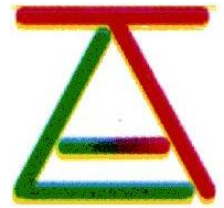


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Électrique et Électronique
Laboratoire d'Automatique de Tlemcen



THÈSE de DOCTORAT

présentée par

Amal CHOUKCHOU-BRAHAM
née EL HATHOUT

Titre :

**CONTRIBUTION À LA STABILISATION
DES SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS ACTIONNÉS**

Soutenue le 21 Mai 2011 devant le jury :

Président	N. Ghouali	Professeur à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen, Algérie.
Examineur	K. Busawon	Professeur à Northumbria University Newcastle, United Kingdom.
Examineur	M. Djemaï	Professeur à l'Université de Valenciennes, France.
Examineur	M. F. Khelfi	Professeur à l'Université Es sénia Oran, Algérie.
Directeur de thèse	B. Cherki	Maître de conférences à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen.

Résumé

La commande des systèmes mécanique sous actionnés est un sujet de recherche actif en Automatique et en Robotique. D'une part, la commande de ces systèmes donne souvent lieu à des problèmes qu'on ne peut résoudre avec des techniques classiques, d'autre part, l'émergence récente d'applications robotiques mettant en oeuvre des véhicules autonomes sous actionnés, tels que les dirigeables, les sous-marins, ou les machines volantes de type VTOL (Vertical Take-off and Landing), constitue une forte incitation à développer plus en avant les recherches sur ce sujet.

L'objectif de la thèse est de contribuer à ces recherches en développant des outils pour la synthèse de commande systématique pour les systèmes sous actionnés. Ces derniers sont définis comme étant des systèmes qui possèdent moins d'entrées de commande que de degrés de liberté à commander.

L'intérêt d'étudier et de commander de tels systèmes provient non seulement de l'existence réels de ces systèmes et des applications qui leurs sont associées mais aussi des avantages qu'ils peuvent présenter sur la réduction du prix et du poids des applications voire même, la contribution à la réussite de certaines mission délicates en cas de panne d'actionneurs. Cependant, la restriction sur les actionneurs rend la commande de ces systèmes plutôt difficile. En effet, certains résultats et propriétés établis pour toute une classe de système non linéaire tels que la linéarisabilité par feedback, la passivité et la matching condition ne sont plus valables. De plus, d'autres propriétés indésirables telles qu'un degré relatif non déterminé ou un comportement à non minimum de phase se manifestent. Par ailleurs, plusieurs de ces systèmes présentent une obstruction structurelle à l'existence de commandes stabilisantes lisses et invariantes dans le temps.

Toutes ces raisons ont fait que le plus souvent, ces systèmes sont étudiés sur la base du cas par cas. À notre connaissance, seules deux tentatives de classifications pour ces systèmes sont disponibles dans la littérature.

La première est due à *Seto et Baillieul* et est basée sur la construction d'un diagramme de circuit de contrôle pour représenter les forces d'interactions à travers les degrés de liberté du système sous actionné. Trois types de structures pour les systèmes à deux degrés de liberté sont identifiées : structure chaîne, structure arbre et point isolé. Les auteurs dans leur

classification donnent une solution de commande que pour les systèmes ayant une structure chaîne où une procédure systématique de backstepping est mise au point ; c'est précisément le point fort de cette classification, par contre son point faible est que les deux autres structures restent un problème ouvert pour la commande.

La deuxième classification est due à *Reza Olfati-Saber* et est basée sur les propriétés structurelles des systèmes mécaniques telles que l'actionnement de certains degrés de liberté, le couplage des entrées et l'intégrabilité des moments généralisés. En fonction de ces propriétés, l'auteur a proposé de transformer les systèmes ayant les mêmes propriétés en trois formes normales principales à savoir : la forme normale feedback stricte, feedforward et la forme normale non triangulaire. L'auteur de cette classification a proposé une procédure de commande en deux étapes pour les deux premières formes normales : stabiliser le système réduit en premier lieu, ensuite étendre la stabilisation au système globale par une procédure de backstepping ou de forwarding selon la forme normale. Quelques suggestions de commande ont été données pour la troisième forme. Cependant, la procédure proposée pour la stabilisation du système réduit nécessite la vérification d'une hypothèse assez restrictive de sorte que l'auteur lui-même ne l'a utilisée qu'une seule fois. De plus, sa procédure qui s'effectue en deux étapes conduit à des explosions de termes qui engendrent des expressions de commandes très compliquées, par conséquent difficiles à implémenter.

Dans ce travail, nous proposons de répondre aux problèmes de stabilisation, encore ouverts, des deux structures en arbre et en point isolé de la première classification jugées plus difficiles à commander que la structure chaîne. Notre stratégie consiste en fait à étendre la procédure systématique élaborée pour la structure chaîne à une sous classe de système ayant une structure arbre en s'inspirant partiellement des changements de contrôle et de coordonnées de la deuxième classification. Cependant, les systèmes transformés ne satisfont pas une certaine hypothèse du schéma de contrôle de backstepping, par conséquent, le contrôle synthétisé présente des singularités réduisant ainsi le domaine de stabilité.

Pour assurer une stabilité globale, nous proposons en premier lieu d'adopter une stratégie de contrôle hybride permettant le passage à travers les singularités. En second lieu, et en se basant sur la même fonction de Lyapunov que dans la première stratégie, nous proposons de modifier la loi de commande afin de tenir compte des singularités. L'efficacité des deux contrôles est démontré à travers l'exemple du système Tora qui possède initialement une structure arbre et auquel nous avons réussi à appliquer une procédure de backstepping, nous

avons par la même occasion permis la relaxation d'une hypothèse par rapport au schéma de contrôle initial.

Ensuite, pour la deuxième sous classe de la structure arbre non transformable en structure chaîne, nous proposons une procédure de contrôle basée sur une linéarisation partielle suivie d'une synthèse de loi de commande incluant des termes stabilisants pour deux variables en parallèles afin de stabiliser simultanément deux degrés de libertés.

Enfin, pour les systèmes ayant des structures en point isolé, nous proposons d'atteindre les objectifs de commande à travers une linéarisation approximative ou éventuellement des approximations d'ordre supérieur suivie d'une synthèse de commande robuste de type mode glissant.

La conception de tous les contrôles est basée sur l'utilisation de plusieurs techniques de commande. Essentiellement sur des procédures de backstepping, de linéarisation partielles et approximatives, des commandes à commutations et par mode glissant. Les preuves de stabilité des lois de commande sont élaborées moyennant la théorie de Lyapunov et appuyées par des résultats de simulation.

Et bien que les systèmes réels soient d'ordre élevé, les exemples considérés dans cette thèse, pour illustrer l'efficacité des schémas de contrôle, sont à deux degrés de liberté. Ces exemples incluent le système chariot pendule inversé, la masse glissante sur chariot, l'Acrobot, le Pendubot, le système Tora, le pendule à roue inertielle et le système bille sur rail. La plupart de ces systèmes possèdent une signification en tant que benchmarks du contrôle non linéaire. De plus, le principe de fonctionnement de certaines applications pratiques est similaires au fonctionnement de ces systèmes.

Pour permettre une compréhension plus simple aux lecteurs, nous avons introduit dans cette thèse un ensemble de résultats classiques mais se trouvant souvent dans des références disparates.

"...Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément."

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Automatique de Tlemcen sous la direction de Monsieur Brahim Cherki, Maître de conférences à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes sincères remerciements. Je lui dois beaucoup. Il m'a transmis sa passion pour l'automatique, m'a initié à la recherche avec compétence et modestie et a comblé mes nombreuses lacunes avec délicatesse. Il a toujours été présent et disponible et n'a jamais cessé de me valoriser aux moments où je perdais confiance en moi. Et par dessus tout, il m'a appris que le savoir faire est avant tout un savoir être. Je suis enchantée d'avoir été son étudiante et d'être devenue son amie et espère rester les deux.

Je voudrais remercier Monsieur le professeur Nouredine Ghouali recteur de l'Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse malgré ses nombreuses occupations. Je voudrais le remercier également de m'avoir initialement ouvert les portes du Laboratoire d'Automatique de Tlemcen. Sa façon d'enseigner m'a beaucoup marquée et m'a donnée envie de faire de l'automatique.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Krishna Busawon, professeur à Northumbria University Newcastle, United Kingdom, qui me fait l'honneur d'accepter d'être membre du jury de cette thèse et de l'examiner.

Je remercie vivement Monsieur Mohamed Djemaï, Professeur à l'Université de Valenciennes, France pour l'intérêt particulier qu'il a porté à mon travail et l'immense plaisir qu'il me fait en acceptant de faire partie de ce jury, ses conseils et ses remarques m'ont été très précieux.

Je remercie également Monsieur Mohamed Fayçal Khelfi Professeur à l'Université Es sénia Oran, Algérie, d'avoir accepté d'être examinateur de ma thèse et de juger mon travail.

Un grand merci pour toute l'équipe administrative de la faculté de Technologie, en particulier à notre chef de département, enseignant et ami Monsieur Abdelmadjid Meghebbar. C'est l'exemple même du régulateur robuste qui a su diriger le département d'une main ferme et souple à la fois. Je le remercie également pour la confiance qu'il me fait et la liberté qu'il me donne à diriger mes enseignements.

Je tiens à remercier tous mes collègues du Laboratoire d'Automatique de Tlemcen pour la bonne humeur et l'ambiance conviviale autour desquelles s'est déroulé ce travail, en particulier Boumédiène, Amine, Choukri, Salima et Sihem.

Ce document a été entièrement rédigé sous \LaTeX , je remercie Monsieur Brahim Cherki de m'avoir initiée à son utilisation et Monsieur Abdelhak Moussaoui de m'avoir aidée à régler certains détails d'ordre technique.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers tous mes enseignants sans exception du primaire à la post graduation avec une pensée bien particulière à notre cher et regretté Monsieur Kara Terki Chafik, que Dieu puisse l'accueillir dans son vaste paradis. J'aimerais remercier aussi tous mes étudiants pour leur reconnaissance.

Une pensée aussi et surtout à mon très cher et très regretté père Abdelkader dont le seul soucis était notre bien être et l'accomplissement de nos études. Je lui serai reconnaissante toute ma vie et je ne peux que prier le bon Dieu pour lui pardonner et l'accueillir dans son vaste paradis.

Mes sincères remerciements, toute ma gratitude et ma reconnaissance vont à ma très chère mère Amina pour son amour, son soutien, son aide et sa bienveillance. Que Dieu puisse nous la garder en bonne santé. Je remercie également très sincèrement mes soeurs Radia et Tsouria et mes frères Sidi Mohamed, Chaib, Ismail et Mustapha pour leur aide, leur disponibilité et leurs encouragements. Je remercie aussi ma famille et ma belle famille pour leur soutien et leur aide en particulier ma belle mère, Saléha et Hamed.

Un grand merci pour la famille Benosman qui m'a fourni le temps et la tranquillité d'esprit pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mes enfants Tadj El Moulk, Youssouf et Sara, qui malgré leur jeune âge ont compris mon souhait d'effectuer cette thèse et m'excuse auprès d'eux pour le temps que je leur ai "emprunté" pour l'accomplir.

Finalement, je voudrais remercier infiniment mon mari Noureddine, si cette thèse a abouti c'est bien grâce à ses encouragements, à sa patience, à sa compréhension, à son aide et à son soutien, je lui suis reconnaissante pour son comportement globalement exponentiellement stable.

À la mémoire de mon père

À ma famille

À ma belle famille

À ma petite famille

En témoignage de reconnaissance pour
pour l'affection dont ils m'entourent.

DISCARD THIS PAGE

Tables des Matières

	Page
Table des figures	xii
Table des tableaux	xv
1 Introduction générale, motivations et bref état de l'art	2
1.1 Les systèmes mécaniques sous actionnés : problématiques et motivations	3
1.2 Bref état de l'art sur la commande des SMSA	5
1.3 Objectifs de la thèse	6
1.4 Contenu des chapitres	8
1.5 Contributions de la thèse	9
1.6 Publications	10
2 Préliminaires théoriques sur les systèmes non linéaires : stabilité et commande	12
2.1 Stabilité des systèmes	13
2.1.1 Que choisir ?	13
2.1.2 Théorie de Lyapunov	14
2.1.3 Stabilité des systèmes à commutations	20
2.1.4 Stabilisation d'un système	27
2.2 Théorie de la commande	27
2.2.1 Stabilisation locale	28
2.2.2 Linéarisation par bouclage	29
2.2.3 Un mot sur la passivité	35
2.2.4 Technique du Backstepping	37
2.2.5 Contrôle par modes glissants	39
2.2.6 Technique de commande basée sur la commutation entre plusieurs contrôleurs	45
2.3 Conclusion	46
3 Les systèmes mécaniques sous actionnés	47
3.1 Systèmes Lagrangiens	47
3.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés	49
3.3 Systèmes mécaniques sous actionnés	50
3.4 Systèmes mécaniques non holonomes	50
3.5 Sous actionnement et non holonomie	52
3.6 Problématiques associées aux SMSA	54
3.7 Linéarisation partielle par feedback	57

	Page	
3.7.1	Linéarisation partielle localisée	57
3.7.2	Linéarisation partielle non localisée	58
3.7.3	Linéarisation partielle sous des entrées couplées	59
3.8	La symétrie en mécanique	60
3.9	Exemples des systèmes mécaniques sous actionnés	61
3.9.1	Chariot-pendule inversé	62
3.9.2	Masse glissante sur chariot	62
3.9.3	Système Tora	63
3.9.4	Acrobot et Pendubot	63
3.9.5	Le pendule à roue inertielle : inertia wheel pendulum	64
3.9.6	La bille sur rail (ball and beam)	65
3.10	Conclusion	66
4	Classification des systèmes mécaniques sous actionnés	67
4.1	Classification des SMSA selon <i>Seto et Baillieul</i>	67
4.1.1	Principe du diagramme de circuit de contrôle	68
4.1.2	Exemples	72
4.2	Classification des SMSA selon <i>Olfati Saber</i>	75
4.2.1	Formes normale des SMSA	76
4.2.2	SMSA à deux degrés de liberté	79
4.2.3	Classification des SMSA d'ordre élevé	81
4.3	Comparaison entre les deux classifications	86
4.4	Conclusion	86
5	Stratégie de commande pour la stabilisation des systèmes mécaniques sous actionnés	88
5.1	Stabilisation des systèmes sous actionnés possédant une structure chaîne	89
5.2	Synthèse systématique de contrôle pour les systèmes possédant une structure arbre	100
5.2.1	Stabilisation des SMSA actionnés selon le mode A1	101
5.2.2	Stabilisation des SMSA actionnés selon le mode A2	118
5.3	Stabilisation des SMSA ayant une structure point isolé	123
5.3.1	Expression de la commande pour un système obtenue par linéarisation approximative	124
5.3.2	Expression de la commande pour un système obtenue par approximation d'ordre supérieur	126
5.3.3	Application : système ball and beam	126
5.4	Conclusion	131
6	Conclusion générale et perspectives	132
ANNEXE	Limites de la linéarisation et dangers de la déstabilisation	136
ANNEXE	Un peu de géométrie différentielle	140

Appendix

Page

ANNEXE	Commandabilité des systèmes continus	143
ANNEXE	Commande numérique d'un système mécanique sous actionné linéaire : Cas du pendule inversé	150
Bibliographie		159

DISCARD THIS PAGE

Table des figures

Figure	Page	
2.1	Illustration de la définition intuitive de la stabilité.	14
2.2	Stabilité (à gauche) et stabilité asymptotique (à droite) de \bar{x}	16
2.3	Fonction de Lyapounov V pour le champ de vecteurs f : f est rentrant sur chaque ensemble de niveau de V et convergent vers le minimum de V	19
2.4	Profil d'énergie du système linéaire à commutations pour $N = 2$	23
2.5	Profil d'énergie du système non linéaire à commutations pour $N = 3$	24
2.6	Profil d'énergie du système non linéaire à commutations pour $N = 2$	24
2.7	Illustration des valeurs moyennes de $V_i(x(T_i^j))$	25
2.8	Illustration de la décroissance des énergies en présence de systèmes instables	26
2.9	Attractivité de la surface	41
2.10	Phénomène de chattering	44
2.11	Fonction de saturation	45
2.12	Fonction sigmoïde	45
2.13	Architecture des multi contrôleurs	46
3.1	Système de type unicycle.	51
3.2	Le chariot pendule inverse.	62
3.3	La masse glissante sur chariot.	62
3.4	Tora système.	63
3.5	L'Acrobot et le Pendubot.	63
3.6	La roue inertielle pendulaire.	64
3.7	La bille sur rail.	65
4.1	Structures chaînes.	70

Figure	Page
4.2 Structures arbres.	70
4.3 Structure point isolé.	71
4.4 CFD du système masse glissante sur une masse.	73
4.5 CFD du système pendule inverse.	74
4.6 CFD du système bille sur rail.	75
4.7 Classification des SMSA selon <i>Olfati-Saber</i>	85
4.8 Comparaison entre les deux classification des SMSA.	86
5.1 Trajectoires des états et force appliquée au système masse glissante pour les paramètres $M = 1Kg$, $m = 0.2Kg$, $B = 0.02$ et pour les conditions initiales $(0.5, 0.5, 0, 0)$	99
5.2 Le système Tora.	104
5.3 CFD du système Tora	105
5.4 CFD du système Tora transformé.	106
5.5 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, 0, 0, 0)$	110
5.6 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, \frac{\pi}{2}, 0, 0)$	110
5.7 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, \pi, 0, 0)$	111
5.8 Régions de commutation pour le contrôle.	111
5.9 Trajectories des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, 0, 0, 0)$ and $e = 0.2$	112
5.10 Profil d'énergie du système à commutation.	114
5.11 Trajectoires et contrôle du Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, 0, 0, 0)$	116
5.12 Evolution de $ e_2 W_2 - \nu_2 $	117
5.13 Trajectoires et contrôle du Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, \pi, 0, 0)$	118
5.14 Représentation de l'accélération, vitesse et position du chariot	120

Figure	Page
5.15 Trajectoires du pendule, du chariot et tension du moteur pour les conditions initiales $(0, 1, 0, 0)$	121
5.16 Trajectoires du pendule, du chariot et tension du moteur pour les conditions initiales $(0, 1, 0, 0)$	123
5.17 Le système ball and beam.	126
5.18 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.2rad$	128
5.19 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.7rad$ relatifs aux commandes u_{MG}^{app} (en bleu) et u_{MG} (en rouge).	129
5.20 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.2rad$ lorsque la fonction signe (tracés en bleu) est remplacée par une foncion arctangente (tracés en rouge). . .	130
5.21 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.7rad$ (en bleu : la commande u_{MG}^{app} , en rouge : la commande u_{MG}^{app} dans laquelle nous avons remplacé la fonction signe par une fonction arctg).	130
A.1 Réponses d'un système non linéaire pour plusieurs conditions initiales.	137
 Appendix	
Figure	
C.1 Stabilistion par retour d'état statique.	144
C.2 Reconstructeur d'état	145
C.3 Stabilisation par retour d'état reconstruit	146
C.4 Relation entre les différents concepts de commandabilité en non linéaire.	149
D.1 Représentation du système pendule inversé.	150
D.2 Paramètres du système pendule inversé.	152
D.3 Commande par placement de pôles	153
D.4 Schéma de la régulation continu	156
D.5 Schéma de la régulation numérique	156
D.6 Commande numérique du pendule inversé	157

DISCARD THIS PAGE

Table des tableaux

Table	Page
4.1 Commandabilité des variables de configuration dans un CFD	72
Appendix	
Table	

Liste des abréviations :

- SMSA : Systèmes mécaniques sous actionnés
CFD : Control flow diagram
GAS : Globalement asymptotiquement stable
GES : Globalement exponentiellement stable

Chapitre 1

Introduction générale, motivations et bref état de l'art

"...J'ai seulement eu en vue d'exposer dans cet Ouvrage ce que je suis parvenu à faire en ce moment et ce qui, peut-être, pourra servir de point de départ pour d'autres recherches de même genre."

M. A. Lyapunov.

De tout temps, l'homme n'a cessé de rêver de voyager de continent en continent, de voler tel un oiseau, d'explorer les fins fonds des océans et de conquérir l'espace ; ses ambitions l'ont poussées à chercher, à concevoir et à améliorer les moyens qui lui permettraient de réaliser ses objectifs.

En outre, il lui serait difficile voire impossible d'atteindre de tels objectifs sans avoir recours aux systèmes mécaniques, et bien que l'intérêt que porte les chercheurs à ces systèmes remonte à loin, Newton, Lagrange, Kepler, Hamilton et beaucoup d'autres, actuellement ce domaine est encore plus actif en raison des diverses applications de ces systèmes dans la vie réelle et industrielle.

En effet, durant ces dernières décennies, une série d'applications scientifiques, industrielles et militaires ont motivé l'analyse et la conception rigoureuses de commande pour les systèmes mécaniques. Comme l'approximation par le linéarisé tangent n'est pas suffisante voire même inadaptée sur la majorité de ces systèmes qui présentent un comportement global non linéaire, l'attention et la curiosité des mathématiciens furent attirées. En réunissant leurs efforts, les ingénieurs et les scientifiques ont développé plusieurs théories de contrôle comprenant le contrôle linéaire, optimal, adaptatif, non linéaire et plus récemment robuste afin de tenir compte de la présence inévitable des incertitudes dans un contexte réel.

Cet intérêt est devenu encore plus grand lorsque les chercheurs se sont rendus compte que les systèmes mécaniques pouvaient être en plus sous actionnés.

1.1 Les systèmes mécaniques sous actionnés : problématiques et motivations

Formellement, un système mécanique est dit sous actionné lorsque le nombre de commandes est inférieur aux degrés de liberté à commander. Cette classe de systèmes est riche en applications aussi bien pratiques que théoriques incluant divers domaines tels que la robotique, les systèmes aéronautiques et spatiaux, les systèmes marins et sous-marins, les systèmes flexibles et mobiles. À l'opposé de ces systèmes qui ont une signification physique, les systèmes pendulaires, l'Acrobot, le Pendubot, le Tora et la bille sur rail ont une signification en tant que benchmarks du contrôle non linéaire où des procédures classiques ne peuvent être appliquées.

Le sous actionnement peut provenir de l'une des situations suivantes :

- i) dynamiques des systèmes par exemples : avions, hélicopters, sous-marins, systèmes de locomotion sans roues.
- ii) par conception afin de réduire le coût et le poids tels que les satellites à deux propulseurs et les robots à articulations flexibles.
- iii) lors d'une panne d'actionneur par exemple dans un avion ou un navire.
- vi) imposé artificiellement pour générer des systèmes complexes non linéaires de faible ordre tels que le fameux pendule inversé et tous les benchmarks cités un peu plus haut.

La restriction sur l'autorité de commande rend les SMSA plus difficiles à commander. Effectivement, le caractère de sous actionnement est encore plus difficile à gérer que celui du non linéaire. Il s'en suit que, certains résultats et propriétés établis pour toute une classe de système non linéaire tels que la linéarisabilité par feedback, la passivité et la matching condition ne sont plus valables. De plus, d'autres propriétés indésirables telles qu'un degré relatif non déterminé ou un comportement à non minimum de phase se manifestent.

Par ailleurs, plusieurs SMSA présentent une obstruction structurelle à l'existence de commandes stabilisantes lisses et invariantes dans le temps car, ils ne satisfont pas la célèbre

condition nécessaire de Brockett [22], une des contributions les plus marquantes dans ce domaine. Typiquement, une première indication de cette obstruction découle du fait que la linéarisation de ces systèmes autour de n'importe quel point d'équilibre est non commandable particulièrement en absence des termes de gravité. Ainsi, de fausses conclusions sur la commandabilité du système non linéaire peuvent être tirées.

Bien que ces difficultés de commande suggèrent que l'objectif de stabilisation asymptotique est sans doute trop contraignant pour la commande des SMSA, l'existence réelle de ces systèmes et les défis théoriques qu'ils offrent ont obligé les chercheurs à s'y investir. De plus, la maîtrise du contrôle de ces systèmes pourrait transformer leurs inconvénients en avantages. En effet, pour le même espace de configuration, un système pleinement actionné nécessite plus de commandes que s'il est sous actionné. Ce qui augmente le prix et le poids du système. Trouver un moyen pour commander une version d'un système sous actionné, permettrait d'éliminer certains dispositifs de commande, d'améliorer la performance globale, et de réduire le coût de construction.

De plus, le sous actionnement fournit une technique de commande pour la sauvegarde des systèmes. Si par exemple le système pleinement actionné se trouve endommagé et si nous disposons d'un contrôleur sous actionné, alors nous pouvons l'utiliser en cas d'urgence (par exemple une panne des propulseurs dans un avion, fusée, ou engins spatiaux) afin d'échapper à l'échec du système ou de la mission. Évidemment, une telle solution serait plus rentable économiquement que l'ajout d'actionneurs redondants.

Toutefois, en raison de la difficulté à mettre en évidence des propriétés structurelles suffisamment générales et exploitables afin de classer ces systèmes selon ces propriétés et de pouvoir choisir la commande appropriée selon la classe obtenue, les systèmes sous actionnés ont jusqu'à présent été étudiés au cas par cas. Aussi, l'étude et la synthèse de commandes pour ces systèmes ont bénéficié de beaucoup de travaux très variés incluant diverses techniques et stratégies de conception de commande.

1.2 Bref état de l'art sur la commande des SMSA

Le but de cette partie n'est pas de donner un bilan complet des travaux dans le domaine rapporté dans la littérature, mais simplement de mettre en lumière les principales contributions dont certaines ont été sources de notre réflexion.

Parmi les travaux les plus reconnus, il y a ceux basés sur l'énergie dûs essentiellement à Astrom, Furuta, Spong et bien d'autres [5, 16, 46, 68, 71, 102, 157, 159, 162]; dans ces travaux, la stratégie de commande est en général de faire balancer les systèmes (surtout de type pendulaires tels que le pendule inversé, l'Acrobot, le Pendubot, le pendule à roue inertielle) afin de les amener au voisinage de leur domaine de linéarité, une fois dans ce domaine, un switch vers une commande linéaire de type LQR ou placement de pôles est effectué.

De façon similaire, certaines méthodes basées sur la passivité consistent aussi à faire balancer les systèmes précédents mais cette fois pour les amener à leurs orbites homoclines et de switcher ensuite vers une commande linéaire tels les travaux de Fantoni, Ortega et Spong dans [47, 124, 126, 157]. D'autres travaux sur la passivité dûs à Janković et Sepulchre portent sur la transformation en des systèmes en cascades [78, 149] par exemple pour le système Tora ou encore celui de Kolesnichenko [86] pour le Pendubot.

Le plus souvent les auteurs ne jugent pas nécessaire d'établir une preuve de stabilité du système avec switch et c'est un peu ce que nous leur reprochons, de plus, le domaine d'application de ces méthodes sur des systèmes réels reste assez restreint.

À cause de sa complexité le système bille sur rail a fait l'objet de plusieurs études incluant les méthodes de linéarisation approximatives de Hauser et al [66], des saturations pour la stabilisation des systèmes en cascade en feedforward de Teel [173], des stabilisations par retour de sortie de Teel et Praly [174], de la synthèse par petits gains de Sepulchre dans [148] et de la commande par mode glissant de Voytsekhovskiy et Hirschorn dans [183].

Le VTOL (vertical take off and landing aircraft) est un autre exemple de SMSA largement étudié notamment pour ses applications industrielles et pour la propriété de non minimum de phase qu'il présente. Parmi ces travaux : ceux de Fantoni, Hauser, et McClamroch [47, 65, 108] et plus récemment, ceux de Dixon et Tomlin [41, 122].

Les véhicules marins et sous-marins ont eux aussi bénéficié d'une large attention par différents chercheurs. Une loi de commande lisse et continue permettant d'aboutir exponentiellement à une position et orientation données a été introduite par Egeland [43]. Dans [133], une loi de commande périodique qui stabilise asymptotiquement le véhicule à l'origine a été présentée par Pettersen et Egeland. Inspiré par les travaux de Morin et Samson [114], Pettersen et Egeland [132] ont proposé une commande périodique non stationnaire permettant d'avoir une stabilité exponentielle du véhicule marin sous actionné. Ensuite Pettersen et Nijmeijer [131] ont proposé une loi de commande variant dans le temps et qui a aboutit à une stabilisation et une poursuite globale et pratique du véhicule marin sous actionné. Plus récemment, le travail de Ghommam [56] formule et résoud les problèmes de commande de positionnement dynamique, de la poursuite de trajectoire et du suivi de chemin des véhicules marins sous actionnés.

En plus du problème de stabilisation des SMSA, la poursuite de trajectoire a aussi été abordée dans les travaux de Bullo, Hu, Reyhanoglu et Sandoz, [196, 105, 129, 139, 144]. Par ailleurs, lorsque la condition de Brockett n'est pas satisfaite, certains chercheurs se sont intéressés à la question et ont proposé des contrôles discontinus. Parmi ces travaux, nous citons ceux de Oriolo et Nakamura et ceux de Reyhanoglu [125, 138, 140].

D'autres stratégies de contrôle incluent des procédures de backstepping et forwarding dues à Gronard, Sepulchre et Seto se trouvent dans [60, 149, 151, 195], des commandes par mode glissant par Fridman, Fahimi, Khalil et Su dans [1, 45, 118, 164, 183, 192], des commandes hybrides et à commutations par Fierro, Tomlin et Zhang [48, 139, 175, 203] et même par logique floue et réseaux de neurones dûs à Han, Lin et Wai [62, 98, 184].

Plus récemment, les chercheurs se sont intéressés à la commande des robots marchants bipèdes. À titre indicatif, nous pouvons citer les travaux de Chevallereau [27], de Chemori [25] et de Spong [59, 70, 75, 160].

1.3 Objectifs de la thèse

Clairement, toutes ces études indiquent que ces systèmes ont été étudiés généralement au cas par cas. Notre objectif principal dans cette thèse est de trouver le moyen qui permettrait une synthèse de lois de commande de façon systématique pour tous les SMSA mais

pas nécessairement avec le même type de commande. Or pour arriver à cette fin, il est assez intuitif d'essayer de chercher des propriétés communes ou même différentes qui pourraient classer les SMSA.

Aussi, nous avons cherché à savoir s'il existe déjà en littérature des classifications faites pour les SMSA. En fait, il en existe deux :

La première classification est due à *Daming Seto et John Baillieul* [151] et est de nature graphique : elle consiste à tracer le Control Flow Diagram (CFD) du système donné qui décrit la façon dont les contrôles sont transmis à travers les degrés de liberté. Par cette approche, trois grandes structures sont identifiées à savoir : la structure chaîne, la structure arbre et les points isolés. La combinaison de ces dernières donne au final sept structures pour cette classification. Les auteurs de cette classification ont proposé une procédure de commande systématique de type backstepping qui peut stabiliser globalement et asymptotiquement les systèmes appartenant à la structure chaîne. Le problème de stabilisation pour les deux autres classes étant pour eux encore des problèmes ouverts.

La deuxième classification est due à *Reza Olfati-Saber* [123] et est de nature plutôt analytique. Elle considère les propriétés structurelles des systèmes mécaniques telles que l'actionnement de certains degrés de liberté, le couplage des entrées et l'intégrabilité des moments généralisés. À l'issue de cette étude huit classes sont dégagées dont trois sont principales à savoir la forme normale feedback stricte, feedforward et la forme normale non triangulaire. L'auteur de cette classification a proposé une procédure de commande en deux étapes pour les deux premières formes normales : stabiliser le système réduit en premier lieu, ensuite étendre la stabilisation au système globale par une procédure de backstepping ou de forwarding selon la forme normale. Quelques suggestions de commande ont été données pour la troisième forme. Cependant, la procédure proposée pour la stabilisation du système réduit nécessite la vérification d'une hypothèse assez restrictive de sorte que l'auteur lui même ne l'a utilisée qu'une seule fois lors de la stabilisation de l'Acrobot. De plus, sa procédure qui s'effectue en deux étapes conduit à des explosions de termes qui engendrent des expressions de commandes très compliquées, par conséquent difficiles à implémenter.

Dans ce travail, nous essayerons, en nous basant sur la classification de *Seto et Baillieul*, de répondre aux problèmes de stabilisation des deux structures en arbre et en point isolé. Ces

deux structures sont plus difficiles à commander que la structure chaîne mais ont l'avantage (ou l'inconvénient !) de représenter la majorité des SMSA.

1.4 Contenu des chapitres

Outre cette introduction qui fait office à la fois de motivation et de présentation générale du problème, le manuscrit se compose de six chapitres organisés comme suit :

Chapitre 2 : Ce chapitre présente un préliminaire mathématique dans lequel, nous donnons quelques notations utilisées dans ce manuscrit ainsi que les principales définitions, et théorèmes sur la stabilité au sens de Lyapunov. Les critères de stabilité des systèmes à commutations seront aussi abordés . Nous présentons ensuite quelques techniques de commande des systèmes non linéaires qui nous seront utiles dans la résolution du problème de stabilisation des SMSA. Effectivement, il n'existe pas de méthodologie unique pour la conception de contrôleur pour ces systèmes, selon certaines propriétés, certaines approches conviennent mieux que d'autres.

Chapitre 3 : Ce chapitre décrit qualitativement les SMSA obtenus par formalisme de Lagrange. Nous consacrons la première partie à la présentation des systèmes Lagrangiens, nous expliquons ensuite le concept de sous actionnement et donnons la définition des contraintes non holonomes en précisant les nuances entre le sous actionnement et la non holonomie. Par la suite, nous démontrons pourquoi le contrôle des SMSA représente des défis théoriques importants jusqu'à être parfois des problèmes encore ouverts. La fin de ce chapitre est quant à elle réservée à la présentation des modèles de quelques SMSA.

Chapitre 4 : Ce chapitre a pour premier objectif de présenter les deux classifications des SMSA à notre connaissance, celles de *Daming Seto et John Baillieul* et de *Reza Olfati Saber*, dans le but de trouver des propriétés communes qui pourront généraliser la synthèse de lois de commande selon les classes obtenues. Le second objectif de ce chapitre est de démontrer éventuellement, s'il existe un lien entre ces classifications.

Chapitre 5 : Ce chapitre se divise en trois parties, la première concerne la stabilisation des SMSA dont le CFD est sous forme d'une structure chaîne. Pour cette classe, nous présentons

la procédure systématique de type backstepping due à *Seto et Baillieul* pour la détermination de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes. Nous proposons dans la deuxième partie de ce chapitre d'étendre cette procédure à une sous classe ayant un CFD sous forme d'une structure arbre et vérifiant certaines conditions et ce : en transformant les systèmes appartenant à cette sous classe en des systèmes ayant une structure chaîne moyennant un changement de contrôle et de coordonnées. Nous avons par la même occasion permis la relaxation d'une hypothèse supposée par les auteurs *Seto et Baillieul* et qui n'est pas nécessairement satisfaite par plusieurs SMSA. Nous avons ensuite proposé dans cette même partie, une procédure systématique pour la stabilisation de la deuxième sous classe des systèmes ayant une structure arbre ne pouvant pas se transformer sous une structure chaîne. La troisième et dernière partie de ce chapitre est consacrée à la stabilisation des SMSA dont le CFD est sous une structure en point isolé, jugée la plus difficile à commander. Pour chaque partie, la procédure de stabilisation sera illustrée par des exemples.

Nous terminons évidemment le manuscrit par donner une conclusion générale et proposons quelques perspectives de recherches futures.

1.5 Contributions de la thèse

La contribution primordiale de cette thèse est d'avoir fourni un travail sur l'étude et la synthèse de lois de commande systématiques pour les SMSA. Plus précisément, les principales contributions portent sur les points suivants :

- . Présentation de l'essentiel de la théorie de Lyapunov.
- . Exposé de plusieurs techniques de commande très utilisées en contrôle non linéaire.
- . Étude de la modélisation des SMSA et surtout étude des propriétés et des problèmes de commande liés à ces systèmes
- . Étude et comparaison des deux classifications dédiées à ces systèmes.
- . Présentation de la procédure de contrôle systématique et démonstration explicite du théorème permettant de calculer l'expression de la commande.
- . Extension de cette procédure à une sous classe en structure arbre.
- . Relaxation d'une hypothèse par rapport au schéma de contrôle initial par utilisation d'une commande à commutations.

- . Détermination d'une autre loi de commande issue aussi du backstepping et permettant la relaxation de la même hypothèse.
- . Détermination d'une procédure de contrôle pour la deuxième sous classe en structure arbre.
- . Amélioration d'une technique de commande basée sur les modes glissants pour la classe ayant une structure en point isolé.

1.6 Publications

Ce qui suit est une liste des publications rédigées au cours des dernières années, qui sont soit publiées, soit en cours de révision.

Articles de revues internationales

- i) **A. Choukchou Braham**, B. Cherki, *A new control scheme for a class of underactuated systems*, article accepté dans The Mediterranean Journal of Measurement and Control, 2011.
- ii) **A. Choukchou Braham**, B. Cherki *Stabilisation of a class of underactuated system with tree structure by backstepping approach*, soumis à Applied Mathematical letter, Elsevier. 2011.

Articles de conférences publiés dans des proceeding internationaux avec comité de lecture

- i) **A. Choukchou-Braham**, B. Cherki, M. Djemai, *A backstepping procedure for a class of underactuated system with tree structure*, IEEE International Conference on Communications, Computing and Control Applications, CCCA'11, Mar. 2011,
- ii) **A. Choukchou-Braham**, B. Cherki, *An extention to backstepping control for a class of underactuated mechanical system in tree structure*, 2st Conference on Intelligent Systems and Automation CISA'09, pp : 120-125, Mar. 2009, American Institute of Physics "AIP".
- iii) **A. Choukchou-Braham**, C. Bensalah, B. Cherki, *Stabilization of an under-actuated mechanical system by sliding control*, 1st Conference on Intelligent Systems and Automation CISA'08, pp : 80-84, Jun. 2008, American Institute of Physics "AIP"

- iv) B. Benyahia, **A. Choukchou Braham**, B. Cherki, *Robust control of an uncertain physical process*, 1st Conference on intelligent systems and automation CISA'08, pp : 74-79, Jun. 2008, American Institute of Physics "AIP"

Articles de conférences nationales

- i) B. Benyahia, **A. Choukchou Braham**, B. Cherki, *Commande H_∞ par loopshaping pour une régulation de débit*, Communication orale, Cinquième Conférence sur le Génie Électrique CGE'05, 16-17 Avril 2007, École Militaire Polytechnique, Alger, Algérie.
- ii) **A. Choukchou Braham**, B. Cherki, *Commande numérique d'un système mécanique sous actionné linéaire : Cas du pendule inversé à soumettre.*

Chapitre 2

Préliminaires théoriques sur les systèmes non linéaires : stabilité et commande

"...M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait du savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde."

Lettre de Jacobi Legendre, 2 juillet 1830

L'automatique comporte un certain nombre d'outils théoriques d'aspects mathématiques permettant de prévoir et d'appliquer ses concepts afin de remplir les objectifs qui sont en relation directe avec elle. Ces outils sont nécessaires à l'élaboration de lois de commande sur un procédé particulier et sont présents à différents stades de celle ci, notamment lors de la modélisation de systèmes, de l'identification des paramètres d'un procédé, de la construction de lois de commande, de la vérification de la stabilité du système asservi, . . . , cette liste n'étant bien entendu pas exhaustive.

Le dernier cas que nous venons de citer, c'est à dire la vérification de la stabilité d'un système est un point crucial de l'élaboration d'une loi de commande ; il apparaît même que toutes les techniques de construction de lois de commande ou d'observation sont étroitement liées à des considérations de stabilité : c'est la raison pour laquelle nous avons jugé indispensable de rappeler quelques définitions et concepts de base relatifs à la théorie de stabilité pour la première partie de ce chapitre.

Quant à la deuxième partie de ce même chapitre, elle sera consacrée à la présentation de quelques notions et techniques de la théorie de la commande.

En raison des nombreuses contributions des dernières années, nous arrêtons notre intérêt qu'aux points qui sont les plus directement liés à notre propre travail.

2.1 Stabilité des systèmes

Une étape du travail de l'automaticien consiste très souvent à étudier la stabilité, que ce soit celle du système considéré tel quel, libre de tout contrôle, ou bien celle du même système augmenté d'une structure de commande particulière. Dès lors, il peut s'avérer utile, voire nécessaire, de se demander ce qu'est la stabilité. Comment la définit-on? Comment la conceptualiser et la formaliser? Quels sont les critères qui permettent de conclure au comportement stable d'un système?

2.1.1 Que choisir?

Il est clair que dresser l'inventaire le plus complet possible des formes de stabilité qui ont pu apparaître tout au long de l'histoire de l'automatique mais aussi de la mécanique dépasserait largement le cadre de la présente thèse, ne seront donc pas incluses dans cette présentation la méthode de Krasovskii [154], la méthode de comparaison, les perturbations singulières [84], la stabilité UUB (Uniformly Ultimately Bounded) [24], la stabilité entrée-sortie [198], la stabilité entrée-état [155], la stabilité des systèmes non autonomes [4], l'analyse de contraction [81], les fonctions descriptives [154], ...

Par ailleurs, nous ne présenterons pas les preuves de divers résultats dans cette partie, et nous supposerons les conditions d'existence et d'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles considérées sont partout vérifiées.

Du point de vue de la notation, nous décrirons une de ces solutions dépendant du temps t , du temps initial t_0 et de la valeur initiale x_0 par la fonction $x(t, t_0, x_0)$ ou $x(t, t_0, x_0, u)$ lorsque le système est commandé. De plus, nous utiliserons fréquemment, pour alléger l'écriture, les abus de notation $x(t)$ ou même x , quand l'évidence des dépendances en t_0 , x_0 ou t nous le permettra. De même, on considérera que dans la majorité des cas et sauf exception, le temps initial t_0 est l'origine du temps ($t_0 = 0$).

La classe des systèmes considérés sera celle des systèmes pouvant être mis sous la forme de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne et continue sur un domaine D de \mathbb{R}^n .

Cette forme, de part l'absence de la variable temporelle t , est dite autonome, à l'inverse des systèmes non autonomes non considérés dans ce travail.

Pour cette équation, le point de l'espace d'état $x = 0$ est un point d'équilibre s'il vérifie

$$f(0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Noter que par un changement de variable, on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine.

2.1.2 Théorie de Lyapunov

La théorie de Lyapunov est considérée comme un des piliers de l'automatique et de la stabilité des équations différentielles ordinaires en général. L'exposé original de la théorie de Lyapunov date de 1892 et traite de l'étude du comportement de solution d'équation différentielle pour des conditions initiales différentes. Une des application envisagées étant l'étude des librations en astronomie^{1 2}, l'accent y est porté sur la stabilité ordinaire (ie stable mais non asymptotiquement stable), que l'on peut se représenter comme une robustesse par rapport aux conditions initiales, et la stabilité asymptotique n'y est abordée que de manière corollaire.

La communauté automatique ayant fait inverser cette préférence, nous nous concentrerons ici sur la notion de stabilité asymptotique plutôt que celle de la stabilité tout court !

Notons que des exposés beaucoup plus complets de la stabilité de Lyapunov existent dans de nombreux ouvrages voir par exemple : [84, 101, 120, 141, 146, 147, 154, 182]..., qui constituent les références principales de cette partie ; cette liste non plus ne se prétend pas être exhaustive.

2.1.2.1 Stabilité des équilibres

Physiquement parlant, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, instable s'il tend à s'en écarter davantage figure 2.1.



Figure 2.1 Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

¹En astronomie, les librations sont des petites oscillations des corps célestes autour de leur orbite.

²Le père d'Alexandre Michael Lyapunov était astronome.

Mathématiquement parlant, ceci se traduit par les définitions suivantes :

Définition 2.1. *l'équilibre $x = 0$ est dit :*

- **stable**, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- **instable**, s'il n'est pas stable, ie si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| \geq \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- **attractif**, s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Le bassin d'attraction de l'origine est défini par l'ensemble \mathbb{B} tel que

$$x(0) \in \mathbb{B} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

- **globalement attractif**, si pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad \text{Dans ce cas, } \mathbb{B} = \mathbb{R}^n.$$

- **asymptotiquement stable**, s'il est stable et attractif, et **globalement asymptotiquement stable GAS**, s'il est stable et globalement attractif.
- **exponentiellement stable**, s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}. \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

et **globalement exponentiellement stable GES**, s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (2.1) on ait :

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Remarque 2.1. 1. La différence entre stable et asymptotiquement stable se traduit par le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point

d'équilibre \bar{x} stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors qu'elles s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point d'équilibre asymptotiquement stable figure 2.2 (U_1 est la boule de centre 0 et de rayon ϵ et U_2 est la boule de centre 0 et de rayon η)

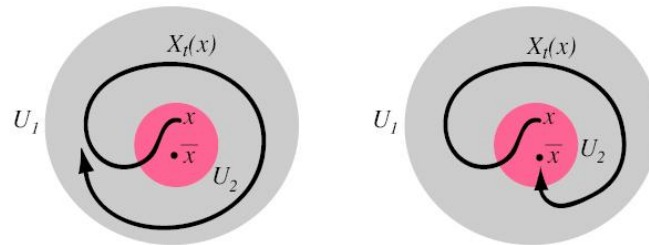


Figure 2.2 Stabilité (à gauche) et stabilité asymptotique (à droite) de \bar{x} .

2. Pour un système linéaire, toutes ces définitions sont équivalentes (sauf entre stable et asymptotiquement stable), par contre, pour un système non linéaire, stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable alors que exponentiellement stable implique asymptotiquement stable.

Lorsque les systèmes sont représentés par des équations différentielles non linéaires, le problème de la vérification de la propriété de stabilité n'est pas trivial. À l'inverse, la vérification de cette même propriété pour les systèmes linéaires est systématique et est déterminée de la manière suivante :

2.1.2.2 Stabilité de l'origine pour un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (2.3)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, les valeurs propres distinctes de multiplicité algébrique $m(\lambda_i)$ de la matrice A .

Théorème 2.1. 1. Si $\exists j \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $m(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.

2. Si $\forall j \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est exponentiellement (donc asymptotiquement) stable.

3. Si $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ et si $\exists k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $m(\lambda_k) = 1$ alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

Malheureusement, il n'existe pas de théorème équivalent à celui des valeurs propres pour les systèmes non linéaire ; à la limite, on peut dans certains cas, caractériser la stabilité de l'origine par l'étude de la stabilité du système linéarisé.

2.1.2.3 Approximation linéaire d'un système

Considérons un système de la forme (2.1), on note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$$

la matrice jacobienne de f évaluée au point d'équilibre $x = \bar{x}$, le système obtenu sera de la forme (2.3) et s'appelle le linéarisé (ou l'approximation linéaire) du système non linéaire (2.1)

Théorème 2.2. *1. Si $x = 0$ est asymptotiquement stable pour (2.3) alors $x = \bar{x}$ l'est pour (2.1).
2. Si $x = 0$ est instable pour (2.3) alors $x = \bar{x}$ l'est pour (2.1).
3. Si $x = 0$ est stable mais non asymptotiquement stable pour (2.3) alors on ne peut rien dire sur la stabilité de $x = \bar{x}$ pour (2.1) .*

Un autre critère permettant de conclure au comportement stable d'un système, cette fois linéaire et non linéaire est décrit par la partie suivante.

2.1.2.4 Méthode directe de Lyapunov

Le principe de cette méthode est une extension mathématique du phénomène physique suivant : si l'énergie totale (de signe positif) d'un système mécanique ou électrique ne fait que décroître (dissipée de façon continue) alors le système tend à rejoindre une configuration à énergie minimale (voire même l'état d'équilibre). Autrement dit, pour conclure quant à la stabilité d'un système, il suffit d'examiner les variations d'une certaine fonction scalaire dite de Lyapunov sans avoir besoin de la solution explicite du système. C'est précisément le point fort de cette méthode car l'équation du mouvement de $x(t)$ n'a pas à être résolue pour caractériser l'évolution de la solution (car en dehors des systèmes linéaires, la détermination des solutions explicites est difficile voire impossible).

Fonctions de Lyapunov Considérons le système

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{avec } f(0) = 0 \tag{2.4}$$

$x = 0$ est un équilibre pour (2.4) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient $x = 0$.

Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentielle admettant des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x)$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteur f .

Définition 2.2. *On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (2.4) en $x = 0$ dans D , si pour tout $x \in D$ on a*

- $V(x) > 0$ sauf en $x = 0$ où $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0$.

Théorème 2.3. 1. *S'il existe une fonction de Lyapunov pour (2.4) en $x = 0$ dans un voisinage D de 0 , alors $x = 0$ est stable.*

2. *Si de plus, $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

3. *Si de plus $D = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$ alors $x = 0$ est GAS.*

Remarque 2.2. 1. *\dot{V} dépend seulement de x , elle est appelée parfois la dérivée de V le long de la trajectoire du système.*

2. *Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie et se note $L_f V$.*

3. *Pour calculer \dot{V} , on n'a pas besoin de x mais de \dot{x} ie de $f(x)$, aussi, pour la même fonction $V(x)$, \dot{V} est différente pour différents systèmes.*

4. *Pour toute solution $x(t)$ de (2.4), on a : $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$, par conséquent si \dot{V} est négative, V décroît le long de la solution de (2.4) de sorte que les trajectoires convergent vers le minimum de V .*

5. *Lorsque $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, $V(x)$ est dite radialement non bornée.*

6. *$V(x)$ est souvent une fonction qui représente l'énergie ou une certaine forme de l'énergie du système.*

7. *De point de vue géométrique, on regarde une fonction de Lyapunov comme une sorte de bol dont le minimum coïncide avec le point d'équilibre. Si ce point est stable, alors le vecteur vitesse \dot{x} (ou f), tangent à toute trajectoire va "pointer" vers l'intérieur du bol figure 2.3*

Lorsque la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas strictement négative, le théorème suivant permet d'obtenir encore la stabilité asymptotique.

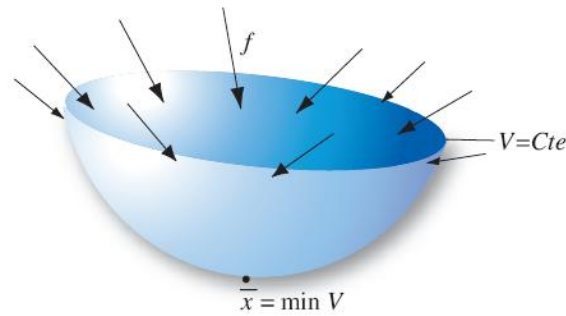


Figure 2.3 Fonction de Lyapounov V pour le champ de vecteurs f : f est rentrant sur chaque ensemble de niveau de V et convergent vers le minimum de V .

Principe d'invariance de LaSalle

Définition 2.3. Un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit positivement invariant si toute solution $x(t)$ telle que $x(0) \in G$ reste dans G pour tout $t \geq 0$.

si \bar{x} est un point d'équilibre alors $\{\bar{x}\}$ est positivement invariant.

Théorème 2.4. (Lyapunov-LaSalle) Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction admettant des dérivées partielles continues et telle qu'il existe l pour lequel la région D_l définie par $V(x) < l$ soit bornée et $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in D_l$. Soit $R = \{x \in D_l : \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans R . Alors toute solution issue de D_l tend vers M quand $t \rightarrow \infty$. En particulier si $\{0\}$ est la seule orbite contenue dans R alors $x = 0$ est asymptotiquement stable et D_l est contenu dans son bassin d'attraction.

Théorème 2.5. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction admettant des dérivées partielles continues. On suppose que $V(x)$ est radialement non bornée et que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $R = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans R . Alors toutes les solutions tendent vers M quand $t \rightarrow \infty$. En particulier si $\{0\}$ est la seule orbite contenue dans R alors $x = 0$ est GAS.

Remarque 2.3. 1. Les critères de stabilité et de stabilité asymptotique présentés dans les théorèmes 2.3, 2.4 et 2.5 sont faciles à utiliser, mais ne donnent aucune informations sur les méthodes pour construire des fonctions de Lyapunov. En réalité, il n'existe pas de méthode générale sauf pour certaines classes particulières de systèmes (notamment la classe des systèmes linéaires).

2. Les théorèmes énoncés précédemment présentent des conditions suffisantes dans le sens que si pour une certaine fonction de Lyapunov V , les conditions sur \dot{V} ne sont

pas satisfaites, ceci n'implique nullement que le système considéré soit instable (peut être qu'avec une autre fonction on arrive à démontrer la stabilité du même système).

3. *À l'inverse des fonctions de Lyapunov qui garantissent la stabilité d'un équilibre, il existe des fonctions dites de Chetaev qui garantissent l'instabilité des équilibres. Notons qu'il est encore plus difficile de démontrer l'instabilité que la stabilité! (consulter [95] pour plus de détails).*

Dans certains cas, un système dynamique n'est pas représenté, à un instant donné $t \geq t_0$, par un seul ensemble d'équations différentielles continues mais par une famille de sous systèmes continus et une loi logique ou d'appartenance orchestrant les commutations entre ces sous systèmes : c'est la classe des systèmes à commutations.

Dans ce travail, à un certain moment, nous avons été contraint de travailler avec cette classe de systèmes, nous présentons de suite les critères de stabilité pour ces systèmes et réservons la présentation de la commande de ces mêmes systèmes pour plus loin.

2.1.3 Stabilité des systèmes à commutations

Mathématiquement, un système à commutations peut être décrit par des équations de la forme

$$\dot{x} = f_p(x) \tag{2.5}$$

où $\{f_p : p \in \mathbb{P}\}$ est une famille de fonctions suffisamment régulières définies de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^n et paramétrées par un ensemble d'indice \mathbb{P} .

Pour le système (2.5), le sous système actif à chaque instant est déterminé par une séquence de commutations de la forme $\sigma = ((t_0, p_0), (t_1, p_1), \dots, (t_k, p_k), \dots)$ ($t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$), σ est dit signal de commutation et peut dépendre soit du temps ou de l'état soit des deux.

De tels systèmes sont dits à structures variables ou multi modèles et représentent une classe particulièrement simple des systèmes hybride [19, 176, 180].

Dans cette étude, on considère que l'origine est un point d'équilibre commun pour les sous systèmes individuels $f_p(0) = 0$, que les commutations se font sans saut et qu'elles ne se font pas infiniment rapidement de sorte que le phénomène de Zénon soit écarté. Le lecteur intéressé par ces propriétés peut consulter respectivement, les références [10, 107, 142, 145].

Dans notre recherche effectuée sur les systèmes à commutations et leur stabilité, la classe la plus souvent considérée dans la littérature est celle où les systèmes individuels sont linéaires

$$\dot{x} = A_p x \quad (2.6)$$

à titre indicatif, nous pouvons citer les références [20, 61, 104, 103, 106, 112, 152, 167, 166, 191, 199, 200, 201], pour ne citer que peu. En revanche, la classe des systèmes non linéaires à commutations a bénéficié d'une littérature moins abondante [18, 21, 26, 39, 97, 107, 202, 204].

Étant donné un système à commutations : pourquoi a-t-on besoin d'une théorie de stabilité différente de la théorie de Lyapunov ?

En fait, la raison principale est que la stabilité des systèmes à commutations dépend non seulement de différentes dynamiques correspondantes à plusieurs sous systèmes mais aussi des lois de transition qui gèrent les commutations.

En effet, on peut avoir le cas où deux sous systèmes sont exponentiellement stables alors que la commutation entre ces deux sous systèmes renvoie toutes les trajectoires à l'infini.

En fait, il a été démontré [21, 39, 97], qu'une condition nécessaire pour la stabilité des systèmes à commutations soumis à une loi de transition arbitraire est que tous les sous systèmes individuels soient asymptotiquement stables, mais que cette condition n'était pas suffisante. Néanmoins, intuitivement, il apparaît que lorsque la commutation entre les sous systèmes est suffisamment lente (afin de permettre le passage des transitoires et l'établissement des régimes permanents à chaque sous système) alors il y a de forte chance pour que le système global soit stable (avec le développement des calculateurs puissants, le temps suffisamment lent est en fait très faible).

2.1.3.1 Fonction de Lyapunov commune

Il est clair que dans le cas où la famille de systèmes (2.5) possède une fonction de Lyapunov commune $V(x)$ telle que $\nabla V(x) f_p(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et tout $p \in \mathbb{P}$ alors le système à commutation est asymptotiquement stable pour n'importe quel signal de transition σ [97]. Aussi, une possibilité pour démontrer la stabilité des systèmes à commutations consiste à trouver une fonction de Lyapunov commune pour tous les sous systèmes individuels de (2.5). Or, trouver une fonction de Lyapunov pour un système non linéaire même unique n'est pas simple, si de plus on autorise les commutations entre plusieurs sous systèmes, la détermination

d'une telle fonction devient encore plus difficile. C'est aussi une des raisons pour laquelle une théorie de stabilité non classique est nécessaire.

2.1.3.2 Fonctions de Lyapunov multiples

Dans le cas où une fonction de Lyapunov commune ne peut être déterminée, l'idée est de démontrer la stabilité à travers plusieurs fonctions de Lyapunov.

Un des premiers résultats d'une telle procédure a été développé par Peletiers dans [127, 128], ensuite par Liberzon [97], pour les systèmes à commutations de la forme (2.6).

Étant donné N systèmes dynamiques $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$, et N pseudo fonctions de Lyapunov (Lyapunov-like functions) V_1, \dots, V_N

Définition 2.4. *Une pseudo fonction de Lyapunov pour le système (2.5) est une fonction $V_i(x)$ avec des dérivées partielles continues définie sur un domaine $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, satisfaisant les conditions :*

- V_i est définie positive : $V_i(x) > 0$ et $V_i(0) = 0$ pour tout $x \neq 0$
- \dot{V} est semi définie négative : pour $x \in \Omega_i$,

$$\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) \leq 0 \quad (2.7)$$

et Ω_i est l'ensemble pour lequel (2.7) est vraie

Théorème 2.6. *Supposons que $\bigcup_i \Omega_i = \mathbb{R}^n$. Pour $i < j$, soient $t_i < t_j$ les instants de transition pour lesquels $\sigma(t_i) = \sigma(t_j)$ et supposons qu'il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$V_{\sigma(t_j)}(x(t_{j+1})) - V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq -\gamma \|x(t_{i+1})\|^2 \quad (2.8)$$

alors, le système (2.6) avec $f_{\sigma(t)}(x) = A_{\sigma(t)}x$ et la fonction de transition $\sigma(t)$ est GAS.

La condition (2.8) est illustrée par la figure 2.4.

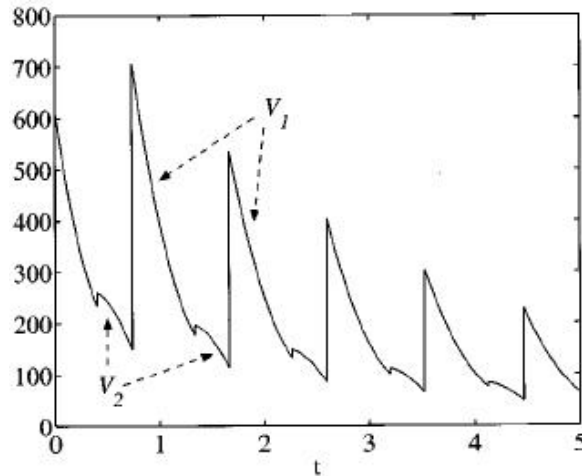


Figure 2.4 Profil d'énergie du système linéaire à commutations pour $N = 2$.

La première généralisation de ce théorème pour les systèmes non linéaires est due à Branicky [19, 20, 21]

Théorème 2.7. *étant donné N systèmes à commutations de la forme (2.5) et N pseudo fonctions de Lyapunov V_i dans la région Ω_i associées à chaque sous système, et supposons que $\bigcup_i \Omega_i = \mathbb{R}^n$ et soit $\sigma(t)$ la séquence de transition qui prend la valeur i lorsque $x(t) \in \Omega_i$, si de plus,*

$$V_i(x(t_{i,k})) \leq V_i(x(t_{i,k-1})) \quad (2.9)$$

où $t_{i,k}$ représente le $k^{\text{ième}}$ temps où f_i est active ie $\sigma(t_{i,k}^-) \neq \sigma(t_{i,k}^+) = i$, alors (2.5) est stable au sens de Lyapunov.

La figure 2.5 illustre la condition (2.9) (en pointillés) et un résultat plus général dû à Ye [193, 194] qui concerne l'utilisation de fonctions de Lyapunov faibles pour lesquelles la condition (2.7) est remplacée par

$$V_i(x(t)) \leq h(V_i(x(t_j))), \quad t \in (t_j, t_{j+1}) \quad (2.10)$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue avec $h(0) = 0$ et t_j est n'importe quel instant de transition lorsque le système i est activé.

Dans ce cas, il n'est plus exigé que les fonctions de Lyapunov soient décroissantes, il suffit qu'elles soient bornées par une fonction qui s'annule à l'origine, ainsi l'énergie peut croître dans les intervalles où un même système est activé mais doit être décroissante à la fin de ces intervalles figure 2.5 (traits solides).

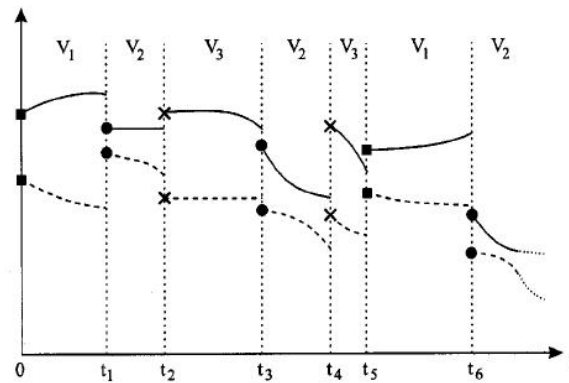


Figure 2.5 Profil d'énergie du système non linéaire à commutations pour $N = 3$.

Liberzon dans [97] étend ces résultat en donnant une condition sur les fonctions de Lyapunov multiples pour démontrer la stabilité globale asymptotique.

Étant donné N sous systèmes de la forme (2.5) ; lorsque les sous systèmes de la famille (2.5) sont supposés asymptotiquement stables, alors il existe une famille de fonctions de Lyapunov $\{V_p : p \in \mathbb{P}\}$ telles que les valeurs de V_p décroient sur chaque intervalle pour lequel le $p^{i\text{ème}}$ sous système est actif.

Si pour chaque p , la valeur de V_p à la fin de l'intervalle où le système p est actif dépasse la valeur de V_p à la fin de l'intervalle suivant lorsque le système p est actif figure 2.6, alors le système (2.5) est asymptotiquement stable.

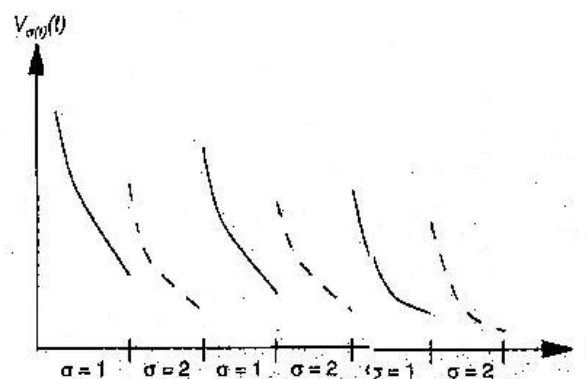


Figure 2.6 Profil d'énergie du système non linéaire à commutations pour $N = 2$.

Remarque 2.4. 1. Lorsque $N = 1$, on retrouve les résultats classiques de stabilité, par contre, lorsque $N = \infty$ les théorèmes précédents ne sont plus valables.

2. Ces théorèmes sont valables même lorsque f_p varie en fonction du temps.
3. Ces résultats peuvent être étendus en relaxant certaines hypothèses par exemple : les sous systèmes individuels peuvent avoir des points d'équilibres différents [107] ou des sauts d'états aux commutations [145].

Remarquant que tous les résultats de stabilité utilisant des fonctions de Lyapunov multiples concernent la décroissance de ces fonctions soit au début ou à la fin des intervalles successifs où un même sous système est actif, Zhai dans [202], a démontré que certaines fonctions de Lyapunov peuvent ne pas décroître au début ou à la fin de ces intervalles et pourtant décroissent globalement. Sa démonstration, qui établit une condition de stabilité complémentaire à celles qui existent déjà, est basée sur l'évaluation de fonctions de Lyapunov moyennes durant les intervalles où un même sous système est actif.

Évidemment, dans le cas où les sous systèmes sont GAS, alors son résultat est pratiquement équivalent aux résultats précédents, toutefois, ses conditions sont données par rapport à la décroissance des moyennes des fonctions de Lyapunov sur les mêmes intervalles figure 2.7.

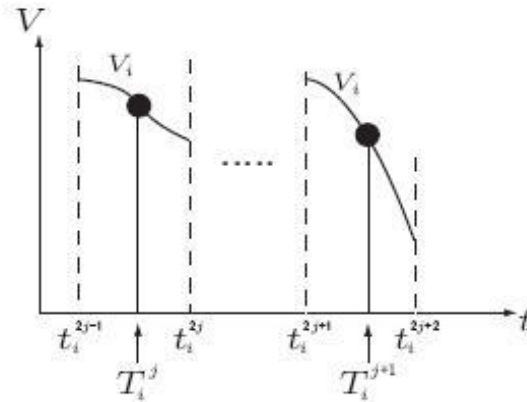


Figure 2.7 Illustration des valeurs moyennes de $V_i(x(T_i^j))$

Théorème 2.8. *Supposons que les N sous systèmes de (2.5), associés à N fonctions de Lyapunov radialement non bornées, sont GAS. On définit la valeur moyenne de la fonction de Lyapunov sur une période active d'un sous système par :*

$$V_i(x(T_i^j)) \triangleq \frac{1}{t_i^{2j} - t_i^{2j-1}} \int_{t_i^{2j-1}}^{t_i^{2j}} V_i(x(\tau)) d\tau, \quad (t_i^{2j-1} \leq T_i^j \leq t_i^{2j}) \quad (2.11)$$

alors le système à commutations est GAS au sens de Lyapunov si pour tout i ,

$$V_i(x(T_i^{j+1})) - V_i(x(T_i^j)) \leq -W_i(\|x(T_i^j)\|) \quad (2.12)$$

est vraie pour une fonction $W_i(x)$ continue et définie positive.

De plus, ce résultat est étendu lorsque les sous systèmes ne sont pas stables sous condition que les fonctions de Lyapunov soient bornées. Dans ce cas, si la valeur moyenne des fonctions de Lyapunov décroît sur l'ensemble des intervalles associé à un sous système i , alors le système à commutations (2.5) est asymptotiquement stable figure 2.8.

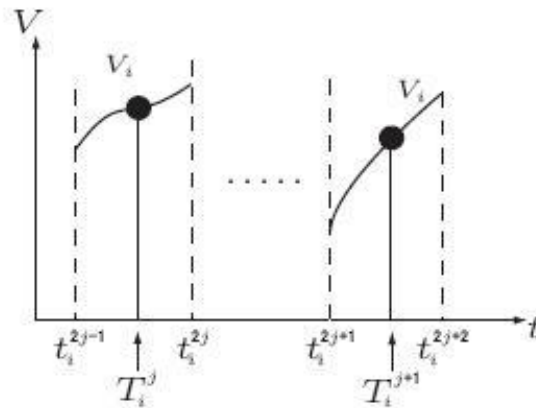


Figure 2.8 Illustration de la décroissance des énergies en présence de systèmes instables

Remarque 2.5. Plus récemment, un résultat ressemblant à celui ci utilisant non pas la valeur moyenne des fonctions de Lyapunov mais la valeur moyenne de la dérivée des fonctions de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à commutation a été donné par Michel dans [112].

Rappelons que la stabilité est la première performance à tenir pour un bon fonctionnement d'un système, de sorte que si un système n'est pas stable (ou pas assez), il est indispensable de procéder d'abord à la stabilisation de ce système avant de s'intéresser à satisfaire les autres performances telles que le suivi de trajectoire, la rapidité, la précision, l'effort de commande, le rejet de perturbation, la robustesse, ...

2.1.4 Stabilisation d'un système

Le problème de stabilisation consiste à maintenir le système près d'un équilibre y^* . Il s'agit de construire des lois de commande dites stabilisantes telles que y^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système soumis à ces lois de commande.

Remarque 2.6. 1. *Le problème de suivi de trajectoire consiste à maintenir le système le long d'une trajectoire désirée $y_d(t)$, $t \geq 0$, ie, de trouver un contrôle tel que pour toute condition initiale dans une région D , l'erreur entre la sortie et la sortie désirée*

$$e(t) = y(t) - y_d(t)$$

tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, de plus l'état reste borné.

2. *Notons qu'un problème de stabilisation autour de l'équilibre y^* est un cas particulier du problème de suivi de trajectoire où*

$$y_d(t) = y^*, \quad t \geq 0$$

3. *Le problème de suivi de trajectoire est une perspective au présent travail et nous espérons nous y intéresser dans un futur très proche.*

Les techniques de commande permettant de construire des lois de contrôle pour la stabilisation des systèmes sont nombreuses et variées, nous présentons dans la partie suivante celles qui nous ont été les plus utiles.

Les références principales à partir desquelles cette partie a été rédigée sont [76, 84, 90, 92, 93, 147, 149].

2.2 Théorie de la commande

Étant donné un système physique que l'on veut contrôler et un comportement du système qu'on veut obtenir, faire du contrôle revient à construire des lois de commande telles que le système soumis à ces lois ie le système en boucle fermée présente le comportement souhaité. Il reste néanmoins, que cette procédure n'est possible que si le système en question est commandable, dans le cas contraire, il faudrait que les modes non commandables soient stables [22]. Pour plus de détails, se référer à l'annexe C.

La synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires est difficile, par la suite nous proposons quelques techniques de contrôle pour la classe des systèmes non linéaires

affine en la commande de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

La linéarisation est une propriété qui rend les systèmes plus faciles à commander, d'autant plus que les techniques de contrôle linéaires sont plus anciennes et plus largement développées, on peut citer à titre d'exemple : la commande par placement de pôles, la commande optimale, l'approche fréquentielle, . . . , cette liste est loin d'être complète et on réfère le lecteur aux ouvrages [4, 36, 53, 82, 91, 121, 197] Cette liste est tout aussi loin d'être complète.

Aussi, il peut être intéressant de faire apparaître cette propriété pour les systèmes non linéaires. Les procédures les plus connues sont brièvement rappelées par la suite.

2.2.1 Stabilisation locale

Considérons le système commandé (2.13) de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad f(0, 0) = 0$$

En présence de la commande l'approximation linéaire autour de l'équilibre devient

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.14)$$

où les matrices A et B sont définies par

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).$$

La forme (2.14) obtenue justifie l'utilisation des techniques de contrôle linéaires citées plus haut.

Malheureusement, le système linéarisé résultant est typiquement valide qu'autour du point considéré de sorte que le contrôleur associé n'est valide qu'au voisinage de ce point conduisant à des commandes locales ; de plus, la détermination du domaine de linéarité n'est pas évidente. En annexe A, le lecteur trouvera quelques détails sur les limites de la linéarisation et les dangers de la déstabilisation.

Ainsi, bien que cette méthode soit simple et très pratique, il est nécessaire de procéder autrement afin d'élargir le domaine de validité des contrôleurs synthétisés.

Pour bénéficier encore de la théorie de contrôle linéaire, il existe une technique de commande basée sur des changements de coordonnées et des retours d'état linéarisants permettant de rendre les dynamiques non linéaires équivalentes à des dynamiques linéaires : c'est la linéarisation par bouclage.

2.2.2 Linéarisation par bouclage

Lorsqu'on transforme un système via un changement de coordonnées, certaines de ses propriétés restent inchangées, par exemple, si un système est instable alors le système transformé est aussi instable, si un système est commandable, alors le système transformé est aussi commandable ; par contre quelques systèmes semblent non linéaires dans certaines coordonnées alors qu'ils peuvent apparaître sous une forme linéaire dans d'autres coordonnées et sous un certain feedback.

Aussi, il est intéressant lorsque cela est possible d'approcher des dynamiques par d'autres dynamiques plus facile à étudier.

En annexe B, quelques résultats et concepts de géométrie différentielle nécessaires à la présentation de cette approche sont rappelés.

En fait, deux procédures de linéarisation par bouclages sont possibles :

2.2.2.1 Linéarisation entrée-état

Il s'agit de transformer le système de la forme (2.13) via un difféomorphisme $z = \varphi(x)$ en un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & (2.15) \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= a(\varphi^{-1}(z)) + b(\varphi^{-1}(z))u \end{aligned}$$

Cette forme rappelle la forme compagnon de Brunovsky ou la forme canonique de contrôlabilité des systèmes linéaires.

Si une telle transformation est possible, et pour un $b(\varphi^{-1}(z)) \neq 0$ alors le contrôle

$$u = \frac{1}{b(\varphi^{-1}(z))}(v - a(\varphi^{-1}(z))) \quad (2.16)$$

permet de linéariser le système qui devient de la forme

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v$$

où v est un contrôle externe.

Se posent alors les questions suivantes : est-il toujours possible de linéariser par bouclage un

système et dans le cas positif, comment obtenir la transformation $z = \varphi(x)$?

En fait, la réponse à la première question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.9. (*Jacubezyk- Respondek*) *Le système (2.13) est entrée-état linéarisable dans un domaine D si et seulement si*

1. *Le rang de la matrice de commandabilité $C_{fg} = \{g, ad_{fg}, \dots, ad_{fg}^{m-1}\}$ est égal à n pour tout $x \in D$.*
2. *Le système $\{g, ad_{fg}, \dots, ad_{fg}^{n-2}\}$ est involutif dans D .*

Quant au difféomorphisme, lorsque les conditions de linéarisation sont satisfaites, il existe plusieurs algorithmes pour en trouver voir par exemple [23, 84, 146].

2.2.2.2 Linéarisation entrée-sortie

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u & x \in \mathbb{R}^n, & \quad u, y \in \mathbb{R} \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.17}$$

L'idée est de générer des équations linéaires entre la sortie y et une certaine entrée v à travers un difféomorphisme $z = \phi(x)$ constitué de la sortie et de ses dérivées par rapport au temps jusqu'à l'ordre $n - 1$ lorsque le degré relatif r associé à ce système est égal à n .

$$\begin{aligned} \phi(x)_1 &= h(x) \\ \phi(x)_2 &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi(x)_n &= L_f^{n-1} h(x) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le système ainsi transformé est écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= a(\phi^{-1}(z)) + b(\phi^{-1}(z))u \end{aligned} \tag{2.19}$$

en choisissant un u de la forme (2.16) pour un $b(\phi^{-1}(z)) \neq 0$, le système devient

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v$$

Remarquons que dans ce cas, la forme (2.19) est la même que dans (2.15). En fait, lorsque $r = n$ les deux linéarisations sont équivalentes. Ainsi, les conditions d'application de la deuxième linéarisation seront les mêmes que pour la première.

Pour plus de détails sur ces deux linéarisations, et pour des exemples d'utilisation, le lecteur peut consulter les ouvrages [76, 77, 84, 147].

Evidemment, pour un degré relatif $r < n$, le système n'est plus linéarisable complètement par feedback. Dans ce cas on parle d'une linéarisation partielle par feedback.

2.2.2.3 Linéarisation partielle par bouclage

Lorsque $r < n$ il n'est possible de linéariser un système de la forme (2.17) que partiellement à travers le difféomorphisme constitué en partie par la sortie $h(x)$ et ses dérivées successives à l'ordre $r - 1$: $z = \phi_i(x)$ pour $1 < i < r$, et complété, par le théorème de Frobenius, par $n - r$ autres fonctions : $\eta = \phi_i(x)$ pour $r + 1 \leq i \leq n$, choisies de telle manière que $L_g \phi_i = 0$ pour $r + 1 \leq i \leq n$

Dans les coordonnées (z, η) les équations du système sont :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= a(z, \eta) + b(z, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta) \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec

$$y = z_1$$

cette forme est dite forme normale.

Pour un $b(z, \eta) \neq 0$, u peut être choisi encore de la forme

$$u = \frac{1}{b(z, \eta)}(v - a(z, \eta))$$

dans ce cas, le système prend la forme

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= v \\
 \dot{\eta} &= q(z, \eta)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Clairement, il apparaît que ce système est composé d'un sous système linéaire de dimension r commandable par v et "responsable" du comportement entrée-sortie et d'un sous système non linéaire de dimension $n - r$ dont le comportement n'est pas affecté par la commande.

Il s'en suit que le comportement globale du système dépend de cette dynamique interne et que la vérification de sa stabilité est une étape indispensable.

En fait, il a été montré [76] que l'étude de la stabilité de la dynamique interne peut être ramenée à celle de la dynamique de zéro. Celle ci est obtenue lorsqu'on applique une commande u qui porte la sortie y à zéro et l'y maintient.

Autrement dit, la dynamique de zéro est donnée par le système $\dot{\eta} = q(0, \eta)$.

Remarque 2.7. 1. Lorsque $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ est (localement) asymptotiquement stable alors le système associé est dit (localement) à minimum de phase à l'équilibre \bar{x} .

2. Lorsque $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ est instable alors le système associé est dit à non minimum de phase.

Bien que les méthodes de linéarisation soient utiles pour simplifier l'étude et la commande des systèmes non linéaires, il reste néanmoins, qu'elles présentent certaines limitations concernant par exemple le manque de robustesse en présence des erreurs de modélisation, la vérification de certaines conditions telle que l'involutivité et qui souvent, n'est pas vérifiée par beaucoup de systèmes même appartenant à la classe des systèmes non linéaires affines en la commande (c'est le cas des systèmes mécaniques sous actionnés), de plus, l'état doit être mesuré en entier ! Aussi, l'utilisation de telles techniques est restreinte à quelques classes de systèmes seulement.

Du coup, on s'est orienté vers la recherche d'autres techniques de linéarisation qui soient

applicables à une large gamme de système non linéaire sans pour autant imposer des conditions aussi rigoureuses que celle de la linéarisation exacte. Ainsi sont apparues les techniques de linéarisation approximative qui permettent de linéariser les systèmes à un certain ordre et négliger certaines dynamiques non linéaires d'ordre supérieur. Se sont intéressés à cette technique [9, 66, 74, 83, 88, 165], pour ne citer que peu d'entre eux.

2.2.2.4 Linéarisation approximative par bouclage

Pour certains systèmes le calcul du degré relatif présente des singularités au voisinage du point d'équilibre, pour d'autres le degré relatif est inférieur à l'ordre du système, dans ce cas, la condition d'involutivité n'est pas vérifiée !

L'idée de base de la linéarisation approximative, consiste à trouver une fonction de sortie telle que le système vérifie approximativement cette condition.

Plusieurs algorithmes de linéarisation sont disponibles , on peut citer par exemple la linéarisation par le jacobien, la pseudolinéarisation, l'algorithme de Krener, Hunt et Turi [88], celui de Krener basé sur la théorie de Poincaré [89], l'algorithme de Hauser, Sastry et Kokotović [66]. Une étude comparative de ces algorithmes appliqués à des exemples se trouve dans [94]. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la méthode due à Hauser et al que nous présentons de suite de manière très brève.

Soit le système de la forme (2.17)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Supposons que le degré relatif associé à ce système est $r < n$, par conséquent le système n'est pas linéarisable exactement par feedback. Dans f et g , quelques termes font obstruction à la linéarisation, dans le sens que le degré relatif en présence de ces termes est inférieur à n .

L'idée est de négliger ces termes de sorte qu'on puisse aboutir à un degré relatif complet, celui ci sera dit degré relatif robuste.

Définition 2.5. *Le degré relatif robuste d'une sortie régulière associée au système (2.17) en 0 est l'entier γ tel que :*

$$\begin{aligned}L_g h(0) &= L_g L_f h(0) = \dots = L_g L_f^{\gamma-2} h(0) = 0 \\ L_g L_f^{\gamma-1} h(0) &\neq 0\end{aligned}$$

Dans ce cas on dit que le système (2.17) est approximativement linéarisable par feedback autour de l'origine s'il existe une sortie régulière $y = h(x)$ pour laquelle $\gamma = n$.

Cette transformation sera possible via le difféomorphisme $z = \phi(x)$ suivant

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) \\ z_2 &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_n &= L_f^{n-1} h(x) \end{aligned}$$

Et donc, lors d'une linéarisation approximative, le modèle non linéaire (2.17) est simplifié en supposant que les fonctions $L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{\gamma-2} h(x)$ qui s'opposent à la définition du degré relatif classique et qui s'annulent en 0 sont identiquement nulles ie

$$L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{\gamma-2} h(x) = 0$$

Dans ce cas, le système (2.17) est approximé par la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & (2.22) \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))u \end{aligned}$$

qui est de la forme canonique de Brunovsky.

Ainsi, si u est convenablement choisi (du type (2.16) pour un $L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z)) \neq 0$), le modèle sera mis sous la forme linéaire et localement commandable

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v.$$

Cette méthode est dans de nombreux cas satisfaisante mais naturellement, l'automaticien cherche à l'améliorer pour augmenter les performances, le domaine de validité, ..., c'est ainsi que la théorie des approximations d'ordre supérieur fût introduite par Krener [88] et Hauser [64].

2.2.2.5 Les approximations d'ordre supérieur

L'objectif est de maximiser l'ordre des termes à négliger pour avoir plus de précision (on néglige ainsi moins de termes). Par conséquent, plus l'ordre du résidu négligé est élevé, plus performant sera le contrôleur et plus large sera son domaine de validité [17].

Théorème 2.10. *Le système non linéaire (2.13) peut être approché par un retour d'état linéarisant autour d'un équilibre E avec des termes d'erreur d'ordre p en E si et seulement si la distribution $\Delta_{n-2}(f, g)$ est involutive à l'ordre³ $p - 2$ sur E .*

Cela veut dire qu'il existe un changement de coordonnées $z = \Psi(x)$ tel que, dans les nouvelles coordonnées z , la dynamique (2.13) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & (2.23) \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \vdots & \quad \quad + O_E(x)^p + O_E(x)^{p-1}u \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= a(z) + b(z)u \end{aligned}$$

avec $b(\Psi^{-1}(x)) \neq 0$ dans le voisinage de E .

Autrement dit, pour le système (2.13), lors d'une approximation d'ordre supérieur, les termes $L_g h(x) = L_g L_f h(x), \dots, L_g L_f^{\gamma-2} h(x)$ ne sont plus supposés nuls et seront pris en compte dans le modèle et par conséquent dans l'expression de la commande.

Le modèle obtenu (2.23) n'est plus entièrement linéarisable, mais reste tout de même plus facile à commander que le système initial (2.13). Ainsi, on ne cherche plus à contrarier le système en éliminant certains de ses termes mais plutôt, utiliser ses bonnes propriétés autant que possible jusqu'à un certain ordre.

En dehors de ces méthodes de linéarisation, il existe plusieurs autres approches différentes les unes des autres pour la synthèse de commande. L'utilisation d'une méthode ou d'une autre sera favorisée selon la classe des systèmes considérés.

Parmi ces méthodes, nous nous sommes intéressés à trois d'entre elles à savoir : l'approche de passivité, la technique du backstepping et le contrôle par modes glissants.

2.2.3 Un mot sur la passivité

La notion de passivité est essentiellement liée aux notions d'énergie accumulée dans le système considéré et d'énergie apportée par des sources extérieures à celui-ci [149, 126, 181]. Une des références principales de l'utilisation de ce concept de passivité en Automatique est due à Popov dans [135]. La dissipativité, extension de ce concept, est développée dans les

³Une distribution est dite involutive à l'ordre p sur l'équilibre E si $\forall f, g \in \Delta, [f, g] \in \Delta + O_E(\pi x)$

travaux de Willems [190].

Bien que le concept de passivité soit applicable à une large classe de systèmes non linéaires, nous arrêtons notre intérêt pour le moment qu'aux dynamiques modélisées par le système (2.17).

Un système dissipatif est alors défini comme suit [149]

Définition 2.6. *Le système (2.17) est dit dissipatif s'il existe une fonction dite de stockage $S(x)$ qui soit positive et telle que $S(0) = 0$, et une fonction $w(u, y)$, localement intégrable pour tout u , telles que la condition suivante soit réalisée*

$$S(x) - S(x_0) \leq \int_t^0 w(u(\tau), y(\tau)) d\tau \quad (2.24)$$

sur tout l'intervalle $[0, t]$.

Cette inégalité exprime le fait que l'énergie stockée dans le système $S(x)$ est au plus égale à la somme de l'énergie stockée initialement et l'énergie d'alimentation extérieure ie qu'il n'y a pas création d'énergie interne, ainsi, seule une dissipation de l'énergie est possible.

Si $S(x)$ est différentiable, l'expression (2.24) peut être mise sous la forme

$$\dot{S}(x) \leq w(u, y) \quad (2.25)$$

Une particularité de w permet de définir la passivité d'un système.

Définition 2.7. *Le système (2.17) est dit passif s'il est dissipatif et si la fonction w est une fonction bilinéaire de l'entrée et de la sortie $w(u, y) = u^T y$.*

La passivité est une propriété fondamentale des systèmes physiques intimement liés au phénomène de perte ou de dissipation d'énergie. On reconnaît là un principe ressemblant à celui de la stabilité. Justement, la relation entre la passivité et la stabilité peut être établie en considérant la fonction de stockage $S(x)$ comme une fonction de Lyapunov $V(x)$.

Remarque 2.8. *Attention, la définition de la dissipativité et de la passivité ne nécessite pas d'avoir $S(x) > 0$ (il suffit que $S(x) \geq 0$), et donc en présence d'une partie inobservable, $x = 0$ peut être instable alors que le système est passif!*

Pour que la passivité implique la stabilité, il faut exclure un pareil cas ie il faut vérifier que les parties inobservables soient asymptotiquement stables. Nous référons le lecteur à la référence [149] pour un exposé plus complet sur la stabilité des systèmes passifs et pour des résultats de stabilité avec des fonctions de Lyapunov semi définies positives.

L'approche de passivité paraît très prometteuse et a constitué, après les méthodes de linéarisation, un point de départ dans notre recherche de lois de commande stabilisantes pour les systèmes mécaniques sous actionnés, mais très vite, et sans le vouloir, nous nous sommes retrouvés à faire d'autres types de commande de sorte que la passivité n'a fait l'objet que d'un seul travail dans le cadre d'un projet de fin d'étude réalisé avec des ingénieurs automaticiens [111].

Aussi, l'exploitation de cette approche pour la commande et probablement pour l'observation des systèmes mécaniques sous actionnés fera sans doute l'objet de travaux futurs.

2.2.4 Technique du Backstepping

Le backstepping est une procédure récursive pour la construction de lois de commande non linéaires et des fonctions de Lyapunov garantissant la stabilité de ces lois.

Cette technique n'est applicable que pour une certaine classe de système dite en strict feedback (triangulaire bas). Un aperçu de cette approche est donné par la suite, voir la référence [90] pour plus de détails.

Considérons le problème de la stabilisation du système non linéaire sous la forme triangulaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) & (2.26) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u
 \end{aligned}$$

L'idée derrière la technique du backstepping est, de considérer l'état x_2 comme une "commande virtuelle" pour x_1 . Donc, s'il est possible de rendre $x_2 = -x_1 - f_1(x_1)$, alors l'état x_1 sera stabilisé. Ceci pourra être vérifié en considérant la fonction de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$. Mais puisque x_2 n'est pas la vraie commande pour x_1 , nous désignons le changement de variables

suivant

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1) \end{aligned}$$

avec $\alpha_1(x_1) = -x_1 - f_1(x_1)$. Introduisant la fonction de Lyapunov $V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + f_1(x_1)) := x_3 + \bar{f}_2(z_1, z_2) \\ \dot{V}_1 &= -z_1^2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

En procédant récursivement, nous définissons les variables suivantes

$$\begin{aligned} z_3 &= x_3 - \alpha_2(z_1, z_2) \\ V_2 &= V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $\alpha_2(z_1, z_2)$, observons que

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2) \\ \dot{V}_2 &= -z_1^2 + z_2(z_1 + z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

Choisissant $\alpha_2(z_1, z_2) = -z_1 - z_2 - \bar{f}_2(z_1, z_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - z_2 + z_3 \\ \dot{V}_2 &= -z_1^2 - z_2^2 + z_2 z_3 \end{aligned}$$

Récursivement, à l'étape i , définissant

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= x_{i+1} - \alpha_i(z_1, \dots, z_i) \\ V_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i z_k^2 \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i) \\ \dot{V}_i &= -\sum_{k=1}^{i-1} z_k^2 + z_{i-1}z_i + z_i(z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i))\end{aligned}$$

En utilisant l'expression $\alpha_i(z_1, \dots, z_i) = -z_{i-1} - z_i - \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -z_{i-1} - z_i + z_{i+1} \\ \dot{V}_i &= -\sum_{k=1}^{i-1} z_k^2 + z_i z_{i-1}\end{aligned}$$

À l'étape n , nous obtenons

$$\dot{z}_n = \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) + u$$

En choisissant

$$u = \alpha_n(z_1, \dots, z_n) = -z_{n-1} - z_n - \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n)$$

pour la fonction de Lyapunov suivante

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2$$

il s'en suit

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= -z_{n-1} - z_n \\ \dot{V}_n &= -\sum_{k=1}^n z_k^2\end{aligned}$$

La stabilité du système est prouvée en recourant à de simples fonctions de Lyapunov quadratiques. Il faut aussi noter que la dynamique obtenue en fonction des coordonnées en z est linéaire.

L'avantage de la technique du backstepping est sa flexibilité pour le choix des fonctions stabilisantes α_i qui sont choisies simplement sans éliminer toutes les non linéarités afin de rendre la fonction \dot{V}_i négative.

2.2.5 Contrôle par modes glissants

La théorie des systèmes à structure variable fait l'objet de multiples études depuis une cinquantaine d'années. Les premiers travaux sur ce type de systèmes sont ceux d'Anosov

[3], de Tzypkin [177], d'Emel'yanov [44]. Ces travaux ont connu un nouvel essor à la fin des années soixante-dix lorsqu'Utkin introduit la théorie des modes glissants [178].

Cette technique de commande et d'observation a reçu un intérêt sans cesse croissant du fait de leur relative simplicité d'élaboration, de leur robustesse vis-à-vis de certaines incertitudes paramétriques et perturbations, et de la large gamme de leur applications dans des domaines très variés tels que la robotique, la mécanique ou l'électrotechnique.

Le principe de cette technique est de contraindre le système à atteindre et ensuite rester sur une surface donnée dite de glissement ou de commutation (représentant un ensemble de relations statiques, entre les variables d'état). Le comportement dynamique résultant, appelé régime de glissement idéal, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface. L'avantage d'obtenir un tel comportement est double : d'un côté, on a une réduction de l'ordre du système, et de l'autre, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes directions que les entrées.

La réalisation se déroule en deux temps : une surface est déterminée de façon à ce que le régime glissant ait des propriétés désirées (pas forcément présentes dans le système original), puis une loi de commande discontinue est synthétisée de façon à rendre la surface invariante et (au moins localement) attractive. Cependant, l'introduction de cette action discontinue, agissant sur la première dérivée par rapport au temps de la variable de glissement, ne génère pas un régime glissant idéal. En moyenne, les variables contrôlées peuvent être considérées comme évoluant idéalement sur la surface. En réalité, le mouvement est caractérisé par des oscillations à hautes fréquences dans un voisinage de la surface. Ce phénomène est connu sous le nom de réticence ou chattering en anglais et est un des inconvénients majeurs de cette technique. Il peut en outre exciter des dynamiques non modélisées et conduire à l'instabilité [51].

La présentation de cette théorie et de ses applications constituerait facilement une thèse en elle-même, aussi, dans ce qui suit, nous présentons rapidement cette technique et nous référons le lecteur à [17, 49, 51, 130, 163, 178] pour une excellente présentation des modes glissants d'ordre un, de la théorie de Fillipov pour les équations différentielles à second membre discontinue et de la méthode du vecteur équivalent d'Utkin.

2.2.5.1 Modes glissants d'ordre un

Bien que la théorie des modes glissant soit appliquée à une large classe de systèmes de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ [153], nous restreindrons notre attention à la classe des systèmes mono-entrée et affine en la commande de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.27)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à χ , un ouvert de \mathbb{R}^n , u est l'entrée et f, g sont des fonctions suffisamment différentiables, on définit s une fonction suffisamment différentiable, $s : \chi \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial s}{\partial x}$ soit non nulle sur χ . L'ensemble :

$$S = \{x \in \chi : s(t, x) = 0\} \quad (2.28)$$

représente une sous variété de χ de dimension $(n - 1)$, appelée surface de glissement. La fonction s est dite fonction de glissement.

Remarque 2.9. *Les systèmes étudiés ici sont régis par des équations différentielles impliquant des termes discontinus. La théorie classique ne permet pas de décrire le comportement des solutions dans de tels cas ; il faut alors se reporter à la théorie des inclusions différentielles [6] et aux solutions au sens de Filippov [49].*

Définition 2.8. [179] *On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur S s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de (2.27) satisfasse $s(t, x) = 0$ pour tout $t \geq t_s$.*

L'existence d'un régime glissant est garantie par des conditions suffisantes : la surface de glissement doit être localement attractive, ce qui peut se traduire mathématiquement par :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x}(f + gu) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x}(f + gu) > 0 \quad (2.29)$$

Cette condition traduit le fait que, dans un voisinage de la surface de glissement, les vecteurs vitesses des trajectoires du système doivent pointer vers cette surface figure 2.9.

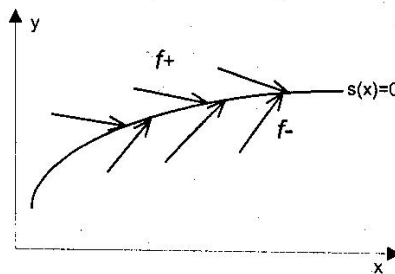


Figure 2.9 Attractivité de la surface

Ainsi, une fois la surface intersectée, les trajectoires restent dans un ϵ -voisinage de S , et on dit que le régime glissant est idéal si on a exactement $s(t, x) = 0$.

La condition (2.29) est plus souvent rencontrée sous la forme :

$$s\dot{s} < 0 \quad (2.30)$$

et est appelée condition d'attractivité.

La commande u est construite de façon à ce que les trajectoires du système soient amenées vers la surface de glissement et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci. u est une loi de commande variable définie comme suit :

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(t, x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(t, x) < 0 \end{cases}, u^+ \neq u^- \quad (2.31)$$

u^+ et u^- étant des fonctions continues. Il est à noter que c'est ce caractère discontinu de la loi de commande qui permet d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface ainsi que des propriétés de robustesse vis-à-vis de certaines perturbations.

Un exemple de commande classique par mode glissant qui assure la convergence vers la surface $s = 0$ en temps fini est comme suit :

si pour le système non linéaire (2.13) de degré relatif r , on a : $|L_g L_f^{r-1}| > K > 0$, $L_f^r < M < \infty$ alors il existe $\lambda > 0$ tel que la commande [8] :

$$u = -\text{sign}(L_g L_f^{r-1}) \lambda \text{sign}(s) \quad (2.32)$$

assure la convergence de s à 0 en temps fini.

Remarque 2.10. *Souvent, on considère que $L_g h$ est positif, dans ce cas il est suffisant de prendre*

$$u = -\lambda \text{sign}(s) \quad (2.33)$$

dans le cas contraire, il est plus correct de considérer l'expression (2.32).

2.2.5.2 Convergence en temps fini

Lorsque d'une part, la commande est choisie de la forme (2.32) ou plus simplement de la forme (2.33), et de l'autre, les conditions précédentes pour borner certaines fonctions sont vérifiées alors la convergence en temps fini est assurée. Nous essayerons de démontrer ce résultat à travers un exemple.

Exemple 2.1. Soit le système très simple suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= b + u \\ u &= -\lambda \text{sign}(x - x_d)\end{aligned}\tag{2.34}$$

avec x_d l'état désiré, $s = x - x_d$ la surface de glissement et $\lambda > |b| + \sup|\dot{x}_d|$, alors x converge vers x_d en temps fini et reste sur la surface $x = x_d$.

preuve 1.

$$\begin{aligned}s &= x - x_d \\ \dot{s} &= b - \lambda \text{sign}(s) - \dot{x}_d\end{aligned}$$

soit la fonction de Lyapunov : $V = \frac{s^2}{2}$, dans ce cas :

$$\dot{V} = s(b - \lambda \text{sign}(s) - \dot{x}_d)$$

si $\lambda > |b| + \sup|\dot{x}_d|$ alors $\dot{V} < 0$

ainsi, la convergence est démontrée, il reste maintenant à démontrer qu'elle se fait en temps fini.

Pour $\dot{V} < 0$, il existe un K tel que $\dot{V} < -K|s|$.

$$V = \frac{s^2}{2} \Rightarrow |s| = \sqrt{2V} \text{ d'où } \dot{V} < -\sqrt{2}K\sqrt{V},$$

posons : $K_1 = -\sqrt{2}K \Rightarrow \dot{V} < -K_1\sqrt{V}$ prenons le pire cas où le temps maximum de convergence sera le cas limite : $\dot{V} = -K_1\sqrt{V}$

La résolution de cette équation conduit à :

$$\begin{aligned}V^{-1/2}dV &= -K_1 dt \\ 2V^{1/2} &= -K_1 t + V_0 \\ V(t) &= \left(\frac{-K_1 t + V_0}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Le temps à partir duquel $V(t) = 0$ correspond à : $t = \frac{V_0}{K_1}$ et qui est de toute évidence fini

2.2.5.3 Phénomène de réticence

Dans la pratique, un régime glissant idéal n'existe pas étant donné que cela impliquerait que la commande puisse commuter avec une fréquence infinie. Il survient alors un problème de chattering qui fait que nous n'avons plus $s(t, x) = 0$ mais $\|s(t, x)\| < \Delta$ à partir de $t > t_0$ où t_0 est le temps de convergence et Δ une constante représentant le maximum des variations le long de la trajectoire idéale $s = 0$. Ce maximum dépend du "slew rate" des composantes intervenant de l'injection de l'entrée u dans le système, de l'usure et de la sensibilité aux bruits des actionneurs dans le cas d'une commande analogique limitant ainsi la vitesse de variation entre u^+ et u^- figure 2.10. Dans le cas numérique, la vitesse de commutation est limitée par la prise de données qui est contrainte par la période d'échantillonnage et le temps de calcul [17].

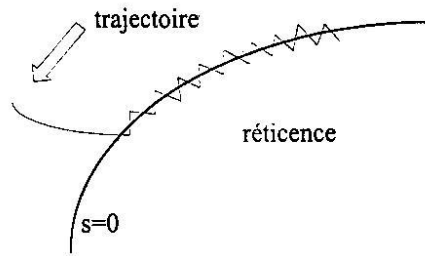


Figure 2.10 Phénomène de chattering

Ce phénomène constitue un désavantage non négligeable car, même s'il est possible de le filtrer en sortie du processus, il est susceptible d'exciter des modes à hautes fréquences qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité [67].

La réticence implique aussi d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leur usure rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique. De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ce phénomène. L'une d'entre elles consiste à remplacer la fonction signe par des fonctions de saturations figure 2.11 :

$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\epsilon} & \text{si } |s| \leq \epsilon \\ sign(s) & \text{si } |s| > \epsilon \end{cases} \quad (2.35)$$

ou des fonctions sigmoïdes telles que $\tan(s)$ ou $\arctan(s)$ figure 2.12.

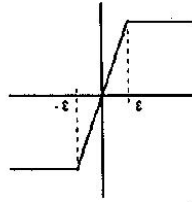


Figure 2.11 Fonction de saturation

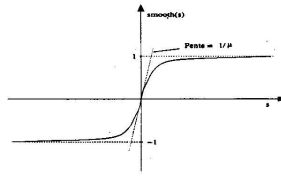


Figure 2.12 Fonction sigmoïde

Néanmoins, il a été prouvé, que pour passer outre ce phénomène de chattering, la meilleure solution est de considérer des modes glissants d'ordre supérieur tels que l'algorithme du twisting ou super twisting [54, 130].

Dans ce travail, et en appliquant une certaine commande, nous avons rencontré des problèmes de singularités qui se heurtaient à la possibilité de rendre nos lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes. Pour résoudre ce problème, nous avons eu recours aux systèmes à commutations nous permettant de "switcher" à travers ces singularités [175].

Aussi, nous voyons nécessaire de présenter de manière très brève cette technique de commande.

2.2.6 Technique de commande basée sur la commutation entre plusieurs contrôleurs

Les techniques de commande basées sur la commutation entre différents contrôleurs ont fait l'objet d'applications intensives ces dernières années.

L'importance de telles méthodes provient de l'existence de systèmes qui ne peuvent pas être stabilisable par un seul contrôleur. En effet, une large gamme de systèmes dynamiques est

modélisée par une famille de sous systèmes continus et une loi logique orchestrant les commutations entre ces sous systèmes figure 2.13

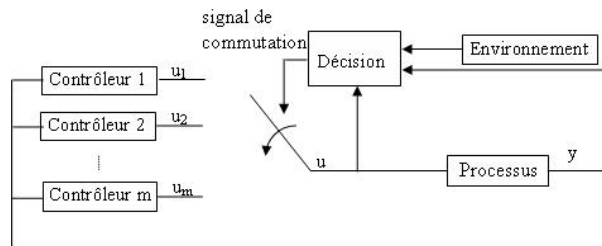


Figure 2.13 Architecture des multi contrôleurs

De ce fait, les systèmes à commutations apparaissent comme un concept rigoureux pour étudier les systèmes complexes, même si leurs propriétés théoriques sont toujours le sujet de recherches intenses.

2.3 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à présenter les aspects théoriques sur la stabilité et le contrôle des systèmes non linéaires et des systèmes à commutations. Il n'existe pas de méthodologie générale pour la conception d'un contrôleur non linéaire à l'inverse des systèmes linéaires. Selon la classe des systèmes non linéaires, certaines approches sont plus adaptées que d'autres. Aussi, nous avons essayé d'expliquer de façon simple le principe de quelques techniques de commande dédiées au contrôle non linéaire et qui sont en relation avec notre travail, le but étant d'utiliser certaines d'entre elles pour la stabilisation des systèmes mécanique sous actionnés. La définition, l'étude des propriétés et des exemples de ces systèmes constituent le contenu du chapitre suivant.

Chapitre 3

Les systèmes mécaniques sous actionnés

"...Happy families are all alike, every unhappy family is unhappy in its own way."

Léon Tolstoï, Anna Karénine.

Lorsqu'on s'intéresse à commander des systèmes dont les dynamiques non linéaires ne peuvent être négligées, il est bien connu, en tout cas depuis Poincaré, que ces systèmes non linéaires présentent des comportements extrêmement complexes de sorte qu'une seule théorie de contrôle ne peut être appliquée. Aussi, il est nécessaire de préciser d'une façon ou d'une autre, la classe des systèmes à laquelle on s'intéresse. Il se trouve que, les modèles représentant la classe à laquelle nous nous sommes intéressés, celle des SMSA pour les raisons énumérées en introduction, découlent souvent du formalisme de Lagrange. Ainsi, nous consacrons la première partie de ce chapitre à la présentation des systèmes Lagrangiens, nous expliquons ensuite le concept de sous actionnement et donnons la définition des contraintes non holonomes en précisant les nuances qui existent entre le sous actionnement et la non holonomie. Par la suite, nous démontrons pourquoi le contrôle des SMSA représente des défis théoriques importants jusqu'à être parfois des problèmes encore ouverts. La fin de ce chapitre est quant à elle réservée à la présentation des modèles de quelques SMSA.

3.1 Systèmes Lagrangiens

Un système Lagrangien est un système dont le comportement est décrit par les équations d'Euler-Lagrange représentées par un ensemble d'équation différentielles ordinaires non linéaires. Le formalisme de modélisation, utilisant ces équations est dit de Lagrange et représente un outil mathématique puissant basé sur la méthode variationnelle pour la modélisation

d'une large classe de systèmes physiques : en particulier les systèmes mécaniques. D'excellentes présentations sur la modélisation variationnelle des systèmes mécaniques et électromécaniques se trouvent respectivement dans les ouvrages de [55, 57] et [110, 188].

Les systèmes sous actionnés étant à la base des systèmes mécaniques, leurs modélisations peut se faire au moyen des équations d'Euler-Lagrange. Ces équations, pour un système de n degrés de liberté sont données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = F(q)u \quad (3.1)$$

où $q \in Q$ représente le vecteur de configuration appartenant à une variété de configuration n -dimensionnelle, $u \in \mathbb{R}^m$ et $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$ la matrice des forces extérieures. $L(q, \dot{q})$ est le Lagrangien associé au système considéré défini par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système :

$$L(q, \dot{q}) = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q)$$

où K est l'énergie cinétique, V l'énergie potentielle et $M(q)$ la matrice d'inertie symétrique et définie positive.

L'avantage de ce formalisme est que la forme des équations d'Euler-Lagrange est invariante, de plus, ce formalisme permet d'obtenir directement les équations d'évolution des systèmes mécaniques en fonction des forces appliquées.

Moyennant ces équations, les équations du mouvement d'un système mécanique donné peuvent être déduites comme suit :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)u, \quad k = 1, \dots, n$$

où e_k est la k^{ieme} base standard dans \mathbb{R}^n , $g_k(q) = \partial_{q_k} V(q)$ et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right)$$

Sous forme vectorielle, on peut écrire :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = F(q)u \quad (3.2)$$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i \dot{q}_k$ est un élément de $C(q, \dot{q})$. Le terme $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ contient deux types de termes contenant $\dot{q}_j \dot{q}_i$ appelés termes Centrifuge ($i = j$) et termes Coriolis ($i \neq j$) et $G(q)$ contient

le terme de gravité (pour plus de détails et pour des exemples, consulter [161]).

La matrice définie par $S_0 = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est une matrice antisymétrique, ce qui nous permet d'avoir $\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})$. En prenant en compte cette propriété et le fait que $M(q)$ soit une matrice symétrique et définie positive, on peut introduire la *transformation de Legendre* définie par :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q}$$

Dans ce cas, les dynamiques (3.2) peuvent être réécrites sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}(q)p \\ \dot{p} = -G(q) + \tilde{C}^T(q, p)M^{-1}(q)p + F(q)u \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\tilde{C}^T(q, p) = C(q, M^{-1}p)$.

(3.3) est dite *forme normale de Legendre* pour un système mécanique. En définissant les variables $x_1 = q$, $x_2 = p$, (3.3) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M^{-1}(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = -G(x_1) + x_2^T Q(x_1)x_2 + F(x_1)u \end{cases} \quad (3.4)$$

ou encore de façon concaténée :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.5)$$

Remarque 3.1. *Pour les systèmes mécaniques, les équations (3.2) et (3.3) sont deux représentations équivalentes. Cependant, la forme normale de Legendre est une équation différentielle ordinaire du premier ordre alors que (3.2) est du second ordre. De plus, un système mécanique écrit sous la forme (3.5) appartient à la classe des systèmes non linéaire affine en la commande où plusieurs méthodes analytiques pour l'analyse de la commandabilité et de l'observabilité et même pour la conception de lois de commande sont disponibles.*

3.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés

Considérons le système mécanique décrit par (3.1). On appelle (3.1) un système mécanique complètement actionné si $m = \text{rang}(F(q)) = n$ c'est-à-dire $F(q)$ est une matrice inversible. Pour les systèmes complètement actionnés le nombre d'entrée de commande est égal à la dimension de leurs espaces de configuration. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisables par feedback et ne possèdent pas une dynamique de zéro, ceci peut être démontré par l'application du contrôle suivant :

$$u = F(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))$$

en redéfinissant les variables $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v\end{aligned}$$

qui représente clairement un système en (vecteur) double intégrateurs, c'est pourquoi la plupart des problèmes mécaniques complètement actionnés peuvent être réduits à des problèmes équivalents pour des systèmes linéaires.

3.3 Systèmes mécaniques sous actionnés

Un système mécanique contrôlé associé au vecteur de configuration $q \in Q$ et au lagrangien $L(q, \dot{q})$ satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange (3.1) est appelé un système mécanique sous actionné si $m = \text{rang}(F(q)) < n = \dim(q)$. En d'autres termes, les systèmes sous actionnés sont des systèmes mécaniques avec moins d'entrées de commande indépendantes que de degrés de liberté à contrôler de sorte que les entrées généralisées ne peuvent pas commander les accélérations instantanées dans toutes les directions [58, 187].

Un système mécanique peut être sous actionné de plusieurs façons, la plus évidente est celle due à la dynamique du système associé par exemples : avions, hélicoptères, bateaux, sous-marins, systèmes de locomotion sans roues ; ou encore par conception dans le but de réduire le poids de certaines applications pratiques telles que les satellites et les robots à articulations flexibles. Le sous actionnement peut provenir aussi d'une panne d'actionneur en cours de fonctionnement ou encore imposé artificiellement pour générer des systèmes complexes pour un ordre pas très élevé, c'est le cas du fameux pendule inversé, de l'Acrobot, du Pendubot, du Tora, de la bille sur rail et bien d'autres (tous ces systèmes seront présentés à la fin de ce chapitre).

Pour certains systèmes sous actionnés, le manque d'actionneurs est souvent interprété comme des contraintes sur l'accélération c'est à dire comme des contraintes non holonomes du second ordre.

3.4 Systèmes mécaniques non holonomes

Un système mécanique avec des contraintes non holonomes¹ du premier ordre est un système Lagrangien contenant m contraintes de vitesse ($m < n$)

$$W^T(q)\dot{q} = 0 \quad \text{avec } W \text{ matrice } (n \times m)$$

¹holonome (holonomic) : mot Grec qui signifie 'whole', 'integer'

non intégrables (c'est-à-dire $\nexists \varphi(t)/\dot{\varphi} = W^T(q)\dot{q}$). Ces systèmes sont caractérisés par l'existence de contraintes cinématiques non intégrables, les systèmes de type unicycle figure 3.1, tels que les robots mobiles à roues, les véhicules à roues et les véhicules à remorques constituent les exemples les plus répandus.

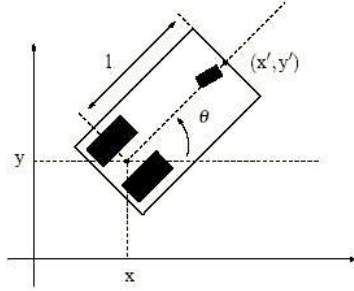


Figure 3.1 Système de type unicycle.

D'après [119, 189] : lorsque un système mécanique est soumis à des contraintes non holonomes du premier ordre (contraintes de vitesse), sa dynamique peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) &= W(q)\lambda + F(q)u \\ W^T(q)\dot{q} &= 0 \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vecteur des multiplicateurs de Lagrange ; le terme $W(q)\lambda$ peut être considéré comme la force nécessaire pour maintenir les contraintes.

La littérature sur les systèmes non holonomes est extrêmement vaste, le lecteur pourra trouver dans [87] une excellente étude sur ce domaine, on pourra aussi voir [14, 187] pour un exposé plus rapide des concepts clés sur les types de commande des systèmes non holonomes et des problèmes liés à la cinématique de ces systèmes.

Contrairement aux systèmes non holonomes avec des contraintes du premier ordre (ou de vitesse), largement traitées en littérature, les systèmes mécaniques sous actionnés sont vus par plusieurs chercheurs [15, 47, 58, 125, 123, 138] comme des systèmes non holonomes avec des contraintes du second ordre (ou d'accélération). D'après ces auteurs, pour un système sous actionné où les variables de configurations peuvent être partitionnées, sans perte de généralités, en $q = (q_1, q_2)$, $q_1 \in \mathbb{R}^m$, $q_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ et si $F(q) = (I_m, 0)^T$, les équations d'Euler-Lagrange sont données par :

$$\begin{aligned} m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + N_1(q, \dot{q}) &= F(q)u \\ m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + N_2(q, \dot{q}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $N_i(q, \dot{q})$ regroupent les termes centrifuges, coriolis et de gravité.

La deuxième équation de (3.6) représente la partie sous actionnée sous forme de contraintes du second ordre, généralement non intégrables. Dans ce cas, les contraintes se situent non pas au niveau de la cinématique, mais au niveau de la dynamique, du fait que le nombre d'actionneurs indépendants est inférieur au nombre de degrés de liberté.

Les exemples les plus répandus de tels systèmes sont les véhicules marins et sous-marins, les véhicules et robots d'espace et les manipulateurs sous actionnés.

Oriolo et Nakamura dans [125] donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un SMSA contienne des contraintes non holonomes de second ordre ou de premier ordre ou tout simplement des contraintes holonomes.

3.5 Sous actionnement et non holonomie

La commande des véhicules non holonomes et des véhicules sous actionnés fait généralement l'objet d'études distinctes. Ceci est en partie justifié par la différence de structure des modèles associés. Pour les systèmes non holonomes, la difficulté (du point de vue de l'automaticien) se situe au niveau du modèle cinématique, alors qu'elle est liée à la dynamique pour les systèmes sous actionnés. Cette distinction implique également une hiérarchie en ce qui concerne la difficulté à synthétiser des lois de commande : alors que des méthodes assez générales ont été proposées pour la commande des systèmes non holonomes (et plus généralement des systèmes de commande non linéaires), les systèmes sous actionnés ont jusqu'à présent été étudiés au cas par cas, en raison de la difficulté à mettre en évidence des propriétés structurelles suffisamment générales et exploitables pour la synthèse.

La relation générale entre les systèmes non holonomes et les systèmes sous actionnés n'est pas complètement établie, malgré cela, ces deux classes de systèmes possèdent de nombreux points communs, rarement explicités, dont la compréhension peut permettre de progresser vers un traitement unifié des problèmes de commande. Le lecteur pourra trouver dans le travail de Jarzebowska [79] une excellente étude comparative et classificative des contraintes non holonomes du premier ordre qualifiées selon l'auteur de contraintes matérielles et des contraintes non holonomes du second ordre dues au sous actionnement qualifiées selon le même auteur de contraintes non matérielles.

Remarque 3.2. • *Lorsqu'un SMSA contient des contraintes non holonomes du premier ordre, une pratique commune pour le contrôle de ces systèmes est de les transformer en une forme canonique pour laquelle la conception de commande semble plus simple. Cette forme canonique est dite forme chaînée (3.7) [87, 116, 117].*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= u_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 u_1\end{aligned}\tag{3.7}$$

Les systèmes pouvant se mettre sous cette forme sont par exemples : les robots mobiles et les véhicules remorqueurs qui tirent plusieurs wagons.

Par contre, lorsqu'un SMSA contient des contraintes non holonomes du second ordre, certains proposent de transformer ces systèmes en des formes chaînées du second ordre (3.8) [2]

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 &= u_1 \\ \ddot{\xi}_2 &= u_2 \\ \ddot{\xi}_3 &= \xi_2 u_1\end{aligned}\tag{3.8}$$

Alors que les systèmes chaînés du premier ordre peuvent avoir une dimension plus élevée que dans (3.7), les systèmes chaînés du second ordre n'excèdent pas une dimension 3, de plus, ces derniers sont connus pour être plus difficiles à commander que les premiers.

- *Certains automaticiens préfèrent utiliser le terme contraintes de sous actionnement du second ordre plutôt que contraintes non holonomes du second ordre en argumentant le fait que lorsqu'un SMSA est augmenté des actionneurs manquants, il devient un système complètement actionné et pourra fonctionner de façon correcte alors que s'il est sujet à des contraintes non holonomes, le fait de rajouter des actionneurs ne pourra toujours pas résoudre par exemple un problème de déplacement dans un certain sens ! par exemple, pour se débarasser de ces contraintes dans une voiture il faudrait rajouter des roues, or cela va causer un changement de la cinématique du système qui implique*

le changement du modèle initial.

- *La définition générale des SMSA possède certaines limitations et pour preuve supposons qu'un système sous actionné possède une contrainte non holonome du premier ordre. Par exemple considérons le robot mobile de la figure 3.1 de coordonnées généralisées (x, y, θ) représenté par les équations :*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u\end{aligned}\tag{3.9}$$

soumis aux entrées v : vitesse de déplacement et u : vitesse angulaire. Ce système est soumis à une contrainte de vitesse non intégrable donnée par :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0.$$

Ce système avec 3 degrés de liberté et 2 entrées est bien un système sous actionné. Or du moment que ce système possède une contrainte de vitesse empêchant le déplacement dans le sens latéral, il s'en suit qu'en fin de compte, il n'est possible de commander que 2 degrés de liberté tout en disposant toujours de 2 entrées ; aussi, dans un certain sens, c'est comme si ce système est complètement actionné !

Quelle que soit la cause et la conséquence du sous actionnement, en raison de leurs larges applications, le contrôle de ces systèmes est extrêmement important ; cependant, la restriction sur le nombre de contrôle génère des difficultés principales dans la conception de commande.

3.6 Problématiques associées aux SMSA

La classe des SMSA est riche en même temps en applications et en problèmes de contrôle. Effectivement, aux problèmes liés au caractère non linéaire de ces systèmes, s'ajoute celui du sous actionnement, cela a attiré l'attention des automaticiens et évidemment des mathématiciens.

Contrairement aux systèmes complètement actionnés où un certain nombre de résultats de contrôle ont été développés pouvant être appliqués à des classes entières parce que ces

systèmes possèdent un certain nombre de propriétés qui facilitent la synthèse de commande telles que la linéarisabilité par feedback, la passivité, la matching condition et la linéarisabilité par rapport aux paramètres, très peu de résultats sont valables pour une classe entière de systèmes sous actionnés car une ou plusieurs des propriétés précédentes ne sont plus valables! De plus, d'autres propriétés indésirables telles qu'un degré relatif non déterminé ou un comportement à non minimum de phase se manifestent.

D'autre part, plusieurs SMSA présentent une obstruction structurelle à l'existence de commandes stabilisantes lisses et invariantes dans le temps car, ils ne satisfont pas la célèbre condition nécessaire de Brockett [22] : une des contributions les plus marquantes dans ce domaine et qui sera présentée par la suite. Typiquement, une première indication de cette obstruction découle du fait que la linéarisation de ces systèmes autour de n'importe quel point d'équilibre est non commandable (en particulier en absence des termes de gravité). Ainsi, de fausses conclusions sur la commandabilité du système non linéaire peuvent être tirées. Dans ce cas, la procédure que proposent certains pour éviter cette difficulté est d'atteindre la stabilisation en utilisant une commande discontinue ou variable dans le temps [11, 35, 109, 115, 134, 140, 156, 143]. Par contre, en présence de termes potentiels, une stabilisation locale et exponentielle par un feedback régulier, continu et invariant est évidemment possible.

Remarque 3.3. *Pour les systèmes linéaires, la commandabilité implique la stabilisabilité du système. Ceci n'est pas vrai pour les systèmes non linéaires. Le théorème de Brockett [22] donne une condition nécessaire sur la stabilité des systèmes non linéaire par une loi de commande continue.*

Théorème 3.1. *Considérons le système donné par :*

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.10}$$

avec $f(0, 0) = 0$ et $f(., .)$ est définie continue dans un voisinage de l'origine. Une condition nécessaire pour l'existence d'une commande continue invariante dans le temps et qui rend l'origine asymptotiquement stable est :

- (i) *Le système linéarisé autour de l'origine est stabilisable.*
- (ii) *Il existe un voisinage V de l'origine tel que pour chaque $\zeta \in V$, il existe un contrôle $u_\zeta(.)$ défini sur $[0, \infty[$ tel que ce contrôle amène la solution de $\dot{x} = f(x, u)$ de $x = \zeta$ en $t = 0$ vers $x = 0$ en $t = \infty$.*

(iii) L'application $\gamma : A \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma : (x, u) \mapsto f(x, u)$ doit être surjective dans un voisinage de l'origine.

La première condition représente la condition de rang d'un système linéaire. À noter que dans le cas linéaire, la condition de rang est nécessaire et suffisante pour la commandabilité et l'existence d'une loi de contrôle continue et différentiable pour le contrôle des systèmes linéaires $\dot{x} = Ax + Bu$.

La deuxième condition représente la propriété de commandabilité dans la cas non linéaire. Cette condition n'est pas suffisante pour déterminer une loi de contrôle avec une certaine régularité. En général, on a besoin de satisfaire plus que la condition de commandabilité, d'où le besoin d'introduire la condition (iii) qui correspond à la condition nécessaire de ce théorème.

La troisième condition implique que l'application doit être localement surjective ou que l'image de l'application $(x, u) \mapsto f(x, u)$, pour x et u arbitrairement proche de 0, doit contenir un voisinage de l'origine.

Pour clarifier cette situation, considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u & &= \epsilon_1 \\ \dot{y} &= v & &= \epsilon_2 \\ \dot{z} &= yu - xv & &= \epsilon_3\end{aligned}$$

Existe-t-il un contrôle continu $(u, v) = (u(x, y, z), v(x, y, z))$ qui rend l'origine du système précédent asymptotiquement stable ?

La troisième condition de Brockett signifie que le système doit contenir une solution (x, y, z, u, v) pour chaque $\epsilon_i (i = 1, 2, 3)$ dans un voisinage de l'origine. Ce n'est pas le cas ici, puisque le système n'a pas de solution pour $\epsilon_3 \neq 0$ et $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 0$.

Contrairement à l'exemple précédent, l'exemple suivant satisfait la troisième condition

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u & &= \epsilon_1 \\ \dot{y} &= v & &= \epsilon_2 \\ \dot{z} &= xy & &= \epsilon_3\end{aligned}$$

Ainsi, pour cet exemple particulier, il existe une loi de contrôle continue stabilisant asymptotiquement l'origine.

En résumé, les SMSA ne sont pas linéarisables complètement par feedback, par conséquent ne sont pas découplables, la commandabilité de ces systèmes est difficile à démontrer, et combien même ils sont commandables ceci n'implique pas qu'ils le sont avec des commandes lisses et continues, de plus, le manque de propriétés communes et générales a fait que, souvent, ces systèmes sont étudiés au cas par cas.

Toutes ces difficultés de commande suggèrent que l'objectif de stabilisation asymptotique est sans doute trop contraignant pour la commande des SMSA. Néanmoins, une propriété intéressante valable pour tous ces systèmes est celle de la possibilité d'une linéarisation partielle par feedback. Cette propriété est due à Spong [158], et représente une conséquence de la définie positivité de la matrice d'inertie. Cette linéarisation peut être localisée ou non localisée en fonction de l'actionnement ou non des variables linéarisées.

3.7 Linéarisation partielle par feedback

Reprenons le modèle d'un SMSA donné par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)\tau$$

où $\tau \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle et $F(q) \in \mathbb{R}_{n \times m}$ une matrice non carrée des forces extérieures avec $m < n$.

Supposons que $F(q) = [0, I_m]^T$, alors le vecteur de configuration peut être partitionné en $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, où q_1 représente le vecteur de configuration non actionné et q_2 représente le vecteur de configuration actionné respectivement. En fonction de cette partition, la matrice d'inertie et le modèle du SMSA prennent la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(q, \dot{q}) \\ N_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

À cause du manque de contrôle dans la première équation de (3.11), il n'est pas possible de linéariser complètement ce système par un changement de contrôle. Par contre, il est possible de linéariser partiellement ce système telle que la dynamique de q_2 soit transformée en un double intégrateur.

3.7.1 Linéarisation partielle localisée

Lorsque la dynamique actionnée est q_2 , la procédure de linéarisation de cette dynamique s'appelle "*collocated partial feedback linearization*". D'une manière équivalente, cette

linéarisation peut être considérée comme une linéarisation entrée-sortie par rapport à la sortie $y = q_2$. Spong a montré que tous les systèmes sous actionnés de la forme (3.11) peuvent être partiellement linéarisés en utilisant un changement de contrôle.

Proposition 3.1. *Il existe un changement de contrôle global et inversible sous la forme $\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q})$ qui linéarise partiellement la dynamique de (3.11) :*

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f_0(q, p) + g_0(q)u \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u\end{aligned}\tag{3.12}$$

où $\alpha(q)$ est une matrice symétrique ($m \times m$) définie positive et $g_0(q) = -m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)$

preuve 2. *De la première ligne de (3.11) nous avons*

$$\ddot{q}_1 = -m_{11}^{-1}(q)N_1(q, \dot{q}) - m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)\ddot{q}_2$$

ce qui donne l'expression de $g_0(q)$, en remplaçant cette équation dans la deuxième ligne de (3.11), on obtient :

$$(m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q))\ddot{q}_2 + N_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)N_1(q, \dot{q}) = \tau$$

La preuve est établit en définissant :

$$\begin{aligned}\alpha(q) &= (m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)) \\ \beta(q, \dot{q}) &= N_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)N_1(q, \dot{q})\end{aligned}$$

et en observant que $\alpha(q)$ est symétrique définie positive.

3.7.2 Linéarisation partielle non localisée

Dans cette section, nous présentons la procédure de linéarisation partielle qui linéarise la dynamique de la configuration non actionnée. Cette linéarisation est possible si le nombre d'entrée de commande est supérieur ou égal au nombre des variables de configuration non actionnées, cette procédure est appelée “*noncollocated partial feedback linearization*”.

Considérons le système sous actionné suivant :

$$\begin{bmatrix} m_{00}(q) & m_{01}(q) & m_{02}(q) \\ m_{10}(q) & m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{20}(q) & m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_0(q, \dot{q}) \\ N_1(q, \dot{q}) \\ N_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{3.13}$$

où $q = (q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ avec $n_1 = n_2 = m$ et $n_0 = n - 2m \geq 0$.

Proposition 3.2. *considérons le système sous actionné (3.13), il existe un changement de contrôle sous la forme $\tau = \alpha_1(q)u + \beta_1(q, \dot{q})$ qui linéarise partiellement la dynamique de (3.13) dans l'ensemble $U = \{q \in \mathbb{R}^n / \det(m_{21}(q) \neq 0)\}$*

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= p_0 \\ \dot{p}_0 &= u_0 \\ \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f_0(q, p) + g_0(q)u_0 + g_2(q)u_2 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u_2\end{aligned}$$

où $\tau = (\tau_0, \tau_1)$, $u = (u_0, u_1)$ et $u_1 = \alpha_0(q)u_0 + \alpha_2(q)u_2 + \beta_2(q, \dot{q})$ avec

$$\begin{aligned}f_0(q, p) &= -m_{21}^{-1}(q)N_2(q, \dot{q}) \\ g_0(q) &= -m_{21}^{-1}(q)m_{20}(q) \\ g_2(q) &= -m_{21}^{-1}(q)m_{22}(q)\end{aligned}$$

La preuve est basée sur celle de linéarisation partielle localisée, et pour plus de détails, voir [158].

3.7.3 Linéarisation partielle sous des entrées couplées

Considérons le système sous actionné (3.1) avec le vecteur de configuration $q \in \mathbb{R}^n$ et le contrôle $\tau \in \mathbb{R}^m$ et $\text{rang } F(q) = m < n$. $F(q)$ peut être écrit comme :

$$F(q) = \begin{bmatrix} F_1(q) \\ F_2(q) \end{bmatrix}$$

tel que $F_2(q)$ est une matrice $(m \times m)$ inversible et q peut être décomposé en $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{(n-m)} \times \mathbb{R}^m$. La définition des entrées couplées implique que $F_1(q) \neq 0$ pour tout q . Dans la suite, nous présentons les conditions permettant la linéarisation partielle pour le cas de ces systèmes sous actionnés.

Proposition 3.3. *considérons le système sous actionné avec des entrées couplées c'est-à-dire $(F_1(q) \neq 0, \det(F_2(q)) \neq 0$ pour tout q)*

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(q, \dot{q}) \\ N_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(q) \\ F_2(q) \end{bmatrix} \tau \quad (3.14)$$

et supposons que la matrice $\Lambda(q) = F_2(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)F_1(q)$ est inversible pour tout q alors, il existe un changement de contrôle $\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q})$ qui linéarise partiellement (3.14) sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f_0(q, p) + g_0(q)u \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha(q) &= \Lambda^{-1}(q) [m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)] \\ \beta(q, \dot{q}) &= \Lambda^{-1}(q) [N_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)N_1(q, \dot{q})] \\ f_0(q, p) &= m_{11}^{-1}(q) [F_1(q)\beta(q, \dot{q}) - N_1(q, \dot{q})] \\ g_0(q) &= m_{11}^{-1}(q) [F_1(q)\alpha(q) - m_{12}(q)]\end{aligned}$$

Remarque 3.4.

- Pour plus de détails sur la démonstration de ces deux dernières propositions, consulter [123] et [158].
- La procédure de la linéarisation partielle dans la proposition (3.3) est particulièrement utilisée pour les systèmes sous actionnés autonomes à six degrés de liberté tels que les avions et les hélicoptères.

Une autre propriété intéressante présente dans plusieurs SMSA est celle de la symétrie. Nous définissons dans la partie suivante les différentes notions de symétrie en relation avec les systèmes Lagrangiens.

3.8 La symétrie en mécanique

Un Lagrangien $L(q, \dot{q})$ est symétrique par rapport à la configuration de variable q_i si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Plusieurs systèmes sous actionnés possèdent certaines propriétés de symétrie, par exemple le Lagrangien de l'hélicoptère ou du satellite est indépendant de leur position, ceci donne lieu à la symétrie (l'invariance du Lagrangien).

Notons p_i le i^{eme} moment généralisé défini par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

et considérons l'équation du mouvement d'Euler-Lagrange inactionnée

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Une conséquence immédiate de la symétrie du Lagrangien par rapport à q_i est la conservation du i^{eme} moment généralisé ($\dot{p}_i = 0$) et vice versa.

L'équation $\dot{p}_i = 0$ est équivalente à des contraintes du premier ordre

$$W^T(q)\dot{q} = p_i(0)$$

où $W(q) = (m_{i1}(q), \dots, m_{in}(q))^T$ est la i^{eme} ligne de la matrice d'inertie $M(q)$. Si cette contrainte est non intégrable, l'analyse du système se réduit à l'analyse d'un système mécanique avec des contraintes non holonomes du premier ordre, donc, l'existence de la symétrie donne lieu à des contraintes de vitesse holonome/non holonome pour les systèmes mécaniques.

Dans ce travail, nous employons une notion différente de symétrie appelée symétrie cinétique par rapport à q_i c'est-à-dire

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = 0$$

Par définition, un système mécanique dont la matrice d'inertie est indépendante d'un ensemble de variables de configuration possède une symétrie cinétique par rapport à ces variables. Nous appelons ce sous ensemble les variables externes et son complément les variables de forme (les variables qui apparaissent dans la matrice d'inertie). La symétrie cinétique est équivalente à la symétrie classique en l'absence d'énergie potentielle.

La dernière partie de ce chapitre est réservée à la présentation de quelques modèles de SMSA obtenus par le formalisme de Lagrange.

3.9 Exemples des systèmes mécaniques sous actionnés

Dans cette section, nous allons donner quelques modèles de systèmes mécaniques sous actionnés, représentant pour la majorité d'entre eux des benchmarks du contrôle non linéaires. Ces exemples incluent le chariot-pendule inversé, la masse glissante sur un chariot, le Tora (translational oscillator rotational actuator), l'Acrobot et le Pendubot et la bille sur rail. Chaque exemple abordé sera brièvement introduit et rapidement modélisé.

3.9.1 Chariot-pendule inversé

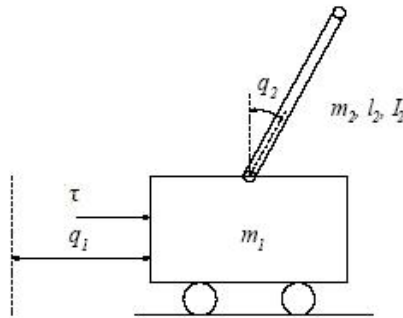


Figure 3.2 Le chariot pendule inverse.

Le pendule inversé est sans doute, l'une des expériences de laboratoire les plus populaires utilisée pour illustrer des techniques non linéaires de commande.

Le système chariot-pendule inversé représenté par la figure (3.2) est un système mécanique sous actionné constitué d'un chariot pouvant se déplacer sur une surface plane et d'un pendule connecté à travers une charnière sur le chariot, le tout est commandé par un moteur électrique. La nécessité de commander q_1 et q_2 avec un seul contrôle τ classe ce système dans la catégorie des systèmes mécaniques sous actionnés.

La matrice d'inertie $M(q)$ et l'énergie potentielle $V(q)$ sont données par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l_2 \cos q_2 \\ m_2 l_2 \cos q_2 & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \text{ et } V(q) = m_2 g l_2 \cos q_2$$

où m_1 masse du chariot et m_2, l_2, I_2 sont la masse, longueur du centre de masse et l'inertie du pendule respectivement. Le système chariot pendule inversé a fait l'objet de plusieurs tests de commande en même temps linéaires et non linéaires.

3.9.2 Masse glissante sur chariot

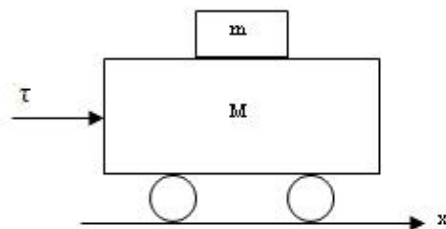


Figure 3.3 La masse glissante sur chariot.

Soit le système représenté par la figure 3.3 et supposons qu'il existe un frottement B (éventuellement non linéaire) entre la masse m et le chariot de masse M , notons x_1 la position de la masse m par rapport au chariot et x_2 la position du chariot. Les équations du mouvement sont données par :

$$m\ddot{x}_1 - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \tau$$

3.9.3 Système Tora

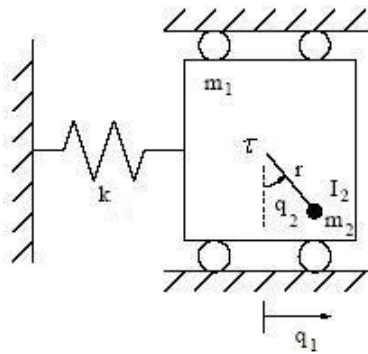


Figure 3.4 Tora système.

Le système Tora² représenté par la figure 3.4 se compose d'une plateforme d'oscillation commandée par l'intermédiaire d'une masse excentrique. La matrice d'inertie $M(q)$ et l'énergie potentielle $V(q)$ sont données par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 r \cos q_2 \\ m_2 r \cos q_2 & m_2 r^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V(q) = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + m_2 g r \cos q_2$$

3.9.4 Acrobot et Pendubot

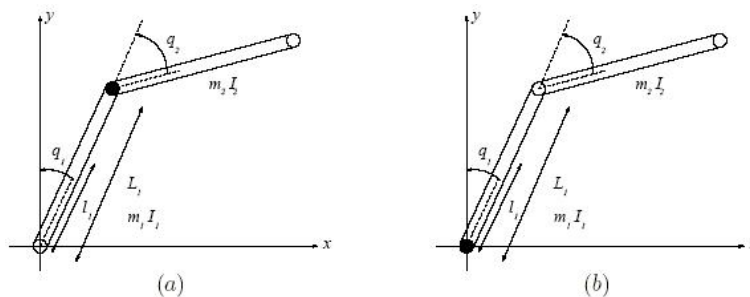


Figure 3.5 L'Acrobot et le Pendubot.

²Translational Oscillator Rotational Actuator

Considérons un robot à deux bras avec un seul actionneur, la mise en action d'une variable (c'est-à-dire q_1 ou q_2) donne deux systèmes mécaniques sous actionnés différents ; Acrobot (figure 3.5(a)) où q_2 est actionné et Pendubot (figure 3.5(b)) où q_1 est actionné. En réalité, ces deux systèmes mécaniques représentent le même système complètement actionné, la conséquence d'une panne ou bien le choix volontaire de supprimer un actionneur donne lieu à deux structures différentes.

La matrice d'inertie des deux systèmes est donnée par

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 (L_1^2 + l_2^2) + 2m_2 L_1 l_2 \cos q_2 \\ m_{12} &= m_{21} = I_2 + m_2 l_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos q_2 \\ m_{22} &= I_2 + m_2 l_2^2 \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle correspondante $V(q)$ est donnée par

$$V(q) = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos q_1 + m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2)$$

où m_i , I_i , L_i , l_i la masse, l'inertie, la longueur et la longueur du centre de masse du i^{eme} bras.

3.9.5 Le pendule à roue inertielle : inertia wheel pendulum

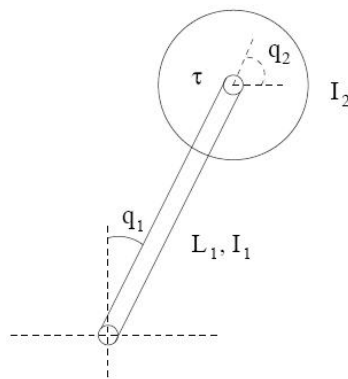


Figure 3.6 La roue inertielle pendulaire.

La roue inertielle représentée par la figure 3.6 consiste en un pendule dont l'extrémité est une roue inertielle rotative. Le pendule n'est pas actionné et le système est contrôlé via la roue. L'objectif de contrôle est d'une part : de stabiliser le pendule à la position d'équilibre verticale et d'autre part de stabiliser le mouvement rotatif de la roue.

Les éléments de la matrice d'inertie associée à ce système sont données par :

$$m_{11} = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 + I_2$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{22} = I_2$$

Le fait que ces éléments soient constants qualifie ce système de plat.

l'énergie potentielle correspondante $V(q)$ [162] est donnée par

$$V(q) = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos q_1 = m_0 \cos q_1$$

où m_1, m_2, I_1, I_2 sont les masses et les inerties du pendule et de la roue respectivement, L_1, l_1 représentent la longueur et la longueur du centre du pendule.

3.9.6 La bille sur rail (ball and beam)

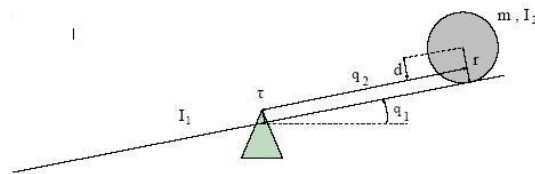


Figure 3.7 La bille sur rail.

Ce système est composé d'une poutre pouvant pivoter dans le plan vertical par l'application d'un couple τ au point de rotation (le centre), et d'une bille dont on restreindra le mouvement à un glissement sans frottement le long de la poutre.

Dans cet exemple, on veut commander la position angulaire q_1 de la poutre et la position q_2 de la boule par la seule commande disponible τ appliquée au point de rotation de la poutre.

Soit d la distance entre le centre de masse de la bille et la poutre ($d = r$ dans la figure 3.7). Le modèle conventionnel de ce système correspond à $d = 0$. La matrice d'inertie $M(q)$ et l'énergie potentielle $V(q)$ sont données par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + m(q_2^2 + d^2) & -md \\ -md & m\lambda \end{bmatrix} \text{ et } V(q) = mg(q_2 \sin q_1 + d \cos q_1)$$

où I_1 l'inertie de la poutre ; m, I_2 la masse et l'inertie de la bille respectivement avec $\lambda = 1 + \frac{I_2}{mr^2}$

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la construction à partir du formalisme de Lagrange du modèle dynamique des systèmes mécaniques sous actionnés. Ces systèmes sont définis comme étant des systèmes qui possèdent moins d'entrées de commande que de degrés de liberté à contrôler.

Nous avons expliqué ensuite, les différents problèmes liés au caractère du sous actionnement, puis nous avons donné les modèles de quelques exemples de SMSA.

Nous sommes arrivés à la conclusion que ces systèmes possèdent très peu de propriétés en commun ce qui fait que, le plus souvent, ces systèmes sont étudiés au cas par cas. Dans le but de généraliser le traitement de ces systèmes, du moins pour certaines classes, nous procéderons dans le chapitre suivant à une classification de ces systèmes.

Chapitre 4

Classification des systèmes mécaniques sous actionnés

”....L’ordre conduit à toutes les vertus mais qu’est ce qui conduit à l’ordre ?”

Georg Christoph Lichtenberg.

Dans un souci de donner une certaine généralisation à la synthèse des lois de commande pour les systèmes mécaniques sous actionnés, il est intuitif d’essayer de chercher des propriétés structurelles communes aux différents SMSA. Or, d’après le chapitre précédent, souvent, ces systèmes sont traités au cas par cas.

À notre connaissance, seules deux tentatives de classifications pour ces systèmes sont disponibles en littérature. La 1^{ière} est due à *Seto*¹ et *Baillieul*² et la 2^{ième} à *Olfati Saber*³.

Le présent chapitre a pour premier objectif de présenter ces deux classifications et pour un second objectif, de démontrer éventuellement, s’il existe un lien entre ces classifications.

4.1 Classification des SMSA selon *Seto et Baillieul*

L’une des deux classifications des SMSA proposée dans ce travail est celle de *Danbing Seto et John Baillieul* [151]. Une caractéristique graphique des SMSA est développée dans un diagramme de circuit de contrôle appelée CFD (control flow diagram) construit pour

¹Danbing Seto a reçu son diplôme de Master en ingénierie des systèmes en 1987 et son PhD en mécanique en 1993 de l’université de Boston. Actuellement, il est adjoint Professeur à l’université de Hartford. Ses domaines d’intérêt incluent l’analyse analytique d’élaboration de décision en business, la modélisation prédictive et l’analyse statistique

²John Baillieul est professeur en mécanique aérospatiale à l’université de Boston. Ses recherches concernent la robotique, le contrôle des systèmes mécaniques et la théorie des systèmes mathématiques

³Reza Olfati Saber est actuellement Assistant Professeur à l’école d’ingénieur Thayer et au collège Dartmouth. Il a reçu ses diplômes de Master et PhD de Massachusetts Institute of Technology en ingénierie électrique science informatiques en 1997 et 2001 respectivement. Ses recherches sont orientées vers les réseaux capteurs et complexes, fusion d’informations, modélisation et évaluation des comportements humains

représenter les forces d'interactions à travers les degrés de liberté du système sous actionné. Trois types de structures sont identifiées : structure chaîne, structure arbre et point isolé.

Seto et Baillieul, dans leur classification donnent une solution de commande que pour les SMSA ayant une structure chaîne où une procédure systématique de backstepping est mise au point ; c'est précisément le point fort de cette classification, par contre son point faible est que les deux autres structures restent un problème ouvert pour la commande.

Le formalisme de Lagrange nous fournit de façon directe les modèles dynamiques des systèmes sous actionnés. Considérons un système mécanique de n degrés de liberté décrit dans les coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ appelées variables de configuration. Les équations du mouvement sont données par :

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = F(q)\tau \quad (4.1)$$

où $N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ d'après (3.2)

4.1.1 Principe du diagramme de circuit de contrôle

Il s'agit de comprendre les relations existant entre les éléments d'un système en étudiant les forces d'interactions qui couplent les degrés de liberté et développer un caractère graphique pour capturer les dynamiques du système donné. Pour cela on associe à chaque mécanisme un diagramme de circuit de contrôle appelé CFD.

Trois types de structures sont identifiées à savoir : la structure chaîne, la structure arbre et les points isolés, de plus, on peut avoir une combinaison de ces trois structures ce qui donne en fin de compte sept structures possibles.

Ces différentes structures définissent le degré de complexité du système donné.

4.1.1.1 Caractérisation graphique des SMSA

Dans cette partie, nous allons présenter la construction du CFD associé à un système mécanique donné et identifier les diverses structures possibles dans le CFD. Une telle analyse peut être un point de départ pour le contrôle des SMSA.

Définition 4.1. *Pour chaque point (q^0, \dot{q}^0) et chaque voisinage U de (q^0, \dot{q}^0) on associe au système (4.1) un organigramme appelé CFD construit de la manière suivante :*

1. *Reécrire le système (4.1) sous la forme :*

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[F(q)\tau - N(q, \dot{q})] = H(q, \dot{q}, \tau) \quad (4.2)$$

2. Choisir $n + m$ sommets q_1, \dots, q_n et τ_1, \dots, τ_m .
3. Pour chaque sommet q_i , $i \in [1, n]$ tracer une branche de τ_j et q_k ($j \in [1, m]$, $k \in [1, n]$) avec $k \neq i$, vers q_i si la fonction H_i dépend explicitement de τ_j, q_k ou \dot{q}_k et associer le nombre a_{ij} aux branches entre q_i et τ_j et le nombre b_{ik} aux branches reliant q_k à q_i .

Les valeurs de a_{ij} et b_{ik} sont déterminées par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \tau_j} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \tau_j} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \end{cases}$$

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -1 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \\ 2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \equiv 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ mais } \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \equiv 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ mais } \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \end{cases}$$

4. Associer une longueur pour chaque chemin de commande de τ_j vers q_i ($i \in [1, n], j \in [1, m]$) par l'addition des valeurs absolues des nombres assignés à chaque branche. Pour chaque variable de configuration q_i , garder le chemin de commande avec la longueur la plus courte, et parmi eux éliminer tous les chemins de commande singuliers (c'est-à-dire les chemins de commande contenant toute branche avec un nombre négatif).

La construction du CFD est maintenant complète.

Remarque 4.1. Il est aussi possible de construire le CFD des SMSA soumis à des contraintes non holonomes du premier ordre, pour plus de détails consulter [151].

Définissons maintenant les 3 différentes structures : la structure chaîne, arbre et point isolé

Définition 4.2. Supposons que G_i soit un sous graphe du CFD, et que G_i contienne m_i entrées de commande.

1. G_i a une structure chaîne s'il y a m_i sommets avec m_i chemin de contrôle incluant tous les sommets dans G_i , tel que chaque sommet appartient à un et seulement un chemin de commande figure 4.1.

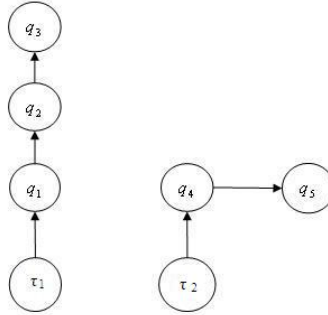


Figure 4.1 Structures chaînes.

2. G_i a une structure arbre si pour tout sommet m_i , chaque ensemble des m_i chemins de contrôle correspondants ne contient pas certains sommets 4.2(a) ou alors contient des sommets qui peuvent figurer dans plus qu'un chemin de contrôle 4.2(b)

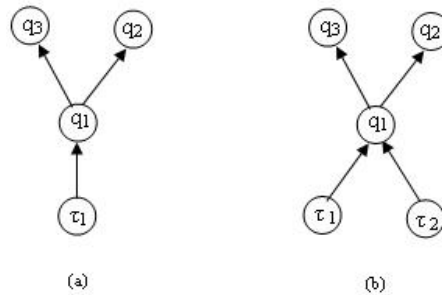


Figure 4.2 Structures arbres.

3. G_i a une structure de sommets isolés si G_i contient seulement des sommets pour lesquels il n'y a que des chemins de contrôle singuliers ou pas de chemin de contrôle dans le CFD figure 4.3.

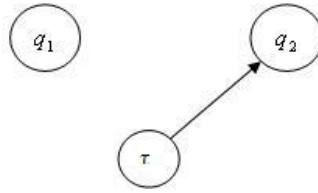


Figure 4.3 Structure point isolé.

En se basant sur ces définitions, on définit la notion de degré de complexité dans le contexte du CFD, ce degré indique la difficulté à contrôler un système.

Définition 4.3. *Par degré de complexité d'un système donné, on signifie la position de ce système dans le classement suivant :*

Complexité hiérarchique du CFD pour un système mécanique :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ chaîne seulement} \\ 2) \text{ chaîne + arbre} \\ 3) \text{ arbre seulement} \\ 4) \text{ chaîne + point isolé} \\ 5) \text{ chaîne + arbre + point isolé} \\ 6) \text{ arbre + point isolé} \\ 7) \text{ point isolé seulement} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Remarque 4.2.

- Clairement, la structure chaîne est la moins difficile à contrôler, il apparaît même que les systèmes avec une telle structure peuvent être commandés à travers une linéarisation par bouclage ou par backstepping puisque les degrés de liberté et les commandes sont reliées en série.
- Par contre, les systèmes avec une structure arbre, n'ont pas les mêmes avantages, parce qu'on a besoin de contrôler certains degrés de liberté en parallèle dans le sens, qu'une entrée de commande doit contrôler plus qu'une variable simultanément, ce qui limite l'atteignabilité des objectifs de contrôle.

- Pour les systèmes avec une structure en point isolé, certains objectifs de commande sont difficiles voire impossibles à atteindre du fait que la commande n'a pas d'influence sur quelques variables.

4.1.1.2 Interprétation mathématique du CFD

En définissant une fonction de sortie $y_i = q_i$, $i = 1, \dots, n$ on définit le degré relatif pour chaque sortie y_i .

Définition 4.4. *Le degré relatif pour une variable de configuration donnée (s'il existe) est la longueur la plus courte du chemin de contrôle menant à cette variable.*

Il est clair que, les variables de configuration dans une structure point isolé n'ont pas de degré relatif bien défini.

En se basant sur le degré relatif r_k de q_k , $k \in [1, n]$ on résume la commandabilité de q_k dans le tableau 4.1

r_k est bien défini en (q^0, \dot{q}^0)	q_k est directement commandable par $\tau \in U : r_k = 2$. q_k est indirectement commandable par $\tau \in U : r_k > 2$.
r_k n'est pas bien défini en (q^0, \dot{q}^0)	q_k est sur un chemin singulier et n'est pas affecté par $\tau \in U$ en (q^0, \dot{q}^0) . q_k n'est pas sur un chemin de contrôle et ne peut être commandé.

Table 4.1 Commandabilité des variables de configuration dans un CFD

4.1.2 Exemples

Pour illustrer ce concept, nous avons construit les CFD de quelques SMSA.

1. Soit le système de la masse glissante sur chariot représenté dans la figure(3.3), les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{B}{m_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = H_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{M}[\tau - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] = H_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \tau)\end{aligned}$$

La fonction H_1 ne dépend pas du contrôle τ , donc le chemin de contrôle reliant τ à x_1 n'existe pas. Par contre, il existe un chemin indirect passant par x_2 de longueur (degré relatif) $a_{2\tau} + b_{12} = 3$ (figure 4.4)

les valeurs de $a_{2\tau}$, b_{21} et b_{12} sont déterminées par :

$$\frac{\partial H_2}{\partial \tau} = \frac{1}{M} \neq 0 \text{ en } (x^0, \dot{x}^0) \Rightarrow a_{2\tau} = 2$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{B}{m} \neq 0 \text{ en } (x^0, \dot{x}^0) \Rightarrow b_{12} = 1$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \dot{x}_1} = -\frac{B}{M} \neq 0 \text{ en } (x^0, \dot{x}^0) \Rightarrow b_{21} = 1$$

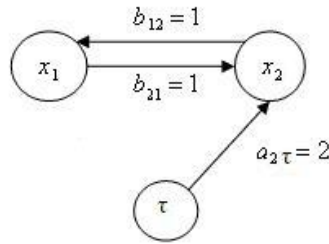


Figure 4.4 CFD du système masse glissante sur une masse.

Le système masse glissante sur chariot possède une structure chaîne. La variable x_2 est directement commandable par τ alors que la variable x_1 le sera à travers x_2 .

Remarque 4.3. *Les seuls exemples de SMSA que nous avons trouvé en littérature ayant des structures chaîne sont ceux du système masse glissante sur chariot ou encore celui d'un robot à articulations élastiques.*

2. Soit le système chariot-pendule inversé représenté dans la figure(3.2) ; les équations du mouvement sont données par :

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\det(M)} \left[(m_2 l_2^2 + I_2) \tau + (m_2 l_2^2 + I_2) m_2 l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 - m_2^2 l_2^2 g \sin q_2 \right] = H_1(q_2, \dot{q}_2, \tau)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{\det(M)} \left[(-m_2 l_2 \cos q_2) \tau + (m_1 + m_2) m_2 g l_2 \sin q_2 - m_2^2 l_2^2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 \right] = H_2(q_2, \dot{q}_2, \tau)$$

où $\det(M)$ est le déterminant de la matrice d'inertie $M(q)$ donné précédemment. Les valeurs de $a_{1\tau}$, $a_{2\tau}$ et b_{12} sont déterminées par :

$$\frac{\partial H_1}{\partial \tau} = \frac{m_2 l_2^2 + I_2}{\det(M)} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow a_{1\tau} = 2$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \tau} = -\frac{m_2 l_2 \cos q_2}{\det(M)} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow a_{2\tau} = 2$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \dot{q}_2} = \frac{2(m_2 l_2^2 + I_2)m_2 l_2 \sin q_2}{\det(M)} \dot{q}_2 \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow b_{12} = -1$$

La fonction H_2 ne dépend pas de q_1 ou \dot{q}_1 donc le chemin reliant q_1 à q_2 (b_{21}) n'existe pas figure 4.5(a).

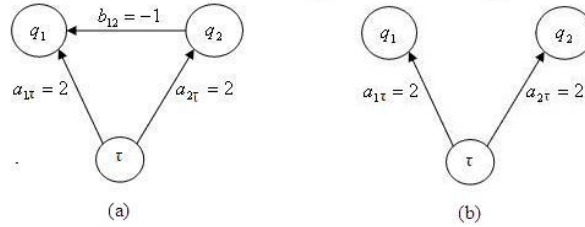


Figure 4.5 CFD du système pendule inverse.

Il y a deux chemins de contrôle reliant la variable d'entrée de commande τ à la variable q_1 , le premier est un chemin direct de longueur ($a_{1\tau} = 2$) et le deuxième est indirect passant par la variable q_2 de longueur ($a_{2\tau} + |b_{12}| = 3$). Dans ce cas, nous gardons le premier chemin de contrôle avec la longueur la plus courte ; de plus, le deuxième chemin est singulier donc à éliminer. Le CFD final est donné par la figure 4.5(b).

Ce système possède une structure arbre, aussi, il est nécessaire de commander les deux variables q_1 et q_2 simultanément.

Remarque 4.4. *L'Acrobot, le Pendubot et le Tora sont aussi des SMSA possédant une structure arbre.*

3. Considérons le système de La bille sur rail représenté par la figure(3.7), les équations du mouvement (modèle conventionnel $d = 0$) sont données par :

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{I_1 + m q_2^2} (\tau - 2m q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m g q_2 \cos q_1) = H_1(q, \dot{q}, \tau)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m \lambda} (m q_2 \dot{q}_1^2 - m g \sin q_1) = H_2(q, \dot{q})$$

Les valeurs de $a_{1\tau}$, $a_{2\tau}$ et b_{12} sont déterminées par :

$$\frac{\partial H_1}{\partial \tau} = \frac{1}{I_1 + mq_2^2} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow a_{1\tau} = 2$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \dot{q}_1} = 2 \frac{m}{m\lambda} q_2 \dot{q}_1 \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow b_{21} = -1$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \dot{q}_2} = \frac{-2m}{I_1 + mq_2^2} q_2 \dot{q}_1 \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \Rightarrow b_{12} = -1$$

La figure 4.6(a) représente le diagramme du circuit de contrôle CFD pour l'exemple de la bille sur rail. Notons que q_1 est relié à q_2 à travers une force centrifuge $mq_2\dot{q}_1^2$; dans ce cas, le degré relatif de q_2 par rapport à τ n'est pas défini lorsque $(\dot{q})_1 = 0$. La figure 4.6(b) représente le CFD final (point isolé) après l'élimination de tous les chemins de commande singuliers.

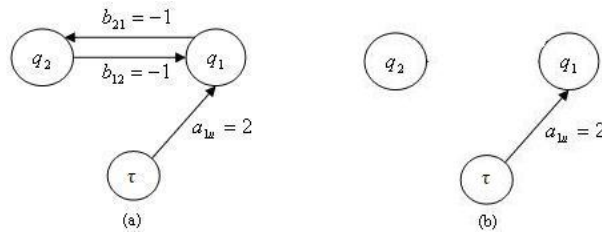


Figure 4.6 CFD du système bille sur rail.

Selon cette classification, nous concluons que le degré de complexité à contrôler les systèmes cités en exemples est croissant dans l'ordre suivant :

La masse glissant sur un chariot \rightarrow le pendule inversé \rightarrow la bille sur rail.

4.2 Classification des SMSA selon *Olfati Saber*

La deuxième classification dédiée au SMSA est due à *Reza Olfati Saber*. La contribution principale de ce dernier est d'avoir déterminer un changement de coordonnées explicite qui, à partir de la linéarisation partielle de Spong transforme les systèmes mécaniques sous actionnés en des systèmes en cascade. Les différentes formes normales obtenues donnent naissance à une deuxième classification des systèmes sous actionnés basée sur les propriétés structurelles.

L'avantage d'une telle classification est de pouvoir selon la classe obtenue, définir la commande appropriée, par exemple : la commande d'un système qui peut se mettre sous la

forme normale triangulaire feedback va se faire par le biais d'un backstepping ; celle donnée par la forme feedforward se fera par un forwarding, alors que le contrôle d'un système en forme non triangulaire reste un problème ouvert (sauf cas particuliers).

4.2.1 Formes normale des SMSA

D'après le chapitre précédent, on peut toujours linéariser partiellement la dynamique des SMSA ; cependant, le nouveau contrôle u apparaît dans les deux sous systèmes : linéaire (q_2, p_2) et non linéaire (q_1, p_1) c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f_0(q, p) + g_0(q)u \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u\end{aligned}$$

où u est le nouveau contrôle donné par $\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q})$.

L'idée est de découpler ces deux sous systèmes à travers un changement global de coordonnées.

Théorème 4.1. [123] *considérons un système mécanique sous actionné avec la matrice d'inertie $M(q) = \{m_{ij}(q)\}$; $i, j = 1, 2$ où $q = (q_1, q_2)$, $q_1 = (q_1^i) \in \mathbb{R}^{n-m}$ et $q_2 = (q_2^j) \in \mathbb{R}^m$ dénotent les variables de configuration non actionnées et actionnées respectivement. Soit*

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_0(q) \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}$$

où $g_0(q) = -m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q) = (g_0^1(q), \dots, g_0^m(q))$ avec $g_0^j(q) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$

et $I_{m \times m}$ est la matrice d'identité.

Définissons la distribution $\Delta(q)$ de rang complet par colonnes (globalement non singulière).

$$\Delta(q) = \text{span} \{ \text{colonne de } g(q) \}$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que la distribution $\Delta(q)$ soit globalement involutive c'est-à-dire complètement intégrable est que :

$$\frac{\partial g_0^j(q)}{\partial q_1} g_0^i(q) - \frac{\partial g_0^i(q)}{\partial q_1} g_0^j(q) + \frac{\partial g_0^j(q)}{\partial q_2^i} - \frac{\partial g_0^i(q)}{\partial q_2^j} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

De plus, si la condition (4.4) est vérifiée, alors il existe un changement de coordonnées global donné par :

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi(q_1, q_2) \\ z_2 &= (D_{q_1}\Phi(q))p_1 + (D_{q_2}\Phi(q))p_2 \\ \xi_1 &= q_2 \\ \xi_2 &= \dot{q}_2 \end{aligned}$$

qui transforme la dynamique du système en une forme normale

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f(z, \xi_1, \xi_2) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u \end{aligned} \tag{4.5}$$

Remarque 4.5. La forme normale (4.5) est un cas spécial de la forme célèbre de Byrnes-Isidori avec double intégrateurs

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, \xi_1, \xi_2) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u \end{aligned} \tag{4.6}$$

Le système, une fois découplé, peut prendre l'une des forme normales en cascade ci dessous définies comme suit :

Définition 4.5. [Système cascade] On dit qu'un système non linéaire est sous la forme cascade s'il a la structure suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, \xi) \\ \dot{\xi} &= g(\xi, u) \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, (z, ξ) est l'état composé et u est l'entrée de commande. Si $\dot{\xi} = A\xi + Bu$, (4.7) est appelé système cascade partiellement linéaire.

Définition 4.6. [Forme feedback] On appelle une forme feedback stricte d'un système non linéaire la structure triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, \xi_1) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_m &= u \end{aligned}$$

Définition 4.7. [*Forme feedforward*] On appelle une forme feedforward d'un système non linéaire la structure triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(x_3, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u + \varphi_n(x_n, u)\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$

Définition 4.8. [*Forme non triangulaire*] On appelle une forme non triangulaire d'un système non linéaire (partiellement linéaire) la structure suivante :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(z, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_m &= u\end{aligned}\tag{4.8}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ et où $u \in \mathbb{R}^p$. Le système non linéaire (4.8) s'appelle aussi forme normale de Byrnes-Isidori.

Définition 4.9. [*Forme non triangulaire linéaire-quadratique*] Un système non linéaire cascade est dit sous forme non triangulaire linéaire-quadratique s'il possède la structure suivante :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \mu(z_1)z_2 + \eta(\xi_1)\xi_2 \\ \dot{z}_2 &= \phi(z_1, \xi_1) + \Sigma(\xi_1, z_2, \xi_2) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u\end{aligned}\tag{4.9}$$

où $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $\mu(z_1)$ est une matrice définie positive, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Sigma : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ possède une structure quadratique en (z_2, ξ_2)

$$\Sigma(\xi_1, z_2, \xi_2) = \begin{bmatrix} z_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T \Pi(\xi_1) \begin{bmatrix} z_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

où $\Pi = (\Pi^1, \dots, \Pi^n)$ est une matrice cubique avec les éléments dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ et pour $v \in \mathbb{R}^n$, $v^T \Pi v := (v^T \Pi^1 v, \dots, v^T \Pi^n v)^T \in \mathbb{R}^n$.

Si $\eta \equiv 0$, (4.9) est appelé forme non triangulaire quadratique (par rapport à ξ_2).

Si $\Sigma \equiv 0$, (4.9) est appelé forme non triangulaire linéaire (par rapport à ξ_2).

En fonction des formes normales obtenues, *Olfati-Saber* a réparti les SMSA en huit classes. Nous commencerons par présenter la classification des SMSA à deux degrés de liberté, nous rappellerons ensuite très brièvement celle des SMSA d'ordre plus élevé.

4.2.2 SMSA à deux degrés de liberté

Ces systèmes ne peuvent donner lieu qu'à trois classes différentes notées I, II et III. Les systèmes considérés sont ceux qui possèdent une symétrie cinétique par rapport à q_1 c'est-à-dire $\frac{\partial K}{\partial q_1} = 0$, K : énergie cinétique, ce qui revient à dire que $M(q) = M(q_2)$.

À cause de cette propriété, la matrice d'inertie dépend d'une certaine variable de configuration q_2 dite de forme et est indépendante de la variable q_1 appelée externe.

Le modèle général pour des SMSA à deux degrés de liberté est de la forme

$$\begin{aligned} m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 + m'_{11}(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m'_{12}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_1(q_1, q_2) &= \tau_1 \\ m_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}(q_2)\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}m'_{11}(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m'_{22}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_2(q_1, q_2) &= \tau_2 \end{aligned}$$

où $g_i(q_1, q_2) = -\partial V(q)/\partial q_i$, $i = 1, 2$ et ' note d/dq_2 .

La classe-I est celle pour laquelle q_2 est actionné ($\tau_1 = 0$), La classe-II est celle pour laquelle q_2 n'est pas actionné ($\tau_2 = 0$).

Il a été montré, que tout système sous actionné de Classe-I peut être transformé en un système sous une forme feedback stricte.

Proposition 4.1. [*classe-I*] *Le changement global de coordonnées (obtenu à partir du Lagrangien) donné par les équations suivantes*

$$\begin{cases} z_1 = q_1 + \gamma(q_2) \\ z_2 = m_{11}(q_2)p_1 + m_{12}(q_2)p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \\ \xi_1 = q_2 \\ \xi_2 = p_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} m_{11}^{-1}(\theta)m_{12}(\theta)d\theta$

transforme la dynamique du système en un système cascade de forme feedback stricte

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= m_{11}^{-1}(\xi_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= g_1(z_1 - \gamma(\xi_1), \xi_1) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u \end{aligned} \quad (4.11)$$

tel que u est le nouveau contrôle obtenu par la linéarisation partielle et $g_1(q_1, q_2) = -\partial V(q)/\partial q_1$

Corollaire 4.1. *L'Acrobot et le Tora sont des systèmes mécaniques sous actionnés de Classe-I avec deux degrés de liberté, ils peuvent être transformés en une forme feedback stricte.*

Proposition 4.2. [classe-II] *Le changement de coordonnées explicite (obtenu à partir du Lagrangien) donné par*

$$\begin{cases} z_1 = q_1 + \gamma(q_2) \\ z_2 = m_{21}(q_2)p_1 + m_{22}(q_2)p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \\ \xi_1 = q_2 \\ \xi_2 = p_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} m_{21}^{-1}(\theta)m_{22}(\theta)d\theta$ est défini dans l'ensemble $U = \{q_2/ m_{21}(q_2) \neq 0\}$

transforme la dynamique du système en un système cascade de forme non triangulaire quadratique

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= m_{21}^{-1}(\xi_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= g_2(z_1 - \gamma(\xi_1), \xi_1) \\ &+ \frac{m'_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)}z_2^2 + \left\{ \frac{m'_{21}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)} - \frac{m_{22}(\xi_1)m'_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} \right\} z_2\xi_2 \\ &+ \left\{ \frac{m'_{22}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)}m'_{11}(\xi_1) - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)}m'_{21}(\xi_1) + \frac{1}{2}m'_{22}(\xi_1) \right\} \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u \end{aligned} \quad (4.13)$$

tel que u est le nouveau contrôle obtenu par la linéarisation partielle (non collocated).

Corollaire 4.2. *Le système chariot-pendule inversé, la bille sur rail et le Pendubot sont des systèmes mécaniques sous actionnés de Classe-II avec deux degrés de liberté, ils peuvent être transformés en une forme non triangulaire quadratique définie sur l'ensemble $U = \{q_2/ m_{21}(q_2) \neq 0\}$.*

Proposition 4.3. *Considérons les systèmes Classe-II et supposons les conditions supplémentaires suivantes :*

i) $g_2(q_1, q_2)$ est indépendante de q_1 c'est-à-dire $D_{q_1}D_{q_2}V(q) = 0$

ii) m_{11} est constante

iii) $\psi(q_2) = g_2(q_2)/m_{21}(q_2)$ satisfait $\psi'(0) \neq 0$

alors le changement de coordonnées $y_1 = z_1$, $y_2 = m_{21}^{-1}(\xi_1)z_2$ transforme la forme non triangulaire (4.13) en une forme feedforward

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \psi(\xi_1) + \left\{ \frac{m'_{22}(\xi_1)}{2m_{21}(\xi_1)} - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}^2(\xi_1)} m'_{21}(\xi_1) \right\} \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

Corollaire 4.3. *Le système chariot-pendule inversé satisfait les 3 conditions de la proposition (4.3) ($\psi(q_2) = g \tan(q_2) \Rightarrow \psi'(0) = g \neq 0$) donc ce système est transformable en une forme feedforward (4.14).*

Bien que les SMSA considérés dans ce travail soient des systèmes à deux degrés de liberté, les systèmes réels et qui ont une forte signification physique sont des SMSA d'ordre plus élevé ; aussi, nous voyons nécessaire de donner la classification d'*Olfati Saber* pour ces systèmes. Toutefois, afin de ne pas encombrer cette présentation, nous essayerons d'être très bref ; plus de détails sont donnés dans [137], travail que nous avons effectué dans le cadre d'un magister en Automatique et encore plus de détails se trouvent dans [123].

4.2.3 Classification des SMSA d'ordre élevé

En se basant sur certaines propriétés (énumérées par la suite), l'idée est de réduire les SMSA d'ordre élevé de telle façon que le contrôle de ces derniers soit réduit au contrôle de systèmes d'ordre moins élevé. Le contrôle des systèmes originaux sera quant à lui étendu par des procédure de backstepping ou forwarding en fonction des formes normales obtenues après application de changements de coordonnées.

De même que pour les SMSA à deux degrés de liberté, on considère des SMSA avec une symétrie cinétique pour lesquelles les variables qui figurent dans la matrice d'inertie sont dites de formes et sont représentées par le vecteurs q_s , alors que celles qui n'y figurent pas sont dites externes et sont notées par q_x .

L'exploitation d'une telle propriété a permis la réduction de la complexité du problème de synthèse de commande pour les SMSA. Effectivement : moyennant une transformation de coordonnées, le système initial est transformé en deux sous systèmes en cascade où le premier sous système est non linéaire et le deuxième est linéaire, souvent sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs.

Les outils analytiques autorisant une telle réduction sont les moments généralisés normalisés et leurs intégrales, calculés à partir du Lagrangien. Cependant, plusieurs benchmarks et systèmes réels ne possèdent pas des moments généralisés intégrables. Dans ce cas, l'auteur, propose de décomposer ces moments en une somme d'une partie intégrable et d'une autre non intégrable considérée comme une perturbation du cas intégrable. Cette perturbation figurera que dans le sous système non linéaire réduit.

Les équations d'Euler-Lagrange pour ces systèmes sont données par :

$$m_{xx}(q_s)\ddot{q}_x + m_{xs}(q_s)\ddot{q}_s + N_x(q, \dot{q}) = F_x(q)\tau \quad (4.15)$$

$$m_{sx}(q_s)\ddot{q}_x + m_{ss}(q_s)\ddot{q}_s + N_s(q, \dot{q}) = F_s(q)\tau \quad (4.16)$$

où $q = (q_x, q_s) \in Q = Q_x \times Q_s$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, $F(q) = \text{col}(F_x(q), F_s(q))$ et $\text{rg}(F(q)) < n = \text{dim}(q)$.

Dans l'analyse et la synthèse d'*Olfati Saber* pour ces systèmes, ce dernier a considéré un certain nombre de cas en fonction de l'actionnement complet, partiel ou le non actionnement des variables de formes, du couplage des entrées et de l'intégrabilité des moments généralisés. Ces différentes propriétés et d'autres sont résumées de la manière suivante :

Définition 4.10.

- Lorsque les variables de formes sont actionnées pour des entrées non couplées, cela correspond à la situation où : $F_x(q) = 0$ et $F_s(q) = I_m$.
- Lorsque les variables de formes sont non actionnées pour des entrées non couplées, cela correspond à la situation où : $F_x(q) = I_m$ et $F_s(q) = 0$.
- Lorsque les entrées sont couplées cela correspond, sans perte de généralités, à la situation où : $F_x(q) \neq 0$ et $F_s(q)$ est une matrice $m \times m$.
- Lorsque la matrice d'inertie est constante alors le système associé est dit plat.
- Lorsque le moment généralisé normalisé défini par $\pi_x = \dot{q}_x + m_{xx}^{-1}(q_s)m_{xs}(q_s)\dot{q}_s$ ou par $\pi_s = \dot{q}_s + m_{sx}^{-1}(q_s)m_{ss}(q_s)\dot{q}_s$ conjugué à q_x ou q_s respectivement est dit intégrable alors il existe une fonction $h = h(q_x, q_s)$ / $\dot{h} = \pi_x$ ou (π_s) ; autrement le moment est dit non intégrable.

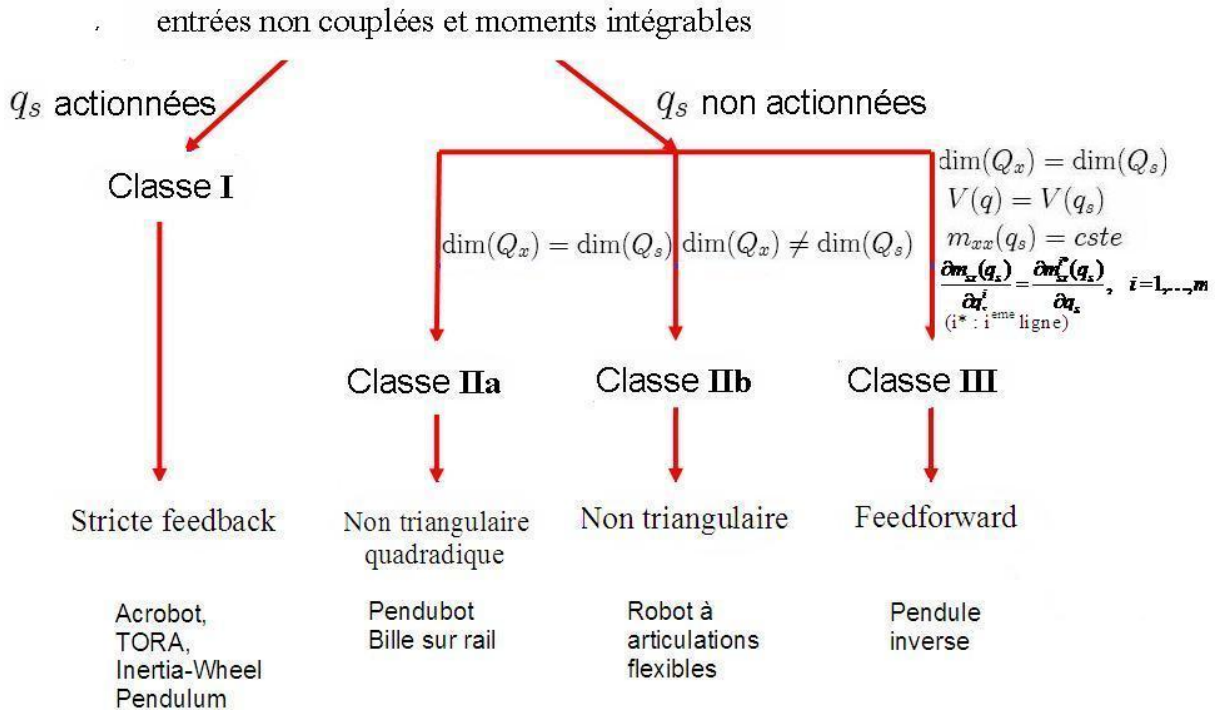
Dans ce cas, la procédure est de décomposer le moment non intégrable en deux termes. Un moment intégrable appelé moment verrouillé et un moment non intégrable appelé moment d'erreur par exemple : $\pi_x = \pi'_x + \pi_x^e$. De plus, π^e est indépendant de (q_x, \dot{q}_x) et s'annule en $q_s = \bar{q}_s$, la variable de forme verrouillée.

Au final, cette démarche a conduit *Olfati Saber* à établir seize classes pour les SMSA. Cependant, en raison de la redondance de certaines d'entre elles et de la non réalisabilité physique de certaines, l'auteur est arrivé à classer les SMSA en huit classes différentes. Pour chacune d'elles, il a proposé une méthode de réduction d'ordre et un changement de coordonnées global transformant ces systèmes en des systèmes en cascade sous trois types de formes normales, à savoir la forme normale en stricte feedback, la forme normale en stricte feedforward et la forme normale non triangulaire linéaire quadratique définies auparavant.

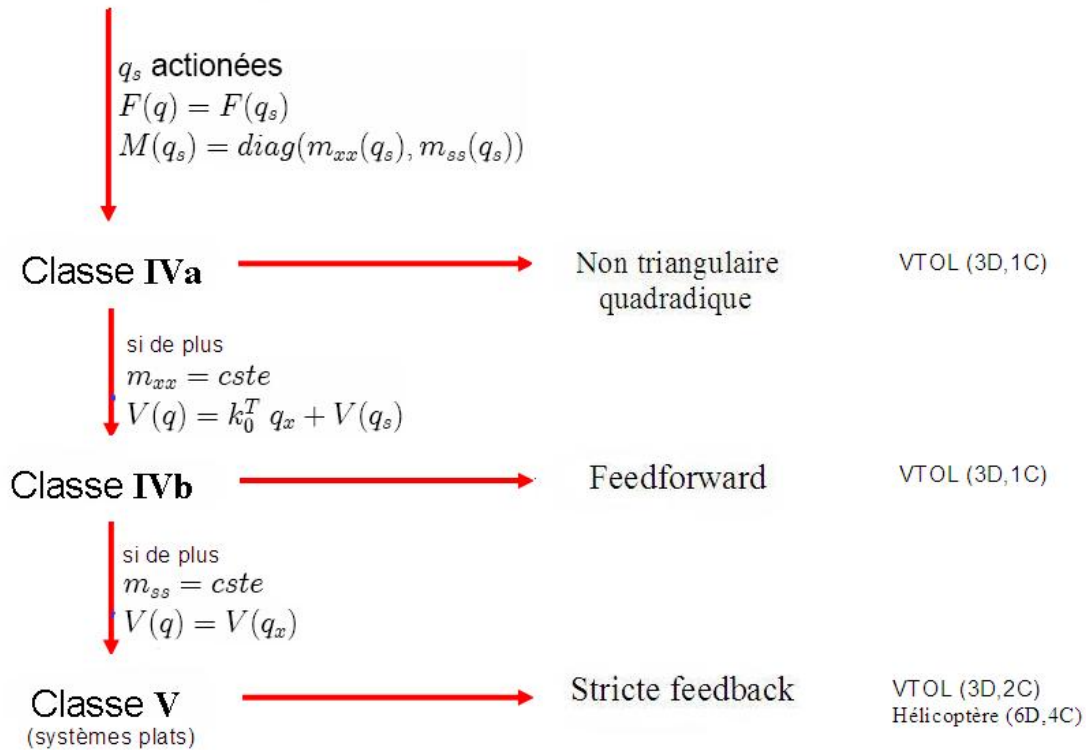
En résumé, cette classification, basée sur certaines propriétés structurelles des SMSA telles que :

- . L'actionnement ou pas des variables de formes,
- . Le couplage ou pas des entrées,
- . L'intégrabilité ou pas des moments normalisés,
- . Conditions supplémentaires.

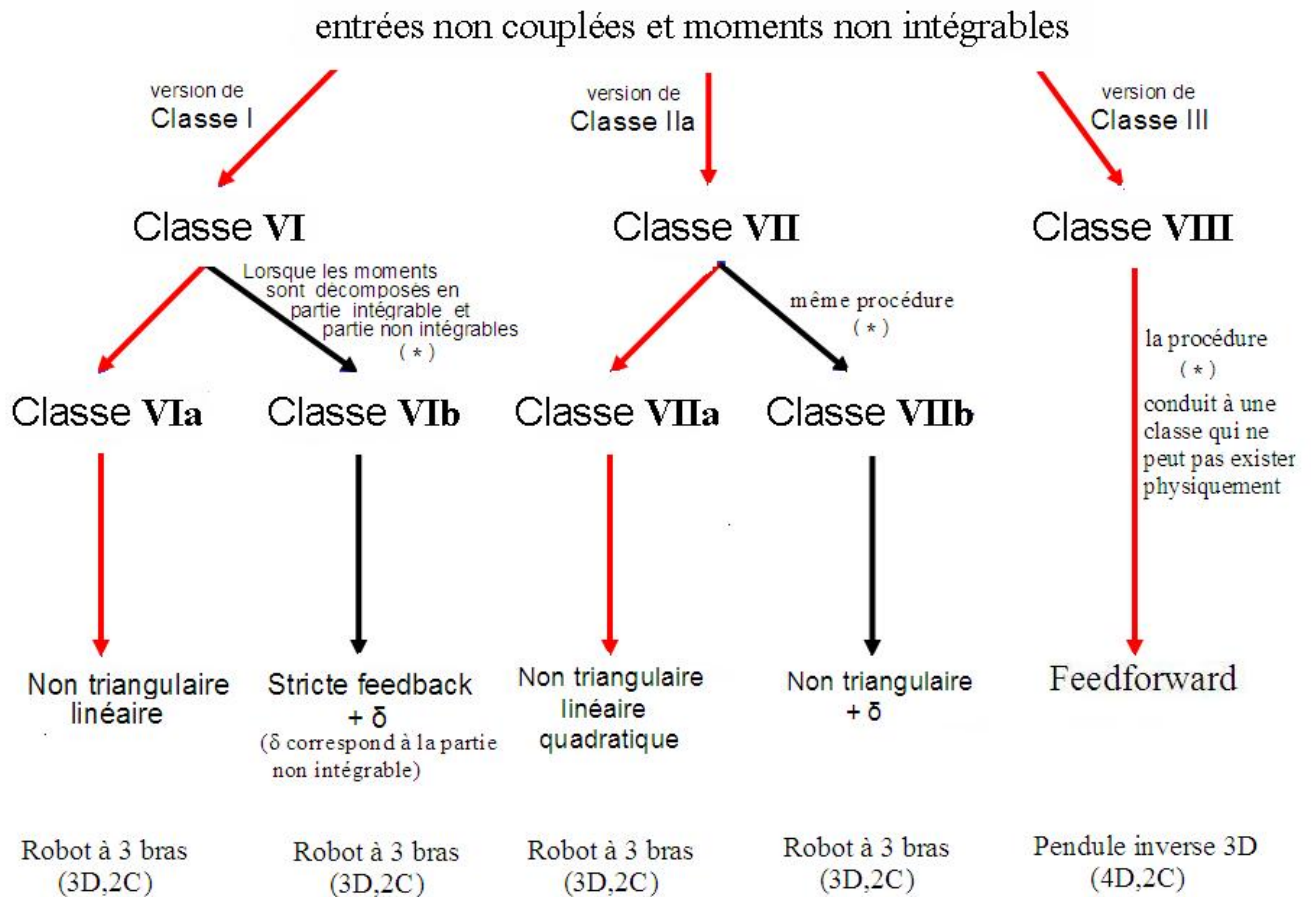
est présentée selon les schémas de la figure 4.7



entrées couplées et moments intégrables



(4.17)

Figure 4.7 Classification des SMSA selon *Olfati-Saber*.**Remarque 4.6.**

1. Certains exemples figurent dans plusieurs classes, en fait, pour un même système, on peut avoir des sous-actionnements dus à une absence de moteurs à des emplacements différents comme c'est le cas pour l'Acrobot et le Pendubot.
2. Les changements de coordonnées et les formes normales obtenues pour les classes I, IIa, IIb et III sont les mêmes que pour les SMSA à deux degrés de liberté, il suffit juste de remplacer $(\cdot)_1$ par $(\cdot)_x$ et $(\cdot)_2$ par $(\cdot)_s$.
3. Pour les autres classes, les changements de coordonnées et les formes normales obtenues sont données dans [137].

4.3 Comparaison entre les deux classifications

Parmi les objectifs de cette thèse, celui de montrer qu'il existe (ou pas d'ailleurs) des liens entre les seules classifications que nous avons trouvées en littérature, et en fait en construisant les CFD pour des systèmes qui appartiennent à une même classe dans la classification d'*Olfati-Saber*, nous nous sommes rendu compte que les CFD obtenus sont de structures différentes figure 4.8 (a). Inversement, nous avons pris deux systèmes ayant la même structure dans leurs CFD et nous avons constaté qu'ils appartiennent à deux classes différentes de la 2^{ième} classification figure 4.8.

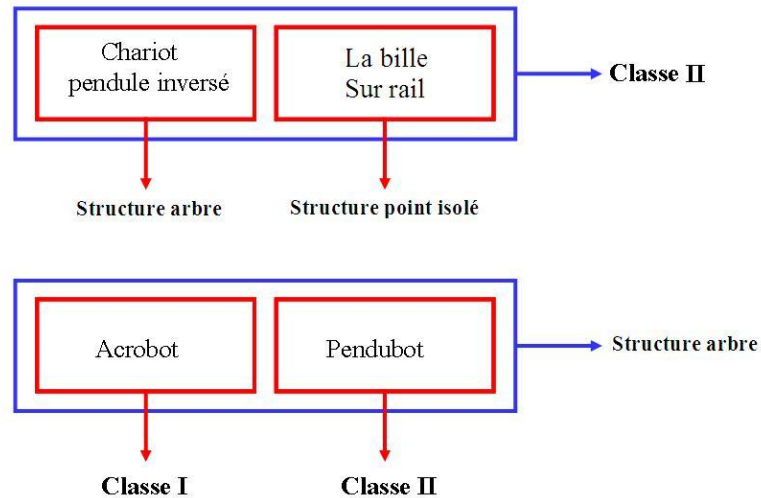


Figure 4.8 Comparaison entre les deux classification des SMSA.

4.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre, deux approches pour la classification des systèmes mécaniques sous actionnés. La première due à *Seto et Baillieul* est basée sur un organigramme de circuit de contrôle appelé CFD (control flow diagram) construit pour représenter les forces d'interactions à travers les degrés de liberté du système sous actionné, trois types de structures sont identifiées : structure chaîne, structure arbre et point isolé ; de la combinaison de ces trois structures résultent sept classes différentes dont la majorité n'est pas susceptible d'être commandée par des méthodes classiques. La deuxième classification due à *Olfati-Saber*, prend beaucoup plus en compte les propriétés structurelles des systèmes considérés. Elle donne lieu à huit classes transformables en trois formes normales principales susceptibles d'être commandées par des méthodes classiques.

En voulant trouver des points communs entre ces deux classifications, nous sommes arrivés à la conclusion qu'elles sont complètement indépendantes ; effectivement, la bille sur rail et le chariot-pendule inversé n'appartiennent pas à la même classe pour la première classification (structure point isolé et structure arbre, respectivement) ; cependant, ils sont dans la même classe (classe-II) pour l'autre classification ; réciproquement, deux systèmes d'une même classe chez *Seto et Baillieul* par exemple l'Acrobot et le Pendubot, appartiennent à deux classes différentes chez *Olfati-Saber* classe-I et classe-II.

Chapitre 5

Stratégie de commande pour la stabilisation des systèmes mécaniques sous actionnés

"...A control theorist's first instinct in the face of a new problem is to find a way to use the tools he knows, rather than a commitment to understand the underlying phenomenon. This is not the failure of individuals but the failure of our profession to foster the development of experimental control science. In a way, we have become the prisoners of our rich inheritance and past successes."

Y. C. Ho (1982).

Dans ce chapitre, nous résolvons le problème de stabilisation des systèmes mécaniques sous actionnés. Notre stratégie est basée sur la classification de *Seto et Baillieul* pour ces systèmes. Les auteurs de cette classification ont proposé une procédure de contrôle systématique de type backstepping uniquement pour la structure chaîne, le contrôle systématique des autres structures étant pour eux, encore des problèmes ouverts. Notre contribution consiste à synthétiser des lois de commande pour chacune des structures de la dite classification, autorisant ainsi, le traitement généralisé de l'ensemble des systèmes mécaniques sous actionnés.

L'idée est en premier lieu, d'étendre la procédure de *Seto et Baillieul* à une sous classe de la structure arbre pouvant se transformer en une structure chaîne, lorsque certaines conditions énumérées par la suite sont satisfaites. En deuxième lieu, nous proposons une procédure de contrôle pour le reste de la structure arbre ne satisfaisant pas les conditions de transformation en structure chaîne. En dernier lieu, nous nous occuperons de la commande des systèmes ayant une structure en point isolé, jugée la plus difficile à commander.

Pour ce qui est de la deuxième classification, *Olfati Saber* a proposé une procédure de commande pour les systèmes se transformant en des formes normales en stricte feedback et

en feedforward et quelques suggestions de commande pour les formes normales non triangulaires. À chaque fois, son contrôle est constitué de deux étapes : premièrement la stabilisation du système réduit obtenu après réduction du système initial et deuxièmement, la stabilisation du système global par une procédure de backstepping ou forwarding en fonction de la forme normale associée. L'auteur de cette classification a donné un théorème pour la stabilisation des systèmes réduits associés à des formes normales en stricte feedback. Seulement, l'hypothèse de ce théorème est assez restrictive de sorte que l'auteur lui même ne l'a utilisée qu'une seule fois sur l'exemple de l'Acrobot, ainsi, la synthèse de commande n'est pas systématique. De plus, la commande se construit en deux étapes conduisant à des explosions de termes impliquant des expressions très compliquées.

La présentation de cette méthode et la comparaison avec celle de *Seto et Baillieul* pour la structure chaîne (car bien que les deux approches soient complètement différentes, elles sont issues toutes les deux d'un algorithme de backstepping) a constitué un des objectifs du travail que nous avons effectué avec S. Raka [137], dans le cadre d'un magister en Automatique.

5.1 Stabilisation des systèmes sous actionnés possédant une structure chaîne

Nous rappelons que dans une structure chaîne les variables de configurations ainsi que les contrôles sont en série et que chaque variable de configuration (c'est-à-dire degré de liberté) appartient à un et un seul chemin de contrôle.

Nous considérons le cas où le CFD contient un seul chemin de contrôle. Dans le cas contraire, chaque chemin de contrôle peut être traité indépendamment.

La représentation la plus générale de cette structure est donnée par la forme triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &= N_i(x_1, \dots, x_{i+1}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ \ddot{x}_n &= N_n(x, \dot{x}) + G(x, \dot{x})u\end{aligned}\tag{5.1}$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ et $N_i(\cdot)$, $G(\cdot)$ sont des fonctions régulières.

L'idée principale est d'appliquer une méthode inspirée de la linéarisation par feedback sans pour autant linéariser explicitement le système considéré (dans ce cas le changement de coordonnées est évité et les variables gardent leurs sens physique).

Cette approche nécessite de satisfaire les hypothèses suivantes[151] :

H1) $N_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$ l'origine est l'équilibre.

H2) Pour chaque $i = 1, \dots, n - 1$, $N_i(\cdot)$ sont des fonctions régulières avec des états $x_1, \dots, x_i; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_i$ bornés, N_i est bornée seulement si x_{i+1} et \dot{x}_{i+1} sont bornées.

Cette hypothèse est équivalente dans le cas d'une linéarisation par feedback à ce que le sous système non linéaire de la forme normale possède la propriété BIBS nécessaire pour éviter le phénomène du peaking dans la stabilisation globale.

$$\text{H3) } G(x, \dot{x}) \neq 0 \text{ et soit } \begin{cases} \partial N_i / \partial \dot{x}_{i+1} \neq 0 \\ \text{ou } \partial N_i / \partial \dot{x}_{i+1} = 0 \text{ mais } \partial N_i / x_{i+1} \neq 0 \end{cases}$$

cette hypothèse assure que le système soit commandable, assure aussi la liaison entre les différents degrés de liberté de la chaîne.

H4) Pour tout $\partial N_i / \partial \dot{x}_{i+1} \neq 0$, $i = 1, \dots, n - 1$, le système non linéaire

$$N_i(0, \dots, x_{i+1}, 0, \dots, \dot{x}_{i+1}) = 0 \text{ est GAS en } x = 0 \text{ ou lorsque } \partial N_i / \partial \dot{x}_{i+1} = 0 \text{ mais } \partial N_i / x_{i+1} \neq 0 \text{ alors le système non linéaire } N_i(0, \dots, x_{i+1}, 0, \dots, 0) = 0 \text{ est GAS en } x = 0$$

cette hypothèse est équivalente à celle de la stabilité globale asymptotique des dynamiques de zéro.

Remarque 5.1. 1. *Les hypothèses sont physiquement raisonnables.*

2. *On suppose que $y = x_1$. Le choix de cette sortie est justifié par le fait qu'on soit intéressé par le contrôle du degré de liberté situé le plus loin de l'entrée sur une chaîne en cascade, en l'occurrence x_1 .*

Pour décrire les résultats de stabilisation, on définit d'abord les séquences suivantes :

soient $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_1 = \bar{x}_1^T P b$ (P est une matrice définie positive avec tous ses éléments positifs), $G_1 = 1$ et $W_1 = 0$.

pour $i = 1, \dots, n - 1$

$$\left. \begin{aligned} e_{i+1} &= G_i N_i + W_i + k_i e_i, \\ G_{i+1} &= \frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} G_i, \\ W_{i+1} &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial e_{i+1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial e_{i+1}}{\partial \dot{x}_j} N_j + e_i, \end{aligned} \right\} \text{ si } \frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} \neq 0; \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 e_{i+1} &= G_{i+1}\dot{x}_{i+1} + W_{(i+1)1} + k_{(i+1)1}e_{(i+1)1}, \\
 e_{(i+1)1} &= G_i N_i + W_i + k_i e_i, \\
 G_{i+1} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_{i+1}} G_i, \\
 W_{i+1} &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial e_{i+1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial e_{i+1}}{\partial \dot{x}_j} N_j + e_{(i+1)1}, \\
 W_{(i+1)1} &= \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial e_{(i+1)1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial e_{(i+1)1}}{\partial \dot{x}_j} N_j \right) + e_i,
 \end{aligned} \right\} \text{si } \frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} = 0; \quad (5.3)$$

où $k_{(i+1)1}$, k_i , $i = 1, \dots, n-1$ et k_n sont des constantes positives.

Théorème 5.1. *Sous les hypothèses H1 – H4, le système (5.1) est globalement asymptotiquement stable à l'origine si la loi de contrôle est choisie comme suit :*

$$u = -(G_n N_n + W_n + k_n e_n)(G_n G)^{-1} \quad (5.4)$$

Remarque 5.2.

1. *Il existe une version adaptative de ce théorème en cas de présence d'incertitudes paramétriques [150].*
2. *Il existe aussi une version de ce théorème en cas de poursuite de trajectoire.*
3. *Les auteurs ont donné une démonstration du théorème 5.1 dans le cas adaptatif et pour une commande issue de la première séquence (5.2). Dans ce qui suit, nous proposons de donner la preuve du théorème 5.1 en absence d'incertitude et pour des commandes issues des deux séquences (5.2) et (5.3), car $\frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} = 0$ pour les applications que nous avons considérées.*

preuve 3. *Lorsque $\frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} \neq 0$, la commande est calculée à partir de la séquence (5.2) :*

Pour chaque degré de liberté, x_i , x_{i+1} est "la variable de contrôle", qui commande le comportement de x_i . Aussi, nous déterminons la vitesse de référence $\dot{x}_{r_{i+1}}$ pour \dot{x}_{i+1} telle que lorsque $\dot{x}_{i+1} \rightarrow \dot{x}_{r_{i+1}}$, x_i se comporte comme désiré.

Étape 1 $i = 1$

$$\ddot{x}_1 = N_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \quad (5.5)$$

définissons une vitesse de référence \dot{x}_{r2} telle que :

$$\dot{x}_{r2} = \dot{x}_2 - N_1 - k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$$

L'erreur entre la référence et la vitesse actuelle est donnée par :

$$e_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{r2} = N_1 + k_1 x_1 + k_2 \dot{x}_1 \Rightarrow N_1 = e_2 - k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$$

soient :

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $\dot{\bar{x}}_1$ peut être exprimée par :

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_2$$

où k_1 et k_2 sont choisies telles que : $\ddot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$ soit asymptotiquement stable en $(x_1, \dot{x}_1) = (0, 0)$, ce qui implique l'existence d'une matrice définie positive P telle que : $A^T P + P A = -Q < 0$.

En appliquant les définitions précédentes à (5.5), nous obtenons :

$$\dot{\bar{x}}_1 = A \bar{x}_1 + b e_2$$

Soit la fonction scalaire suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} (\bar{x}_1^T P \bar{x}_1 + e_2^2) \tag{5.6}$$

La dérivée par rapport au temps \dot{V}_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{x}}_1^T P \bar{x}_1 + \bar{x}_1^T P \dot{\bar{x}}_1) + e_2 \dot{e}_2 \\ &= \frac{1}{2} (\bar{x}_1^T A^T P \bar{x}_1 + \bar{x}_1^T P A \bar{x}_1 + (b e_2)^T P \bar{x}_1 + \bar{x}_1^T P (b e_2)) + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{x}_1^T Q \bar{x}_1) + \bar{x}_1^T P b e_2 + e_2 \dot{e}_2 \end{aligned}$$

si nous posons $e_1 = \bar{x}_1^T P b$ et $\nu_1 = \frac{1}{2} \bar{x}_1^T Q \bar{x}_1$ alors

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\nu_1 + e_2(\dot{e}_2 + e_1) \\
 &= -\nu_1 + e_2(\dot{N}_1 + k_1\dot{x}_1 + k_2\ddot{x}_1 + e_1) \\
 &= -\nu_1 + e_2\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_1}\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{\partial N_1}{\partial \ddot{x}_2}}_{\substack{\text{def } G_2 \\ \ddot{N}_2}}\ddot{x}_2 + k_1\dot{x}_1 + k_2\ddot{x}_1 + e_1\right) \\
 &= -\nu_1 + e_2(G_2N_2 + \left(\frac{\partial e_2}{\partial x_1} - k_1\right)\dot{x}_1 + \frac{\partial e_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \left(\frac{\partial e_2}{\partial \dot{x}_1} - k_2\right)\ddot{x}_1 + k_1\dot{x}_1 + k_2\ddot{x}_1 + e_1) \\
 &= -\nu_1 + e_2\left(G_2N_2 + \underbrace{\frac{\partial e_2}{\partial \dot{x}_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial e_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial e_2}{\partial \dot{x}_1}N_1}_{\text{def } W_2} + e_1\right) \\
 &= -\nu_1 + e_2(G_2N_2 + W_2)
 \end{aligned}$$

Le nouveau contrôle \dot{x}_3 apparaît à travers N_2 , par conséquent, nous pouvons choisir \dot{x}_{r3} tel que le terme $e_2(G_2N_2 + W_2)$ soit non positif.

Étape 2 $i = 2$

$$\dot{x}_{r3} = \dot{x}_3 - G_2N_2 - W_2 - c_2e_2$$

L'erreur entre la référence et la vitesse actuelle est donnée par :

$$e_3 = \dot{x}_3 - \dot{x}_{r3} = G_2N_2 + W_2 + c_2e_2 \Rightarrow G_2N_2 + W_2 = e_3 - c_2e_2$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\nu_1 + e_2(e_3 - c_2e_2) \\
 &= -(\nu_1 - c_2e_2^2) + e_2e_3 \\
 &= -\nu_2 + e_2e_3
 \end{aligned}$$

avec $\nu_2 = \nu_1 + c_2e_2^2$

Pour compenser e_3 , nous modifions la fonction V_1 en

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_3^2$$

En différentiant V_2 , nous obtenons :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_3 \dot{e}_3$$

En reprenant le même calcul, nous aboutissons à l'expression de V_2 :

$$\dot{V}_2 = -\nu_2 + e_3(G_3 N_3 + W_3)$$

où e_2 est dans l'expression de W_3 et $G_3 = G_2 \frac{\partial N_2}{\partial \dot{x}_3}$

Le nouveau contrôle \dot{x}_4 apparaît à travers N_3 , par conséquent, nous pouvons choisir \dot{x}_{r_4} tel que le terme $e_3(G_3 N_3 + W_3)$ soit non positif.

⋮

⋮ Étape n après $(n - 1)$ itérations, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= -\nu_{n-1} + e_n(G_n \ddot{x}_n + W_n) \\ &= -\nu_{n-1} + e_n(G_n N_n + G_n G u + W_n) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \nu_{n-1} &= \frac{1}{2} \bar{x}_1^T Q \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} c_i e_i^2 \\ \ddot{x}_n &= N_n + G u \\ G_n &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\partial N_j}{\partial \dot{x}_{j+1}} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour rendre $\dot{V}_{n-1} < 0$, il suffit de choisir une commande u telle que :

$$u = -(G_n N_n + W_n + k_n e_n)(G_n G)^{-1}$$

La fonction de Lyapunov V qui garantit la preuve de la stabilité globale asymptotique est telle que :

$$V_n = V_{n-1}$$

d'où :

$$\dot{V}_n = -\nu_{n-1} - c_n e_n^2$$

Notons que, $G_n G$ est inversible puisque G_n et G sont différents de 0 par hypothèses ($G \neq 0$ pour assurer la commandabilité et $G_n \neq 0$ par définition conséquence de l'hypothèse H3). \square

preuve 4. Lorsque $\frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} = 0$, la commande est calculée à partir de la séquence (5.3) :

Pour alléger la présente démonstration, et comme la majorité des exemples traités dans ce travail sont à deux degrés de liberté, nous limiterons cette preuve au cas $n = 2$.

Étape 1 $i = 1$

Lorsque $\frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_2} = 0$ et $\frac{\partial N_1}{\partial x_2} \neq 0$, l'équation différentielle est réduite à :

$$\ddot{x}_1 = N_1(x_1, x_2, \dot{x}_1) \quad (5.7)$$

De façon similaire, nous allons reprendre la preuve précédente pour $\frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_{i+1}} = 0$. Dans ce cas, au lieu de déterminer une vitesse de référence \dot{x}_{r_2} pour la variable \dot{x}_2 , nous commencerons par déterminer d'abord une position de référence x_{r_2} :

$$x_{r_2} = x_2 - N_1 - k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$$

L'erreur entre la référence et la position actuelle est donnée par

$$e_{21} = x_2 - x_{r_2} = N_1 + k_1 x_1 + k_2 \dot{x}_1 \Rightarrow N_1 = e_{21} - k_1 x_1 - k_2 \dot{x}_1$$

Définissons \bar{x}_1 , A et b de la même façon que précédemment,

En appliquant ces notations, nous obtenons :

$$\dot{\bar{x}}_1 = A\bar{x}_1 + be_{21}$$

considérons maintenant la fonction de Lyapunov donnée cette fois par :

$$V_{11} = \frac{1}{2}(\bar{x}_1^T P \bar{x}_1 + e_{21}^2) \quad (5.8)$$

La dérivée \dot{V}_{11} est de la forme :

$$\dot{V}_{11} = -\frac{1}{2}\bar{x}_1^T Q \bar{x}_1 + \bar{x}_1^T P b e_{21} + e_{21} \dot{e}_{21}$$

Si $e_1 = \bar{x}_1^T P b$ et $\nu_{11} = \frac{1}{2}\bar{x}_1^T Q \bar{x}_1$ alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{11} &= -\nu_{11} + e_{21}(\dot{e}_{21} + e_1) \\ &= -\nu_{11} + e_{21}(\dot{N}_1 + k_1 \dot{x}_1 + k_2 \ddot{x}_1 + e_1) \\ &= -\nu_{11} + e_{21}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_1} \ddot{x}_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_2} \ddot{x}_2\right. \\ &\quad \left.+ k_1 \dot{x}_1 + k_2 \ddot{x}_1 + e_1\right) \\ &= -\nu_{11} + e_{21}\left(\left(\frac{\partial e_{21}}{\partial x_1} - k_1\right) \dot{x}_1 + \frac{\partial e_{21}}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial e_{21}}{\partial \dot{x}_1} - k_2\right) \ddot{x}_1\right. \\ &\quad \left.+ k_1 \dot{x}_1 + k_2 \ddot{x}_1 + e_1\right) \\ &= -\nu_{11} + e_{21}\left(\underbrace{\frac{\partial N_1}{\partial x_2} \dot{x}_2}_{\stackrel{\text{def}}{=} G_2} + \underbrace{\frac{\partial e_{21}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial e_{21}}{\partial \dot{x}_1} N_1 + e_1}_{\stackrel{\text{def}}{=} W_{21}}\right) \\ &= -\nu_{11} + e_{21}(G_2 \dot{x}_2 + W_{21}) \end{aligned}$$

Le problème ici, est que nous ne pouvons pas atteindre u à travers \dot{x}_2 mais plutôt à travers \ddot{x}_2 ; aussi, nous ajoutons une étape supplémentaire par rapport la la preuve précédente. Cette étape consiste à déterminer une vitesse de référence \dot{x}_{r2} pour \dot{x}_2 telle que : $e_{21}(G_2 \dot{x}_2 + W_{21})$ soit non positif :

$$\dot{x}_{r2} = \dot{x}_2 - G_2 \dot{x}_2 - W_{21} - k_{21} e_{21}$$

L'erreur entre la référence et la vitesse actuelle est :

$$e_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{r2} = G_2 \dot{x}_2 + W_{21} + k_{21} e_{21} \Rightarrow G_2 \dot{x}_2 + W_{21} = e_2 - k_{21} e_{21}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{11} &= -\nu_{11} + e_{21}(e_2 - k_{21} e_{21}) \\ &= -\nu_{11} - k_{21} e_{21}^2 + e_{21} e_2 \\ &= -\nu_1 + e_{21} e_2 \end{aligned}$$

avec $\nu_1 = \nu_{11} + k_{21} e_{21}^2$

Pour compenser e_2 , la fonction V_{11} est modifiée en :

$$V_1 = V_{11} + \frac{1}{2}e_2^2$$

En dérivant V_1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_{11} + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -\nu_1 + e_{21}e_2 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -\nu_1 + e_2(\dot{e}_2 + e_{21}) \\ &= -\nu_1 + e_2 \left(\underbrace{\left(\frac{\partial e_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial e_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial e_2}{\partial \dot{x}_1} \ddot{x}_1 + e_{21} \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} W_2} + \underbrace{\frac{\partial e_2}{\partial \dot{x}_2} \ddot{x}_2}_{G_2} \right) \\ &= -\nu_1 + e_2(G_2 \ddot{x}_2 + W_2) \\ &= -\nu_1 + e_2(G_2(N_2 + Gu) + W_2) \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la dérivée de Lyapunov est :

$$\dot{V}_1 = -\nu_1 + e_2(G_2 N_2 + G_2 Gu + W_2) \quad (5.9)$$

Pour rendre \dot{V}_1 non positive, u peut être choisie telle que :

$$e_2(G_2 N_2 + G_2 Gu + W_2) = -k_2 e_2^2 \quad (5.10)$$

Ainsi, l'expression de la commande qui stabilise globalement asymptotiquement le système lorsque $n = 2$ est donnée par :

$$u = -(G_2 N_2 + w_2 + k_2 e_2)(G_2 G)^{-1}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, $G_n G$ est inversible, ce qui garantit l'existence de ce contrôle.

Étape 2 $i = 2$

La fonction de Lyapunov finale est donnée par :

$$V_2 = V_1 \text{ telle que } \dot{V}_2 = -\nu_2 - k_2 e_2^2 \quad \square$$

Exemple 5.1.

Pour illustrer cette procédure, considérons un système mécanique sous actionné possédant naturellement une structure chaîne, en l'occurrence : le système masse glissant sur chariot représenté par la figure 3.3. Le modèle de ce système est donné dans le chapitre 3 par les équations :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= \tau \end{aligned}$$

où m , M sont respectivement les masses de la petite masse et du chariot, B est un frottement (qui peut être non linéaire) entre les deux masses.

La représentation sous forme triangulaire de ce modèle est donnée par :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{B}{m}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = N_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{M}[\tau - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] = N_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2) + G\tau \end{aligned}$$

Le CFD associé à ce système a été construit dans le chapitre 4, et est sous la forme d'une structure chaîne.

Par conséquent, la procédure systématique de synthèse de loi de commande globalement asymptotiquement stabilisante peut être appliquée pour la masse glissante sur chariot. Toutefois, pour pouvoir l'appliquer, il est nécessaire en premier lieu de vérifier si les hypothèses $H1 - H4$ sont satisfaites.

Remarque 5.3. 1. Même si le schéma de contrôle présenté ci-dessus est applicable pour tout système pouvant se mettre sous la forme (5.1), les systèmes considérés dans le cadre de cette thèse sont essentiellement mécaniques, dans ce cas, il est d'usage de supposer sans perte de généralités que les états sont bornés, par conséquent la propriété du BIBS est souvent satisfaite.

2. De plus, nous supposons aussi que les mécaniques ne sont pas trop rapides et qu'il n'y a pas de jeu dans les articulations.

Vérification des hypothèses

H1) Clairement, $N_i(0, 0) = 0$ pour $i = 1, 2$, ainsi, l'origine est l'équilibre.

H2) N_1 est une fonction régulière, N_1 est bornée pour x_1 et x_2 bornés.

H3) $G(x, \dot{x}) = \frac{1}{M} \Rightarrow G(x, \dot{x}) \neq 0$ et $\frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{B}{m} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_2} \neq 0 \quad \forall (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

H4) $N_1(0, \dot{x}_2) = 0 \Rightarrow -\frac{B}{m}\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow$ le système non linéaire $N_1(0, \dot{x}_2) = 0$ est GAS en $(x_1, x_2) = 0$.

Les hypothèses $H1 - H4$ étant vérifiées, nous pouvons calculer la loi de commande τ qui assure la GSA du système. Pour calculer cette loi de commande, nous utiliserons les séquences (5.2) puisque $\frac{\partial N_1}{\partial x_2} \neq 0$. L'application de ces séquences permet d'aboutir à la loi de commande suivante :

$$\tau = c_1(c_2x_1 + c_3\dot{x}_1 + c_4\dot{x}_2) \quad (5.11)$$

où les c_i sont des combinaisons des constantes définies dans la séquence (5.2).

Clairement, il n'est pas à discuter que la commande obtenue parait de point de vue théorique et même pratique simple et facilement réalisable. Notons que pour B constante, le système et le contrôle sont linéaires, ainsi, cette procédure est aussi valide pour le cas linéaire.

Ce contrôle ne donne aucune indication sur le choix des constantes des séquences sauf le fait qu'elles doivent être positives pour assurer une dérivée négative de la fonction de Lyapunov.

L'application en simulation de cette commande au système masse glissante sur chariot est illustrée par la figure 5.1

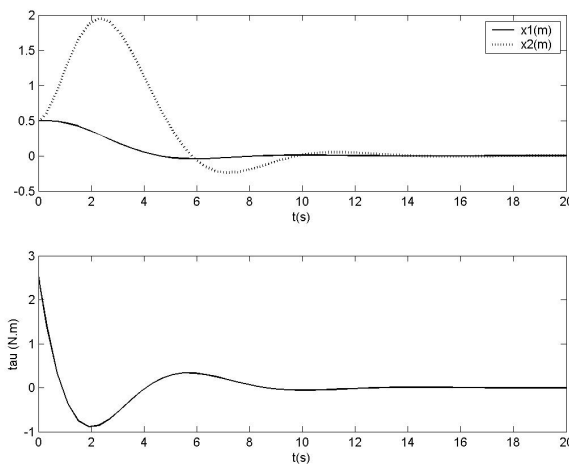


Figure 5.1 Trajectoires des états et force appliquée au système masse glissante pour les paramètres $M = 1Kg$, $m = 0.2Kg$, $B = 0.02$ et pour les conditions initiales $(0.5, 0.5, 0, 0)$.

Les mouvements de la masse et du chariot se stabilisent rapidement à l'origine pour un faible temps de réponse et surtout pour une faible commande. Évidemment, nous pouvons encore jouer sur le temps de réponse et sur l'effort de commande en ajustant le choix des constantes.

Malheureusement, très peu de systèmes mécaniques sous actionnés sont naturellement sous une structure chaîne, les seules exemples que nous avons trouvé en littérature sont ceux de la masse glissante sur un chariot et celui du robot à articulations élastiques présenté dans [38]. Effectivement, la majorité des SMSA possèdent : soit une structure arbre tels que l'Acrobot, le pendubot, les systèmes pendulaires, le pendule à roue inertielle (inertia wheel pendulum) et le système Tora, soit en point isolé tel que la bille sur rail (pour ne citer que les systèmes à deux degrés de liberté).

Comme il n'existe pas de méthodologie systématique pour le traitement de ces deux structures, la plupart du temps, ces systèmes ont été traité sur la base du cas par cas.

Dans la suite, nous proposons de répondre en partie au problème encore ouvert de la synthèse systématique des systèmes ayant une structure arbre en transformant une sous classe de systèmes en structure arbre vérifiant certaines conditions en structure chaîne telle que la procédure systématique de backstepping présentée plus haut puisse être appliquée.

5.2 Synthèse systématique de contrôle pour les systèmes possédant une structure arbre

La construction du CFD pour un système donné dépend des coordonnées de ce système, en particulier du choix des coordonnées généralisées et des forces extérieures, aussi, le CFD n'est pas invariant sous transformation de coordonnées. Cette simple remarque nous a motivé à trouver un changement de coordonnées qui permet la transformation du CFD.

En fait, il apparaît que si un système donné satisfait les conditions énumérées dans la paragraphe suivant, alors son CFD qui à la base, est sous une structure arbre peut être transformé en un CFD en structure chaîne. Si cette opération est possible alors, il suffit d'utiliser la même procédure systématique proposée par *Seto et Baillieul* pour la synthèse de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes. Évidemment, il faudrait par la suite revenir au système initial pour garder la signification physique des variables et des entrées.

Reprenons de façon générale les équations d'Euler-Lagrange du mouvement des SMSA :

$$\begin{aligned} m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) &= \tau_1 \\ m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) &= \tau_2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

où $q \in Q$ une variété n -dimensionnelle, supposons que q peut s'écrire sous la forme : $q = \text{col}(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ où Q_i est de dimension $n_i = \dim(Q_i)$ pour $i = 1, 2$ et $n_1 + n_2 = n$. Les $m_{ij}(q)$ sont les éléments de $M(q)$ la matrice d'inertie du système. Les h_i contiennent les termes de Coriolis, centrifuges et de gravitation et les τ_i sont les contrôles satisfaisant une des conditions du mode d'actionnement suivant :

A1) $\tau = \tau_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ est le contrôle et $\tau_1 \equiv 0$.

A2) $\tau = \tau_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ est le contrôle et $\tau_2 \equiv 0$.

Dans les deux cas, le système (5.12) est un système sous actionné. Le mode d'actionnement A1 et A2 est important et est défini selon les applications. Par exemple l'Acrobot, le système Tora et le pendule à roue inertielle sont actionnés selon le mode A1, alors que le Pendubot, le système chariot pendule sont actionnés selon le mode A2.

5.2.1 Stabilisation des SMSA actionnés selon le mode A1

Supposons maintenant les hypothèses suivantes :

Hypothèses 5.1.

B1) Le système en considération possède une symétrie cinétique c'est à dire que $M(q) = M(q_2)$.

B2) q_2 est la variable actionnée c'est à dire que le système est actionné selon le mode A1.

B3) La quantité $m_{11}^{-1}(q_2)m_{12}(q_2)$ est intégrable.

Notons que ces hypothèses ne sont pas trop restrictives et sont satisfaites par une large gamme de SMSA.

Un de nos résultats importants est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Supposons que les hypothèses B1-B3 sont satisfaites, alors un système sous actionné possédant une structure arbre peut être transformé en un système ayant une structure chaîne.*

preuve 5. *Il a été montré (chapitre 3, section 3.7) que les systèmes sous actionnés selon le mode A1 pouvaient être partiellement linéarisés en utilisant le changement de contrôle suivant :*

$$\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q}) \quad (5.13)$$

qui transforme les dynamiques de (5.12) en :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f(q, p) + g_0(q)u \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.14)$$

où $\alpha(q)$ est une matrice $m \times m$ symétrique, définie positive et $g_0(q) = -m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)$

Cependant, après ce changement de contrôle, le nouveau contrôle apparaît en même temps dans le sous système linéaire et le sous système non linéaire. Autrement dit, nous obtenons un système dont le CFD est sous une structure arbre !

Par ailleurs, Olfati-Saber a montré dans [123] que si un système sous actionné satisfait les hypothèses B1 – B3 alors ce système est transformable en une forme normale en stricte feedback.

En effect, le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned} q_r &= q_1 + \gamma(q_2) \\ p_r &= m_{11}(q_2)p_1 + m_{12}(q_2)p_2 := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

transforme les dynamiques du système (5.14) en un système non linéaire en cascade en une forme stricte feedback :

$$\begin{aligned} \dot{q}_r &= m_{11}^{-1}(q_2)p_r \\ \dot{p}_r &= g(q_r, q_2) \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned}\gamma(q_2) &= \int_0^{q_2} m_{11}^{-1}(\theta) m_{12}(\theta) d\theta \\ g(q_r, q_2) &= -\frac{\partial V(q)}{\partial q_1}\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer la forme (5.16) peut se mettre sous une forme triangulaire, plus précisément, nous pouvons réécrire (5.16) sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{q}_r &= m_{11}^{-1}(q_2)g(q_r, q_2) \\ \ddot{q}_2 &= u\end{aligned}\tag{5.17}$$

qui est tout simplement une forme dont le CFD est sous une structure chaîne. Ainsi, la structure arbre est transformée en une structure chaîne. □

Remarque 5.4. Pour le cas A2 c'est à dire lorsque la variable q_2 n'est pas actionnée, il existe un autre changement de contrôle (non localisé) et un autre changement de coordonnées pouvant transformer le système initial, mais la forme normale obtenue n'est pas en stricte feedback. Cela signifie que quelques systèmes sous actionnés (particulièrement ceux qui sont actionnés selon le mode A2) ne peuvent pas se transformer d'une structure arbre en une structure chaîne, c'est le cas du Pendubot, du système chariot pendule inversé et quelques autres. Pour ceux là, nous proposerons par la suite une stratégie d'élaboration de lois de commande stabilisantes.

Pour illustrer cette procédure considérons un système qui initialement possède une structure arbre par exemple le système Tora.

5.2.1.1 Application : le système Tora

Reprenons l'exemple du Tora représenté dans le chapitre 3, ce système est constitué (figure 5.2) d'une plate forme pouvant osciller sans frottement dans le plan horizontal. Sur cette plate forme, une masse excentrique est actionnée par un moteur à courant continu, son mouvement applique une force à la plate forme qui peut être utilisée pour amortir les oscillations transversales.

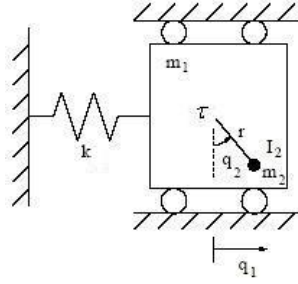


Figure 5.2 Le système Tora.

Le problème de stabilisation de ce système a été introduit par Wan, Brenstein et Coppola à l'université de Michigan [185] et a attiré l'attention de plusieurs chercheurs récemment du fait qu'il présente une interaction non linéaire entre les mouvements de translation et de rotation. Aussi, il a été intensivement utilisé comme benchmark pour le contrôle non linéaire pour les systèmes en cascade, spécialement pour des méthodes basées sur la passivité [78, 80, 149], pour des procédure du backstepping [123, 185], contrôleurs robustes et modes glissants [72, 118, 192], surfaces dynamiques [136], compensation du produit tensoriel et contrôleurs LMI (linear matrix inequality) [7, 63], gradient de vitesse [52] et même par logique floue avec [73, 186]. Cependant, à notre connaissance, ce travail est le premier à utiliser une commande à commutation pour la stabilisation du Tora.

Supposons que le couple moteur soit la variable de contrôle, notre objectif est de déterminer une loi de commande qui stabilise en même temps les mouvements de rotation et de translation à l'origine, ainsi, le système Tora est bien un SMSA.

Notons que ce système possède deux degrés de liberté (q_1, q_2) , où q_1 est la variable inactionnée et q_2 est la variable actionnée.

Nous rappelons les équations d'Euler-Lagrange décrivant le système Tora, données par :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2r \cos(q_2)\ddot{q}_2 - m_2r \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + kq_1 &= 0 \\ m_2r \cos(q_2)\ddot{q}_1 + (m_2r^2 + I_2)\ddot{q}_2 + m_2gr \sin(q_2) &= \tau \end{aligned} \quad (5.18)$$

ou encore par :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{1}{\det M(q_2)} (-m_2r \cos(q_2)\tau + gm_2^2r^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \\ &\quad - (m_2r^2 + I_2)(kq_1 - m_2r \sin(q_2)\dot{q}_2^2)) \\ \ddot{q}_2 &= \frac{1}{\det M(q_2)} ((m_1 + m_2)\tau - (m_1 + m_2)m_2gr \sin(q_2) \\ &\quad + m_2r \cos(q_2)(kq_1 - m_2r \sin(q_2)\dot{q}_2^2)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

où $\det M(q_2) = (m_1 + m_2)(m_2 r^2 + I_2) - (m_2 r \cos(q_2))^2$

La construction du CFD associé à ce système est donnée par la figure 5.3 qui est clairement sous une structure arbre.

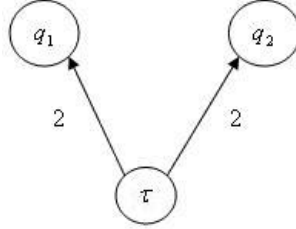


Figure 5.3 CFD du système Tora .

Après une linéarisation partielle par le changement de contrôle :

$$\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q}) \quad (5.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(q_2) &= (m_2 r^2 + I_2) - \frac{(m_2 r \cos(q_2))^2}{m_1 + m_2} \quad \forall q_2 \in [-\pi, \pi] \\ \beta(q, \dot{q}) &= m_2 g r \sin(q_2) - \frac{m_2 r \cos(q_2)}{m_1 + m_2} (k q_1 - m_2 r \sin(q_2) \dot{q}_2^2) \end{aligned}$$

Les dynamiques du Tora deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= f_0(q, p) + g_0(q)u \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec

$$\begin{aligned} f_0(q, p) &= \frac{(m_2 r \sin(q_2))p_2 - k q_1}{m_1 + m_2} \\ g_0 &= \frac{m_2 r \cos(q_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Notons que $M(q) = M(q_2)$, que le système Tora est actionné selon le mode A1 et que la fonction $\gamma(q_2)$ peut être explicitement calculée :

$$\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} \frac{m_2 r \cos(\theta)}{m_1 + m_2} d\theta = \frac{m_2 r \sin(q_2)}{m_1 + m_2}$$

Étant donné que toutes les hypothèses B1-B3 sont vérifiées, alors, le changement de coordonnées global :

$$\begin{aligned} q_r &= q_1 + \frac{m_2 r \sin(q_2)}{m_1 + m_2} \\ p_r &= (m_1 + m_2)p_1 + m_2 r \cos(q_2)p_2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

transforme les dynamiques du système Tora en un système non linéaire en cascade sous la forme stricte feedback suivante :

$$\begin{aligned} \dot{q}_r &= \frac{1}{(m_1 + m_2)} p_r \\ \dot{p}_r &= -k q_r + k \gamma(q_2) \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ce système peut aussi être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r &= -\frac{k}{m_1 + m_2} q_r + \frac{k m_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin(q_2) \\ \ddot{q}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.24)$$

qui correspond à un système de la forme (5.1).

Dans ce cas, le CFD associé à (5.24) est donné par :

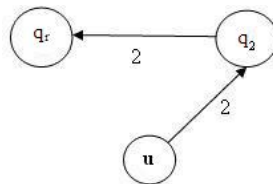


Figure 5.4 CFD du système Tora transformé.

Ainsi, le changement de contrôle (5.20) et de coordonnées (5.22) transforment la structure arbre du Tora en une structure chaîne.

Maintenant que le système Tora est exprimé sous forme d'une structure chaîne, nous pouvons alors appliquer la procédure systématique due à *Seto et Baillieul* pour déterminer la loi de commande qui peut globalement asymptotiquement stabiliser le système Tora transformé. Évidemment, la loi de commande réelle du système initial peut être déduite par une

simple transformation inverse (ce qui ne pose aucun problème puisque le changement de coordonnées est global).

Pour pouvoir appliquer cette procédure, vérifions d'abord que les hypothèses $H1 - H4$ pour le système ci dessous sont satisfaites.

$$\ddot{q}_r = -\frac{k}{m_1 + m_2} q_r + \frac{k m_2 r}{(m_1 + m_2)^2} \sin(q_2) = N_1(q_r, q_2) \quad (5.25)$$

$$\ddot{q}_2 = u = N_2 + Gu \quad \text{avec } N_2 = 0 \text{ et } G = 1$$

De même que pour l'exemple précédent, nous supposons qu'il n'y a pas de mécaniques rapides ni de jeu dans les engrenages.

vérification des hypothèses

H1) $N_i(0, 0) = 0$ l'origine est l'équilibre.

H2) N_1 est une fonction régulière, N_1 est bornée pour q_r et p_2 bornés.

H3) $G(q_r, q_2) = 1 \Rightarrow G(q_r, q_2) \neq 0$.

$\frac{\partial N_1}{\partial q_2} = 0$ mais $\frac{\partial N_1}{\partial q_2} = c \cos(q_2)$, (c constante) par conséquent $\frac{\partial N_1}{\partial q_2} \neq 0 \forall (q_r, q_2) \in D \subset \mathbb{R}^{2n}$ avec $D = \{(q_r, q_2)/q_2 \neq (2k + 1)\pi/2\}$.

H4) $N_1(0, q_2) = 0 \Rightarrow \sin(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = 0 \Rightarrow$ le système non linéaire $N_1(0, q_2) = 0$ est GAS en $(q_r, q_2) = 0$.

L'application du schéma de contrôle (5.3) conduit à la loi de commande suivante :

$$u_{nL} = -\frac{(m_1 + m_2)^2}{k \cos(q_2)} \left(c_1 \dot{q}_r + \frac{k}{(m_1 + m_2)^2} \dot{q}_2 (c_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2) + c_3 q_r + c_4 \sin(q_2) \right) \quad (5.26)$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes positives.

Clairement, le contrôle obtenu est simple et facile à implémenter. De plus, le taux de convergence peut être contrôlé en ajustant les gains c_i .

Néanmoins, ce contrôle est valide pour tout $q_2 \neq (2k + 1)\pi/2$. C'est la conséquence du fait que l'hypothèse H3, n'est pas toujours vérifiée $\forall (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$, du moment que pour le système Tora $\frac{\partial N_i}{\partial q_{i+1}} \neq 0$ que pour $q_2 \neq (2k + 1)\pi/2$.

Cela implique des singularités de contrôle qui font que le bassin d'attraction ne peut pas être tout l'espace, par conséquent, la stabilité ne peut être globale.

Une solution pour éviter la divergence des états est d'ajuster les gains c_i tels que les trajectoires soient gardées près de l'équilibre. Cependant, garder les trajectoires près de l'équilibre impliquera certes, de faibles efforts mais des temps d'établissement très importants. De plus, si les conditions initiales pour q_2 sont choisies plus grandes ou égales à $\pi/2$, les états et le contrôle vont diverger suite à la singularité, aussi cette solution est à éliminer.

Pour résoudre ce problème, nous proposons deux solutions, la première est basée sur un contrôle à commutation [30], et la seconde sur la théorie de Lyapunov [33]. Les deux solutions ont permis de déterminer malgré la singularité, des lois de commande valides pour n'importe quelles conditions initiales rendant ainsi la stabilité asymptotique globale.

Passage de la singularité : 1^{ière} solution L'idée est d'utiliser un contrôle hybride qui switch entre la loi de contrôle déterminée (5.26) loin des singularités et une autre loi de contrôle, déterminée par la suite, à proximité des singularités.

Cette technique de contrôle a été très utilisée récemment (chapitre 2, section 2.1.3). Son importance provient du fait que certains systèmes ne peuvent pas atteindre certains objectifs de commande à travers une seule loi de contrôle.

Il reste maintenant, à déterminer la deuxième loi de commande. En fait, l'idée est d'utiliser le linéarisé tangent du système Tora autour du point de singularité pour calculer une commande linéaire qui sera appliquée au voisinage de ce point. Une fois que les trajectoires sortent du domaine de la singularité, nous commutons vers le contrôle non linéaire pour atteindre la stabilité globale asymptotique de tous les états.

Expression de la loi de commande linéaire Le modèle du linéarisé du système Tora autour de $(q_r, p_r, q_2, p_2) = (0, 0, \pi/2, 0)$ est comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\delta q}_r &= \frac{1}{(m_1 + m_2)} \delta p_r \\ \dot{\delta p}_r &= -k \delta q_r \\ \dot{\delta q}_2 &= \delta p_2 \\ \dot{\delta p}_2 &= \delta u\end{aligned}\tag{5.27}$$

Le nouveau problème qui apparaît maintenant, est que le sous système $(\delta q_r, \delta p_r)$ n'est pas commandable, heureusement, il est stable. D'après Brockett dans [22] (théorème 3.1), lorsque les modes non commandables sont stables alors, le système peut encore être stabilisable. Dans ce cas, l'expression de loi de commande linéaire est déterminée de façon classique et est donnée par :

$$u_L = -K * x\tag{5.28}$$

où $x = [\delta q_2, \delta p_2]^T$ et $K = [K_1 \ K_2]$ est la matrice gain fixée soit par l'approche LQR ou celle de placement de pôles.

Remarque 5.5. *Notons que, même si les modes non commandables du système linéarisé autour du point de singularité sont stables, cela n'implique nullement que le système linéarisé lui même est stable. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le modèle (5.27), et de remarquer qu'il est sous forme d'un double intégrateur. De plus, l'application d'un contrôle au Tora conduit toutes les trajectoires à l'infini puisque $\frac{1}{\cos q_2}$ devient très grand au voisinage de $q_2 = \frac{\pi}{2}$.*

L'application en simulation de ce contrôle hybride au système Tora pour les paramètres $m_1 = 10kg, m_2 = 1kg, k = 5N/m, r = 1m, I = 1kg/m$, montre l'efficacité du schéma de contrôle proposé figure 5.5.

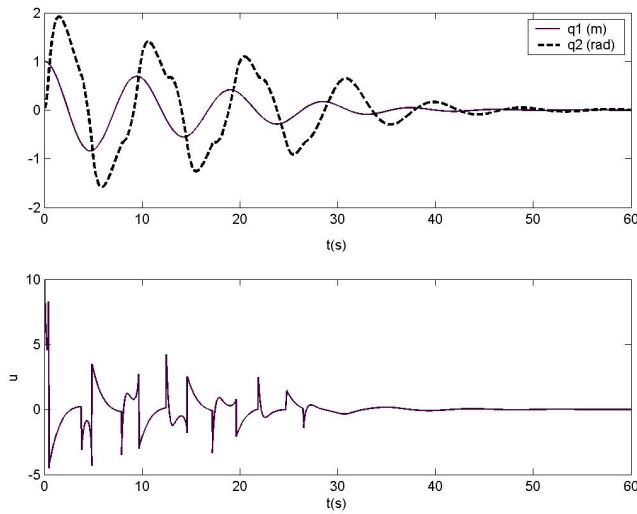


Figure 5.5 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, 0, 0, 0)$.

En fait, notre contrôle a permis la stabilisation du Tora même pour des conditions initiales assez dures telles que le point de singularité $q_2 = \pi/2$ (figure 5.6), ou encore un point encore plus éloigné de cette singularité $q_2 = \pi$ (figure 5.7).

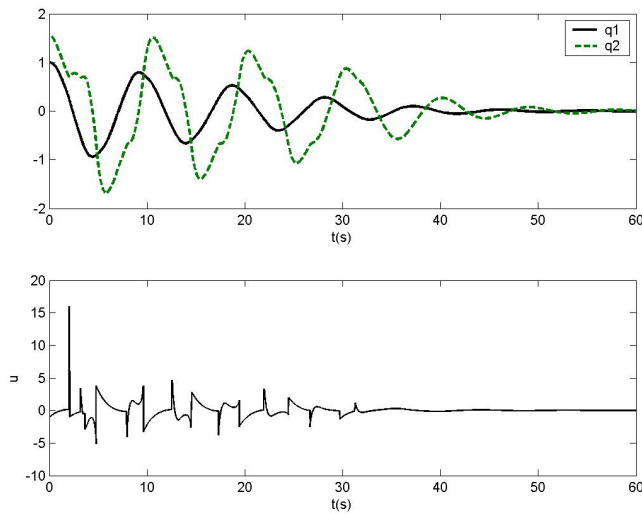


Figure 5.6 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, \frac{\pi}{2}, 0, 0)$.

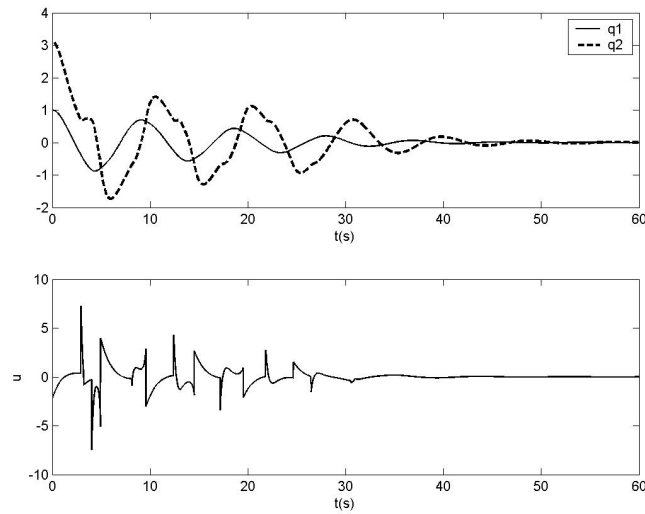


Figure 5.7 Trajectoires des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, \pi, 0, 0)$.

La commutation d'un contrôle à un autre est orchestrée par l'état q_2 , telle que, lorsque $|q_2|$ est en dehors de l'intervalle $\frac{\pi}{2} \pm e$, nous appliquons le contrôle non linéaire u_{nL} (5.26) et lorsque $|q_2|$ entre dans cet intervalle, nous commutons vers le contrôle linéaire u_L (5.28) figure 5.8.

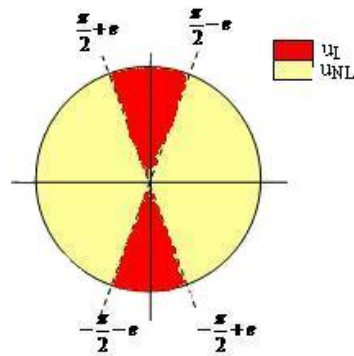


Figure 5.8 Régions de commutation pour le contrôle.

La dimension de l'intervalle est en relation directe avec l'effort de commande. Effectivement, nous avons remarqué que des intervalles restreints correspondant à des petites valeurs de e (autour de 0.2 à 0.3) figure 5.9 conduisent à des efforts plus importants par rapport à des intervalles plus large correspondant à des valeurs plus grandes de e (telles que 0.5 ou 0.6) figure 5.5. Ceci est dû essentiellement au fait, qu'avec des intervalles plus larges,

nous n'autorisons pas $\cos(q_2)$ à devenir très petit dans le but justement, d'éviter de grandes valeurs pour u_{nl} .

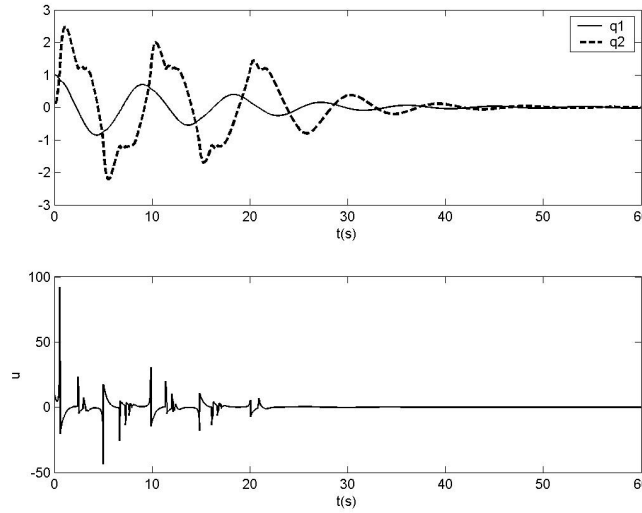


Figure 5.9 Trajectories des états et entrée de commande du système Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (1, 0, 0, 0)$ and $e = 0.2$.

Remarque 5.6. *Du point de vue de l'implémentation de la commande commutante en simulation, nous avons utilisé un bloc switch qui autorise le passage d'une entrée de commande ou de l'autre en fonction de la valeur de seuil fixée par la variable $|q_2|$.*

Notons que cette procédure n'est pas unique, d'ailleurs nous avons aussi essayer d'appliquer la commande

$$u = E * u_{nL} + (1 - E) * u_L$$

avec E étant le signal de sortie du bloc look up table et vaut

$$\begin{cases} E = 0 & \text{si } |q_2| \in |\pi/2 \pm e| \\ E = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les résultats obtenus par les deux méthodes sont identiques.

Preuve de stabilité pour le contrôle hybride Au chapitre 2, section 2.1.3, nous avons présenté les conditions que doivent satisfaire les systèmes à commutation pour bénéficier d'une stabilité globale du système hybride. En fait, il faut soit trouver une fonction de Lyapunov commune entre les sous systèmes de commutations ou alors à défaut d'une telle fonction, il faut d'une part démontrer l'existence de fonctions de Lyapunov associées à chaque sous système pouvant garantir la stabilité (éventuellement globale asymptotique) pour ces

derniers, et d'autre part satisfaire certaines conditions sur les fonctions de Lyapunov individuelles aux moments des commutations.

N'ayant pas réussi à trouver une fonction de Lyapunov commune entre le sous système non linéaire et le sous système linéaire, nous établirons la démonstration de la stabilité du système à commutation à travers des fonctions de Lyapunov multiples.

Pour le système Tora ces fonctions sont données par :

$$V_{nL} = \frac{1}{2}\bar{q}_1^T P \bar{q}_1 + \frac{1}{2}e_{21}^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad \text{pour le sous système non linéaire}$$

$$V_L = \frac{1}{2}\tilde{x}^T R \tilde{x} \quad \text{pour le sous système linéarisé}$$

où \bar{q}_1 , P , e_{21} et e_2 sont les variables définies dans les séquences du schéma de contrôle (5.3) pour $\bar{q}_1 = \bar{x}_1$, $\tilde{x} = (\delta q_r, \delta p_r, \delta q_2, \delta p_2)$ sont les coordonnées du système linéarisé et R est une matrice symétrique, définie positive.

La preuve de stabilité de la première fonction de Lyapunov pour le sous système non linéaire du Tora soumis à la loi de commande u_{nL} a été établie précédemment (section 5.1, preuve 4). Quant à la deuxième, étant donné que le sous système (5.27) est linéaire, nous pouvons choisir une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V_L = \frac{1}{2}\tilde{x}^T R \tilde{x}.$$

Si la matrice R est choisie diagonale alors, V_L peut être exprimée par :

$$V_L = \frac{1}{2}(R_1\tilde{x}_1^2 + R_2\tilde{x}_2^2 + R_3\tilde{x}_3^2 + R_4\tilde{x}_4^2).$$

Différentiant V_L , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_L &= R_1\tilde{x}_1\dot{\tilde{x}}_1 + R_2\tilde{x}_2\dot{\tilde{x}}_2 + R_3\tilde{x}_3\dot{\tilde{x}}_3 + R_4\tilde{x}_4\dot{\tilde{x}}_4 \\ &= \left(\frac{R_1}{m_1+m_2} - R_2k\right)\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + (R_3 - K_1R_4)\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - K_2R_4\tilde{x}_4^2 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Si les éléments de la matrice R sont choisis tels que les conditions :

$$\begin{cases} \frac{R_1}{m_1+m_2} = R_2k \\ R_3 = K_1 \end{cases}$$

soient vérifiées, alors :

$$\dot{V}_L = -K_2R_4\tilde{x}_4^2$$

Le sous système linéaire n'est que stable, mais l'utilisation du principe d'invariance de La-salle, va nous assurer une stabilité asymptotique. □

Ainsi, les fonctions de Lyapunov V_{nL} et V_L garantissent la stabilité globale asymptotique des sous systèmes non linéaire et linéaire respectivement. Il reste néanmoins, à démontrer que ces fonctions sont décroissantes sur chaque intervalle similaire où un même sous système est actif, autrement dit, il faut que la valeur des fonctions de Lyapunov à la fin d'intervalle soient supérieures à la valeur des mêmes fonctions de Lyapunov à la fin de l'intervalle suivant.

Malheureusement, l'analyse de la stabilité et la vérification d'une telle condition sont très difficiles au moyens d'outils analytiques. Aussi, souvent, nous sommes contraints à recourir à des résultats de simulation [50]. Dans ce cas, nous construisons par simulation le profil d'énergie. Celui du système Tora soumis à une loi de commande à commutation est illustré par la figure 5.10.

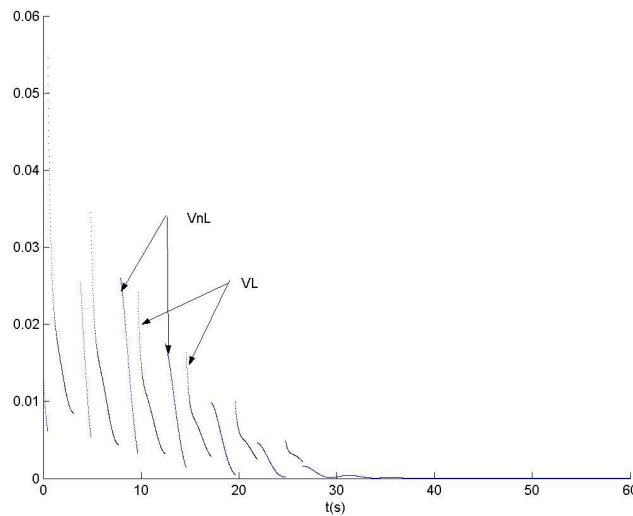


Figure 5.10 Profil d'énergie du système à commutation.

En se basant sur cette figure, les fonctions de Lyapunov V_{nL} et V_L , satisfont la condition de décroissance sur les intervalles similaires. Par conséquent, nous concluons à la stabilité globale asymptotique du système Tora soumis à une loi de commande hybride.

Passage de la singularité : 2^{ième} solution La deuxième solution que nous proposons a l'avantage d'éviter une commande à commutation, l'idée est de déterminer un contrôle qui rend la dérivée de la fonction de Lyapunov (5.9) non positive. En effet, l'expression de la commande (5.4) proposée par *Seto et Baillieul* est la façon la plus simple assurant la vérification de cette condition mais nécessite d'avoir la dérivée des termes de connection différente de zéro, condition qui n'est pas nécessairement satisfaite par plusieurs systèmes sous actionnés entre autres le Tora. Nous pouvons alors choisir une autre expression de commande qui peut rendre la dérivée de Lyapunov (5.9) non positive.

Reprenons donc, l'expression de la dérivée de Lyapunov pour $N_2 = 0$ et $G = 1$

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\nu_1 + e_2(G_2N_2 + G_2Gu + W_2) \\ &= -\nu_1 + e_2G_2u + e_2W_2\end{aligned}\tag{5.30}$$

Pour rendre cette expression négative, considérons le contrôle suivant

$$u = -ck_2G_2e_2 - c_{var}G_2W_2\tag{5.31}$$

où c est une constante positive utilisée pour ajuster le taux de convergence associé aux différentes conditions initiales alors que c_{var} est variable et sera définie un peu loin.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\nu_1 - ck_2G_2^2e_2^2 - c_{var}G_2^2e_2W_2 + e_2W_2 \\ &= -\nu_2 + e_2W_2(1 - c_{var}G_2^2)\end{aligned}$$

avec $\nu_2 = \nu_1 + ck_2G_2^2e_2^2$

Ensuite, essayons de forcer le terme $e_2W_2(1 - c_{var}G_2^2)$ à 0 tel que $\dot{V}_1 = -\nu_2$

Pour cela, nous pouvons choisir c_{var} tel que $c_{var} = \frac{1}{G_2^2}$

Une fois encore, nous rencontrons une division par zéro, mais cette fois, ce problème peut être résolu en modifiant c_{var} en $c_{var} = \frac{1}{G_2^2 + E}$ au voisinage des points de singularités.

$$\text{où } \begin{cases} E = 1 & \text{si } G_2 \approx 0 & \text{ie } |q_2| = |\pi/2 \pm 0.01| \\ E = 0 & \text{si } G_2 \neq 0 & \text{ie } |q_2| \neq |\pi/2 \pm 0.01| \end{cases}$$

Considérons de nouveau la dérivée de Lyapunov

$$\dot{V}_1 = -\nu_2 + e_2 W_2 (1 - c_{var} G_2^2)$$

Lorsque le terme $e_2 W_2 (1 - c_{var} G_2^2) = 0$ alors $\dot{V}_1 = -\nu_2$ et la stabilité globale asymptotique est assurée, mais lorsque $G_2 = 0$, ce terme est réduit à $e_2 W_2$ tel que $\dot{V}_1 = -\nu_2 + e_2 W_2$. Pour forcer la non positivité de la dérivée de Lyapunov, et comme e_2 et W_2 d'après (5.3) dépendent tous les deux des constantes k_1, k_2, k_{21} , et P_i (éléments de P), nous pouvons alors choisir ces constantes telles que la condition :

$$|e_2 W_2| < |\nu_2| \tag{5.32}$$

soit satisfaite tout le temps.

Pour les résultats de simulation, et pour les mêmes paramètres du Tora. L'ensemble des constantes est choisi en respectant la condition qui rend (5.32) vraie et sont données par : $k_1 = 4; k_2 = 4; k_{21} = 0.08; p_2 = 0.1; p_4 = 0.1$;

Pour le moment, ces constantes sont choisies de façon heuristique, mais la génération de constantes optimales qui résolvent la condition (5.32) est en cours.

L'application de la loi de commande proposée (5.31) pour les conditions initiales $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, 0, 0, 0)$ et pour $c = 486$ conduit aux résultats de simulation représentés par la figure 5.11.

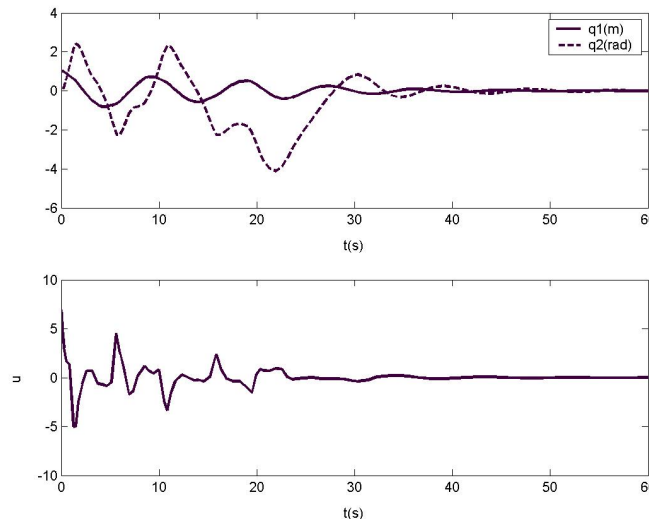


Figure 5.11 Trajectoires et contrôle du Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, 0, 0, 0)$.

Il apparaît de cette figure, que pour le système contrôlé, les deux mouvements translationnel et rotationnel se stabilisent à l'origine pour un effort de commande et un temps d'établissement raisonnables.

La vérification numérique de la condition (5.32) montre que cette dernière est toujours vraie figure 5.12

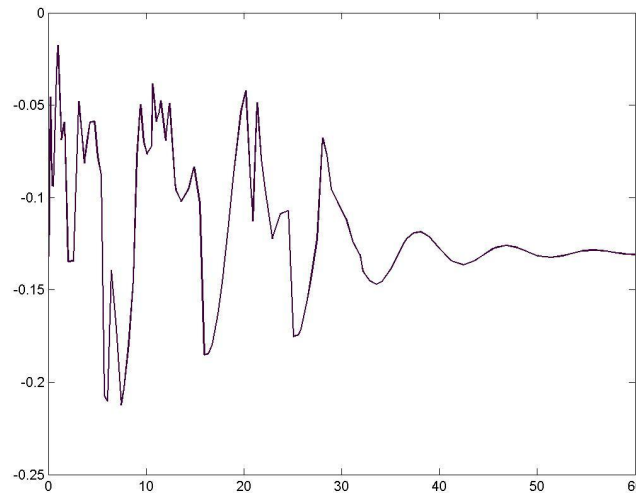


Figure 5.12 Evolution de $|e_2 W_2| - |\nu_2|$

Il est important de noter que la loi de commande ainsi déterminée est aussi valable pour n'importe quelle condition initiale, de plus le taux de convergence peut être ajusté à travers un bon choix de la constante c . Pour confirmer ce résultat, choisissons une condition initiale correspondant aux états $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, \pi, 0, 0)$. Pour stabiliser le système initié en ce point, les trajectoires passeront nécessairement par les points de singularités, les résultats de simulation associés figure 5.13 pour $c = 500$, sont très satisfaisants et montrent l'efficacité de notre loi de commande tenant compte de ces singularités.

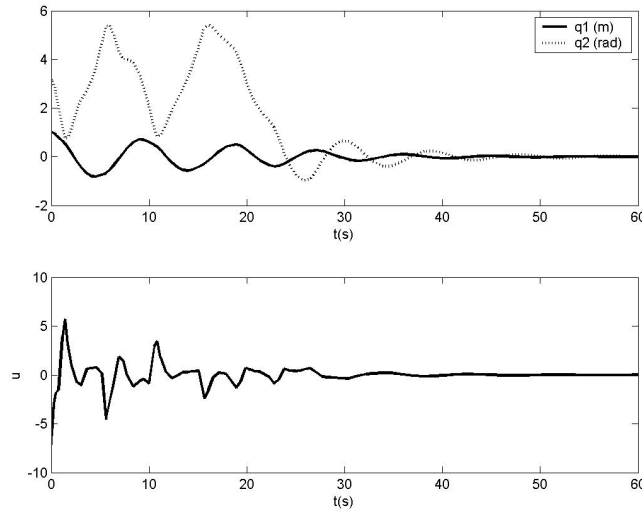


Figure 5.13 Trajectoires et contrôle du Tora pour les conditions initiales $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (1, \pi, 0, 0)$.

Considérons maintenant le problème de la stabilisation de la sous classe de SMSA en structure arbre non transformable en structure chaîne, pour cette classe nous proposons le schéma de commande suivant :

5.2.2 Stabilisation des SMSA actionnés selon le mode A2

Les SMSA ayant une structure arbre actionnés selon le mode A2, ne peuvent pas se transformer en des systèmes sous structure chaîne. Dans ce cas une approche de backstepping n'est pas envisageable. Comment alors procéder pour atteindre la stabilité de cette classe ?

Au départ n'ayant pas d'idée comment procéder à l'élaboration systématique pour la stabilisation de ces systèmes et vu le manque d'une méthodologie générale pour l'étude des systèmes non linéaires et l'abondance de celles dédiées aux systèmes linéaires, nous allons nous laisser tenter de procéder à une linéarisation du modèle obtenu afin de retrouver les propriétés des systèmes linéaires.

Comme application, nous avons choisi de travailler sur le système pendule inversé. L'élaboration du contrôleur et même de l'observateur linéaires est présentée dans l'annexe D. De plus, étant donné que nous avons considéré un fonctionnement pour ce système dans une région linéaire, nous avons aussi abordé la commande numérique pour ce système.

Ensuite, une fois le comportement local déterminé, et pour élargir le domaine de validité du contrôleur, il devient indispensable de considérer le modèle non linéaire. Dans ce cas, nous proposons de déterminer une loi de commande stabilisante toujours pour le système pendule inversé, nous essayerons de généraliser par la suite, la procédure pour le reste de la sous classe en structure arbre (évidemment celle qui ne peut se transformer en une structure chaîne).

En examinant le CFD d'une telle structure, il apparaît que la commande agit en même temps sur deux degrés de liberté; aussi il est nécessaire de commander les deux variables simultanément. Par conséquent, nous incluerons dans l'expression de la commande quelques termes destinés à la stabilisation d'une variable et d'autres termes dédiés à la stabilisation de la deuxième variable. C'est l'idée que nous avons utilisée pour la stabilisation du pendule inversé et qui peut être généralisée pour les autres systèmes de la même classe.

Le modèle du pendule inverse lorsque les frottements sont négligés est décrit par les équations :

$$ml\cos\theta\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (5.33)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 = F \quad (5.34)$$

de (5.33), nous avons :

$$\ddot{x} = gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}\ddot{\theta} \quad (5.35)$$

Posons : $\dot{\theta} = W_\theta = -k_1\dot{\theta} - k_2\theta$ pour $k_i, i = 1, 2$ étant des constantes positives. (5.35) devient :

$$\ddot{x} = gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}W_\theta \quad (5.36)$$

Dans notre approche, nous proposons de commander le mouvement du pendule à travers l'accélération du chariot. Ainsi, l'expression de \ddot{x} dans (5.36) sera considérée comme l'accélération désirée nécessaire à la stabilisation du pendule, soit :

$$\ddot{x}_d = gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}W_\theta \quad (5.37)$$

Ensuite de (5.34), nous avons :

$$(M + m)W_x + ml\cos\theta W_\theta - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 = F \quad (5.38)$$

$$W_\theta = -k_1\dot{\theta} - k_2\theta \quad (5.39)$$

$$W_x = \ddot{x}_d - k_{x1}(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_{x2}(x - x_d)$$

et donc, lorsque θ se stabilise : $\theta \rightarrow 0$, nous aurons aussi $\dot{\theta} \rightarrow 0$ et $\ddot{\theta} \rightarrow 0$, par conséquent : $W_\theta \rightarrow 0$. Or, d'après (5.37), nous aurons aussi $\ddot{x}_d \rightarrow 0$, par suite et après intégrations, \dot{x} sera une constante et x une droite, ce qui provoquera la divergence de x figure 5.14.

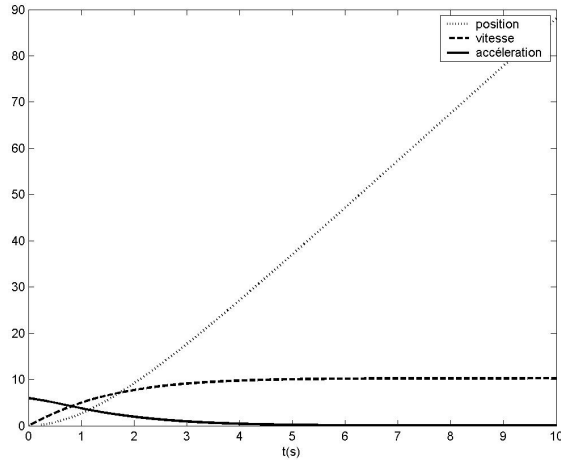


Figure 5.14 Représentation de l'accélération, vitesse et position du chariot

Pour remédier à ce problème, nous avons introduit des termes stabilisants x dans l'expression de W_θ . Dans ce cas, (5.39) devient :

$$\begin{aligned} W_\theta &= -k_1\dot{\theta} - k_2\theta - k_3\dot{x} - k_4x \\ W_x &= \ddot{x}_d - k_{x1}(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_{x2}(x - x_d) \end{aligned} \tag{5.40}$$

ainsi, lorsque, $\theta \rightarrow 0$, \ddot{x}_d n'est plus nul et tend vers W_θ , ce dernier tend vers $-k_3\dot{x} - k_4x$ ce qui conduit x à 0.

En ce qui concerne le justificatif théorique, pour le moment, nous ne sommes arrivés à vérifier que la stabilité locale du système commandé. Nous espérons établir la preuve du type de stabilité de notre loi de commande dans un futur très proche.

Quant aux constantes k_i , dans un premier temps, elles ont été choisies de manière heuristique en respectant la seule condition de positivité. Cela a conduit à une stabilisation du système mais les trajectoires oscillaient beaucoup, de plus, le temps d'établissement était important. Par la suite, nous avons optimisé ce choix en identifiant les coefficients supposés inconnus du polynôme caractéristique du linéarisé du système commandé avec un polynôme

d'hurwitz dont nous fixons les racines. Ce calcul peut être réalisé grâce aux fonctions "charpoly" du logiciel Maple et "fsolve" du logiciel Matlab.

Le jeu de paramètres de gains optimaux qui en résulte pour le spectre $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ est : $k_1 = 14.4085, k_2 = 34.815, k_3 = 4.64, k_4 = 2.20, k_{x1} = 9.93, k_{x2} = 28.92$.

L'application de ces gains donne des résultats satisfaisants : figure 5.15. Le temps d'établissement est inférieur à 8 secondes pour un angle initial important, les trajectoires sont très lisses et l'effort de commande est acceptable. Évidemment, il peut encore être amélioré mais au détriment du temps d'établissement, et ce en jouant sur les valeurs du spectre désiré.

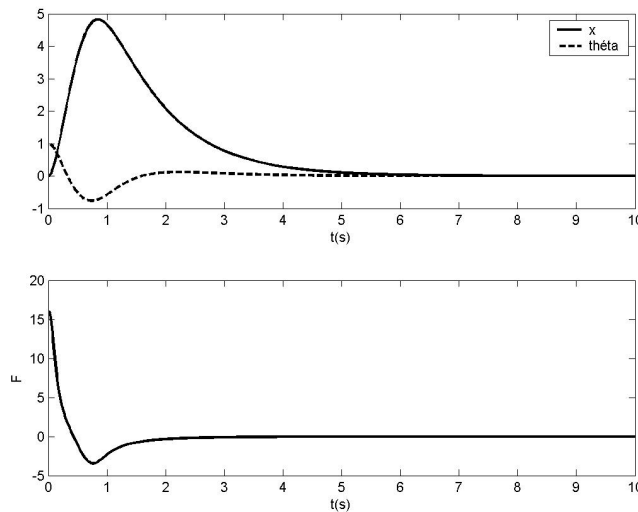


Figure 5.15 Trajectoires du pendule, du chariot et tension du moteur pour les conditions initiales $(0, 1, 0, 0)$

Remarque 5.7. *En attendant de déterminer la fonction de Lyapunov qui justifierait le type de stabilité de la loi de commande ainsi élaborée et qui permettra de déterminer aussi le domaine d'attraction, ce dernier a été déterminé par simulation et a été estimé autour de 1.18 radians soit 67.609 degrés.*

Nous sommes sûr de pouvoir trouver une fonction de Lyapunov et d'améliorer ce domaine d'attraction pour rendre la stabilité globale, ceci constituera sans aucun doute une perspective immédiate du présent travail.

Pour rendre la généralisation de cette approche plus facile, nous avons pensé à une procédure plus classique, toujours en se basant sur le fait que la commande doit contenir des termes stabilisants pour les deux variables en parallèle. En fait, il s'agit de passer par une linéarisation partielle et de déterminer ensuite l'expression de la commande en incluant

les fameux termes qui agissent en même temps sur la stabilisation des deux degrés de liberté en parallèle. Nous avons appliqué cette technique au système pendule inversé et il s'est avéré qu'elle donnait des résultats similaires que la première procédure basée sur l'accélération du chariot.

Reprenons le modèle du pendule donné par :

$$ml\cos\theta\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (5.41)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 = F \quad (5.42)$$

de (5.41), nous avons :

$$\ddot{x} = gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}\ddot{\theta} \quad (5.43)$$

que nous remplaçons dans (5.42) :

$$(M + m)\left(gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}\ddot{\theta}\right) + ml\cos\theta W_\theta - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 = F \quad (5.44)$$

posons :

$$\ddot{\theta} = W_\theta = -k_1\dot{\theta} - k_2\theta - k_3\dot{x} - k_4x \quad (5.45)$$

Les raisons de ce choix ont été expliquées précédemment.

Le système commandé est donné par :

$$\ddot{\theta} = -k_1\dot{\theta} - k_2\theta - k_3\dot{x} - k_4x \quad (5.46)$$

$$\ddot{x} = gtg\theta - \frac{(I + ml^2)}{ml\cos\theta}(-k_1\dot{\theta} - k_2\theta - k_3\dot{x} - k_4x) \quad (5.47)$$

Le choix des constantes $k_i, i = 1, \dots, 4$ est fait aussi à travers une procédure d'optimisation mais l'avantage cette fois est qu'il y a moins de paramètres à identifier. Le jeu de paramètres qui résulte pour un spectre désiré $\{-1, -2, -3, -4\}$ est : $k_1 = 15.3014, k_2 = 37.5447, k_3 = 5.0968, k_4 = 2.4465$.

Les résultats de simulation correspondant à ces gains sont donnés par la figure 5.16.

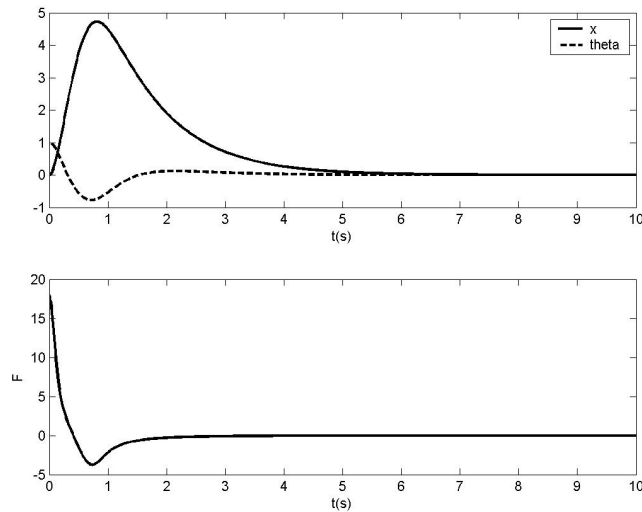


Figure 5.16 Trajectoires du pendule, du chariot et tension du moteur pour les conditions initiales $(0, 1, 0, 0)$

Les résultats sont pratiquement du même ordre de grandeur qu'avec une commande par accélération du chariot.

Au final, nous pouvons dire que les systèmes sous actionnés actionnés selon le mode A2 peuvent être stabilisables à travers une linéarisation partielle suivi d'une synthèse de commande incluant des termes pouvant agir en parallèle sur les différents degrés de liberté.

Il reste en dernier lieu à répondre au problème de stabilisation de la classe des SMSA ayant une structure en point isolé. Il a été montré (chapitre 4, section 4.1.1) que les systèmes avec une telle structure sont les plus difficiles à commander du fait que certains degrés de liberté ne sont pas influencés par la commande. Principalement, cela revient au fait, que le degré relatif n'est pas bien défini.

5.3 Stabilisation des SMSA ayant une structure point isolé

L'idée que nous proposons pour le contrôle de ces systèmes est d'atteindre la stabilité à travers des techniques de commande utilisant une approche de linéarisation approximative (chapitre 2, section 2.2.2.4) de sorte que les termes qui posent obstruction à la définition du degré relatif soient carrément éliminés.

Il reste néanmoins, que lorsque la linéarisation est possible, ce n'est peut être pas la meilleure solution, en particulier lorsque nous modifions le modèle afin de permettre cette linéarisation ou lorsque le modèle subit lui même des variations paramétriques non prises en compte, ce qui conduit à des systèmes peu robustes. D'un autre côté, si la synthèse d'une loi de commande robuste par exemple par mode glissant est prévue, alors, nous espérons que ce manque de robustesse sera compensé.

Pour améliorer encore plus les résultats obtenues par cette approche, nous avons considéré en deuxième lieu, des approximations d'ordre supérieurs (chapitre 2, section 2.2.2.5) au lieu d'une linéarisation approximative simple. Les deux procédures ont été appliquées sur un système ayant une structure en point isolé soit le système bille sur rail ou encore ball and beam system.

5.3.1 Expression de la commande pour un système obtenue par linéarisation approximative

Pour un système mono entrée affine en la commande :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u & x \in \mathbb{R}^n, \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.48}$$

La linéarisation approximative de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))u \end{aligned} \tag{5.49}$$

où $z = \phi(x)$ est le difféomorphisme permettant cette transformation. Le lemme suivant décrit un algorithme de contrôle qui force un système mono entrée à atteindre la surface de glissement en temps fini [163].

Lemme 5.1. *soit $s(t) = s(x(t))$ une sortie régulière du système mono entrée (5.48), avec $\dot{s}(t) = a_s(x(t)) + u(t)b_s(x(t))$. Supposons que l'ensemble S est défini par :*

$$S = \{x | s(x) = 0\}$$

une sous variété de dimension 1 de \mathbb{R}^n tel que 0 est une valeur régulière de s . Considérons D un sous ensemble compact et convexe de \mathbb{R}^n non vide, tel que $D \cap S \neq \emptyset$. Posons :

$$u_*(x) = -K \text{sign}(s(x)) \text{sign}(b_s(x)) \quad (5.50)$$

où $K > 0$ et $K|b_s(x)| \geq |a_s(x)|$ pour tout $x \in D$. Alors, il existe un ouvert $D_0 \subset D$ tel que pour une trajectoire du système initiée en $x_0 \in D_0$, il existe un $\tau > 0$ pour lequel $x(t) \in S, \forall t \geq \tau$.

Ce résultat conduit au théorème suivant :

Théorème 5.3. [183] *Soit le système (5.49), avec une surface de glissement :*

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n | z_n + a_{n-1}z_{n-1} + \dots + a_2z_2 + a_1z_1 = 0\} \quad (5.51)$$

telle que le polynôme :

$$P(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-2} + \dots + a_1$$

soit d'Hurwitz. Soit, D un voisinage compact et convexe de $z = 0$

posons :

$$u_{MG}^{app} = -k \cdot \text{sign}(L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))) \cdot \text{sign}(s(z)) \quad (5.52)$$

avec

$k > 0$ et tel que $|L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))| \geq |\sum_{i=1}^{n-1} a_i z_{i+1} + L_f^n h(\phi^{-1}(z))|$ pour tout $z \in D$,

alors \exists un voisinage ouvert $D_0 \subset D$ de $z = 0$ tel que le système (5.49) soumis à $u = u_{MG}^{app}$ et $z_0 = z(0)$ soit asymptotiquement stable.

La preuve de ce théorème est donnée dans [183].

5.3.2 Expression de la commande pour un système obtenue par approximation d'ordre supérieur

L'approximation d'ordre supérieur pour le même système (5.48) est donnée par l'une des formes :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 + L_g h(\phi^{-1}(z))u & \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 + L_g L_f h(\phi^{-1}(z))u & \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \vdots & & \vdots & + \Theta_E^2 u \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n + L_g L_f^{n-2} h(\phi^{-1}(z))u & \dot{z}_{n-1} &= z_n \\
 \dot{z}_n &= L_f^n h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))u & \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta(z)u
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Dans ce cas le théorème 5.3 est aussi valable mais il faut remplacer u_{MG}^{app} par u_{MG} donné par :

$$u_{MG} = -k \cdot \text{sign}(L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z)) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i L_g L_f^{i-1} h(\phi^{-1}(z))) \cdot \text{sign}(s(z)) \tag{5.54}$$

avec $k > 0$ et $|L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z)) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i L_g L_f^{i-1} h(\phi^{-1}(z))| \geq |\sum_{i=1}^{n-1} s_i z_{i+1} + L_f^n h(\phi^{-1}(z))|$ pour tout $z \in D$.

5.3.3 Application : système ball and beam

Le ball and beam est un benchmark du contrôle non linéaire, il est constitué d'une bille qui roule sans frottement sur la tige supposée symétrique et pouvant pivoter dans le plan vertical par l'application d'un couple au point de rotation figure 5.17.

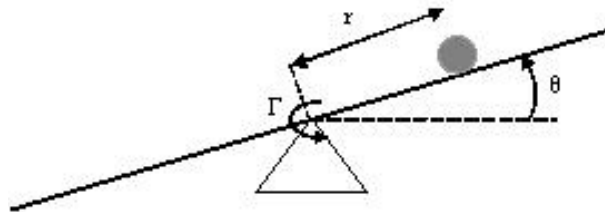


Figure 5.17 Le système ball and beam.

L'objectif de commande est d'une part de stabiliser la tige à la position horizontale et d'autre part de stabiliser la bille au centre de la tige par la seule application du couple au centre de rotation.

Rappelons le modèle issu du formalisme de Lagrange et donné par :

$$\begin{cases} m\ddot{r} + mg \sin(\theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0 \\ (m.r^2 + I)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mg \cos(\theta) = \Gamma \end{cases} \quad (5.55)$$

Un retour d'état préliminaire

$$\Gamma = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos(\theta) + (mr^2 + I)u$$

peut être appliqué pour avoir $\ddot{\theta} = u$. En posant : $(x_1, x_2, x_3, x_4) \stackrel{\text{déf}}{=} (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ La dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mathcal{B}(x_1x_4^2 - g \sin(x_3)) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \end{cases} \quad (5.56)$$

où $\mathcal{B} = 0.72$ et $g = 9.8$.

En considérant la sortie $y = h(x) = x_1$, il vient par calcul direct des dérivée de Lie :

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0 \\ L_g L_f h(x) &= 0 \\ L_g L_f^2 h(x) &= 2\mathcal{B}x_1x_4 \\ L_g L_f^3 h(x) &= 2\mathcal{B}x_2x_4 - \mathcal{B}g \cos(x_3) \end{aligned}$$

que $L_g h(x) = L_g L_f h(x) = 0$ mais $= L_g L_f^2 h(x) \neq 0$ ainsi le degré relatif = 3,

alors que $L_g h(0) = L_g L_f h(0) = L_g L_f^2 h(0) = 0$ mais $= L_g L_f^3 h(0) \neq 0$ par conséquent le degré relatif robuste = 4 Moyennant la transformation :

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 &&= z_1 \\ \phi = L_f h(x) &= x_2 &&= z_2 \\ L_f^2 h(x) &= \mathcal{B}x_1x_4^2 - \mathcal{B}g \sin(x_3) &&= z_3 \\ L_f^3 h(x) &= \mathcal{B}x_2x_4^2 - \mathcal{B}gx_4 \cos(x_3) &&= z_4 \end{aligned}$$

et l'hypothèse $2\mathcal{B}x_1x_4 = 0$ pour une linéarisation approximative

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= L_f^4 h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^3 h(\phi^{-1}(z))u \end{aligned} \quad (5.57)$$

Alors que dans une approximation d'ordre supérieur $2\mathcal{B}x_1x_4 \neq 0$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 + L_g L_f^2 h(\phi^{-1}(z)) \\ \dot{z}_4 &= L_f^4 h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^3 h(\phi^{-1}(z))u\end{aligned}\tag{5.58}$$

Les expressions de commande pour les modèles (5.57) et (5.58) pour la même surface de glissement : $S = \{z \in \mathbb{R}^4 \mid z_4 + a_3 z_3 + a_2 z_2 + a_1 z_1 = 0\}$

$$S = \{z \in \mathbb{R}^4 \mid z_4 + 6z_3 + 12z_2 + 8z_1 = 0\}$$

sont données respectivement par :

$$u_{MG}^{app} = -k \times \text{sign}(L_g L_f^3 h(\phi^{-1}(z))) \times \text{sign}(s(z))\tag{5.59}$$

$$u_{MG} = -k \times \text{sign}(L_g L_f^3 h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^2 h(\phi^{-1}(z))).\text{sign}(s(z))\tag{5.60}$$

L'application en simulation de ces deux lois de commande au ball and beam sont d'efficacité égale pour des conditions initiales assez faibles figure 5.18, où toutes les courbes sont superposées et tendent vers 0.

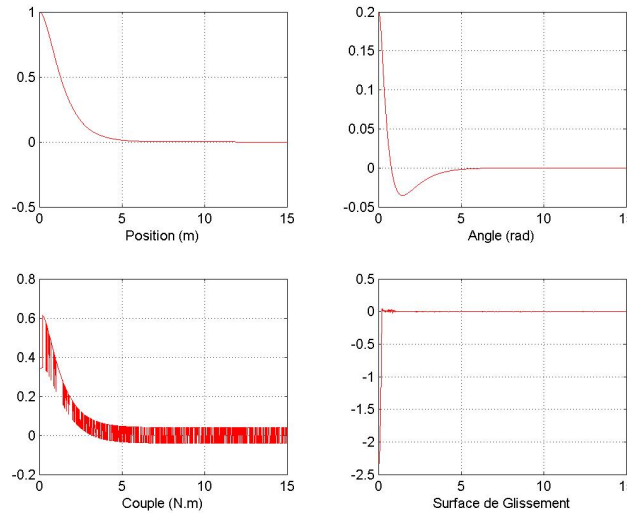


Figure 5.18 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.2rad$.

Dés que les condition initiales deviennent plus importantes pour élargir le domaine d'attraction figure 5.19, nous remarquons que la première commande u_{MG}^{app} en bleu, n'est plus

suffisante pour stabiliser le système alors que la deuxième commande u_{MG} en rouge est encore valide.

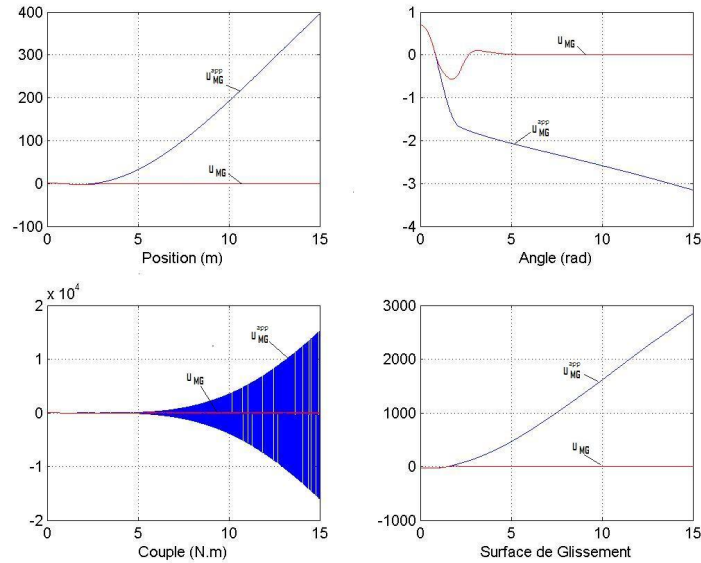


Figure 5.19 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m$, $x_{03} = 0.7rad$ relatifs aux commandes u_{MG}^{app} (en bleu) et u_{MG} (en rouge).

En conséquent, Les approximations d'ordre supérieur permettent d'élargir le domaine de stabilité. Ainsi, il ne s'agit plus de contrarier le système en négligeant certains termes mais d'utiliser ses propriétés.

Il reste néanmoins, que pour les deux commandes, il y a présence de chattering dû à la nature discontinue de la commande par mode glissant, et qui risque d'endommager le moteur.

Pour y remédier, nous proposons deux solutions : la première consiste à utiliser une fonction plus régulière que la fonction signe par exemple la fonction arctangente. Nous avons remarqué qu'une telle démarche a non seulement réduit considérablement le chattering figure 5.20 (en bleu la fonction signe et en rouge la fonction arctg), mais a permis aussi d'élargir le bassin d'attraction par rapport à une fonction signe même sans l'utilisation des approximations d'ordre supérieur figure 5.21 (en bleu la commande u_{MG}^{app} et en rouge la commande u_{MG}^{app} où nous avons remplacé la fonction signe par la fonction arctg). Il s'en suit que pour la commande u_{MG} où la fonction signe est remplacée par la fonction arctg, le domaine d'attraction sera encore plus grand [13].

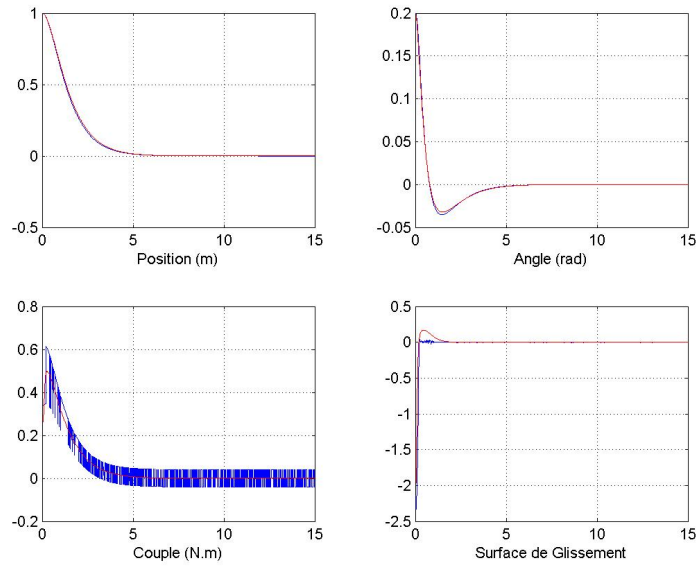


Figure 5.20 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.2rad$ lorsque la fonction signe (tracés en bleu) est remplacée par une fonction arctangente (tracés en rouge).

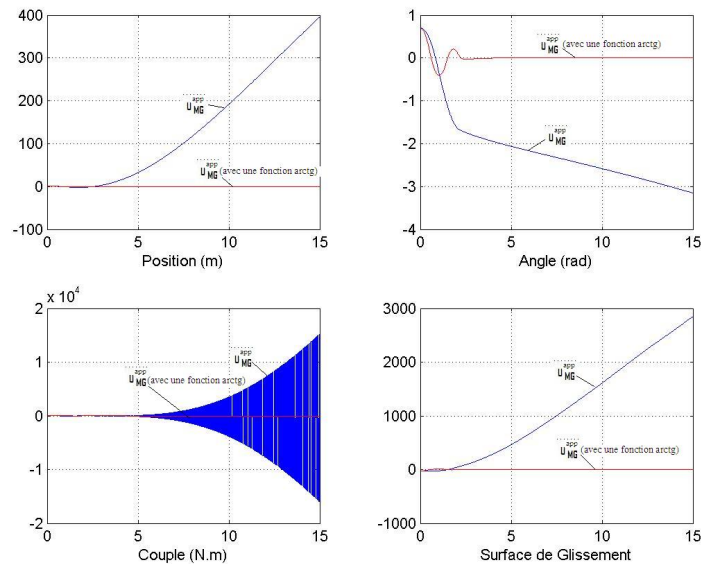


Figure 5.21 Trajectoires, couple et surface de glissement relatifs au système ball and beam pour des condition initiales : $x_{01} = 1m, x_{03} = 0.7rad$ (en bleu : la commande u_{MG}^{app} , en rouge : la commande u_{MG}^{app} dans laquelle nous avons remplacé la fonction signe par une fonction arctg).

La deuxième solution est encore en cours et consiste à synthétiser des lois de commande par mode glissant d'ordre deux, par exemple : l'algorithme twisting ou encore super twisting.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu le problème de stabilisation systématique de pratiquement tous les SMSA à deux degrés de liberté. L'analyse du CFD associé à un système donné constitue le point de départ de notre procédure. En fonction du CFD obtenu, nous avons proposé différentes approches très simples et conduisant à des contrôles pas trop compliqués, ce qui favorise leur implémentation pratique.

En résumé, nous pouvons affirmer que les SMSA dont le CFD est sous forme de structure chaîne peuvent être stabilisés par une procédure systématique de type backstepping. Pour les SMSA dont le CFD est sous forme arbre, l'idée est de vérifier le mode d'actionnement de la variable figurant dans la matrice d'inertie. Ainsi, lorsque cette variable dite de forme est actionnée, le CFD sous forme arbre est transformable sous une forme chaîne permettant de cette façon l'application de la procédure systématique de type backstepping. Cependant, due à cette transformation, souvent, une partie des hypothèses n'est plus vérifiée, particulièrement celle qui assure la stabilité globale du fait que le contrôle possède des singularités en quelques points. Dans ce cas, nous avons proposé deux solutions permettant le passage des singularités. La première de ces solutions est d'utiliser une commande à commutation qui switch entre deux lois de commande en fonction du domaine de singularité ; la deuxième solution est de carrément changer l'expression de la commande et de jouer sur les gains de commande pour satisfaire une certaine condition. Ces deux solutions autorisent une stabilité globale malgré les singularités de commande. Nous avons ainsi permis la relaxation d'une des hypothèses du schéma de contrôle de *Seto et Baillieul*. Ensuite, lorsque la variable de forme n'est pas actionnée, cela implique que les systèmes associés ne sont pas transformables en une structure chaîne. Dans ce cas, nous avons élaboré une procédure de commande basée sur une linéarisation partielle et incluant dans l'expression de commande des termes pouvant stabiliser simultanément les deux degrés de liberté en parallèle. Quant aux SMSA dont le CFD est sous forme de point isolé, nous avons proposé d'atteindre les objectifs de commande à travers une linéarisation approximative ou éventuellement des approximations d'ordre supérieur suivi d'une synthèse de commande robuste de type mode glissant.

Toutes ces procédures de commande ont été testées sur des exemples de SMSA, et les résultats de simulation confirment leurs efficacités.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à la synthèse de lois de commande systématiques pour la stabilisation des systèmes mécaniques sous actionnés. En raison de la difficulté à mettre en évidence des propriétés structurelles générales pour tous les systèmes mécaniques sous actionnés, la commande de ces systèmes est conçue en général à partir d'une étude au cas par cas. Le fait de classer ces systèmes selon certaines propriétés structurelles de façon définitive permettra forcément de dégager une théorie unifiée pour ce type de système mécanique.

L'enjeu est donc de taille mais en même temps difficile à réaliser. Effectivement, la restriction sur l'autorité de commande rend ces systèmes plus difficiles à commander. Nous avons démontré que ces systèmes ne sont pas linéarisables complètement par feedback, par conséquent ne sont pas découplables, la commandabilité de ces systèmes est difficile à démontrer, et combien même ils sont commandables ceci n'implique pas qu'ils le sont avec des commandes lisses et continues. D'un autre côté, maîtriser la commande de ces systèmes permettrait de gagner en coût et en poids, de plus, éviterait l'ajout d'actionneurs redondants pour les applications et missions délicates.

Notre première démarche a été de présenter d'une part, l'essentiel de la théorie de Lyapunov. Cette théorie nous a permis de vérifier le type de stabilité de nos lois de commande car, bien qu'actuellement les outils de simulations sont de plus en plus performants, ils ne sont pas suffisants pour conclure quant à la stabilité des contrôles de peur que certains cas ne soient oubliés. Néanmoins, cet outil reste très appréciable pour illustrer rapidement les comportements des variables. D'autre part, nous avons présenté le principe de plusieurs techniques de commande utilisées en contrôle non linéaire. Toutefois, en raison des nombreuses contributions de ces dernières années, nous avons arrêté notre intérêt qu'à celles qui sont liées à notre travail.

Nous nous sommes intéressés par la suite, à l'étude des systèmes mécaniques sous actionnés. Nous avons passé en revue leurs définitions, leurs modélisations, leurs propriétés et les problèmes engendrés par le sous actionnement. Nous avons aussi présenté plusieurs d'entre eux, essentiellement ceux à deux degrés de liberté et qui représentent pour la plupart des benchmarks du contrôle non linéaire.

Ensuite, nous avons étudié les deux classifications pour les systèmes mécaniques sous actionnés établies d'une part par *Seto et Baillieul* et de l'autre par *Olfati Saber*. La première est basée sur une représentation graphique des liaisons entre les contrôles et les degrés de liberté et entre les degrés de liberté eux mêmes. Pour capturer ce caractère, il est nécessaire de construire le CFD associé au système donné. En fonction du CFD obtenu, sept structures sont identifiées, principalement la structure chaîne, arbre et point isolé, plus la combinaison de ces trois structures. La structure obtenue à partir de ce CFD donne une première appréciation du degré de complexité du système considéré ce qui constitue un point de départ pour l'analyse et la synthèse du système à commander. Le point faible de cette méthode est qu'elle ne donne une solution de commande que dans le cas où le système possède une structure chaîne. le problème étant encore ouvert pour les autres structures. Par contre son point fort est que pour une structure chaîne, la commande de type backstepping est systématique, facile à synthétiser, à démontrer et à réaliser. Malheureusement, seuls les systèmes masse glissante sur chariot et le robot à articulations élastiques possèdent initialement cette structure, ce qui réduit le domaine d'applicabilité de cette procédure.

Quant à la deuxième classification elle paraît plus générale et plus poussée puisqu'elle prend en considération le problème des propriétés structurelles du système considéré telles que l'actionnement des variables de forme ou des variables externes, le couplage des entrées, l'intégrabilité des moments généralisés et quelques conditions supplémentaires. Au total, cette classification donne naissance à huit classes différentes. Le point fort de cette méthode est l'existence pour chaque classe d'un changement de coordonnées explicite les transformants sous des formes normales à partir desquelles, les méthodes classiques de contrôle peuvent être appliquées. Par exemple les systèmes qui peuvent se mettre sous une forme normale feedback stricte, et après stabilisation du système réduit, sont globalement stabilisable par une procédure du backstepping. Ceux qui peuvent se mettre sous la forme normale feedforward sont stabilisables après stabilisation du système réduit, avec une procédure de forwarding. Mais le problème est encore ouvert pour les systèmes qui peuvent se mettre sous une forme normale non triangulaire. Par contre le point faible de cette méthode malgré l'élégance des

démonstrations reste que les commandes obtenues sont pratiquement non réalisables.

En entreprenant ce travail nous voulions démontrer s'il existe des relations entre ces deux classifications. En fait, nous nous sommes rendu compte qu'il n'en n'existait pas et pour preuve certains systèmes mécaniques sous actionnés tels le pendule inversé, le Tora ou l'Acrobot qui, appartiennent à la même classe dans la première classification avec une structure arbre, appartiennent à des classes différentes dans la deuxième classification : classe I et II. De plus, la réciproque est aussi vraie.

En se basant sur la classification de *Seto et Baillieul*, nous avons essayé en dernier lieu de résoudre les problèmes de stabilisation encore ouverts pour les structures arbre et point isolé et qui sont, du point de vue complexité, plus difficiles à commander que la structure chaîne. Notre stratégie a consisté en premier lieu à étendre le schéma de contrôle élaboré pour la structure chaîne à une sous classe de la structure arbre pouvant se transformer sous certaines conditions en une structure chaîne. Cette sous classe inclue le système Tora, l'acrobot et le pendule à roue inertielle. Cependant, cette démarche a engendré des problèmes de singularité qui ont pour conséquences de réduire le domaine de stabilité. Pour pallier ce problème, d'une part, nous avons autorisé des commutations entre deux lois de commande permettant ainsi le passage de singularité, et d'autre part, nous avons élaboré une autre loi de commande à partir de la dérivée de la fonction de Lyapunov. Les deux approches ont été appliquées au système Tora et les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité des lois de commande ainsi élaborées.

Pour la deuxième sous classe en structure arbre et qui regroupe les systèmes chariot pendule inversé et le Pendubot, l'idée a été de passer par une linéarisation partielle et de concevoir ensuite une loi de commande incluant en même temps, des termes stabilisants pour les deux variables en parallèle puisqu'il s'agit de commander ces variables simultanément. Malheureusement, nous ne sommes arrivés à démontrer que la stabilité locale de cette loi de commande mais les résultats de simulation sont très prometteurs.

Finalement, nous avons proposé d'atteindre la stabilisation des systèmes ayant une structure en point isolé à travers une linéarisation approximative ou les approximations d'ordre supérieur suivi d'une commande par mode glissant pour essayer de rattraper le manque de robustesse dû aux méthodes approximatives.

À l'issue de ce travail de thèse, plusieurs investigations restent à développer. Nous présentons de suite ce qui nous semble être le cadre de travaux futurs où des avancées importantes sont tout à fait envisageables.

En premier lieu, il sera intéressant de déterminer une fonction de Lyapunov permettant de justifier le type de stabilité des lois de commande élaborées pour la sous classe en structure arbre non transformable en structure chaîne. Nous projetons aussi d'appliquer les modes glissants d'ordre supérieur pour la classe ayant une structure en point isolé. Il faudra après, améliorer les lois de commande de ces deux classes, pour rendre la stabilité globale. Ensuite, il s'agira de considérer le problème de la discrétisation des lois de commande synthétisées en vue de leur implémentation pratique via des cartes Dspace, surtout que ces dernières sont déjà disponibles au niveau de notre laboratoire et que nous disposerons très prochainement de plusieurs prototypes de systèmes sous actionnés, notamment : le chariot pendule inversé, le système bille sur rail et le quadrirotor.

En second lieu, il est tout à fait possible, d'étendre les différents schémas de contrôles synthétisés dans ce travail, aux systèmes mécaniques sous actionnés d'ordre supérieur à deux tels le VTOL, les drones, les véhicules marins, les engins spatiaux et les robots mobiles, dans le but de générer des commandes pour des applications pratiques.

Pour compléter le présent travail, il faudra aussi porter un intérêt aux problèmes de poursuite et de planification de trajectoires .

Enfin, les principaux exemples traités exigent une bonne connaissance du modèle. Des extensions de ces résultats auront pour objet de ne plus imposer de telles hypothèses et de généraliser la commande à des modèles incertains. De plus, les lois de commande sont élaborées en admettant que toutes les variables sont disponibles, condition qui peut parfois ne pas être vraie. Dans ce cas, il faudra procéder à la reconstruction des variables non disponibles ; en d'autres termes, il faudra s'intéresser à l'observation et à la synthèse d'observateurs.

"...La science a la chance et la modestie de savoir qu'elle est dans le provisoire, de déplacer les frontières de l'inconnu et d'avancer."

ANNEXE

Limites de la linéarisation et dangers de la déstabilisation

Une pratique commune aux automaticiens est de supposer qu'un système peut être décrit par un ensemble d'équations différentielles autour d'un certain point de fonctionnement comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{A.1}$$

Sous l'hypothèse que (A.1) décrit le comportement du système, on peut exploiter les propriétés du contrôle linéaire, et disposer d'outils d'analyse et de méthodes de synthèse puissants. Toutefois, les comportements d'un système non linéaire peuvent être plus complexes que ce que peut représenter un modèle linéaire.

En négligeant de tels comportements, une instabilité imprédictible peut résulter pouvant engendrer la dégradation des performances. De plus, le système linéaire obtenu n'est valide qu'autour du point de fonctionnement considéré, et par conséquent, ne peut décrire le système qu'au voisinage de ce point. D'autre part, certains phénomènes tels que : les frottements secs, "backlash" et l'hystérésis dits nonlinéarités dures, ne peuvent pas être capturés par des équations linéaires. Aussi, ces nonlinéarités sont carrément négligées.

Des phénomènes non linéaires additionnels incluent la divergence à l'infini en temps fini (finite escape time), la multiplicité des points d'équilibre, les cycles limites et le chaos. Une description plus complète de ces phénomènes et bien d'autres est donnée dans [37, 84].

Pour illustrer l'impact de la perte d'information à travers la linéarisation, considérons les exemples suivants [41] :

Exemple A.1. *Plusieurs points d'équilibre*

$$\dot{x} = -x + x^2 \quad (\text{A.2})$$

$$x(t=0) = x_0$$

après linéarisation de ce système autour de $x(t) = 0$, les dynamiques obtenues et les solutions associées sont données par :

$$\dot{x} = -x(t) \quad (\text{A.3})$$

$$x(t) = x_0 \exp(-t)$$

(A.3) indique que pour n'importe quelle condition initiale x_0 , la solution converge exponentiellement vers le point d'équilibre.

Or, d'après (A.2), le système non linéaire possède un 2^{ième} point d'équilibre $x(t) = 1$.

L'impact de la négligence de ce point d'équilibre peut être illustré en calculant la solution du système non linéaire :

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + e^{-t}} \quad (\text{A.4})$$

d'après (A.4), on remarque que :

Pour $x_0 < 1$, la solution tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ comme pour le cas linéaire.

Pour $x_0 > 1$, la solution explose à l'infini en temps fini figure A.1

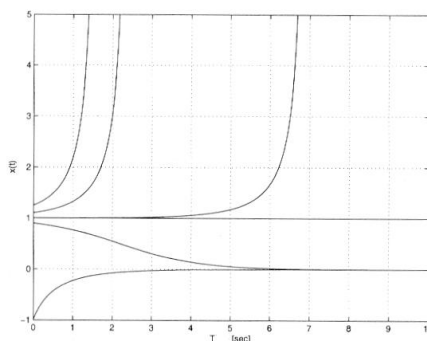


Figure A.1 Réponses d'un système non linéaire pour plusieurs conditions initiales.

Exemple A.2. *Le linéarisé n'est pas commandable*

Soit le modèle décrivant un robot unicycle (voir [15] pour d'autres modèles)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_3 & 0 \\ \sin x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Il est clair que (A.5) est commandable alors que son linéarisé autour du point $x_3(t) = 0$ donné par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

ne l'est pas pour $x_2(t)$!

D'autres exemples de dégradation de performances sont donnés dans [41].

D'un autre côté, l'utilisation des contrôleurs linéaires peuvent conduire parfois contre toute attente, à des effets déstabilisants ; par exemple, les conséquences du phénomène du peaking sur un système linéaire peut conduire à l'instabilité du système [170, 171].

Pour illustrer ce concept soit le système couplé partiellement linéaire décrit par les dynamiques :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= Ay + By \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

admettons les hypothèses suivantes :

Hypothèses A.1. La paire (A, B) est supposée commandable,

Hypothèses A.2. La fonction non linéaire f est différentiable au 1^{er} ordre par rapport au temps,

Hypothèses A.3. L'origine est un point d'équilibre GAS pour la dynamique de zéro ($\dot{x} = f(x, 0)$).

En se basant sur (A.7), et (H A.3), il semble intuitif qu'un contrôleur linéaire puisse être synthétisé pour conduire les dynamiques de $y(t)$ vers 0 de façon exponentielle de sorte que la dynamique de zéro du sous système non linéaire soit GAS. Cependant, cette stratégie peut mener à l'instabilité et peut être même à une explosion vers l'infini en temps fini des dynamiques non linéaires. Pour illustrer ce point, considérons l'exemple suivant :

Exemple A.3.

$$\dot{x} = \frac{-(1+y_2)}{2}x^3 \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = u$$

de (A.8), on peut vérifier que l'hypothèse (H A.3) est satisfaite.

En synthétisant un contrôleur linéaire comme suit

$$u = -a^2y_1 - 2ay_2 \quad (\text{A.9})$$

des valeurs propres multiples pour le système linéaire bouclé résultent en $-a$.

Des méthodes d'analyse linéaires peuvent être utilisées pour déterminer la solution exacte $y_2(t)$ donnée par

$$y_2 = -a^2te^{-at} \quad (\text{A.10})$$

de cette solution, il apparaît que la dynamique $|y_2(t)|$ monte vers un pic pour ensuite converger exponentiellement vers 0. Par calcul, on peut démontrer que le temps de pic vaut $t = \frac{1}{a}$.

De (A.10), on pourrait conclure que, pour de grandes valeurs de a , y converge plus rapidement vers 0. Par conséquent, à partir de (H A.3), il semble que, de grandes valeurs de a permettent une stabilisation rapide du système non linéaire.

Or, il a été établie dans [85], que cela n'était qu'un mirage, et pour dissiper ce mirage, on peut remplacer (A.10) dans (A.8) et intégrer par la suite. L'expression qui en résulte est comme suit :

$$x^2(t) = \frac{x_0^2}{1 + x_0^2(t + (1 + at)\exp(-at) - 1)} \quad (\text{A.11})$$

L'effet déstabilisant du phénomène du peaking est maintenant apparent lorsqu'on remplace les valeurs de x_0 , a et t dans (A.11). Par exemple, pour $a = 10$ et $x_0^2 = 2.176$, la réponse $x^2(t \cong 0.5)$ devient non bornée en s'échappant à l'infini en temps fini.

D'autres exemples et discussions concernant ce phénomène se trouvent dans [85, 170, 171].

ANNEXE

Un peu de géométrie différentielle

Cette partie est consacrée à la définition de quelques concepts et outils de base de la géométrie différentielle introduits en théorie de l'automatique non linéaire, depuis les années 70, par Eliott, Lobry, Hermann, Krener, Brockett et bien d'autres.

Difféomorphisme Un difféomorphisme est un changement de coordonnées non linéaire de la forme $z = \Phi(x)$.

où Φ est une fonction vectorielle

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

possédant les propriétés suivantes :

- $\Phi(x)$ est une application bijective
- $\Phi(x)$ et Φ^{-1} sont des applications différentiables.

Si ces propriétés sont vérifiées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors Φ est un difféomorphisme global sinon Φ est un difféomorphisme local.

Proposition B.1. *Si la matrice jacobienne de Φ , évaluée au point $x = x_0$ est non singulière alors $\Phi(x)$ est un difféomorphisme local.*

Dérivées et crochets de Lie Soient f et g deux champs de vecteurs sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n ayant des dérivées partielles continues à tous les ordres. On note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ les matrices jacobiniennes.

La dérivée de Lie de g le long de f est le champ de vecteur

$$L_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f.$$

Le crochet de Lie de f et g est le champ de vecteur

$$[f, g] = L_f g - L_g f.$$

On définit aussi les champs de vecteurs

$$\begin{aligned} ad_f g &= [f, g] \\ ad_f^k g &= [f, ad_f^{k-1} g], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Distribution, involutivité et ensemble complètement intégrable

- Une distribution Δ sur une variété M assigne à chaque point $x \in M$ un sous espace de l'espace tangent T .
- Un ensemble de vecteurs $\{g_1, \dots, g_m\}$ dans Ω est dit involutif si pour tous les i et j le crochet $[g_i, g_j]$ est une combinaison linéaire des vecteurs g_1, \dots, g_m , c'est à dire qu'il existe des fonctions α_{ij}^k définies dans Ω telles que

$$[g_i, g_j] = \sum_{k=1}^{k=m} \alpha_{ij}^k g_k.$$

Autrement dit, si pour tous les f et g dans Δ , alors $[f, g]$ appartient à Δ (Δ est fermée pour le crochet de Lie).

- Un ensemble de vecteurs linéairement indépendants $\{g_1, \dots, g_m\}$ est un ensemble complètement intégrable, si le système de $n - m$ équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial x} g_1 = 0, \dots, \frac{\partial h}{\partial x} g_{n-m} = 0$$

admet une solution $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$

Théorème B.1. (Frobenius) : Un ensemble de vecteurs linéairement indépendants $\{g_1, \dots, g_m\}$ est involutif si et seulement s'il est complètement intégrable.

Pour la démonstration et des exemples d'utilisation, regarder [84].

Degré relatif Le degré relatif associé au système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{B.1}$$

dans une région $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est donné par l'entier γ tel que

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{\gamma-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{\gamma-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$

ANNEXE

Commandabilité des systèmes continus

Un des principaux buts de l'automatique est d'établir des lois de commande pour qu'un système évolue selon un objectif prédéterminé. Il faut pour cela que le système puisse être commandable. Intuitivement, la propriété de commandabilité signifie qu'on peut amener le système d'un état vers un autre au moyen d'une commande en boucle ouverte. À l'inverse, la non commandabilité traduit que certains états sont inatteignables quelle que soit la commande.

C.1 Commandabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires commandé

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{C.1}$$

$$y = Cx \tag{C.2}$$

où $A_{n \times n}$ est la matrice d'état, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $B_{n \times m}$ la matrice de commande, u les contrôles appartenant à un ensemble de contrôles admissibles U , $C_{p \times n}$ la matrice de sortie et $y \in \mathbb{R}^p$ les sorties du système.

Définition C.1. *On dit que le système (C.1) est commandable si pour tout couple (x_0, x_d) de \mathbb{R}^n , il existe un temps fini T et une commande u définie sur $[0, T]$, qui amène le système d'un état initial $x(0) = x_0$ vers un état désiré $x(T) = x_d$.*

C.1.1 critère de commandabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la commandabilité des systèmes linéaires due à Kalman.

Théorème C.1. *Le système linéaire (C.1) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité*

$$C = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \tag{C.3}$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

On trouvera les détails et les preuves dans [36].

Dans le cas d'un système linéaire commandable, on cherche à synthétiser des régulateurs qui rendent l'origine asymptotiquement stable. Une façon de procéder est de construire des lois de contrôle par retour d'état.

C.1.2 Stabilisation par retour d'état

On appelle bouclage d'état linéaire ou régulateur linéaire du système (C.1) une loi de commande du type

$$u(t) = -Kx(t) \quad (\text{C.4})$$

où $K_{m \times n}$ est dite matrice des gains de contre-réaction.

Lorsque la valeur de $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$ alors le bouclage est dit statique figure C.1.

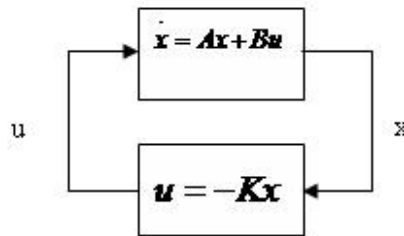


Figure C.1 Stabilisation par retour d'état statique.

La matrice des gains peut être déterminée de plusieurs manières : par exemple par placement de pôles.

Synthèse par placement de pôles Lorsque le système est commandable, le principe de placement de pôles consiste à déterminer une loi de commande $u = -Kx$ telle que :

$\sigma(A - BK) = \sigma_d$, où σ est le spectre de $(A - BK)$ et σ_d est le spectre désiré.

La difficulté de cette approche réside dans la détermination de ce spectre puisqu'il n'existe pas de méthodologie générale et définitive. Toutefois, cette méthode offre la possibilité de placer les pôles en boucle fermée n'importe où dans le demi plan négatif, sans se soucier de l'emplacement des pôles en boucle ouverte, ce qui permet de contrôler le temps de réponse.

Cependant, si les pôles sont placés trop loin dans le demi plan négatif, les valeurs de K seront très grandes et peuvent causer des problèmes de saturation qui peuvent engendrer une instabilité.

Remarque C.1. *La loi de commande u est déterminée en supposant que le vecteur d'état x est disponible, en fait, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, car parfois, certains états ne sont pas accessibles, soit parce que c'est difficile, voire impossible de les mesurer technologiquement ou que cela revient trop cher économiquement. Dans ce cas, on procède à une reconstruction des états manquants.*

Reconstruction d'état Le reconstituteur d'état figure C.2 ou l'observateur est un système permettant de reconstruire les états à partir des grandeurs connues c'est à dire des entrées et des sorties du processus tel que :

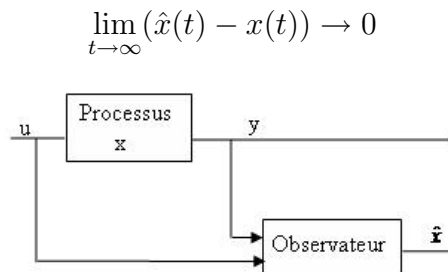


Figure C.2 Reconstituteur d'état

De même cette opération n'est possible que si le système est observable [82] c'est à dire la matrice d'observabilité de Kalman

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Pour les systèmes linéaire, Luenberger, propose la structure d'observateur suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

qui correspond à une simulation de la copie du système constamment corrigée par l'écart entre la sortie observée et la sortie reconstruite.

Si on définit $\tilde{x} = \hat{x} - x$, il vient : $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$

Le problème est de déterminer L de sorte que $(\hat{x}(t) - x(t)) \rightarrow 0$ pour des conditions initiales différentes $\hat{x}(0) \neq x(0)$.

L'analyse est immédiate, on aura $\tilde{x} \rightarrow 0$, si L est déterminée telle que $(A-LC)$ soit stable. On reconnaît un problème dual à celui de la stabilisation. Ainsi, toutes les techniques utilisables pour la commandabilité peuvent être mise en oeuvre pour la reconstruction d'état en remplaçant A par A^t , B par B^t et L par L^t , avec une différence lors du choix du spectre de l'observateur qui doit être plusieurs fois plus rapide que celui de la commande pour assurer la convergence de l'estimation avant l'application de la commande. Cependant, si ce spectre est choisi trop loin dans le demi plan négatif, l'observateur sera très rapide avec une bande passante plus large qui sera sensible aux bruits de mesures.

Stabilisation par retour d'état reconstruit : bouclage dynamique Le schéma de stabilisation par retour d'état reconstruit est donné par la figure C.3 ci dessous :

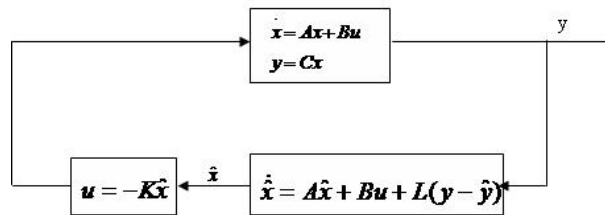


Figure C.3 Stabilisation par retour d'état reconstruit

La stabilité de la loi de commande ainsi élaborée est assurée par le principe de séparation [36] dans le sens que les gains de la commande et de l'observateur sont calculés séparément.

Malheureusement, le principe de séparation n'est plus valable en non linéaire. En effet, on peut avoir le cas où un régulateur et un observateur sont asymptotiquement stables et pourtant la commande par retour d'état reconstruit renvoie les trajectoires à l'infini [171]. Aussi, il est nécessaire de considérer le problème de la commande et de l'observation simultanément.

De plus, ces deux problèmes sont de complexité égale et sont complètement duaux pour les

systèmes linéaire, alors qu'en non linéaire, la commande est nettement plus complexe que l'observation. Cela est dû aussi bien à des contraintes théoriques qu'à des problèmes techniques tels que la saturation de la commande (notamment l'impossibilité d'utiliser des gains trop grands qui "écraseraient" les termes non linéaires de la dynamique dont on connaîtrait peu ou mal l'évolution ou qu'on ne saurait maîtriser autrement); ce que nous ne rencontrons pas en observant ces systèmes car le gain d'observabilité est quelque chose de fictif : une équation différentielle, qui est résolue sur un processeur, souffre moins de la saturation [17].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème de commande sous l'hypothèse que les états sont mesurables, et nous espérons nous investir sur des problèmes d'observation très prochainement.

C.2 Concepts de commandabilité des systèmes non linéaires

Encore une fois, cette notion qui paraît simple et intuitive pour les systèmes linéaires va se compliquer pour les systèmes non linéaires : par exemple, il existe plusieurs définitions en relation avec la commandabilité.

Les premiers résultats de commandabilité pour les systèmes non linéaires sont dûs aux travaux de Sussmann et Jurdjevic [172], à Lobry [99], Hermann et Krener [69], Sussmann [168, 169] et pour une belle présentation, regarder aussi Nijmeijer et Van der Schaft [120].

dans le cas général, un système non linéaire commandé est représenté par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{C.6}$$

où $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et f, h de classe C^∞ .

Définition C.2. Soit U un sous ensemble de M et soient $(x_0, x_d) \in U$. On dit que x_d est U -accessible depuis x_0 ce qu'on note par $x_d A_u x_0$, s'il existe un contrôle u mesuré et borné et un temps fini T , tels que la solution $x(t)$ de (C.6) pour $t \in [0, T]$, satisfait :

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_d \quad \text{et} \quad x \in U \quad \text{pour} \quad t \in [0, T]$$

On note $A(x_0)$ l'ensemble des points de M accessibles depuis x_0

$$A(x_0) = \{x \in M / x A_M x_0\} \quad (\text{C.7})$$

Définition C.3. *Le système (C.6) est commandable en x_0 si $A(x_0) = M$ et il est dit commandable si $A(x_0) = M$ pour tout $x \in M$.*

Lorsqu'un système est commandable en x_0 , il peut être nécessaire de parcourir une distance considérable ou un temps important pour atteindre un point voisin de x_0 . Ceci nous amène à introduire une version locale du concept de commandabilité.

Définition C.4. *Le système (C.6) est dit localement commandable en x_0 , si pour tout voisinage U de x_0 , $A_u(x_0)$ est aussi un voisinage de x_0 , où*

$$A_u(x_0) = \{x \in U / x A_u x_0\} \quad (\text{C.8})$$

Il est dit localement commandable s'il est localement commandable en tout $x \in M$.

On peut affaiblir la notion de commandabilité :

Définition C.5. *Le système est dit faiblement commandable en x_0 , si $W A(x_0) = M$, il est dit faiblement commandable s'il est faiblement commandable en tout $x \in M$.*

Remarque C.2. *$W A_u$ est le plus petit ensemble contenant les paires U -accessibles (c'est à dire $x' W A_u x''$ si et seulement s'il existe x^0, \dots, x^k , telle que $x^0 = x'$, $x^k = x''$ et soit $x^i A_u x^{i-1}$ ou $x^{i-1} A_u x^i$ pour $i = 1, \dots, k$).*

Le concept de faible commandabilité est un concept global qui ne reflète pas le comportement d'un système au voisinage d'un point x_0 , aussi, il est nécessaire d'introduire le concept de commandabilité locale faible

Définition C.6. *Le système (C.6) est dit localement faiblement commandable en x_0 si pour tout voisinage U de x_0 , $W A_u(x_0)$ est un voisinage de x_0 et il est dit localement faiblement commandable s'il l'est en tout $x \in M$.*

Les différentes notions de commandabilité sont liées par le diagramme de la figure C.4.

Comme pour les systèmes linéaires, on peut se demander s'il existe un équivalent de la condition de rang de commandabilité?

En fait, pour les systèmes non linéaires affine en la commande

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{C.9})$$

$$y = h(x)$$

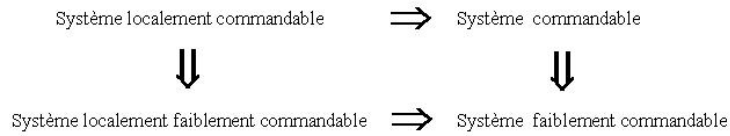


Figure C.4 Relation entre les différents concepts de commandabilité en non linéaire.

la condition de rang est définie comme suit :

Définition C.7. *On dit que le système (C.9) vérifie la condition du rang si la matrice de commandabilité non linéaire*

$$\mathbf{C}_{fg} = [g(x) \quad ad_f g(x) \quad ad_f^2 g(x) \quad \dots \quad ad_f^{n-1} g(x)] \quad (\text{C.10})$$

est de rang n pour tout x .

Théorème C.2. *Si le système (C.9) vérifie la condition du rang alors ce système est localement faiblement commandable.*

Ce théorème met en évidence l'avantage de la faible locale commandabilité par rapport aux précédentes formes de commandabilité puisque la vérification d'un tel concept se réduit à un simple critère algébrique.

ANNEXE

Commande numérique d'un système mécanique sous actionné linéaire : Cas du pendule inversé

Nous proposons dans cette partie, de discrétiser un régulateur linéaire calculé par l'approche placement de pôles et dont le retour d'état est reconstruit dans le but de déterminer la commande numérique directement implémentable pour la stabilisation d'un système mécanique sous actionné. La dite procédure sera illustrée par l'exemple du pendule inversé [34].

D.1 Modèle du pendule inversé

L'une des applications classiques de la théorie de contrôle est celle du pendule inversé représenté par la figure D.1. Ce système est constitué d'un chariot pouvant se déplacer en avant et en arrière sur une surface plane, sur ce chariot, une tige est connectée à travers une charnière formant ainsi le pendule, le tout est piloté par un moteur électrique à courant continu à aimant permanent.

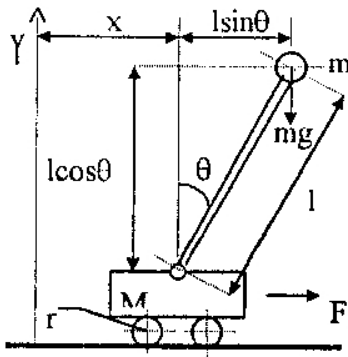


Figure D.1 Représentation du système pendule inversé.

L'objectif de contrôle de ce système est de stabiliser le mouvement du chariot et celui du pendule par la seule action du moteur sur le chariot, ce qui place ce système dans la famille des systèmes mécaniques sous actionnés.

Le modèle mathématique du pendule inversé, lorsque les frottements sont négligés [28], est donné par :

$$\begin{aligned} ml\cos\theta\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta &= 0 \\ (M + m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 &= F \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Clairement, le modèle obtenu est non linéaire, de plus, les équations sont fortement couplées.

D.2 Linéarisation du système pendule inversé

Dans la pratique, nous sommes souvent contraints à simplifier ou à idéaliser les propriétés réelles d'un système, et à ne tenir compte que des éléments de base nous permettant d'analyser ce système d'une manière plus ou moins facile. Un système linéaire n'est donc qu'un modèle simplifié d'un système non linéaire dont on néglige les effets non linéaire. Par conséquent, pour obtenir un modèle linéaire du pendule, nous supposerons que ce dernier n'oscille qu'autour de la position verticale, ainsi, nous pouvons considérer que θ et $\dot{\theta}$ restent faibles tels que :

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \\ \theta\dot{\theta} &\approx 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas le système (D.1) peut être linéarisé en :

$$\begin{aligned} ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mg\theta &= 0 \\ (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= F \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La force extérieure F peut être exprimée directement en fonction de la tension appliquée au moteur par la relation :

$$F = \frac{K_1}{Rar}e - \frac{K_1K_2}{Rar^2}\dot{x}$$

avec

Paramètre	Description	Valeur
M	masse du chariot	0.785 Kg
m	masse du pendule	0.130 Kg
l	longueur de la tige	0.96 m
g	accélération due à la gravité	9.81 m / s ²
I	inertie de la tige	0.01 Kg.m ²
K ₁	constante de couple du moteur DC	0.25916 N.m
K ₂	rapport vitesse tension du moteur DC	0.003409 V / rad / A
R _a	résistance d'armature du moteur DC	6 Ω
r	diamètre de la roue du chariot	0.01 m
Fv ₁	coefficient de frottement visqueux du pendule	0.013 N / rad / s
Fv ₂	coefficient de frottement visqueux du chariot	0.07 N / m / s
Fs ₁	coefficient de frottement sec du pendule	0.01N
Fs ₂	coefficient de frottement sec du chariot	0.5 N

Figure D.2 Paramètres du système pendule inversé.

La représentation d'état $X = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})^t$, $y = (x, \theta)^t$, $u = e$, associée à ce système compte tenu des caractéristiques du moteur à courant continu est donnée par le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{K_1 K_2}{MR_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{M+m}{Ml} g & \frac{K_1 K_2}{MlR_a r^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{MR_a r} \\ \frac{K_1}{MlR_a r} \end{bmatrix} u \quad (\text{D.3})$$

L'étude de la stabilité du système linéarisé (D.3) à travers le calcul de l'ensemble de ses valeurs propres va nous renseigner sur la stabilité locale du système non linéaire (D.1).

En fait, cet ensemble $\sigma = \{0; 3.3623; 63.6953; 61.5427\}$ calculé pour le système linéarisé autour de l'origine confirme l'intuition que ce système est instable en boucle ouverte à la position verticale, par conséquent, la détermination d'une commande est nécessaire pour atteindre les objectifs de commande.

D.3 Commande linéaire du pendule inversé

Il s'agit de synthétiser un régulateur linéaire de façon à ce que si une impulsion est appliquée à l'entrée du système, le pendule oscillera, mais doit retrouver sa position verticale en un temps raisonnable.

Une manière de procéder est de déterminer une loi de commande du type $u = -Kx$ où x est

le vecteur d'état supposé connu et K est le gain du régulateur.

Une condition nécessaire pour trouver ce gain est que le système doit présenter la propriété de commandabilité [82], une fois cette condition vérifiée, le gain K peut être déterminé de plusieurs manières, par exemple par placement de pôles (voir annexe C).

Après vérification de la commandabilité et de l'observabilité du pendule inversé, l'application d'une loi de commande calculée à partir de l'approche placement de pôles et dont les états sont reconstruits conduit aux résultats de simulations suivants figure D.3 :

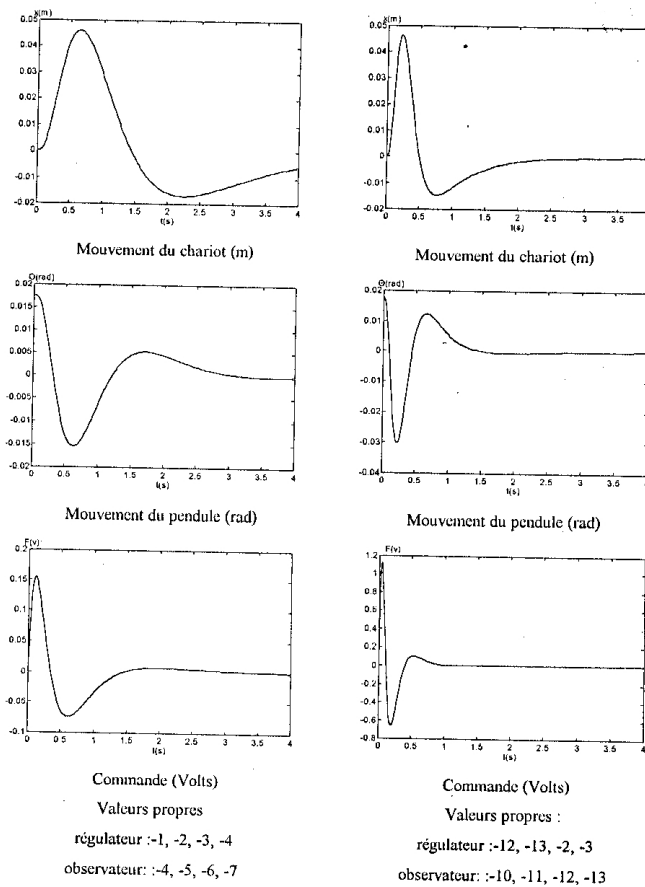


Figure D.3 Commande par placement de pôles

Le choix des spectres désirés est fait au début de manière heuristique ensuite ce choix est raffiné par des essais erreurs dans le but d'améliorer les performances.

En vue d'une réalisation pratique, et pour pouvoir implémenter la commande élaborée, il est nécessaire de procéder à sa discrétisation.

D.4 Commande numérique

Les processus considérés dans le cadre de la commande sont, le plus souvent, des processus à temps continu. La commande numérique s'effectue nécessairement en temps discret. Il s'en suit que pour faire la synthèse des commandes numériques deux voies sont possibles [40] :

1. concevoir un régulateur idéal, à temps continu, puis trouver un ensemble $\{\text{CAN, régulateur discret, CNA}\}$ qui lui soit équivalent
2. déterminer le système discret équivalent à l'ensemble $\{\text{CDA, processus, CAD}\}$ et concevoir directement un régulateur discret.

La première approche aura la préférence des habitués des régulations analogiques, et qui veulent convertir des solutions analogiques déjà éprouvées en technologie numérique, de plus, la période d'échantillonnage n'est choisie qu'une fois le régulateur continu est calculé [96]. Malheureusement, les schémas de discrétisations des contrôleurs continus sont approximatifs et ceci pour deux raisons :

1. le signal continu par morceaux issu du bloqueur ne peut reproduire exactement le signal idéal $u(t)$,
2. le signal idéal dépend des valeurs prises à tout instant alors que le régulateur numérique ne le connaît qu'aux instants d'échantillonnage qui rythme l'acquisition des mesures et la génération des signaux de commande [42].

Néanmoins, si la fréquence d'échantillonnage est grande vis à vis du spectre des signaux d'entrée-sortie, on obtiendra une bonne approximation du régulateur continu par un régulateur discret.

Il s'en suit que la période d'échantillonnage T_e est un paramètre de synthèse pour le problème de discrétisation. Il est clair qu'un grand T_e appauvrit les performances, on parle alors de sous échantillonnage. Inversement, plus T_e est petit, plus on donne de liberté au signal de commande (en réduisant la période de blocage) et plus on augmente la quantité d'informations recueillie lors de l'échantillonnage, ainsi, on se rapproche d'une commande à temps

continu à condition bien sûr que T_e ne descend pas jusqu'aux valeurs infinitésimales où intervient la précision de la machine, de plus, T_e est limité par le temps de calcul de la commande.

D.4.1 Sélection de la période d'échantillonnage

Une première appréciation de ce temps T_e est donnée par le théorème de Shannon [100] par la relation $f_e > 2f_0$, $[-f_0, f_0]$ étant l'intervalle de fréquence où est défini le signal.

Cette relation est valable sous l'hypothèse que le signal est nul en dehors de cet intervalle, en fait, le signal devant être échantillonné, est souvent contaminé par des perturbations de fréquence élevée, il est alors conseillé de placer un filtre anti repliment avant de procéder à l'échantillonnage.

Or, aucun signal physique n'est à bande limitée, de plus, un filtre anti repliment passe bas parfait est irréalisable, par conséquent, l'hypothèse du théorème de Shannon ne peut pas être remplie et une valeur de f_e nettement plus élevée que $2f_0$ est nécessaire en régulation numérique.

Dans la pratique, une fréquence valant 2 à 5 fois la limite fixée par le théorème de Shannon est souvent sélectionnée, impliquant : $f_e = 5$ à $10f_0$

Remarque D.1. *Dans quelques domaines courants, il est possible de profiter d'une vaste expérience pour choisir correctement la période d'échantillonnage par exemple pour un processus mécanique rapide T_e est choisie 1 à 5 ms, par contre pour un processus lent tel que la régulation de température, T_e est de l'ordre de 10 à 45 s.*

Dans le domaine de l'automatique, il est conseillé de choisir une période d'échantillonnage égale au un cinquième de la constante de temps la plus rapide de la boucle fermée [96].

D.4.2 Discrétisation du régulateur linéaire

Pour appliquer une commande digitale au pendule, nous avons adopté l'approche de discrétisation du régulateur continu. Ce régulateur dont le retour d'état est reconstruit est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

ou encore par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK + LC)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Le schéma de la régulation continu du pendule est donné par la figure D.4

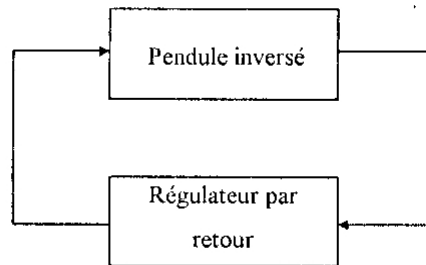


Figure D.4 Schéma de la régulation continu

Après discrétisation ce schéma devient figure D.5

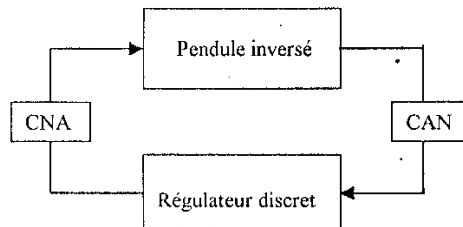


Figure D.5 Schéma de la régulation numérique

La fonction "c2dm" de Matlab qui convertit un système continu en un système discret nous a permis de discrétiser notre contrôleur continu, cette fonction utilise un ZOH (zero order holder) à l'entrée. Le système obtenu sera de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d y_k \\ u_k = -C_k \hat{x}_k \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

D.4.3 Résultats de simulation

Pour la commande continu, nous avons choisi plusieurs spectres désirés permettant de stabiliser les mouvements du chariot et du pendule, nous avons remarqué que lorsque ce

spectre est placé loin de l'axe imaginaire, le temps de réponse diminue mais cela se paye par un effort de commande plus important. Le spectre $\{-12, -13, -2, -3\}$, nous a permis de trouver un compromis entre ces deux performances.

Quant à la commande numérique, et en gardant ce même spectre, la sélection de la période d'échantillonnage se fera en un premier temps par le théorème de Shannon soit par $T_{e1} = \frac{1}{2*13} = 0.0385$ secondes, ensuite, nous pouvons améliorer ce choix soit par simulation ou en se basant sur relation de Lewis dans [96], soit par $T_{e2} = \frac{1}{5*13} = 0.0154$ secondes.

L'application de ces temps nous donne les résultats de simulation suivant figure D.6

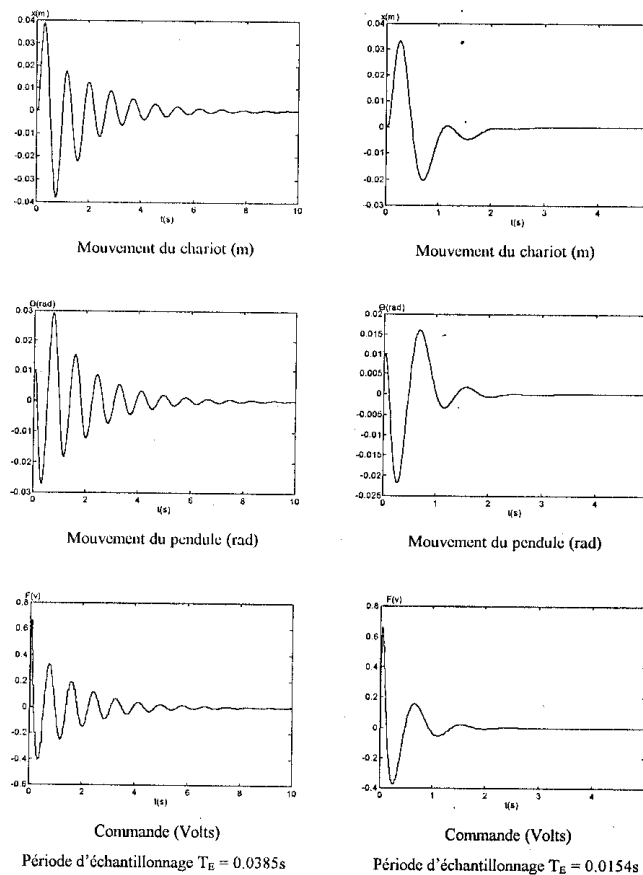


Figure D.6 Commande numérique du pendule inversé

Les commandes correspondantes aux deux périodes d'échantillonnage permettent la stabilisation des mouvements du chariot et du pendule. Toutefois, les courbes sont d'allures différentes du fait que T_{e1} est trop grand par rapport à la dynamique du système et implique des trajectoires plus oscillantes et un temps de réponse plus important pour un même effort de commande comparé aux résultats obtenus avec T_{e2} . De plus, la différence entre T_{e1} et T_{e2}

fait que le système est commandé à des instants différents et donc réagit différemment.

Nous remarquons aussi, que l'avantage de choisir une faible période d'échantillonnage en l'occurrence T_{e_2} permet d'atténuer l'effet "escalier" et de se rapprocher de l'aspect continu.

D.5 Conclusion

Nous avons mis au point un régulateur linéaire avec retour d'état estimé permettant de stabiliser les trajectoires du chariot et du pendule du système sous actionné pendule inversé, et ce en un temps raisonnable.

La détermination des gains de commande et d'observation est fait par l'approche placement de pôles. Un premier choix des paramètres de synthèse est fait en tenant compte des performances désirées, ensuite ce choix est raffiné en fonction des essais de simulations.

Dans le but de pouvoir implémenter numériquement cette commande au pendule, nous avons procédé à une discrétisation de la loi de commande obtenue et les résultats de simulation de l'application de la commande numérique sont satisfaisants.

Par ailleurs, il est clair que les régulateurs linéaires continu et discret ainsi élaborés ne peuvent stabiliser le pendule que pour des angles de déviation assez petits (autour de 11°), au delà de ces valeurs, les effets non linéaires commencent à se faire sentir, il s'en suit que pour stabiliser le système pour de plus grands angles, il est nécessaire de considérer le modèle non linéaire.

Bibliographie

- [1] L. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman et R. Iriarte. "Output excitation via continuous sliding modes to generate periodic motion in underactuated systems". In *45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1629–1634, USA, 2006.
- [2] N. P. Aneke. "*Control of underactuated mechanical systems*". PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2003.
- [3] D. V. Anosov. "On stability of equilibrium points of relay systems". *Automation and remote control*, 2 :135–149, 1959.
- [4] P. J. Antsaklis et A.N. Michel. *Linear systems*. McGraw Hill, 1997.
- [5] K. J. Astrom et K. Furuta. "Swinging up a pendulum by energy control". *Automatica*, 36 :287–295, 2000.
- [6] J-P. Aubin et H. Frankowska. *set-valued analysis*. Birkhauser, 1990.
- [7] P. Baranyi et P.L. Varkonyi. "Exact tensor product distributed compensation based stabilization of the tora system". In *on Dynamical systems and Control WSEAS Int*, pages 38–43, Italy, 2005.
- [8] J. P. Barbot. "Systèmes à structure variable". Technical report, École Nationale Supérieure d'Electronique et de ses applications ENSEA France, 2009.
- [9] N. Bedrossian. "Approximate feedback linearisation : the cart pole example". In *IEEE International Conference on robotics and automation*, pages 1987–1992, 1992.
- [10] I. Belgacem. "Automates hybrides Zénon : exécution-simulation". Magister à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen Algérie, 2009.
- [11] M. Bennani et P. Rouchon. "Robust stabilization of flat and chained systems". In *European Control Conference*, pages 1781–1786, 1995.
- [12] B. Benyahia, A. Choukchou Braham et B. Cherki. "Commande h_∞ par loopshaping pour une régulation de débit". In *cinquième Conférence sur le Génie Électrique CGE'05*, avril 2007.
- [13] B. Benyahia, A. Choukchou Braham et B. Cherki. "Robust control of an uncertain physical process". In *1st Conference on intelligent systems and automation CISA'08*, pages 74–79. American Institute of Physics AIP, Juin 2008.
- [14] A. M. Bloch et J. Baillieul. *Nonholonomic mechanics and control*. Springer, 2003.
- [15] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu et N. H. McClamroch. "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 37(11) :1746–1757, 1992.
- [16] S. Bortoff et M. W. Spong. "Pseudolinearization of the acrobot using spline functions". In *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*, pages 593–598, Tuscan, 1992.

- [17] T. Boukhobza. "Contribution aux formes d'observabilité pour les observateurs à modes glissants". PhD thesis, Université de Paris Sud Centre d'Orsay France, 1997.
- [18] M. S. Branicky. "Stability of switched and hybrid systems". In *33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3498–3503, USA, 1994.
- [19] M. S. Branicky. "Studies in hybrid systems : Modeling, analysis, and control". PhD thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [20] M. S. Branicky. "Stability of hybrid systems : state of the art". In *36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 120–125, USA, 1997.
- [21] M. S. Branicky. "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 43(4) :475–482, APRIL 1998.
- [22] R. W. Brockett. *Asymptotic stability and feedback stabilization*. Birkhauser, 1983.
- [23] K. Busawon. "Lecture notes in control systems engineering". Technical report, Northumbria University Newcastle United Kingdom.
- [24] S. Canudas et G. Bastin. *Theory of robot control*. Springer-Verlag, 1996.
- [25] A. Chemori. "Quelques contributions la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous actionnés". PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble France, 2005.
- [26] G. Chesi et Y. S. Hung. "Robust commutation time for switching polynomial systems". In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, USA, 2007.
- [27] C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. Abba et Y. Aoustin. *Les robots marcheurs bipèdes Modélisation, Conception, synthèse de la marche, commande*. Hermes Lavoisier, 2007.
- [28] A. Choukchou Braham. "Stabilisation des systèmes Lagrangiens : pendule inversé". Magister à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen Algérie, 1998.
- [29] A. Choukchou Braham, B. Cherki et M. Djemai. "A backstepping procedure for a class of underactuated system with tree structure". In *IEEE International Conference on Communications, Computing and Control Applications, CCCA'11*. Hypersciences, Mars 2011.
- [30] A. Choukchou Braham, B. Cherki et M. Djemai. "Stabilisation of a class of underactuated system with tree structure by backstepping approach". *soumis à Applied Mathematical Letter Elsevier*, 2011.
- [31] A. Choukchou Braham, C. Bensalah et B. Cherki. "Stabilization of an under-actuated mechanical system by sliding control". In *1st Conference on intelligent systems and automation CISA'09*, pages 80–84. American Institute of Physics AIP, Juin 2008.
- [32] A. Choukchou Braham et B. Cherki. "An extension to backstepping control for a class of underactuated mechanical system in tree structure". In *2st Conference on intelligent systems and automation CISA'09*, pages 120–125. American Institute of Physics AIP, Mars 2009.
- [33] A. Choukchou Braham et B. Cherki. "A new control scheme for a class of underactuated systems". *accepté dans The Mediterranean Journal of Measurement and Control*, 2011.
- [34] A. Choukchou Braham et B. Cherki. "Commande numérique d'un système mécanique sous actionné linéaire : Cas du pendule inversé". In *à soumettre*, 2011.

- [35] J. M. Coron et B. d Andréa-Novel. "Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems". In *Dans IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp, (NOLCOS)*, pages 413–418, 1992.
- [36] B. D'Andréa-Novel et M. C. de Lara. *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Les presses de lécole des Mines, 2000.
- [37] H. Dang-Vu et C. Delcarte. *Bifurcation et chaos*. Ellipses édition, 2000.
- [38] A. De Luca. "Dynamic control of robots with joint elasticity". In *31st IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 152 – 158, 1988.
- [39] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson et B. Lennartson. "Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems". In *Proc. IEEE*, volume 88, pages 1069–1082, 2000.
- [40] P. Delarminat. *Automatique*. École centrale de Nantes, 1993.
- [41] W. E. Dixon, A. Behal, D. Dawson et S. Nagarkatti. *Nonlinear control of engineering systems*. Birkhauser, 2003.
- [42] M. Djemai. "Cours d'automatique linéaire échantillonné". Technical report, École Nationale Supérieure d'Electronique et de ses applications ENSEA France, 2008.
- [43] O. Egeland, M. Dalsmo et O. Sordalen. "Feedback control of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration". *International Journal of Robotics Research*, 15.
- [44] S. V. Emel'yanov. *Variable structure control systems*. Nauka, 1967.
- [45] F. Fahimi. "Sliding mode formation control for underactuated surface vessels". *IEEE Transaction on robotics*, 23(6) :617–6221, June.
- [46] Y. Fang, W. E. Dixon, D. M. Dawson et E. Zergeroglu. "Nonlinear coupling control laws for an underactuated overhead crane system". *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 8(3) :418 – 423, September 2003.
- [47] I. Fantoni et R. Lozano. *Non linear control for underactuated mechanical systems*. Springer, 2002.
- [48] R. Fierro, F. L. Lewis et A. Low. "Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 29(6) :649–654, November.
- [49] A. G. Fillipov. *Differential equations with discontinuous right hanf-sides. Mathematics and its applications*. Kluwer, 1983.
- [50] J. M. Flaus. *Stabilité des systèmes dynamiques hybrides*. Hermes, 2001.
- [51] T. Floquet. "*Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*". PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille France, 2000.
- [52] A. L. Frafkov, I. A. Makarov, A. Shiriaev et O. P. Tomchina. "Control of oscillations in hamiltonian systems". In *European control conference*, Brussels, 1997.
- [53] G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, 2002.
- [54] L. Fridman et A. Levant. *Slinding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory*. Springer-Verlag, 1996.
- [55] G. O. Gantmacher. *Lectures in analytical mechanics*. Mir, 1970.
- [56] J. Ghommam. "*Commande non linéaire et navigation des véhicules marins sous actionnés*". PhD thesis, Université d'Orléans France, 2008.

- [57] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [58] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [59] R. D. Gregg et M. W. Spong. "Reduction-based control with application to three-dimensional bipedal walking robots". In *American Control Conference*, pages 880 – 887, USA, June.
- [60] F. Gronard, R. Sepulchre et G. Bastin. "Slow control for global stabilization of feed-forward systems with exponentially unstable jacobian linearisation". In *37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1452 – 1457, 1998.
- [61] L. Gurvits, R. Shorten et O. Mason. "On the stability of switched positive linear systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 52 :1099–1103, 2007.
- [62] T. Han, S. Sam Ge et T. Heng Lee. "Uniform adaptive neural control for switched underactuated systems". In *IEEE International Symposium on intelligent control*, pages 1103–1108, San Antonio, September.
- [63] G. Hancke et A. Szeghegyi. "Nonlinear control via tp model transformation : the tora system example". In *Symposium on Applied Machine Intelligence*, Slovakia, 2004.
- [64] J. Hauser. "Nonlinear control via uniform system approximation". *Systems and Control Letters*, 17 :145–154, 1991.
- [65] J. Hauser, S. Sastry et G. Meyer. "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems". *Automatica*, 28 :665–679, 1992.
- [66] J. Hauser, S. Sastry et P. Kokotović. "Nonlinear control via approximate input-output linearization". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 37(3) :392 – 398, 1992.
- [67] B. Heck. "Sliding mode control for singularly perturbed systems". *International Journal of Control*, 53(4), 1991.
- [68] T. Henmi, M. Deng et A. Inoue. "Swing-up control of the Acrobot using a new partial linearization controller based on the lyapunov theorem". In *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, pages 60 – 65, 2006.
- [69] R. Hermann et A. J. Krener. "Nonlinear controllability and observability". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 22 :728–740, 1977.
- [70] J. K. Holm et M. W. Spong. "Kinetic energy shaping for gait regulation of underactuated bipeds". In *17th IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1232 – 1238, San Antonio, September.
- [71] G. Hu, C. Makkar et W. E. Dixon. "Energy-based nonlinear control of underactuated eulerlagrange systems subject to impacts". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 52(9) :1742 – 1748, September 2007.
- [72] J. Huang et G. Hu. "Control design for the nonlinear benchmark problem via the output regulation method". *Journal of Control Theory and Applications*, 2 :11–19, 2004.
- [73] L. Hung, H. Lin et H. Chung. "Design of self tuning fuzzy sliding mode control for tora system". *Journal of Expert systems with applications*, 32(1) :201–212, 2007.
- [74] L. R. Hunt, R. Su et G. Meyer Gurvits, R. Shorten et O. Mason. "Global transformations of nonlinear systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 28(1) :24 – 31, 1983.
- [75] Y. Igarashi, T. Hatanaka, M. Fujita et M. W. Spong. "Passivity-based output synchronization in $se(3)$ ". In *American Control Conference*, pages 723 – 728, USA, June.

- [76] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer, 1995.
- [77] B. Jakubezyk et W. Respondek. "On linearisation of control systems". *Bulletin de l'academie Polonaise des sciences*, 28(9) :517–522, 1980.
- [78] M. Jankovic, D. Fontaine et P. V. Kokotovic. "Tora example : Cascade and passivity-based control designs". *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 4(3) :292 – 297, 1996.
- [79] E. Jarzebowska. "Stabilizability and motion tracking conditions for mechanical non-holonomic control systems". *Mathematical problems in engineering*, 2007.
- [80] Z. P. Jiang et I. Kanellakopoulos. "Global output feedback tracking for a benchmark nonlinear system". In *31st IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 4802–4807, USA, 1999.
- [81] J. Jouffroy. "*Stabilité et systèmes non linéaire : Réflexion sur l'analyse de contraction*". PhD thesis, Université de Savoie France, 2002.
- [82] T. Kailath. *Linear systems*. Prentice Hall, 1981.
- [83] W. Kang. "Approximate linearisation of nonlinear control systems". In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2766–1771, 1993.
- [84] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2002.
- [85] P. Kokotović. "The joy of feedback : Nonlinear and adaptive". *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3) :7 – 17, 1992.
- [86] O. Kolesnichenko, A.S. Shiriaev. "Partial stabilization of underactuated euler.lagrange systems via a class of feedback transformations". *Systems and Control Letters*, 45(2) :121132, 2002.
- [87] I. Kolmanovsky et N.H. Mcclamroch. "Developments in nonholonomic control problems". *Control Systems Magazine*, 15(6) :20 – 36, 1995.
- [88] A. J. Krener. "Approximate linearisation by state feedback and coordinate change". *Systems and Control Letters*, 5 :181–185, 1984.
- [89] A. J. Krener, M. Hubbard, S. Karaban, et B. Maag. *Poincaré's linearisation method applied to the design of nonlinear compensators*. Springer-Verlag, 1991.
- [90] M. Kristić et P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, 1995.
- [91] H. Kwakernak et R. Sivan. *Linear optimal control systems*. Library of congress, 1972.
- [92] H. G. Kwatny, G. L. Blankenship. *Nonlinear control and analytical mechanics : a computational approach*. Birkhauser, 2000.
- [93] F. Lamnabhi-Lagarrique et P. Rouchon. *Commandes non linéaires*. Lavoisier, 2003.
- [94] M. Latfaoui. "Linéaisation approximative par feedback". Magister à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen Algérie, 2002.
- [95] J. Lévine. "Analyse et commande des systèmes non linéaires". Technical report, École des Mines de Paris France, 2004.
- [96] F. Lewis. *Applied optimal control , estimation digital design, implementation*. Prentice hall, 1992.
- [97] D. Liberzon et A. S. Morse. "Basic problems in stability and design of switched systems". *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5) :59–70, 1999.
- [98] C. Lin. "Robust adaptive critic control of nonlinear systems using fuzzy basis function network : an lmi approach". *journal of Information Sciences*, pages 4934–4946, 2007.

- [99] C. Lobry. *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*. CNRS, 1981.
- [100] R. Longchamp. *Commande numérique des systèmes dynamiques*. Presse polytechniques et universitaires romandes, 1995.
- [101] D.G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. Wiley and Sons, 1979.
- [102] A. D. Mahindrakar et R. N. Banavar. "Swining up of the acrobot based on a simple pendulum strategy". *International Journal of Control*, 78(6) :424429, April 2005.
- [103] N. Manamanni. "Aperçu rapide sur les systèmes hybrides continus". Technical report, Université de Reims France, 2007.
- [104] M. Margaliot et M. S. Branicky. "Nice reachability for planar bilinear control systems with applications to planar linear switched systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, May 2008.
- [105] S. Martinez, J. Cortés et F. Bullo. "Analysis and design of oscillatory control systems". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(7) :1164 – 1177, 2003.
- [106] O. Mason et R. Shorten. "A conjecture on the existence of common quadratic lyapunov functions for positive linear systems". In *American Control Conference*, pages 4469 – 4470, USA, 2003.
- [107] S. Mastellone, D. M. Stipanović et M. W. Spong. "Stability and convergence for systems with switching equilibria". In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4013 – 4020, USA, 2007.
- [108] N. H. McClamroch et I. Kolmakovsky. "A hybrid switched mode control for V/STOL flight control problems". In *IEEE Conference on Decision and Control and the European Control conference*, pages 2648–2653, 1996.
- [109] R. T. M'Closkey et R. M. Murray. "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 42(5) :614628, 1997.
- [110] J. Meisel. *Principles of electromechanical energy conversion*. John Wiley and son, 1959.
- [111] M. Messirdi et A. Khaldi. "Commande systèmes mécaniques sous actionnés par approche passive : pendule inversé". Projet de fin d'étude à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen Algérie, 2005.
- [112] A. N. Michel et L. Hou. "Stability results involving time-averaged lyapunov function derivatives". *Nonlinear Analysis : Hybrid systems*, 3(1) :51–64, 2009.
- [113] A. N. Michel, L. Hou et D. Liu. *Stability of dynamical systems*. Birkhauser, 2008.
- [114] P. Morin et C. Samson. "Time-varying exponential stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls". In *34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3988–3993.
- [115] P. Morin, J. B. Pomet. et C. Samson. "Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of lie brackets in closed-loop". *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38 :2249, 1997.
- [116] R. M. Murray et S. Sastry. "Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 38(5) :700–716, 1993.
- [117] Y. Nakamura, W. Yoshihiko et O.J. Sordalen. "Design and control of the nonholonomic manipulator". *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 17(1) :48 – 59, 2001.
- [118] S. Nazrulla et H. K. Khalil. "A novel nonlinear output feedback control applied to the tora benchmark system". In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3565–3570, Mexico, 2008.

- [119] J. I. Neimark et F. A. Fufaev. *Dynamics of nonholonomic systems*. AMS, 1972.
- [120] H. Nijmeijer et A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [121] K. Ogata. *Modern control engineering*. Prentice Hall, 1997.
- [122] M. Oishi et C. Tomlin. "Switching in nonminimum phase systems : Application to a VSTOL aircraft". In *American Control Conference*, pages 487 – 491, 2000.
- [123] R. Olfati Saber. "*Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*". PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Departement Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
- [124] J. P. Oliver et O. A. Ramirez. "Control based on swing up and balancing scheme for an underactuated system, with gravity and friction compensator". In *IEEE Fourth Congress of Electronics, Robotics and Automotive Mechanics*, pages 603–607, 2007.
- [125] G. Oriolo et Y. Nakamura. "Control of mechanical systems with second order nonholonomic constraints : Underactuated manipulators". In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2398 – 2403, 1991.
- [126] R. Ortega, A. Loria, P. Nicklasson, et H. Sira-Ramirez. *Passivity-based control of EulerLagrange systems*. Springer, 1998.
- [127] P. Peleties. "*Modeling and design of interacting continuous-time/discrete event systems*". PhD thesis, Electrical Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN, 1992.
- [128] P. Peleties et R. A. DeCarlo. "Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions". In *American Control Conference*, page 16791684, USA, 1991.
- [129] Y. Peng, J. Han et Q. Song. "Tracking control of underactuated surface ships : using unscented kalman filter to estimate the uncertain parameters". In *International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 1884 – 1889, 2007.
- [130] W. Perruquetti et J. P. Barbot. *Sliding mode control in engineering*. Taylor and Francis, 2002.
- [131] K. Pettersen et H. Nijmeijer. "Tracking control of an underactuated surface vessel". In *37th Conference on Decision and Control*, pages 4561 – 4566, 1998.
- [132] K. Pettersen et O. Egeland. "Robust control of an underactuated surface vessel with thruster dynamics". In *American Control Conference*, pages 3411 – 3415.
- [133] K. Pettersen et O. Egeland. "Position and attitude control of an underactuated autonomous underwater vehicle". In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 987–991, 1995.
- [134] J. B. Pomet. "Dexplicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift". *Systems and Control Letters*, 18 :467473, 1992.
- [135] V. M. Popov. "Absolute stability of nonlinear control systems of automatic control". *Automation and Remote Control*, 22 :857–875, 1962.
- [136] N. Qaiser, A. hussain, N. Iqbal et N. Qaiser. "Dynamic surface control for stabilization of the oscillationg eccentric rotor". In *IMEchE Part Systems and Control Engineering*, pages 311–319, 2007.
- [137] S. A. Raka. "Systèmes mécaniques sous actionnés : classification, propriétés et contrôle". Magister à l'Université Aboubekr Belkaid Tlemcen Algérie, 2007.
- [138] M. Reyhanoglu, A. Van der Schaft, N. H. McClamroch et I. Kolmanovsky. "Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems". *IEEE Transaction on Antomatic Control*, 44(9) :1663–1671, 1999.

- [139] M. Reyhanoglu et A. Bommer. "Tracking control of an underactuated autonomous surface vessel using switched feedback". pages 3833 – 3838, 2006.
- [140] M. Reyhanoglu, S. Cho, N. H. McClamroch et I. Kolmanovskiy. "Discontinuous feedback control of a planar rigid body with an unactuated internal degree of freedom". In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 433–438, 1998.
- [141] J. P. Richard. *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*. Lavoisier, 2002.
- [142] H. Saadaoui. "Contribution à la synthèse d'observateurs non linéaires pour des classes de systèmes dynamiques hybrides". PhD thesis, Université de Cergy Pontoise France, 2007.
- [143] C. Samson et K. Ait-Abderrahim. "Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space". In *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, page 11361141, 1991.
- [144] E. E. Sandoz, P. V. Kokotović et J. P. Hespanha. "Trackability filtering for underactuated systems". In *American Control Conference*, pages 1758 – 1763, 2008.
- [145] R. G. Sanfelice, A. R. Teel et R. Sepulchre. "A hybrid systems approach to trajectory tracking control for juggling systems". In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5282 – 5287, USA, 2007.
- [146] T. Sari et Claude Lobry. *Contrôle non linéaire et applications*. Hermann, 2005.
- [147] S. S. Sastry. *Nonlinear systems : Analysis, Stability and Control*. Springer, 1999.
- [148] R. Sepulchre. "Slow peaking and low-gain designs for global stabilization of nonlinear systems". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(3) :453 – 461, 1999.
- [149] R. Sepulchre, M. Janković et P. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [150] D. Seto, A. M. Annaswamy et J. Baillieul. "Adaptative control of a class of nonlinear systems with a triangular structure". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 39(7) :1411–1428, 1994.
- [151] D. Seto et J. Baillieul. "Control problems in super articulated mechanical systems". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39(12) :2442–2453, December 1994.
- [152] C. Shen, Q. Wei et F. Shumin. "On exponential stability of switched systems with delay : multiple lyapunov functions approach". In *Chinese Control Conference*, pages 664 – 668, China, 2007.
- [153] H. Sira Ramirez. "Sliding regimes in general nonlinear systems : a relative degree approach". *International Journal of Control*, 50(4) :1487–1506, 1989.
- [154] J. Slotine et W. Li. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, 1993.
- [155] E. D. Sontag et Y. Wang. "On characterizations of the input-to-state stability property". *Systems and Control Letters*, 24 :351–359, 1995.
- [156] O. Sordalen et O. Egeland. "Exponential stabilization of chained nonholonomic systems". *IEEE Transaction Automatic Control*, 40(1) :3549, 2001.
- [157] M. W. Spong. "Energy based control of a class of underactuated mechanical systems". In *IFAC World Congress*, pages 431–435, July 1996.
- [158] M. W. Spong. *Underactuated mechanical systems*. Springer-Verlag, 1997.
- [159] M. W. Spong et D. J. Block. "The Pendubot : a mechatronic system for control research and education". In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, December 1995.

- [160] M. Spong et F. Bullo. "Controlled symmetries and passive walking". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 50(7) :1025 – 1031, July.
- [161] M. W. Spong et M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and son, 1989.
- [162] M. W. Spong, P. Corke et R. Lozano. "Nonlinear control of the inertia wheel pendulum". *Automatica*, 37 :1845–1851, September 1999.
- [163] S. K. Spurgeon et C. Edwards. *Sliding mode control : Theory and applications*. Taylor and Francis, 1983.
- [164] C. Y. Su et Y. Stepanenko. "Sliding mode control of nonholonomic systems : Underactuated manipulator case". In *IFAC Nonlinear Control Systems*, pages 609–613.
- [165] T. Sugie et K. Fujimoto. "Control of inverted pendulum systems based on approximate linearisation ". In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1647–1649, 1994.
- [166] Z. Sun et S. S. Ge. "Analysis and synthesis of switched linear control systems". *Automatica*, 41 :181–195, 2005.
- [167] Z. Sun et S.S. Ge. *Switched linear systems*. Springer, 2005.
- [168] H. J. Sussmann. *Lie brackets real analyticity and geometric control*. Birkhauser, 1983.
- [169] H. J. Sussmann. "A general theorem on local controllability". *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(1) :158–194, 1987.
- [170] H. J. Sussmann. "Limitations on stabilizability of globally minimum phase systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 35(1) :117 – 119, 1990.
- [171] H. J. Sussmann et P. Kokotović. "The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 36(4) :424 – 440, 1991.
- [172] H. J. Sussmann et V. Jurdjevic. "Controllability of nonlinear systems ". *Journal of differential equations*, 12(2) : :95116, 1991.
- [173] A. R. Teel. "Saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems". In *IFAC NOLCOS'92 Symposium*, page 369374, 1992.
- [174] A. R. Teel et L Praly. "Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback". *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 33(5) :1443–1488, 1995.
- [175] C. J. Tomlin et S. S. Sastry. "Switching through singularities". In *36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1–6, 1997.
- [176] C. J. Tomlin, J. Lygeros et S. Sastry. *Introduction to Dynamic Systems*. Springer-Verlag, 2003.
- [177] Y. Z. Tzypkin. *Theory of control of relay systems*. Gostekhizdat, 1955.
- [178] V. I. Utkin. "Variable structure systems with sliding mode". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 22(2) :212 – 222, 1977.
- [179] V. I. Utkin. *Sliding modes in control optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [180] A. van der Schaft et H. Schumacher. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. Springer, 2002.
- [181] A. van der Shaft. *L₂ gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 2000.
- [182] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, 1993.

- [183] D. A. Voytsekhovskiy et R. M. Hirschorn. "Stabilization of single-input nonlinear systems using higher order compensating sliding mode control". In *45th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control conference*, pages 566–571, 2005.
- [184] R. Wai et M. Lee. "Cascade direct adaptive fuzzy control design for a nonlinear two axis inverted pendulum servomechanism". *IEEE Transaction on systems*, 38(2) :439–454, April 2008.
- [185] C.J. Wan, D.S. Bernstein et V.T. Coppola. "Global stabilization of the oscillating eccentric rotor". *Nonlinear Dynamics*, 10 :49–62, 1996.
- [186] H. Wang et J. Li. "Nonlinear control via pdc : the tora system example", 2003.
- [187] J. T.Y Wen. *Control of nonholonomic systems*. CRC Press and IEEE Press., 1996.
- [188] D. C. White et H. H. Woodson. *Electromechanical energy conversion*. John Wiley and son, 1959.
- [189] K. Y. Wichlund, O. J. Sordalen et O. Egeland. "Control of vehicles with second-order nonholonomic constraints ". In *European Control Conference*, pages 3086–3091, 1995.
- [190] J. C. Willems. "Dissipative dynamical systems ". *Rational mechanics and analysis*, 45 :321–393, 1972.
- [191] X. Xu et G. Zhai. "Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 50(11) :1897 – 1903, November 2005.
- [192] R. Xu et U. Ozguner. "Sliding mode control of a class of underactuated systems". *Automatica*, 44 :233–241, 2008.
- [193] H. Ye, A. N. Michel et L. Hou. "Stability analysis of discontinuous dynamical systems with application ". In *13th IFAC Congress*, pages 461–466, USA, 1996.
- [194] H. Ye, A. N. Michel et L. Hou. "Stability theory for hybrid dynamical systems ". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 43(4) :461474, 1998.
- [195] C. Yemei, H. Zhengzhi et C. Xiushan. "Improved forwarding control design method and its application". *Journal of systems engineering and electronics*, 17(1) :168–171, 2006.
- [196] H. Yu, Y. Liu et T. Yang. "Tracking control of a pendulum-driven cart-pole underactuated system". In *IEEE International conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 2425 – 2430, 2007.
- [197] S. H. Zak. *Systems and control*. Oxford University Press, 2003.
- [198] G. Zames. "On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems". *IEEE Transaction on Automatic Control*, 11(2) :228 – 238, 1966.
- [199] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda et A. N. Michel. "Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems : an average dwell time approach". In *American Control Conference*, pages 200 – 204, USA, 2000.
- [200] G. Zhai, D. Liu, J. Imae et T. Kobayashi. "Lie algebraic stability analysis for switched systems with continuous-time and discrete-time subsystems". *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 53(2) :152 – 156, February 2006.
- [201] G. Zhai, H. Lin, X. Xu et A. N. Michel. "Stability analysis and design of switched of normal systems ". In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3253 – 3258, USA, 2004.

- [202] G. Zhai, I. Matsune, J. Imae et T. Kobayashi. "A note on multiple lyapunov functions and stability condition for switched and hybrid systems ". In *16th IEEE International Conference on Control Application*, page 11891199.
- [203] M. Zhang et T. J. Tarn. "A hybrid switching control strategy for nonlinear and underactuated mechanical systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 48(10) :1777–1782, November 2003.
- [204] J. Zhao et D. J. Hill. "Dissipativity theory for switched systems". *IEEE Transaction on Automatic and control*, 53(4) :941 – 953, May 2008.

Index

- Acrobot, 3, 5, 7, 50, 61, 63, 64, 74, 80, 89, 100, 101
- approximation
 - d'ordre supérieur, 34, 124, 126
 - linéaire, 17, 28, 108
- backstepping, 6, 7, 9, 37, 68, 71, 76, 81, 88, 100
- BIBS, 90
- bille sur rail, 3, 5, 50, 61, 65, 74, 80, 100, 124, 126
- Brockett, 4, 6, 55, 109
 - théorème, 55
- Brunovsky
 - forme, 29, 34
- Centrifuge
 - termes, 48
- CFD, 7, 8, 67, 72, 89, 100
- chaos, 136
- Christoffel
 - symboles, 48
- classification, 7, 8, 67, 75, 88
 - classe-I, 79
 - classe-II, 79, 80
- commandabilité, 4, 30, 49, 55–57, 72, 143, 147
- commande numérique, 118, 154
- complète intégrabilité, 141
- contrôle à commutation, 108, 109
- contraintes
 - holonomes, 52, 61
 - non holonomes, 8, 47, 50, 51, 61
- convergence en temps fini, 42, 124
- Coriolis
 - termes, 48
- cycles limites, 136
- degré de complexité, 68, 71
- degré relatif, ii, 3, 30, 31, 55, 72, 75
 - robuste, 33
- difféomorphisme, 30, 31, 140
- distribution, 141
- dynamique de zéro, 32, 49, 90
- énergie, 5, 35
 - cinétique, 48
 - potentielle, 48, 62–65
 - profil, 114
- équilibre, 14
- Euler-Lagrange, 50
 - équations, 47, 51, 61, 100
- fonction
 - Chetaev, 20
 - Lipschitzienne, 13
 - Lyapunov, 17, 37, 99
 - commune, 21, 113
 - faible, 23
 - multiples, 22, 113

- forme normale, 31
 - Byrnes-Isidori, 78
 - feedback stricte, 7, 77, 79, 80, 83, 88, 102
 - feedforward, 7, 78, 81, 83, 89
 - non triangulaire, 7, 78, 89
 - linéaire, 78
 - linéaire-quadratique, 78, 83
 - quadratique, 78, 80
- forme triangulaire, 37
- forwarding, 6, 7, 76, 81
- Frobenius
 - théorème, 31, 141
- gravité
 - termes, 49
- Hurwitz, 125
- involutivité, 141
- Jacubezyk- Respondek
 - théorème, 30
- Kalman
 - critère, 143
- Lagrange
 - vecteur des multiplicateurs, 51
- LaSalle
 - principe d'invariance, 19
- Legendre
 - forme normale, 49
 - transformation, 49
- Lie
 - crochet, 141
 - dérivée, 141
- linéarisation
 - approximative, 33, 123, 124
 - entrée-état, 29
 - entrée-sortie, 30
 - limitations, 136
 - par bouclage, 29, 57, 71, 89
 - partielle, 31, 57, 75, 102, 105, 121
 - entrées couplées, 59
 - localisée, 57
 - non localisée, 58
- LQR, 5, 109
- Luenberger, 145
- masse glissante sur chariot, 72, 100
- mode glissant, 6, 39, 124
 - d'ordre deux, 130
- moment généralisé, 60, 82
- observabilité, 49, 145
- passivité, 3, 5, 35
- Pendubot, 3, 5, 50, 61, 63, 64, 74, 80, 100, 101, 103
- pendule à roue inertielle, 5, 64, 101
- pendule inversé, 3, 5, 50, 61, 62, 73, 80, 81, 101, 103, 118, 150
- phénomène du peaking, 90, 138
- placement de pôles, 5, 109, 144
- poursuite de trajectoire, 6, 27, 91
- principe de séparation, 146
- propriétés structurelles, 4, 7, 52, 67, 83
- réduction, 81
- réticence, 44, 129

- reconstruction d'état, 145
- robots
 - à articulations élastiques, 73, 100
 - à articulations flexibles, 3, 50
 - marchants biped, 6
 - mobiles à roues, 51
- satellites, 3, 50, 60
- singularité, 108
- stabilisation, 4–8
 - bouclage dynamique, 146
 - d'un système, 27
 - locale, 28
 - par retour d'état, 144
- stabilité, 13, 14
 - asymptotique, 15
 - des équilibres, 14, 16
 - des systèmes à commutations, 20
 - exponentielle, 15
 - globale, 15
 - Lyapunov, 8
- structure
 - point isolé, 72
 - arbre, 7, 9, 68, 70, 71, 74, 88, 100, 118
 - chaîne, 7, 8, 68, 70, 71, 73, 88, 89
 - point isolé, 7, 9, 68, 70, 75, 88, 123
- switch, 5, 108
- symétrie, 60
 - cinétique, 61, 79, 81
- système
 - à commutations, 6, 8, 46
 - à minimum de phase, 32
 - à non minimum de phase, 32, 55
 - aéronautiques, 3, 50, 60
 - autonome, 13
 - chaînée, 53
 - de locomotion sans roues, 50
 - Lagrangien, 8, 47, 50, 60
 - mécanique, 2, 61
 - complètement actionnés, 49, 54
 - sous actionnés, 3, 7, 8, 47, 50, 52, 61, 67, 88
 - marins, 3, 50, 52
 - mobiles, 3
 - non autonome, 13
 - non linéaire, 8, 16, 17, 27, 47, 52, 55, 102
 - pendulaires, 100
 - spatiaux, 3
- Tora, 3, 5, 50, 61, 63, 74, 80, 100, 101, 103
- unicycle, 51, 54, 137
- variable
 - de forme, 61, 81, 82
 - externe, 61, 81
- VTOL, 5