REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité : *Statistique et Probabilités Approfondies*

Par :

Melle Bernou Ismahen

Sur le thème

Etude des Théorèmes limites sous des conditions de dépendance faible

Soutenue publiquement le 03/12/2022 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr. MIRI. S	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr. BOUKHARI. F	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr. MECHAB. B	Professeur	Université de S. Bel Abbes	Examinateur
Mr. HAMDAOUI. A	Maître de Conférences A	Université d'Oran	Examinateur
Mr. ALLAM. A.	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire de Statistique et Modélisations Aléatoires (LSMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, Monsieur **F. BOUKHARI**, Professeur à la faculté des sciences, Universsité Abou bekr Belkaid, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Il m'a été d'un grand secours durant la phase de rédaction par ses relectures attentives et critiques. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et ses encouragements.

J'adresse ma profonde gratitude à Monsieur **S. MIRI**, professeur à la faculté des sciences, Université Abou Bekr Belkaid, pour l'honneur et le plaisir qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Merci à Monsieur **B. MECHAB**, Professeur à l'Universsité Djillali Liabès de Sidi Belabbes, d'avoir accepter d'examiner et de faire partie du jury. Vous me faites un très grand honneur en accepant de juger ce travail. Veuillez trouver ici l'expression de notre respect et sincère remerciement.

Je remercie Monsieur **A. HAMDAOUI**, maître de conférences à l'Universsité des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, pour avoir accepter de se joindre à ce jury comme examinateur. Merci pour avoir consacrer une partie de votre temps à la lecture de cette thèse. Veuillez trouver ici l'assurance de notre reconnaissance et notre profonde admiration.

J'exprime également ma sincère reconnaissance à Monsieur **A. ALLAM**, maître de conférences à la faculté des sciences, Universsité Abou Bekr Belkaid, de me faire l'honneur d'accepter d'examiner ma thèse.

Je tiens également à remercier tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à ce travail.

Table des matières

Introduction

L'un des axes de recherche importants en théorie des probabilités concerne les lois limites des sommes partielles de variables aléatoires. Une grande partie de ces travaux de recherche porte sur le théorème central–limite, les lois des grands nombres et enfin la loi du logarithme itéré. Ceci est dû essentiellement au fait que ces théorèmes limites jouent un rôle important dans plusieurs domaines scientifiques.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux lois limites suivantes :

1. Lois du logarithme itéré pour des processus stochastiques fortement intégrables.
2. Lois faibles des grands nombres pour des variables non intégrables.

La loi du logarithme itéré a été établie pour la première fois par Kintchine en 1924 qui l'obtient pour des variables aléatoires de Bernoulli, quelques années plus tard Kolmogorov généralisa le résultat de Kintchine aux variables aléatoires gaussiennes. En 1941 Hartman et Wintner ont prouvé que cette loi est valable pour des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Au début des années soixante-dix, Finkelstein a obtenu une loi du logarithme itéré pour les processus empiriques à valeurs vectorielles. Plus récemment, Castellucci et Giuliano Antonini ont établi une loi du logarithme itéré pour des martingales Φ-sous-gaussiennes. Ce dernier résultat est la principale motivation de la première partie de cette thèse.

Il est bien connu que la loi forte des grands nombres n'est plus en vigueur lorsque les variables aléatoires ne sont pas intégrables, dans ce cas la recherche d'une loi faible des grands nombres devient primordiale. L'une des premières lois faibles pour des variables non intégrables est due à Kolmogorov, cette lois a été généralisée par la suite par Feller. Ce problème est traité dans le dernier chapitre de ce travail, pour des distributions de type Pareto.

Ce manuscrit est composé de quatre parties :

Le premier chapitre est introductif, on commence par rappeler quelques propriétés essentielles des fonctions convexes. Nous rappelons ensuite la notion de N–fonction et ses conséquences. Nous donnons aussi les principales caractéristiques des processus gaussiens et nous présentons plusieurs exemples de tels processus. On aborde ensuite le concept de processus Φ-sous-gaussien et son lien avec les espaces d'Orlicz de type exponentiel. Nous présentons aussi dans cette partie l'idée du nombre d'entropie métrique dû à Kolmogorov et nous énonçons le célèbre critère d'entropie métrique de Dudley qui sera l'ingrédient principal dans notre preuve de la loi du logarithme itéré formulée dans le chapitre suivant.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de notre première contribution qui concerne la loi du logarithme itéré obtenue par Antonini et Castellucci en 2005 pour des martingales Φ-sous-gaussiennes. La méthode utilisée repose sur le célèbre critère d'entropie métrique de Dudley, l'avantage principal de cette approche est la fait qu'on a pu se passer de l'hypothèse de martingale imposée par Antonini –Castellucci. En effet notre conclusion est valable pour des processus stochastiques à accroissements d-Φ-sous-gaussiens. Par conséquent, notre théorème s'applique au mouvement brownien fractionnaire, au mouvement brownien fractionnaire mixte ainsi qu'au processus de Rademacher. Ces trois processus ne sont pas des martingales.

Dans le troisième chapitre on rappelle plusieurs concepts de de dépendance qui sont très utiles lorsque la condition d'indépendance est absente. Nous formulons ensuite nos hypothèses sur la suite des sauts. Notre première condition est une inégalité maximale de type Rosenthal, la seconde est une inégalité de type Marcinkiewicz–Zygmund. Plusieurs classes de variables aléatoires vérifient ces deux propriétés.

Le dernier chapitre est consacré à notre seconde contribution qui concerne la Loi faible des grands nombres pour une famille de variables aléatoires de moyennes infinies. Dans cette partie, on généralise les résultats d'Adler, Nakata et Xu–Li–Yang–Xu. Nos hypothèses sont vérifiées par plusieurs classes de variables aléatoires dépendantes. Nous complétons aussi les résultats connus en exhibant une condition nécessaire pour les variables aléatoires qui satisfont une inégalité de type Marcinkiewicz–Zygmund. Enfin, nous appliquons nos théorèmes aux jeux de St. Pétersbourg et de Feller.

Notations

AANA :	asymptotically almost negatively associated.
Cov :	la covariance.
d :	une pseudométrique.
$Dir(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$:	loi de Dirichelet de paramètres positifs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.
$diam(F)$:	le diamètre de l'ensemble F.
$\acute{e}pi(f)$:	l'épigraphe de la fonction f.
$\mathbb{E}(X)$:	l'espérence de la variable X.
$Exp_{\Phi^*}(\Omega)$:	L'espace d'Orlicz de type exponentiel associé à la N-fonction Φ^*.
f^{-1} :	la fonction inversse de la fonction f.
f^* :	la fonction conjugue de la fonction f.
$f(x) \sim g(x)$:	désigne que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.
i. i. d. :	indépendant, identiquement distribue.
LGN :	la loi des grands nombres.
LLI :	La loi du logarithme itéré.
$\log_2 x$:	$= \ln x/\ln 2$
MB :	le mouvement Brownien.
MBF :	le mouvement Brownien fractionnaire.
MBFM :	le mouvement Brownien fractionnaire mixte.
m-NA :	m-negatively associated.
$\mathbb{N}$:	l'ensembles des entiers naturels.
$\mathcal{N}(0, 1)$:	loi gaussienne centrée réduite.
NA :	negatively associated.
NSD :	negatively superadditive-dependent.
$\mathsf{N}(E, \mathsf{d}, \epsilon)$:	nombre d'entropie.
$\mathbb{P}(A)$:	la probabilité de A.
$\mathcal{P}(a)$:	loi de Poisson de paramètre a.
$\mathcal{RV}(\alpha)$:	l'espace des fonctions à variation régulière à l'infini d'indice α.
$\mathcal{RV}_0(\alpha)$:	l'espace des fonctions à variation régulière à l'origine d'indice α.

$\mathsf{sgn}(t)$:	la fonction signe : $= \begin{cases} -1, & \text{si} \quad t < 0, \\ 0, & \text{si} \quad t = 0, \\ 1, & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$
ssi :	si et seulement si.
$Sub(\Omega)$:	l'espace des variables sous-gaussiennes.
$Sub_\Phi(\Omega)$:	l'espace des variables Φ-sous-gaussiennes.
$\mathcal{SV}$:	l'espace des fonctions à variation lente à l'infini.
$\mathcal{SV}_0$:	l'espace des fonctions à variation lente à l'origine.
ssi :	si et seulement si.
TCL :	le théorème central limite.
$\mathsf{Var}(X)$:	la variance de la variable X.
v.a.r :	variable aléatoire rèelle.
$X, Y, Z...$:	des variables aléatoires.
$\mathbb{1}(A)$:	l'indicatrice de l'ensemble A
$\log^+ x$:	$\max\Big(1, \log x)$.
$\tau_\Phi(X)$:	le standard ou l'écart de Gauss de la variable X.
$\|\|X\|\|_{E_{\Phi^*}(\Omega)}$:	la norme de Luxemburg de X.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$:	la convergence en loi.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$:	la convergence en probabilité.
$\xrightarrow{p.s}$:	la convergence presque sûre.
$\mathbb{N}^*$:	l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
$\mathbb{R}$:	l'ensemble des nombres rèels.
$\mathbb{R}^+$:	l'ensemble des réels positifs.
$\overline{\mathbb{R}}$:	$(-\infty, +\infty)$.
$\Gamma(a)$:	la fonction gamma.
$a_n = O(b_n)$:	signifie que $\limsup_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$.
$a_n = o(b_n)$:	signifie que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.
$a_n \sim b_n$:	signifie que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.
$a_n \asymp b_n$:	signifie que $0 < \liminf a_n/b_n \leq \limsup a_n/b_n < \infty$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par introduire la notion de N–fonctions, l'espace des variables aléatoires Φ-sous-gaussiennes, ainsi que les espaces d'Orlicz de type exponentiel. Nous formulons ensuite le critère d'entropie métrique de Dudley qui sera notre principal outil dans notre preuve de la loi de logarithme itéré donnée dans le chapitre suivant. Nous rappellerons aussi dans cette partie le concept de fonctions à variations régulières ainsi que leurs propriétés fondamentales.

1.1 Rappels sur les fonctions convexes

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Tout au long de ce paragraphe, $[a, b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, si pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$, on a l'inégalité suivante

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(s) \quad \forall s, t \in [a, b].$$

Lorsque l'inégalité est stricte avec $t \neq s$ et λ dans $]0, 1[$, on parle de fonction strictement convexe.

Définition 1.1.2. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave (resp. strictement concave) sur $\in [a, b]$ si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe) sur $\in [a, b]$.

Proposition 1.1.1.
1. *[75] Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.*
2. *[44] Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ réelle et possède une deuxième dérivée déterminée,continue et positive, alors f est convexe.*

Nous allons étudier maintenant quelques propriétés des fonctions convexes.

Proposition 1.1.2. *[5] (Inégalité des pentes) Si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors, pour tous $s < u < t$ dans I*

$$\frac{f(u)-f(s)}{u-s} < \frac{f(t)-f(s)}{t-s} < \frac{f(t)-f(u)}{t-u}$$

et par conséquent,

$$\frac{f(u)-f(s)}{u-s} < \frac{f(t)-f(u)}{t-u}.$$

Réciproquement, si l'une des trois inégalités est vérifiée pour tous $s < u < t$ dans I alors f est convexe.

Théorème 1.1.1. *[44](Inégalité de Jensen) Soit f une fonction convexe, alors pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ et pour tout $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

En général, la composition de deux fonctions convexes n'est pas convexe.

Exemple 1.1.1. Soit f une foction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = 1/\ln(x)$ et g une fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $g(x) = e^{-x}$, alors les deux fonctions f et g sont convexes sur leurs domaines de définitions mais la fonction composée $f \circ g$ définie sur $]1, +\infty[$ par $f \circ g(x) = -1/x$ n'est pas convexe.

On a par contre le résultat suivant :

Proposition 1.1.3. *Soit $f : [a, b] \to T$ une fonction convexe et $g : T \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante, alors la composée $g \circ f$ est une fonction convexe sur $[a, b]$.*

Proposition 1.1.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une foction convexe, elle est continue sur l'intérieur de $[a, b]$.*

Comme exemples de fonctions convexes on peut citer :

Exemples 1.1.1.
1. La fonction carré et la fonction exponentielle sont des exemples de fonctions strictement convexes sur $\mathbb{R}$. Les fonctions affines sont convexes.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe.
3. Pour tout entier positif n, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ est convexe si n est pair (si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}^+$).

Définition 1.1.3. Soit A un ensemble non-vide. On dit que A est convexe si $\forall s, t \in A, \forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda s + (1-\lambda)t \in A$.

Proposition 1.1.5. *Une fonction f est convexe sur $[a,b]$ si et seulement si son épigraphe noté* épi(f) *et défini comme suit :*

$$\text{é}pi(f) = \Big\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} / f(x) \leq y\Big\}$$

est un sous-ensemble convexe de $[a,b] \times \mathbb{R}$.

1.2 Les N-fonctions et la fonction conjuguée

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés essentielles des N-fonctions et des fonctions conjuguées qui seront utiles par la suite. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [22, 38] ou [50].

Définition 1.2.1. Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, paire et convexe. On dit que Φ est une N-fonction si elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\Phi(0) = 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$$

Exemples 1.2.1. Comme exemples de N-fonctions on peut citer :

1. $\Phi(t) = \alpha |t|^\beta$, $t \in \mathbb{R}$; $\alpha > 0$, $\beta > 1$.
2. $\Phi(t) = \mathrm{e}^{|t|} - |t| - 1$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $\Phi(t) = \mathrm{e}^{\alpha |t|^\beta} - 1$, $t \in \mathbb{R}$; $\alpha > 0$, $\beta > 1$.
4. $\Phi(t) = (1 + |t|)\log(1 + |t|) - |t|$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\Phi(t) = \begin{cases} \left(\frac{\mathrm{e}\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} t^2, & \text{si} \quad |t| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\ \mathrm{e}^{|t|^\alpha}, & \text{si} \quad |t| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}, 0 < \alpha < 1. \end{cases}$

Définition 1.2.2. Soit Φ une N-fonction. On dit que Φ satisfait la condition $(\mathbf{Q})$ si :

$$\liminf_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t^2} = c \in]0, +\infty). \tag{$\mathbf{Q}$}$$

Définition 1.2.3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction (non nécessairement N-fonction), sa fonction conjuguée est la fonction $f^* : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie en $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f^*(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \Big(ts - f(s)\Big).$$

Remarques 1. 1. La foction f^* est dite aussi la transformée de Young-Fenchel de f.

2. Si f est une N-fonction ; alors les fonctions f et f^* sont dites fonctions d'Orlicz conjuguées.

Comme exemples de fonctions conjuguées (Young-Fenchel) on peut citer :

Exemple 1.2.1. $\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p}$, $t \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$; alors $\Phi^*(t) = \frac{|t|^q}{q}$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En effet ; posons $g(s) = st - \Phi(s), s \geq 0$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' est donnée par : $g'(s) = t - s^{p-1}$. Ici, on étudie le signe de $g'(s)$, on a

$$g'(s) \geq 0 \Longleftrightarrow s \leq t^{1/p-1};$$

d'où

$$\sup_{s \geq 0} g(s) = g\Big(t^{1/p-1}\Big) = \frac{t^q}{q};$$

ainsi ; $\Phi(t) = \dfrac{t^q}{q}, t \geq 0$.

Un deuxième exemple des fonctions conjuguées est :

Exemple 1.2.2. $\Phi(t) = \mathrm{e}^{|t|} - |t| - 1$, $t \in \mathbb{R}$; alors $\Phi^*(t) = (1+|t|)\log(1+|t|) - |t|$.

Proposition 1.2.1. *Soit Φ une N-fonction et Φ^* sa fonction conjuguée , alors on a les assertions suivantes :*

1. *Φ^* est une N-fonction.*
2. *On a l'inégalité de Young-Fenchel suivante :*

$$\forall s, t > 0, \qquad st \leq \Phi(s) + \Phi^*(t).$$

3. *Si $t > 0$, alors $\Phi^*(t) = \sup\limits_{s>0} \{st - \Phi(s)\}$ et $\Phi^*(-t) = \Phi^*(t)$.*

Lemme 1.2.1. *Soit Φ une N-fonction, alors on a les assertions suivantes :*

a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $0 \leq \alpha \leq 1$ *;*

b) $\Phi(\alpha t) \geq \alpha\Phi(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha > 1$ *;*

c) $\Phi(|s| + |t|) \geq \Phi(s) + \Phi(t), \forall s, t \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.2.2. *Supposons que Φ^{-1} est la fonction réciproque de Φ sur $\mathbb{R}^+$, $t \geq 0$, alors on a les assertions suivantes :*

1. *La fonction* Φ^{-1} *est croissante, concave et continue avec :* $\Phi^{-1}(t) > 0$ *pour* $t > 0$ *et*
$$\lim_{t\to 0} \Phi^{-1}(t) \to 0, \quad et \quad \lim_{t\to\infty} \Phi^{-1}(t) \to +\infty.$$
2. $\Phi^{-1}(\alpha t) \leq \alpha\Phi^{-1}(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $\alpha \geq 1$.
3. $\Phi^{-1}(\alpha t) \geq \alpha\Phi^{-1}(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $0 \leq \alpha < 1$.
4. $\Phi^{-1}(s+t) \leq \Phi^{-1}(s) + \Phi^{-1}(t), \forall s, t \in \mathbb{R}^+$.
5. *La fonction* $\theta(t) = \dfrac{\Phi^{-1}(t)}{t}, t > 0$ *est décroissante.*

1.3 Processus gaussiens

Le principal objectif de cette section est d'introduire les résultats sur les processus gaussiens qui seront utilisés dans la suite pour construire le mouvement brownien fractionnaire.

Définition 1.3.1. Un processus aléatoire $X = \{X_t, t \in T\}$ à valeurs rèelles est un processus gaussien si toutes ses lois fini dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T$). Autrement dit, un processus $X = \{X_t, t \in T\}$ est un processus gaussien si toute combinaison linèaire finie des variables $X_t, t \in T$ est gaussienne.

Remarque 1. Toutes les lois marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes.

Exemples 1.3.1. Comme exemples des processus gaussiens, on peut citer :

1. **Mouvement brownien** : Le mouvement brownien standard (MB) $(B_t)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien défini sur $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $\mathsf{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$, autosimilaire et à accroissements stationnaire. On l'appelle aussi processus de Wiener.
2. **Pont brownien** : Le pont brownien $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est le processus gaussien centré défini sur $[0, 1]$ par la fonction de covariance $\mathsf{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t) - st$.
3. **Processus d'Ornstein-Uhlenbeck** : Le processus d'O.U. est le processus gaussien centré défini sur $\mathbb{R}$ par $U_t = e^{-t/2}B_{e^t}$ où B est un MB. Il est facile de montrer que $U_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Désormais, nous nous intéréssons aux processus gaussiens les plus célèbres qui sont le mouvement brownien fractionnaire et le mouvement brownien fractionnaire mixte et nous verrons par la suite que ces derniers ne sont pas des martingales.

Le mouvement Brownien fractionnaire (MBf) a été introduit par Kolmogorov (1940) dans l'espace de Hilbert. Pour $H \in (0,1)$, Mandelbrot et Van Ness (1968) [56] ont défini le MBf comme une intégrale stochastique.

Définition 1.3.2. Le mouvement brownien fractionnaire standard d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ est un processus gaussien continu centré noté $(B_t^H)_{t\geq 0}$ et est le seul processus vérifiant les propriétés suivantes :

1. $B_0^H = 0$ $\mathbb{P}-$presque-sûrement.
2. Pour tout $t \geq 0, \mathbb{E}(B_t^H)^2 = t^{2H}$.
3. Autosimilarité : pour tout $a > 0, (B_{at}^H)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H (B_t^H)_{t\geq 0}$.
4. Accroissements stationnaires : $\forall h > 0, \forall t \geq 0, (B_{t+h}^H - B_t^H) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_t^H)$.
5. Pour $0 < H \leq 1$, Le MBf d'indice H, $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance :

$$\mathsf{Cov}(B_s^H, B_t^H) = \frac{1}{2}\Big(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\Big).$$

Remarque 2. Le MBf "non-standard" a la fonction de covariance suivante

$$\mathsf{Cov}(B_s^H, B_t^H) = \frac{V^H}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

où

$$V^H = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-H)}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, x > 0$.

Remarque 3. Soit $(B_t^H)_{t\geq 0}$ un MBf standard d'indice de Hurst $H \in (0,1)$, si $H = \frac{1}{2}$, alors on obtient le MB standart $(B_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.3.3. On dira qu'un processus $X = \{X_t, t \in T\}$ est une semi-martingale, s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + M_t + A_t;$$

où $(M_t)_{t\in T}$ est une martingale locale issue de 0 et $(A_t)_{t\in T}$ est un processus issu de 0 et à variation finie.

Théorème 1.3.1. *[67] Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un MBf d'indice de Hurst $H \in (0,1/2) \cup (1/2,1)$. Alors B^H n'est pas une semi-martingale.*

Le mouvement Brownien fractionnaire mixte (MBFM) d'indice de Hurst H est une généralisation du MBf. Ce processus stochastique a été introduit par Cheridito [27] pour présenter un modèle de finance. Il s'agit du processus $\left(X_t^H(\alpha,\beta)\right)_{t\in[0,1]}$ défini par

$$X_t^H(\alpha,\beta) = X_0^H(\alpha,\beta)\exp\left(\nu t + \sigma M_t^H(\alpha,\beta)\right).$$

où ν,σ sont deux constantes, α est une constante strictement positive, $\beta = 1$ et $M^H(\alpha,\beta)$ est un MBFM d'indice de Hurst H.

Définition 1.3.4. Un mouvement Brownien fractionnaire mixte de paramètres α,β et H est un processus $M^H = \{M_t^H(\alpha,\beta); t \geq 0\} = \{M_t^H; t \geq 0\}$, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ par

$$\forall t \geq 0; \quad M_t^H = M_t^H(\alpha,\beta) = \alpha B_t + \beta B_t^H;$$

où $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ est un MB et $B^H = \{B_t^H; t \in \mathbb{R}^+\}$ est un MBf de paramètre H indépendant de B.

Le lecteur intéressé pourra trouver un trés bon exposé sur le MBFM dans [59].

Lemme 1.3.1. *[59] Le MFBM $M^H = \{M_t^H(\alpha,\beta); t \geq 0\} = \{M_t^H; t \geq 0\}$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. *M^H est un processus gaussien centré ;*
2. *$\forall t \geq 0; \mathbb{E}(M_t^H)^2 = \alpha^2 t + \beta^2 t^{2H}$;*
3. *sa fonction de covariance est donnée par*

$$\mathsf{Cov}(M_t^H, M_s^H) = \alpha^2 t\wedge s + \left[\beta^2(t^2 + s^2 - |t-s|^{2H})\right]; \quad \forall s,t \in \mathbb{R}^+,$$

où $t\ \wedge s = \min(s,t)$;

4. *Les accroissements du MBFM sont stationnaires.*
5. *Autosimilarité mixte : pour tout $a > 0, t \geq 0$, $M_{at}^H(\alpha,\beta) \overset{\mathcal{L}}{=} M_t^H(\alpha a^{1/2}, \beta a)$.*

Les deux sections suivantes sont basées essentiellement sur le livre [22, chapitre3] et [38].

Dans tout ce qui suit Φ est une N-fonction vérifiant la condition (**Q**).

1.4 L'espace des variables aléatoires Φ-sous-gaussiennes

Définition 1.4.1. On dit que la variable aléatoire X est Φ-sous-gaussienne si $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe une constante $a \geq 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq e^{\Phi(\lambda a)}. \tag{1.1}$$

On note par la suite $Sub_\Phi(\Omega)$ l'espace des variables Φ-sous-gaussiennes.

On notera $\tau_\Phi(X)$ le plus petit réel $a \geq 0$ satisfaisant l'inégalité (1.1) et on l'appelle le standard ou l'écart de Gauss de X, c'est–à–dire

$$\tau_\Phi(X) = \inf\left\{a \geq 0 : \mathbb{E}\exp(\lambda X) \leq \exp\left(\Phi(a\lambda)\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \tag{1.2}$$

Définition 1.4.2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. On dit que $(X_t)_{t\geq 0} \subset Sub_\Phi(\Omega)$ si pour tout $t \geq 0$, $X_t \in Sub_\Phi(\Omega)$.

Remarques 2. Si $\Phi(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, on pose $Sub_\Phi(\Omega) = Sub(\Omega)$ et on l'appelle l'espace des variables sous-gaussiennes.

Théorème 1.4.1. *L'application $t \to \tau_\Phi(t)$ est une norme sur l'espace $Sub_\Phi(\Omega)$ et $\left(Sub_\Phi(\Omega), \tau_\Phi(\cdot)\right)$ est un espace de Banach.*

Exemples 1.4.1. Comme exemples des variables Φ-sous-gaussiennes, on peut citer :

1. Soient $\sigma > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,alors :

$$\mathbb{E}\{\exp(tX)\} = \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

   ainsi $X \in Sub(\Omega)$, où $\Phi(t) = t^2/2$ et $\tau_\Phi(X) = \sigma$.

2. Soit X une v.a.r centrée et bornée par $M > 0$, alors $X \in Sub_\Phi(\Omega)$ pour tout N-fonction Φ et $\tau_\Phi(X) \leq M$.

3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ et posons $Y = X - a$; alors

$$\mathbb{E}\exp(\lambda Y) = \exp\left(a(e^\lambda - \lambda - 1)\right) = \exp\left(\Phi(\lambda a)\right);$$

   ceci implique que $Y \in Sub_\Phi(\Omega)$, où $\Phi(t) = a(e^t - t - 1)$ et $\tau_\Phi(Y) = 1$.

Remarque 4. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une suite de variables aléatoires Φ-sous-gaussiennes, alors ses accroissement sont Φ-sous-gaussiens car l'espace $Sub_\Phi(\Omega)$ est un espace de Banach. Inversement, on peut trouver une suite $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires à accroissement Φ-sous-gaussiens mais la suite des v.a.r $(X_t)_{t\geq 0}$ n'est pas Φ-sous-gaussienne, en effet
Soient $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires Φ-sous-gaussiennes et ξ

une variable indépendante de X telle que $\mathbb{E}\xi^2 = +\infty$. Posons $X_t = Y_t + \xi$ pour $t \geq 0$. Alors le processus Y est à accroissement Φ-sous-gaussiens bien qu'il ne soit pas dans l'espace $Sub_\Phi(\Omega)$.

1.5 Espaces d'Orlicz de type exponentiel

Cette partie est consacrée à l'étude du lien entre l'espace des variables $\Phi-$sous-gaussiennes et l'espace d'Orlicz de type exponentiel.

Définition 1.5.1. Soit Φ une N-fonction. L'espace engendré par la N-fonction

$$U(x) = \mathrm{e}^{\Phi(x)} - 1; \qquad x \in \mathbb{R}$$

s'appelle un espace d'Orlicz de type exponentiel. On le note par $Exp_\Phi(\Omega)$, alors

$$Exp_\Phi(\Omega) = \Big\{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/\exists\alpha > 0 : \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\Phi(\alpha|X|)} - 1\right) < +\infty\Big\}.$$

On le munit de la norme $||.||_{E_\Phi}$ telle que

$$||X||_{E_\Phi} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\Phi\left(\frac{|X|}{\alpha}\right)}\right) \leq 2\Big\}.$$

On note aussi

$$Exp^0_\Phi(\Omega) = \Big\{X \in Exp_\Phi(\Omega) : \mathbb{E}(X) = 0\Big\}.$$

On s'interesse aux espaces d'Orlicz $Exp^0_{\Phi^*}(\Omega)$ muni de la norme de Luxemburg

$$||X||_{E^0_{\Phi^*}} = \inf\left\{\alpha > 0 : \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\Phi^*\left(\frac{|X|}{\alpha}\right)}\right) \leq 2\right\};$$

où Φ^* est la fonction conjugée de Φ.

Théorème 1.5.1. *L'espace $Exp_{\Phi^*}(\Omega)$ muni de la norme de Luxemburg $||.||_{E_{\Phi^*}}$ est un espace de Banach .*

On a le théorème suivant :

Théorème 1.5.2. *Soit X une variable aléatoire, alors $X \in Sub_\Phi(\Omega)$ si et seulment si $X \in Exp^0_{\Phi^*}(\Omega)$ et les deux normes $\tau_\Phi(X)$ et $||X||_{E_{\Phi^*}}$ sont équivalentes i.e*

$$C_\Phi \tau_\Phi(X) \leq ||X||_{E_{\Phi^*}} \leq 3\tau_\Phi(X);$$

où C_Φ une canstante qui ne dépend que de Φ.

1.6 Le critère d'entropie métrique de Dudley

Le concept d'entropie métrique a été introduit dans les années 1930 par Kolmogorov afin de classer les espaces métriques compacts selon leurs masses. Nous commençons par définir la notion pseudométrique qui généralise la notion "distance".

Définition 1.6.1. Une pseudométrique sur un ensemble F est une application $d : F \times F \longmapsto \mathbb{R}^+$, telle que pour tous $x, y, z \in F$

1. $\mathsf{d}(x, x) = 0$.
2. $\mathsf{d}(x, y) = \mathsf{d}(y, x)$ (la symétrie).
3. $\mathsf{d}(x, z) \leq \mathsf{d}(x, y) + \mathsf{d}(y, z)$ (l'inégalité triangulaire).

L'espace (F, d) est dit espace pseudométrique.

Soient (F, d) un espace pseudométrique et $\epsilon > 0$.

Définitions 1.6.1. [49]

1. Soit $\mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon)$ le nombre minimal des boules ouvertes de rayon ϵ qui forment un recouvrement de F, ie

$$\mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \exists u_1, u_2, ..., u_n \in F : F \subset \cup_{1 \leq i \leq n} B(u_i, \epsilon)\}$$

   On peut prendre par convention $\mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) = +\infty$ s'il n'y a pas un nombre minimal fini de boules ouvertes et de rayon ϵ qui recouvrent F.

2. Posons

$$\mathsf{H}(F, \mathsf{d}, \epsilon) = \begin{cases} \ln \mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) & \text{si } \mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) = +\infty \end{cases}$$

Lemme 1.6.1. *[22, pages 88-89] Soient (F, d) un espace pseudométrique, alors on a les assertions suivantes :*

1. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon) \geq 1$, $\mathsf{H}(F, \mathsf{d}, \epsilon) \geq 0$. Dans le cas où $\epsilon \geq$ diam(F) alors $N(F, \mathsf{d}, \epsilon) = 1$ et $H(F, \mathsf{d}, \epsilon) = 0$.*
2. *Les deux fonctions $\epsilon \mapsto \mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon)$ et $\epsilon \mapsto \mathsf{H}(F, \mathsf{d}, \epsilon)$ sont continues à droite et décroissantes.*
3. *Si $\mathcal{C} \subset \bigcup_k \mathcal{C}_k \subset F$, alors*

$$\mathsf{N}(\mathcal{C}, \mathsf{d}, \epsilon) \leq \sum_k \mathsf{N}(\mathcal{C}_k, \mathsf{d}, \epsilon), \qquad \mathsf{H}(\mathcal{C}, \mathsf{d}, \epsilon) \leq \sum_k \mathsf{H}(\mathcal{C}_k, \mathsf{d}, \epsilon).$$

   pour tout $\epsilon > 0$

4. *Si* d *est une métrique, alors* F *contient un nombre fini de points si et seulement si*
$$\sup_{\epsilon>0} \mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon) < \infty, \quad ou \quad \sup_{\epsilon>0} \mathsf{H}(F,\mathsf{d},\epsilon) < \infty.$$

5. *Supposons qu'on a deux pseudométriques* d_1 *et* d_2 *définies sur* F *qui vérifient l'inégalité suivante*
$$\forall s,t \in F \qquad \mathsf{d}_1(s,t) \leq \mathsf{d}_2(s,t).$$
Alors
$$\mathsf{N}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \mathsf{N}(F,\mathsf{d}_2,\epsilon) \qquad et \qquad \mathsf{H}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \mathsf{H}(F,\mathsf{d}_2,\epsilon).$$

6. *Supposons que deux pseudométriques* d_1 *et* d_2 *définies sur* F, *et soit* $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bijective telle que*
$$\forall s,t \in F, \qquad \mathsf{d}_1(s,t) \leq f\Big(\mathsf{d}_2(s,t)\Big).$$
Alors
$$\mathsf{N}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \mathsf{N}\Big(F,\mathsf{d}_2,f^{-1}(\epsilon)\Big);$$
pour tout $\epsilon > 0$. *En particulier, si* $\mathsf{d}_1(s,t) = f(\mathsf{d}_2(s,t)), s,t \in F$, *alors*
$$\mathsf{N}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) = \mathsf{N}\Big(F,\mathsf{d}_2,f^{-1}(\epsilon)\Big)$$
pour tout $\epsilon > 0$.

7. *Supposons qu' on a trois pseudométriques* d_1, d_2 *et* d_3 *définies sur* F *qui vérifient la condition suivante*
$$\forall s,t \in F \qquad \mathsf{d}_1(s,t) \leq \mathsf{d}_2(s,t) + \mathsf{d}_3(s,t).$$
Alors
$$\mathsf{N}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \mathsf{N}(F,\mathsf{d}_2,\epsilon/4)\mathsf{N}(F,\mathsf{d}_3,\epsilon/4)$$
et
$$\mathsf{H}(F,\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \mathsf{H}(F,\mathsf{d}_2,\epsilon/4) + \mathsf{H}(F,\mathsf{d}_3,\epsilon/4)$$
pour tout $\epsilon > 0$.

Exemple 1.6.1. Supposons que $-\infty < a < b < +\infty, \mathsf{d}(s,t) = |s-t|, s,t \in [a,b]$.

Alors pour tout $0 < \epsilon < b - a$, on a

$$\mathsf{N}([a,b],\mathsf{d},\epsilon) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2\epsilon} & \text{si } \dfrac{b-a}{2\epsilon} \quad \text{est un entier,} \\ \left[\dfrac{b-a}{2\epsilon}\right] + 1 & \text{si } \dfrac{b-a}{2\epsilon} \quad \text{n'est pas un entier,} \end{cases}$$

où $[x]$ est la partie entière du nombre réel $x \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$\forall 0 < \epsilon < b - a, \qquad \frac{b-a}{2\epsilon} < \mathsf{N}([a,b],\mathsf{d},\epsilon) < \frac{b-a}{2\epsilon} + 1$$

et pour tout $0 < \epsilon < b - a$, on a

$$\mathsf{N}([a,b],\mathsf{d},\epsilon) \sim \frac{b-a}{2\epsilon} \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0.$$

De plus on a

$$\ln\left(\frac{b-a}{2\epsilon}\right) < \mathsf{H}([a,b],\mathsf{d},\epsilon) < \ln\left(\frac{b-a}{2\epsilon} + 1\right)$$

pour tout $\epsilon > 0$ et

$$\mathsf{H}([a,b],\mathsf{d},\epsilon) \sim |\ln \epsilon| \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0.$$

Exemple 1.6.2. Supposons que $\alpha \in (0,1); \mathsf{d}_1(s,t) = |s-t|^\alpha, s,t \in [a,b]$. Alors $\mathsf{N}([a,b],\mathsf{d}_1,\epsilon) = \mathsf{N}([a,b],\mathsf{d},\epsilon^{1/\alpha})$ pour tout $0 < \epsilon < b - a$, et par l'exemple 1.6.1, on a

$$\mathsf{N}([a,b],\mathsf{d}_1,\epsilon) \sim \frac{b-a}{2\epsilon}\epsilon^{-1/\alpha} \quad \text{et} \quad \mathsf{H}([a,b],\mathsf{d}_1,\epsilon) \sim \alpha^{-1/\alpha}|\ln \epsilon|$$

quand $\epsilon \to 0$.

Exemple 1.6.3. Supposons que $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, h_0 \in (0, \min\{1, b - a\})$, et soit $\mathsf{d}_1(s,t) = |s-t|^\alpha, s,t \in [a,b]$, une pseudométrique vérifiant les inégalités

$$c_1 \left|\ln|s-t|\right|^{-\alpha_1} \leq \mathsf{d}_1(s,t) \leq c_2 \left|\ln|s-t|\right|^{-\alpha_2}$$

pour $0 < |s-t| \leq h_0$. Alors par l'exemple 1.6.1, on obtient

$$\frac{b-a}{2\epsilon} \exp\left\{\left(\frac{c_1}{\epsilon}\right)^{1/\alpha_1}\right\} \leq \mathsf{N}([a,b],\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq \frac{b-a}{2\epsilon} \exp\left\{\left(\frac{c_2}{\epsilon}\right)^{1/\alpha_2}\right\} + 1,$$
$$\ln\frac{b-a}{2\epsilon} + \left(\frac{c_1}{\epsilon}\right)^{1/\alpha_1} \leq \mathsf{H}([a,b],\mathsf{d}_1,\epsilon) \leq 1 + \ln\frac{b-a}{2\epsilon} + \left(\frac{c_2}{\epsilon}\right)^{1/\alpha_2},$$

pour tout $\epsilon \in (0, h_0]$.

Théorème 1.6.1. *[31] Soit (F, d) un espace pseudométrique, Φ une N-fonction et soit $X = \{X_t, t \in F\}$ un processus stochastique satisfaisant la condition de Lipschitz suivante :*

$$\forall s, t \in F \qquad ||X_s - X_t||_\Phi \leq \mathsf{d}(s,t),$$

posons $D = diam(F, \mathsf{d}) = \sup_{s,t \in F} \mathsf{d}(s,t)$, si l'intégrale d'entropie

$$I(F, \mathsf{d}) = \int_0^{diam(F,\mathsf{d})} \Phi^{-1}\Big(\mathsf{N}(F, \mathsf{d}, \epsilon)\Big) d\epsilon$$

est convergente, alors :

$$\Big|\Big| \sup_{s,t \in F} |X_s - X_t| \Big|\Big|_\Phi \leq C_\Phi . I(F, \mathsf{d});$$

où C_Φ est une canstante qui dépend de Φ.

1.7 Processus à accroissements d-Φ-sous-gaussiens

Définition 1.7.1. [54] Soit (F, d) un espace pseudo-métrique. Un processus indexé par $T, X = \{X_t, t \in T\}$ centré est dit à accroissements d-Φ-sous-gaussiens si pour tout $s, t \in T$ et pour tout réel λ on a

$$\mathbb{E} \exp \lambda (X_t - X_s) \leq \exp \Phi\Big(\lambda \mathsf{d}(s,t)\Big). \tag{1.3}$$

Comme exemples des processus d-Φ-sous-gaussiens, on peut citer :

Exemple 1.7.1. Soit $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ un processus gaussien centré, alors sa fonction génératrice des moments est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} \exp \lambda (\mathcal{G}_t - \mathcal{G}_s) = \exp\left\{ \frac{\lambda^2}{2} \mathbb{E}(\mathcal{G}_t - \mathcal{G}_s)^2 \right\};$$

donc $\mathcal{G}$ est un processus d-sous-gaussien où $\mathsf{d}(s,t) = \sqrt{\mathbb{E}(\mathcal{G}_t - \mathcal{G}_s)^2}$.

Exemple 1.7.2. Soit $B = \{B_t, t \geq 0\}$ un MB standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$ sa filtration naturelle et $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ un processus adapté et continu tel que $\mathbb{P}(|\mathcal{H}_t| \leq C)$ pour tout $t \geq 0$, où $C > 0$. Posons

$$M_t = \int_0^t \mathcal{H}_u dB_u, \tag{1.4}$$

par la formule d'Îto, on conclut que le processus positif

$$\varepsilon^{\lambda}(M)=\left\{\exp\left\{\lambda M_t-\int_0^t \mathcal{H}_u^2 du\right\}, t\geq 0\right\},$$

est une martingale locale positive donc une surmartingale ; ainsi

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda M_t-\int_0^t \mathcal{H}_u^2 du\right\}/\mathcal{F}_s\right)\leq \exp\left\{\lambda M_s-\int_0^s \mathcal{H}_u^2 du\right\},$$

pour tout $0\leq s\leq t$;

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda(M_t-M_s)-\int_s^t \mathcal{H}_u^2 du\right\}/\mathcal{F}_s\right)\leq 1,$$

et puisque le processus $\mathcal{H}$ est borné, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda(M_t-M_s)\right\}\leq \exp\left\{C^2|t-s|\right\},$$

ainsi, $M=\{M_t,t\geq 0\}$ est un processus à acroissement d-sous-gaussien, avec $\mathsf{d}(s,t)=C\sqrt{|t-s|}$.

Exemple 1.7.3. Soit $B^H=(B_t^H)_{t\geq 0}$ un MBf standard centré d'indice de Hurst $H\in(0,1)$, alors

$$B_t^H-B_s^H\overset{\mathcal{L}}{=}B_{t-s}^H\overset{\mathcal{L}}{=}\mathcal{N}(0,|t-s|^{2H})$$

ceci implique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(B_t^H-B_s^H)}\right)&=\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda B_{t-s}^H}\right)\\&=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}|t-s|^{2H}}\\&=\mathrm{e}^{\Phi\left(\lambda\mathsf{d}_1(s,t)\right)}\end{aligned}$$

où : $\mathsf{d}_1(s,t)=|t-s|^H$ et $\Phi(x)=x^2/2$. Alors, le processus $B^H=\{B_t^H,t\geq 0\}$ est un processus à acroissement d_1-sous-gaussien.

Exemple 1.7.4. Soit $M^H=(M_t^H)_{t\geq 0}$ un MFBM de paramètres α,β et d'indice de Hurst $H\in(0,1)$, alors

$$M_t^H-M_s^H\overset{\mathcal{L}}{=}M_{t-s}^H\overset{\mathcal{L}}{=}\mathcal{N}\Big(0,\alpha^2|t-s|^2+\beta^2|t-s|^{2H}\Big).$$

Ainsi, $M^H=\{M_t^H,t\geq 0\}$ est un processus stochastique à accroissements **d**-sous-gaussien où

$$\mathsf{d}(s,t)=\sqrt{\alpha^2|t-s|^2+\beta^2|t-s|^{2H}}.$$

Un autre exemple des processus à accroissements d-Φ-sous-gaussien est les séries de Rademacher. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter Ledoux [54, p 322].

Définition 1.7.2. (Ledoux p 322) On dit que $(X_t)_{t\in T}$ est un processus de Rademacher, s'il existe une suite de fonction $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ définies sur T telles que

$$\forall t \in T \qquad X_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i(t);$$

converge presque sûrement, avec : $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ est une suite de Rademacher ; i.e pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = \mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1/2$.

Exemple 1.7.5. Ledoux et Talagrand [54, Lemma 4.3, p 93]
Soit $2 < q \leq +\infty$, $p = q/(q-1)$ et la N-fonction $\Phi(t) = t^p/p$. Alors il existe une constante positive B'_q qui vérifie

$$||X_t - X_s||_{E_{\Phi^*}} \leq B'_q \Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - f_i(s)|^p \Big]^{1/p} = \mathsf{d}'(s,t),$$

où $\Phi^*(t) = t^q/q$. Alors les accroissement de X sont d-Φ-sous-gaussiens avec

$$\mathsf{d}(s,t) = C\Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - f_i(s)|^p \Big]^{1/p}.$$

1.8 Fonctions à variations régulières

Les fonctions à variation régulière et à variation lente ont été introuites par Karamata [46].Ce concept est devenu de plus en plus important dans la probabilité. Pour plus d'informations, on peut consulter l'excellente référence de Bingham et al. [10].

Rappelons d'abord la définition.

Définition 1.8.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite à variation régulière à l'infini d'indice α et on note $h \in \mathcal{RV}(\alpha)$ si pour tout $x > 0$, nous avons

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\alpha. \tag{1.5}$$

Si $\alpha = 0$, alors h est une fonction à variation lente à l'infini et on note $h \in \mathcal{SV}$.

Exemples 1.8.1. Comme exemples des fonctions à variation régulière à l'infini, on peut citer les fonctions suivantes : $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto x^\alpha \log^+ \log^+ x$ et

$x \mapsto x^{\alpha} \dfrac{\log^{+} \log^{+} x}{\log^{+} x}$ (où $\log^{+} x = \max\Big(1, \log x).$)

La fonction logarithme $x \mapsto \ln x$, les itérations du logarithme $x \mapsto \ln \ln \ldots \ln x$ et la fonction $x \mapsto \exp\{(\ln x)^{\gamma}\}$ $(0 < \gamma < 1)$ sont des fonctions à variation lente à l'infini.

Définition 1.8.2. Une fonction mesurable $h :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}^{+} (a > 0)$ est dite à variation régulière à l'origine (à droite de l'origine) d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$, et on note $h \in \mathcal{RV}_0(\alpha)$, si :

$$\lim_{t \to 0^{+}} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0. \tag{1.6}$$

Si $\alpha = 0$, alors h est une fonction à variation lente à l'origine et on note $h \in \mathcal{SV}_0$.

Remarques 3.

1. Une fonction h est à variation régulière au voisinage de 0, si $h\,(1/t)$ est à variation régulière à l'infini.
2. De même, une fonction ℓ est à variation lente au voisinage de 0, si $\ell\,(1/t)$ est à variation lente à l'infini.

Le lemme suivant sera utile dans la preuve du Théorème 2.1.6.

Lemme 1.8.1. *Soit ℓ une fonction à variation lente à l'origine dans $(0, A]$. Soient a et b deux constantes positives, avec $0 < a < b$, alors*

$$\lim_{\substack{x \to 0, y \to 0 \\ a \leq y/x \leq b}} \frac{\ell(x)}{\ell(y)} = 1.$$

Théorème 1.8.1. *Soit $h :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{+} (a \geq 0)$ une fonction mesurable et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$h \in \mathcal{RV}(\alpha)$.*
2. *$\exists \ell \in \mathcal{SV}$ vérifiant :*
$$h(x) = x^{\alpha} \ell(x), \quad \forall x > a. \tag{1.7}$$
3. *Il existe une fonction positive g telle que :*
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = g(y), \quad \forall y > 0; \tag{1.8}$$
et dans ce cas $g(y) = y^{\alpha}$.

Lemme 1.8.2. *[40, Lemme A.7.3] Soit $\alpha > -1$*

1. *Si $h \in \mathcal{RV}(\alpha)$, alors $H(x) = \int_a^x h(y)dy \in \mathcal{RV}(\alpha + 1)$.*
2. *Si $\ell \in \mathcal{SV}$, alors $\sum_{j=1}^{n} j^{\alpha} \ell(j) \sim \dfrac{1}{\alpha + 1} n^{\alpha+1} \ell(n)$ quand $n \to +\infty$.*

Chapitre 2

Loi du logarithme itéré

Cette partie est consacrée à notre premier travail qui concerne la loi du logarithme itéré pour des processus d-Φ-sous-gaussiens obtenue en 2005 par Antonini et Castellucci. Notre contribution sera de remplacer l'hypothèse de martingale par une condition sur les nombres d'entropie. Notre résultat peut être appliqué à plusieurs exemples de processus stochastiques qui ne forment pas des martingales et pour lesquelles le résultat d'Antonini et Castellucci ne s'applique pas.

2.1 Introduction

La loi du logarithme itéré (LLI) est un théorème limite de la théorie des probabilités qui peut être considéré comme un résultat intermédiaire entre la loi des grands nombres (LGN) et le théorème central limite (TCL).

La première version du LLI classique (la plus simple où bien la version initiale) est dûe à Alexandre Khintchine en 1924 qui l'obtient pour des suites de variables de Bernoulli. Puis, en 1929, Andre Kolmogorov a démontré le résultat pour des variables aléatoires de loi normale. Ainsi, en 1941, Hartman et Wintner ont généralisé le résultat pour des variables aléatoires i. i. d.

Un autre résultat très important est celui de Finkelstein (1971), il consiste à prouver une LLI pour le processus empirique considéré comme un élément de l'espace de Banach. Aprés, en 1979, B. Heinkel a montré la relation entre le TCL et la LLI dans les espaces de Banach.

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de moyenne μ et variance σ^2. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La loi forte des grands nombres (LFGN) donne une convergence presque sûre de

$$\frac{S_n}{n} \quad \text{vers} \quad \mu;$$

Le TCL donne la convergence en loi de

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}} \quad \text{vers la loi normale} \quad \mathcal{N}(0,1);$$

La LLI classique donne un résultat intermédiaire entre ces deux limites. Il s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r i. i. d. possédant un moment d'ordre 2 fini. Notons μ leur esperance , σ leur écart type supposé non nul et posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Nous avons presque sûrement*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n - n\mu}{(2n\sigma^2 \log\log n)^{1/2}} = -1$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n - n\mu}{(2n\sigma^2 \log\log n)^{1/2}} = 1.$$

Remarque 5. Ce théorème signifie que presque sûrement pour tout $c \in]0,1[$, la suite des $S_n - n\mu$ sortira une infinité de fois par le bas et une infinité de fois par le haut du segment $[-c\sigma\sqrt{2n\log\log n}, +c\sigma\sqrt{2n\log\log n}]$ et qu'elle restera définitivement à partir d'un certain rang (aléatoire) dans

$$[-c'\sigma\sqrt{2n\log\log n}, +c'\sigma\sqrt{2n\log\log n}]$$

pour tout $c' > 1$.

Dans le cas des suites de v.a.r indépendantes (pas forcement identiquement distribuées), la LLI de Kolmogorov s'énnonce comme suit :

Théorème 2.1.2. *[54] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes tel que $\mathbb{E}X_i^2 < \infty, \forall i \geq 1$. Posons pour tout $n \geq 1, s_n = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2\right)^{1/2}$. Supposons que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est croissante vers l'infini et qu'il existe une suite $(\eta_i)_{i\geq 1}$ de réels positifs qui tend vers 0 tel que*

$$\forall i \geq 1 \qquad ||X_i||_\infty \leq \eta_i s_i/(\log\log s_i^2)^{1/2}.$$

Alors, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{(2s_n \log\log s_n^2)^{1/2}} = 1.$$

Il existe aussi la loi de logarithme itéré pour des processus stochastiques. Dans ce qui suit on donne quelques unes de ces lois.

Théorème 2.1.3. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB standard. La loi du logarithme itéré de Khintchine indique que*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{|B_t|}{(2t\sigma^2 \log\log t)^{1/2}} = 1 \quad \textit{presque sûrement.}$$

Un autre résultat dû à Berthuet [9] qui concerne la loi du logarithme itéré pour certaines intégrales stochastiques.

Théorème 2.1.4. *Etant donné un mouvement brownien $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0. On considère les processus définis par*

$$U_t = \int_0^t X_s dY_s \quad \textit{et} \quad V_t = \int_0^t Y_s dX_s.$$

Soit α, β des réels. Nous poserons

$$Z_t = \alpha X_t + \beta Y_t.$$

Alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|Z_t|}{t\log\log t} = \frac{|\alpha-\beta|}{\arccos(2\alpha\beta/\alpha^2+\beta^2)}, \quad \textit{presque sûrement.}$$

En 1984, Taqqu et Czado [73] ont prouvé une loi du logarithme itéré pour processus auto-similaires sous certaines contitions. Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons d'abord la définition de processus auto-similaires.

Un processus stochastique réels $\{X_t, t \geq 0\}$ est auto-similaire d'indice $H > 0$ si, pour tout $a > 0$, les distributions à une dimension finie de $\{X_{at}, t \geq 0\}$ sont les mêmes que ceux de $\{a^H X_t, t \geq 0\}$.

Théorème 2.1.5. *Soit $\epsilon > 0$ et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus auto-similaire d'indice $H > 0$ satisfaisant*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{1}{2}(1+\epsilon)\Big(\sup_{0\leq t\leq 1}|X_t|\Big)^2\right\} < +\infty.$$

Alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{t^H(2\log\log t)^{1/2}} \leq 1, \quad \textit{presque sûrement.}$$

2.1.1 La loi du logarithme itéré de Castellucci et Antonini

En 2005, Castellucci et Antonini [23] ont démontré une LLI pour des martingales à temps continu, Φ-sous-gaussiennes sachant que leurs écarts de Gauss sont à variation régulière à l'origine.

Pour tout ce qui suit, Φ est une N-fonction qui vérifie la condition ($\mathbf{Q}$).

Théorème 2.1.6. *Soit* $(M_t)_{t>0}$ *une martingale. Supposons qu'il existe un réel* $A > 0$ *et une fonction* h *positive sur* $(0, A)$ *et à variation régulière à l'origine tels que :*

$$\sup_{t\leq A} \mathbb{E}\left[e^{h(t)|M_t|}\right] = B < +\infty. \tag{2.1}$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{h(t)M_t}{\log\log(1/t)} \leq 1\right) = 1. \tag{2.2}$$

Pour la preuve du Théorème 2.1.6, la méthode suivie est basée essentiellement sur l'inégalité maximale de Doob pour des martingales dans un premier temps, puis, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, Antonini et Castellucci ont eu le résultat pour une sous-suite, aprés, ils ont utilisé le fait que la fonction h est à variation régulière à l'origine ce qui permet d'uliliser le Théorème 1.8.1, ainsi, le Lemme 1.8.1 donne le résultat cherché.

Un deuxième résultat dû à Castellucci et Antonini à propos de la loi du logarithme itéré pour des martingales Φ-sous-gaussiennes.

Théorème 2.1.7. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0} \subset Sub_\Phi(\Omega)$ *une martingale. Supposons que* Φ^* *la transformée de Young-fenchel de* Φ *est monotone et l'application* $t \longmapsto \tau_\Phi(t)$ *est à variation régulière à l'origine, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{M_t}{\tau_\Phi(t)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/t))} \leq 1\right) = 1.$$

2.2 Loi du logarithme itéré sous une condition d'entropie

Dans cette partie, on présente notre première contribution qui concerne la loi du logarithme itéré et qui sera soumise pour publication prochainement.

On s'interesse à LLI pour des processus stochastiques à accroissements d-Φ-sous-gaussiens. Nous posons des conditions similaires à celles mentionnées précedemment dans le papier de Antonini et Castellucci (2005) [23], en remplaçant la condition "martingale" par une condition d'entropie.

Proposition 2.2.1. *Soit U une N-fonction. Nous avons la majoration suivante :*

$$\begin{aligned} I(F,\mathsf{d}) &= \int_0^{diam(F,\mathsf{d})} U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)\Big)d\epsilon \\ &\le U^{-1}(1)\int_0^{diam(F,\mathsf{d})} \mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)d\epsilon. \end{aligned}$$

Preuve.

$$I(F,\mathsf{d}) = \int_0^{diam(F,\mathsf{d})} \frac{U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)\Big)}{\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)}\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)d\epsilon.$$

Soient $\epsilon_1 \le \epsilon_2$. On utilise la décroissance du nombre d'entopie. On a

$$\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_2) \le \mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_1).$$

En suite, on utilise le fait que la fonction $x \longmapsto \dfrac{U^{-1}(x)}{x}, x > 0$ soit décroissante (voir le Lemme 1.2.2), alors

$$\frac{U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_1)\Big)}{\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_1)} \le \frac{U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_2)\Big)}{\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon_2)};$$

ceci montre que pour tout $0 < \epsilon \le diam(F,\mathsf{d})$, on a

$$\begin{aligned} \frac{U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)\Big)}{\mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)} &\le \frac{U^{-1}\Big(\mathsf{N}(F,\mathsf{d},diam(F,\mathsf{d}))\Big)}{\mathsf{N}(F,\mathsf{d},diam(F,\mathsf{d}))} \\ &\le U^{-1}(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I(F,\mathsf{d}) \le U^{-1}(1)\int_0^{diam(F,\mathsf{d})} \mathsf{N}(F,\mathsf{d},\epsilon)d\epsilon.$$

Lemme 2.2.1. *Soit $(X_t)_{t\ge 0} \subset Sub_\Phi(\Omega)$. Supposons que Φ^* est la fonction conjuguée de Φ ; alors pour tout $\epsilon > 0$, $t \ge 0$, $c \ge ||X_t||_{E_{\Phi^*}}$ et $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X_t|}{c} \ge (1+\epsilon)\lambda\right) \le 2\exp\Big(-(1+\epsilon)\Phi^*(\lambda)\Big).$$

Démonstration du Lemme 2.2.1. Soit $\epsilon > 0$, $t \ge 0$, $c \ge ||X_t||_{E_{\Phi^*}}$ et $\lambda > 0$. En utilisant la bijectivité de la fonction Φ^*, $t \geq 0$ et la relation due au Lemme 1.2.1

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \Phi^*\Big((1+\epsilon)y\Big) \geq (1+\epsilon)\Phi^*(y);$$

par l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{|X_t|}{c} \geq (1+\epsilon)\lambda\right) &= \mathbb{P}\left(\Phi^*\left(\frac{|X_t|}{c}\right) \geq \Phi^*((1+\epsilon)\lambda)\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Phi^*\left(\frac{|X_t|}{c}\right) \geq (1+\epsilon)\Phi^*(\lambda)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\exp\left(\Phi^*\left(\frac{|X_t|}{c}\right)\right) \geq \exp\Big((1+\epsilon)\Phi^*(\lambda)\Big)\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\Phi^*\left(\frac{|X_t|}{c}\right)\right)\right)}{\exp\Big((1+\epsilon)\Phi^*(\lambda)\Big)} \\
&\leq 2\exp\Big(-(1+\epsilon)\Phi^*(\lambda)\Big).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

Maintenant, on passe au résultat principal obtenu pour des processus stochastiques à accroissement d-Φ-sous-gaussiens.

Comme nous avons défini précedemment dans le Théorème 1.6.1, $I(F, \mathsf{d})$ désigne l'intégrale d'entropie, où d est une pseudométrique et F est un ensemble non-vide.

Parsuite, soient $0 < \theta < 1$, fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Theta_n = (\theta^{n+1}, \theta^n)$. Considérons la condition

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \tag{2.3}$$

où d une pseudométrique et $I(\Theta_n, \mathsf{d})$ est l'intégrale d'entropie définie dans le Théorème 1.6.1 pour une telle N-fonction Φ.

Théorème 2.2.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à accroissement d-Φ-sous-gaussiens. Supposons que Φ^* est la fonction conjugue de Φ et l'application $t \longmapsto \tau_\Phi(t)$ est à variation régulière à l'origine. Supposons que la condition* (2.3) *est vérifiée pour une telle pseudométrique qui dépend de d, alors*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{3\tau_\Phi(t)(\Phi^*)^{-1}(\log\log(1/t))} \leq 1\right) = 1. \tag{2.4}$$

Pour la preuve de ce théorème, on fera appel à une méthode utilisée dans [11] et [12].

Démonstration du Théorème 2.2.1. La preuve se décompose en trois étapes :

$1^{ère}$ étape : *La sous suite* :
Soient $0 < t < 1$, $\epsilon > 0$ et $c \geq ||X_t||_{E_{\Phi^*}}$. En appliquant le Lemme 2.2.1 pour $\lambda = (\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{|X_t|}{c} \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big)\right)\\
&\leq 2\exp\Big(-(1+\epsilon)\log\log(1/t)\Big)\\
&= 2\left(-\log t\right)^{-(1+\epsilon)}.
\end{aligned}$$

Soient $0 < \theta < 1$, fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $t = \theta^n$, alors pour tout $\epsilon > 0$, $c \geq ||X_{\theta^n}||_{E_{\Phi^*}}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{|X_{\theta^n}|}{c} \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right)\\
&\leq 2n^{-(1+\epsilon)}(-\log\theta)^{-(1+\epsilon)};
\end{aligned}$$

donc la série

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\frac{|X_{\theta^n}|}{c} \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right)$$

est convergente et par le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{|X_{\theta^n}|}{c} \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right\}\right) = 0.$$

En passant par l'évènement complémentaire, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{|X_{\theta^n}|}{c} < (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{|X_{\theta^n}|}{c(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)} < 1+\epsilon\right) = 1;
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, presque sûrement, pour tout ω, il existe un certain rang $n_0 = n_0(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $c > ||X_{\theta^n}||_{E_{\phi^*}}$

$$|X_{\theta^n}| \leq c(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big).$$

En particulier, pour $c_0 = 3\tau_\Phi(M_{\theta^n})$, on aura, pour tout ω, l'existence d'un certain rang $n_0 = n_0(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq n_0$

$$|X_{\theta^n}| \leq 3\tau_\Phi(M_{\theta^n})(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big).$$

2ème étape : *Etude de l'oscillation :*
Posons

$$J_n = J_n(\theta) = \Big\|\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}|\Big\|_{E_{\Phi^*}}.$$

Supposons $\overline{c}_n \geq J_n$. On procède comme l'étape précédente :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{1}{\overline{c}_n}\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}| \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\exp\Phi^*\left(\frac{1}{\overline{c}_n}\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}|\right) \geq \Big(\log(\theta^{-n})\Big)^{1+\epsilon}\right)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left(\exp\Phi^*\left(\frac{1}{\overline{c}_n}\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}|\right)\right)}{(-\log\theta)^{1+\epsilon}n^{1+\epsilon}}\\
&\leq 2n^{-(1+\epsilon)}(-\log\theta)^{-(1+\epsilon)};
\end{aligned}$$

donc pour tout $\overline{c}_n \geq J_n$, en utilisant le lemme de Borel Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{\overline{c}_n}\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}| \geq (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right\}\right) = 0.$$

En passant par le complémentaire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{\overline{c}_n}\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}| < (1+\epsilon)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}|}{\overline{c}_n(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big)} < 1+\epsilon\right) = 1;
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, presque sûrement, pour tout ω, il existe un certain rang $n_0 = n_0(\omega)$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $\overline{c}_n \geq J_n$

$$\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}| \leq \overline{c}_n(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big);$$

en particulier, pour $\overline{c}_n = J_n$, on obtient :

$$\sup_{t\in\Theta_n}|X_t - X_{\theta^n}| \leq J_n(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big).$$

$3^{ème}$ étape : *La suite :*
$\exists T > 0, \forall 0 \leq t \leq T, \exists n_0 : \forall n \geq n_0$ tels que $t \in \Theta_n$

$$\begin{aligned}|X_t| &\leq |X_t - X_{\theta^n}| + |X_{\theta^n}| \\ &\leq \sup_{t\in\Theta_n} |X_t - X_{\theta^n}| + |X_{\theta^n}|;\end{aligned}$$

ceci implique, presque sûrement, pour tout ω, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}|X_t| &\leq J_n(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big) + 3\tau_\Phi(X_{\theta^n})(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big) \\ &= \Big(J_n + 3\tau_\Phi(X_{\theta^n})\Big)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/\theta^n)\Big) \\ &\leq \left(\frac{J_n}{3\tau_\Phi(X_t)} + \frac{3\tau_\Phi(X_t)}{3\tau_\Phi(X_{\theta^n})}\right) 3\tau_\Phi(X_t)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big);\end{aligned}$$

et comme τ_Φ est à variation régulière à l'origine, alors il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction ℓ à variation lente dans $(0, A)$ tels que :

$$\tau_\Phi(X_t) = t^\alpha \ell(t).$$

D'autre part

$$\theta^{n+1} \leq t \leq \theta^n \Longleftrightarrow \theta \leq \frac{t}{\theta^n} \leq 1; \tag{2.5}$$

d'où, par (2.5), on déduit

$$\begin{aligned}|X_t| &\leq \left(\frac{J_n}{3\tau_\Phi(X_t)} + \frac{\ell(t)}{\ell(\theta^n)}\left(\frac{t}{\theta^n}\right)^\alpha\right) 3\tau_\Phi(X_t)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big) \\ &\leq \left(\frac{J_n}{3\tau_\Phi(X_t)} + \frac{\ell(t)}{\ell(\theta^n)}(1 \vee \theta^\alpha)\right) 3\tau_\Phi(X_t)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big);\end{aligned}$$

on applique le Lemme 1.8.1, on obtient

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \theta\leq t/\theta^n\leq 1}} \frac{\ell(t)}{\ell(\theta^n)} = 1.$$

D'autre part $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissement d-Φ-sous-gaussiens qui vérifie la condition (2.3), alors d'aprés le Théorème 1.6.1

$$J_n \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Ainsi, presque sûrement, pour tout ω, il existe $T > 0$, tels que, pour tout $0 < t < T$, on a

$$|X_t| \leq (1 \vee \theta^\alpha) 3\tau_\Phi(X_t)(\Phi^*)^{-1}\Big(\log\log(1/t)\Big).$$

En faisant tendre θ vers 1, on obtient, presque sûrement

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{3\tau_\Phi(X_t)(\Phi^*)^{-1}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)} \leq 1;$$

d'où (2.4). Ceci termine la démonstration du Théorème 2.2.1.

□

2.2.1 Applications

Dans cette section, nous appliquerons notre résultat principal aux processus stochastiques à accroissements d-Φ-sous-gaussiens mentionnés dans la Section 1.7.

Exemple 2.2.1. Soit $B^H = (B^H_t)_{t\geq 0}$ un MBf standard et centré d'indice de Hurst $H \in (0,1)$, alors

$$B^H_t - B^H_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^H_{t-s} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, |t-s|^{2H});$$

ceci implique

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(B^H_t - B^H_s)}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda B^H_{t-s}}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}|t-s|^{2H}} \\
&= \mathrm{e}^{\Phi(\lambda \mathsf{d}_1(s,t))}
\end{aligned}$$

où : $\mathsf{d}_1(s,t) = |t-s|^H$ et $\Phi(x) = x^2/2$; Alors, le processus $B^H = \{B^H_t, t \geq 0\}$ est un processus à acroissement d_1-sous-gaussien et $\tau_\Phi(B_t) = t^H$ alors, par le Théorème 1.5.2,

$$\forall s,t \in \mathbb{R}^+ \qquad ||B^H_t - B^H_s||_{E_{\Phi^*}} \leq 3\tau_\Phi(B^H_t - B^H_s) \leq 3\mathsf{d}_1(s,t);$$

Posons

$$\mathsf{d}'(s,t) = 3\mathsf{d}_1(s,t);$$

alors

$$\forall s,t \in \mathbb{R}^+ \qquad ||B_t^H - B_s^H||_{E_{\Phi^*}} \leq \mathsf{d}'(s,t).$$

D'autre, les Exemples 2.2 et 2.6 mentionnés dans le livre [22, page 90] nous donnent

$$\mathsf{N}(\Theta_n, \mathsf{d}_1, \epsilon) \sim \frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}}.$$

Calculons l'intérale d'entropie

$$\begin{aligned}
I(\Theta_n, \mathsf{d}') &= \int_0^{diam(\Theta_n,\mathsf{d}')} (\Phi^*)^{-1}\Big(\ln\Big(\mathsf{N}(\Theta_n, \mathsf{d}', \epsilon) + 1\Big)\Big) d\epsilon \\
&= \int_0^{3|\theta^n - \theta^{n+1}|^H} \sqrt{\ln\Big(\mathsf{N}(\Theta_n, \mathsf{d}', \epsilon) + 1\Big)} d\epsilon \\
&\leq \int_0^{3|\theta^n - \theta^{n+1}|^H} \sqrt{\ln\left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2}.\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}} + 1\right)} d\epsilon;
\end{aligned}$$

posons

$$\alpha_n = \frac{1}{3}\left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2(\mathrm{e}-1)}\right)^{1/H}.$$

alors

$$\ln\left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2}.\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}} + 1\right) \geq 1 \iff \epsilon \leq \alpha_n.$$

Décomposons l'intégrale $I(\Theta_n, \mathsf{d}')$ selon α_n et utilisons la propriété :

$$\sqrt{x} \leq x \quad \text{est valable pour} \quad x \geq 1;$$

alors, on obtient

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}') \leq I_{n,1} + I_{n,2};$$

où

$$\begin{aligned}
I_{n,1} &= \int_0^{\alpha_n} \ln\left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2}.\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}} + 1\right) d\epsilon \\
&\leq \int_0^{\alpha_n} \ln\left(\theta^n - \theta^{n+1}.\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}}\right) d\epsilon \\
&= \int_0^{\alpha_n} \left[\ln\Big((\theta^n - \theta^{n+1}).3^{-1/H}\Big) - \frac{1}{H}\ln\epsilon\right] d\epsilon \\
&= \Big[\ln\Big(3^{-1/H}(\theta^n - \theta^{n+1})\Big)\Big].\alpha_n - \frac{1}{H}\Big[\epsilon\ln\epsilon - 1\Big]_0^{\alpha_n};
\end{aligned}$$

par suite

$$I_{n,1} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty;$$

et

$$\begin{aligned}
I_{n,2} &= \int_{\alpha_n}^{3|\theta^n-\theta^{n+1}|^H} \left[\frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2}.\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)^{\frac{1}{H}}+1\right] d\epsilon \\
&= \frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2\times 3^{1/H}}.\frac{H}{H-1}.(\theta^n-\theta^{n+1})^H\left(1-\frac{1}{2(\mathrm{e}-1)}\right)+3(\theta^n-\theta^{n+1})^H.
\end{aligned}$$

d'où

$$I_{n,2} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty;$$

ainsi

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}') \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty;$$

donc les hypothèse du Théorème 2.2.1 sont vérifiées avec $(\Phi^*)^{-1}(t) = \sqrt{2t}$ pour $t \geq 0$, d'où le résultat

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0}\frac{|B_t^H|}{3t^H(2\log\log(1/t))^{1/2}} \leq 1\right) = 1.$$

Exemple 2.2.2. Soit $M^H = \{M_t^H(\alpha,\beta); t \geq 0\} = \{M_t^H; t \geq 0\}$ un MFBM de paramètres α, β et H, alors

$$M_t^H - M_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} M_{t-s}^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \alpha^2|t-s| + \beta^2|t-s|^{2H})$$

ceci implique

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(M_t^H-M_s^H)}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda M_{t-s}^H}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\Phi(\lambda \mathsf{d}_{(\alpha,\beta)}(s,t))}
\end{aligned}$$

où : $\mathsf{d}_{(\alpha,\beta)}(s,t) = \sqrt{\alpha^2|t-s| + \beta^2|t-s|^{2H}}$ et $\Phi(x) = x^2/2$. Alors, le processus $B^H = \{M_t^H, t \geq 0\}$ est un processus à accroissement d-sous-gaussien et $\tau_\Phi(M_t^H) = \sqrt{\alpha^2 t + \beta^2 t^{2H}}$ alors, par le Théorème 1.5.2,

$$\forall s,t \in \mathbb{R}^+ \qquad ||M_t^H - M_s^H||_{E_{\Phi^*}} \leq 3\tau_\Phi(M_t^H - M_s^H) \leq 3\mathsf{d}_{(\alpha,\beta)}(s,t).$$

Posons

$$\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)}(s,t) = 3\mathsf{d}_{(\alpha,\beta)}(s,t);$$

alors
$$\forall s,t\in\mathbb{R}^+\qquad ||M_t^H-M_s^H||_{E_{\Phi^*}}\le \mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)}(s,t).$$
D'autre, on a
$$\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)}(s,t)\le \mathsf{d}_\alpha(s,t)+\mathsf{d}_\beta(s,t);$$
où $\mathsf{d}_\alpha(s,t)=3\alpha\sqrt{|t-s|}$ et $\mathsf{d}_\beta(s,t)=3\beta|t-s|^H$, et par le Lemme 1.6.1 (le point 8), on a
$$\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)},\epsilon\Big)\le \mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\alpha,\epsilon/4\Big)\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\beta,\epsilon/4\Big).$$
En appliquant encore une fois le Lemme 1.6.1 (le point 7), on obtient des estimations du nombre d'entropie comme suit :
$$\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\alpha,\epsilon/4\Big)\sim\frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2}\left(\frac{4\alpha}{3\epsilon}\right)^2$$
et
$$\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\beta,\epsilon/4\Big)\sim\frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2}\left(\frac{4\beta}{3\epsilon}\right)^{1/H}.$$
A présent, on calcule l'intégrale d'entropie
$$\begin{aligned}
I(\Theta_n,\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)}) &= \int_0^{diam(\Theta_n,\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)})}(\Phi^*)^{-1}\Big(\ln\Big(\mathsf{N}(\Theta_n,\mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)},\epsilon)+1\Big)\Big)d\epsilon\\
&\le \int_0^{D_n}\sqrt{\ln\Big(\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\alpha,\epsilon/4\Big)\mathsf{N}\Big(\Theta_n,\mathsf{d}_\beta,\epsilon/4\Big)+1\Big)}d\epsilon\\
&\simeq \int_0^{D_n}\sqrt{\ln\left(\left(\frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2}\right)^2\left(\frac{4\alpha}{3\epsilon}\right)^2\left(\frac{4\beta}{3\epsilon}\right)^{1/H}+1\right)}d\epsilon\\
&= \int_0^{D_n}\sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}+1\right)}d\epsilon;
\end{aligned}$$
où
$$C=\alpha^2\beta^2\left(\frac{\theta^n-\theta^{n+1}}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^{2+1/H}\qquad\text{et}\quad D_n=diam(\Theta_n,\mathsf{d}_\alpha)+diam(\Theta_n,\mathsf{d}_\beta).$$
Posons
$$\alpha_n=\left(\frac{C}{\mathrm{e}-1}\right)^{1/(2+1/H)}.$$
On distingue deux cas :

1^{er} cas : Si $\alpha_n \leq D_n$, on décompose l'intégrale d'entropie selon α_n, on obtient

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}'_{(\alpha,\beta)}) \leq I_{n,1} + I_{n,2};$$

où

$$I_{n,1} = \int_0^{\alpha_n} \sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right)} d\epsilon$$

et

$$I_{n,2} = \int_{\alpha_n}^{D_n} \sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right)} d\epsilon.$$

Concernant $I_{n,1}$, on utilise $\sqrt{x} \leq x$ pour $x \geq 1$, on obtient

$$\sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right)} \leq \ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
I_{n,1} &= \int_0^{\alpha_n} \sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right)} d\epsilon; \\
&\leq \int_0^{\alpha_n} \ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} + 1\right) d\epsilon; \\
&\leq \int_0^{\alpha_n} \ln\left(2C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}\right) d\epsilon; \\
&= \ln(2C) \int_0^{\alpha_n} d\epsilon - \left(2 + \frac{1}{H}\right) \int_0^{\alpha_n} \ln \epsilon d\epsilon; \\
&= \ln(2C)\alpha_n - \left(2 + \frac{1}{H}\right) \left[\int_0^{\alpha_n} \Big(\ln \epsilon + 1\Big) d\epsilon - \int_0^{\alpha_n} d\epsilon\right]; \\
&= \ln(2C)\alpha_n + \left(2 + \frac{1}{H}\right) \alpha_n - \left(2 + \frac{1}{H}\right) [\epsilon \ln \epsilon]_0^{\alpha_n}; \\
&= \ln(2C)\alpha_n + \left(2 + \frac{1}{H}\right) \alpha_n - \left(2 + \frac{1}{H}\right) \alpha_n \ln \alpha_n;
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $I_{n,1} \longrightarrow 0$.

En ce qui concerne $I_{n,2}$, on a

$$\begin{aligned}
I_{n,2} &= \int_{\alpha_n}^{D_n} \sqrt{\ln\left(C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}+1\right)} d\epsilon; \\
&\leq \int_{\alpha_n}^{D_n} \sqrt{C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}+1} d\epsilon; \\
&\leq \int_{\alpha_n}^{D_n} C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}+1 d\epsilon;
\end{aligned}$$

Pour la première inégalité, on a utilisé $\ln x \leq x$ et pour la deuxième, on a utilisé $\sqrt{x} \leq x$ pour $x \geq 1$. Et comme l'application $\epsilon \longrightarrow C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H}$ est décroissante sur l'intervalle $[\alpha_n, D_n]$, alors

$$C\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{2+1/H} \leq C\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2+1/H} = \mathrm{e} - 1;$$

d'où

$$I_{n,2} \leq \mathrm{e}(D_n - \alpha_n);$$

ce qui implique que $I_{n,2} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Ainsi, $I(\Theta_n, \mathsf{d}') \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

$2^{\text{ème}}$ cas : Si $\alpha_n \geq D_n$, alors $I(\Theta_n, \mathsf{d}') \leq I_{n,1} \longrightarrow 0$.

Les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont ainsi vérifiées avec $(\Phi^*)^{-1}(t) = \sqrt{2t}$ pour $t \geq 0$, d'où le résultat

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{|M_t^H|}{3\sqrt{\alpha^2 t + \beta^2 t^{2H}}(2\log\log(1/t))^{1/2}} \leq 1\right) = 1.$$

Exemple 2.2.3. (Rademacher processes) : Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus de Rademacher et p, q deux réels positifs conjugués i.e $1/p + 1/q = 1$ avec $2 < q \leq +\infty$. Comme nous avons mentionné précédemment dans l'exemple 1.7.5, les accroissements sont d-Φ-sous-gaussiens où $\Phi(t) = t^p/p$ et

$$\mathsf{d}(s,t) = C\Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - f_i(s)|^p\Big]^{1/p},$$

où C est une constante ; $\Phi^*(t) = t^q/q$ et

$$||X_t - X_s||_{E_{\Phi^*}} \leq B_p' \Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - f_i(s)|^p \Big]^{1/p} = \mathsf{d}'(s,t).$$

Soit β un réel positif tel que $\beta p > 1$. Supposons que les (f_i) sont β-Höldériennes telles que : $\exists C > 0$ telle que : $|f_i(t) - f_i(s)| \leq \frac{C}{i^\beta} |t-s|^\beta$; alors

$$\mathsf{d}'(s,t) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} |t-s|.$$

En combinant la propriété (6) du Lemme 1.6.1 et l'Exemple 1.6.2, on obtient

$$\mathsf{N}\Big(\Theta_n, \mathsf{d}', \epsilon\Big) \leq \mathsf{N}\left(\Theta_n, |.|, \epsilon/C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \right) \sim \frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta}.$$

Calculons l'intégrale d'entropie

$$\begin{aligned} I(\Theta_n, \mathsf{d}') &= \int_0^{diam(\Theta_n, \mathsf{d}')} (\Phi^*)^{-1} \Big(\ln \Big(\mathsf{N}(\Theta_n, \mathsf{d}', \epsilon) + 1 \Big) \Big) d\epsilon \\ &= \int_0^{diam(\Theta_n, \mathsf{d}')} \Big(\ln \Big(\mathsf{N}(\Theta_n, \mathsf{d}', \epsilon) + 1 \Big) \Big)^{1/q} d\epsilon \\ &= \int_0^{diam(\Theta_n, \mathsf{d}')} \left(\ln \Big(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} + 1 \Big) \right)^{1/q} d\epsilon; \end{aligned}$$

en utilisant la propriété :

$$\begin{aligned} x^{1/q} &\geq x; \text{si} \quad x \in [0,1] \\ x^{1/q} &\leq x; \text{si} \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

et en posant

$$\alpha_n = \frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2(\mathrm{e}-1)} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p}.$$

On aura

$$\ln \left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2\epsilon} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} + 1 \right) \geq 1 \Longleftrightarrow \epsilon \leq \alpha_n.$$

Décomposons l'intégrale d'entropie selon α_n ; on obtient

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}') \leq I_{n,1} + I_{n,2};$$

où

$$\begin{aligned}
I_{n,1} &= \int_0^{\alpha_n} \left[\ln \left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} + 1 \right) \right]^{1/q} d\epsilon \\
&\leq \int_0^{\alpha_n} \ln \left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} + 1 \right) d\epsilon \\
&\leq \int_0^{\alpha_n} \ln \left((\theta^n - \theta^{n+1}) C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} \right) d\epsilon \\
&= \ln \left((\theta^n - \theta^{n+1}) C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \right) \int_0^{\alpha_n} d\epsilon + \frac{1}{\beta} \int_0^{\alpha_n} \ln \epsilon d\epsilon \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{n,2} &= \int_{\alpha_n}^{diam(\Theta_n, \mathsf{d}')} \left[\ln \left(\frac{\theta^n - \theta^{n+1}}{2} C \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\beta p}} \right)^{1/p} \epsilon^{-1/\beta} + 1 \right) \right]^{1/q} d\epsilon \\
&\leq \int_{\alpha_n}^{diam(\Theta_n, \mathsf{d}')} 1 d\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I(\Theta_n, \mathsf{d}') \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont vérifiées avec $(\Phi^*)^{-1}(t) = (qt)^{1/q}$ pour $t \geq 0$, d'où

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \to 0} \frac{|X_t|}{B'_p (\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^p)^{1/p} (q \log \log(1/t))^{1/q}} \leq 1 \right) = 1.$$

Chapitre 3

Quelques notions d'indépendance

Bien que la notion d'indépendance soit très importante en théorie des probabilités et en statistique, elle est souvent difficile à vérifier. Pour cette raison plusieurs notions de dépendance ont été définies. Dans ce chapitre, on rappelle quelques-unes d'entre elles. Le point commun de ces concepts de dépendance est qu'ils vérifient une inégalité maximale de type Rosenthal qui sera notre outil de base pour démontrer une loi faible des grands nombres pour une classe de variables non intégrables. Pour les variables satisfaisant une inégalité de type Marcinkiewicz–Zygmund, nous donnerons aussi une condition nécessaire pour la validité de la loi faible des grands nombres.

Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r) définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dans ce chapitre, on s'interesse aux suites des variables aléatoires vérifiant les assertions suivantes :

- (**P1**) Il existe un réel positif $p \geq 2$ et une constante positive $C_p = C_p(\mathcal{X})$ tels que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i)\right|^p\right) \leq C_p\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|f_i(X_i)|^2\right)^{p/2} + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|f_i(X_i)|^p\right\},$$

  où $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont des fonctions toutes croissantes (resp.toutes décroissantes) avec $\mathbb{E}|f_i(X_i)|^p < \infty$ et $\mathbb{E}f_i(X_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

- (**P2**) Il existe une constante positive $\Lambda = \Lambda(\mathcal{X})$ telle que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \leq \Lambda \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var} f_i(X_i),$$

  où $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont des fonctions croissantes (resp.toutes décroissantes) avec $\mathbb{E}|f_i(X_i)|^2 < \infty$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Remarque 6. La propriété (**P1**) est de type inégalité maximale de Rosenthal et la propriété (**P2**) est de type inégalité de Marcinkiewicz–Zygmund. Les deux inégalités sont des outils de base pour prouver des théorèmes limites en probabilité, voir [40, Chap. III]. Dans ce chapitre, on s'interesse aux suites de v.a.r vérifiant la propriété (**P1**) (resp. (**P2**)) pour certaines fonctions monotones, en particulier pour $f_i(x_i) = x_i, 1 \leq 1 \leq i \leq n$.

Remarque 7. Il est clair que si la propriété (**P1**) est vérifiée pour $p = 2$, alors (**P2**) est aussi vérifiée avec $\Lambda = C_2$.

Désormais, on présente une liste des suites centrées de v.a.r vérifiant (**P1**) pour tout $p \geq 2$.

3.1 Associations négatives

La notion de variables aléatoires négativement associées (en anglais : negatively associated (NA)) a été introduite en 1983 par Alam et Saxena [3] , plus tard a été étudiée par Joag-Dev et Proschan [45].

Définition 3.1.1. Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de v.a.r, ces variables sont dites négativement associées , si pour tous sous-ensembles disjoints $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ de $\{1, 2, ..., n\}$ et pour toutes fonctions croissantes (ou décroissantes) par coordonnée f et g, on a

$$\mathsf{Cov}\Big\{f(X_i, i \in \mathbf{S}), g(X_j, j \in \mathbf{T})\Big\} \leq 0.$$

Une suite infinie $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est dite NA, si pour toute sous suite finie l'est.

Alam et Saxena [3] a donné deux exemples des suites de v.a.r NA.

Exemple 3.1.1. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur gaussien centré avec $\mathsf{Cov}(X_i, X_i) = 1$ et $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = -\varrho$ pour $i \neq j$ avec $0 < \varrho < (n-1)^{-1}$. Alors, $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r négativement associées.

Et le deuxième exemple est donné par :

Exemple 3.1.2. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur de loi de Dirichlet de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > 0$. Alors les v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r négativement associées.

Par Joag-Dev et Proschan [45], nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r NA. Si $\{f_n, n \geq 1\}$ est une suite de fonctions toutes croissantes ou toutes décroissantes, alors $\{f_n(X_n), n \geq 1\}$ est aussi une suite de v.a.r NA.*

Le lemme suivant est dû à Shao [68].

Lemme 3.1.2. *Soient $p \geq 1$ et $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r NA telles que pour tout $1 \leq i \leq n, \mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{E}(|X_i|^p) < \infty$. Alors*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq 2^{3-p} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}|X_j|^p \quad \textit{pour tout} \quad 1 < p \leq 2$$

et

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq 2 \left(\frac{15p}{\ln p} \right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p + \left(\mathbb{E}X_i^2 \right)^{P/2} \right) \quad \textit{pour} \quad p > 2.$$

3.2 Suites asymptotiquement presque négativement associées

Le concept des variables aléatoires asymptotiquement presque négativement associées (en anglais Asymptotically almost negatively associated (AANA)) a été introduit par Chandra et Ghosal [24], de nombreuses applications ont été trouvées. Par exemple, Chandra et Ghosal [24] ont dérivé l'ingalité de type Kolmogorov et la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz Zygmund, Chandra et Ghosal [25] ont obtenu la convergence presque sûre des moyennes pondérées, Ko et al [48] ont étudié l'inégalité de type Hájek-Rényi, Wang et al [76] ont établi la loi du logarithme itéré pour les sommes de produits. Récemment, Yuan et An [83] ont établi certaines inégalités de type Rosenthal pour les sommes partielles maximales des suites de v.a.r AANA.

Définition 3.2.1. Soit $\tilde{q} = \{q(n), n \geq 1\}$ une suite de réels positifs tels que $q(n) \to 0$ quand n tend vers l'infini. Une suite $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est dite asymptotiquement presque négativement associées (AANA) avec $\tilde{q}$ la suite de coefficients de mélange si

$$\mathsf{Cov}\Big(f(X_n), g(X_{n+1}, ..., X_{n+k})\Big) \leq q(n)\Big[\mathsf{Var}(f(X_n))\mathsf{Var}(g(X_{n+1}, ..., X_{n+k}))\Big]^{1/2},$$

pour tous $k, n \geq 1$ et pour toutes fonctions croissantes par coordonnée f et g tels que le côté à droite de l'inégalité ci-dessus est fini.

Il est facile de voir qu'une suite de v.a.r NA est une suite de v.a.r AANA avec $q(n) = 0, n \geq 1$ et à fortiori une suite de v.a.r indépendantes. Chandra et Ghosal [24] ont construit un exemple des v.a.r AANA qui n'est pas NA.

Exemple 3.2.1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et on pose $Y_n = (X_n + a_n X_{n+1})/(1+a_n^2)^{1/2}$. Alors $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite AANA qui ne sont pas NA.

Lemme 3.2.1. *[83, Lemma 2.1]. Soient $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite AANA de v.a.r avec coefficient de mélange $\tilde{q} = \{q_n, n \geq 1\}$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions toutes croissantes ou bien toutes décroissantes, alors la suite $\{f_n(X_n), n \geq 1\}$ est aussi une suite de AANA avec coefficient de mélange $\tilde{q}$.*

Théorème 3.2.1. *[83] Soient $p > 1$ et $\mathcal{X} = \{X_n; n \geq 1\}$ une suite de v.a.r AANA et centrée avec coefficient de mélange $\tilde{q} = \{q_n, n \geq 1\}$, alors il existe une canstante positive C_p telle que*

$$\mathbb{E} \max_{1\leq j\leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_i \right|^p \leq C_p \left[\sum_{j=1}^{n} |X_j|^p + \left(\sum_{j=1}^{n-1} q^{2/p}(j) ||X_j||_p \right)^p \right]$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 < p \leq 2$, et telle que

$$\mathbb{E} \max_{1\leq j\leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_i \right|^p$$
$$\leq C_p \left[\sum_{j=1}^{n} |X_j|^p + \left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \right)^{P/2} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} q^{2/p}(j) ||X_j||_p \right)^p + \left(\sum_{j=1}^{n-1} q^{1/2^{k-1}-2/p}(j) ||X_j||_p \right)^p \right]$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout $2^k < p \leq 2^{k+1}$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, si $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty$, alors

$$\mathbb{E} \max_{1\leq j\leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_i \right|^p \leq C_p \sum_{j=1}^{n} |X_j|^p$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 < p \leq 2$, et si $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{q/p} < \infty$, alors

$$\mathbb{E} \max_{1\leq j\leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq C_p \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p + \left(\mathbb{E} X_i^2 \right)^{P/2} \right).$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout $3.2^{k-1} < p \leq 4.2^{k-2}$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

3.3 Suites m-Négativement associées

La notion des v.a.r m-NA est une extension naturelle des variables aléatoires NA.

Définition 3.3.1. Soit $m \geq 1$. Une suite de variables aléatoires réelles $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est dite négativement associée (en anglais : m-negatively associated (m-NA)) si pour tous $n \geq 2$ et $i_1, i_2, ..., i_n$ tels que $|i_k - i_j| \geq m$ pour tout $1 \leq j \neq k \leq n$, $\{X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}\}$ est une famille NA.

En fait, une suite NA n'est que la suite 1-NA. En outre, Hu et al. [42] ont montré qu'il existe une suite qui n'est pas NA mais elle est 2-NA.

Exemple 3.3.1. Soit $(r_i)_{i\geq 0}$ une suite décroissante de nombres positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice D_n définie positive de la façon suivante :

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & -r_2 & ... & -r_{n-2} & -r_{n-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & ... & -r_{n-3} & -r_{n-2} \\ -r_2 & r_1 & 1 & ... & -r_{n-4} & -r_{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -r_{n-2} & -r_{n-3} & -r_{n-4} & ... & 1 & r_1 \\ -r_{n-1} & -r_{n-2} & -r_{n-3} & ... & r_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien centré de matrice et de covariance D_n. Alors la suite $X_1, X_2, ..., X_n$ n'est pas NA mais elle 2–NA.

Théorème 3.3.1. *[69] Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite centrée de v.a.r m-NA telle que $\mathbb{E}|X_i|^p < \infty$ pour tout $1 < p \leq 2$. Alors*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E} \max_{1\leq j\leq n} \left|\sum_{i=1}^{j} X_j\right|^p \leq m^{p-1} 2^{3-p} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}|X_j|^p \quad \textit{pour tout} \quad 1 < p \leq 2.$$

3.4 Variables négativement superadditivement-dépendantes

Le concept des variables aléatoires négativement superadditivement-dépendantes (en englais : negatively superadditive-dependent random variables (NSD)) a été introduit par Hu [41], qui était basé sur la classe des fonctions superadditives. Hu [41] a donné un exemple illustrant que NSD n'implique pas NA, et il a posé un problème quant à savoir si NA implique NSD. En outre, Hu [41] a fourni certaines propriétés et trois théorèmes structurels de NSD. Christofides et Vaggelatou [30] ont résolu la question de Hu en montrant que NA implique NSD. La notion des variables NSD est une extension de celle de v.a NA, parfois elle est plus utile.

Rappelons d'abord le concept de fonctions superadditives dû à Kemperman [47] .

Définition 3.4.1. Une fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite superadditive si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(x \vee y) + \Phi(x \wedge y) \geq \Phi(x) + \Phi(y);$$

où $\vee$ est le maximum et $\wedge$ est le minimum.

En se basant sur les fonctions superadditives, Hu [41] a introduit l'idée de v.a.r N.S.D.

Définition 3.4.2. Un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est dit NSD si

$$\mathbb{E}\Phi(X_1, X_2, ..., X_n) \leq \mathbb{E}\Phi(X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*) \tag{3.1}$$

où $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$ sont des v.a.r independentes, X_i^* et X_i ont la même distribution pour tout i et Φ est une fonction superadditive telle que l'espérence dans l'equation (3.1) existe. Une suite de v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est dite NSD si pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est NSD.

Lemme 3.4.1. *[41] Si le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est NSD et $f_1, f_2, ..., f_n$ sont des fonctions croissantes, alors le vecteur $(f_1(X_1), f_2(X_2), ..., f_n(X_n))$ est NSD.*

Théorème 3.4.1. *[79] Soit $p > 1$ et $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de v.a.r NSD avec $\mathbb{E}X_i = 0$ et $\mathbb{E}|X_i|^p < \infty$ pour tout $i \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq 2^{3-p} \sum_{i=1}^{n} |X_i|^p \quad pour \quad 1 < p \leq 2$$

et

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq 2 \left(\frac{15p}{\ln p} \right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p + \left(\mathbb{E}X_i^2 \right)^{P/2} \right) \quad pour \quad p > 2.$$

On s'intéresse à présent aux différentes notions de mélange, trés utilisées en probabilités et en statistique.

3.5 Suites $\tilde{\rho}$-mélangeantes

Pour un ensemble de nombres entiers $\mathbf{S}$, notons la σ-algèbre $\mathcal{F}_{\mathbf{S}} = \sigma(X_i, i \in \mathbf{S} \subset \mathbb{N})$. Pour une σ-algèbre $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$, on note $L_2(\mathcal{F}_{\mathbf{S}})$ la classe des v.a.r $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$-mesurables de moments d'ordre deux fini.

Soient $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{F}_{\mathbf{T}}$ deux σ-algèbre, posons

$$\rho(\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y|}{(Var(X)Var(Y))^{1/2}}, X \in L_2(\mathcal{F}_{\mathbf{S}}), Y \in L_2(\mathcal{F}_{\mathbf{T}})\right\}$$

Bradley [17] a introduit le coefficient de dépendence suivant :

$$\tilde{\rho}(k) = \sup\left\{\rho(\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{F}_{\mathbf{T}})\right\},$$

où ce sup est pris sur tous les ensembles non vides $\mathbf{S}, \mathbf{T} \subset \mathbb{N}$ tels que $dist(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \min_{s\in\mathbf{S}, t\in\mathbf{T}} |s - t| \geq k, k \geq 1$. Il est clair que $0 \leq \tilde{\rho}(k+1) \leq \tilde{\rho}(k) \leq \tilde{\rho}(0) = 1$.

Définition 3.5.1. Une suite de v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n; n \geq 1\}$ est dite $\tilde{\rho}$-mélangeante, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{\rho}(k) < 1$.

Le concept des suites $\tilde{\rho}$-mélangeantes remonte au moins à 1972 (voir [70, page 398]). De nombreux auteurs ont étudié ce concept et fourni des résultats et des applications intéressants. Par exemple, Bradley [17] a étudié les propriétés des v.a.r $\tilde{\rho}$-mélangeante et a obtenu le théorème limite centrale pour ces variables.

Peligrad et Gut [65], Gan [36], Kuczmaszewska [52], An et Yuan [4], Sung [71], Wang et al. [79] et Sung [72] ont étudié la convergence presque sûre et la convergence complète, Budsaba et al. [20, 21] pour le comportement asymptotique des moyennes mobiles des processus basés sur des suites de v.a.r $\tilde{\rho}$-mélangeante.

La notion de suite $\tilde{\rho}$-mélangeante semble être similaire à la notion de ρ-mélangeante, Bryc et Smolenski (1993) [19] ont montré qu'ils sont différentes. Nous référons à [18] pour plus de détails.

Théorème 3.5.1. *[74, Theorem 2.1]. Soient $n_0 \geq 1, p \geq 2$ et $0 \leq r < 1$. Supposons que $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 0\}$ est une suite de v.a.r $\tilde{\rho}$-mélangeante, avec $\tilde{\rho}(n_0) \leq r$, $\mathbb{E}X_i = 0$ et $\mathbb{E}|X_i|^p < \infty$ pour tout $i \geq 1$. Alors il existe une canstante positive $C = C(p, n_0, r)$ telle que*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}\max_{1\leq j\leq n}\left|\sum_{i=1}^{j} X_j\right|^p \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p + \left(\mathbb{E}X_i^2\right)^{P/2}\right).$$

Pour tout σ-algèbre $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}$, on définit les mesures de dépendence suivantes :

1. $\Phi(\mathcal{F}_{\mathbf{S}},\mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = \sup\left\{\left|\mathbb{P}(\mathcal{B}) - \frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{\mathbb{P}(\mathcal{A})}\right|, \mathcal{A}\in\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{B}\in\mathcal{F}_{\mathbf{T}}, \mathbb{P}(\mathcal{A})\neq 0\right\}$
2. $\Psi(\mathcal{F}_{\mathbf{S}},\mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = \sup\left\{\left|1 - \frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{\mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(B)}\right|, \mathcal{A}\in\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{B}\in\mathcal{F}_{\mathbf{T}}, \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{B})\neq 0\right\}$
3. $\Psi^*(\mathcal{F}_{\mathbf{S}},\mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = \sup\left\{\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{\mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(B)}, \mathcal{A}\in\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{B}\in\mathcal{F}_{\mathbf{T}}, \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{B})\neq 0\right\}$
4. $\Psi'(\mathcal{F}_{\mathbf{S}},\mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = \inf\left\{\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{\mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(B)}, \mathcal{A}\in\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{B}\in\mathcal{F}_{\mathbf{T}}, \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{B})\neq 0\right\}$

Pour tout $n \geq 1$, en particulier pour le coefficient de mélange $\tilde{\rho}(n)$ définit sur les $\sigma-$algèbres $\mathcal{F}_0^j$ et $\mathcal{F}_{j+n}^{\infty}$, pour $j \geq 1$. On définit les coefficients de dépendence suivants :

$$\Phi(n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \Phi(\mathcal{F}_0^j, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

$$\Psi(n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \Psi(\mathcal{F}_0^j, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

$$\Psi^*(n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \Psi^*(\mathcal{F}_0^j, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

$$\Psi'(n) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \Psi'(\mathcal{F}_0^j, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

$$\tilde{\rho}(n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \rho(\mathcal{F}_0^j, \mathcal{F}_{j+n}^{\infty}).$$

Une suite $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ de v.a.r est dite

1. Φ-mélangeante si $\Phi(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.
2. Ψ-mélangeante si $\Psi(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. Ψ^*-mélangeante si $\Psi^*(n) \to 1$ quand $n \to \infty$.
4. Ψ'-mélangeante si $\Psi'(n) \to 1$ quand $n \to \infty$.
5. $\tilde{\rho}$-mélangeante si $\tilde{\rho}(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Le papier de Bradley 2005 [18] indique que la classe des v.a.r $\tilde{\rho}$-mélangeante contient les classes des v.a.r définies au dessus.

3.6 Suites ρ^--mélangeantes

On définit la quantité

$$\rho^-(\mathcal{F}_{\mathbf{S}},\mathcal{F}_{\mathbf{T}}) = 0 \vee \sup\left\{\frac{\mathsf{Cov}(f(X_i, i\in\mathbf{S}), g(X_j \in, \mathbf{T}))}{\sqrt{\mathsf{Var}\{f(X_i, i\in\mathbf{S})\}\mathsf{Var}\{g(X_j, j\in\mathbf{T})\}}}, f, g\in\mathcal{C}\right\};$$

où $\mathcal{C}$ est la classe des fonctions croissantes par coordonnée.

Définition 3.6.1. Une suite de v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n; n \geq 1\}$ est dite ρ^--mélangeante, si

$$\rho^-(k) = \sup\{\rho^-(\mathcal{F}_{\mathbf{S}}, \mathcal{F}_{\mathbf{T}}), \mathbf{S}, \mathbf{T} \subset \mathbb{N}\} \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to \infty,$$

où $dist(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \geq k, k \geq 0$.

Le concept des suites ρ^--mélangeantes a été proposé en 1999 (voir[84]). Il est clair que $\rho^-(k) < \tilde{\rho}(k)$.Il est facile de voir que l'ensemble des v.a.r NA est inclus dans l'ensemble des v.a.r ρ^--mélangeante (une v.a.r $\mathcal{X}$ est NA ssi $\rho^-(k) = 0$ pour $k \geq 1$) et sous la condition $\tilde{\rho}(k) \to 0 \quad$ quand $\quad k \to \infty$, l'ensemble des v.a.r $\tilde{\rho}$-mélangeante est inclus dans l'ensemble des v.a.r ρ^--mélangeante. Le papier de Zhang et Wang [84] contient un exemple d'une suite ρ^--mélangeante qui n'est ni NA ni $\tilde{\rho}$-mélangeante.

Exemple 3.6.1. [84] Soient $(\xi_n)_{n\geq1}, (\eta_n)_{n\geq1}$ et $(\zeta_n)_{n\geq1}$ trois suites indépendantes de v.a.r i.i.d de loi normale standard. Soient

$$X_n = \begin{cases} \xi_m & \text{pour} \quad n = 2m-1, \\ -\xi_m & \text{pour} \quad n = 2m, \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_n = \begin{cases} \eta_m & \text{pour} \quad n = 2^{2m-1}, \\ -\eta_m & \text{pour} \quad n = 2^{2m}, \\ \zeta_n & \text{sinon}, \end{cases}$$

et $Z_n = X_n^2 + Y_n$. Alors $\{X_n, n \geq 1\}$ et $\{Y_n, n \geq 1\}$ sont deux suites NA de v.a.r i.i.d de loi normale. De plus, $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite $\tilde{\rho}$-mélangeante avec $\tilde{\rho}(2) = 0$ et $\{Z_n, n \geq 1\}$ est une suite ρ^--mélangeante avec $\rho^-(2) = 0$ mais elle n'est ni NA ni $\tilde{\rho}$-mélangeante. En effet,

$$\mathsf{Cov}(Z_{2m-1}, Z_{2m}) = \mathsf{Cov}(X_{2m-1}^2, X_{2m}^2) = \mathbb{E}\xi_m^4 - (\mathbb{E}\xi_m^2)^2 = 2 > 0$$

et

$$\frac{\mathsf{Cov}\Big(Z_{2^{2m-1}}, Z_{2^{2m}}\Big)}{\mathsf{Var}\Big(Z_{2^{2m-1}}\Big)\mathsf{Var}\Big(Z_{2^{2m}}\Big)} = -\frac{1}{3} \nrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad dist(2^{2m-1}, 2^{2m}) = 2^{2m-1} \longrightarrow \infty.$$

Lemme 3.6.1. *[84] Soient $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r ρ^--mélangeante avec $\rho^-(k) \to 0$ et $(f_n)_{n\geq1}$ une suite de fonctions croissantes, alors $\{f_n(X_n), \geq 1\}$ est aussi une suite ρ^--mélangeante avec un coefficient inferieur ou égal à $\rho^-(k)$.*

Théorème 3.6.1. *[77] Pour des réels positifs $n_0 \geq 1$, $p \geq 2$ et $0 \leq r \leq (\frac{1}{6p})^{\frac{P}{2}}$, si $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de v.a.r ρ^--mélangeante avec $\rho^-(n_0) \leq r$,*

$\mathbb{E}X_i = 0$ *et* $E|X_i|^p < \infty$ *pour tout* $i \geq 1$, *alors il existe une canstante positive* $C = C(q, n_0, r)$ *telle que*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_j \right|^p \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p + \left(\mathbb{E}X_i^2 \right)^{P/2} \right).$$

Chapitre 4

Lois faibles des grands nombres pour des variables de moyennes infinies

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à notre seconde contribution qui concerne la loi faible des grands nombres pour une famille de variables aléatoires non intégrables. Les résultats de cette partie ont fait l'objet de la publication scientifique suivante :

Bernou. I, Boukhari. F. *Limit theorems for dependent random variables with infinite means.* Statistics and Probability Letters, **189** (2022) 109563.

Notre principale motivation était d'étudier ces lois des grands nombres dans un cadre unifié et d'établir des conditions nécessaires pour ces lois lorsque les variables sont dépendantes. Nos résultats généralisent et complètent les lois des grands nombres obtenues par Adler[2], Nakata [62] et Xu et al. [81].

Rappelons d'abord l'énnoncé de la loi forte des grands nombres sous la forme la plus simple.

Théorème 4.1.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, indépendantes et de même loi. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, alors $S_n/n \longrightarrow \mu, \mathbb{P}$-presque sûrement si et seulement si $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ et $\mathbb{E}X_1 = \mu$.*

Pour la preuve de ce dernier théorème, le lecteur intéressé pourra par exemple consulter l'excellente référence [40, p 271].

On observe que les hypothèses considérées ci-dessus sont fortes, c'est pour cette raison qu'il est cherché de les affaiblir, par exemple de trouver une loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires indépendantes, n'ayant pas nécessairement la même loi.

La proposition suivante sera un outil fondamental dans la suite. Pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur à la référence [40, page 267].

Proposition 4.1.1. *Supposons que $X, X_1, X_2, ...$ sont des v.a.r i. i. d et soit $r > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{E}|X|^r < \infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n^{1/r}\epsilon) < \infty$ *pour tout* $\epsilon > 0$;

(iii) $\frac{X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0$ *quand* $n \to \infty$.

Maintenant, on montre que l'intégrabilité des variables est une condition nécessaire pour avoir la loi forte des grands nombres, en effet :

Preuve. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geq 1$, alors, on a

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} . \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty;$$

ceci implique que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Et la Proposition 4.1.1 implique que $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Pareillement, il existe la loi faible des grands nombres, ce qui signifie la convergence en probabilité. Par suite, on énnonce un premier résultat :

Théorème 4.1.2. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r i. i. d. avec $\mathbb{E}X_1 = \mu < +\infty$. Alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Ce dernier théorème est une conséquence immédiate de la loi forte des grands nombres mentionnée auparavant, en supposant toujours l'intégrabilité des variables. Un autre résultat dû à Marcinkiewicz-Zygmund généralise le théorème précedent aux distributions avec un moment fini de n'importe quel ordre entre 0 et 2. Il s'énnonce comme suit :

Théorème 4.1.3. *Soit $0 < r < 2$. Supposons que $X, X_1, X_2, ...$ sont des v.a.r i. i. d., telles que $\mathbb{E}|X|^r < \infty$. Nous supposons également, sans restriction, que $\mathbb{E}X = 0$ quand $1 \leq r < 2$. Alors*

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Les hypothèses faites ci-dessus sont beaucoup plus fortes qu'il n'est nécessaire, et le Théorème 4.1.2 a été plusieurs fois renforcé en les affaiblissant.

Maintenant, on donne une autre généralisation du Théorème 4.1.2.

Théorème 4.1.4. *[40, page 274] Soit $\mathcal{X} = \{X, X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r indépendantes avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs croissante vers $+\infty$. Pour $n \geq 1$ et $k = 1, 2, ..., n$, posons*

$$Y_{n,k} = X_{k,n}\mathbb{1}\{|X_k| \leq b_n\}, \quad S'_n = \sum_{i=1}^{n} Y_{n,k} \quad \textit{et} \quad \mu_n = \mathbb{E}S'_n.$$

Si

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > b_n) \longrightarrow 0, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty \tag{4.1}$$

et

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{V}(Y_{k,n}) \longrightarrow 0, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty, \tag{4.2}$$

alors

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{4.3}$$

Si de plus

$$\frac{\mu_n}{b_n} \longrightarrow 0, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty,$$

alors

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{4.4}$$

Réciproquement, si Eq. (4.3) *est vérifiée, alors on a* (4.1) *et* (4.2).

Ce dernier Théorème montre une loi faible des grands nombres pour des variables n'ont pas nécessairement la même loi. Et par suite, on peut se demander si la condition d'intégrabilité est nécessaire pour cette loi de probabilité.

Exemple 4.1.1. Supposons que $X, X_1, X_2, ...$ sont des v.a.r i. i. d. de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^2 \log |x|} & \text{pour} \quad |x| > 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où C est une constante de normalization.

On montre que l'espérance est infinie, en effet

$$\int_{|x|>2} \frac{C|x|}{x^2 \log |x|} dx = 2C \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = +\infty.$$

D'autre part, pour $b_n = n$ dans le Théorème 4.1.4, on a

$$n\mathbb{P}(|X| > n) = 2n\int_2^{+\infty} \frac{C}{x^2 \log x}dx \sim n\frac{C}{n\log n} = \frac{C}{\log n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\mathbb{E}|X|^2\mathbb{1}\{|X| \le n\} &= \frac{2}{n}\int_2^n x^2\frac{C}{x^2\log x}dx = \frac{2C}{n}\int_2^n \frac{1}{\log x}dx \sim \frac{C}{n}\frac{n}{\log n} \\ &= \frac{C}{\log n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

donc les deux conditions (4.1) et (4.2) sont vérifiées, ce qui nous permet de déduire une loi faible des grands nombres pour ces variables. Ainsi, l'espérance finie n'est pas nécessaire pour la loi faible. Notons aussi que les estimations pour (4.1) et (4.2) coïncident.

De nouveau, la question qui se pose est de savoir la possibilité de généraliser ce résultat aux suites de variables aléatoires de même loi. Kolmogorov et Feller ont fourni une réponse à cette question. De plus, ils ont prouvé que (4.1) implique (4.2).

Théorème 4.1.5. *Soit $\mathcal{X} = \{X, X_n, n \ge 1\}$ une suite de v.a.r i. i. d. avec $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \ge 1$. Alors*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X\{|X| \le n\}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \quad \textit{quand} \quad n \to \infty, \tag{4.5}$$

ssi

$$n\mathbb{P}(|X| > n) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty. \tag{4.6}$$

La preuve de la suffisance découle de la méthode de troncature bien connue dûe à Khintchine. Cependant, la nécessité de (4.6) pour (4.5) est relativement plus difficile à obtenir. À notre connaissance, elle est prouvée en utilisant deux techniques différentes. La première utilise les fonctions caractéristiques (par exemple voir [35] ou [37, pages. 105-109] . La seconde approche repose sur une procédure de symétrisation–désymmétrisation (voir [29, 32, 40] et [51]).

Le théorème ci-desous est dû à Boukhari [16]. Ce résultat a pour but de fournir une preuve simple qui évite les techniques mentionnées plus haut.

Théorème 4.1.6. *Soit $\mathcal{X} = \{X, X_n, n \ge 1\}$ une suite de v.a.r i. i. d. avec $S_n = \sum_{i=1}^n, n \ge 1$. Alors les assertions* (4.5), (4.6) *et*

$$\frac{1}{n}\max_{1\le k\le n}|S_k - k\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \le k\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \quad \textit{quand} \quad n \to \infty \tag{4.7}$$

sont équivalentes.

Pour démontrer les deux équivalences, on a besoin du lemme suivant (voir [40, Lemme A.6.1]).

Lemme 4.1.1. *Supposons que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels. Si $a_n \to a$ quand $n \to \infty$, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_k \longrightarrow a \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

On aurra besoin aussi de l'inégalité maximale suivante dûe à Etemadi [32].

Lemme 4.1.2. *Soit $t > 0$ et $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r indépendantes. Alors*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > 4t\Big) \leq 4 \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}\Big(|S_k| > t\Big).$$

Pour la preuve du Théorème 4.1.6, on suit le même chemin indiqué dans [16] ; c'est–à–dire

$$(4.6) \Longrightarrow (4.5) \Longrightarrow (4.7) \Longrightarrow (4.6).$$

Démonstration du Théorème 4.1.6. Pour $1 \leq k \leq n$, posons

$$\tilde{m}_k = \mathbb{E}X_k \mathbb{1}\{|X_k| \leq n\}.$$

Preuve de $(4.6) \Longrightarrow (4.5)$

Soit $\epsilon > 0$ et posons $S'_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}\{|X_k| \leq n\}$. Par l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(|S_n - n\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \leq n\}| > n\epsilon\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\{|S_n - n\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \leq n\}| > n\epsilon\} \bigcap \{\bigcap_{i=k}^{n} \{|X_k| \leq n\}\}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\{|S_n - n\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \leq n\}| > n\epsilon\} \bigcap \{\bigcup_{i=k}^{n} \{|X_k| > n\}\}\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(|S_n - S'_n| > n\epsilon\Big) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=k}^{n} \{|X_k| > n\}\Big) \\
&\leq \frac{n\mathsf{Var}(X\mathbb{1}\{|X| \leq n\})}{n^2\epsilon^2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > n) \\
&\leq \frac{1}{n\epsilon^2}\mathbb{E}X^2\mathbb{1}\{|X| \leq n\} + n\mathbb{P}(|X| > n).
\end{aligned}$$

Ensuite, on montre que $\mathbb{E}X^2\mathbb{1}\{|X|\leq n\}=o(n)$, en effet

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}n\mathbb{E}X^2\mathbb{1}\{|X|\leq n\}=\frac{1}{n}\mathbb{E}X^2\mathbb{1}\{|X|\leq n\}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}X^2\mathbb{1}\{k-1<|X|\leq k\}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\mathbb{P}(k-1<|X|\leq k)\\
&\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}2j\Big)\mathbb{P}(k-1<|X|\leq k)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}2j\sum_{k=j}^{n}\mathbb{P}(k-1<|X|\leq k)\\
&=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}j\mathbb{P}(j-1<|X|\leq n)\leq\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}j\mathbb{P}(j-1<|X|)\\
&=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(|X|>j)\leq\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\mathbb{P}(|X|>j)\longrightarrow 0\quad\text{quand}\quad n\to\infty;
\end{aligned}
$$

où la convergence vers 0 est justifiée par le Lemme 4.1.1. Ce qui termine la première implication.

Preuve de (4.5) $\Longrightarrow$ (4.7)

Choisissons trois réels positifs ϵ,δ,δ' et supposons que l'équation (4.5) est vérifiée. Par suite, on peut trouver un entier positif $N_1=N_1(\epsilon,\delta)$ tel que

$$\sup_{k>N_1}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>k\epsilon\Big)<\frac{\delta}{4}.$$

D'où

$$\max_{N_1<k\leq n}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>n\epsilon\Big)\leq\max_{N_1<k\leq n}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>k\epsilon\Big)<\frac{\delta}{4},$$

pour tout $n>N_1$. En outre, on peut choisir $N_2=N_2(\epsilon,\delta,\delta')\geq 1$ tel que

$$\forall n>N_2,\quad \max_{1<k\leq N_1}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>n\epsilon\Big)<\frac{\delta'}{4}.$$

Posons $N=\max(N_1,N_2)$ et on combine les dernières inégalités, on obtient

$$\forall n>N,\quad \max_{1<k\leq n}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>n\epsilon\Big)<\frac{\delta+\delta'}{4}.$$

Par le Lemme 4.1.2, on conclut que

$$\forall n>N,\quad \max_{1<k\leq n}\mathbb{P}\Big(|S_k-k\tilde{m}_k|>4n\epsilon\Big)<\delta+\delta',$$

et comme ϵ,δ et δ' sont arbitraires, la deuxième implication est prouvée.

Preuve de (4.7) $\Longrightarrow$ (4.6)

Soit $n \geq 1$, et remarquons que

$$\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{m}_k| \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}|X| \mathbb{1}\{|X| \leq n\} = o(1). \tag{4.8}$$

D'autre part, pour tout $k \geq 1$, on a

$$X_k - \tilde{m}_k = \sum_{i=1}^{k} (X_i - \tilde{m}_i) - \sum_{i=1}^{k-1} (X_i - \tilde{m}_i);$$

et par suite

$$|X_k - \tilde{m}_k| \leq |\sum_{i=1}^{k} (X_i - \tilde{m}_i)| + |\sum_{i=1}^{k-1} (X_i - \tilde{m}_i)|;$$

ce qui implique

$$\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - \tilde{m}_k| \leq 2 \max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{i=1}^{k} (X_i - \tilde{m}_i)|;$$

ce qui montre que

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - \tilde{m}_k| > n \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{i=1}^{k} (X_i - \tilde{m}_i)| > \frac{n}{2} \Big).$$

En utilisant la dernière inégalité, les équations (4.7) et (4.8), alors on obtient

$$\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k - \tilde{m}_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty;$$

d'où la relation

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > n \Big) = o(1). \tag{4.9}$$

D'autre part, soit $t > 0$ fixé. En utilisant la relation

$$\exp(-t) \geq 1 - t \quad \text{pour} \quad t > 0;$$

on obtient

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > t \Big) = 1 - \Big(1 - \mathbb{P}(|X| > t) \Big)^n \geq 1 - \exp\Big\{ -n\mathbb{P}(|X| > t) \Big\},$$

cette dernière relation nous permet de déduire que

$$n\mathbb{P}(|X| > n) = o(1).$$

Ainsi la troisième implication est prouvée et la démonstration du Théorème est complétée. $\square$

Exemple 4.1.2. Supposons que $X, X_1, X_2, ...$ sont des v.a.r i. i. d. de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{pour} \quad |x| > 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On montre que l'espérance est infinie, en effet

$$\mathbb{E}X = \int_{|x|>1} \frac{|x|}{2x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x} dx = +\infty.$$

Pour $b_n = n$, on a

$$n\mathbb{P}(|X| > n) = n \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$$

donc la condition de Kolmogorov–Feller n'est pas vérifiée.

Ici, pour $b_n = n \log n$ dans le Théorème 4.1.4, on a

$$n\mathbb{P}(|X| > n \log n) = n \int_{n \log n}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{\log n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

et la deuxième condition

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n \log n)^2} n\mathbb{E}X^2 \mathbb{1}\{|X| \le n \log n\} &= \frac{1}{(n \log n)^2} \int_1^{n \log n} 1 dx \\ &\le \frac{1}{\log n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème 4.1.4, on obtient

$$\frac{S_n}{n \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ainsi, nous avons obtenu une loi faible, mais avec une normalisation différente.

Le résultat suivant fournit une extension du Théorème 4.1.5 à des suites de v.a.r avec des normalisations plus générales.

Théorème 4.1.7. *[40] Supposons que $X, X_1, X_2, ...$ sont des v.a.r i. i. d. et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \ge 1$. Soit $(b_n)_{n\ge1} \subset \mathcal{RV}(1/\rho)$ pour $\rho \in (0, 1]$. Alors*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \le b_n\}}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

ssi

$$n\mathbb{P}(|X| > b_n) \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \to +\infty.$$

En particulier, pour $0 < r \leq 1$*, on a*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X\mathbb{1}\{|X| \leq n^{1/r}\}}{n^{1/r}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad quand \quad n \to \infty,$$

ssi

$$n\mathbb{P}(|X| > n^{1/r}) \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \to +\infty.$$

4.2 Les jeux de St. Petersburg de Feller

Dans cette section, nous abordons les deux célèbres jeux : St. Petersburg–game et Feller–game, en rappelant le principe de chaque jeu, ainsi leurs lois exactes obtenus.

Le problème du jeu de Saint-Petersbourg est l'un des plus anciens problèmes en théorie des probabilités. Le jeu consiste à lancer une pièce de monnaie équitable jusqu'à ce que pile apparaisse ; si cela se produit au lancer $n^{\text{ème}}$, le joueur reçoit 2^n francs, où n est le nombre total de lancers. Si $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ est le gain du joueur au $n^{ème}$ tour, alors les $\{X_n, n \geq 1\}$ sont des v.a.r i. i. d. de loi $\mathbb{P}(X_n = 2^n) = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$. Pour le gain total $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ dans n jeux, l'espérance mathématique de gain du joueur est infinie, en effet, pour n assez grand

$$\mathbb{E}S_n = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{4}.4 + \frac{1}{8}.8 + ... = 1 + 1 + 1... = \infty.$$

D'où le paradoxe : pour que le payeur accepte de jouer avec le joueur il faudrait que celui-ci verse un droit d'entrée infini au payeur, alors que ce jeu ne donne une chance minime de gagner qu'une somme importante, ce qui est un paradoxe car aucune personne raisonnable ne misera une partie importante de sa fortune pour participer à ce jeu.

Ce jeu était inventé au début des années 1700 par Nikolas Bernoulli. Puis, en 1738 le cousin de Nikolas, Daniel Bernoulli, présenta à l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg un article qui annonçait le paradoxe au monde et qui a également proposé une solution au paradoxe. De nos jours, le problème est connu sous le nom de St. Petersburg paradoxe game.

En 1968, Feller [34] a prouvé la loi faible de grands nombres pour les gains accumulés S_n

$$\frac{S_n}{n\log_2 n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \quad \text{quand} \quad n \to \infty;$$

où $\log_2 n = \log n / \ln 2$. Ce résultat signifie que le droit d'entrée $n\log_2 n$, pour n tours, est équitable au sens classique.

Plus récemment, Adler [1] a montré les résultats suivants concernant la convergence presque sûre :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log_2 n} = 1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log_2 n} = \infty \qquad \mathbb{P}ps.$$

D'autre part, Martin-Löf [57, Théorème 1] a montré la convergence en loi des gains accumulés. Pour $N = 2^n$, on a

$$\frac{S_N - N\log_2 N}{N} = \frac{S_N}{N} - n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{quand} \quad n \to \infty;$$

où Z est une variable aléatoire définie via sa fonction caractéristique

$$\log \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itZ}) = \sum_{k=-\infty}^{0} (\exp it2^k - 1 - it2^k)2^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\exp it2^k - 1)2^{-k}.$$

Maintenant, on passe au deuxième jeu : le jeu de Feller.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que n pièces de monnaie sont jetées une par une. Pour $i = 1, 2, ..., n$, le temps d'attente pour que lorsque on lance la $i^{\text{ème}}$ pièce, on aurra la première égalisation entre le nombre des piles et le nombre des faces obtenus. Nous supposons que si le temps d'attente est $i = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors le joueur reçoit $2k$ francs. Alors, ce jeu est appelé le jeu de Feller. Si $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ est le temps d'attente de la $i^{\text{ème}}$ pièce dans le jeu Feller. Par définition les v.a.r sont i. i. d. de loi

$$\mathbb{P}(X = 2k) = \frac{1}{2k-1}\binom{n}{k}2^{-2k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ... \tag{4.10}$$

Nous considérons une généralisation de la distribution des probabilités définies par (4.10) par l'introduction du paramètre $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\Big(X^{(\alpha)} = (2k)^{1/2\alpha}\Big) = \frac{1}{2k-1}\binom{n}{k}2^{-2k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ... \tag{4.11}$$

En fait, le montant concernant le jeu de Feller est ajusté par α. Nous l'appelons une généralisation du jeu de Feller. Notons que si $\alpha = 1/2$, les distributions de probabilité (4.10) et (4.11) sont équivalentes.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, par la formule de Stirling (voir [33, equation (9.8)]), on a

$$\mathbb{P}\Big(X^{(\alpha)} = 2k\Big) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} k^{-3/2}(1 + O(k^{-1}));$$

où $a_k = O(b_k)$ signifie que $\limsup_{k\to\infty} a_k/b_k < \infty$.

Lemme 4.2.1. *(Matsumoto et Nakata [58]) Pour $X^{(\alpha)}$ définie en* (4.11), *on a*

$$\mathbb{E}X^{(\alpha)} \begin{cases} < \infty & \textit{pour} \quad \alpha > 1, \\ = \infty & \textit{pour} \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \textit{et} \quad \mathbb{E}(X^{(\alpha)})^{\beta} \begin{cases} < \infty & \textit{pour} \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1, \\ = \infty & \textit{pour} \quad \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

De plus, quand $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}(X^{(\alpha)} > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\alpha} \quad \textit{pour} \quad \alpha > 0,$$

$$\mathbb{E}X^{(\alpha)} \mathbb{1}\{X^{(\alpha)} \leq x\} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \log x & \textit{pour} \quad \alpha = 1, \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{1-\alpha} & \textit{pour} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^{(\alpha)})^2 \mathbb{1}\{X^{(\alpha)} \leq x\} \sim \frac{\alpha}{2-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{2-\alpha} \quad \textit{pour} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

où $f(x) \sim g(x)$ désigne que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Nous nous concentrons à présent sur le cas $0 < \alpha \leq 1$, puisque si $\alpha > 1$ alors $\mathbb{E}X^{(\alpha)} < \infty$ (voir le Lemme ci-dessus). Alors nous pouvons obtenir la loi forte des grands nombres, mais la propriété essentielle du jeu de Feller, $\mathbb{E}X^{(\alpha)} = \infty$, est perdu.

Soit $\{X_i^{(\alpha)}\}$ une suite de v.a.r i. i. d.. avec distribution (4.11). On définit les variables aléatoires

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{k=1}^{n} X_k^{(\alpha)} \quad \text{et} \quad M_n^{(\alpha)} := \max_{1\leq k\leq n} X_k^{(\alpha)},$$

qui indiquent respectivement le gain total et le gain maximal pour n pièces. Avant d'énnoncer un théorème pour étudier certaines propriétés statistiques de $S_n^{(\alpha)}$ et $M_n^{(\alpha)}$, on a besoin de définir la fonction signe :

$$\mathsf{sgn}(t) := \begin{cases} -1, & \text{si} \quad t < 0, \\ 0, & \text{si} \quad t = 0, \\ 1, & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

On rappelle aussi la notion des suites relativement stable.

Définition 4.2.1. [39] La suite des v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ est dite relativement stable si, pour un choix convenable de constantes positives B_n, la relation

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{B_n} - 1\right| < \epsilon\right) = 1$$

a lieu pour tout $\epsilon > 0$.

Théorème 4.2.1. *(Matsumoto et Nakata [58])*

(i) La loi faible des grands nombres :
• Si $0 < \alpha < 1$, alors $S_n^{(\alpha)}$ n'est pas relativement stable, à savoir qu'il n'y a pas de suite de réels $\{a_n\}$ qui satisfait

$$\frac{S_n^{(\alpha)}}{a_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

• Si $\alpha = 1$, alors $S_n^{(\alpha)}$ est relativement stable, avec la constante de normalisation $\sqrt{2/\pi n}\log n$, nous avons

$$\frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{2/\pi n}\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

(ii) Les lois stables :
• Si $0 < \alpha < 1$, alors on a

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/(2\alpha)} \frac{S_n^{(\alpha)}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\alpha)} \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

où $Z^{(\alpha)}$ est la variable aléatoire dont la distribution est stable d'indice α, où sa fonction caractéristique est donnée par

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ^{(\alpha)}}) = \exp\left\{\mathrm{i}tc - b|t|^\alpha\left(1 + \mathrm{i}.\mathsf{sgn}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right\},$$

pour certains réels c et $b > 0$.

• *Si* $\alpha = 1$*, alors on a*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{S_n^{(1)}}{n} - \log n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(1)} \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

où $Z^{(1)}$ *est la variable aléatoire dont la distribution est stable d'indice* 1*, où sa fonction caractéristique est donnée par*

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tZ^{(1)}}) = \exp\left\{\mathrm{i}tc' - b'|t|\left(1 + \mathrm{i}.\mathsf{sgn}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)\log t\right\},$$

pour certains réels c' *et* $b' > 0$*.*

(iii) Les lois extrêmes : Si $0 < \alpha \leq 1$*, alors on a*

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/(2\alpha)}\frac{M_n^{(\alpha)}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_\alpha \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

où $\phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$*, pour* $x > 0$ *est la distribution de Fréchet.*

Proposition 4.2.1. *(Matsumoto et Nakata [58]) On a*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{2/\pi n}\log n} = \infty \quad \textit{presque sûrement}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{2/\pi n}\log n} = 1 \quad \textit{presque sûrement.}$$

4.3 Lois de Pareto

Le principe de Pareto doit son nom à l'économiste et sociologue italien Vilfredo Pareto et aujourd'hui, ce principe est connu sous le nom de "loi de Pareto"ou encore principe de "80–20". Cette distribution est un type particulier de loi de puissance, elles sont des outils de modélisation et de prévision utiles dans une grande variété de domaines socio–économiques [63].

A la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, Pareto a étudié la distribution des revenus dans divers pays et à différentes époques, bien que les niveaux d'inégalités soient variables selon les pays ; Pareto a constaté que le pourcentage des individus percevant un revenu supérieur ou égal à x est toujours proportionnel à $Cx^{-\alpha}$, où α est un coefficient d'inégalité qui varie selon les pays et C est une constante positive.

Le principe de Pareto désigne que 80% des effets sont le produit de 20% des actions ou, vu différemment, que 20% des causes produisent 80% des conséquences, permettant ainsi de prioriser en distinguant ce qui est important de ce qui est secondaire, par exemple :

- 80% des réclamations proviennent de seulement 20% des clients,
- 20% de l'activité produit 80% de la valeur ajoutée,
- 80% du temps passé est consacré à seulement 20% des tâches d'un projet,
- 80% de l'eau potable provient de 20% des rivières,
- 80% des crimes sont commis par 20% des criminels.

Par suite, on rappellera que cette loi de probabilité a pour fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \quad \text{si} \quad x > x_0$$

et que sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbb{1}\{x > x_0\}.$$

Elle possède donc deux paramètres x_0 et α, dit coefficients de Pareto.

Plus généralement, on appellera loi asymptotiquement parétienne une loi dont la fonction de répartition $\tilde{F}$ vérifie :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{F}(x)}{F(x)} = 1, \quad \text{noté} \quad \tilde{F}(x) \sim F(x).$$

$$\text{avec} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - Cx^{-\alpha}, & \text{pour} \quad x \geq x_0 > 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où C est une constante positive. L'espérance d'une v.a.r suivant une loi de Pareto est

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_0}{\alpha - 1}, & \text{si} \quad \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Sa variance est

$$\mathsf{Var}(X) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{\alpha - 1}\right)^2 \dfrac{\alpha}{\alpha - 2}, & \text{si} \quad \alpha > 2, \\ +\infty, & \text{si} \quad \alpha \leq 2. \end{cases}$$

Les distributions de Pareto sont plus générales que la loi normale, on les trouve dans plusieurs domaines aussi variés car ses applications sont multiples comme dans l'économie, la stratégie commerciale, la répartition des richesses et des revenus, la gestion des ressources humaines, la production, la géographie urbaine, la géographie physique, la granulométrie, les mathématiques financières, la vie quotidienne, etc.

Remarque 8. Dans le domaine de lexicologie, ces lois de probabilité sont connues sous les noms de lois de Zipf et d'Estoup ou encore –dans leur forme la plus générale– de Mandelbrot (voir[6]).

4.4 Lois faibles des grands nombres sous des conditions générales

Ce paragraphe traite la loi faible des grands nombres pour des variables vérifiant l'équation

$$\mathbb{P}(|X| > x) \asymp x^{-\alpha} \quad \text{pour certaines constantes} \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{4.12}$$

Nakata [62] indique que si X est une v.a.r qui vérifie (4.12), alors $\mathbb{E}|X| = \infty$. Donc on est dans le cadre des v.a.r d'espérance infinie.

Remarque 9. Soit $\{a_n, n \geq 1\}$ une suite de réels positifs, posons

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

pour tout $n > 1$, $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r indépendantes de même loi, et

$$T_n = \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^{n} a_k X_k$$

pour tout $n > 1$.

D'aprés Jamison et al. [43], on distingue deux cas :

1. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$, alors il est impossible de trouver une suite de réels $\{c_n, n \geq 1\}$ de sorte que $T_n - c_n$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement.
2. Et si $\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ alors Jamison et al. [43] ont distingué deux cas : soit $T_n - c_n$ diverge $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout choix de c_n, soit elle converge vers 0 $\mathbb{P}$-presque sûrement pour une suite covenable $\{c_n, n \geq 1\}$.

Si $T_n - c_n$ converge vers 0 $\mathbb{P}$-presque sûrement pour un choix particulier de c_n, on dit que la suite T_n est stable lorsqu'elle est centrée par c_n.

D'autre part, si les variables $\{X_n, n \geq 1\}$ vérifient l'équation (4.12) pour certaines constantes $\alpha > 1$, alors $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$ et la loi forte des grands nombres de Kolmogorov pour une famille de variables indépendantes et équidistribuées implique que T_n est stable lorsque $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ et

$$T_n \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}X_1 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi, pour tout choix de suite de réels positifs $\{b_n, n \geq 1\}$ tel que $b_n > A_n$ et $b_n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Désormais, on présente nos résultats obtenus pour des suites de variables satisfaisant l'équation (4.12) (voir [8]).

Introduisons la famillle de v.a.r $\tilde{\mathcal{X}} = \{X_{nj}, 1 \leq j \leq n\}$ définie par

$$X_{nj} = -\frac{b_n}{a_j} \mathbb{1}\left(X_j < -\frac{b_n}{a_j}\right) + X_j \mathbb{1}\left(|X_j| \leq \frac{b_n}{a_j}\right) + \frac{b_n}{a_j} \mathbb{1}\left(X_j > \frac{b_n}{a_j}\right), \tag{4.13}$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.

On commence par énnoncer une loi faible des grands nombres dûe à Nakata [62].

Théorème 4.4.1. *Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r vérifiant Eq* (4.12) *et*

$$\limsup_{x \to \infty} \sup_{j \geq 1} x^{\alpha} \mathbb{P}(|X_j| > x) < \infty. \tag{4.14}$$

De plus, soit $\tilde{a} = \{a_n,\ n \geq 1\}$ et $\tilde{b} = \{b_n,\ n \geq 1\}$ deux suites de réels positifs telles que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{\alpha} = o(b_n^{\alpha}). \tag{4.15}$$

Alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - \mathbb{E}X_{nj}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty, \tag{4.16}$$

où X_{nj} définie en (4.13)*.*

Lemme 4.4.1. *[61] Soit X une v.a.r satisfait Eq.* (4.12)*, avec $\alpha > 0, p \geq 1, x > 0$, alors*

$$\mathbb{E}|X|^p \mathbb{1}(|X| \leq x) \asymp \begin{cases} x^{p-\alpha} & si \quad 0 < \alpha < p, \\ \log x & si \quad \alpha = p, \\ 1 & si \quad \alpha > p. \end{cases}$$

Le lemme suivant généralise deux lemmes similaires établis dans Nakata [62] et Xu et al. [81].

Lemme 4.4.2. *Soit* $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de v.a.r vérifiant les deux conditions* (4.12) *et* (4.14) *et considérons deux suites de réels positifs* $\tilde{a} = \{a_n,\ n \geq 1\}$ *et* $\tilde{b} = \{b_n,\ n \geq 1\}$*. Supposons* $p \geq 1$ *et* $\alpha \in]0, p[$.

(i) Si $b_n \to \infty$*, alors il existe une constante* $C_{\alpha,p} > 0$ *telle que*

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \qquad \mathbb{E}|X_{nj}|^p \leq C_{\alpha,p} \left(\frac{b_n}{a_j}\right)^{p-\alpha},$$

pour n *suffissamment grand.*

(ii) Si (4.15) *est vérifiée, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_j| > \frac{b_n}{a_j}\right) = 0 \tag{4.17}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n^p} \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mathbb{E}|X_j|^p \mathbf{1}(|X_j| \leq b_n/a_j) = 0.$$

Démonstration du Lemme 4.4.2. Commençons d'abord par vérifier le premier point.

Soit $p \geq 1,\ 1 \leq j \leq n$ et supposons $0 < \alpha < p$. On utilise les équations (4.12)–(4.14), le Lemme 4.4.1 et l'hypothèse sur $\widetilde{b}$, alors pour n suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_{nj}|^p &= \mathbb{E}|X_j|^p \mathbb{1}\Big(|X_j| \leq \frac{b_n}{a_j}\Big) + \Big(\frac{b_n}{a_j}\Big)^p \mathbb{P}\Big(|X_j| > \frac{b_n}{a_j}\Big) \\ &\leq C\Big(\frac{b_n}{a_j}\Big)^{p-\alpha}.\end{aligned}$$

Ainsi la première assertion est prouvée.

Pour la seconde assertion, l'hypothèse (4.15) implique

$$0 \leq \left(\frac{a_1}{b_n}\right)^\alpha \leq b_n^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} a_j^\alpha = o(1),$$

sous la condition $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Pour n assez grand, la condition (4.14) nous donne

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(|X_j| > b_n/a_j) \leq C b_n^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} a_j^\alpha = o(1),$$

ce qui prouve (4.17).

Finalement, à l'aide du Lemme 4.4.1, l'hypothèse (4.15) et le fait que $b_n \to \infty$ as $n \to \infty$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \mathbb{E}|X_j|^p \mathbb{1}(|X_j| \leq b_n/a_j) \leq C \sum_{j=1}^{n} a_j^p \Big(\frac{b_n}{a_j}\Big)^{p-\alpha} = o(b_n^p).$$

Ceci établit la dernière relation et conclut la preuve du lemme. □

Le théorème suivant est une généralisation du résultat obtenu par Boukhari [14] pour une suite de variables aléatoires asymptotiquement presque négativement associées définie auparavant dans le Chapitre 3.

Théorème 4.4.2. *Soit $t > 0$, $n \geq 1$ et on considère une suite de v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n,\ n \geq 1\}$ qui vérifie la propriété* (**P2**). *Posons*

$$I_n(t) = \mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > t).$$

Alors

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t)}{2\Lambda + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t)} \leq I_n(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t), \tag{4.18}$$

où Λ est la constante donnée par (**P2**).

Démonstration du Théorème 4.4.2. La borne supérieure dans (4.18) est évidente. Pour obtenir la borne inférieure, nous utiliserons l'idée dans [64] et la procédure utilisée dans [14] pour montrer un résultat similaire pour une suite de variables aléatoires AANA.

Soit $t > 0$ fixé et $j,\ n \geq 1$. Observons que nous pouvons et nous supposons

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t) > 0.$$

Aprés, on défini

$$A_j = A_j(t) = \{|X_j| > t\} \quad \text{et} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(A_k).$$

Il est facile de voir que

$$I_n(t) = \mathbb{P}(Y_n > 0) \quad \text{et} \quad \cap_{j=1}^{n} \overline{A_j} = \{Y_n = 0\}.$$

Ces considérations plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent que

$$\mathbb{E}^2(Y_n) = \mathbb{E}^2\Big(Y_n \mathbb{1}(Y_n > 0)\Big) \leq \mathbb{E}(Y_n^2) I_n(t). \tag{4.19}$$

En outre, il est aisé de voir que les suites de fonctions

$$\{\mathbb{1}(X_k > t), 1 \leq k \leq n\} \quad \text{et} \quad \{\mathbb{1}(X_k < -t), 1 \leq k \leq n\}$$

sont monotones.

En ultilisant l'inégalité :

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

le fait que $\mathrm{Var}(\mathbb{1}(D)) \leq \mathbb{P}(D)$ pour tout ensemble mesurable D, ainsi la propriété (**P2**), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{1}(|X_k| > t) - \mathbb{P}(|X_k| > t)\Big)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{1}(X_k > t) - \mathbb{P}(X_k > t)\Big) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{1}(X_k \leq -t) - \mathbb{P}(X_k \leq -t)\Big)\right]^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{1}(X_k > t) - \mathbb{P}(X_k > t)\Big)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{1}(X_k \leq -t) - \mathbb{P}(X_k \leq -t)\Big)\right)^2\right] \\
&= 2\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k > t)\Big) + 2\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k < -t)\Big) \\
&\leq 2\Lambda \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathrm{Var}\left(\mathbb{1}(X_k > t)\right) + \mathrm{Var}\left(\mathbb{1}(X_k < -t)\right)\Big] \\
&= 2\Lambda \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\mathbb{1}(|X_k| > t)\right) \\
&\leq 2\Lambda \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) &\leq 2\mathbb{E}[(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))^2] + 2\mathbb{E}^2(Y_n) \\
&\leq 4\Lambda \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > t)\right)^2.
\end{aligned}$$

En substituant ceci dans (4.19), nous obtenons

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k|>t)\right)^2 = \mathbb{E}^2(Y_n) \leq 2\left(2\Lambda\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k|>t)+\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k|>t)\right)^2\right)I_n(t).$$

D'où,

$$I_n(t)\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k|>t)}{2\Lambda+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k|>t)}.$$

Ceci complète la preuve du Théorème 4.4.2. □

Désormais, nous formulons et prouvons nos principaux résultats.

Théorème 4.4.3. *Soit $\mathcal{X}=\{X_n,n\geq 1\}$ une suite de v.a.r satisfaisant les conditions* (4.12), (4.14) *et la propriété* (P1).

Supposons que $\tilde{a}=\{a_n,\ n\geq 1\}$ et $\tilde{b}=\{b_n,\ n\geq 1\}$ sont deux suites de réels positifs telles que la condition (4.15) *est vérifiée. Alors*

$$\frac{1}{b_n}\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}a_j(X_j-\mathbb{E}X_{nj})\right|\xrightarrow{\mathbb{P}}0\quad \textit{lorsque}\quad n\to\infty, \tag{4.20}$$

où X_{nj} est définie dans (4.13).

Démonstration du Théorème 4.4.3. Fixons $\epsilon>0,\ n\geq 1$ et notons que la loi faible des grands nombres dans (4.20) suivra de

$$J_n^{'}(\epsilon):=\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}a_j(X_j-X_{nj})\right|>\epsilon b_n\right)=o(1) \tag{4.21}$$

et

$$J_n^{''}(\epsilon):=\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}a_j(X_{nj}-\mathbb{E}X_{nj})\right|>\epsilon b_n\right)=o(1), \tag{4.22}$$

où X_{nj} est donnée par (4.13).

Pour vérifier (4.21), on introduit

$$B_n=\cap_{j=1}^{n}\left\{|X_j|\leq\frac{b_n}{a_j}\right\}\quad\text{pour}\quad n\geq 1$$

en remarquant que dans B_n, les v.a.r X_{nj} et X_j coïncident pour tout $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Conséquemment,

$$J_n^{'}(\epsilon) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{j=1}^{k} a_j(X_j - X_{nj})\Big| > \epsilon b_n\Big\} \cap \overline{B_n}\Big) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\Big(|X_j| > \frac{b_n}{a_j}\Big).$$

Ces relations ensemble plus le second point du Lemme 4.4.2 assurent l'équation (4.21).

Nous nous intéressons à présent à la preuve de (4.22). Choisissons $p \ge 2$ tel que (**P1**) soit vérifiée et rappelons que X_{nj} provient de X_j par la procédure de troncature. Donc, (**P1**) est aussi valable pour $\widetilde{\mathcal{X}} = \{X_{nj}, 1 \le j \le n\}$. De plus, on ulilise l'inégalité de Markov, l'inégalité

$$(x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p) \quad \text{(valide pour } x,\ y \ge 0)$$

et le premier point du Lemme 4.4.2, on peut écrire pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
J_n^{''}(\epsilon) &\le \frac{1}{b_n^p \epsilon^p}\mathbb{E}\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{j=1}^{k} a_j(X_{nj} - \mathbb{E}X_{nj})\Big|^p\Big) \\
&\le \frac{C_p}{b_n^p \epsilon^p}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \mathbb{E}|X_{nj} - \mathbb{E}X_{nj}|^2\right)^{p/2} + \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mathbb{E}|X_{nj} - \mathbb{E}X_{nj}|^p\right] \\
&\le \frac{C_p}{b_n^p \epsilon^p}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \mathbb{E}X_{nj}^2\right)^{p/2} + \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mathbb{E}|X_{nj}|^p\right] \\
&\le \frac{C_{\alpha,p}}{b_n^p \epsilon^p}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \left(\frac{b_n}{a_j}\right)^{2-\alpha}\right)^{p/2} + \sum_{j=1}^{n} a_j^p \left(\frac{b_n}{a_j}\right)^{p-\alpha}\right] \\
&= \frac{C_{\alpha,p}}{\epsilon^p}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{b_n}\right)^{\alpha}\right)^{p/2} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{b_n}\right)^{\alpha}\right],
\end{aligned}$$

ainsi par (4.15)

$$J_n^{''}(\epsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Ceci prouve (4.22) et termine la preuve du Théorème 4.4.3. □

Corollaire 4.4.1. *Sous les conditions du Théorème 4.4.3, si* $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$\frac{1}{b_n}\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k} a_j X_j\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{4.23}$$

Démonstration du Corollaire 4.4.1. Soit $n \geq 1$, montrons d'abord que

$$\Delta_n := \frac{1}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbb{E} X_{nj} \right| = o(1). \tag{4.24}$$

En effet, via le Lemme 4.4.1 et la condition (4.15), pour n suffisamment grand, nous avons

$$\Delta_n \leq \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}|X_{nj}| \leq C_\alpha \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \Big(\frac{b_n}{a_j}\Big)^{1-\alpha} = C_\alpha \frac{1}{b_n^\alpha} \sum_{j=1}^{n} a_j^\alpha \to 0.$$

Ainsi, l'équation (4.23) est une conséquence immédiate du Théorème 4.4.3 et de l'équation (4.24), ce qui termine la preuve du corollaire. □

Théorème 4.4.4. *Soit* $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de v.a.r vérifiant* (4.12), (4.14) *et* (P2)*. Supposons que* $\tilde{a}$ *est décroissante,* $\tilde{b}$ *est non-bornée et* $\log a_n = o(b_n)$*. Si* (4.20) *est vérifiée , alors on a* (4.17)*.*

Démonstration du Théorème 4.4.4. Nous utiliserons quelques idées de [13, 60]. Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, alors

$$\Big| a_k(X_k - \mathbb{E}X_{nk}) \Big| = |S_k - S_{k-1}| \leq |S_k| + |S_{k-1}|,$$

et par suite

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} \Big| a_k(X_k - \mathbb{E}X_{nk}) \Big| \leq \frac{2}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{j=1}^{k} a_j(X_j - \mathbb{E}X_{nj}) \Big|,$$

et l'équation (4.20) implique

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} \Big| a_k(X_k - \mathbb{E}X_{nk}) \Big| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{4.25}$$

L'étape suivante consiste à montrer que

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k \mathbb{E}|X_{nk}| = o(b_n). \tag{4.26}$$

Cela sera fait selon les valeurs de α. Pour réussir, nous aurons besoin de la relation suivante, qui est une concéquence directe de (4.13).

$$\frac{a_k}{b_n} \mathbb{E}|X_{nk}| = \frac{a_k}{b_n} \mathbb{E}|X_k| \mathbf{1} \left(|X_k| < \frac{b_n}{a_k} \right) + \mathbb{P} \left(|X_k| > \frac{b_n}{a_k} \right), \tag{4.27}$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$.

<u>*Le premier cas*</u> : $0 < \alpha < 1$.

En combinant (4.27), le premier point du Lemme 4.4.2, l' équation (4.14) et la monotonie de $\tilde{a}$, alors pour n assez grand, on obtient

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} a_k \mathbb{E}|X_{nk}| \leq C_\alpha a_1^\alpha \, b_n^{-\alpha} \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty.$$

<u>*Le second cas*</u> : $\alpha = 1$.

En invoquant le Lemme 4.4.1 ($\alpha = p = 1$), nous en déduisons que

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq k \leq n} a_k \mathbb{E}|X_{nk}| \leq C a_1 \cdot \frac{\log b_n - \log a_n + 1}{b_n} \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty,$$

où on a utilisé $\log a_n = o(b_n)$. La discussion si-dessus garantit que (4.26) est vraie pour tout $\alpha \in]0, 1]$. On assemble (4.25) et (4.26), on aboutit à

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq k \leq n} a_k |X_k| > b_n \Big) = o(1).$$

En appliquant le Théorème 4.4.2 à cette dernière relation, on obtient

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left(|X_j| > \frac{b_n}{a_j} \right) = o(1).$$

Cela achève la preuve du théorème. □

4.5 Lois faibles exactes pondérées

L'idée de stabilité dans la théorie des limites pour des sommes partielles de variables aléatoires peut être décrite de la manière suivante : Choisissons une suite de v.a.r $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$, peut-on trouver une suite convenable des constantes positives b_n de sorte que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k = 1, \quad \text{pour un mode de convergence ?} \tag{4.28}$$

Si on s'intéresse à la convergence presque sûre dans le cas des v.a.r indépendantes de même loi, on peut invoquer la loi forte de Kolmogorov et prendre $b_n = n\mathbb{E}(X_1)$, à condition que la moyenne commune soit finie.

Quand $\mathbb{E}|X_1| = \infty$ (resp. $\mathbb{E}(X_1) = 0$), Chow et Robbins [28] (resp. Maller [55]) ont montré qu'il est impossible d'obtenir (4.28) pour certaines suites $(b_n)_n$, en ce qui concerne la convergence presque sûre.

De plus, Adler [2] a présenté un exemple de distributions de probabilités pour lesquelles la seule loi que nous puissions obtenir est une loi faible pondérée.

Nous commençons par indiquer un résultat immédiat du Théorème 4.4.3 et du Corollaire 4.4.1.

Corollaire 4.5.1. *Soit $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ et $\mathcal{X}$ des suites comme dans le Théorème 4.4.3 et on se restreint au cas où $\alpha = 1$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E} X_j \mathbf{1}(|X_j| \leq b_n/a_j) = \mathbf{L}, \tag{4.29}$$

pour certain réel $\mathbf{L} \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{L} \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Démonstration du Corollaire 4.5.1. La loi limite dans le Théorème 4.4.3 implique

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - \mathbb{E} X_{nj}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{4.30}$$

Et la condition (4.12) nous donne

$$\mathbb{E} X_{nj} = 1 + \mathbb{E} X_j \mathbb{1}\left(|X_j| \leq \frac{b_n}{a_j} \right) \tag{4.31}$$

Ainsi, en combinant (4.29), (4.30) et (4.31), on obtient la limite cherchée. □

Dans ce qu'il suit, nous présentons trois situations où le corollaire ci-dessus s'applique avec $\mathbf{L} \neq 0$. Les résultats obtenus généralisent ceux de lois faibles de [2, 62, 81, 82]. En particulier, les Exemples 4.5.1 et 4.5.2 ci-dessous révèlent que l'hypothèse d'indépendance dans le jeu de St-Petersbourg et le jeu de Feller généralisé est beaucoup plus forte qu'il n'est nécessaire.

Théorème 4.5.1. *Soit $\mathcal{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a.r positives satisfaisant* (**P1**) *et définies par $P(X_k = 0) = 1 - c_k^{-1}$ et*

$$P(X_k > x) = (x + c_k)^{-1} \quad \textit{pour } x > 0,$$

où $\tilde{c} = \{c_k,\ k \geq 1\}$ *est une suite telle que* $c_k \geq 1$ *et*

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \longrightarrow \infty \quad \textit{lorsque } n \to \infty. \tag{4.32}$$

Alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k^{-1} X_k}{C_n \log C_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \quad \textit{lorsque } n \to \infty. \tag{4.33}$$

Les preuves de ce résultat et le résultat suivant sont similaires à celles du Théorèmes 3.1–3.2 dans Nakata [62].

Démonstration du Théorème 4.5.1. Notons d'abord que la distribution de $\mathcal{X}$ verifie Eq.(4.12) avec $\alpha = 1$. Possons $a_j = c_j^{-1}$ et $b_n = C_n \log C_n$. L'equation (4.15) suit l'equation (4.32).

Et puisque les hypothèses du Corollaire 4.5.1 sont vérifiées, il nous reste à montrer que $\mathbf{L} = 1$.

Pour $x > 0$ (assez grand), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_j \mathbf{1}(|X_j| \leq x) &= \int_0^x \mathbb{P}(|X_j| > t)dt \\
&= \int_0^x \frac{dt}{t + c_j} \\
&\sim \log\left(\frac{x}{c_j}\right).
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}X_j \mathbf{1}\left(|X_j| \leq \frac{b_n}{a_j}\right) \sim \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \log b_n,$$

ainsi

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}X_j \mathbf{1}\left(|X_j| \leq \frac{b_n}{a_j}\right) \sim \frac{C_n \log(C_n \log C_n)}{C_n \log C_n} \longrightarrow 1. \tag{4.34}$$

Ceci complète la démonstration. □

Corollaire 4.5.2. *Sous les conditions du Théorème 4.5.1 avec* $c_k = k$*, pour* $k \geq 1$*. Alors pour tout* $\gamma > -1$ *et* $\delta \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^{-1} (\log k)^{\gamma} (\log\log k)^{\delta} X_k}{(\log n)^{\gamma+1} (\log\log n)^{\delta+1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} (\gamma + 1)^{-1} \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty,$$

où $\log x = \ln(\max(x, e))$.

Démonstration du Corollaire 4.5.2. Soit $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Comme $u \mapsto u^{\gamma}(\log u)^{\delta} \in$

$\mathcal{RV}(\gamma)$, on applique le Lemme 1.8.2

$$\int_K^x t^{-1}(\log t)^\gamma(\log\log t)^\delta dt = \int_{K'}^{\log x} u^\gamma(\log u)^\delta du \sim \frac{1}{\gamma+1}(\log x)^{\gamma+1}(\log\log x)^\delta$$

pour certaines constantes positives K et K'. Ceci implique

$$\sum_{j=1}^n j^{-1}(\log j)^\gamma(\log\log j)^\delta \sim \frac{1}{\gamma+1}(\log n)^{\gamma+1}(\log\log n)^\delta.$$

Par suite, posons $a_j := j^{-1}(\log j)^\gamma(\log\log j)^\delta$ et $bn := (\log n)^{\gamma+1}(\log\log n)^\delta$, on obtient

$$\sum_{j=1}^n a_j = \frac{(\log n)^{\gamma+1}(\log\log n)^\delta}{\gamma+1} = o(b_n),$$

d'où (4.15) avec $\alpha = 1$. Maintenant, il reste à monter que $\mathbf{L} = (\gamma+1)^{-1}$ dans Eq. (4.29) puisque les hypothèses du Corollaire 4.5.1 sont vérifiées. Pour cela on procède comme nous avons fait pour montrer (4.34), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n a_j\mathbb{E}X_j\mathbf{1}(|X_j| \le b_n/a_j) = \frac{1}{\gamma+1}.$$

Ceci termine la démonstration. □

Remarque 10. On ne peut pas affiner le résultat (4.33) en une convergence presque sûre, même si les accroissements sont indépendants. Dans ce dernier cas Adler [2] a montré que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n k^{-1}X_k}{\log n\log\log n} = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Ainsi, on s'intéresse à l'application de nos résultats obtenus dans cette section à la loi faible des grands nombres pour les deux jeux : le jeu de St. Petersburg et le jeu de Feller.

Soit $\beta > -1$ fixé, $\ell \in \mathcal{SV}$ et posons $a_n = n^\beta\ell(n),\ b_n = n^{\beta+1}\ell(n)\log n$. Notons que la suite $\{\log a_n,\ n \ge 1\}$ est à variation régulière et nous renvoyons le lecteur au Lemme 1.8.2, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n a_k \sim \frac{1}{\beta+1}n^{\beta+1}\ell(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n a_k\log a_k \sim \frac{\beta}{\beta+1}n^{\beta+1}\ell(n)\log n. \tag{4.35}$$

Exemple 4.5.1. Soit ξ une v.a.r positive de loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{P}(\xi = 2^k) = 2^{-k} \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

On se réfère à [40, p. 284], on a

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 2^{\{\log_2 x\}} x^{-1} \asymp x^{-1}$$

et

$$\mathbb{E}\xi \mathbb{1}(\xi \leq x) \sim \ \log_2 x,$$

où $\{x\}$ représente la partie fractionnnaire de x et $\log_2 x = \log x / \ln 2$. On considère une nouvelle suite $\mathcal{X} = \{X_k,\ k \geq 1\}$ de v.a.r de même loi que ξ telles que la propriété (**P1**) soit vérifiée. Alors pour $\beta > -1$ et $\ell \in \mathcal{SV}$, on a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^\beta \ell(k) X_k}{n^{\beta+1} \ell(n) \log_2 n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\beta+1}, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Cette loi faible des grands nombres suit le Corollaire 4.5.1, puisque l'estimation dans (4.35) donne $\mathbf{L} = 1/(\beta+1)\ln 2$.

Lorsque $\beta = 0$ et $\ell \equiv 1$, on retrouve la Relation (4.1) mentionnée dans Feller [34, Sec. X.4] pour des v.a.r i. i. d.

Exemple 4.5.2. Soit η une v.a.r positive de loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{P}(\eta = \sqrt{2k}) = \binom{2k}{k} \frac{2^{-2k}}{2k-1} \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Par le Lemme 2 dans [58], on a

$$\mathbb{P}(\eta > x) \asymp \sqrt{2/\pi} x^{-1}.$$

Alors, pour $\beta > -1,\ \ell \in \mathcal{SV}$ et $\mathcal{X} = \{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de v.a.r de même loi que η telle que la propriété (**P1**) soit vérifiée. Par le Corollaire 4.5.1 et Eq. (4.35) on obtient $\mathbf{L} = (\beta+1)^{-1}\sqrt{2/\pi}$ et

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^\beta \ell(k) X_k}{n^{\beta+1} \ell(n) \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\beta+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

quand $n \to \infty$. Cette loi faible des grands nombres est prouvée par [58, Théorème 3 (i)] sous l'hypothèse que la suite des v.a.r $\mathcal{X} = \{X_k,\ k \geq 1\}$ sont i. i. d., $\beta = 0$

et $\ell \equiv 1$.

Conclusion

L'objectif de cette thèse de doctorat était d'établir deux lois limites :

1. Une loi de logarithme itéré pour des processus stochastiques fortement intégrables.
2. Une loi faible des grands nombres pour des variables de moyennes infinies.

La méthode utilisée pour montrer la loi de logarithme itéré pour des processus stochastiques d-Φ-sous-gaussiens nécessite le critère d'entropie métrique de Dudley. Le résultat obtenu dans cette thèse généralise celui obtenu par Castellucci et Giuliano Antonini en 2005 pour des martingales Φ-sous-gaussiennes.

Le deuxième problème abordé est en relation avec la loi faible des grands nombres pour des variables aléatoires non intégrables, des résultats récents concernant cette loi ont été généralisés à une large famille de variables aléatoires vérifiant une inégalité maximale similaire à celle de Kolmogorov ; une condition nécessaire pour la validité de ce théorème limite est aussi proposée.

Perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse concernent deux problématiques différentes, la première porte sur l'étude du comportement asymptotique d'une classe de processus stochastiques fortement intégrables, la seconde se rapporte à une la loi faible des grands nombres pondérée avec des variables aléatoires non-intégrables. Au vu des techniques utilisées et des résultats obtenus, il nous semble intéréssant d'examiner les problèmes suivants :

Problème 1. Pour des variables aléatoires $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$, indépendantes et de même loi qu'une variable X, Hu et Weber [41] ont obtenu le théorème suivant, appelé loi du logarithme unique. Supposons que

$$\mathbb{E}X = 0, \qquad \mathbb{E}X^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}|X|^4 < \infty, \tag{4.36}$$

alors on a presque sûrement

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|\sum_{k=1}^{n} X_{nk}|}{\sqrt{2n\log n}} = 1.$$

Ce résultat a été amélioré par Qi , Y. [66] et Li, D. et al. [53] indépendamment, en remplaçant la Condition (4.36) par

$$\mathbb{E}X = 0, \qquad \mathbb{E}X^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(|X|^4/\log^2|X|) < \infty$$

En 2007, Chen et Qi [26] ont montré que si $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telles que $\mathbb{E}X_1 = 0$ et $\mathbb{E}\left(|X_1|^2/\log|X_1|\right) < \infty$, alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|}{\sqrt{2n\log n}} = \epsilon_0$$

où $\epsilon_0 \in]0, \infty]$ dépend de la distribution de X.

En considérant ces théorèmes limites, on peut se demander si les méthodes employées dans cette thèse permettent d'obtenir des résultats similaires pour des variables aléatoires Φ-sous-gaussiennes avec une fonction Φ appropriée.

Problème 2. Est-il possible de généraliser les résultats d'Antonini–Castellucci [23] au cas où les processus considérés forment des martingales pre-gaussiennes ?

Problème 3. Une question classique relative à la loi faible des grands nombres concerne les vitesses de convergence, le papier de Baum–Katz [7] reste une référence pour ce type d'étude.

Problème 4. En 2007, Budsaba et al. [20] ont obtenu des résultats dans le contexte de la loi forte des grands nombres pour les sommes partielles de moyennes mobiles de suites de variables ρ^-–mélangeantes et identiquement distribuées. On peut se demander s'il est possible de généraliser ces résultats aux suites de variables aléatoires ayant la propriété (P1) du Chapitre 3.

Bibliographie

[1] Adler, A., 1990. *Generalized one-sided laws of the iterated logarithm for random variables barely with or without finite mean.* J. Theoret. Prob. Vol **3**, pp 587–597.

[2] Adler, A., 2012. *An exact weak law of large numbers.* Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.). Vol **7**, pp 417–422.

[3] Alam, K., Saxena, K.M.L., 1981. *Positive dependence in multivariate distributions.* Commun. Statist. Theory Meth. Vol **10**, pp 1183–1196.

[4] An, J., Yuan, D.M., 2008. *Complete convergence of weighted sums for ρ^*-mixing sequence of random variables.* Stat. Probab. Lett. Vol **78**, pp 1466–1472.

[5] Artin, M., 1969. *Algebraization of formal moduli. I.* In Global analysis. Princeton University Press. pp 21–72.

[6] Barbut, M., 2009. *Les lois de Pareto et Lévy, leur cas particulier : la loi rang-fréquence de G.K. Zipf. In : Histoire Épistémologie Langage*, Vol **31**, fascicule 1. Mathématiques et langage. pp 61–74.

[7] Baum, L.E., and Katz, M. 1965. *Convergence rates in the law of large numbers.* Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 108–123.

[8] Bernou. I, Boukhari. F. *Limit theorems for dependent random variables with infinite means.* Statistics and Probability Letters, **189** (2022) 109563.

[9] Berthuet, R., 1981. *Loi du logarithme itéré pour certaines intégrales stochastiques.* Annales scientifiques de l'Université de Clermont. Mathématiques, Vol **69**, no 19, pp 9–18.

[10] Bingham, N.H., Goldie, C. M., Teugels, J. L., 1987. *Regular Variation.* Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Boukhari, F., Weber, M., 2002. *Almost sure convergence of weighted series of contractions*, Illinois J. Math. Vol **46**, pp 1–21.

[12] Boukhari, F., Malti, D., 2018. *Convergence of series of strongly integrable random variables and applications*, Statis. Probab. Lett. Vol **137**, pp 191–200.

[13] Boukhari, F., 2021. *Weak laws of large numbers for maximal weighted sums of random variables.* Comm. Statist. Theory Methods. Vol **50**, pp 105–115.

[14] Boukhari, F., 2021. *A lower bound for the tail probability of partial maxima of dependent random variables and applications.* Proc. Indian Acad. Sci. Vol **131**, pp 1–13.

[15] Boukhari, F., 2021. *On a weak law of large numbers with regularly varying normalizing sequences.* Journal of Theoretical Probability, pp 1-12.

[16] Boukhari, F., 2022. *A remark on the Kolmogorov-Feller weak law of large numbers.* Proc Math Sci. 132(2), pp 1–4.

[17] Bradley, R.C., 1990. *Equivalent mixing conditions of random fields.* Technical Report No. 336. Center for Stochastic Processes, University of North Carolina, Chapel Hill.

[18] Bradley, R.C., 2005. *Basic Properties of Strong Mixing Conditions.* A Survey and Some Open Questions, Probab. Surveys. Vol **2**, pp 107–144.

[19] Bryc, W. and Smolenski, W., 1993. *Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol **119**, pp 629–635.

[20] Budsaba, K., Chen, P., Volodin, A., 2007. *Limiting behavior of moving average processes based on a sequence of ρ^--mixing random variables*, Thailand Statistician. Vol **5**, pp 69–80.

[21] Budsaba, K., Chen, P., Volodin, A., 2007. *Limiting behavior of moving average processes based on a sequence of ρ^--mixing and NA random variables*, Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol **26**, pp 17–25.

[22] Buldygin, V.V., Kozachenko, Yu.V., 2000. *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[23] Castellucci, A., Giuliano Antonini, R., 2005. *Laws of iterated logarithm for stochastic integrals of generalized sub-gaussian processes.* Probab. Theory Math. Statist. Vol **73**, pp 43–51.

[24] Chandra,T. K., Ghosal, S., 1996. *Extensions of the strong law of large numbers of Marcinkiewicz and Zygmund for dependent variables.* Acta Mathematica Hungarica. Vol **71**, pp 327–336.

[25] Chandra,T. K., Ghosal, S., 1996. *The strong law of large numbers for weighted averages under dependence assumptions.* Journal of Theoretical Probability. Vol **9**, pp 797–809.

[26] Chen, P., Qi, Y., 2007. Generalized law of the iterated logarithm and its convergence rate. Stoch. Anal. Appl. Vol **25**, pp 89–103.

[27] Cheridito, P., 2001. *Mixed fractional Brownian motion*, Bernoulli. Vol **7**, pp 913–934.

[28] Chow, Y. S., Robbins, H., 1961. *On sums of independent random variables with infinite moments and " fair" games.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Vol **47**, pp 330–335.

[29] Chow,Y. S., Teicher, H., 1997. *Probability theory : Independence, interchangeability, martingales*, third ed., Springer Texts in Statistics. New York : Springer.

[30] Christofides, T.C., Vaggelatou, E. A., 2004. *Connection between supermodular ordering and positive/negative association.* J Multivariate Anal. Vol **88**, pp 138–151.

[31] Dudley,R. M., 1967. *The sizes of compact subsets of hilbert space and continuity of gaussian processes.* J. Funct. Anal. Vol **1** : 290–330.

[32] Etemadi, N., 1985. *On some classical results in probability theory.* Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, Vol **47**, Series A, Pt. 2, pp 215–221.

[33] Feller, W., 1957. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol **I**, 2nd edn. John Wiley, New York.

[34] Feller, W., 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, third Ed. Wiley.

[35] Feller. W., 2015. *On the Law of Large Numbers*, In Selected Papers I, pp 429–439. Springer, Cham.

[36] Gan, S.X., 2004.*Almost sure convergence for $\tilde{\rho}$-mixing random variable sequences*, Stat. Probab. Lett. Vol **67**, pp 289–298.

[37] Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., 1954. *Limit distributions for sums of independent random variables*, (Translated from the Russian by K. L. Chung), Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading. Mass.

[38] Giuliano, A. R., Kozachenko, Yu.V., Nikita, T., 2003. *Space of $Sub_\Phi(\Omega)$ random variables.* Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. Vol **27**, pp 95–124.

[39] Gnedenko, B., 1943.*Sur La distribution Limite du terme maximum d'une serie aléatoire* . Annals of Mathematics, Second Series. Vol **44**, pp 423–453.

[40] Gut, A., 2013. *Probability : A Graduate Course.* Springer Texts in Statistics New York : Springer-Verlag.

[41] Hu, T.Z.,2000. *Negatively superadditive dependence of random variables with applications.* Chin J Appl Probab Stat. Vol **16**, pp 133–144.

[42] Hu,Y.J., Ming, R.X., Yang, W.Q., 2007. *Large deviations and moderate deviations for m-negatively associated random variables.* Acta Math. Sci. (English Ed.), Vol **27**, pp 886–896.

[43] Jamison, B., Orey, S., and Pruitt, W., 1965. *Convergence of weighted averages of independent random variables.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete Vol textbf4, pp 40–44.

[44] Jensen, J. L. W. V.,1906. *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta math. t. Vol **30**, pp 175–193.

[45] Joag-Dev, K., Proschan, F., 1983. *Negative association of random variables with applications.* The Annals of Statistics. Vol **11**, pp 286–295.

[46] Karamata, J., 1930. *Sur une mode de croissance régulière des fonctions.* Mathematica (Cluj), Vol **4**, pp 38–53.

[47] Kemperman., J.H.B., 1977. *On the FKG-inequalities for measures on a partially ordered space.* Indag. Math. Vol **39**, pp 313–331.

[48] Ko, M.H, Kim, T.S., Lin, Z.,2005. *The Hajeck-R ´ enyi inequality for the AANA random variables and ' its applications.* Taiwanese Journal of Mathematics. Vol **9**, pp 111–122.

[49] Kolmogorov, A.N., Tikhomirov, V. M., 1959. *ϵ-entropy and ϵ-capacity of sets in function spaces.* Uspekhi Mat. Nauk 14. Vol **86**, pp 3–86.

[50] Krasnoselsky, M., Ruticky, Ya., 1961. *Convex functions and Orlicz spaces*, P.Noordfoff Ltd, Groningen.

[51] Kruglov, V. M., 2011. *A Generalization of Weak Law of Large Numbers*, Stoch. Anal. Appl., Vol **29**, pp 674–683. https ://doi.org/10.1080/07362994.2011.581099.

[52] Kuczmaszewska, A., 2007. *On complete convergence for arrays of rowwise dependent random variables*, Stat. Probab. Lett. Vol **77**, pp 1050–1060.

[53] Li, D., Rao, M.B., Tomkins, K.J., 1995. A strong law for B-valued arrays. Proc. Amer. Math. Soc. Vol **123**, pp 3205–3212.

[54] Ledoux, M., Talagrand, M., 1991. *Probability in Banach Spaces.* Springer, Berlin.

[55] Maller, R. A., 1978. *Relative stability and the strong law of large numbers*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete. Vol **43**, pp 141–148.

[56] Mandelbrot, B. B., and Van Ness, J. W., 1968. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications.* SIAM Review. Vol **10**, pp 422–437.

[57] Martin-Löf, A., 1985. *A limit theorem which clarifies the 'Petersburg paradox'.* J. Appl. Prob. Vol **22**, pp 634–643.

[58] Matsumoto, K., Nakata, T., 2013. *Limit theorems for a generalized Feller game.* J. Appl. Probab. Vol **50**, pp 54–63.

[59] Mounir, Z., 2006. *On the mixed fractional brownian motion.* Journal of applied Mathematics and Stochastique Analysis. Vol **2006**, pp 1–9.

[60] Naderi, H., Boukhari, F., Matula, P., 2021. *A note on the weak law of large numbers for weighted negatively superadditive dependent random variables.* Communication in Statistics-Theory Methods. pp 1–11.

[61] Nakata, T., 2015. *Limit theorems for nonnegative independent random variables with truncation.* Acta Math. Hungar. Vol **145**, pp 1–16.

[62] Nakata, T., 2016. *Weak laws of large numbers for weighted independent random variables with infinite mean.* Stat. Probab. Lett. Vol **109**, pp 124–129.

[63] Nešlehová, J., Embrechts, P., Chavez-Demoulin, V., 2006. *Infinite mean models and the LDA for operational risk.* Journal of Operational Risk. 1 (1), 3–25.

[64] Paley, R. E. A. C., Zygmund, A., 1932. *On some sequences of functions III.* Proc. Camb. Phil. Soc. Vol **28**, pp 190–205.

[65] Peligrad. M., Gut. A., 1999. *Almost-sure results for a class of dependent random variables*, J. Theoret. Probab. Vol **12**, pp 87–104.

[66] Qi, Y., 1994. On the strong convergence of arrays. Bull. Aust. Math. Soc. Vol **50**, pp 219–233.

[67] Rogers, L.C.G., 1997. *Arbitrage with fractional Brownian motion.* Math. Finance. Vol **7**, pp 95–105.

[68] Shao, Q. M., 2000. *A Comparison Theorem on Moment Inequalities Between Negatively Associated and Independent Random Variables.* J. Theoret. Probab. Vol **13**, pp 343–356.

[69] Shen, A., Zhang, Y., Xiao, B., Volodin, A., 2017. *Moment inequalities for m–negatively associated random variables and their applications.* Statist. Papers. Vol **58**, pp 911–928.

[70] Stein, S., 1972. *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol **2**, University of California Press, Berkeley, CA, pp 583–602.

[71] Sung, S.H., 2010. *Complete convergence for weighted sums of ρ^*-mixing random variables.* Discrete Dyn. Nat. Soc. Article ID 630608, 13p.

[72] Sung, S.H., 2013. *On the strong convergence for weighted sums of ρ^*-mixing random variables*, Stat. Pap. Vol **54**, pp 773–781.

[73] Taqqu, M. S., Czado, C., 1985. *A survey of functional laws of the iterated logarithm for self–similar processes.* Stochastic Models, Vol **1**, pp 77–115.

[74] Utev, V., Peligrad, M., 2003. *Maximal Inequalities and an Invariance Principle for a Class of Weakly Dependent Random Variables.* J. Theoret. Probab. Vol **16**, pp 101–115.

[75] Valadier. M, 1971. *Sous–différentiabilité de fonctions covexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné.* Math. Scand. Vol **30**, pp 30–74.

[76] Wang, Y., Yan, J., Cheng, F., Su,C. 2003. *The strong law of large numbers and the law of the iterated logarithm for product sums of NA and AANA random variables.* Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol **27**, pp 369–384.

[77] Wang, J. F., Lu, F. B., 2006. *Inequalities of maximum of partial sums and weak convergence for a class of weak dependent random variables.* Acta Math. Sinica. Vol **22**, pp 693–700.

[78] Wang, X.J., Xia, F.X., Ge, M.M., Hu,S.H., Yang, W.Z., 2012. *Complete consistency of the estimator of nonparametric regression models based on $\tilde{\rho}$-mixing sequences*, Abstr. Appl. Anal. Article ID 907286, 12p.

[79] Wang, X. J., Deng, X., Zheng, L. L., Hu, S. H., 2014. *Complete convergence for arrays of rowwise negatively superadditive–dependent random variables and its applications.* Statistics : A Journal of Theoretical and Applied Statistics. Vol **48**, pp 834–850.

[80] Weber, M., 2004. *Some examples of application of the metric entropy method.*Acta Mathematica Hungarica. Vol **105**, pp 39–83.

[81] Xu. H., Li. X., Yang, W., Xu, F., 2019. *Laws of large numbers with infinite mean*. J. Math. Inequal. Vol **13**, pp 335–349.

[82] Yang, W., Yang, L., Wei, D., Hu, S., 2019. *The laws of large numbers for Pareto-type random variables with infinite means*. Comm. Statist. Theory Methods. Vol **48**, pp 3044–3054.

[83] Yuan, D. M., An, J. 2009. *Rosenthal type inequalities for asymptotically almost negatively associated random variables and applications*. Sci. China Ser. A : Math. Vol **52**, pp 1887–1904.

[84] Zhang, L. X., Wang, X. Y. 1999. *Convergence rates in the strong laws of asymptotically negatively associated random fields*. Appl. Math. J. Chinese Univ. Vol **14**, pp 406–416.

ملخص : في هذه الأطروحة نهتم بالسلوك التقاربي لمتغيرات عشوائية بحيث تكون الفروقات d-Φ -الدون-غوسية و المجاميع المرجحة لمتغيرات عشوائية ذات الأمل الرياضي الغير منته. بالنسبة للمجموعة الأولى، نستخدم معيار "دادلي" المتري الشهير للحصول على قانون لوغارتمي متكرر. فيما يتعلق بالمجموعة الثانية نبرهن قانون ضعيف للأعداد الكبيرة في ظل ظروف إرتباط ضعيفة كما يتم الحصول على شرط ضروري لصحة هذا القانون.

الكلمات المفتاحية: قانون اللوغاريتم المتكرر، العدد الأنتروبي، Φ-الدون-غوسية، القوانين الضعيفة، القوانين الدقيقة المرجحة، توزيعات نوع باريتو، المتباينات القصوى من نوع غوزونتال، لعبة سانت بطرسبرغ، لعبة فيلر.

Résumé : Dans cette thèse, on s'intéresse au comportement asymptotique d'une classe de processus stochastiques à accroissement d-Φ-sous-gaussiens et des sommes pondérées de variables aléatoires de moyennes infinies. Pour la première famille de processus, on fait appel au critère d'entropie métrique de Dudley afin d'établir une loi de logarithme itéré. En ce qui concerne la seconde famille, on démontre dans un cadre unifié une loi faible des grands nombres sous des conditions de dépendance faible. Une condition nécessaire pour la validité de cette loi est aussi obtenue.

Mots clés : loi du logarithme itéré, nombre d'entropie, Φ-sous-gaussien, lois faibles, lois exactes pondérées, distribution de type Pareto, inégalités maximales de type Rosenthal, jeu de St. Petersburg, jeu de Feller.

Abstract: In this thesis, we are interested in the asymptotic behavior of a class of stochastic processes with d-Φ-subgaussian increments and weighted sums of random variables with infinite means. For the first family of processes, the Dudley metric entropy criterion is used to establish a law of iterated logarithm. For the second family, a weak law of large numbers is proved in a unified framework under weak dependence conditions. A necessary condition for the validity of this law is also derived.

Keywords : law of the iterated logarithm, metric entropy, Φ-sub-gaussian, Weak laws, Weighted exact laws, Pareto-type distributions, Rosenthal–type maximal inequalities, St. Petersburg game, Feller game.