d'une théorie de plaque appropriée. Les contraintes dans la plaque peuvent être calculées à partir de ces flèches.

La théorie des plaques de Kirchhoff-Love est un modèle mathématique bidimensionnel utilisé pour déterminer les contraintes et les déformations dans les plaques minces soumises à des forces et des moments. Cette théorie est une extension de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et a été développée en 1888 par Love [29] en utilisant des hypothèses proposées par Kirchhoff. La théorie suppose qu'un plan de surface médiane peut être utilisé pour représenter une plaque tridimensionnelle sous forme bidimensionnelle. Les hypothèses cinématiques de cette théorie sont [30] :

- les lignes droites normales à la surface médiane restent droites et normales à la surface médiane après déformation
- l'épaisseur de la plaque ne change pas lors d'une déformation.

La théorie d'Uflyand-Mindlin des plaques vibrantes est une extension de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love qui prend en compte les déformations de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque. La théorie a été proposée en 1948 par Yakov Solomonovich Uflyand [29] et en 1951 par Raymond Mindlin [30] avec Mindlin faisant référence aux travaux d'Uflyand. Par conséquent, cette théorie doit être appelée théorie des plaques d'Uflyand-Mindlin, comme cela est fait dans le manuel d'Elishakoff [31]. Une théorie similaire, mais pas identique, dans un cadre statique, avait été proposée plus tôt par Eric Reissner en 1945 [32]. Les deux théories sont destinées aux plaques épaisses dans lesquelles la normale à la surface médiane reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface médiane. La théorie d'Uflyand-Mindlin est utilisée pour calculer les déformations et les contraintes dans une plaque dont l'épaisseur est de l'ordre du dixième des dimensions planes tandis que la théorie de Kirchhoff-Love est applicable à des plaques plus minces.

La forme de théorie des plaques d'Uflyand-Mindlin la plus couramment utilisée est en fait due à Mindlin. La théorie de Reissner est légèrement différente et est une contrepartie statique de la théorie d'Uflyand-Mindlin. Les deux théories incluent les déformations de cisaillement dans le plan et sont toutes deux des extensions de la théorie des plaques de Kirchhoff–Love incorporant des effets de cisaillement du premier ordre.

La théorie d'Ufly-Mindlin suppose qu'il y a une variation linéaire du déplacement à travers l'épaisseur de la plaque mais que l'épaisseur de la plaque ne change pas pendant la déformation. Une hypothèse supplémentaire est que la contrainte normale à travers l'épaisseur est ignorée ; une hypothèse également appelée condition de contrainte plane. D'autre part, la théorie statique de Reissner suppose que la contrainte de flexion est linéaire tandis que la contrainte de cisaillement est quadratique à travers l'épaisseur de la plaque. Cela conduit à une situation où le déplacement dans l'épaisseur n'est pas nécessairement linéaire et où l'épaisseur de la plaque peut changer pendant la déformation. Par conséquent, la théorie statique de Reissner n'invoque pas la condition de contrainte plane. La théorie d'Uflyand-Mindlin est souvent appelée la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre des plaques. Puisqu'une théorie de déformation de cisaillement du premier ordre implique une variation linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, elle est incompatible avec la théorie statique des plaques de Reissner.

#### **1.4. Méthode des éléments finis**

Bien qu'il soit difficile de citer une date d'invention de la méthode des éléments finis, la méthode est née de la nécessité de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse structurelle en génie civil et aéronautique [33]. Son développement remonte aux travaux de A. Hrennikoff [34] et R. Courant [35] au début des années 1940. Un autre pionnier était Ioannis Argyris. En URSS, l'introduction de l'application pratique de la méthode est généralement liée au nom de Leonard Oganessian [36]. Il a également été redécouvert indépendamment en Chine par Feng Kang à la fin des années 1950 et au début des années 1960, sur la base des calculs de construction de barrages, où il a été appelé la méthode des différences finies basée sur le principe de variation. Bien que les approches utilisées par ces pionniers soient différentes, elles partagent une caractéristique essentielle : la discrétisation d'un domaine continu en un ensemble de sous-domaines discrets, généralement appelés éléments finis.

Dans le travail de Hrennikoff, le domaine est discrétisé en utilisant une analogie de réseau, tandis que dans l'approche de Courant le domaine est divisé en sous-régions triangulaires finies pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre qui découlent du problème de torsion d'un cylindre. La contribution de Courant était évolutive, s'appuyant sur un grand nombre de résultats antérieurs pour les PDE développés par Rayleigh, Ritz, et Galerkin.

La méthode des éléments finis a obtenu son véritable élan dans les années 1960 et 1970 grâce aux développements de J.H. Argyris avec des collègues de l'Université de Stuttgart, R.W. Clough avec des collègues de l'U.C. Berkeley, O.C. Zienkiewicz avec des collègues Ernest Hinton, B. Irons [37] et d'autres à l'Université de Swansea, P.G. Ciarlet à l'Université de Paris VI et R. Gallagher avec des collègues à l'Université Cornell. Une impulsion supplémentaire a été donnée au cours de ces années par les programmes d'éléments finis open source disponibles. La NASA a parrainé la version originale de NASTRAN et l'U.C. Berkeley a largement diffusé le programme d'éléments finis SAP IV [38]. En Norvège, la société de classification des navires DET NORSKE VERITAS (aujourd'hui DNV GL) a développé SESAM en 1969 pour une utilisation dans l'analyse des navires [39]. Une base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été fournie en 1973 avec la publication de Strang et Fix [40]. La méthode a depuis été généralisée pour la modélisation numérique des systèmes physiques dans une grande variété de disciplines d'ingénierie, par exemple l'électromagnétisme, le transfert de chaleur, et la dynamique des fluides [41,42]. La méthode des éléments finis est caractérisée par une formulation variationnelle, une stratégie de discrétisation, un ou plusieurs algorithmes de résolution et des procédures de post-traitement. Des exemples de formulation variationnelle sont la méthode de Galerkin, la méthode de Galerkin discontinue, les méthodes mixtes, etc.

Une stratégie de discrétisation s'entend d'un ensemble clairement défini de procédures qui couvrent (a) la création de maillages d'éléments finis, (b) la définition de la fonction de base sur des éléments de référence (également appelées fonctions de forme) et (c) la cartographie des éléments de référence. Des exemples de stratégies de discrétisation sont la version h, la version p, la version h-p, la X-FEM, l'analyse isogéométrique, etc. Chaque stratégie de discrétisation présente certains avantages et inconvénients. Un critère raisonnable dans la sélection d'une stratégie de discrétisation est d'obtenir des performances presque optimales pour l'ensemble le plus large de modèles mathématiques dans une classe de modèles particulière.

Divers algorithmes de résolution numérique peuvent être classés en deux grandes catégories : solveurs directs et itératifs. Ces algorithmes sont conçus pour exploiter la parcimonie des matrices qui dépendent des choix de formulation variationnelle et de stratégie de discrétisation.

Les procédures de post-traitement sont conçues pour l'extraction des données d'intérêt à partir d'une solution d'éléments finis. Pour répondre aux exigences de vérification des solutions, les post-processeurs doivent prévoir une estimation d'erreur a posteriori en termes de quantités d'intérêt. Lorsque les erreurs d'approximation sont supérieures à ce qui est considéré comme acceptable, la discrétisation doit être modifiée soit par un processus adaptatif automatisé, soit par l'action de l'analyste. Il existe des post-processeurs très efficaces qui assurent la réalisation de la super-convergence.

### **1.5. Objectif et structure du mémoire**

Le but de ce travail de recherche est l'étude de la réponse dynamique des plaques de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé par la méthode des éléments finis. Les résultats sont validés par ceux obtenus par une méthode analytique pour une plaque mince à matériau isotrope. Ce mémoire est divisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre présente une introduction comprenant une définition du problème suivie par une étude bibliographique. Ce chapitre est terminé par le but et le plan de travail du mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie des plaques de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé. Les expressions des déplacements, déformations, énergie de déformation due à la flexion, énergie de déformation due au cisaillement transversal, et énergie cinétique sont déterminées.

Le troisième chapitre est consacré à la formulation du problème par la méthode des éléments finis basée sur un élément quadrilatéral isoparamétrique à huit nœuds.

Le quatrième chapitre est consacré à la description du programme FORTRAN 77 développé.

Dans le cinquième chapitre, le modèle proposé est validé par comparaison avec des résultats analytiques pour une plaque à matériau isotrope. Une étude paramétrique est ensuite réalisée en considérant les effets du matériau FGM, exposant de la fraction volumique, et amortissement sur la réponse dynamique.

## CHAPITRE 2

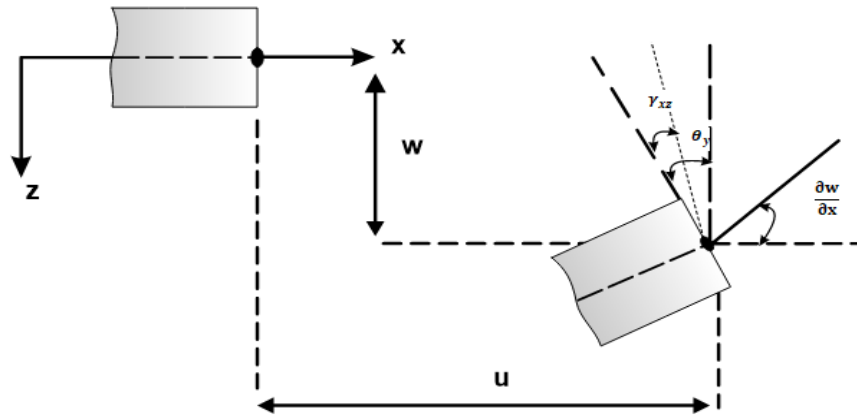
### BASE THEORIQUE

#### 2.1. Introduction

Les équations du mouvement basées sur la théorie de Mindlin sont développées pour une plaque modérément épaisse à matériau fonctionnellement gradé par rapport à un système de coordonnées Cartésiennes. Les déplacements suivant  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont  $u$ ,  $v$ , et  $w$ , respectivement. Les rotations des sections autour de  $x$  et  $y$  sont  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , respectivement.

#### 2.2. Champ de déplacements

La déformation d'une plaque de Mindlin est représentée dans la figure 2.1.



**Fig. 2.1 :** Déformation d'une plaque de Mindlin.

Le champ de déplacements est donné par :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.3)$$

où  $t$  est le temps.

### 2.3. Relations déformations-déplacements

Le vecteur de déformations due à la flexion  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donné en fonction du vecteur de courbures  $\boldsymbol{\chi}$  par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z \boldsymbol{\chi} \quad (2.4)$$

où

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

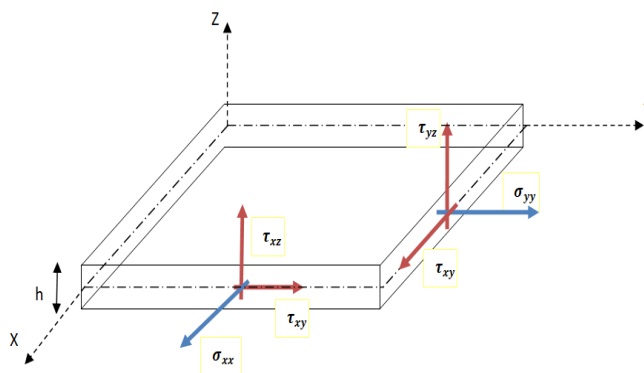
$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Le vecteur de déformations due au cisaillement transversal  $\boldsymbol{\gamma}$  est donné par :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.4. Relations contraintes-déformations

Le champ de contraintes est représenté dans la figure 2.2.



**Fig. 2.2 :** Champ de contraintes.



Les relations contraintes-déformations pour un matériau fonctionnellement gradé sont données par :

$$\sigma_{xx} = D_{11}\chi_{xx} + D_{12}\chi_{yy} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{yy} = D_{12}\chi_{xx} + D_{22}\chi_{yy} \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy} = D_{66}\chi_{xy} \quad (2.10)$$

$$\tau_{xz} = kA_{44}\gamma_{xz} \quad (2.11)$$

$$\tau_{yz} = kA_{55}\gamma_{yz} \quad (2.12)$$

où  $k$  est le coefficient de correction du cisaillement transversal (selon Mindlin  $k = \pi^2/12$ ).

Les propriétés matérielles du module de Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , et densité  $\rho$  de la plaque à matériau FGM sont supposées gradées dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance qui s'exprime comme [43] :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + E_m \quad (2.13)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \nu_m \quad (2.14)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \rho_m \quad (2.15)$$

où les indices  $c$  et  $m$  dénotent céramique et métal, respectivement,  $n$  est l'exposant de la fraction volumique qui est un nombre réel non-négatif, et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Les constantes du matériau FGM sont fonctions de  $z$  et sont données par :

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) z^2 dz \quad (2.16)$$

$$D_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{22}(z) z^2 dz \quad (2.17)$$

$$D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}(z) z^2 dz \quad (2.18)$$

$$D_{66} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(z) z^2 dz \quad (2.19)$$

$$A_{44} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44}(z) dz \quad (2.20)$$

$$A_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}(z) dz \quad (2.21)$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (2.22)$$

$$I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \quad (2.23)$$

où

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - [\nu(z)]^2} \quad (2.24)$$

$$Q_{12}(z) = \nu(z) Q_{11}(z) \quad (2.25)$$

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} \quad (2.26)$$

## 2.5. Energie de déformation due à la flexion

L'énergie de déformation due à la flexion est donnée par :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint [D_{11} \chi_x^2 + D_{22} \chi_y^2 + 2D_{12} \chi_x \chi_y + D_{66} \chi_{xy}^2] dx dy \quad (2.27)$$

## 2.6. Energie de déformation due au cisaillement transversal

L'énergie de déformation due au cisaillement transversal est donnée par :

$$U_s = \frac{1}{2} \iint [kA_{44} \gamma_{xz}^2 + kA_{55} \gamma_{yz}^2] dx dy \quad (2.28)$$

## 2.7. Energie cinétique

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left[ I_1 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.29)$$

# CHAPITRE 3

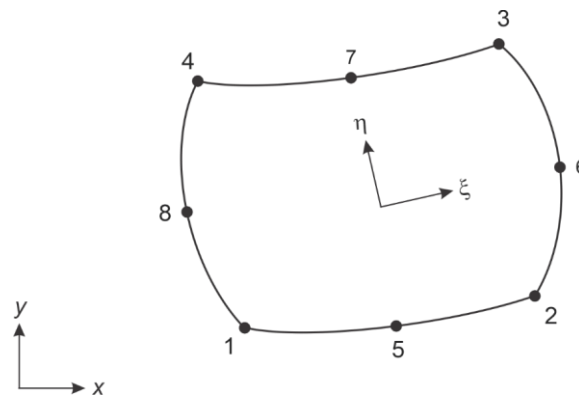
## FORMULATION PAR LA MEF

### 3.1. Introduction

La réponse dynamique d'une plaque de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé est formulée par la méthode des éléments finis. Le modèle consiste en la discrétisation de la plaque en éléments finis, le calcul des matrices de rigidité et masse et vecteurs forces élémentaires, l'assemblage des matrices de rigidité et masse et vecteurs forces élémentaires dans les matrices de rigidité et masse et vecteurs forces du système, l'application des conditions aux limites, le calcul des fréquences et modes propres, et le calcul de la réponse dynamique par interpolation linéaire de la fonction d'excitation normale [45].

### 3.2. Matrices de rigidité et masse

Un élément fini quadrilatéral à huit nœuds appelé élément quadratique est utilisé dans cette étude, comme montré dans la figure 3.1.



**Fig. 3.1 :** Élément fini quadrilatéral à huit nœuds et coordonnées.

Pour un élément quadrilatéral à huit nœuds, la déflexion et les rotations sont exprimés par :

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \tag{3.1}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi} \quad (3.2)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi} \quad (3.3)$$

où  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$ , et  $\theta_{yi}$  sont la déflexion, rotation par rapport à  $x$ , et rotation par rapport à  $y$  du nœud  $i$

et  $N_i$  sont les fonctions de forme données par :

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1) \quad (3.4)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) \quad (3.5)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1) \quad (3.6)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1) \quad (3.7)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \quad (3.8)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \quad (3.9)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \quad (3.10)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \quad (3.11)$$

La transformation des coordonnées globales aux coordonnées locales est exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

où

$$J_{11} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad (3.13)$$

$$J_{12} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad (3.14)$$

$$I_{21} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (3.15)$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (3.16)$$

L'équation (3.12) donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( I_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} - I_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left( I_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} - I_{21} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.18)$$

où  $|\mathbf{J}|$  est le déterminant du Jacobien  $\mathbf{J}$ .

L'aire de la surface d'un élément différentiel infinitésimal est donnée par

$$dA = dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.19)$$

La matrice de rigidité élémentaire due à la flexion est donnée par :

$$\mathbf{K}_b^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.20)$$

où

$$\mathbf{B}_b = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D}_b = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

La matrice de rigidité élémentaire due au cisaillement transversal est donnée par :

$$\mathbf{K}_s^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.23)$$

où

$$\mathbf{B}_s = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} kA_{44} & 0 \\ 0 & kA_{55} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La matrice masse élémentaire est donnée par :

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.26)$$

où

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.3. Intégration numérique

Dans le cas où le calcul explicite des intégrales est impossible, il faut utiliser une méthode numérique. Dans ce travail, la quadrature de Gauss-Legendre est utilisée. Puisque les constantes du matériau sont fonctions de  $z$  et pour obtenir une haute précision, neuf points d'intégration de Gauss-Legendre sont utilisés. L'équation de la quadrature de Gauss-Legendre est donnée par :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 f(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| w_i w_j \quad (3.29)$$

où  $\xi_i, \eta_j$  sont les abscisses et  $w_i, w_j$  sont les poids des points de la quadrature de Gauss-Legendre.

Les constantes d'intégration de Gauss-Legendre correspondantes sont données dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1:** Constantes d'intégration de Gauss-Legendre.

i	$\xi_i$	$w_i$
1	-0.968160239507626	0.081274388361574
2	-0.836031107326636	0.180648160694857
3	-0.613371432700590	0.260610696402936
4	-0.324253423403809	0.312347077040003
5	0.000000000000000	0.330239355001260
6	0.324253423403809	0.312347077040003
7	0.613371432700590	0.260610696402936
8	0.836031107326636	0.180648160694857
9	0.968160239507626	0.081274388361574

### 3.4. Etude dynamique

L'équation du mouvement est donnée par :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{p} \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité,  $\mathbf{M}$  est la matrice masse,  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement,  $\mathbf{p}$  est le vecteur force, et  $\mathbf{q}$  est le vecteur déplacement.

La propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice d'amortissement donne :

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_r \omega_r, \dots, 2\xi_n \omega_n) \quad (3.31)$$

où  $\Phi$  est la matrice modale normalisée et  $\omega_r$ ,  $\xi_r$  sont la fréquence propre et le taux d'amortissement associé au mode r, respectivement.

L'équation (3.31) donne :

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T} \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_r \omega_r, \dots, 2\xi_n \omega_n) \Phi^{-1} \quad (3.32)$$



La propriété d'orthogonalité des modes par rapport à la matrice masse donne :

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.33)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Le remplacement de l'équation (3.33) dans l'équation (3.32) donne :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left[ \sum_{r=1}^n 2\xi_r \omega_r \Phi_r \Phi_r^T \right] \mathbf{M} \quad (3.34)$$

La valeur du taux d'amortissement modal est généralement comprise entre 0.01 et 0.2.

L'équation (3.30) est un système de n équations couplées. Les conditions initiales sont données par :

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (3.35)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_0 \quad (3.36)$$

Les fréquences propres  $\omega$  et modes propres  $\Phi$  sont déterminées en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

Les modes sont normalisés de sorte que :

$$\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r = 1 \quad (3.38)$$

$$\Phi_r^T \mathbf{K} \Phi_r = \omega_r^2 \quad (3.39)$$

$$\Phi_r^T \mathbf{C} \Phi_r = 2\xi_r \omega_r \quad (3.40)$$

La méthode de superposition modale permet d'écrire :

$$\mathbf{q} = \Phi \boldsymbol{\eta} = \sum_{r=1}^n \Phi_r \eta_r \quad (3.41)$$

où  $\eta_r$  sont les coordonnées normales.

Les équations du mouvement sont données en coordonnées normales par :

$$\frac{d^2\eta_r}{dt^2} + 2\xi_r\omega_r \frac{d\eta_r}{dt} + \omega_r^2\eta_r = \gamma_r \quad (3.42)$$

où  $\gamma_r$  sont les excitations normales données par :

$$\gamma_r = \Phi_r^T \mathbf{p} \quad (3.43)$$

La réponse totale est la somme de la réponse due aux conditions initiales et de la réponse due à l'excitation.

Les conditions initiales donnent :

$$\mathbf{q}_0 = \Phi \boldsymbol{\eta}(0) \quad (3.44)$$

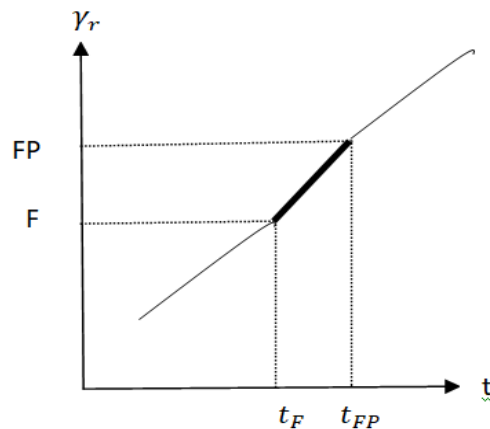
$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_0 = \Phi \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt}(0) \quad (3.45)$$

Nous pouvons écrire :

$$\eta_r(0) = \Phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 \quad (3.46)$$

$$\frac{d\eta_r}{dt}(0) = \Phi_r^T \mathbf{M} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_0 \quad (3.47)$$

La fonction d'excitation normale est interpolée linéairement, comme montré dans la figure 3.2.



**Fig. 3.2** : Interpolation linéaire de la fonction d'excitation normale [45].

La fonction d'excitation normale est interpolée comme suit :

$$\gamma_r = A + B(t - t_F) \quad (3.48)$$

où

$$A = F \quad (3.49)$$

$$B = \frac{FP - F}{t_{FP} - t_F} \quad (3.50)$$

La réponse due à l'excitation modale peut s'écrire

$$\eta_{pr} = C_{1r} + C_{2r}(t - t_F) \quad (3.51)$$

où

$$C_{1r} = \frac{F - 2\xi_r \omega_r C_{2r}}{\omega_r^2} \quad (3.52)$$

$$C_{2r} = \frac{FP - F}{\omega_r^2 (t_{FP} - t_F)} \quad (3.53)$$

La réponse due aux conditions initiales peut s'écrire :

$$\eta_{cr} = e^{-\xi_r \omega_r (t - t_F)} [D_{1r} \cos \omega_{dr} (t - t_F) + D_{2r} \sin \omega_{dr} (t - t_F)] \quad (3.54)$$

où

$$D_{1r} = \eta_r(t_F) - C_{1r} \quad (3.55)$$

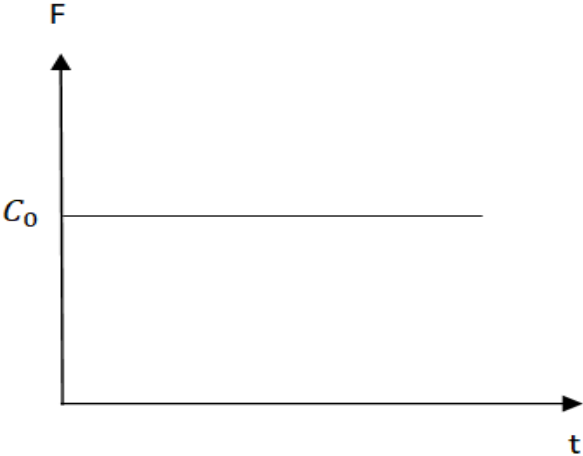
$$D_{2r} = \frac{\frac{d\eta_r}{dt}(t_F) - C_{2r} + \xi_r \omega_r D_{1r}}{\omega_{dr}} \quad (3.56)$$

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (3.57)$$

La réponse totale peut s'écrire :

$$\eta_r = \eta_{cr} + \eta_{pr} \quad (3.58)$$

Il existe plusieurs types de chargements dynamiques. Dans ce travail de recherche, le chargement dit à étape est considéré, comme le montre la figure 3.3.



**Fig. 3.3 :** Chargement à étape.

# CHAPITRE 4

## PROGRAMMATION

### 4.1. Introduction

Un programme d'éléments finis en FORTRAN 77 est développé pour l'analyse dynamique des plaques de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé soumises à des charges impulsives. Un élément finis quadrilatéral à huit nœuds est utilisé. Le programme est exécuté sur un PC d'un processeur Core i3 (1.90 GHz) et 4.00 Go de RAM.

### 4.2. Organigramme

Le programme est constitué d'un programme principal et huit sous-programmes. L'organigramme est montré sur la figure 4.1.

### 4.3. Sous-programmes

#### 4.3.1. Sous-programme « INPUT »

Il permet la lecture des données à partir du fichier « PROG.DAT » selon l'ordre suivant :

NE : Nombre d'éléments

NN : Nombre de nœuds

NRN : Nombre de nœud restreints

NLN : Nombre de nœuds chargés

NDN : Nombre de nœuds ou les déplacements sont calculés

ILOAD : Type de chargement (1 : chargement à rampe, 2 : chargement à étape)

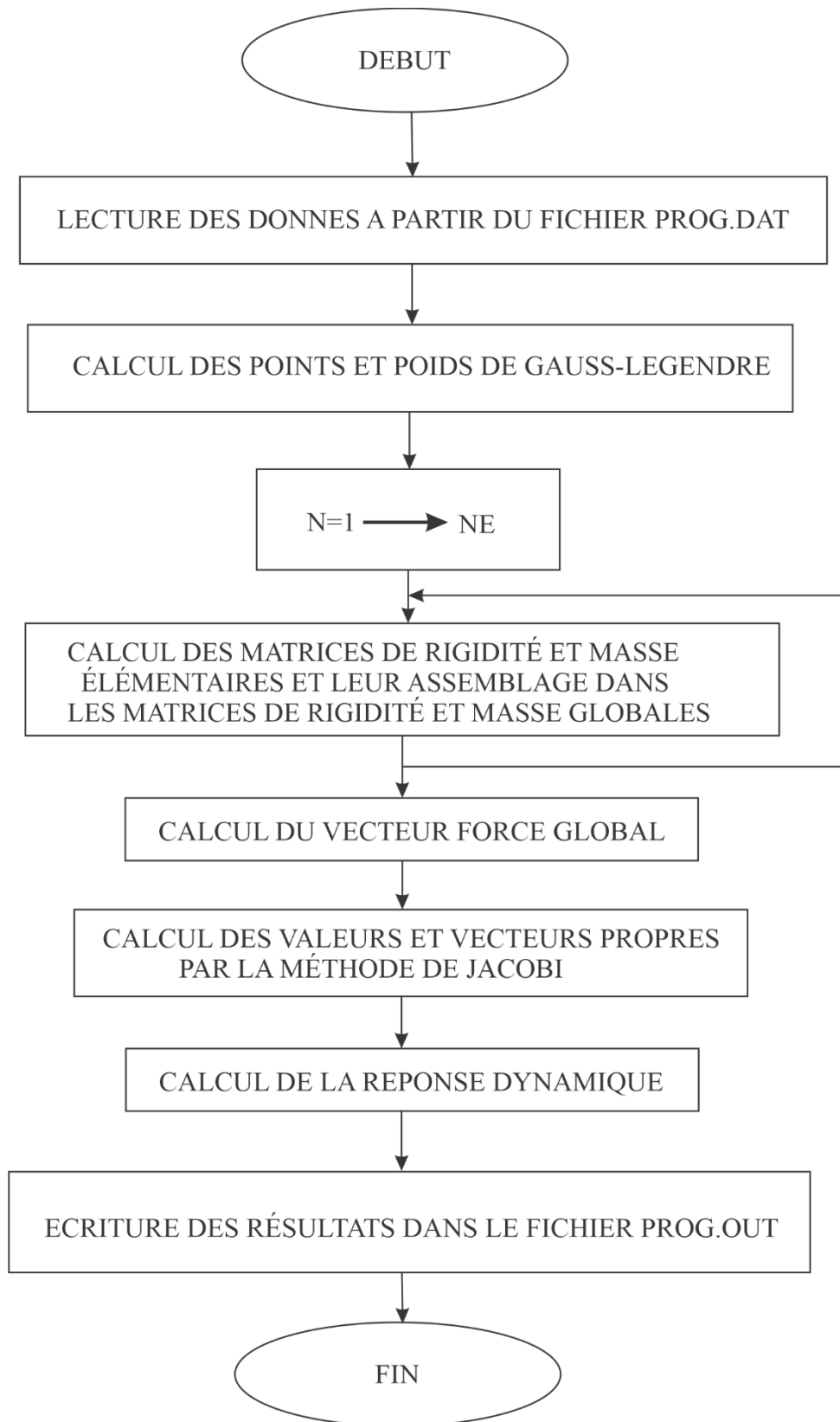
H : Epaisseur de la plaque

EC : Module de Young de la céramique

PRC : Coefficient de Poisson de la céramique

ROC : Densité de la céramique

EM : Module de Young du métal



**Fig. 4.1** : Organigramme.

PRM : Coefficient de Poisson du métal

ROM : Densité du métal

SC : Coefficient de correction du cisaillement transversal

$C_0$  : Charge appliquée

DR : Taux d'amortissement

$T_1$  : Temps utilisé dans le chargement à rampe

DT : Incrément du temps

J, XN (J), YN (J) : Coordonnées des nœuds (J=1, 2, ..., NN)

J, (LE (J, K), K=1, 8) : Connectivité des éléments

IN(I), (LNR(IN(I), K), K=1, 3): nœuds restraints (I = 1, 2, ..., NRN)

J, AN(3\*J-2), AN(3\*J-1), AN(3\*J): Actions nodales (J=1, 2, ..., NLN)

PRM : Coefficient de Poisson du métal

ROM : Densité du métal

#### **4.3.2. Sous-programme « GAUSS »**

Il calcule les points d'intégration de Gauss-Legendre [47] et leurs poids.

#### **4.3.3. Sous-programme « CONST »**

Il calcule les constantes élastiques de la plaque FGM.

#### **4.3.4. Sous-programme « STIFFB »**

Il calcule la matrice de rigidité élémentaire due à la flexion.

#### **4.3.5. Sous-programme « STIFFS »**

Il calcule la matrice de rigidité élémentaire due au cisaillement transversal.

#### **4.3.6. Sous-programme « MASS »**

Il calcule la matrice masse élémentaire.

#### **4.3.7. Sous-programme « JACOBI »**

Il calcule les fréquences propres et les modes propres par la méthode de JACOBI [48].

#### **4.3.8. Sous-programme « SORT »**

Il classe les fréquences propres et les modes propres par ordre croissant.

#### **4.3.9. Sous-programme « DRESP »**

Il calcule la réponse dynamique.

#### **4.3.10. Sous-programme « OUTPUT »**

Il affiche les résultats dans le fichier « PROG.OUT ».

#### **4.3.11. Sous-programme « JAC »**

Il calcule le Jacobien et son déterminant.

#### **4.3.12. Sous-programme « LOADF »**

Il calcule les charges appliquées selon le type de chargement choisi.

#### **4.3.13. Sous-programme « GFONCT »**

Il calcule les fonctions de forme.



# CHAPITRE 5

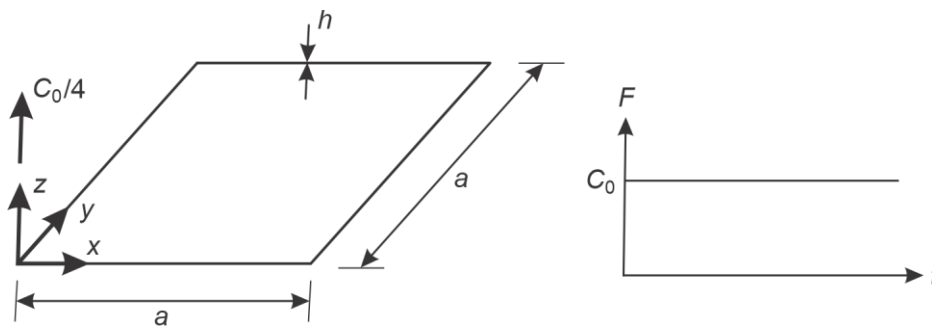
## RESULTATS ET INTERPRETATION

### 5.1. Introduction

Dans ce chapitre, une validation sous-forme de comparaison avec des résultats analytiques est réalisée pour une plaque carrée de Kirchhoff à matériau isotrope soumise à une charge dynamique centrale. Une solution analytique existe pour ce problème. Une étude paramétrique est ensuite menée pour évaluer les effets du matériau à gradient fonctionnel, l'exposant de la fraction volumique, et l'amortissement sur la réponse d'une plaque carrée à matériau FGM soumise à une charge à étape centrale.

### 5.2. Validation

Une comparaison avec des résultats analytiques est réalisée pour la réponse non-amortie d'une plaque carrée de Kirchhoff à matériau isotrope soumise à une charge à étape comme le montre Fig. 5.1. L'étude de la convergence en fonction du nombre d'éléments est disponible dans [44]. La plaque est simplement appuyée sur les quatre cotés. A cause de la symétrie et en centrant le système de coordonnées, il est nécessaire de considérer seulement un quart de la plaque avec des conditions aux limites appropriées sur les lignes de symétrie. Un maillage de  $5 \times 5$  éléments quadratiques est utilisé. Les paramètres suivants sont supposés :  $a = 50\text{cm}$ ,  $h = 1\text{cm}$ ,  $E = 7000000\text{N/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 0.002707\text{Kg/cm}^3$ ,  $C_0 = 1000\text{N}$ .



**Fig. 5.1** : Quart de la plaque carrée simplement appuyée et charge à étape.

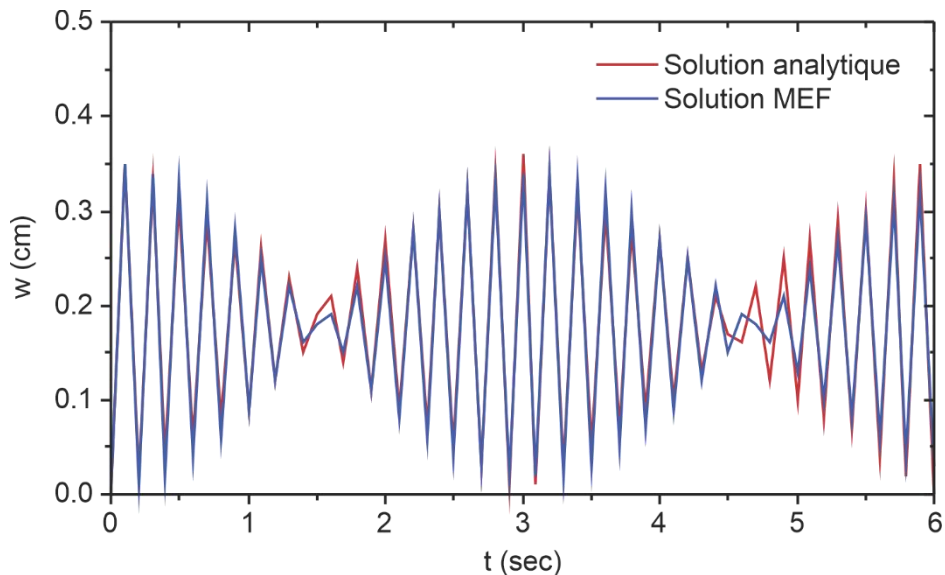
La réponse analytique de la flèche centrale est donnée par [45]

$$w(0,0,t) = \frac{192C_0a^2(1-\nu^2)}{\pi^4 Eh^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1 - \cos(\omega_{i,j}t)}{(i^2 + j^2)^2} \quad (5.1)$$

où

$$\omega_{i,j} = \frac{\pi^2(i^2 + j^2)h}{4a^2} \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (5.2)$$

Les résultats de la réponse non-amortie de la flèche centrale de la plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge centrale à étape sont montrés dans Fig. 5.2 ensemble avec la solution analytique obtenue en utilisant 20 termes dans la série le long des deux directions des axes de coordonnées. La figure montre clairement que les résultats obtenus par le programme sont en bon accord avec les résultats analytiques. Quelques petites différences apparaissent lorsque le temps augmente. Ceci est sûrement le résultat de la différence entre les deux théories de plaques utilisées. La théorie de Mindlin tient en compte l'effet du cisaillement transversal qui augmente avec l'augmentation du temps alors que la théorie de Kirchhoff le néglige.



**Fig. 5.2 :** Comparaison de la réponse dynamique (flèche centrale  $w$ ).

### 5.3. Etude paramétrique

Une étude paramétrique est maintenant réalisée pour évaluer les effets du matériau à gradient fonctionnel, l'exposant de la fraction volumique, et l'amortissement sur la réponse d'une plaque carrée à matériau FGM soumise à une charge à étape centrale. A cause de la symétrie et en centrant le système de coordonnées, il est nécessaire de considérer seulement un quart de la plaque avec des conditions aux limites appropriées sur les lignes de symétrie. Un maillage de  $5 \times 5$  éléments quadratiques est utilisé. Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés sont données dans le Tableau 5.1.

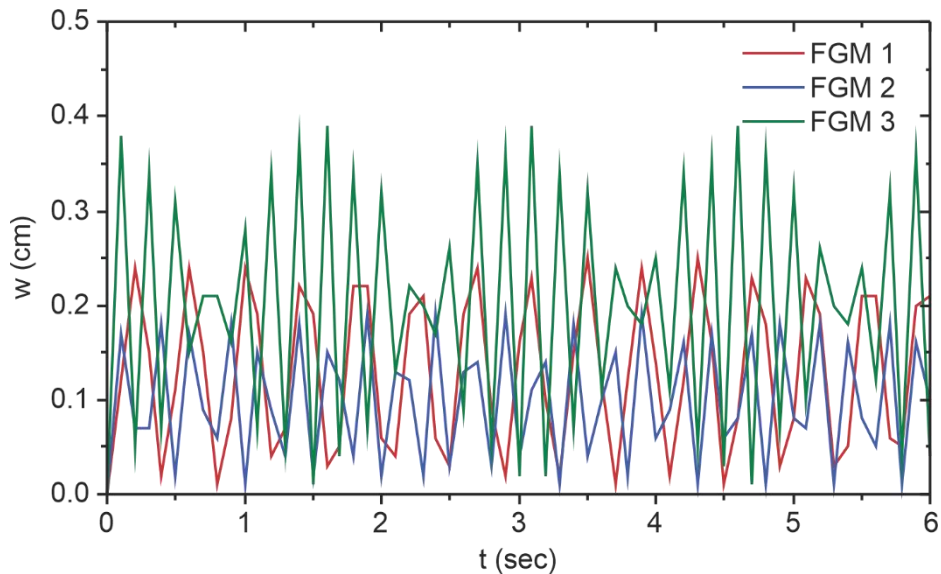
**Tableau 5.1** : Propriétés mécaniques des matériaux utilisés [46].

Matériau		Propriétés		
		$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Métal	Aluminum Al	70	0.3	2707
	Stainless Steel SUS304	207.78	0.3177	8166
	Titanium Ti-6Al-4V	105.7	0.298	4429
Céramique	Alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	380	0.3	3800
	Silicon Nitride Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	322.27	0.24	2370
	Zirconia ZrO <sub>2</sub>	151	0.3	3000

#### 5.3.1. Effet du matériau FGM

L'effet du matériau à gradient fonctionnel sur la réponse d'une plaque carrée à matériau FGM soumise à une charge à étape centrale est étudié. Les paramètres suivants sont supposés :  $a=50\text{cm}$ ,  $h=1\text{cm}$ ,  $n=2$ ,  $\xi=0$ , et  $C_0=2000\text{N}$ . Les matériaux FGM suivants sont choisis : FGM1(Al / Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), FGM2(SUS304 / Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>), et FGM3(Ti-6Al-4V / ZrO<sub>2</sub>). Les résultats de la réponse non-amortie de la flèche centrale de la plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge centrale à étape sont montrés dans Fig. 5.3 pour les trois types de matériaux FGM considérés. La figure montre clairement que le matériau FGM2 produit les plus petites

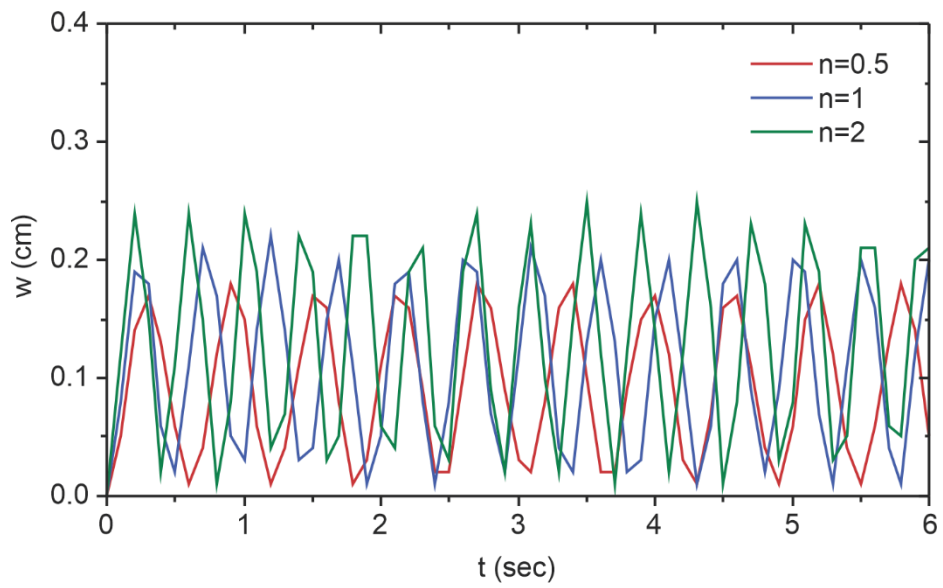
amplitudes alors que le matériau FGM3 produit les plus grandes amplitudes. Ceci veut dire que FGM2 est le plus rigide (plus grand  $E$  effectif) alors que le matériau FGM3 est le moins rigide (plus petit  $E$  effectif).



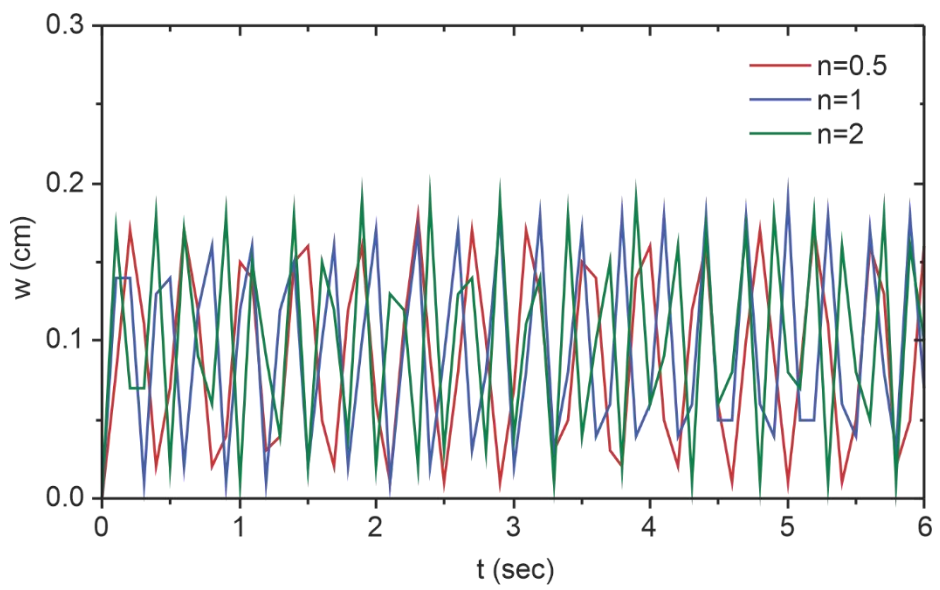
**Fig. 5.3 :** Effet du type de matériau FGM sur la flèche centrale  $w$ .

### 5.3.2. Effet de l'exposant de la fraction volumique

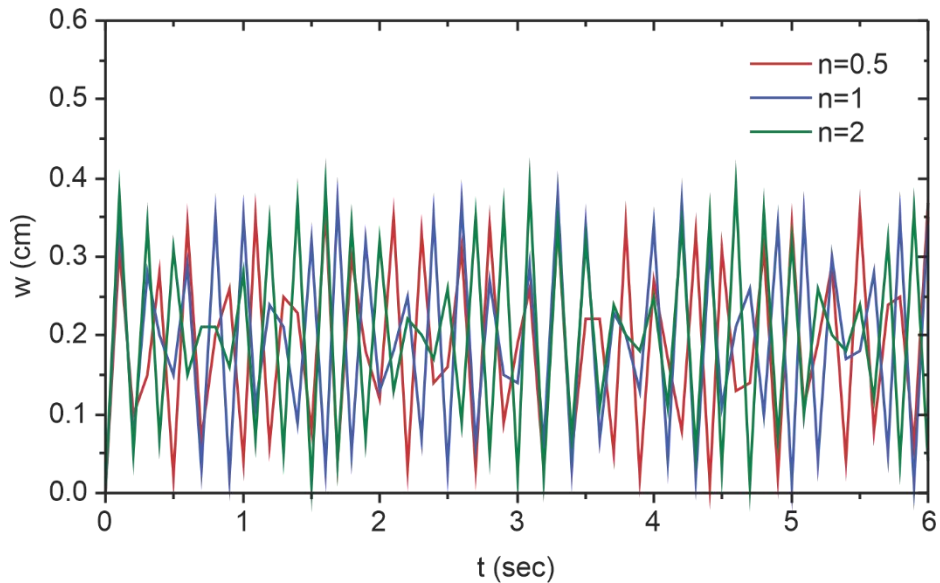
L'effet de l'exposant de la fraction volumique sur la réponse d'une plaque carrée à matériau FGM soumise à une charge à étape centrale est étudié. Les paramètres suivants sont supposés :  $a = 50\text{cm}$ ,  $h = 1\text{cm}$ ,  $\xi = 0$ , et  $C_0 = 2000\text{N}$ . Les exposants de la fraction volumique suivants sont supposés :  $n = 0.5$ ,  $n = 1$ , et  $n = 2$ . Les résultats de la réponse non-amortie de la flèche centrale de la plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge centrale à étape sont montrés dans Fig. 5.4, Fig. 5.5, et Fig. 5.6 pour FGM1, FGM2, et FGM3, respectivement. Les trois figures montrent clairement que les amplitudes augmentent avec l'augmentation de  $n$  puisque la rigidité de la plaque diminue avec l'augmentation de  $n$ .



**Fig. 5.4 :** Effet de l'exposant de la fraction volumique  $n$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM1).



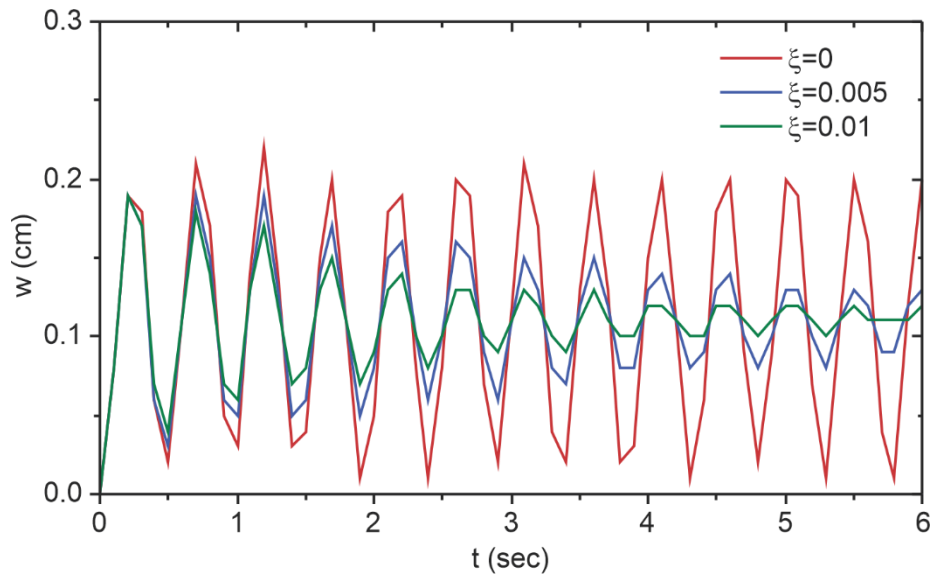
**Fig. 5.5 :** Effet de l'exposant de la fraction volumique  $n$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM2).



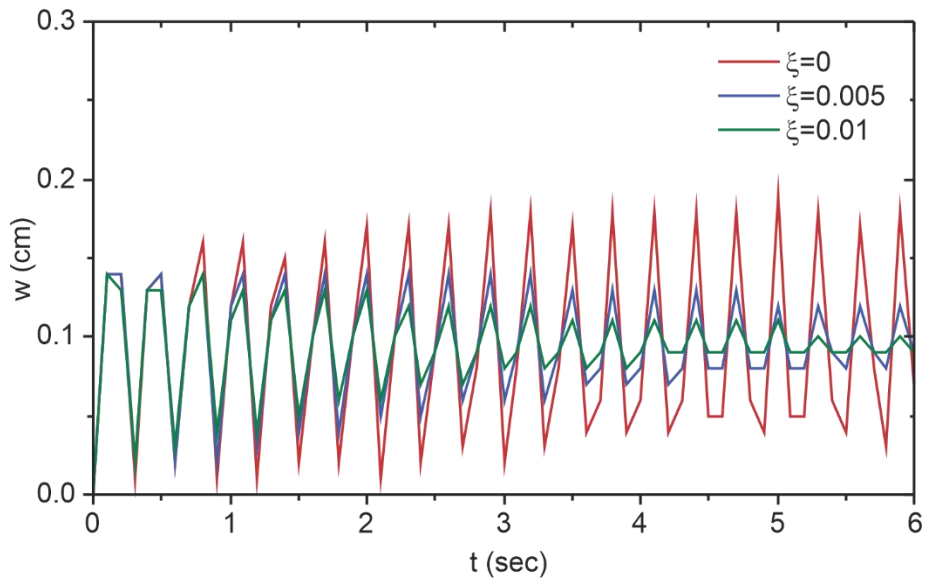
**Fig. 5.6 :** Effet de l'exposant de la fraction volumique  $n$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM3).

### 5.3.3. Effet du taux d'amortissement

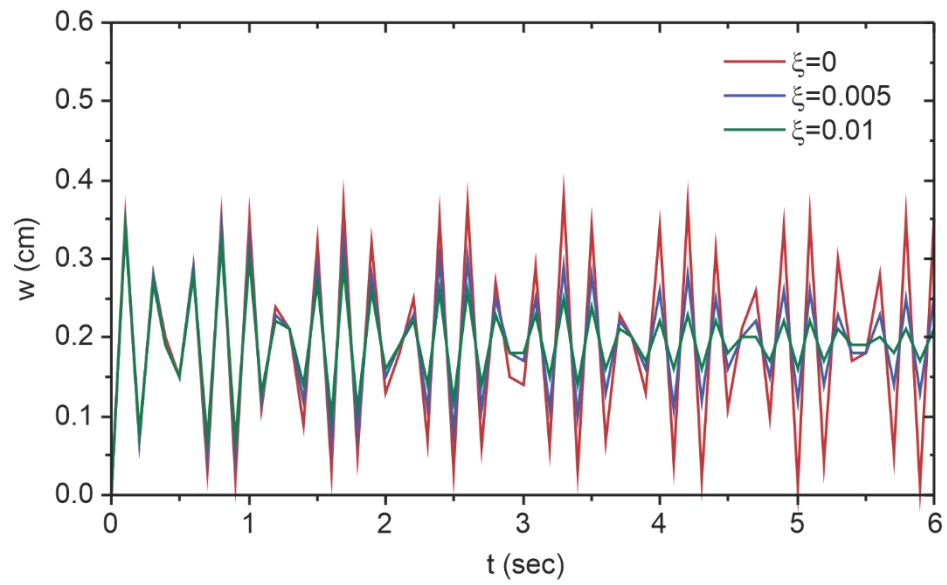
L'effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur la réponse d'une plaque carrée à matériau FGM soumise à une charge à étape centrale est étudié. Les paramètres suivants sont supposés :  $a = 50\text{cm}$ ,  $h = 1\text{cm}$ ,  $n=1$ , et  $C_0 = 2000N$ . Les taux d'amortissement suivants sont supposés :  $\xi = 0$ ,  $\xi = 0.005$ , et  $\xi = 0.01$ . Les résultats de la réponse non-amortie de la flèche centrale de la plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge centrale à étape sont montrés dans Fig. 5.7, Fig. 5.8, et Fig. 5.9 pour FGM1, FGM2, et FGM3, respectivement. Les trois figures montrent clairement que les amplitudes diminuent avec le temps lorsque  $\xi$  est différent de zéro comme prévu. Les trois figures montrent aussi que les amplitudes changent en changeant le matériau FGM. Ceci est dû au changement de la rigidité effective.



**Fig. 5.7 :** Effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM1).



**Fig. 5.8 :** Effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM2).



**Fig. 5.9 :** Effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur la flèche centrale  $w$  (FGM3).



## CHAPITRE 6

### CONCLUSION

Une analyse du comportement dynamique d'une plaque de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé a été présentée à l'aide de la méthode des éléments finis basée sur un élément quadrilatéral iso-paramétrique à 8 nœuds. Une méthode numérique basée sur la méthode de superposition modale a été proposée. Cette méthode n'est pas affectée par l'intervalle de temps. La propriété d'orthogonalité des modes propres a permis de découpler les équations du mouvement. Un programme en FORTRAN 77 a été conçu. Les résultats ont été validés par comparaison avec des valeurs analytiques. Cette étude nous permet de déduire les conclusions suivantes :

- La théorie des plaques de Mindlin tient compte du cisaillement transversal et est donc adéquate pour l'étude de la réponse dynamique des plaques modérément épaisses à matériau fonctionnellement gradé.
- L'amplitude diminue avec l'augmentation de la rigidité du matériau FGM.
- L'amplitude augmente avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique.
- L'amplitude diminue avec le temps lorsque le taux d'amortissement est différent de zéro.

Ce travail de recherche peut être étendu en considérant, par exemple, la réponse dynamique des plaques de Mindlin à matériau fonctionnellement gradé ayant d'autres formes géométriques et soumises à d'autres types de chargements dynamiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] The Bronze Age, 2018, [http://www.softschools.com/timelines/the\\_bronze\\_age\\_timeline/145/](http://www.softschools.com/timelines/the_bronze_age_timeline/145/).
- [2] M. Niino, T. Hirai, and R. Watanabe, “The functionally gradient materials,” *Journal of the Japan Society for Composite Materials*, vol. 13, no. 1, p. 257, 1987.
- [3] M. Shen and M. Bever, “Gradients in polymeric materials,” *Journal of Materials science*, vol. 7, no. 7, pp. 741–746, 1972.
- [4] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, “Processing techniques for functionally graded materials,” *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 81–106, 2003.
- [5] M. Naebe and K. Shirvanimoghaddam, “Functionally graded materials: a review of fabrication and properties,” *Applied Materials Today*, vol. 5, pp. 223–245, 2016.
- [6] Y. Fukui, K. Takashima, and C. Ponton, “Measurement of Young’s modulus and internal friction of an in situ Al-Al<sub>3</sub>Ni functionally gradient material,” *Journal of Materials Science*, vol. 29, no. 9, pp. 2281–2288, 1994.
- [7] M. R. Abbas, M. Uday, A. M. Noor, N. Ahmad, and S. Rajoo, “Microstructural evaluation of a slurry based Ni/YSZ thermal barrier coating for automotive turbocharger turbine application,” *Materials and Design*, vol. 109, pp. 47–56, 2016.
- [8] S. Dhineshkumar, M. Duraiselvam, S. Natarajan, S. Panwar, T. Jena, and M. A. Khan, “Enhancement of strain tolerance of functionally graded LaTi<sub>2</sub>Al<sub>9</sub>O<sub>19</sub> thermal barrier coating through ultra-short pulse based laser texturing,” *Surface and Coatings Technology*, vol. 304, pp. 263–271, 2016.
- [9] S. Naga, M. Awaad, H El-Maghraby et al., “Effect of La<sub>2</sub>Zr<sub>2</sub>O<sub>7</sub> coat on the hot corrosion of multi-layer thermal barrier coatings,” *Materials and Design*, vol. 102, pp. 1–7, 2016.
- [10] A. Gupta and M. Talha, “Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 79, pp. 1–14, 2015.

- [11] M. Allahyarzadeh, M. Aliofkhazraei, A. S. Rouhaghdam, and V. Torabinejad, "Gradient electrodeposition of Ni-Cu-W (alumina) nanocomposite coating," *Materials and Design*, vol. 107, pp. 74–81, 2016.
- [12] M. Niino and S. Maeda, "Recent development status of functionally gradient materials," *ISIJ International*, vol. 30, no. 9, pp. 699–703, 1990.
- [13] K. Ichikawa, *Functionally Graded Materials in the 21<sup>st</sup> Century: a Workshop on Trends and Forecasts*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] Y. Miyamoto, M. Koizumi, and O. Yamada, "High-pressure Self-Combustion Sintering for Ceramics," *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 67, no. 11, pp. 224-225, 1984.
- [15] T. Hirai, "Physics and chemistry of functionally graded materials," *Research Report, MESSC*, 1998.
- [16] D. Jha, T. Kant, and R. Singh, "A critical review of recent research on functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 96, pp. 833–849, 2013.
- [17] J. Groves and H. Wadley, "Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, pp. 57–69, 1997.
- [18] T. Rajan and B. Pai, "Development in manufacturing processes of functionally graded materials," *International Journal of Advanced Engineering Applications*, vol. 2, no. 5, pp. 4–74, 2009.
- [19] Y. Fukui, "Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force," *JSME International Journal Ser 3, Vibration, Control Engineering Engineering for Industry*, vol. 34, no. 1, pp. 144–148, 1991.
- [20] G. Udupa, S. S. Rao, and K. Gangadharan, "Functionally graded composite materials: an overview," *Procedia Materials Science*, vol. 5, pp. 1291–1299, 2014.
- [21] D. W. Hutmacher, M. Sittinger, and M. V. Risbud, "Scaffoldbased tissue engineering: rationale for computer-aided design and solid free-form fabrication systems," *TRENDS in Biotechnology*, vol. 22, no. 7, pp. 354–362, 2004.

[22] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, pp. 1–4, 1997.

[23] M. M. Nemat-Alla, M. H. Ata, M. R. Bayoumi, and W. Khair-Eldeen, "Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminum/steel functionally graded material," *Materials Sciences and Applications*, vol. 2, no. 12, p. 1708, 2011.

[24] F. Watari, "Fabrication of functionally graded implant and its biocompatibility," in *Functionally Graded Materials in the 21st Century*, , pp. 187–190, 2001.

[25] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, and S. Lee, "Fabrication of ZrO<sub>2</sub>–NiCr functionally graded material by powder metallurgy," *Materials Chemistry and Physics*, vol. 68, no. 1-3, pp. 130–135, 2001.

[26] Y. Watanabe, N. Yamanaka, and Y. Fukui, "Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 29, no. 5-6, pp. 595–601, 1998.

[27] X. Lin and T. Yue, "Phase formation and microstructure evolution in laser rapid forming of graded SS316L/Rene88DT alloy," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 402, no. 1-2, pp. 294–306, 2005.

[28] J. Moon, A. C. Caballero, L. Hozer, Y.-M. Chiang, and M. J. Cima, "Fabrication of functionally graded reaction infiltrated SiC–Si composite by three-dimensional printing (3DP™) process," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 298, no. 1-2, pp. 110–119, 2001.

[29] Uflyand, Ya. S., 1948, *Wave Propagation by Transverse Vibrations of Beams and Plates*, *PMM: Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 12, 287-300 (in Russian)

[30] R. D. Mindlin, 1951, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18 pp. 31–38.

[31] Elishakoff ,I., 2020, *Handbook on Timoshenko-Ehrenfest Beam and Uflyand-Mindlin Plate Theories*, World Scientific, Singapore, ISBN 978-981-3236-51-6

- [32] E. Reissner, 1945, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68–77.
- [33] Liu, Wing Kam; Li, Shaofan; Park, Harold S. (2022). "Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future". *Archives of Computational Methods in Engineering*. 29 (6): 4431–4453. doi:10.1007/s11831-022-09740-9. ISSN 1134-3060. S2CID 235794921.
- [34] Hrennikoff, Alexander (1941). "Solution of problems of elasticity by the framework method". *Journal of Applied Mechanics*. 8 (4): 169–175. Bibcode:1941JAM....8A.169H. doi:10.1115/1.4009129.
- [35] Courant, R. (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". *Bulletin of the American Mathematical Society*. 49: 1–23. doi:10.1090/s0002-9904-1943-07818-4.
- [36] "СПб ЭМИ ПАИ". emi.nw.ru. Archived from the original on 30 September 2015. Retrieved 17 March 2018.
- [37] Hinton, Ernest; Irons, Bruce (July 1968). "Least squares smoothing of experimental data using finite elements". *Strain*. 4 (3): 24–27. doi:10.1111/j.1475-1305.1968.tb01368.x.
- [38] "SAP-IV Software and Manuals". NISEE e-Library, The Earthquake Engineering Online Archive.
- [39] Gard Paulsen; Håkon With Andersen; John Petter Collett; Iver Tangen Stensrud (2014). Building Trust, The history of DNV 1864-2014. Lysaker, Norway: Dinamo Forlag A/S. pp. 121, 436. ISBN 978-82-8071-256-1.
- [40] Strang, Gilbert; Fix, George (1973). *An Analysis of The Finite Element Method*. Prentice Hall. ISBN 978-0-13-032946-2.
- [41] Olek C Zienkiewicz; Robert L Taylor; J.Z. Zhu (31 August 2013). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-08-095135-5.
- [42] Bathe, K.J. (2006). *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe. ISBN 978-0979004902.

- [43] Praveen, G.V., Reddy, J.N., 1998. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Int. J. Solids Struct.* 35, 4457e4476.
- [44] Bousmaha K., 2021, Analyse dynamique d'une plaque de Mindlin par la méthode des éléments finis, Mémoire de Master en Construction Mécanique, Département de Génie Mécanique, Faculté de Technologie, Université Abou-Bekr Belkaid-Tlemcen.
- [45] Houmat A., 2023, Cours de Dynamique des Structures, Département de Génie Mécanique, Faculté de Technologie, Université Abou-Bekr Belkaid-Tlemcen.
- [46] Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M., 2009. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib.* 319, 918e939.
- [47] Eric W. Weisstein, « Legendre-Gauss quadrature » [archive], sur MathWorld.
- [48] Golub, G.H.; van der Vorst, H.A. (2000). "Eigenvalue computation in the 20th century". *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 123 (1–2): 35–65. doi: 10.1016/S0377-0427(00)00413-1.