



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIC ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان



Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par : BENHAMMOU ABDELAZIZ

Sujet

Réalisation d'un banc de vibration uni-axiales des plaques.

Soutenu publiquement, le 02 / 10 /2021 , devant le jury composé de :

Mr. BELALIA Sid Ahmed	Pr.	Univ. Telemen	President
Mr. CHORFI Sidi Mohamed	MCA	Univ. Telemen	Encadreur
Mr. BOUKHALFA Abdelkarim	Pr.	Univ. Tlemcen	Co-Encadreur
Mr. GUEZZEN Samir	MCB	Univ. Telemen	Examineur

Année universitaire : 2020 -2021

Remerciements

Je remercie « Allah » de m'avoir aidé à terminer ce modeste travail.

Au terme de cinq années d'étude au sein du département de génie mécanique, achevées par la rédaction et la soutenance de ce mémoire de master en Génie Mécanique option « CM», nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué à son bon déroulement.

J'ai tant de reconnaissance à exprimer à l'égard de Monsieur CHORFI Sid Mohammed qui m'a proposé ce sujet et a suivi son élaboration avec grand soin. Grâce à ses larges connaissances, ses précieux conseils et ses encouragements, ce travail a été mené à terme. Ce fut un honneur de travailler avec lui.

Je remercie Co-encadreur BOUKHALFA Abdelkrim qui me aussi bien soutenu, ses conseils ont été des plus bénéfiques pour mener à bien ce travail, je lui exprime mon profond respect.

Nous tenons aussi à remercier les membres du jury, particulièrement Mr GEZZEN Samir et Mr BELALIA Sid Ahmed qui nous ont fait l'honneur de présider le jury ainsi que l'examinations du mémoire.

Comme je remercie sans toutefois les citer, tous ce qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Notre profonde reconnaissance s'adresse à l'ensemble des enseignants de notre département.

Dédicaces

Louanges à dieu Clément et Miséricordieux qui m'a donné la force physique et morale pour réaliser mon rêve, un rêve que je souhaite se prolonger encore longtemps.

Je dédie ce mémoire à tous ce qui œuvrent, qui luttent, qui cherchent pour que le savoir soit maître et que chacun de nous soit muni de toutes les armes intellectuelles afin de servir le pays et de vivre noblement.

- Tous mes amis ...

- A tous ceux qui m'ont consacré leur temps et leur attention, je dis encore et toujours MERCI.

- J'espère n'avoir oublié personne.

Que Dieu le tout puissant récompense les bienfaisants.

SOMMAIRE

Remerciements

Dédicaces

Sommaire

Liste des tableaux

Liste des figures

Abréviations

ملخص

Résumé

Abstract

Introduction générale.....	Erreur ! Signet non défini.
1Terminologie	4
1.1 Vibration	4
1.2 Concept de vibration.....	4
1.3 Les vibrations forcées,	4
1.4 Les vibrations libres.....	5
1.5 Cycle de vibration.....	6
1.6 Harmonique :	6
1.7 La fréquence	7
1.8 Fréquence naturelle ou fréquence propre	7
1.9 Amplitude :	7
1.10 Mode fondamental	7

1.11	Modes harmoniques	8
1.12	Signaux	8
1.12.1	Signaux harmoniques	8
1.12.2	Signaux périodiques non harmoniques	9
1.12.3	Signaux transitoires	10
1.12.4	Signaux aléatoires	10
1.13	Système non amortis et amortis	11
1.13.1	Système libre non amorti.....	11
1.13.2	Systèmes forcés non amorti.....	11
1.13.3	Système amortis	12
1.13.4	Systèmes forcés d'amortissement	12
1.14	Fréquence de résonance	13
1.15	Ventres et nœuds de vibration.....	14
1.16	Systèmes à un degré de liberté.....	14
1.17	Systèmes à degrés de liberté multiples	18
1.18	Son pur et son complexe	20
1.19	Spectre fréquentiel d'un son	21
2	Chapitre2 : théorie de vibration de membrane et plaques	23
2.1	VIBRATIONS DES MEMBRANES	23
2.2	Equation des membranes	23
2.2.1	Membranes rectangulaires.....	24
2.2.2	Membranes circulaires	28
2.3	VIBRATIONS DES PLAQUES.....	32
2.3.1	Equation des plaques minces.....	32
2.3.2	Méthodes pour obtenir les solutions.....	34
3	Chapitre 3 : Banc d'essai de plaque vibrante	43

3.1	L'expérience de Chladni.....	43
3.2	Banc d'Expérience de Chladni en utilisant un générateur de fonction.....	45
3.3	Réalisation de banc d'essai de plaque vibrante par nos propre Moyens	45
3.3.1	Composantes du banc d'essai réalisé	46
3.3.2	Partie électronique du banc réalisé.....	48
3.3.3	Fonctionnement :.....	49
3.3.4	Expérience 1 : Plaque carrée vibrante.....	49
3.4	Validation et simulation.....	51
3.4.1	Modèle élément finis	51
3.4.1	Etude de convergence :	52
3.4.2	Plaque circulaire avec ouverture	53
3.4.3	plaque carrée	58

Liste de tableau

Tableau 2-1: Valeurs des arguments des fonctions de Bessel correspondant à leur passage à zéro.....	30
Tableau 2-2– Fréquences naturelles de la membrane et harmonique de la timbale (d'après Banede ⁴).....	32
Tableau 3-1 : convergence des cinq premières fréquences d'une plaque carrée avec ouverture encastrée.....	52
Tableau 3-2: Fréquences propres des cinq premiers modes.....	55
Tableau 3-3 propriété du maillage pour la plaque carrée.....	59
Tableau 3-4: information quantitative sur le maillage	59
Tableau 3-5 : Fréquences propres des cinq premiers modes.....	60

Liste des figures

Figure1.1: Vibrations forcées	5
Figure1.2: : Vibrations libres	6
Figure1.3 : Système vibrant à ressort de masse simple.....	6
Figure1.4 : harmonique simple et périodique.....	9
Figure1.5 : périodiques ; non harmonique	9
Figure1.6 : signal transitoire	10
Figure1.7 : non périodique, aléatoire.	10
Figure1.8 : Système de masse à ressort.....	11
Figure1.9 : Oscillations mécaniques forcées sur un système non amorti.....	12
Figure1.10 : Système masse-ressort amorti	13
Figure1.11 : Réponse de résonance	14
Figure1.12 : Corde en vibration entre deux points fixes	14
Figure1.13 : Schéma d'un système oscillant à un degré de liberté.....	15
Figure1.14 : Amplitude normalisée de la réponse du système à un degré de liberté en vibration harmonique forcée en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle.....	17
Figure1.15 : Schéma d'un système oscillant à deux degrés de liberté en vibration forcée	19
Figure1.16 : Amplitudes normalisées de la réponse du système à deux degrés de liberté en vibration harmonique forcée en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la première fréquence naturelle.....	19
Figure1.17 : Période d'un son pur.....	20
Figure1.18 : Période d'un son complexe	20
Figure1.19 : a. Spectre d'un son pur, b. Spectre d'un son complexe	21
Figure 2.1 :Notations et équilibre d'un élément de membrane.....	23
Figure 2.2:Représentation des déformées pour les 4 premiers modes (lignes nodales).....	27

Figure 2.3:Représentation des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ (gauche) et de seconde espèce $Y_m(x)$ (droite).	29
Figure 2.4:– Passages à zéro des fonctions de Bessel $J_0(x)$ et $J_1(x)$	30
Figure 2.5:: Les déformées modales des membranes circulaires classées par fréquences naturelle croissantes (d'après Berg et Stork3)	31
Figure 2.6:– Notations pour la plaque	33
Figure 2.7: formes modales d'une plaque rectangulaire simplement supportée. Les lignes pointillées indiquent nodal lignes autres que les bords.	35
Figure 2.8:Formes modales d'une plaque circulaire	39
Figure 3.1 :création des figures de Chladni d'une plaque libre	43
Figure 3.2 : Motifs de Chladni pour une plaque carrée[Ernst Chladni (1756-1827)]	44
Figure 3.3 Générateur de fonction GF 5 2 MHz[.....	45
Figure 3.4: Générateur de fréquence XR6022	46
Figure 3.5 :Hautparleur	Figure 3.6:amplificateu tda 7267.....
Figure 3.7 composantes du banc d'essai réalisé	47
Figure 3.8plaque de guidage avec quatre tiges du banc réalisé	48
Figure 3.9 composante de la partie électronique.....	49
Figure 3.10 Motifs de l'expérience de la plaque quarrée vibrante	50
Figure 3.11 élément tétraédrique a 10 noeuds de discrétisation.....	51
Figure 3.12:modèle des éléments finis	52
Figure 3.13 Condition aux limites (encastrée au centre).....	55
Figure 3.14: Déformée modale du premier mode propre de 17.248 Hz	56
Figure 3.15 : Déformée modale du deuseme mode propre de 21.151 Hz.....	56
Figure 3.16:Déformée modale du troisième mode propre de 74.374Hz.....	56
Figure 3.17 : Déformée modale du quatrième mode propre de 128.474Hz.....	57
Figure 3.18 : Déformée modale du cinquième mode propre de 143.129Hz	57
Figure 3.19:modèle des éléments finis	58

Figure 3.20:modèle géométrique de la plaque et condition aux limites.....	60
Figure 3.21 : Déformée modale du la première mode propre de 12.404Hz.....	61
Figure 3.22: Déformée modale du la deuseme mode propre de 21.0544Hz	62
Figure 3.23 : Déformée modale du la troisième mode propre de 78.2755Hz	62
Figure 3.24 : Déformée modale du la quatrième mode propre de 108.035Hz	62
Figure 3.25 : Déformée modale du la cinquième mode propre de 142.821Hz	63

Abréviations

A : l'amplitude du mode () nm , .

μ : coefficients de Lamé.

E : le module d'Young.

ν : le coefficient de Poisson.

h : l'épaisseur.

σ_x : : Les contraintes dans la direction x.

σ_y : Les contraintes dans la direction y.

σ_{zz} : Les contraintes dans la direction z.

τ_{xy} : Contrainte de Cisaillement.

ε_x : la déformation dans la direction x.

ε_y : la déformation dans la direction y.

γ_{xy} : déformation angulaire.

u , v , w : les composantes déplacement.

ρ : la masse volumique.

t : le temps.

a ,b : la dimension de plaque.

[σ] : tenseurs de contraintes.

[ε] : tenseurs de déformation.

U : l'énergie de déformation.

T : l'énergie cinétique.

(m ,n) : un mode d'une plaque.

ω : la fréquence fondamentale.

($L_x \times L_y$) : Le déplacement d'une membrane rectangulaire.

A_{mn} : l'amplitude du mode () nm

\tilde{N} : efforts de membrane

λ : Valeur propre

Résumé

La vibration des plaques avec les phénomènes de modes et de fréquences de résonance sont des thématiques importantes, tant d'un point de vue académique qu'industriel. La technique de visualisation du sable sur des plaques vibrantes originale de Chladni est présentée. Cette technique met en évidence les modes de résonances mes par leurs fréquences de résonance correspondantes.

En utilisant la même technique de Chladni, un banc d'essai est réalisé. Il permet la détermination des fréquences de résonance et la visualisation des modes de vibration correspondants pour des plaques rectangulaires et circulaires.

L'aspect théorique est présenté par les équations analytiques qui régit ce phénomène physique , et une simulation numérique par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel SolidWorks est mené. Cela a permis de mettre en évidence les modes et les fréquences propres correspondantes afin de bien choisir les fréquences d'excitations.

Les fréquences de résonances et les figures des modes de vibration issue de l'étude expérimentale et de simulation sont données pour deux types de plaques minces, rectangulaires et circulaires.

Mots-clés : vibration ; plaque, résonance

ملخص

يعد اهتزاز الألواح مع ظاهرة الأنماط وترددات الرنين موضوعات مهمة، من وجهة نظر أكاديمية وصناعية. تم تقديم تقنية تصور الرمال الأصلية لها Chladni. تسلط هذه التقنية الضوء على أوضاع الرنين وليس الترددات الرنانة المقابلة لها.

، يتم عمل منصة اختبار. يسمح بتحديد ترددات الرنين وتصور أوضاع الاهتزاز المقابلة Chladni باستخدام نفس تقنية للألواح المستطيلة والدائرية.

يتم تقديم الجانب النظري من خلال المعادلات التحليلية التي تحكم هذه الظاهرة الفيزيائية، ويتم إجراء محاكاة عددية بطريقة . هذا جعل من الممكن إبراز الأوضاع والترددات الطبيعية المقابلة من SolidWorks العناصر المحدودة باستخدام برنامج أجل اختيار ترددات الإثارة بشكل جيد.

تم إعطاء ترددات الرنين وأرقام أنماط الاهتزاز الناتجة عن الدراسة التجريبية ودراسة المحاكاة لنوعين من الألواح الرقيقة، المستطيلة والدائرية.

كلمات المفتاحية: اهتزاز، صفيحة، رنين

Abstract

The vibration of the plates with the phenomena of modes and frequencies of resonance are important themes, both from an academic and industrial point of view. Chladni's original sand visualization technique is presented. this technique highlights the modes of resonances not their corresponding resonant frequencies.

Using the same Chladni technique, a test bench is made. It allows the determination of the resonant frequencies and the visualization of the corresponding vibration modes for rectangular and circular plates.

The theoretical aspect is presented by the analytical equations which govern this physical phenomenon, and a numerical simulation by the finite element method using the software SolidWorks is carried out. That made it possible to highlight the modes and the corresponding natural frequencies in order to choose the frequencies of excitations well.

The resonance frequencies and the figures of the modes of vibration resulting from the experimental and simulation study are given for two types of thin plates, rectangular and circular.

Keywords: vibration; plate, resonance

Introduction générale

La vibration est l'oscillation mécanique d'une particule, d'un membre ou d'un corps à partir de sa position d'équilibre. La vibration se produit lorsqu'un système est déplacé d'une position d'équilibre stable. Donc « Une vibration est un mouvement des particules d'un milieu élastique de part et d'autre d'une position d'équilibre. ». Le système tend à revenir à cette position d'équilibre sous l'action de forces de rappel.

L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industriel. Lorsqu'un système mécanique ou liquide est exposé à une excitation régulière caractérisée par une certaine fréquence, ce dernier présente des modes de vibrations. Nous voulons comprendre et mettre en évidence ce phénomène. Pour cela deux approches sont considérées:

- Une approche théorique, dont les modes propres et les fréquences de plaque vibrante sont déterminés.
- Une approche expérimentale basée sur les travaux de Chladni des systèmes de plaques simples.

L'objectif tracé à travers ce mémoire est un objectif pédagogique afin de permettre aux étudiants dans les matières : Ondes et vibration, dynamique des structures, machines vibrantes, ...de mieux comprendre et de visualiser des terminologies fondamentales qui se répètent fréquemment dans leur formation.

Aussi ce travail va permettre aux étudiants de voir la nécessité et l'importance de la théorie et de la simulation par conséquence pour éviter des catastrophes de certains phénomènes physiques.

Pour la réalisation de cet objectif trois chapitres se présentent :

Le Chapitre 1 est consacré à la définition et l'illustration de la terminologie fortement présente dans le domaine des vibrations de structures. Des équations explicatives et des figures illustratives sont données.

Le Chapitre 2 est réservé à la théorie des membranes et des plaques. Dans ce chapitre on s'est intéressé aux deux formes particulières de plaque , la plaque rectangulaire et la plaque

circulaire. Une importance est donnée à l'aspect théorique et aux équations de la vibration de ces deux structures ainsi qu'aux solutions analytiques correspondante.

Le Chapitre 3 se présente en trois grandes parties,

La première est réservée à la présentation de l'expérience de Chladni (1789), la deuxième partie est consacrée au banc expérimental de plaque vibrante avec des moyens plus récents. Dans cette partie de chapitre nous avons présenté le banc d'essai réalisé dans le cadre de cette étude.

La troisième partie du chapitre est une étape de simulation par éléments finis en utilisant SolidWorks. C'est une approche numérique pour prédire les modes propres de vibration d'une plaque mince avec leurs fréquences propres correspondantes.

Et en fin on donne des remarques avec des conclusions obtenues lors de la réalisation des expériences et de l'étude théorique des plaques vibrantes.

Chapitre 1

Terminologie en vibration

1 Terminologie

1.1 Vibration

Tout mouvement répétitif est appelé vibration ou oscillation. . On dit qu'un ensemble mécanique est le siège de vibrations s'il est animé de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.

1.2 Concept de vibration

Tout mouvement répétitif est appelé vibration ou oscillation. Le mouvement ressenti par les passagers d'une automobile voyageant sur une route cahoteuse, le balancement de grands immeubles en raison du vent ou d'un tremblement de terre et le mouvement d'un avion en turbulence sont des exemples typiques de vibrations. La théorie des vibrations traite de l'étude du mouvement oscillatoire des corps et des forces associées. Le mouvement oscillatoire illustré est appelé mouvement harmonique et est noté [2]

$$X(t) = A \cos \omega t = A \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (1.1)$$

où A est l'amplitude d'oscillation mesurée à partir de la position d'équilibre de la masse

Le temps de répétition τ est appelée la période de l'oscillation, et sa réciproque, $f = \frac{1}{\tau}$ est appelé le la fréquence. Tout mouvement périodique satisfait la relation

$$s(t) = x(t + \tau) \quad (1.2)$$

$$\text{C'est la période} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s/cycle} \quad (1.3)$$

$$\text{La fréquence} \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ cycle/s ou Hz} \quad (1.4)$$

ω est la fréquence circulaire mesurée en rad / s.

1.3 Les vibrations forcées,

Vibrations forcées ou entretenues, découlent d'une excitation. Elles durent aussi longtemps que se maintient l'excitation. Si un système est soumis à une force externe (souvent, un type

de force répétitif), la vibration résultante est connue sous le nom de vibration forcée. L'oscillation qui se produit dans des machines telles que les moteurs diesel est un exemple de vibration forcée.

Un système mécanique ou structurel est souvent soumis à des forces externes ou à des excitations externes. Les forces externes peuvent être harmoniques, non harmoniques mais périodiques, non périodiques mais ayant une forme définie ou aléatoire. La réponse du système à de telles excitations ou forces est appelée réponse forcée. La réponse d'un système à une excitation harmonique est appelée réponse harmonique. Les excitations non périodiques peuvent avoir une durée longue ou courte. La réponse d'un système à des excitations non périodiques soudainement appliquées est appelée réponse transitoire. Les sources d'excitations harmoniques sont le déséquilibre dans les machines tournantes, les forces générées par les machines alternatives, et le mouvement de la machine elle-même dans certains cas.[4]

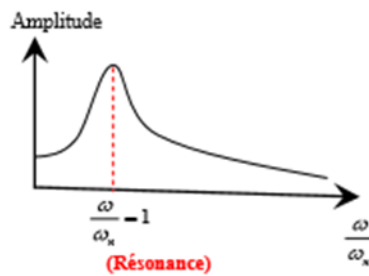


Figure 1.1: Vibrations forcées [35]

1.4 Les vibrations libres

Les vibrations libres résultent d'une action imposée à un instant donné. Elles apparaissent ainsi lorsque le système est placé en dehors de sa position de repos ou lorsqu'on lui transmet une impulsion initiale. ... Les vibrations propres apparaissent dans un système non amorti. Elles sont périodiques dans le temps.

Elles sont liées aux modes propres d'un système, elles résultent de la capacité de ce système à vibrer. Elles peuvent être déclenchées par un seul impact et elles s'amortissent d'elles-mêmes en fonction du comportement dynamique et de l'amortissement du système

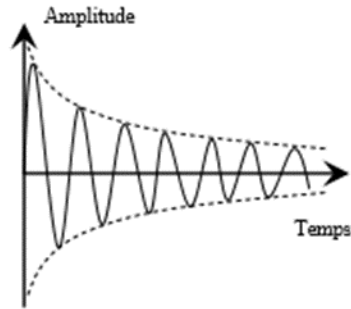


Figure 1.2 : Vibrations libres [35]

1.5 Cycle de vibration

Le mouvement d'un corps vibrant de sa position non perturbée ou d'équilibre à sa position extrême dans une direction, puis à la position d'équilibre, puis à sa position extrême dans l'autre direction, puis de retour à la position d'équilibre est appelé un cycle de vibration.

1.6 Harmonique :

Un mouvement harmonique est caractéristique d'une sinusoïde ou une version déformée. Tout mouvement harmonique est périodique, ce qui signifie qu'il se répète à un moment donné. Un déséquilibre dans l'équipement rotatif pourrait générer un mouvement harmonique.

Le type de mouvement périodique le plus simple est celui subi par une masse ponctuelle se déplaçant le long d'une ligne droite avec une accélération dirigée vers un point fixe et proportionnelle à la distance de ce point. C'est ce qu'on appelle le mouvement harmonique simple.[17]

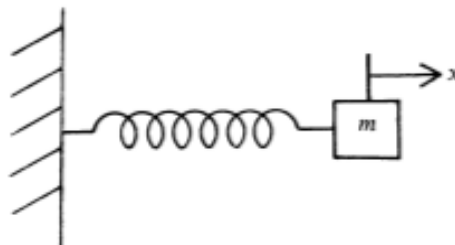


Figure 1.3 : Système vibrant à ressort de masse simple [2]

1.7 La fréquence

Un cycle complet de vibration est produit lorsque l'objet se déplace d'une position extrême à l'autre position, puis revient au point de départ. Le nombre de cycles effectués par un objet vibrant pendant une seconde est appelé sa **fréquence**. L'unité de fréquence est le hertz (Hz). Un hertz correspond à un cycle par seconde.

1.8 Fréquence naturelle ou fréquence propre

La fréquence propre d'un système est la fréquence à laquelle oscille ce système lorsqu'il est en évolution libre, c'est-à-dire sans force excitatrice extérieure ni forces dissipatives (frottements ou résistances) Dans le cas des systèmes amortis, nous parlons de fréquences naturelles amorties et de formes de mode amorties associées. [5]

1.9 Amplitude :

L'amplitude est la distance maximale de chaque côté de la position naturelle que l'objet peut parcourir une fois l'objet relâché. Un objet vibrant se déplace sur une distance maximale de part et d'autre de sa position fixe. L'amplitude est la distance comprise entre la position fixe et la position extrême d'un côté ou de l'autre, et elle est mesurée en mètres (m). L'intensité de la vibration dépend de l'amplitude.

On peut exprimer l'amplitude d'une oscillation grâce à la distance entre les points extrêmes atteints par le mouvement (valeur crête à crête) ou par la distance entre un point central et l'élongation maximale (valeur de crête).

1.10 Mode fondamental

Considérons un système mécanique qui entre en vibration. La vibration est complexe ; elle est composée de plusieurs vibrations de fréquences différentes. Le mode propre correspondant à la fréquence la plus basse est appelé le mode fondamental. La fréquence propre du fondamental est généralement notée f_1 . La valeur de la fréquence propre f_1 du fondamental dépend :

- pour une corde, de sa longueur, de sa tension, de sa composition ;

- pour une colonne d'air, de la longueur du tuyau, de la température et de la nature du gaz enfermé dans le tuyau.[4]

1.11 Modes harmoniques

En dehors du mode fondamental, les autres modes de vibration d'un système sont appelés les modes harmoniques. La valeur de la fréquence f_n d'un mode harmonique est un multiple entier de la valeur de la fréquence propre de vibration. On a : $F_n = n \cdot f_1$,

Avec n , un nombre entier tel que $n > 1$.

1.12 Signaux

On désigne, sous ce vocable très général, toute grandeur pouvant avoir un effet sur une structure pour modifier son équilibre ou son comportement : force, tension, accélération, vitesse, pression acoustique, etc. Les vibrations mécaniques sont des mouvements oscillant autour d'une position moyenne d'équilibre. Ces mouvements oscillants caractéristiques de l'effort qui les génère, peuvent être, soit périodiques, soit apériodiques (transitoires ou aléatoires) selon qu'ils se répètent ou non, identiquement à eux-mêmes après une durée déterminée.

D'une manière générale, les différents signaux peuvent être classés dans l'une des catégories suivantes.

1.12.1 Signaux harmoniques

Les vibrations périodiques peuvent correspondre à un mouvement sinusoïdal pur comme celui d'un diapason où, plus généralement, à un mouvement complexe périodique que l'on peut décomposer en une somme de mouvements sinusoïdaux élémentaires, plus faciles à analyser. Les mouvements sinusoïdaux élémentaires sont appelés « composantes harmoniques » et leurs fréquences sont des multiples entiers de la fréquence du mouvement étudié qui est appelée « fréquence fondamentale » ou fréquence de l'harmonique d'ordre 1. Donc, une vibration harmonique est une vibration dont le diagramme amplitude-temps prend la forme suivante.

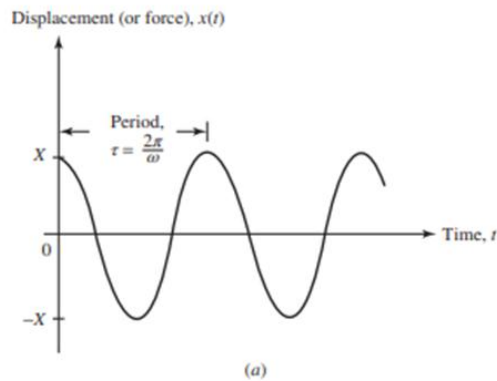


Figure 1.4 : harmonique simple et périodique[2]

1.12.2 Signaux périodiques non harmoniques

Une vibration périodique est une vibration qui se produit exactement après un certain temps, appelée période, figure qui suit. Cette vibration est créée par une excitation elle-même périodique. C'est le cas le plus fréquent rencontré sur les machines tournantes. Ce type de vibration est composé de plusieurs vibrations harmoniques. Donc, un signal périodique non harmonique est une somme de signaux harmoniques de différentes amplitudes maximales (constantes) mais dont les pulsations sont multiples d'une pulsation dite fondamentale.

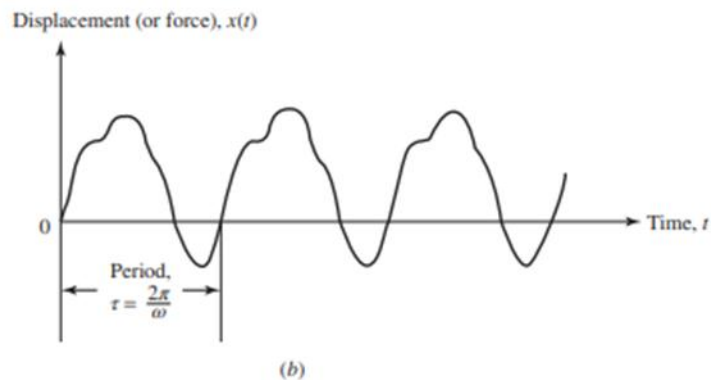


Figure 1.5 : périodiques ; non harmonique[2]

1.12.3 Signaux transitoires

Il fait partie de signaux non périodiques. Un signal transitoire se produit pendant un intervalle de temps limité.

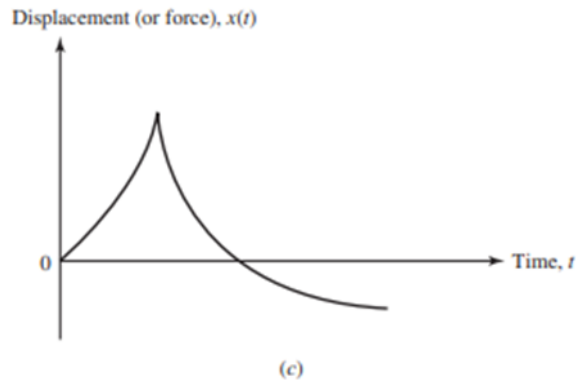


Figure 1.6 : signal transitoire [2]

1.12.4 Signaux aléatoires

Une vibration apériodique est une vibration dont le comportement temporel est quelconque. Dans une telle situation, on n'observe jamais la reproductibilité dans le temps (Voir la figure suivante). C'est pourquoi, les vibrations aléatoires ne peuvent être représentées mathématiquement que par une série de relations de probabilités car il faudrait théoriquement un temps infini pour les analyser, mais on peut considérer que la fonction aléatoire est une fonction périodique dont la périodicité est égale à l'infini et que cette fonction est constituée d'une infinité de fonctions sinusoïdales dont la fréquence varie de façon continue

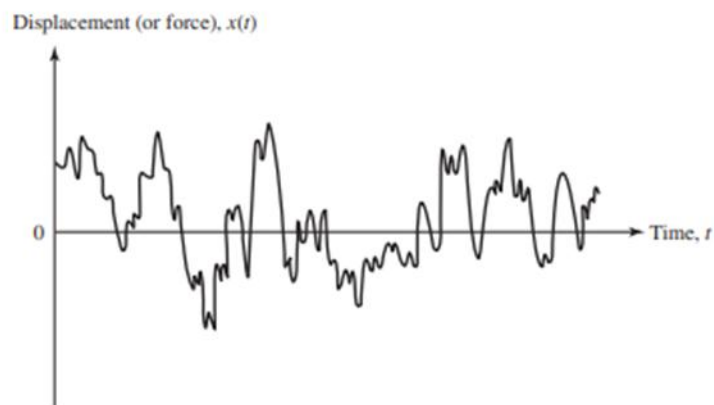


Figure 1.7 : non périodique, aléatoire. [2]

1.13 Système non amortis et amortis

Le phénomène de vibration implique un échange alternatif d'énergie potentielle en énergie cinétique et d'énergie cinétique en énergie potentielle. Par conséquent, tout système vibrant doit avoir un composant qui stocke l'énergie potentielle et un composant qui stocke l'énergie cinétique. Les composants stockant les énergies potentielles et cinétiques sont appelés un ressort ou un élément élastique et un élément de masse ou d'inertie, respectivement. L'élément élastique stocke de l'énergie potentielle et donne lieu à une énergie élémentaire d'inertie, et vice versa, à chaque cycle de mouvement. Le mouvement répétitif associé aux vibrations peut être expliqué par le mouvement d'une masse sur une surface lisse.

Si aucune énergie n'est perdue ou dissipée en frottement ou autre résistance pendant l'oscillation, la vibration est connue sous le nom de vibration non amortie. Cependant, si de l'énergie est perdue de cette manière, on parle de vibration amortie.

1.13.1 Système libre non amorti

Les oscillations libres non amorties ont lieu quand le système susceptible d'osciller a été mis en mouvement puis ne subit aucune force d'excitation externe et n'a pas de frottement.

Dans ce qui suit, nous allons considérer le cas particulier extrêmement simple du "pendule élastique" constitué d'un ressort à boudin de masse négligeable, fixé en un point fixe à une de ses extrémités, une masse ponctuelle m , pouvant se déplacer horizontalement, sans frottement est fixée à l'autre extrémité (figure en dessous)

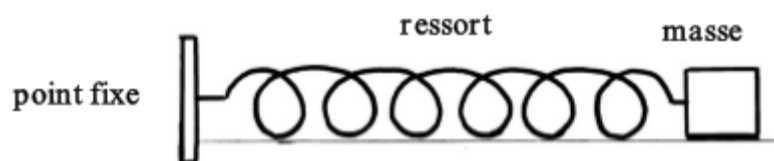


Figure 1.8 : Système de masse à ressort [34]

1.13.2 Systèmes forcés non amortis

Nous allons considérer maintenant que l'oscillateur constitué de l'ensemble masse ressort subit une excitation sinusoïdale liée à un dispositif extérieur comme exemple celui représenté

sur la figure qui suit on est dans le cas d'un oscillateur mécanique en vibrations forcées. Ce phénomène d'oscillations forcées est d'une grande importance dans la pratique et intervient sur tous les types d'oscillateurs : mécaniques, acoustiques, électriques, optiques, etc.

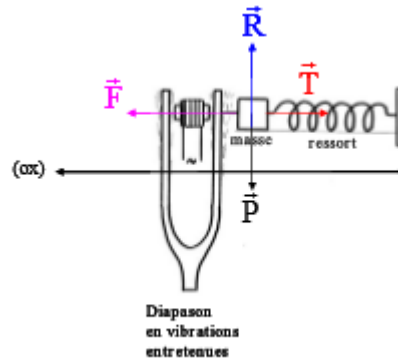


Figure 1.9 : Oscillations mécaniques forcées sur un système non amorti [34]

1.13.3 Système amortis

Dans les systèmes mécaniques réels, le mouvement est toujours soumis à des forces de frottement qui réduisent son énergie mécanique au cours du temps, on parle alors de vibration amortie. L'ajout d'un amortisseur au système "masse-ressort", diminue l'amplitude avec le temps. La fréquence de l'oscillation appelée fréquence naturelle amortie reste constante et est égale à la fréquence naturelle. [15]

1.13.4 Systèmes forcés d'amortissement

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement visqueux. Considérons un système de masse à ressort à un degré de liberté à amortissement visqueux illustré à la figure ci-après soumis à une fonction harmonique $F(t) = F_0 \sin \omega t$, où F_0 est l'amplitude de la force et ω est la fréquence circulaire de la fonction de forçage.

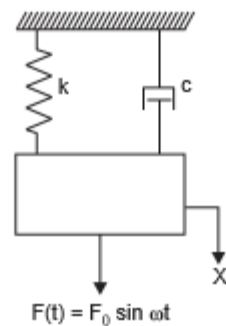


Figure 1.10 : Système masse-ressort amorti [17]

1.14 Fréquence de résonance

La résonance est un phénomène selon lequel certains systèmes physiques (électriques, mécaniques...) sont sensibles à certaines fréquences d'excitation. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite « fréquence de résonance ». Soumis à une telle excitation, le système va être le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à une rupture d'un composant du système.

En physique, la résonance est la tendance d'un système à vibrer avec des amplitudes croissantes à certaines fréquences d'excitation. Celles-ci sont appelées fréquences de résonance du système (ou fréquences de résonance). Le résonateur peut avoir une fréquence fondamentale et un nombre quelconque d'harmoniques.

Dans ce cas où le déplacement $x(t)$ tend vers l'infini pour toute valeur du temps t . L'amplitude de la réponse forcée augmente avec le temps comme sur la figure suivante et finira par devenir infinie, point auquel le ressort du système masse-ressort tombe en panne de manière indésirable.

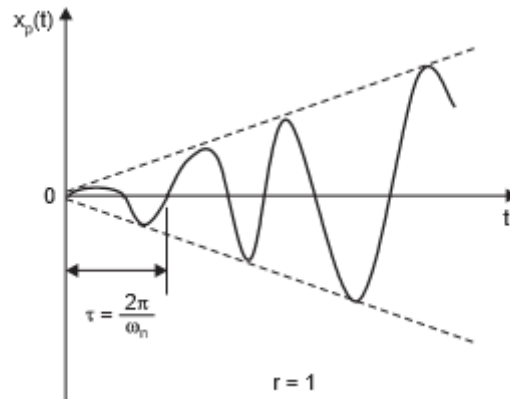


Figure 1.11 : Réponse de résonance [17]

1.15 Ventres et nœuds de vibration

Lorsqu'un système mécanique vibre, les points oscillent autour de leur position d'équilibre avec des amplitudes différentes. Certains points du système décrivent des oscillations dont l'amplitude est maximum. On les appelle des ventres de vibration. Certains points du système décrivent des oscillations dont l'amplitude est minimum. On les appelle des nœuds de vibration.

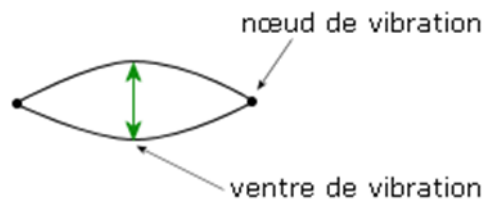


Figure 1.12 : Corde en vibration entre deux points fixes

1.16 Systèmes à un degré de liberté

Le modèle de vibration de base pour un système en oscillation harmonique est composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. La Figure qui suit illustre ce modèle. Son élément de masse est libre de se déplacer en translation selon l'axe X.



Figure 1.13 : Schéma d'un système oscillant à un degré de liberté [33]

Le ressort est linéaire, c'est-à-dire que sa force de rappel est proportionnelle selon la constante « k » au déplacement de la masse « m » et la force générée par l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse par la constante d'amortissement « c ».[10]

En accord avec la deuxième loi de Newton, la vibration libre d'un tel système est décrite par l'Équation :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.5)$$

La vibration libre est amorcée par des conditions initiales de déplacement de vitesse et d'accélération. Lorsqu'il n'y a aucune force d'amortissement, le système vibre indéfiniment selon sa fréquence naturelle décrite par l'Équation :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.6)$$

La constante d'amortissement critique d'un système correspond à la valeur limite du paramètre « c » pour laquelle le système perturbé se stabilise vers sa position d'équilibre sans oscillation. La constante d'amortissement critique est décrite par l'Équation :

$$C_c = 2\sqrt{km} \quad (1.7)$$

En pratique, la notion de taux d'amortissement est souvent utilisée. Il s'agit du rapport entre la constante d'amortissement du système et la constante d'amortissement critique par l'Équation

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (1.8)$$

Lorsque le taux d'amortissement est supérieur à l'unité, aucune oscillation n'est possible et la masse se déplace simplement vers sa position d'équilibre. Lorsque le taux d'amortissement est inférieur à l'unité, le déplacement pour le système à un degré de liberté adopte un comportement oscillant et revêt la forme décrite à l'Équation :

$$x = e^{-\lambda t} [a \sin(\omega_d t) + b \cos(\omega_d t)] \quad (1.9)$$

où « a » et « b » sont des amplitudes, « $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ » représente la fréquence naturelle amortie et « $\lambda = \zeta \omega_n$ ».

Si la valeur du taux d'amortissement est faible, la fréquence naturelle amortie est très près de la fréquence naturelle du système sans amortissement. Dans ce cas, une approximation acceptable du taux d'amortissement utilisée en pratique est décrite à l'Équation :

$$\zeta = \frac{\lambda}{\omega_d} \quad (1.10)$$

La vibration forcée se produit lorsque qu'un terme « F(t) » non-nul excite le système précédemment introduit. L'Équation représente la seconde loi de Newton appliquée au système à un degré de liberté en vibration forcée

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.11)$$

La force « F (t) » est de type harmonique si elle possède la forme posée à l'Équation :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (1.12)$$

La solution correspondant au déplacement de la masse en fonction du temps pour le système à un degré de liberté en vibration forcée harmonique et en régime permanent est décrite par l'Équation :

$$x = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \sin \left[\omega t - \arctan \left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \right] \right] \quad (1.13)$$

L'amplitude normalisée de la réponse du système pour différents taux d'amortissement en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle est présentée à la Figure a.2

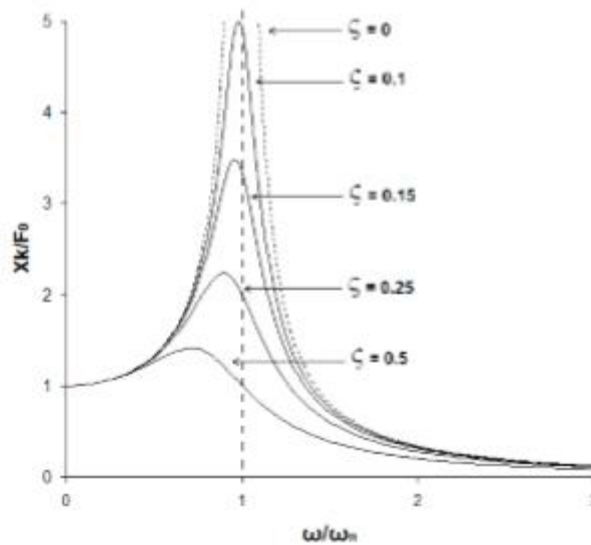


Figure 1.14 : Amplitude normalisée de la réponse du système à un degré de liberté en vibration harmonique forcée en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle.[31]

Lorsque la fréquence d'excitation est infiniment faible, la force excitatrice peut être considérée comme statique. Le système s'adapte en se déformant de sorte que le ressort reprenne la force « F_0 ». C'est pourquoi la valeur de l'amplitude de réponse normalisée atteint l'unité pour une fréquence d'excitation nulle. Lorsque la fréquence augmente pour approcher la fréquence naturelle, la réponse augmente de façon spectaculaire, particulièrement si le taux d'amortissement est faible. De l'énergie vibratoire est alors accumulée dans le système et ne peut en sortir que par l'action des forces d'amortissement. Ce phénomène est appelé résonance. Il s'agit d'un état mécaniquement indésirable pour une structure puisqu'elle est soumise à des cycles amenant souvent à la propagation de défauts sous forme de fissures. De plus, l'état de contrainte dynamique qui est le moteur de cette propagation subit une amplification similaire à l'amplitude de déplacement. Généralement, il résulte de la résonance une rupture catastrophique peu après la mise en service de l'équipement concerné, d'où l'importance de bien connaître le comportement dynamique des composantes en fonctionnement. Le design peut alors être adapté pour éviter le phénomène. Finalement, lorsque la fréquence d'excitation dépasse de 50% la fréquence naturelle, l'amplification

dynamique est réduite drastiquement. Cette dernière tend vers 0 lorsque le rapport de la fréquence d'excitation sur la fréquence naturelle devient très grand. [25]

1.17 Systèmes à degrés de liberté multiples

Pour pouvoir représenter des structures réelles et complexes, la théorie de base de la vibration doit être généralisée pour des systèmes comportant plusieurs degrés de liberté. Pour arriver à cette fin, l'équation décrivant la seconde loi de Newton pour un tel système peut être écrite sous la forme matricielle Équation (1.13).

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1.14)$$

En négligeant le terme d'amortissement et supposant une solution telle que décrite à l'Équation (1.14), les fréquences naturelles peuvent être déterminées par l'Équation (1.15).

$$\{x\} = \{X\} \sin(\omega t) \quad (1.15)$$

où « $\{X\}$ » est un vecteur contenant les amplitudes de déplacement de chacun des degrés de liberté.

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (1.16)$$

Le système possède autant de fréquences naturelles que de degrés de liberté. À chaque fréquence naturelle est associé un mode propre de vibration. Un mode est un état de vibration qui possède une configuration de déplacement particulière. Chacun des modes est indépendant des autres lorsque l'amortissement du système est proportionnel. Cette particularité est appelée « orthogonalité des modes » (Thomson et al. (1998)). Les modes propres sont déterminés en réinjectant chacune des fréquences naturelles « ω_i » et en résolvant pour le déplacement (Équation (1.16)).

$$|[K] - \omega_i^2[M]|\{X_i\} \quad (1.17)$$

La forme des modes propres « $\{X_i\}$ » fournit l'amplitude relative entre les différents degrés de liberté. Lorsqu'en vibration libre, l'imposition de conditions initiales de déplacement arbitraires à une structure fait intervenir un ou plusieurs de ses modes propres. Ce déplacement initial peut être décomposé en une combinaison linéaire des modes propres. La proportion de chacun de ces modes dans la réponse de la structure dépend de la contribution de ceux-ci dans le déplacement initial.

Lorsqu'un système à plusieurs degrés de liberté est en vibration forcée, comme pour le cas du système à un degré de liberté, il existe une amplification dynamique importante lorsque la fréquence d'excitation approche une fréquence naturelle. La Figure 1-3 présente un système simple en vibration forcée à deux degrés de liberté.

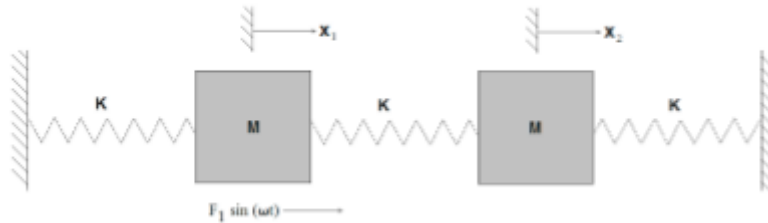


Figure1.15:Schéma d'un système oscillant à deux degrés de liberté en vibration forcée[33]

L'amplitude normalisée de la réponse des deux masses du système en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle est présentée à la Figure ci-dessous.

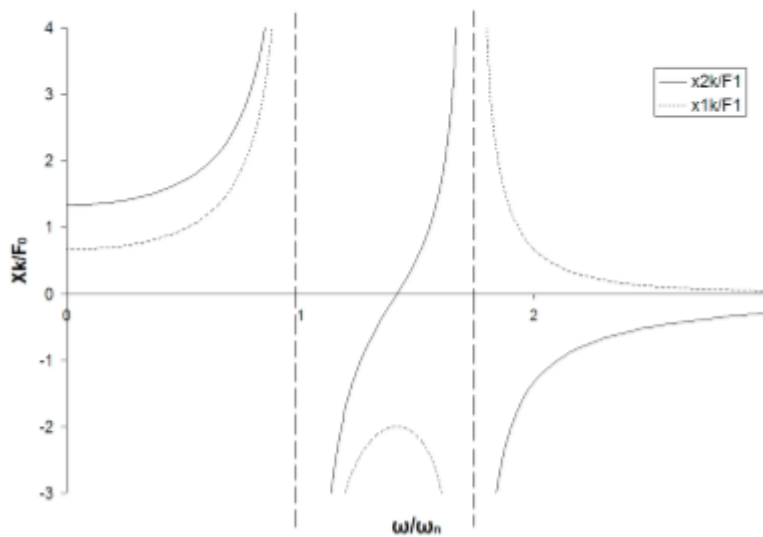


Figure1.16 : Amplitudes normalisées de la réponse du système à deux degrés de liberté en vibration harmonique forcée en fonction du rapport entre la fréquence d'excitation et la première fréquence naturelle[33]

Les structures réelles possèdent un nombre infini de degrés de liberté et par conséquent, un nombre infini de modes propres. Il est à noter que les modes simples et de basse fréquence relative sont généralement plus à risque en termes de résonance. Ceux-ci possèdent

généralement moins d'amortissement que les modes de degrés supérieurs, générant une résonance plus importante si une excitation géométriquement compatible possède une fréquence au voisinage d'une fréquence naturelle. En effet, pour provoquer la résonance, une compatibilité géométrique entre l'excitation et le mode dont la fréquence naturelle coïncide est nécessaire.[3]

1.18 Son pur et son complexe

Un son pur est un son sinusoïdal dont la fréquence est unique. Un diapason émet un son pur dont la fréquence propre est généralement $f_1 = 440$ Hz figure (1.17)

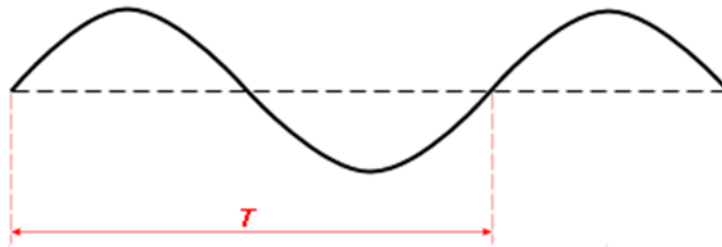


Figure 1.17 : Période d'un son pur. [36]

Un son complexe est un son périodique, constitué de plusieurs sons dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence f_1 du son fondamental la figure (1.18). Le mathématicien Joseph Fourier a montré que tout signal périodique de fréquence f_1 est la somme de plusieurs signaux sinusoïdaux de fréquence $f_{in} = n \cdot f_1$ et d'amplitudes a_n .

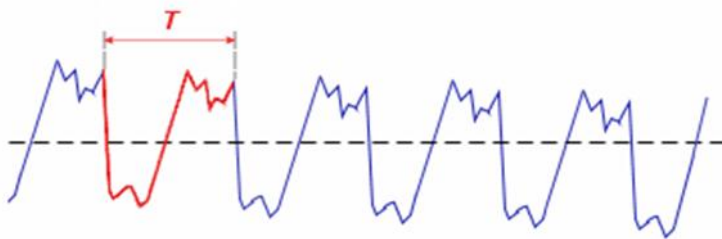


Figure 1.18 : Période d'un son complexe [36]

Tous les instruments de musique émettent des sons complexes. La richesse du son en harmoniques donne son timbre à l'instrument

1.19 Spectre fréquentiel d'un son

On appelle spectre fréquentiel d'un son le graphique donnant l'amplitude des sons associés aux différentes fréquences constituant le son

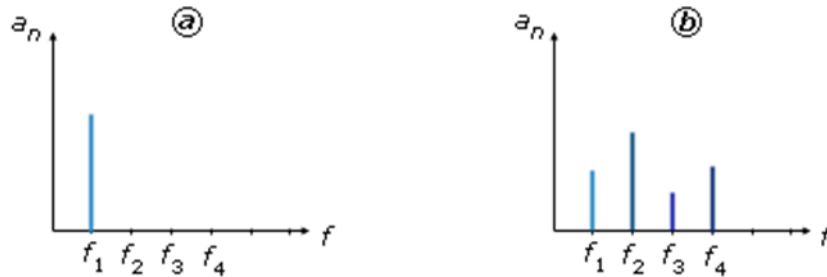


Figure 1.19 : a. Spectre d'un son pur, b. Spectre d'un son complexe [36]

L'analyse du spectre fréquentiel d'un son pur (figure 1.19.a) montre qu'il est constitué d'une seule vibration de fréquence f_1 . L'analyse du spectre fréquentiel d'un son complexe (figure 1.19.b) montre qu'il est constitué de plusieurs vibrations de fréquences f_1, f_2, \dots, F_n .

- Lorsqu'un système mécanique vibre, celui-ci est le siège d'oscillations dont la fréquence est définie. Ces modes de vibration sont appelés les modes propres.
- La plus petite fréquence des modes propres est la fréquence du fondamental, notée f_1 .
- Toutes les autres fréquences, appelées harmoniques, sont des multiples entiers de la fréquence du fondamental : $f_n = n \cdot f_1$, Avec n , un nombre entier tel que $n > 1$.

Chapitre 2

Chapitre2 : théorie de vibration de membrane et plaques

2.1 VIBRATIONS DES MEMBRANES

Les membranes sont les équivalents en deux dimensions des cordes Ils se retrouvent dans les diaphragmes de microphones, les peaux de tambours et timbales...

Pour simplifier les développements mathématiques et introduire les vibrations des plaques, les membranes sont traitées en coordonnées cartésiennes. Les solutions obtenues pour des membranes rectangulaires ne correspondent pas évidemment aux applications les plus courantes...[16]

2.2 Equation des membranes

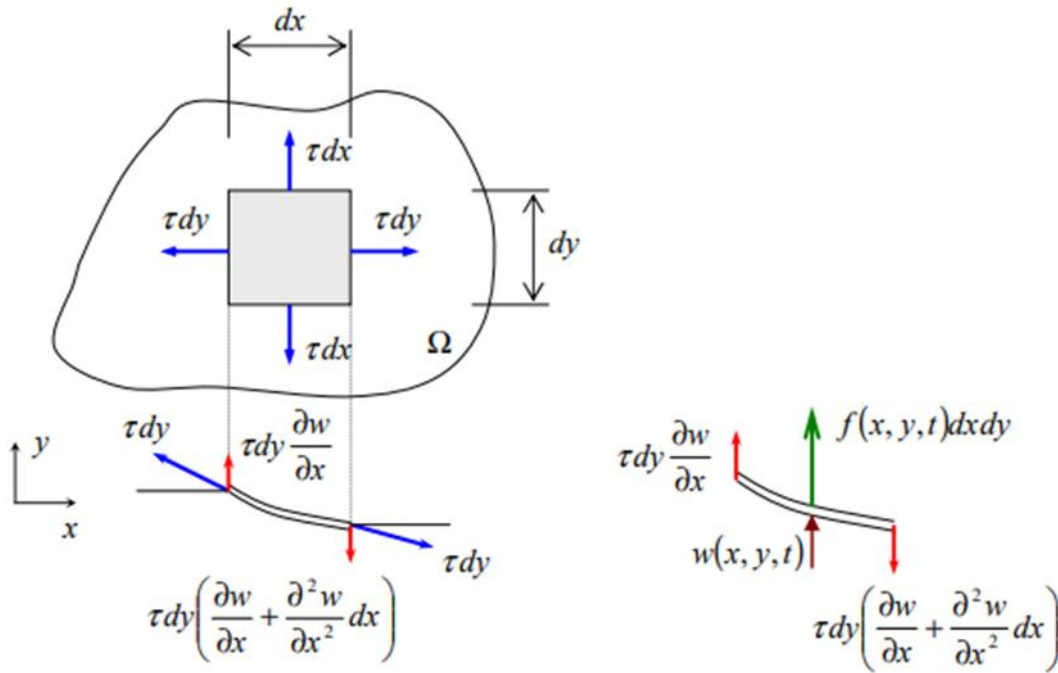


Figure 2.1 :Notations et équilibre d'un élément de membrane[16]

tension par unité de longueur,

M s masse par unité de surface,

$f(x, y, t)$ densité surfacique de force extérieure,

$w(x, y, t)$ déplacement transversal.

Equation d'équilibre pour l'élément $dx dy$

$$\tau dy \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right] - \tau dy \frac{\partial w}{\partial x} + \tau dx \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} dy \right] - \tau dx \frac{\partial w}{\partial y} + c dx dy = M_s dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Soit

$$\tau \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} \right] dx dy + f(x, y, t) dx dy = M_s dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

considérant que la force extérieure est nulle : $f(x, y, t) = 0$

$$c^2 \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

avec $c = \sqrt{\frac{\tau}{M_s}}$, et en utilisant le Laplacien $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\nabla^2 W(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = 0$$

(2.4)

Les solutions devront satisfaire les conditions aux limites sur le contour Γ . Pour les membranes, on peut envisager les mêmes conditions aux limites que pour les cordes. En particulier, on distingue les cas suivants :

Fixée sur Γ : $W(x, y, t) = 0$ pour $(x, y) \in \Gamma$ (2.5)

Libre sur Γ (par des forces) : $\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial n} = 0$ pour $(x, y) \in \Gamma$ (2.6)

∂n : dérivée de W dans la direction normale \hat{n} .

2.2.1 Membranes rectangulaires

Le déplacement d'une membrane rectangulaire de dimensions $(L_x \times L_y)$ est représenté par des fonctions à variables séparées

$$W(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2.7)$$

L'équation différentielle du déplacement se met sous la forme

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\sigma^2 = \text{constante 1} \quad (2.8)$$

D'où on peut tirer

$$\frac{X''}{X} = -\sigma^2 - \frac{Y''}{Y} = -\alpha^2 = \text{constante 2} \quad (2.9)$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \frac{X''}{X} = \alpha^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -\sigma^2 + \alpha^2 = -\gamma^2 \quad \text{avec } \sigma^2 + \alpha^2 = \gamma^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

On obtient trois équations différentielles indépendantes

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \quad (2.11)$$

$$Y'' + \gamma^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = c \sin \gamma y + d \cos \gamma y \quad (2.12)$$

$$T'' + \sigma^2 c^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = e \sin \sigma c t + f \cos \sigma c t \quad (2.13)$$

Ainsi, la forme spatiale générale pour le déplacement est

$$X(x)Y(y) = C_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha x \cos \gamma y + C_3 \cos \alpha x \sin \gamma y + C_4 \cos \alpha x \cos \gamma y \quad (2.14)$$

Pour la préciser davantage il faut considérer des conditions aux limites particulières.

On choisit ici le cas le plus fréquent : la membrane est fixée sur le contour Γ : $W(x, y, t) = 0$ pour $(x, y) \in \Gamma$.

CL pour $x=0$

$$X(0)Y(y) = C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y = 0 \quad (2.15)$$

La relation $C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y = 0$ doit être vérifiée pour tout y , ce qui conduit à $C_3=C_4=0$, donc

$$X(x)Y(y) = C_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha x \cos \gamma y \quad (2.16)$$

CL pour $x=L$

$$X(L_x)Y(y) = C_1 \sin \alpha L_x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha L_x \cos \gamma y = 0 \quad (2.17)$$

D'où

$$\sin \alpha L_x (C_1 \sin \gamma y + C_2 \cos \gamma y) = 0 \quad (2.18)$$

Si on rejette la solution triviale $C_1=C_2=0$, on obtient l'équation caractéristique

$$\boxed{\sin \alpha l_x = 0} \Rightarrow \alpha_m l_x = m\pi, \quad m=1,2 \quad (2.19)$$

conditions aux limites pour $y = 0$ et $y = L_y$

Ces conditions aux limites conduisent à $C_2 = 0$ et à l'autre équation caractéristique

$$\boxed{\sin \alpha l_y = 0} \quad \Rightarrow \gamma_n l_y = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Les solutions pour la constante σ sont

$$\sigma_{mn} = \sqrt{\sigma_m^2 + \gamma_n^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \quad (2.21)$$

Il est alors possible d'obtenir pour une **membrane fixée** sur ses bords

- les **fréquences naturelles**

2.22)

$$\boxed{\omega_{mn} = \sigma_{mn} c = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \sqrt{\frac{\tau}{M_s}}}$$

- les **déformées modales**

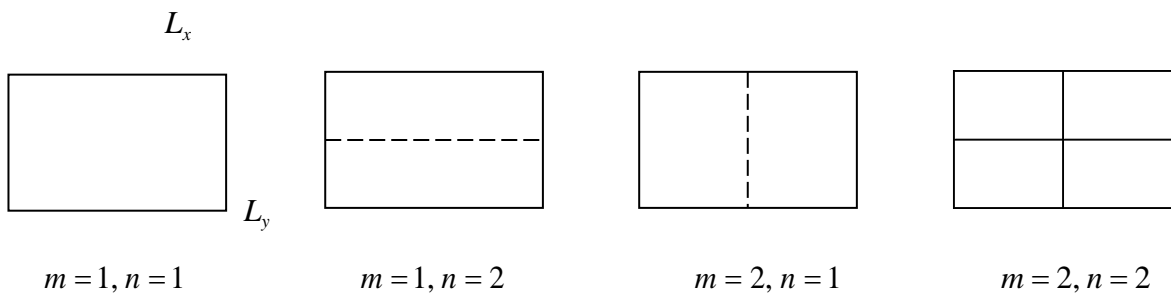
$$X_m(x)Y_n(y) = C_1 \sin \alpha_m x \sin \gamma_n y \quad (2.23)$$

$$= C_{mn} \phi_{mn}(x, y)$$

avec la déformée modale

$$\boxed{\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}, \quad m, n = 1, 2, \dots}$$

$$0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (2.24)$$



$$\omega_{11} = \pi c \sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}} \quad \omega_{12} = \pi c \sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{4}{L_y^2}} \quad \omega_{21} = \pi c \sqrt{\frac{4}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}} \quad \omega_{22} = \pi c \sqrt{\frac{4}{L_x^2} + \frac{4}{L_y^2}}$$

Figure 2.2: Représentation des déformées pour les 4 premiers modes (lignes nodales)[16]

Remarque

Pour une membrane carrée ($L_x = L_y = L$)

- les déformées ϕ_{mn} et ϕ_{nm} ont des fréquences naturelles identiques

$$\omega_{mn} = \omega_{nm} = \frac{\pi c}{L} \sqrt{m^2 + n^2} \tag{2.25}$$

- pour $m = n$, les déformées sont identiques ("modes doubles").

Solution générale et conditions initiales

La solution générale pour le déplacement s'écrit

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \Phi_{mn}(x, y) \tag{2.26}$$

Ce sont les conditions initiales qui permettent de déterminer les coefficients A_{mn} et B_{mn} en employant la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy \begin{cases} N_{mn} & m = p \text{ et } n = q \\ 0 & m \neq p \text{ et } n \neq q \end{cases} \tag{2.27}$$

On obtient ainsi les relations suivantes

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w(x, y, t) \phi_{mn}(x, y) dx dy = N_{mn} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \tag{2.28}$$

Et

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}(x, y, t) \phi_{mn}(x, y) dx dy = \omega_{mn} N_{mn} [A_{mn} \cos \omega_{mn} t - B_{mn} \sin \omega_{mn} t] \tag{2.29}$$

A l'instant $t = 0$, $w(x, y, 0) = w_0(x, y)$ et $\dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y)$ et les réalisations précédentes

permettent d'obtenir

$$B_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_0(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy$$

$$A_{mn} = \frac{1}{N_{mn} \omega_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}_0(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy$$

(2.30)

Par exemple, pour la membrane rectangulaire fixée sur le contour Γ

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad (2.31)$$

D'où

$$N_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy = \int_0^{L_x} \sin^2 \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \sin^2 \frac{n\pi y}{L_y} dy = \frac{L_x L_y}{4} \quad (2.32)$$

2.2.2 Membranes circulaires

L'équation des membranes circulaires s'obtient en écrivant l'équation des membranes en coordonnées polaires

$$\nabla^2 w(r, \theta, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33)$$

Avec le Laplacien $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Le domaine est défini par $0 < r < a$ et les conditions aux limites sont données pour $r = a$. Une solution est recherchée sous la forme de variables séparées

$w(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t)$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$\Theta T \left(R'' + \frac{1}{r} R' \right) + RT \frac{\Theta''}{r^2} - \frac{1}{c^2} R \Theta T'' = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\sigma^2 \quad \leftarrow \text{constante} \quad (2.35)$$

Comme précédemment, cette dernière relation peut se séparer en deux : une équation temporelle dont on connaît déjà la solution

$$T'' + \sigma^2 c^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = e \sin \sigma c t + f \cos \sigma c t \quad (2.36)$$

Et une autre équation

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \sigma^2 r^2 = m^2 \quad \leftarrow \text{constante} \quad (2.37)$$

Qui peut encore se séparer en deux par avec l'introduction d'une nouvelle constante

$$\theta''(\theta) + m^2\theta(\theta) = 0 \tag{2.38}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\sigma^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0. \tag{2.39}$$

La première a une solution harmonique de période 2π , ce qui implique que m soit un entier

$$\theta(\theta) = c \sin m\theta + d \cos m\theta \tag{2.40}$$

Et la deuxième équation différentielle est connue comme étant l'équation de Bessel dont la solution est

$$R(r) = aJ_m(\sigma r) + bY_m(\sigma r) \tag{2.41}$$

$J_m(x)$ et $Y_m(x)$ sont des fonctions de Bessel d'ordre m de première et seconde espèce. La figure montre que la fonction de Bessel de seconde espèce n'est pas finie au centre ($r = 0$) et ne peut donc pas être une solution de notre problème.

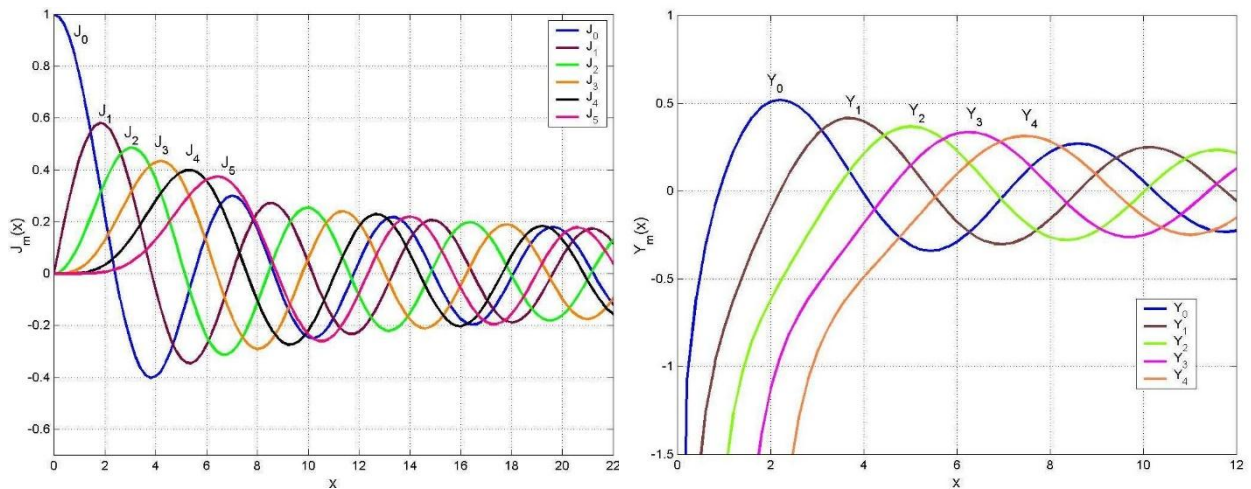


Figure 2.3: Représentation des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ (gauche) et de seconde espèce $Y_m(x)$ (droite). [1]

Si on considère que la membrane est tendue sur un cadre circulaire fixe, la condition aux limites $R(a) = 0$ conduit pour être satisfaite à chercher les solutions de l'équation

$$J_m(\sigma a) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{2.42}$$

Les solution discrètes $\chi_{mn} = \sigma_{mn} a$ (en nombre infini) correspondent aux passages à zéro des fonctions $J_m(x)$, comme le montre la figure ci – dessous (voir la tableau 2.1)

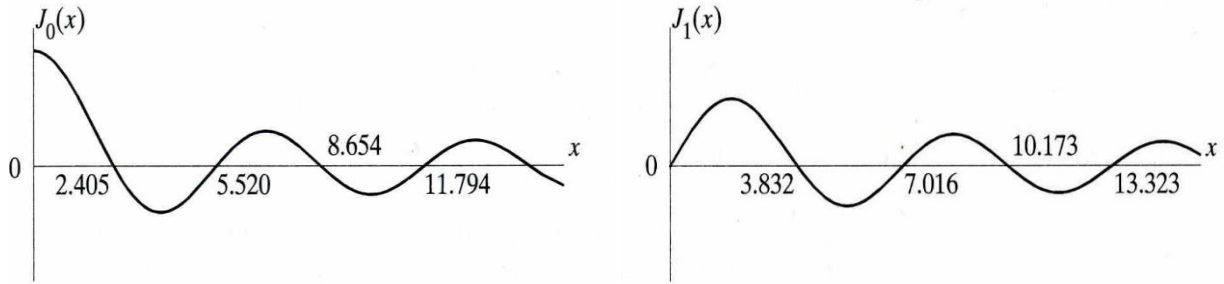


Figure 2.4:- Passages à zéro des fonctions de Bessel J 0 (x) et J1 (x)[1]

Tableau 2-1: Valeurs des arguments des fonctions de Bessel correspondant à leur passage à zéro

χ_{mn}	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
m=0	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092
m=1	2.40483	7.01559	10.17347	13.32369	16.47063
m=2	2.40483	8.41724	11.61984	14.79595	17.95982
m=3	2.40483	9.76102	13.01520	16.22347	19.40942
m=4	2.40483	11.06471	14.37254	17.61597	20.82693

les fréquences naturelles sont donc $(\sigma_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{a})$

$$\omega_{mn} = \sigma_{mn} c = \frac{\chi_{mn}}{a} \sqrt{\frac{\tau}{M_s}} \tag{2.43}$$

Et la solution générale (bords fixes)

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] J_m(\sigma_{mn} r) (c \sin m\theta + d \cos m\theta) \quad (2.44)$$

La déformée modale $\phi_{mn}(r, \theta) = J_m(\sigma_{mn} r) (c \sin m\theta + d \cos m\theta)$ apparaît comme composée de deux modes (à l'exception de $m = 0$) qui permettent d'orienter les figures modales par rapport à la position arbitraire des axes choisie, comme on peut le voir en écrivant cette déformée sous la forme équivalente $\propto J_m(\sigma_{mn} r) \sin m(\theta - \theta_0)$. Ce sont les conditions initiales qui fourniront les 4 coefficients, par exemple ici en considérant le déplacement initial

$$B_{mn} c = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^a w_0(r, \theta) J_m(\sigma_{mn} r) \sin m\theta r dr d\theta \quad (2.45)$$

$$B_{mn} d = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^a w_0(r, \theta) J_m(\sigma_{mn} r) \cos m\theta r dr d\theta \quad (2.46)$$

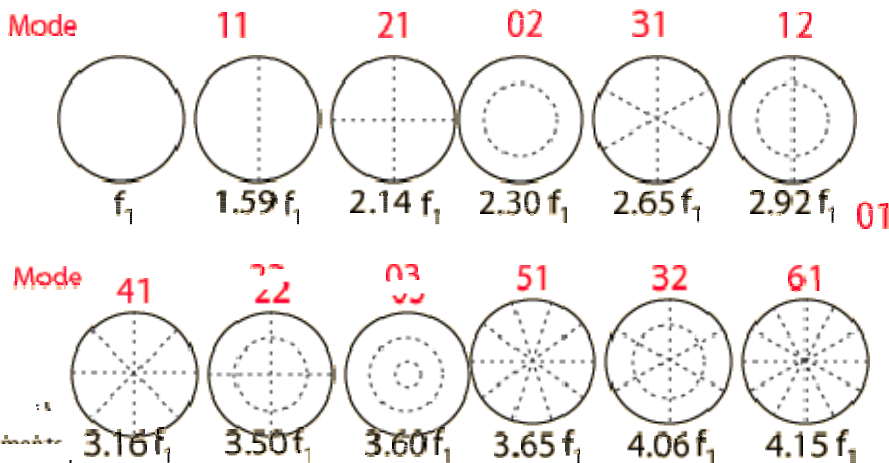


Figure 2.5:: Les déformées modales des membranes circulaires classées par fréquences naturelle croissantes (d'après Berg et Stork3)[16]

Les timbales sont des instruments composés d'une membrane fermant un volume acoustique. La peau de veau est remplacée maintenant par une membrane en Mylar parfaitement homogène et insensible à l'humidité. Des tirants actionnés par une pédale permettent de changer l'accord en modifiant la tension de la membrane. La position de la frappe vers le bord a pour effet de sélectionner plus particulièrement les modes (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1),

(6,1). Sur là face à l'air libre le fluide agit par effet d'inertie en augmentant la masse en mouvement avec pour conséquence une diminution des fréquences naturelles. La cavité crée un couplage vibroacoustique beaucoup plus complexe où l'amortissement joue un rôle important. Dans le tableau 5.2, les fréquences naturelles de la membrane sont comparées à des mesures de fréquences rayonnées.



(m, n)	f_{mn}	<i>fréquences acoustiques mesurées</i>	
		f	intervalles musicaux
1,1	1	1	fondamental
2,1	1.35	1.5	quinte
3,1	1.67	1.74	
4,1	1.99	2	octave
5,1	2.30	2.25	
6,1	2.61	2.49	octave + tierce majeure
...

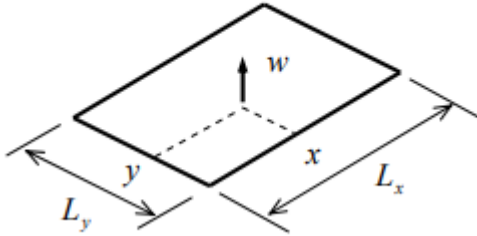
Tableau 2-2- Fréquences naturelles de la membrane et harmonique de la timbale (d'après Banede⁴)

2.3 VIBRATIONS DES PLAQUES

2.3.1 Equation des plaques minces

De façon similaire à l'équation qui décrit les déplacements dus aux ondes de flexion dans les poutres, il est possible d'obtenir une équation pour décrire les ondes de flexion qui existent dans un milieu à deux dimensions : c'est l'équation des **plaques**[22]

$$D\nabla^4 w(x, y, xt) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.47}$$



avec $w(x, y, t)$ le déplacement transversal, D la rigidité de flexion

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

h épaisseur, ρ masse volumique, E module de Young, ν coefficient de poisson, $\nabla^4 \equiv \Delta^2$ est opérateur biharmonique ou double Laplacien

Figure 2.6:- Notations pour la plaque [16]

$$\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \quad (2.48)$$

L'écriture des conditions aux limites dépend du système de coordonnées utilisé. pour une plaque rectangulaire, elles s'expriment pour chaque bord de la même façon que pour la poutre. Par exemple, pour une **plaque rectangulaire simplement supportée**

$$W(x, y, t) = 0 \quad \text{pour } x = 0, x = L_x, y = 0 \text{ et } L_y$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L_x \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = L_y. \quad (2.50)$$

L'équation des plaques ci-dessus correspond à la théorie des **plaques minces** ou théorie de **Kirchhoff-Love**. Elle est l'équivalent de la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres et néglige également les déformations dues au cisaillement et les effets de l'inertie de rotation. A cause de ces approximations, elle est valable pour les plaques minces (quand l'épaisseur est très petite devant les dimensions de la plaque et la longueur d'onde flexion) c'est à dire pour le domaine basse fréquence des plaques isotropes. La théorie plus complète, équivalente de la théorie des poutres de Timoshenko, est la théorie de **Mindlin** (1951).[1]

2.3.2 Méthodes pour obtenir les solutions

La solution recherchée pour le déplacement transversal est

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2.51)$$

En l'introduisant dans l'équation différentielle des plaques on obtient

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2 \frac{X'' Y''}{X Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{T''}{T} = \text{constante} = \beta^4 \quad (2.52)$$

Avec $\mu^2 = \frac{B}{\rho h}$ (μ n'est pas la célérité des ondes). La difficulté apparaît dans le membre de gauche ou il n'est plus possible d'obtenir des équations séparées pour $X(x)$ et $Y(y)$.

Une méthode de résolution consiste à choisir arbitrairement une fonction $X(x)$ qui satisfait les conditions aux limites, puis à résoudre l'équation précédente pour obtenir $Y(y)$. elle conduit à une solution exacte du problème. Cependant, il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques dans la majorité des cas de conditions aux limites. Cette méthode est souvent employée quand **deux bords opposés** sont **simplement supportés** (ou appuyés) :

C'est cette démarche qui est décrite par la suite.

Pour traiter les autres cas on utilise le plus souvent la méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur la minimisation de l'énergie vibratoire (potentielle et cinétique) ou encore une méthode approximative comme :

- la méthode des fonctions de poutre.
- la méthode des effets de bords de Bolotin.
- la méthode de Galerkin utilisant une technique variationnelle.
- des méthodes basées sur les différences finies et les éléments finis.

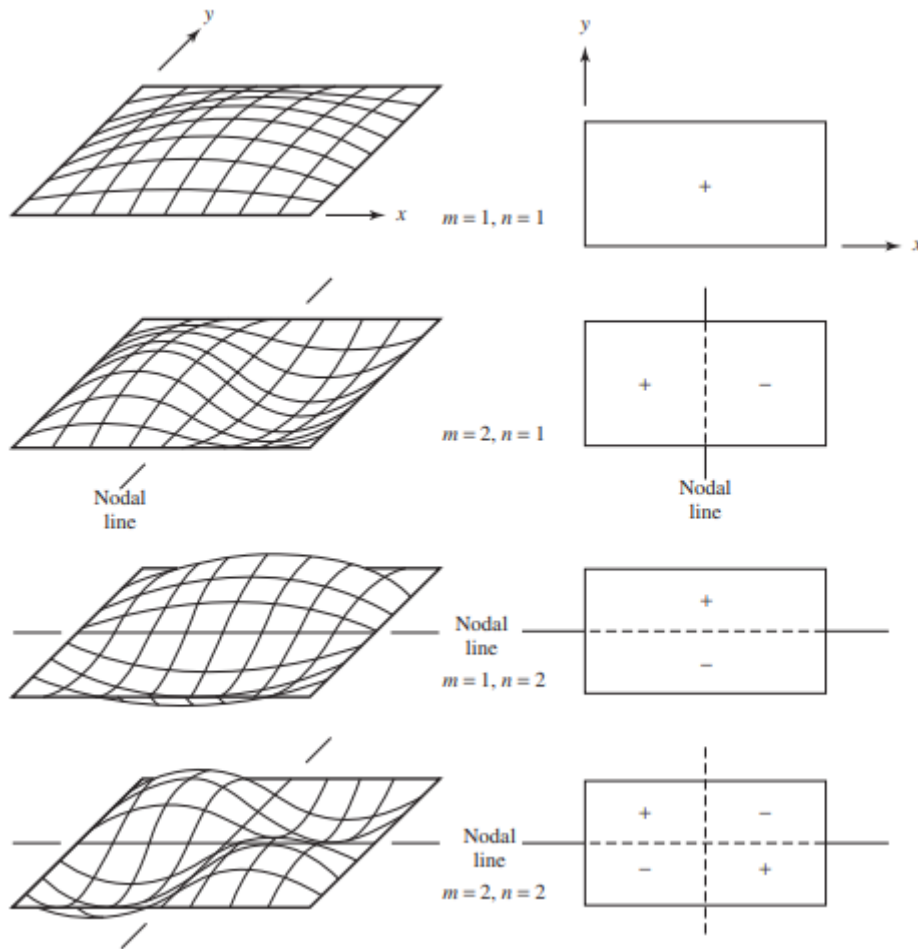


Figure 2.7: formes modales d'une plaque rectangulaire simplement supportée. Les lignes pointillées indiquent nodal lignes autres que les bords.[2]

2.3.2.1 Méthode analytique

2.3.2.1.1 Plaques rectangulaires simplement supportées

La fonction $\chi(x)$ est obtenue en satisfaisant les conditions aux limites simplement supportées pour $x=0$ et $x=l_x$. La fonction obtenue pour les poutres peut donc être utilisée

$$X(x) = \sin \frac{m\pi x}{l_x}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

Ses dérivées spatiales (par rapport à x)

$$X''(x) = -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l_x} \text{ et } X^{(4)}(x) = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{l_x} \quad (2.54)$$

Sont reportées dans l'équation différentielle

$$\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^4 - 2\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \frac{y''}{y} + \frac{y^{(4)}}{y} = \beta^4 \quad (2.55)$$

Ce qui conduit à une équation différentielle d'ordre 4

$$y^{(4)} - 2\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 y'' + \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^4 - \beta^4\right] y = 0 \quad (2.56)$$

Comme pour les poutres, on recherche des solutions de la forme De^{sy} ou D et s sont des constantes. En reportant cette solution générale dans l'équation différentielle, on obtient une équation caractéristique s

$$s^4 - 2\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 s^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^4 - \beta^4\right] = 0 \quad (2.57)$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont

$$s_1 = \gamma_1, \quad s_2 = -\gamma_1, \quad s_3 = j\gamma_2, \quad s_4 = -j\gamma_2$$

Avec

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2} \quad (2.58)$$

Donc la solution pour la fonction $\gamma(y)$ et

$$Y(y) = D_1 e^{\gamma_1 y} + D_2 e^{-\gamma_1 y} + D_3 e^{j\gamma_2 y} + D_4 e^{-j\gamma_2 y} \quad (2.59)$$

où

$$Y(y) = c_1 \sin \gamma_2 y + c_2 \cos \gamma_2 y + c_3 \sin h \gamma_1 y + c_4 \cos h \gamma_1 y \quad (2.60)$$

Cette solution est similaire à celle obtenue pour les poutres avec comme différence deux paramètres γ_1 et γ_2 à la place d'un seul. En toute rigueur, il faudrait écrire $\gamma_m(y)$ car les constantes de cette équation dépendent de m : C_{im} , γ_{1m} , γ_{2m} . Le coefficient de l'équation $y(y)$ peuvent s'obtenir en fonction des conditions aux limites par la même méthode que celle employée pour les poutres :

- les conditions aux limites en $y=0$ et $y=L_y$ permette d'obtenir 4 équations qui s'expriment sous forme matricielle

$$\mathbf{AC} = \mathbf{0}$$

Où \mathbf{A} est une matrice 4×4 et \mathbf{C} le vecteur des coefficients C_i .

- les solutions de l'équation caractéristique obtenue à partir de $\det(\mathbf{A})=0$ permettent de calculer de fréquences propres et les déformées modales.

Remarque : cette démarche utilise la forme particulière de $X(x)$ pour des conditions aux limites simplement supportées pour laquelle X/X et $X^{(4)}$ deviennent des constantes.

Pour les deux autres bords, il est possible de choisir n'importe quelles conditions aux limites.

Exemple : cas d'une plaque simplement supportée sur tous ses bords

Ce cas simple permet d'illustrer la méthode : les conditions simplement supportées en $y=0$ et $y=L_y$ conduise à l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin \gamma_2 L_y & \cos \gamma_2 L_y & \sin \gamma_1 L_y & \cos \gamma_1 L_y \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin \gamma_2 L_y & -\gamma_2^2 \cos \gamma_2 L_y & \gamma_1^2 \sin \gamma_1 L_y & \gamma_1^2 \cos \gamma_1 L_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.61)$$

Le calcul de $\det(\mathbf{A})=0$ conduit à

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh \gamma_1 L_y \sin \gamma_2 L_y = 0 \quad (2.62)$$

En écartant les solutions triviales, reste finalement

$$\sin \gamma_2 L_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 L_y = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

Par ailleurs, $\gamma_2^2 = \beta^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2$ avec $\beta^2 = \omega/\mu$ et $= \sqrt{D/\rho h}$, ce qui permet d'écrire

$$\beta^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad (2.64)$$

D'où l'expression des pulsations naturelles $\omega_{mn} = \beta^2 \mu$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.65)$$

L'étape suivant consiste à utiliser les 4 relations obtenues avec les conditions aux limites sur $y = 0$ et $y = L_y$ pour exprimer 3 des 4 coefficients C_1 à C_4 . on obtient alors l'expression

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad (2.66)$$

Qui permet d'écrire l'équation complét du déplacement d'une plaque simplement supportée

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \quad (2.67)$$

Avec la déforme modal

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y} \quad (2.68)$$

2.3.2.1.2 Plaques circulaires

Les plaques circulaires sont plus facilement analysées en coordonnées polaires Bien que les équations des plaques aient été dérivées en coordonnées rectangulaires, elles peuvent être transformées en coordonnées polaires en utilisant les relations.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.69)$$

Toutefois, les **plaques circulaires** permettent aussi des solutions analytiques exactes en variables séparées de la forme

$$R(r) \Theta(\theta) = [a_{mn} J_m(\beta_{mn} r) + b_{mn} I_m(\beta_{mn} r)] \sin m\theta + [c_{mn} J_m(\beta_{mn} r) + d_{mn} I_m(\beta_{mn} r)] \cos m\theta \quad (2.70)$$

Où $I_m(x)$ sont les fonctions de Bessel modifiées correspondant en fait à des fonctions de Bessel dont l'argument est imaginaire. Ces fonctions croissent en s'éloignant du centre pour pouvoir satisfaire les différentes conditions aux limites. Les coefficients arbitraires a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn} et l'argument β_{mn} sont précisées en fonction des conditions aux limites.

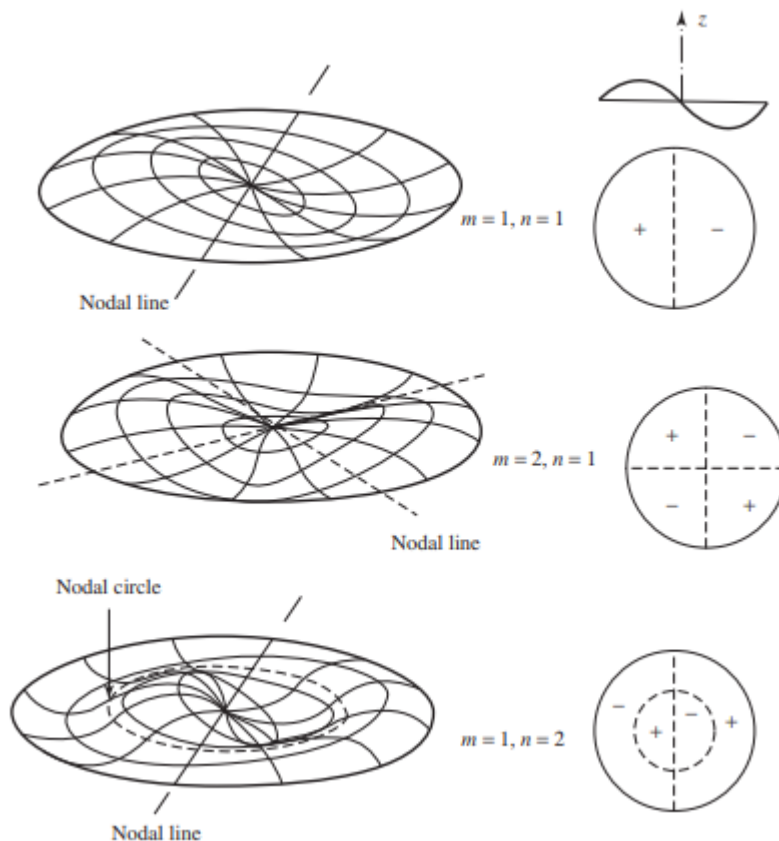


Figure 2.8:Formes modales d'une plaque circulaire [2]

Dans tous les cas où les solutions analytiques exactes ne sont pas accessibles, c'est la méthode de Rayleigh-Ritz qui est préférée car sa précision est contrôlable.

2.3.2.1.3 Méthode approchée de Rayleigh-Ritz

Cette méthode approchée qui permet d'obtenir des solutions pour des conditions aux limites on en donne ici le principe.

Le principe de Rayleigh valable pour les systèmes conservatifs (énergie potentielle maximale = énergie cinétique maximale) peut être employée pour trouver la première fréquence propre de la plaque. Par exemple, si on se donne pour la déformée modale approchée du premier mode la déformée statique pour les conditions aux limites considérées, il est possible de calculer les quantités suivantes à partir des valeurs quadratiques de la déformée :

- l'énergie potentielle maximale U_{\max} (énergie de déformation)
- la partie T_{\max} de l'énergie cinétique maximale T_{\max} telle que $T_{\max} = \omega^2 U_{\max}$

La pulsation propre approchée du premier mode s'obtient par

$$\omega_R^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} \quad (2.71)$$

Ritz en 1909 a étendu cette méthode pour calculer les r premiers modes d'une structure.

Les déformées modales sont représentées à partir d'une fonction ϕ comportant r coefficients arbitraires C_1, C_2, \dots, C_r , qu'il convient de calculer pour chaque mode

$$\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_r\phi_r. \quad (2.72)$$

Les fonctions spatiales ϕ_i doivent satisfaire les conditions aux limites du problème.

Les énergies potentielle et cinétique se calculent à partir de la valeur quadratique de ϕ et peuvent s'écrire formellement sous la forme

$$U_{max} = \sum_i \sum_j k_{ij} C_i C_j \text{ et } T_{max} = \sum_i \sum_j m_{ij} C_i C_j. \quad (2.73)$$

La différence entre énergie potentielle et énergie cinétique est minimisée par rapport aux coefficients

C_i et on obtient alors r équation homogène qui peuvent s'écrire sous forme matricielle.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial C_1} (U_{max} - \omega^2 T_{max}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_2} (U_{max} - \omega^2 T_{max}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_r} (U_{max} - \omega^2 T_{max}) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow [A] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

En annulant le déterminant de A , r valeurs propres $\lambda = \omega^2_R$ sont obtenues. La pulsation propre ω_{Rn} approxime la pulsation du mode n

$$\omega_{Rn} = \omega_n + \varepsilon \quad (2.75)$$

ε tend vers 0 quand le nombre r de coefficients C_i s'accroît par rapport à l'ordre n du mode, ce qui revient à dire que les dernières valeurs de ω_{Rn} ne sont généralement pas utilisables. Pour chaque mode n , ω^2 est remplacé par ω_{Rn}^2 dans l'équation matricielle $AC=0$, qui permet d'exprimer $r-1$ coefficients et déformée modale correspondante sous la forme

$$\phi_n = C_q(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_r\varphi_r), \quad (\alpha_q = 1) \quad (2.76)$$

2.3.2.1.4 Méthodes expérimentales

Chladni reprit les travaux de Hooke, en 1787, en n'utilisant non plus une plaque de verre et du sable, mais une plaque en laiton recouverte de sable . Wheatstone (1833) et Rayleigh (1873) utilisent les modes de porte liber pour essaye d'explique les figure de Chladni. Ritz (1909) utilise sur ce problème (la plaque liber) la méthode qui porte son nom et Sezawa donne en 1931 les premiers résultats pour une plaque encastree. Iguchi (1938) développe une méthode pour obtenir certain résultat analytique. Les premières synthèses compléter sur les méthodes utilisables pour calculer les fréquences naturelles les déformée modale de plaque sont dues à warburton (1854) et Leissa (1969).[28]

Chapitre 3

Chapitre 3 : Banc d'essai de plaque vibrante

3.1 L'expérience de Chladni

En 1787, Ernst Chladni (1756–1827) fit une découverte intéressante en se basant sur les travaux de Hooke. Du sable présent sur une plaque en vibration se déplace jusqu'à atteindre une ligne nodale[31], Il a répandu du sable sur une plaque. Un archet de violon est utilisé pour faire vibrer la plaque. Le sable vient en appui sur les lignes nodales, à l'endroit où aucune vibration ne se produit. Le sable vient donc s'y déplacer jusqu'à ne plus se mouvoir, ce sont les points d'équilibre de cette plaque. En s'accumulant ainsi, le sable dessine les lignes nodales, formant des motifs, aussi appelés les figures de Chladni. Voir la figure suivante.[26]



Figure 3.1 :création des figures de Chladni d'une plaque libre[12]

Les motifs des figures de l'expérience de Chladni sont regroupés dans la figure qui suit.

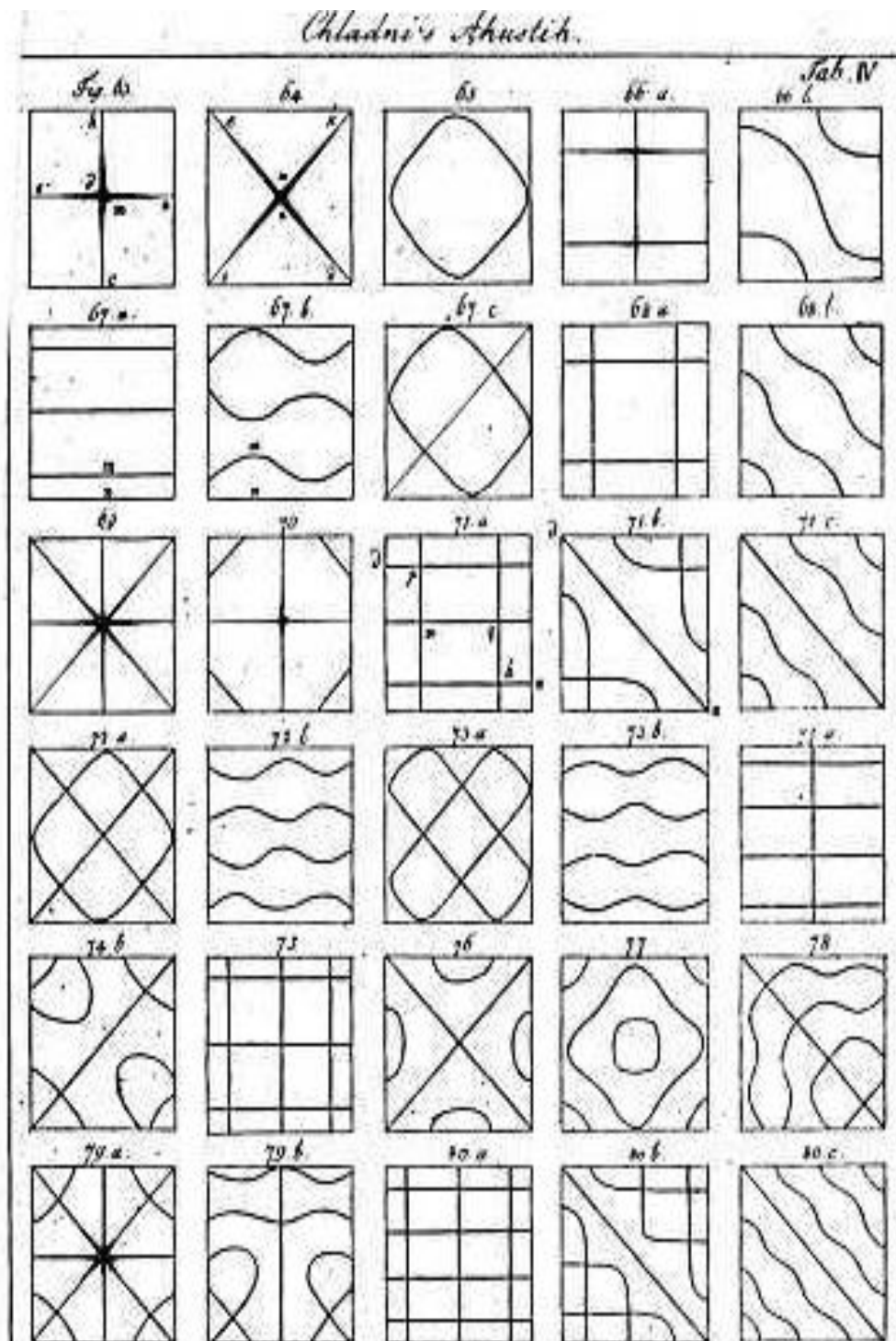


Figure 3.2 : Motifs de Chladni pour une plaque carrée[Ernst Chladni (1756-1827)][26]

Ces figures se forment car la plaque carrée possède différents modes de vibrations. Pour un mode donné, certaines zones ont une forte amplitude de vibration alors que d'autres ont une amplitude très faible. L'existence de ces modes de vibrations est due au fait que les vibrations sont imposées en un point particulier de la plaque (à l'extrémité de la plaque en utilisant l'archet du violon ou au centre de la plaque en utilisant l'hautparleur). Les figures de Chladni sont la mise en évidence du phénomène de vibration. Les plaques et le sable permettent de visualiser l'équivalent des ventres et des nœuds de vibration, appelées dans ce cas-ci lignes nodales. Quand la plaque vibre sous l'effet du son, les points de la plaque situés le long des lignes nodales ne bougent pas contrairement aux autres points de la plaque. [28]

3.2 Banc d'Expérience de Chladni en utilisant un générateur de fonction

Le premier dispositif de Chladni (fig. 3.1) permet la réalisation de figures d'oscillations avec du sable très fin. L'excitation des vibrations sont imposées par le frottement de l'archet du violon sur le bout de la plaque . Un autre moyen plus versatile est utilisé pour la génération des pulsations d'excitations. C'est les générateurs de fonctions avec un vibreur à membrane aussi appelé de Vibreur de Melde. (Voir le banc d'essai donné par la figure suivante).[30]



Figure 3.3 Générateur de fonction GF 5 2 MHz[27]

3.3 Réalisation de banc d'essai de plaque vibrante par nos propres Moyens

En essayant de reproduire l'expérience de Chladni avec les moyens disponibles, Le générateur de fonction GF 5 2 MHz présenté précédemment sera remplacé par un mini générateur de fréquences sonore(XR6022) avec un amplificateur. Tandis que le vibreur de Melde sera remplacé par un Hautparleur. Voir les deux figures suivantes.



Figure 3.4: Générateur de fréquence XR6022



Figure 3.5 :Hautparleur

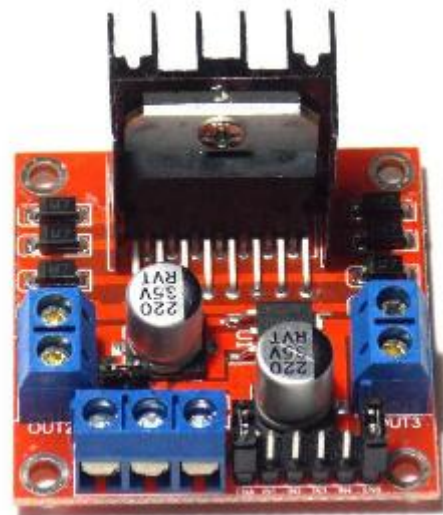


Figure 3.6:amplificateur tda 7267

3.3.1 Composantes du banc d'essai réalisé

L'hautparleur est utilisé comme une membrane de vibration, il reçoit les vibrations sonores générées par le générateur de fonction XR6022. Un amplificateur (fig. 3.6) est utilisé afin d'augmenter le signal de la sortie du générateur. Une tige verticale est fixée sur la membrane de l'hautparleur. Un support en plexiglass (fig. 3.7) avec quatre tiges filetées est utilisé pour le guidage. La figure suivante donne un aperçu général du banc d'essai réalisé.

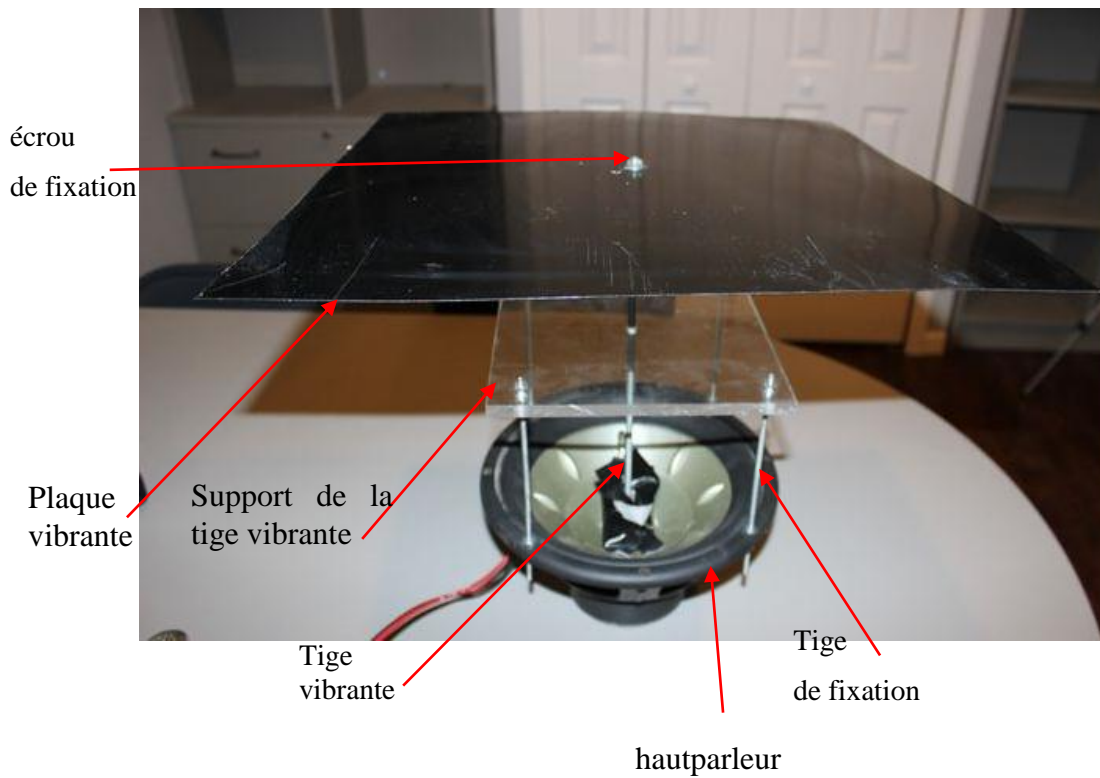


Figure 3.7 composantes du banc d'essai réalisé

Les composantes principales employées pour la réalisation du banc d'essai sont :

- 1.Support en plexi-glace de la tige vibrante.
- 2.haut-parleur
- 3.Tiges de fixation,
- 4.Axe et écrou 6mm
- 5.Rondelle
- 6.Plaque en acier galvanisé
- 7.générateur de signal de fonction
- 8.amplificateur

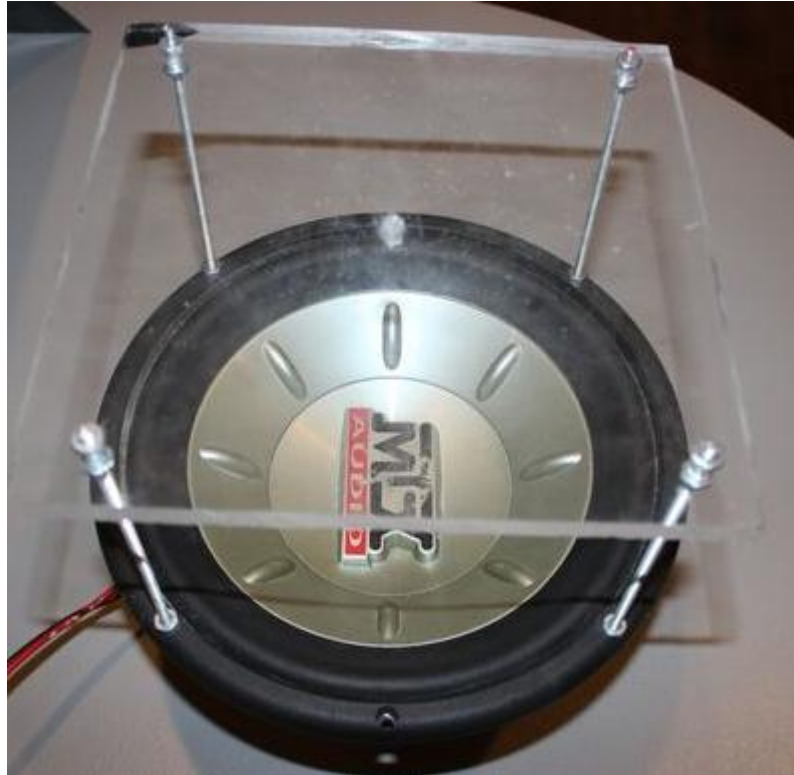


Figure 3.8 plaque de guidage avec quatre tiges du banc réalisé

3.3.2 Partie électronique du banc réalisé.

La partie électronique est réalisée pour générer des vibrations d'excitation. La figure suivante donne le schéma d'installation des composantes électriques et électroniques.

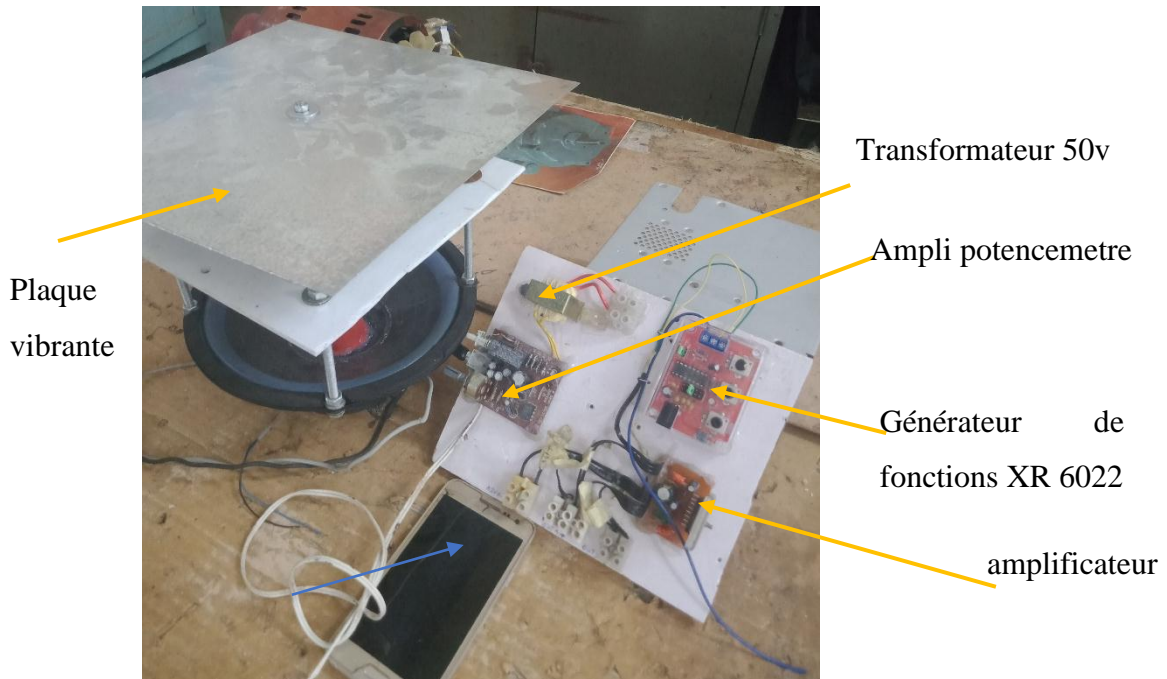


Figure 3.9 composante de la partie électronique

L'avantage du banc réalisé est la possibilité d'utiliser un smartphone comme générateur de fonction, l'augmentation du son en décibel, fait augmenter l'amplification des vibrations. L'inconvénient du banc d'essai réalisé est la nuisance du son issu du Haut-parleur.

3.3.3 Fonctionnement :

Une fois que la plaque est fixée au support, on dispose du sable sur celle-ci. Après la connexion de l'hautparleur sur l'amplificateur et le générateur XR6022, on peut faire vibrer la plaque sur une gamme de fréquence de 1Hz à 1MHz. On peut aussi frotter verticalement un archet sur le bord de la plaque.

En faisant varier lentement la fréquence de vibration, on découvre une variété de motifs d'ondes stationnaires. Il ne faut pas changer la fréquence trop rapidement - les fréquences de résonance sont très brèves et on peut en manquer plusieurs. On Note aussi qu'il faut ajuster l'amplitude et la quantité de sable nécessaire pour obtenir des motifs clairs.

3.3.4 Expérience 1 : Plaque quarrée vibrante

Un exemple de plaque quarrée avec ouverture est donné est représenté ci-dessous

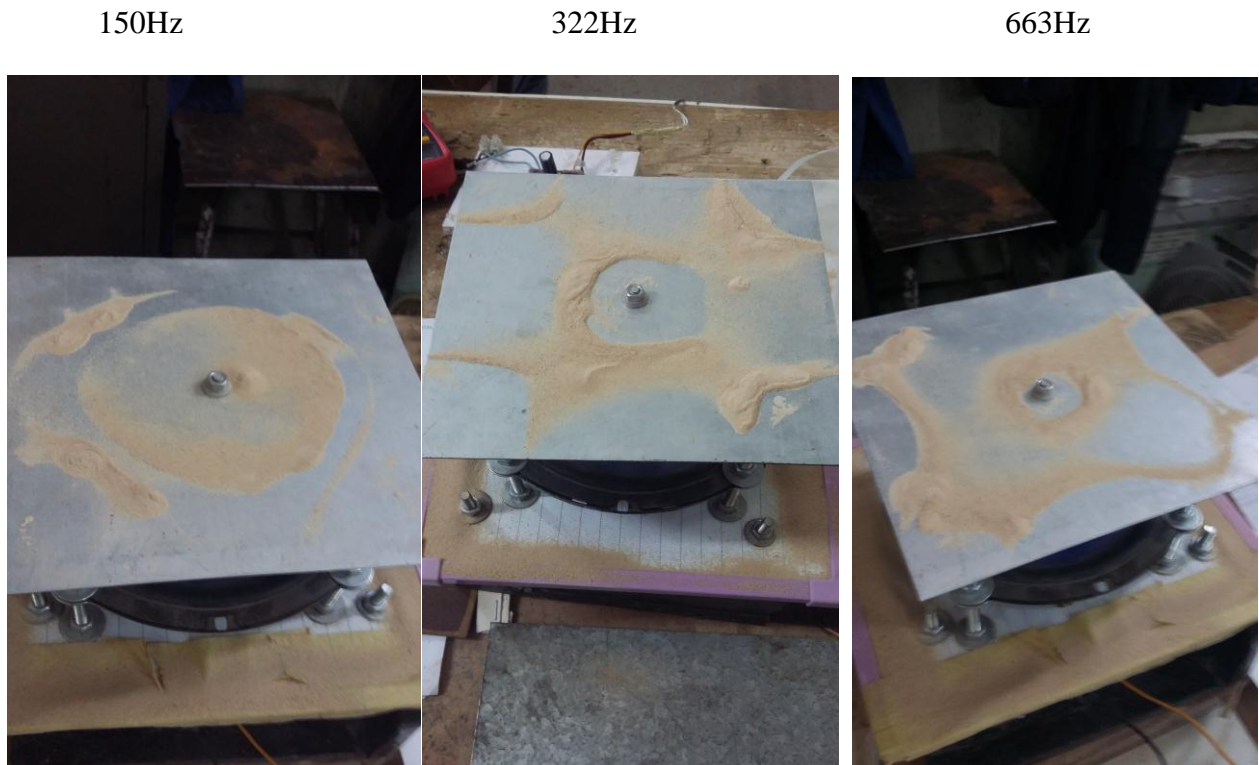


Figure 3.10 Motifs de l'expérience de la plaque carrée vibrante

La modification de la position du régulateur de fréquences d'excitations fait apparaître des figures différentes qui correspondent aux différents modes vibratoires de cette plaque. On peut également atténuer la vibration à certains endroits en y posant un doigt par exemple, créant ainsi d'autres motifs.

Le sable sur la plaque va alors se déplacer des zones de forte vibration vers les zones où la vibration est moins forte voire nulle et faire apparaître ce que l'on appelle des motifs d'ondes stationnaires qui consiste en un ensemble de nœuds de vibration régulièrement espacés (point où l'amplitude de vibration est minimale voire nulle) et d'anti-nœuds (point où l'amplitude de vibration est maximale).

Dès que nous modifions un ou plusieurs paramètres (forme de la plaque, taille, épaisseur, etc.) d'autres figures apparaissent.

Cependant, la vibration d'une plaque n'est sensible que pour certaines fréquences bien particulières, appelées fréquences de résonance. Pour chacune de ces fréquences de résonance, les modes de vibrations de la plaque sont différents. En d'autres termes les lieux de fortes et faibles amplitudes de vibrations ne sont pas les mêmes. C'est pourquoi au passage de chaque fréquence de résonance le motif dessiné par le sable change.

3.4 Validation et simulation

Les résultats expérimentaux présentés précédemment seront validés dans cette partie du chapitre. Deux types de plaque sont considérés :

- Les plaques circulaires
- et les plaques carrées.

3.4.1 Modèle élément finis

L'élément fini employé dans cette étude est l'élément tétraédrique à 10 nœuds. Voir la figure suivante.

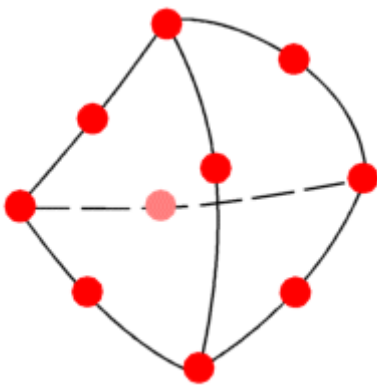


Figure 3.11 élément tétraédrique a 10 noeuds de discrétisation

Un exemple de discrétisation du maillage par cet élément est donné par la figure suivante.

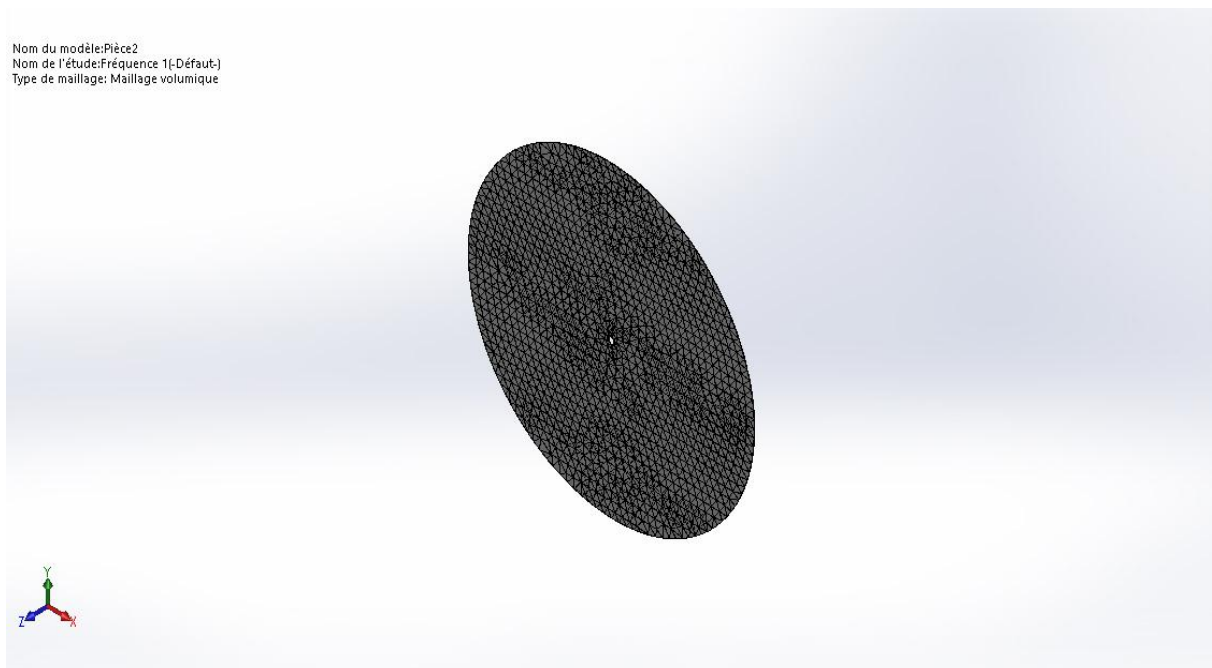


Figure 3.12: modèle des éléments finis

Cette figure présente le modèle éléments finis que nous avons utilisé pour le calcul des fréquences des modes propres de la plaque. Ce modèle est défini en fonction de la géométrie de la plaque.

3.4.1 Etude de convergence :

Une plaque rectangulaire avec ouverture est discrétisée par l'élément tétraédrique, le nombre des éléments est augmenté d'une manière graduelle , Le tableau suivant donne la convergence des cinq premiers modes. Les propriétés de la plaque sont données par :

Tableau 3-1 : convergence des cinq premières fréquences d'une plaque carrée avec ouverture encastrée.

mode	Taille de maillage		
	15	10	8
1	31.645	21.139	18.243
2	35.042	24.478	24.057
3	36.409	27.314	78.25
4	51.8	36.484	108.05
5	58.882	46.408	142.83

qui est égale à 15 mm, et 31.645 Hz pour une taille d'éléments qui est égale à 8 mm. La taille de l'élément tétraédrique de 8 mm mène à une discrétisation de 6080 éléments fins pour la plaque entière.

Plus nous augmentons le nombre d'éléments plus le temps de calcul est important. Le maillage 2 avec une taille de 8 mm sera utilisé dans les simulations qui suivent.

3.4.2 Plaque circulaire avec ouverture

En utilisant le logiciel SolidWorks une plaque circulaire en acier est modélisée par la méthode des éléments finis. Les propriétés physiques du matériau et les dimensions de la plaque sont :

- Epaisseur $h=0.5$ mm
- Rayon externe : $R_{ex}=300$ mm
- Rayon interne : $R_{int}=6$ mm
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Masse volumique: 7870 kg/m³
- Module de Young pour l'acier $E=210000$ N/mm²
- Poids de la plaque circulaire : 0.261255 kg

Les deux tableaux suivants donnent un résumé d'informations sur le maillage employé pour la modélisation de la plaque circulaire.

Type de maillage	Maillage volumique
Mailleur utilisé:	Maillage standard
Taille d'élément	8 mm
Tolérance	0.4 mm
Tracé de qualité du maillage	Haute

pour la plaque circulaire

Table 3.2: information quantitative sur le maillage

Nombre total de noeuds	14014
Nombre total d'éléments	6820
Aspect ratio maximum	47.956
% d'éléments ayant un aspect ratio < 3	0
% d'éléments ayant un aspect ratio > 10	97.5
% d'éléments distordus (Jacobien)	0
Durée de création du maillage (hh:mm:ss):	00:00:04

La condition aux Limite employée durant cette simulation numérique est la même qui existe sur le montage de la plaque sur le banc d'essai réalisé. La partie interne circulaire est encadrée tandis que la partie externe de la plaque reste libre. Voir la figure suivante.

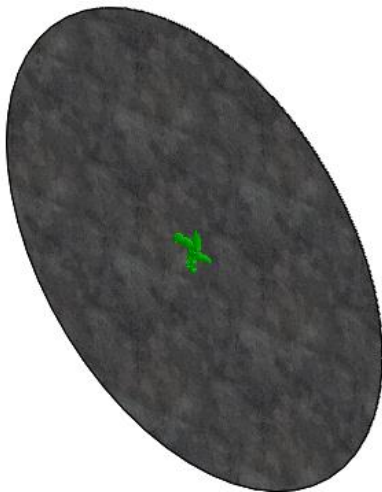


Figure 3.13 Condition aux limites (encastrée au centre)

3.4.2.1 Résultats de l'analyse modale par solide Works.

Après la modélisation tridimensionnelle de la plaque circulaire avec ouverture, et après l'implémentation des conditions aux limites, l'exécution du module de l'analyse modale du logiciel solide Works a permis d'avoir les fréquences et les modes propres suivants. Les cinq premières fréquences sont regroupées dans le tableau qui suit. Les modes propres correspondants sont données par les figures (3.5-3.9).

Tableau 3-2: Fréquences propres des cinq premiers modes

Fréquence No	Pulsation (Rad/sec)	Fréquence (Hertz)	Période (secondes)
1	108.37	17.248	0.057977
2	132.67	21.116	0.047358
3	467.14	74.347	0.01345
4	807.23	128.47	0.0077837
5	899.31	143.13	0.0069867

Les figures suivantes représentent la déformée modale pour les cinq premiers modes propres de la plaque circulaire.

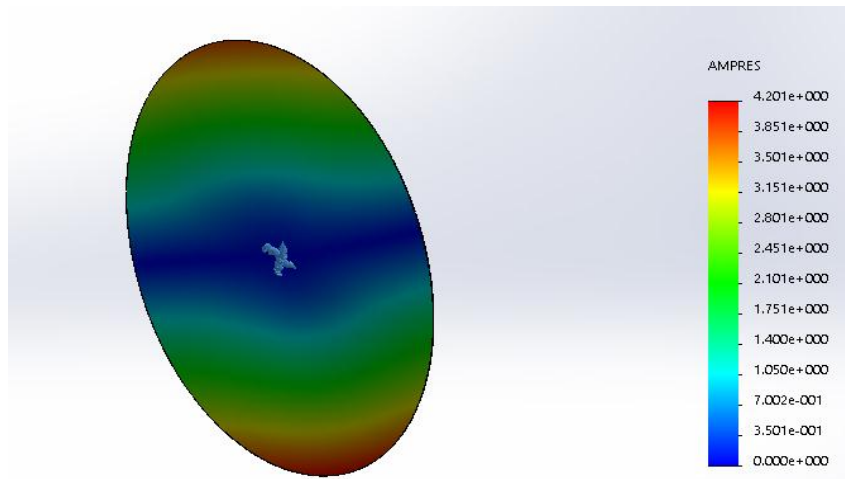


Figure 3.14: Déformée modale du premier mode propre de 17.248 Hz

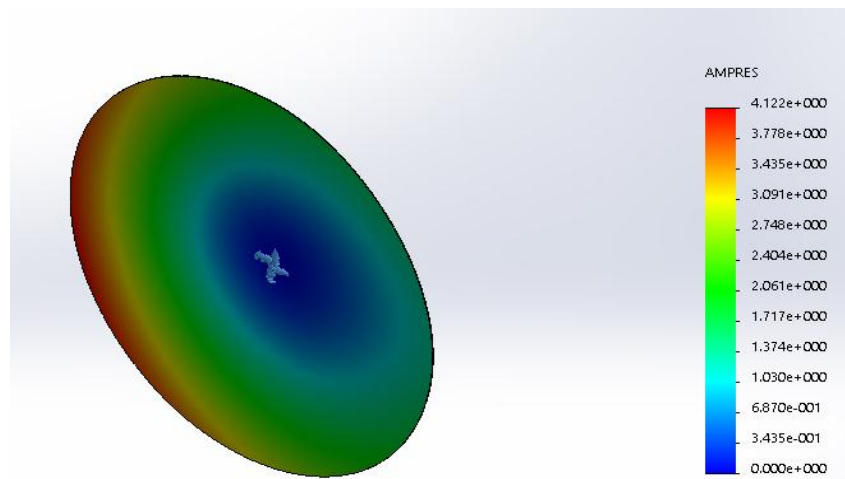


Figure 3.15 : Déformée modale du deuseme mode propre de 21.151 Hz

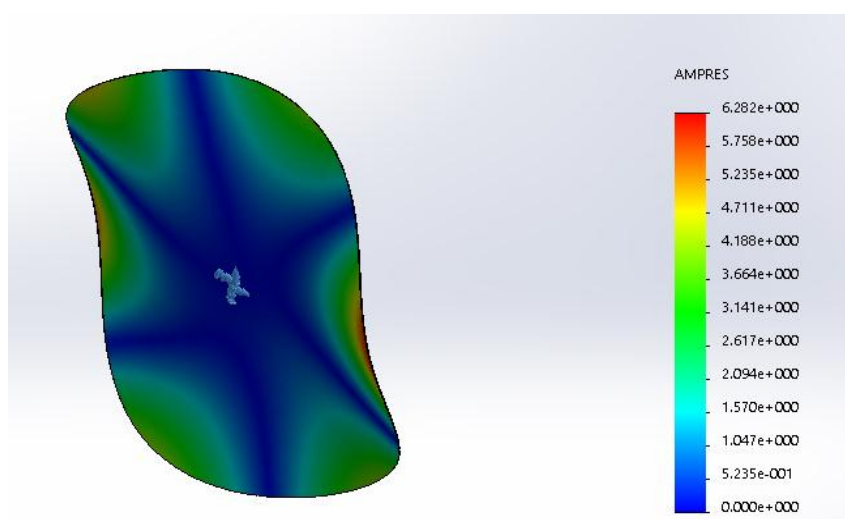


Figure 3.16: Déformée modale du troisième mode propre de 74.374Hz

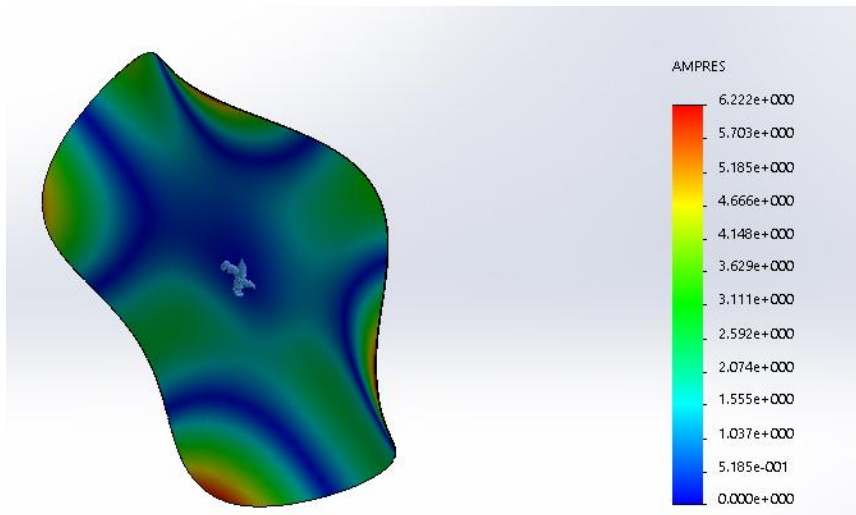


Figure 3.17 : Déformée modale du quatrième mode propre de 128.474Hz

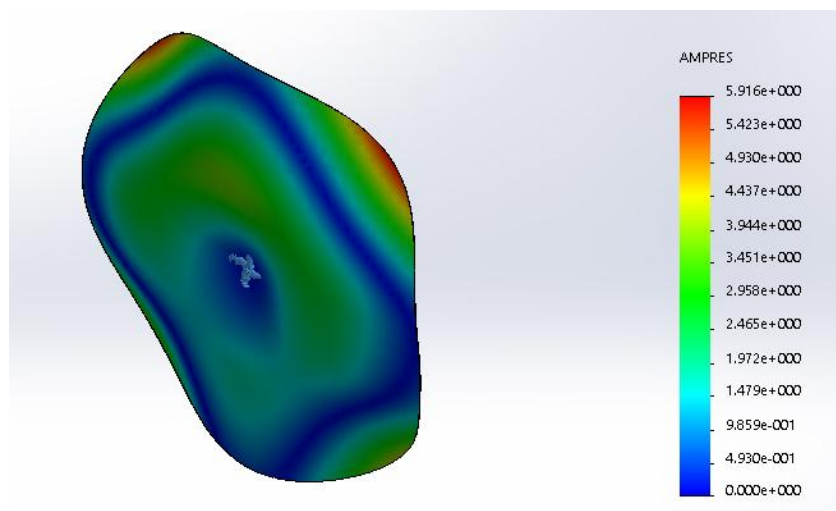


Figure 3.18 : Déformée modale du cinquième mode propre de 143.129Hz

Discussions :

La fréquence fondamentale de la plaque circulaire encastrée apparaisse à 17.248 Hz. La cinquième fréquence propre est à 143.129 Hz. Nous remarquons que dans un intervalle fréquentiel de 125.881Hz apparaisse cinq modes vibratoires. Les zones de couleur bleu dans les cinq figures représentent les zones à déformation nulle. Ces cette zone qu'occupera le sable dans le cas de vibration. C'est la zone de regroupement des grains de sable.

3.4.3 plaque carrée

En utilisant le logiciel SolidWorks un deuxième exemple de plaque carrée en acier est traité. Les propriétés physiques du matériau et les dimensions de la plaque sont :

- Epaisseur $h=0.5$ mm
- Rayon interne de l'ouverture : $R_{int}=6$ mm
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Masse volumique : $\rho =7870$ kg/m³
- Module de Yong pour l'acier $E=210000$ N/mm²
- Largeur de côté = 250mm
- Poids de la plaque carrée : 0.229739 kg

3.4.3.1 Maillage plaque carrée

Un exemple de discrétisation du maillage par cet élément est donné par la figure suivante :

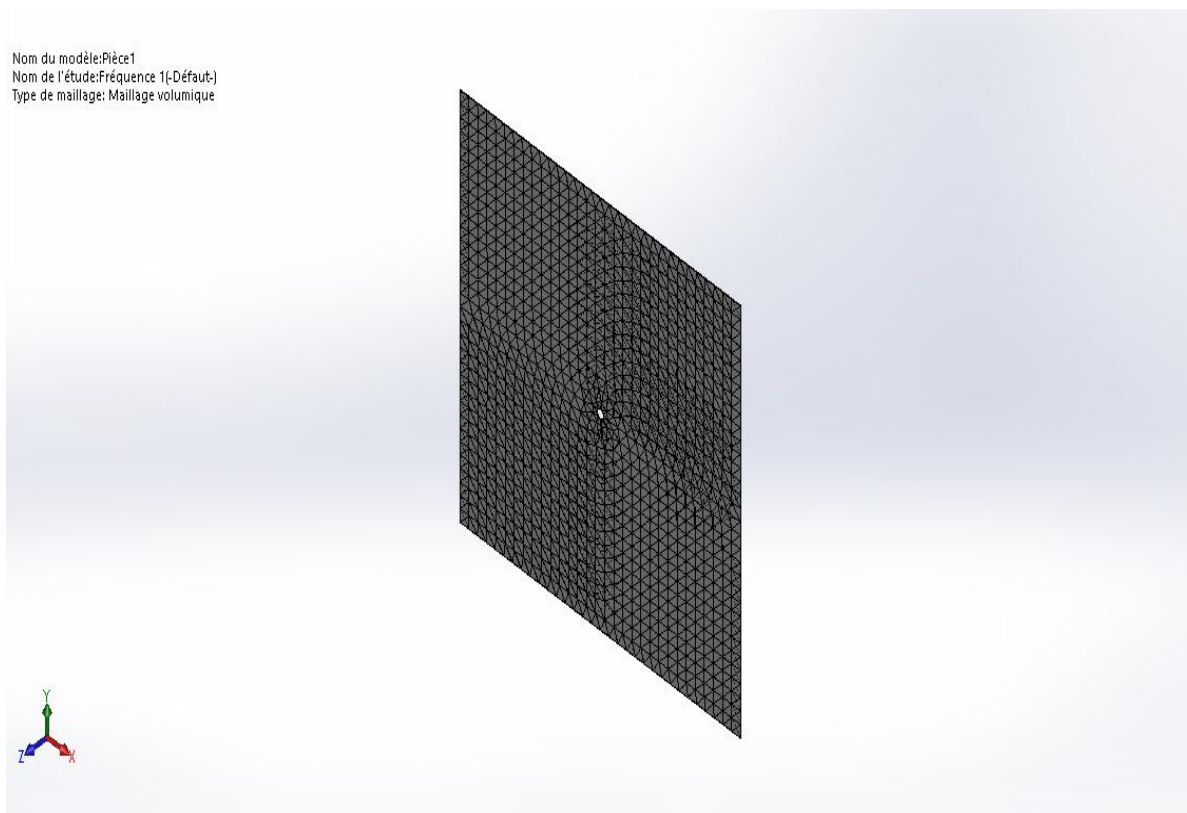


Figure 3.19: modèle des éléments finis

Les deux tableaux suivants donnent un résumé d'informations sur le maillage employé pour la modélisation de la plaque carrée.

Tableau 3-3 propriété du maillage pour la plaque carrée

Type de maillage	Maillage volumique
Maillage utilisé:	Maillage standard
Taille d'élément	8 mm
Tolérance	0.4 mm
Tracé de qualité du maillage	Haute

Tableau 3-4: information quantitative sur le maillage

Nombre total de noeuds	12554
Nombre total d'éléments	6086
Aspect ratio maximum	41.46
% d'éléments ayant un aspect ratio < 3	0
% d'éléments ayant un aspect ratio > 10	97.5
% d'éléments distordus (Jacobien)	0
Durée de création du maillage (hh:mm:ss):	00:00:04

L'objectif de cette partie d'étude numérique est le calcul des fréquences et des modes propres de plaques carrées. La condition aux limites considérée correspond à une liaison d'encastrement au centre de la plaque, tandis que la partie externe de la plaque reste libre. Voir la figure suivante.

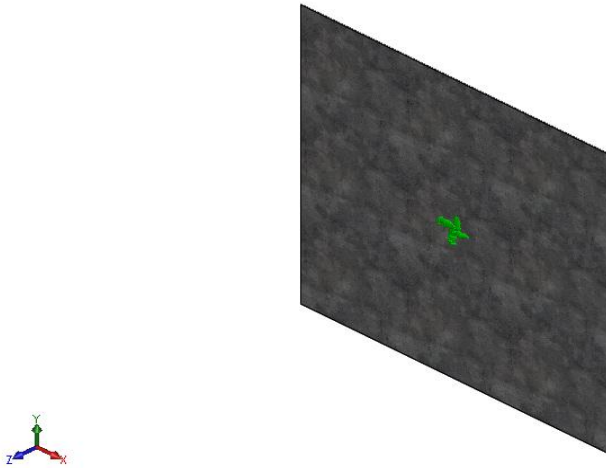


Figure 3.20: modèle géométrique de la plaque et condition aux limites

3.4.3.2 Résultats de l'analyse modale par solide Works.

Après la modélisation tridimensionnelle de la plaque carrée avec ouverture, et après l'implémentation des conditions aux limites, l'exécution du module de l'analyse modale du logiciel solide Works a permis d'avoir les fréquences et les modes propres suivants. Les cinq premières fréquences sont regroupées dans le tableau qui suit. Les modes propres correspondants sont données par les figures (3.13-3.17).

Tableau 3-5 : Fréquences propres des cinq premiers modes

Fréquence No	Pulsation (Rad/sec)	Fréquence (Hertz)	Period(secondes)
1	114.61	18.24	0.054823
2	151.14	24.054	0.041573
3	491.82	78.276	0.012775
4	678.8	108.03	0.0092563

5	897.37	142.82	0.0070018
----------	---------------	---------------	------------------

Les figures suivantes représentent la déformée modale pour le premier et le cinquième mode propre des plaques carrées. On remarque que les nœuds et ventres créés par la déformée sont propre à chaque plaque.

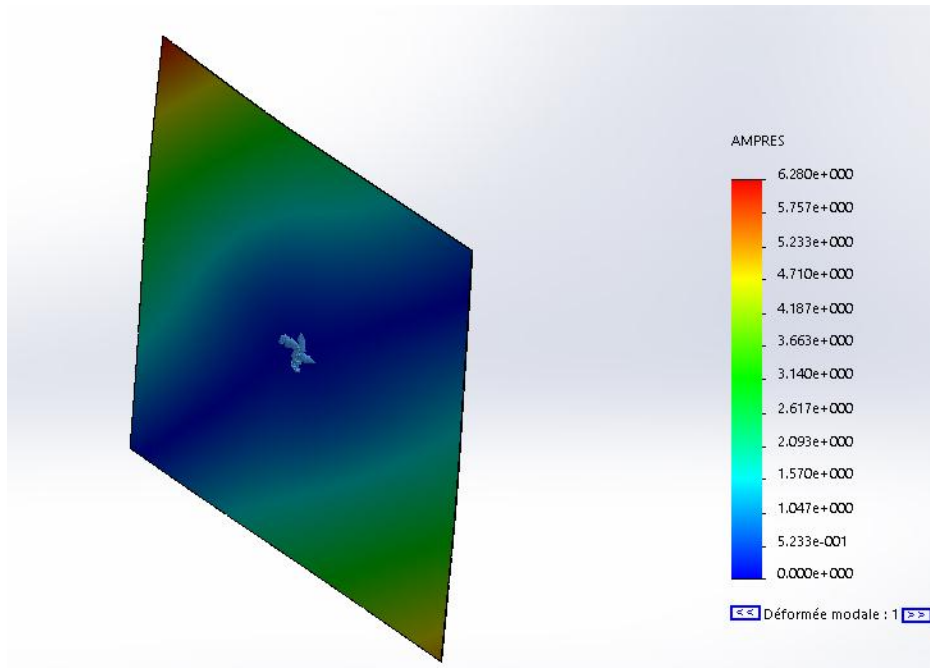


Figure 3.21 : Déformée modale du la première mode propre de 12.404Hz

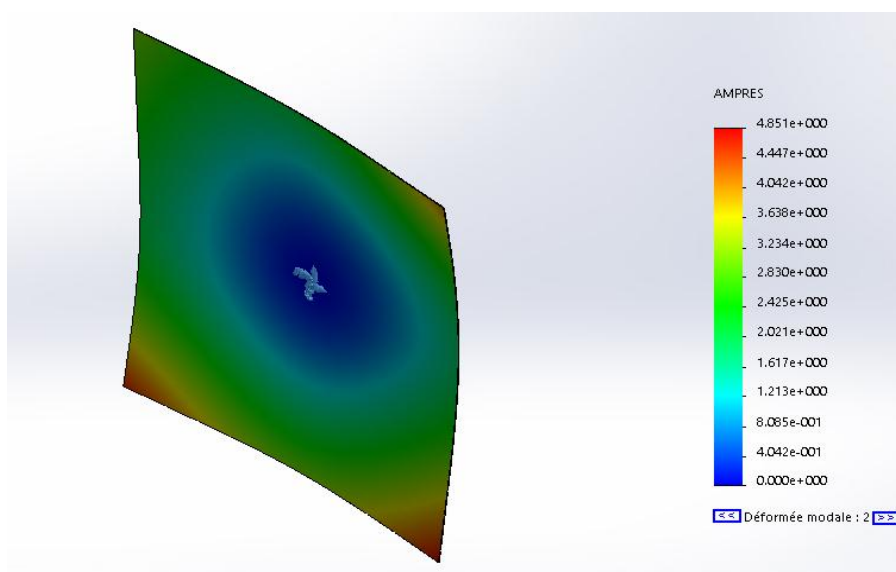


Figure 3.22: Déformée modale du la deuseme mode propre de 21.0544Hz

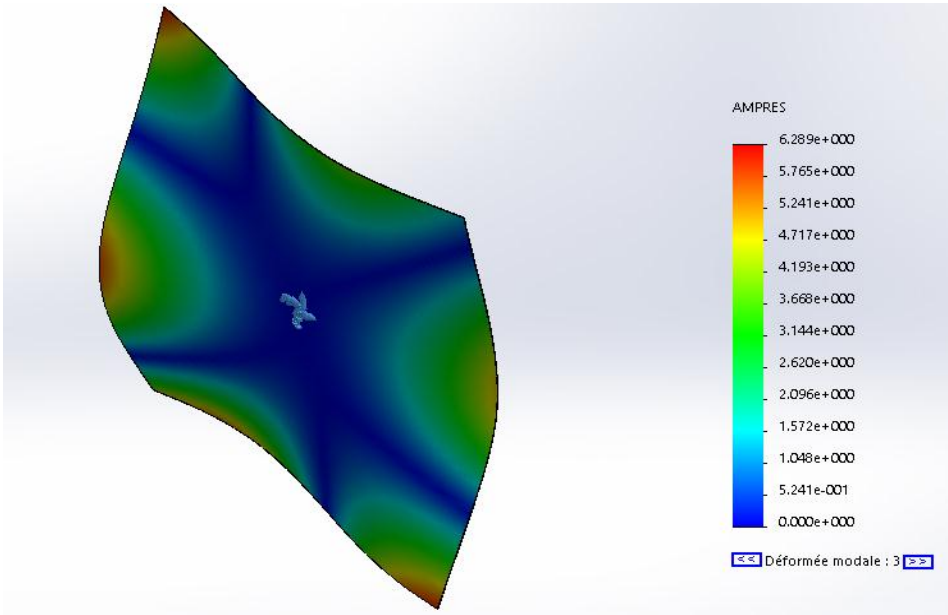


Figure 3.23 : Déformée modale du la troisième mode propre de 78.2755Hz

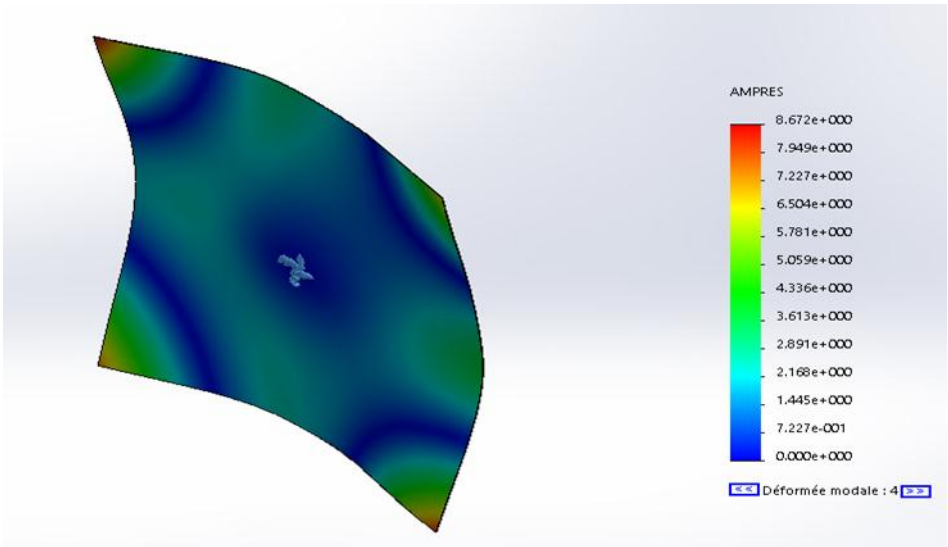


Figure 3.24 : Déformée modale du la quatrième mode propre de 108.035Hz

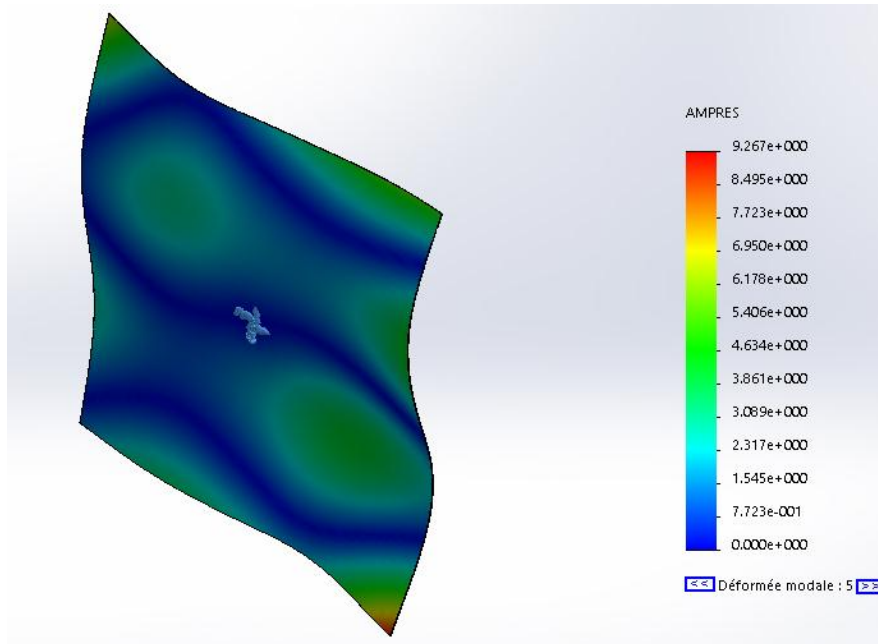


Figure 3.25 : Déformée modale du la cinquième mode propre de 142.821Hz

Discussions :

La fréquence fondamentale de la plaque carrée avec ouverture encastrée apparaisse à 12.2404Hz. La cinquième fréquence propre est à 142.821 Hz. Nous remarquons que l'intervalle fréquentielle des cinq premiers modes est 130.580 Hz. Comparativement a la plaque circulaire cet intervalle vibratoire est plus grande. Les zones de couleur bleu dans les cinq figures représentent les zones à déformation nulle. C'est la zone de regroupement des grains de sable.

Il est noté aussi que le quatrième mode (figure 3.6) avec une fréquence de 71.584 Hz représente la même configuration établie par l'expérience de Chladni (Voir la première plaque à gauche de la figure 3.9).

La deuxième plaque de la même figure 3.9 de Chladni correspond à la déformée du cinquième mode représenté par la figure 3.2

Conclusion générale

En conclusion, ce projet nous a énormément apporté, non seulement au niveau des connaissances scientifiques, mais aussi au niveau de la conduite de projet

Nous avons pu remplir nos objectifs, et même aller un peu plus loin. Nous avons visualisé les modes propres de vibration d'une plaque au cours de plusieurs expériences et ainsi observé le phénomène étonnant des figures de Chladni. Les résultats obtenus ont été mis en parallèle avec des modélisations numériques utilisant la méthode des éléments finis intégrée au logiciel de simulation mécanique Solidworks , Cette approche théorique nous a en outre permis d'avoir les modes et les fréquences propres afin de sélectionner les fréquences d'excitations sur notre banc d'essai. Ces deux approches (théorique et expérimentale) nous ont permis de mieux comprendre ce phénomène physique.

Cette étude consiste à décrire le comportement vibratoire des plaques. L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire des plaques en utilisant la méthode expérimentale de Chladni et la simulation numérique par éléments finis.

Après diverses expériences peu probantes avec les plaques métalliques, nous avons obtenu des résultats intéressants avec la plaque rectangulaire avec ouverture.

Dès que nous modifions un ou plusieurs paramètres (forme de la plaque, taille, épaisseur, etc.) la fréquence de résonance change et d'autres figures apparaissent.

Pour chacune de ces fréquences de résonance, les modes de vibrations de la plaque sont différents. C'est pourquoi au passage de chaque fréquence de résonance le motif dessiné par le sable change.

Il faut varier lentement la fréquence d'excitation du générateur de fréquence pour qu'on découvre une variété de motifs d'ondes stationnaires. Il ne faut pas changer la fréquence trop rapidement - les fréquences de résonance sont très brèves et on peut perdre plusieurs. On Note aussi qu'il faut ajuster l'amplitude et la quantité de sable nécessaire pour obtenir des motifs clairs.

Références Bibliographiques

- [1] Arthur W. Leissa, Ph.D. Mohamad S. Qatu, PhD Vibrations of Continuous Systems 2011.
- [2] John Wiley & Son Vibration of Continuous Systems This edition first published 2019.
- [3] John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. Published simultaneously in Canada Theories and Applications of Plate Analysis Classical, Numerical and Engineering Methods 2004.
- [4] Ahmed Shabana Vibration of Discrete and Continuous Systems, 2019.
- [5] Chakraverty, Snehashish. Vibration of plates / © 2009 by Taylor & Francis Group, LLC.
- [6] Peter Hagedorn TU Darmstadt, Germany Anirvan DasGupta IIT Kharagpur, India Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems 2007.
- [7] Hans Jenny CYMATICS A Study of Wave Phenomena and Vibration Revised Edition, 2001.
- [8] Jean-Louis LE MOIGNE la théorie du système général théorie de la modélisation . Nouvelle présentation, 2006.
- [9] John T. Cannon The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742.
- [10] Loren D. Lutes Random Vibrations Analysis of Structural and Mechanical Systems 2004.
- [11] Clarence W. de Silva VIBRATION Fundamentals and Practice 1999.
- [12] Jérôme YON Projet de Physique MISE EN EVIDENCE DES MODES DE VIBRATION ACOUSTIQUE D'UNE PLAQUE OU D'UN SYSTEME FLUIDE /2014.
- [13] M ark A nthony LaPack THE THEORY AND PRACTICE OF MEMBRANE EXTRACTIONS 1994
- [14] Loren D. Lutes .Shahram Sarkani Random Vibrations Analysis of Structural and Mechanical Systems 2004.
- [15] Clarence W. de Silva VIBRATION Fundamentals and Practice 1999.

- [16] Jean-Claude PASCAL-Cours de l'école nationale supérieure d'ingénieurs du Mans - Vibrations & Acoustiques 2.
- [17] Rao Vdukkipati Solving Vibration Analysis Problems using MATLAB 2007.
- [18] BOUGATAIA Aboubaker Seddik Diagnostic des machines électriques par vibrations mécaniques.
- [19] Zhou, D. Natural frequencies of rectangular plates using a set of static beam functions in the Rayleigh Ritz method. Journal of Sound and Vibration, 189 pp. 81 – 88. 1996.
- [20] Mohamed Amine BEN HENNI DOCTEUR THÈSE CONTRIBUTION A L'ETUDE DE CHARGEMENTS MECANIQUE ET THERMOMECANIQUE.
- [21] Isaline Marquaire VISUALISATION DES ONDES SONORES Section Son 2014.
- [22] Arthur W. Leissa VI B R A T I O N _ O F P L A T E S .
- [23] L. L. Faulkner Vibrations of Shells and Plates
- [24] JUNOT Gaspard et REY David. Rapport de physique expérimentale : Les Figures de Chladni. Université de Paris, 2013.
- [25] jenny, Hans. Comatiques, A Study of Wave Phenomena and Vibration, Volume I. 1967. (Édition revue, 2001).
- [26] jeulin Ondes Propagation d'une onde mécanique Les plaques de Chladni Version : 3112
- [27] JUNOT Gaspard et REY David. Rapport de physique expérimentale : Les Figures de Chladni. Université de Paris, 2013.
- [28] BOURKE Paul, Chladni Plates Interférence Surface, avril 2001, dans Paul Bourke [En Ligne], <http://paulbourke.net/géométrie/Chladni/> (consulté le 11 janvier 2016).
- [29] HILL Gary, Médiations, 1986, sur YouTube [En Ligne] ;
://bouquins.isabelle.free.fr/dotclear/public/TS/Ondes%20stationnaires.pdf.
- [30] Propagation d'une onde mécanique Les plaques de Chladni Version : 3112
- [31] Instrument acoustiques du XIX e s ,collection Musée Gassendi

[32] <http://www.researchgate.net/figure/amplitude-normalisee-de-la-du-systeme-a-un-degre-de-liberte-en-vibration>.

[33] DOMPIERRE Frédéric : DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES NATURELLES DE STRUCTURES SUBMERGÉES PAR LA MÉTHODE D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE BIDIRECTIONNELLE 2010.

[34] http://ww2.cnam.fr/physique//PHR004/L05_PHR004_2010.pdf.

[35] [https://www.researchgate.net/figure/1-Trois-familles-de-vibrations-presentes-en-usinage-](https://www.researchgate.net/figure/1-Trois-familles-de-vibrations-presentes-en-usinage)

[36] le <https://www.maxicours.com/se/cours/caracteristiques-des-sons-musicaux/s-vibrations-libres>.