

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبو بكر بلقايد - تلمسان

Université Abou bekr Belkaïd – TLEMEN

Faculté de Technologie



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTORAT Classique**

En : Génie mécanique

Spécialité : Dynamique des Machines

Par : ASSEUM Hassane

Sujet

Analyse Dynamique des Rotors en Matériaux FGM

Soutenue publiquement, le **06/06/ 2022** , devant le jury composé de :

Cheikh Abdelmadjid
HADJOUI Abdelhamid
BENACHOUR Mustapha
Boutchicha Djillali
Belloufa Amine

Professeur
Professeur
Professeur
Professeur
MCA

Univ. Tlemcen
Univ. Tlemcen
Univ. Tlemcen
USTO. ORAN
Univ. Ain Témouchent

Président
Directeur de thèse
Examineur 1
Examineur 2
Examineur 3

Année universitaire 2021/2022

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

- toutes ma famille.
- Tous mes frères et sœurs.
- Tous mes neveux et nièces.

Mr : Assem H

Remerciements

Cette étude présentée dans cette thèse a été conduite par Monsieur **HADJOUI Abdelhamid** Professeur et directeur de projet et je me permet de lui exprimer ma reconnaissance pour son suivi et ses conseils précieux durant la préparation de cette thèse. Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur **Cheikh Abdelmadjid** Professeur à l'université de Tlemcen qui a accepté de présider mon jury et pour l'intérêt qu'il a donné a ce travail.

Je remercie aussi Messieurs **Benachour Mustapha** Professeur à l'université de Tlemcen, **Boutchicha Djillali** Professeur à l' USTO.Oran et **Belloufa Amine** Maitre de conférence à l'université de Ain Temouchent pour l'intérêt qu'ils ont porté en acceptant d'examiner cette thèse de doctorat.

Je tiens également à dire merci **Saimi.A** et **Bensaid.S** et à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin a réaliser ce travail.

ملخص

هدف هذا العمل إلى دراسة السلوك الاهتزازي لعمود الدوار المركب تحت تأثير تغير درجة الحرارة. يتم نمذجة الهيكل بواسطة نسخة MEF (h-p) من طريقة العناصر المحدودة. تم إجراء دراسة نظرية على أساس نموذج شعاع تيموشينكو Timoshenko لتأسيس الطاقة الحركية وطاقة الإجهاد للعمود. يتغير توزيع الخصائص المادية لعمود FGM المركب من خلال السماكة ويتم تقييمها وفقاً لتوزيع قانون الأس (Loi de Puissance). تم التحقق من النتائج التي تم الحصول عليها ، ومقارنتها وصالحه مع تلك الموجودة في الأعمال السابقة . كما تم إعطاء أمثلة عددية لتوضيح الاختلاف في الترددات تحت تأثير درجة الحرارة ونوع المواد ومؤشر الكسر الحجمي. الكلمات المفتاحية إصدار h-p من طريقة العناصر المحدودة ، ، حزمة Thimoshenko .

Abstract

This work aims to study the vibratory behavior of the functional gradation (FG) composite rotor shaft under the influence of temperature variation and the power law index, to find out how to choose the type of FG composition, depending on vibratory behavior. The modeling of the structure is done by the hierarchical polynomial (h-p) version of the finite element method. A theoretical study based on Timoshenko's beam model is made for the establishment of the kinetic energy and the strain energy of the shaft. The distribution of material property of the functionally graded materials shaft change through the thickness and it is evaluated according to power-law distribution. The natural frequencies of the studied model are determined using a program developed in MATLAB. The results obtained from the shaft system in this article have been verified by comparing frequencies with the available literature previously published. Numerical examples are also given to illustrate the variation of frequencies under the influence of temperature, type of materials, and volume fraction index.

Keywords Version h-p of the finite element method, FGM distribution, Timoshenko beam, influence of temperature on FGM beams.

Résumé

Ce travail vise à étudier le comportement vibratoire de l'arbre de rotor composite fonctionnellement gradué FGM sous l'influence de la variation de température. La modélisation de la structure est faite par la version (h-p) de la méthode des éléments finis. Une étude théorique basée sur le modèle de poutre de Timoshenko est réalisée pour l'établissement de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation de l'arbre. La distribution des propriétés matérielles de l'arbre FGM change à travers l'épaisseur et elle est évaluée en fonction de la distribution de la loi de puissance. Les résultats obtenus ont été vérifiés, comparés et validés avec ceux de la littérature disponible. Des exemples numériques sont également donnés pour illustrer la variation des fréquences sous l'influence de la température, du type des matériaux et de l'indice de fraction volumique.

Mots clés Version h-p de la méthode des éléments finis, distribution FGM, Poutre de thimoshenko, influence de la température sur les poutres FGM.

Liste des Symboles

V_f	volume fraction du mélange graduel.
r_o	Rayon de l'épaisseur externe.
r_i	Rayon de l'épaisseur interne.
k	Indice de graduation Power Law du volume fraction.
V_m	Volume Fraktion du Metall.
V_c	Volume fraction de la céramique.
P_o	Propriétés a l'extérieur
P_i	Propriétés à l'intérieur.
$P_o(T)$	Propriétés en fonction de la température à l'extérieur.
$P_i(T)$	Propriétés en fonction de la température a l'intérieur.
$\rho(z)$	Masse volumique FGM.
ρ_c	Masse volumique céramique
ρ_m	Masse volumique métal.
$E(z,T)$	Module de Young FGM.
$E_m(T)$	Module de Young métal.
$E_c(T)$	Module de Young céramique.
$\nu(z,T)$	Coefficient de Poisson FGM.
$\nu_m(T)$	Coefficient de Poisson métal.
$\nu_c(T)$	Coefficient de Poisson céramique.
$\alpha(z,T)$	Coefficient de dilatation FGM.

$\alpha_m(T)$	Coefficient de dilatation métal.
$\alpha_c(T)$	Coefficient de dilatation céramique.
$k(z,T)$	Conduction du matériaux FGM.
$k_m(T)$	Conduction du matériau métal.
$k_c(T)$	Conduction du matériau céramique.
K_{cm}	Conductivité céramique-métal.
φ_z	Rotation de la section droite de la poutre après déformation.
ε_{ij}	Déformation sur x et y.
$[\sigma]$	Matrice contraintes
$\{\epsilon\}$:	Vecteur des déformations.
$[C]$	Matrice des constantes de rigidités.
τ_{ij}	Contrainte de cisaillement suivnt ij.
k_s	Facteur de correction de cisaillement.
E_{dA}	Energie de déformation de l'arbre.
r_i	Rayon de la i^{eme} couche FGM.
nc	Nombre de couches FGM.
E_{cA}	Energie cynétique de l'arbre.
E_{cD}	Energie cynétique du disque.
I_m	Moment d'inertie massique.
I_d	Moment d'inertie diamétral.
I_p	Moment d'inertie polaire.
ρ_i	Masse volumique de la couche i.
K_{xx} et C_{xx}	Raideur et amortissement des paliers suivant l'axe ox.
K_{zz} et C_{zz}	Raideur et amortissement des paliers suivant l'axe oz.

$K_{zx} = K_{xz}$ et $C_{zx} = C_{xz}$ Raideur et amortissement des paliers des termes croisés.

T_m Température sur la face du métal.

T_c Température sur la face de la céramique.

$T(z)$ Température sur les couches FGM.

ξ coordonnée adimensionnel.

Liste des Figures

Figure. 1.1	Modèle d'analyse pour une couche d'un matériau à fonctionnel graduesFGM..	16
Figure.1.2	Couches de l'arbre en matériaux FGM.....	18
Figure 1.3	Variation du volume fraction de la composition métal-céramique sur l'épaisseur radiale	18
Figure 1.4	Section droite d'un arbre FGM avec protection extérieur en céramique	19
Figure 1.5	Variation du modul de Young sur l'épaisseur du rotor FGM.....	20
Figure 1.6	Variation de la masse volumique sur l'épaisseur du rotor FGM.....	20
Figure 1.7	Variation du coefficient de Poisson sur l'épaisseur du rotor FGM.....	21
Figure 1.8	Les principaux domaines d'application des FGM. (Bessaim, 2014).....	22
Figure 2.1	Présentation d'un rotor simple.....	25
Figure 2.2	Poutre de Timoshenko.....	25
Figure 2.3	Section SG de la Poutre de Timoshenko.....	26
Figure2.4	Système de rotor arbre roulements.....	26
Figure2.5.	Déplacements et degrés de libertés dans les Trois directions.....	26
Figure 2.6	Nutation et Précession.....	28
Figure 2.7	Profil gauche de l'arbre FGM creux et Coordonnées cylindriques.....	29
Figure 2.8	Palier hydrodynamique avec Profils de vitesse.....	33
Figure 2.9	Modèle d'un Palier.....	34
Figure 2.10	Variation de la température sur l'épaisseur de l'arbre FGM pour divers indices de volume fraction k. AL2O3-SUS304.....	37
Figure 3.1:	Elément poutre 3D à deux nœuds	41
Figure 3.2:	Elément poutre à deux nœuds dans un plan, (déplacement nodales et interne)...	41
Figure 3.3	Rigidité et amortissement d'un palier.....	49
Figure 5.1	Représentation d'u rotor FGM creux.....	64

Figure 5.2 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction du nombre des éléments de la version h des éléments finis et du degrés du polynôme $p=4-20$ et $h=2-34$.	67
Figure 5.3 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction du degrés p du polynôme de Légendre. p varies de 4 a 20 et $h=1$	69
Figure 5.4 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction du nombre des éléments de la version h et du degré de polynôme p Le degré $p=4 :20$, et $h=2 :2 :34$	71
Figure 5.5 Convergence des 4 premières fréquences de la version h-p de la méthode des éléments finis en fonction du nombre des couches.....	73
Figure 5.6 Coordonnées cylindriques du système.....	75
Figure 5.7 Influence de la température interne sur la 1 ^{ère} fréquence propre du rotor pour divers indices de volumes fractions k, Ni-SUS304.....	77
Figure 5.8 Influence de la température interne sur la 2 ^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k, Ni-SUS304.....	78
Figure 5.9 Influence de la température externe sur la 1 ^{ère} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k, Al2O3-SUS304.....	79
Figure 5.10 Influence de la température externe sur la 2 ^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k, Al2O3-SUS304.....	80
Figure 5.11 Variation de la 1ere, 2eme, et 8eme fréquence en fonction de la température Pour un arbre isotropique ($\Omega=0$) 100 % SUS304	81
Figure 5.12 Variation de la 1ere fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de matériaux externes.....	83
Figure 5.13 Variation de la 1ere fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=1$ pour divers types de céramiques.....	84
Figure 5.14 Variation de la 1ere fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques.....	85
Figure 5.15 . Variation de la 1ere fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=10$ pour divers types de céramiques.....	86
Figure 5.16 Variation de la 2eme fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de céramiques.	87
Figure 5.17 Variation de la 2eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=1$ pour divers types de céramiques.....	88
Figure 5.18 Variation de la 2eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques.....	89
Figure 5.19 Variation de la 2eme fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=10$ pour divers types de céramiques.....	90

Figure 5.20	Variation de la 8eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de céramiques.....	91
Figure 5.21	Variation de la 8eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=1$ pour divers types de céramiques.....	92
Figure 5.22	Variation de la 8eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques.....	93
Figure 5.23	Variation de la 8eme fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=10$ pour divers types de céramiques.....	94
Figure 5.24	Géométrie du Rotor FGM creux avec	96
Figure 5.25	Variation de la 1ere et 2 eme freq Ni-SUS 304, Ni Externe.....	97
Figure 5.26	Vitesse critiques propres de 1ere fréquence et 2eme fréquence Ni-SUS 304, Ni Externe.....	97
Figure 5.27	Variation de la 3eme fréq et 4eme fréq Ni-SUS304 avec Ni sur la couche externe.....	98
Figure 5.28	Vitesse critiques propres de 3eme et 4eme fréquence Ni-SUS304 avec Ni sur la couche externe.....	99
Figure 5.29	Variation de la 1ere et 2 eme fréquence du rotor FGM AL2O3-SUS304 avec AL2O3 sur la couche externe.....	100
Figure 5.30	Variation de la vitesse critique dc la 1ere et 2 eme fréquence AL2O3 SUS304 avec AL2O3 sur la couche externe.....	101
Figure 5.31	Variation de la 3eme et 4eme freq AL2O3- SUS304 avec AL2O3 sur la couche exterieur.....	102
Figure 5.32	Variation de la Vc 3 et 4 freq AL2O3- SUS304 avec AL2O3 extérieur.....	102
Figure 5.33	Variation de la 1ere et 2eme freq Ni-SUS304 avec Ni a l'intérieur et SUS304 a l'extérieur.....	103
Figure 5.34	Variation de la Vc de la 1ere et 2eme freq du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni a l'intérieur et SUS304 a l'extérieur.....	104
Figure 5.35	Variation de la 3eme et 4eme freq du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni a l'intérieur et SUS304 a l'extérieur.....	105
Figure 5.36	Variation de la Vc de la 3eme et 4eme freq du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni a l'intérieur et SUS304 a l'extérieur.....	105
Figure 5.37	Variation de la 1ere et 2eme freq du rotor FGM AL2O3-SUS304 avec AL2O3 a l'intérieur.....	106
Figure 5.38	Variation de la Vc de la 1ere et 2eme freq du rotor FGM AL2O3-SUS304 avecAL2O3 a l'intérieur.....	107
Figure 5.39	Variation de la 3eme et 4eme freq du rotor FGM AL2O3-SUS304 avecAL2O3 a l'intérieur.....	108
Figure 5.40	Variation de la Vc de la 3eme et 4eme freq du rotor FGM AL2O3-SUS304 avec AL2O3 a l'intérieur.....	108

Liste Des Tableaux

Tab 1.1 :Les céramiques Techniques pour la mécanique la Thermomécanique	11
Tab 1.2 :Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de beryllium.....	12
Tab 1.3 : Les composés d'oxyde de zirconium.....	12
Tab.1.4 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	15
Tab 2.1 Variation de la température sur l'épaisseur de l'arbre pour divers indices vde volumes Fractions.	37
Tab 5.1 Propriétés géométriques de l'arbre.....	64
Tab 5.2 : Propriétés des matériaux constituant la composition FGM du rotor.....	65
Tab5.3 : Coefficients de Température de Ni et SUS304 (stainles steel)	65
Tab5.4 :fréquences naturelles des trois premiers Modes de vibrations en fonction $\Omega(RPM)$	74
Tab 5.5 : Variation des fréquences naturelles de vibrations en fonction de l'indice k du volume fraction.....	75
Tab5.6 Propriétés des matériaux Ni et SUS304 (stainles steel).....	76
Tab5.7 : Coefficients de Température de Nickel et SUS304 (stainles steel).....	76
Tab5.8 Propriétés des matériaux AL2O3 et SUS304 (stainless steel).....	78
Tab5.9 : Coefficients de Température de AL2O3 et SUS304 (stainles steel).....	79
Tab 5.10 Comparaison des fréquences vibratoires des rotors.....	81
Tab 5.11 Propriétés du Rotor1	96
Tab 5.12 Propriétés du Rotor 2.....	100
Tab 5.13 Propriétés du Rotor 3	103
Tab 5.14 Propriétés du Rotor 4.....	106

SOMMAIRE

LISTE DES SYMBOLES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES GRAPHES

Introduction générale.....	02
Revue bibliographique.....	06
Chapitre I :Céramique -mat gradient de propriétés	
1 Introduction.....	11
2Proprietes des céramiques.....	11
2.1 Propriété de resistance mécanique.....	11
2.2 Propriété de barriere thermique..... ;	11
3 Divers types de céramiques techniques	12
4 Matériaux à gradients des propriétés	12
4.1 Définition des matériaux à gradient des propriétés FGM	13
4.2 Intérêt des matériaux à gradient des propriétés	14
5. Propriétés effectives des matériaux à fonction graduées.....	15
6. Modélisation mathématique des matériaux FGM	17
6.1. Modélisation des structures P-FGM	17
7. Modélisation P-FGM de l'arbre du système rotor.....	18
7.1 Propriétés de l'arbre P-FGM.....	17
8. Domaines d'application des FGM.....	22
9. Influence de la température	23
10.Conclusion.....	24
Chapitre II. Cinématique des rotors	
1 Introduction	26

2 Hypothèses cinématiques.....	26
2.1. Relation déformation –déplacement.....	29
2.2. Relation contraintes –déformations.....	30
3. Energie de déformation de l’arbre.....	31
4. Energie cinétique de l’arbre.....	33
5. Energie cinétique du disque.....	33
6. Paliers.....	34
6.1 Travail des forces de raideur et d’amortissement	35
7. Fonctions de la température.....	36
8. Interprétation des résultats.....	38
Chapitre III Formulation par la méthode des éléments finis.	
1. Modelisation par la méthode des éléments finis version hp.....	41
2. Méthode des éléments finis version hp.....	41
3. fonctions de forme.....	42
4. Détermination des matrices élémentaires de l’arbre.....	44
4.1 Matrices de rigidités élémentaires de l’arbre	45
4.2 Matrices Masse et matrice gyroscopique de l’arbre.....	47
5. Détermination des matrices du disque.....	49
6. Détermination des matrices $[K_{pe}]$ et $[C_{pe}]$ des paliers.....	50
7. Travail des forces de raideur et d’amortissement.....	50
8. Equation différentielle du mouvement	51
Chapitre IV Organisation de la programmation	
1 Introduction	56
2. Outils de programmation	56
3. Programme principal	56
6. Algorithme de Programmation	56
7. Description du programme	56
7.1 Lecture des données	57

7.2 Lecture des fonctions de forme.....	57
7.3 Dérivé des fonctions de forme	57
8. Calcul de toutes les intégrales des fonctions de forme.....	57
9. Formation des matrices	58
10 Introduction des conditions aux limites	58
11 Transformation du problème aux valeurs propres a un problème aux Valeurs standard.....	58
11.1 Transformation d'une matrice A en une matrice de Heisenberg H supérieur.....	58
11.2 Algorithme de Housesholder	59
11.3 Factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieur	60
12 Affichage des résultats.....	60
13 Organigramme.....	60
Chapitre V Résultats et interprétations	
1 Introduction.....	64
2 Propriétés géométriques de l'arbre.....	64
3. Etude de la convergence	65
4. Convergence	66
4.1. Convergence de la version h.....	66
4.2. Convergence de la version p	68
4.3. Convergence de la version hp.....	70
4.3. Convergence en fonction du nombre des couches de la graduation du Mélange.....	72
5. Validations	74
5.1. Validation d'un arbre en matériaux isotrope.....	74
5.2. Validation arbre FGM creux.....	75
6. Etude paramétrique.....	76
6.1-Fréquence propres par rapport à la Variation de la température...	76

6.1.1. Rotor FGM Ni(interne) et SUS304 (externe).	76
6.1.2. Rotor FGM AL2O3(interne) et SUS304 (externe).....	78
7. Rotor isotrope en SUS304.....	81
8. Fréquences vibratoires de l'arbre FGM pour divers matériaux externe...	82
9. Etude d'un rotor a trois disques.....	97
9.1/ Rotor FGM, Ni-SUS304 avec Ni externe.....	97
9.2/ Rotor FGM, AL2O3-SUS304 avec AL2O3 externe.....	101
9.3/ Rotor FGM, Ni-SUS304 avec Ni Interne.....	104
9.4/ Rotor FGM, AL2O3-SUS304 avec AL2O3 externe.....	107
10/ Conclusion Générale.....	111
References bibliographiques.....	113
ANNEX1.....	120
ANNEX2.....	121
ANNEX3.....	122

Introduction Générale

Introduction.

Les ensembles tournants sont des structures aux formes et aux comportements très complexes qui sont aux cœurs des équipements Industriels :

-Dans la fabrication mécanique : arbres tournants des machines outils.

-Dans la transformation d'énergie : arbres d'alternateurs des centrales électriques.

-Dans le transport : arbres de transmission des véhicules et engins, roulants, arbres d'hélice des sous marins, des méthaniers et des grands bateaux pour le transport de gaz et des marchandises.

-Dans l'aéronautique: arbres des réacteurs d'avions et arbre multi rotor concentriques

-Dans le nucléaire : arbres des centrifugeuses nucléaires.

Sachant qu'ils ont une influence directe et prépondérante sur la fiabilité et les rendements, ils font l'objet d'études de plus en plus fines et précises pour l'amélioration et l'évolution vers des ensembles de hautes technologies. Les exigences de tous ces équipements sont bien entendu le premier souci du concepteur et pour toutes ces machines on cherche tout d'abord à augmenter le rendement. Les tendances actuelles visent à diminuer la masse totale, augmenter la vitesse de rotation, accroître la durée de vie et améliorer la fiabilité. De nos jours les machines tournantes sont de plus en plus performantes en termes de sa conception par des matériaux innovants tels que les matériaux composites.

Les matériaux et structures composites sont de plus en plus utilisés dans les domaines techniques avancés principalement en raison de leur rapport masse /puissance qui est particulièrement favorable. Cependant, le principal inconvénient des matériaux composites est représenté par la faiblesse des interfaces entre les couches adjacentes connues sous le nom de phénomène de délimitation pouvant conduire à une défaillance structurelle. Pour surmonter partiellement ces problèmes, une nouvelle classe des matériaux dénommés matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ou (Functionally Graded Materials) a récemment été proposée. Ces matériaux ayant des propriétés qui varient à travers l'épaisseur le long d'une direction bien définie de manière continue et donc exempté des problèmes de faiblesse de l'interface et des phénomènes de délimitations. La graduation des propriétés de ces matériaux réduit les variations brutales des contraintes thermiques et des contraintes résiduelles qui peuvent créer des problèmes de compositions structurelles entraînant des avaries de fonctionnements du système tournant ou autres. Dans une structure fonctionnellement graduée la composition du mélange de deux ou plusieurs matériaux varie de façon continue en fonction de la position le long d'une direction choisie, généralement

l'épaisseur de la structure. Les matériaux FGM peuvent fournir aux concepteurs une réponse matérielle adaptée et une performance dans divers types d'environnements thermiques, chimiques ou autres En raison de sa résistance élevée à la température, de sa rigidité élevée et de ses caractéristiques de faible densité, les matériaux FGM attirent l'attention des scientifiques, concepteurs et constructeurs des engins spatiaux et aéronautiques et dans de nombreux domaines tels que pour la conception des composants mécaniques en rotation, arbre des turbines à gaz et moteur à réaction pour les équipements spatiales et aérospatiales militaire et civil. Les premiers concepts des FGM ont vu le jour au Japon en 1984 par M. Niino et al. (National Aerospace Laboratory of Japan) (Niino, 1987), ils sont présentés pour résoudre les problèmes dans les environnements à très grand gradient de température, ils forment une barrière thermique destinée aux structures spatiales, aux réacteurs de fusées...ect. Cependant, l'aventure débute réellement autour de l'année 1985 lorsque d'autres pays (USA, Royaume-Uni) ressentent à leur tour la nécessité d'aborder l'ère spatiale en concevant chacun unilatéralement, lors d'un projet d'avion spatial, un avion ayant la possibilité de naviguer à la fois dans l'espace et transitoirement dans l'atmosphère terrestre (Wakashima, 1990). En dynamique des machines les matériaux FGM sont faits par une composition de mélange graduel de deux matériaux généralement métal et céramique qui sert de barrière thermique capable de supporter une température de surface de 2000° K et un gradient de température de 1000° K à travers une section.

Les matériaux FGM sont des matériaux composites dans lesquels la composition ou la microstructure varie localement en vue d'atteindre des propriétés recherchées pour un fonctionnement précis. Ils sont principalement fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique, la partie métallique joue le rôle de support de la structure tandis que la céramique fournit une protection thermique dans les environnements à gradients de température très sévères (par exemple, centrifugeuses des réacteurs nucléaires, rotor des turbines a gaz, Aubes et pales des rotors des turbines a gaz, ...). Dans de telles conditions, la céramique fournit la résistance à la chaleur et à la corrosion, tandis que le métal fournit la dureté et la ténacité. De plus, le changement progressif des propriétés peut être adapté à différentes applications et environnements de service. En raison des progrès technologiques, il est nécessaire de disposer des matériaux à capacités avancées et de leurs maîtrises pour des utilisations industrielles. Les FGM ont une grande variété d'applications dans l'ingénierie qui nécessite des matériaux innovants et performants pour chaque type d'utilisation :

1. Domaine aérospatial (avions spatiaux, structures spatiales, réacteurs, composants de moteur de fusée, contrôle de vibration, structures adaptatives, etc.).

2. Domaine nucléaires, isolations des structures de refroidissement, centrifugeuse nucléaires.
3. Domaine d'ingénierie (pales de turbine, arbre, etc.)
4. Domaine de l'électronique (capteur, semi-conducteur à bande graduée, substrat, etc.)
5. Energétique (échangeur de chaleur, cuve de réacteur, caloduc, etc.)
6. Domaine des biomatériaux (peau artificielle, système d'administration du médicament, prothèses,... etc.....).
7. Produits de base (matériaux de construction, articles de sport, carrosserie... etc....)
8. Conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermo-ionique, piles à combustible, Cellules solaires, etc.)

Ces matériaux existent dans la nature, comme par exemple, le bambou, les os et même notre peau qui est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps.

Le lecteur trouvera dans cette thèse, une synthèse bibliographique concernant l'état de l'art et toutes les avancées scientifiques dans le domaine de la dynamique des rotors FGM suivis de cinq chapitres qui sont:

Chapitre 1: Ce chapitre est réservé à la description des matériaux céramiques, surtout la céramique technique et son application dans divers domaines tel que la mécanique et le thermique.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous étudions la cinématique des rotors et les hypothèses fondamentales des rotors FGM dans le cas de la théorie de Timoshenko.

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à la formulation par la méthode des éléments finis version hp et aux problèmes discrétisés pour la détermination de toutes les matrices ; masse, gyroscopique, raideur et amortissements aux niveaux des paliers, ainsi que la détermination de l'équation du mouvement du rotor arbre avec disque sur des paliers rigides.

Chapitre 4 : Ce chapitre est réservé à la description du programme de calcul et un aperçu détaillé de son algorithme de travail.

Chapitre 5: Dans ce chapitre les modèles de calcul sont validés, et les résultats numériques et leurs graphes obtenus sont interprétés et pour finir une conclusion générale est faite pour mettre de la lumière sur le principal point de passage de notre analyse suivi de quelques perspectives de recherches.

Revue Bibliographique

Revue bibliographique :

Pour répondre aux besoins grandissant de l'industrie de la dynamique des machines sous l'influence de la température, la recherche scientifique s'est développée ces dernières années en utilisant des matériaux céramiques, matériaux innovants ayant une excellente caractéristique de résistance aux hautes températures. Cependant, les applications de la céramique seule dans l'industrie mécanique restent très limitées en raison de leur faible dureté. Récemment, une nouvelle classe des matériaux composites appelées Matériaux fonctionnellement gradués FGM, ont attirées l'attention des scientifiques et des industriels. Ces matériaux sont non homogènes et fabriqués à partir des différentes couches des mélanges progressifs des matériaux généralement constitués de céramique et de métal. Ce mélange progressif est fonction du volume fraction qui varie sur l'épaisseur de la structure FGM. En regroupant les différentes couches des mélanges graduels constituant le matériau FGM, on obtient le mélange global qui a les caractéristiques d'un matériau multi-structurel composé par la graduation des propriétés obtenues en variant progressivement le mélange de la fraction volumique des deux constituants des matériaux FGM. La continuité des propriétés sur l'épaisseur évite les problèmes d'interfaces. On peut dire que les matériaux FGM sont formés de céramique constituants capables de résister à des températures élevées en raison de leur qualité de barrière thermique, tandis que le métal favorise la performance des propriétés mécaniques les plus fortes.

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués-FGM- ont été initialement conçus comme un matériau réfractaire et léger pour les structures aérospatiales, les réacteurs à fusion et moteurs (Hirai, 1999), (Uemura, 2003). Actuellement, les Matériaux Fonctionnellement Gradués sont développés pour des utilisations plus générales en tant que composants structurels à hautes performances. Pour cela, les scientifiques ont poursuivi leurs recherches sur cet axe et son application dans l'industrie avec la construction des turbines à gaz. pales en matériaux FG (Librescu, 2005). L'utilisation de ces matériaux s'est également développée avec la construction des rotors en matériaux à fonction gradué pour les réacteurs d'avion et turbines de propulsion destinée à l'aéronautique. Cette évolution a été accélérée par la recherche scientifique développée notamment par (Yuming Fu 2012) qui a étudié la stabilité d'un rotor en matériaux FG avec une fraction piézoélectrique pour contrôler les fréquences vibratoires. (Cheng, 2006), a fait une analyse des fréquences vibratoires d'une poutre en porte-à-faux rotatif en utilisant la méthode des modes supposé avec effet de couplage. Argeso, H., Eraslan, Ahmet N., 2007, a élaboré un modèle de calcul pour l'analyse élastique, partiellement

plastiques des contraintes résiduelles dans les arbres tournants en matériaux FGM. Rahimi, G.H., Davoodinik, A.R., 2008, a étudié le comportement d'une poutre en matériaux FGM sous l'influence d'un chargement thermique en tenant compte de l'état stable de la conduction thermique à travers l'épaisseur. Piovan, M.T., Sampaio, R., 2009, a fait l'analyse d'un arbre rotatif en matériaux FGM en tenant compte des déformations arbitraires et axiales et de la variation graduelle de la distribution des matériaux Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M., 2009, A donné une Présentation de l'analyse de flambage mécanique et thermique des plaques FG céramique - métalliques. En utilisant la méthode Ritz. Simsek, M., 2009, a fait une étude des Vibration libre et forcée d'une poutre à gradation fonctionnelle soumise à une charge harmonique mobile concentrée. E Carrera, G Giunta, P Nali, M Petrolo., 2010, ont présenté des éléments de poutres hiérarchiques étudié sur la base de la formulation Carrera unifiée(CUF) et ils ont adoptés la théorie des équations de l'élasticité micropolaires. Les composantes de déplacement sont développées en termes de coordonnées de section, (x, y). Afsar, A.M., Go, J., 2010, a fait une analyse par éléments finis d'un model thermo-élastique d'un disque FGM circulaire mince soumis à une charge thermique et une force d'inertie due à la rotation du disque. Simsek, M., 2010, a fait une étude du comportement vibratoires des Fréquence fondamentale d'une poutre en matériaux FGM sous divers types de conditions aux limites. Alibeigloo, A., 2010, donné une solution analytique pour les poutres FGM avec actionneur piézoélectrique sous l'influence d'une charge thermomécanique. Kocaturk, T., Simsek, M., Akbas, S.D., 2011, a étudié l'analyse statique non-linéaire d'une poutre en porte-à-faux en matériaux FGM sous l'influence d'une charge transversale uniformément répartie en utilisant la théorie de Timoshenko. Mazzei, Arnaldo J., Scott, Richard A., 2011, ont étudié le comportement des arbres en matériaux FGM sous l'influence des vibrations de résonance de flexion sous chargement axial dépendant du temps, Par la méthode quadrature différentielle. Alashti, R. A., Khorsand, M., 2011, a effectué une analyse thermo-élastique en trois dimensions d'une coque cylindrique en matériaux FGM avec couches piézoélectriques sous l'effet de charges thermo électromécaniques asymétriques. Xiang, H.J., Yang, J., 2008, analyse des vibrations libres et forcées d'une poutre FG laminée d'épaisseur variable sous l'influence des contraintes initiales induites thermiquement et à la fois axiales et rotatives Avec prise en compte de l'inertie de la poutre. La poutre se compose d'un substrat homogène et des couches FG non homogènes dont la composition du matériau suit une loi de distribution de puissance selon la direction de l'épaisseur en termes de fractions volumiques des constituants du matériau. Cette étude est faite selon la théorie de l'élasticité linéaire tridimensionnelle Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S., Xiang, Y., 2009, étude des vibrations

libres et du flambement élastique des poutres fissurées en matériaux FGM. les propriétés du matériau varient selon la distribution exponentielle le long de la direction de l'épaisseur de la poutre. Hosseini, S.A. A., Khadem, S.E., 2009, étudié les vibrations libres d'un arbre rotatif à simple support en extension avec une déformation en flexion non linéaire. L'inertie rotative et les effets gyroscopiques sont inclus, mais la déformation par cisaillement est négligée. Boyaci, A., Seemann, W., Proppe, C., 2009, Analyse de stabilité non linéaire du systèmes roulement rotatif, Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A., Mechab, I., 2010, développés une analyse par élément finis du comportement vibratoire libre d'une poutre en matériaux FG symétriques. les propriétés des matériaux sont fonction de la température et varient continuellement sur l'épaisseur selon une loi de puissance de distribution (P-FGM), ou une loi exponentielle (E-FGM) ou une loi sigmoïde distribution (S-FGM). En utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM), Sapountzakis, E. J., Dourakopoulos, J. A., 2010, analyser les vibrations de flexion-torsion des poutres de Timoshenko section profilé a section transversale en composite en prenant en compte les effets de la rigidité, du gauchissement et de l'inertie rotative. Boukhalfa, A., Hadjoui, A., 2010, ont utilisés la méthode des éléments finis pour faire l'analyse du comportement vibratoire d'un rotor embarqué en matériaux composites sur roulements rigides Kiani, Y., Eslami, M.R., 2010, Comportement de flambement des poutres en matériaux FGM sous l'influence d'un gradient de la température associé à différentes conditions aux limites. Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M. T., Hajilar, S., 2011, ont développé une analyse du comportement des vibrations des poutres de Timoshenko coniques homogènes et de la stabilité de FG axialement par une approche par éléments finis. Alshorbagy, Amal E., Eltahir, M.A., Mahmoud, F.F., 2011, Etude par élément finis des caractéristiques dynamiques d'une poutre en matériaux FGM la graduation du matériau est considérée axialement et transversalement sur l'épaisseur selon la loi de distribution de puissance en prenant en compte de la non-linéarité géométrique de von Karman. Ahmed Saimi, 2016, a travaillé sur un rotor embarqué en utilisant la version polynomiale hiérarchique h-p de la méthode des éléments finis. Boukhalfa, 2014, a fait l'analyse du comportement dynamique d'un rotor en matériaux FG et a utilisé la version p de la méthode des éléments finis. Jianguo Ding, 2017, a étudié l'analyse vibratoire non linéaire des poutres à graduations fonctionnelles compte tenu des influences de l'inertie rotative de la section transversale et position de surface neutre. Koteswara, Tarapada, 2016, a fait l'analyse dynamique d'un Rotor FG par la méthode des éléments finis version h, et ils ont adopté la méthode de la loi de puissance pour modéliser le rotor FG en utilisant la théorie de Timoshenko. D Gayen, D Chakraborty, R Tiwari (2017) Ont présentés une formulation par

éléments finis (FE) d'un arbre à gradation fonctionnelle (FG) ayant de multiples fissures pour étudier les vibrations transversales en utilisant la théorie de Timoshenko La modélisation de l'arbre FG fissuré est faite en tenant compte de l'inertie de translation et de la rotation et des déformations dues aux cisaillements transversales et des moments gyroscopiques. D Gayen, D_Chakraborty, R Tiwari(2017) : Des formulations d'éléments finis (FE) ont été développées pour l'analyse dynamique d'un arbre à gradation fonctionnelle (FG) ayant une fissure transversale. Deux éléments de poutre Timoshenko avec quatre degrés de liberté (DOF) par nœud ont été utilisés. Debabrata Gayen Rajiv Tiwari D.Chakraborty (2019) présenté le développement d'une procédure par éléments finis (FE) et d'un code pour l'analyse de la stabilité d'un système de roulements de rotor FG fissuré dans un environnement thermique. Des éléments de poutre Timoshenko à deux nœuds sont utilisés pour modéliser l'arbre FG en tenant compte des effets des moments gyroscopiques, de l'inertie rotative, de la déformation en flexion et en cisaillement et de l'amortissement des matériaux.. Imane Bouzidi, Abdelhamid Hadjoui et Ahmed Fellah, 2020, ont travaillé sur un système de pales de rotor en matériau FG, avec la version h de la méthode des éléments finis, une étude comparative est menée entre la gradation fonctionnelle et un système de pales de rotor en métal pur, et la comparaison est basée sur l'influence du nombre des pales, la vitesse de rotation et l'indice de la loi de puissance sur les fréquences propres de la pale du système rotor. Assem. H, Hadjoui A, Saimi A 2021 ont fait une analyse numérique du comportement dynamique d'un rotor FGM sous chargement thermique cette étude est faite par la méthode des éléments finis version hp on adoptant la théorie de Timoshenko pour la poutre, et une distribution Power Law pour la variation du mélange graduel selon la direction de l'épaisseur

Chapitre I

Matériaux à gradient de propriétés
(Métal- Céramique)

1. Introduction.

L'utilisation de la céramique technique (Zircone, oxyde d'aluminium, Silicure nitrure, Ti-6Al-4V, Ni, oxyde de Béryllium oxyde de Manganèse...ect.....) a vu ces dernières années un développement particulier compte tenu de leur large champ d'application. Elles présentent plusieurs avantages, à savoir, la réflectivité qui leur permet de se hisser au premier rang dans le domaine de la thermique et de la thermomécanique, leur grande résistance à l'usure, leur bonne résistance à la corrosion, leur stabilité chimique, leur faible dilatation thermique. En revanche leur grande fragilité, limite toujours leurs utilisations. C'est pour cette raison, mais aussi compte tenu de leurs propriétés souvent opposées à celles des métaux que l'on a souvent recours aux mélanges métal-céramique pour étendre leurs champs d'application dans divers domaines techniques.

2. Propriétés des céramiques :

Les céramiques techniques de part leurs propriétés innovatrices on distingue :

2.1 Propriété de résistance mécanique :

Les propriétés de la résistance à l'usure et au frottement sont utilisées respectivement pour les outils de coupe et les joints d'étanchéité.

2.2 Propriété de barrière thermique :

La propriété de barrière thermique des céramiques est utilisée quand l'environnement de travail est thermiquement très sévère, tuiles de protection thermique de la navette spatiale, protection des rotors des turbines, des aubes et des pales des rotors. Les céramiques possèdent plusieurs propriétés ; sur le tableau 1.1 nous présentons quelques exemples :

Tab 1.1 : Les céramiques techniques pour la mécanique et la thermomécanique.

Domaine technique	Propriétés	Céramique
Mécanique	Tenue mécanique (outils de coupe, filières)	WC , Co , TiC , TiN.....
	Bon comportement à l'usure et au frottement (joint d'étanchéité, buses, paliers, roulements)	Al ₂ O ₃ , ZrO ₂ , Si ₂ N ₄ , SiC, B ₄ C....

	Tenue mécanique (abrasifs)	SiO ₂ , Al ₂ O ₃ , SiC
Thermomécanique	Résistance a la température (turbine..)	Al ₂ O ₃ ZrO ₂ , Si ₃ N ₄ , SiC ...

3. Divers types de céramiques techniques

Les céramiques techniques peuvent être classées en plusieurs familles que nous présentons dans ce chapitre sous forme de tableaux.

La famille des oxydes métalliques est la plus importante parmi les composés céramiques binaires. Cette première famille de céramiques est présente dans pratiquement tous les domaines. Nous avons réuni dans les tableaux ci-dessous les principaux oxydes.

Tab 1.2 Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de beryllium.

Céramique	Appellation Composition	Structure cristalline Couleurs	Densités (kg\dm ³)	Température de fusion	Utilisations
Oxyde d'aluminium	Alumine Al ₂ O ₃	Hexagonale incolore	3,965	2072	Mécanique thermique thermomécanique nucléaire militaire
Oxyde de béryllium	(bromélie) BeO	Hexagonale blanc	3,01	2530	mécatronique

Tab 1.3 Les composés d'oxyde de zirconium.

Céramique	Appellation Composition	Densités (kg\dm ³)	Température de fusion	Utilisations
Oxyde de zirconium	Zircone Zr O ₂	5.6	2715	Thermomécanique thermique mécanique

4. Matériaux à gradients des propriétés :

L'industrie moderne de la construction mécanique en passant par le génie civil, le transport terrestre naval et aéronautique sont à la recherche des matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple permettant de combiner toutes ces caractéristiques mécaniques, et pour

atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser des matériaux composites. Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de fonction (FGM). En effet, les FGM sont une classe de composites particulières caractérisées par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle sur l'épaisseur du matériau conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés. Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels.

Les matériaux FGM peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux dans une direction prédéterminée. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes ayant des propriétés qui varient graduellement sur la direction de l'épaisseur constituant ce matériau FGM.

4.1 Définition des matériaux à gradient des propriétés FGM :

Les matériaux à fonctionnel gradues (FGM) sont des matériaux constitués par un mélange graduel de deux ou plusieurs matériaux (métal et céramique...) L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la fois à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Ce concept de FGM peut être appliqué à divers matériaux pour des utilisations structurelles et fonctionnelles. Il y a plusieurs années, ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour divers applications telles que les systèmes de protection thermique, les matériaux à gradient de propriétés FGM sont développés pour minimiser les contraintes thermiques qui conduisent à la rupture de la céramique. En effet ces matériaux existent dans la nature, par exemple, le bambou, les os et même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. Les constituants des FGM modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériau isotrope, bien que tous les nombre de configurations chimiquement et spatialement compatibles soient possibles. Ces composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie de magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène,

l'acier, etc. et les céramiques structurales avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.

4.2 Intérêt des matériaux à gradient des propriétés :

Les matériaux modernes tendent à devenir «multifonctionnels», même si leur premier objet permet en général de les classer en Matériaux de structure et en matériaux fonctionnels. Le problème du concepteur est qu'il demande non pas une propriété, mais un ensemble. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans des applications à haute température. Toutefois, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire et peut conduire à la déformation plastique ou de fissuration. Pour surmonter ces effets nuisibles on doit utiliser les matériaux à gradient des propriétés FGM, sont des matériaux composites avancés. Par exemple, dans un matériau FGM (métal / céramique), le côté métal est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, le coté céramique avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures les plus élevées, et par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température. Les matériaux à gradients des propriétés FGM permettre l'adaptation de la composition du matériel de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité.. Certains des avantages des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont :

- FGM en tant que couche d'interface pour connecter deux matériaux incompatibles peut améliorer considérablement la résistance de liaison.
- Le revêtement FGM peuvent être utilisés pour réduire à l'interface la contrainte résiduelle et la contrainte thermique.
- Le FGM non seulement améliore la résistance des connexions, mais peut également réduire la force de la fissure.
- Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont la capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure, la corrosion, etc.

- FGM offre également les opportunités de profiter des avantages de différents systèmes matériels, par exemple, des céramiques et des métaux. La partie céramique présente une bonne résistance thermique, une résistance à l'usure et à l'oxydation (rouille), alors que la partie métallique a une résistance à la rupture supérieure, une résistance élevée et une capacité de liaison.
- FGM a une large gamme d'application dans les prothèses dentaires et orthopédiques
- Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtements protecteurs sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz (N.Tejaswini et al. 2015)

Tab.1.4 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	– Bonne résistance thermique ; – Bonne résistance à l'oxydation ; Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires	FGM (Céramique / Métal)	– Élimination des problèmes de l'interface ; – Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	– Conductivité thermique élevée, – Très bonne ténacité.

5. Propriétés effectives des matériaux à fonction graduées

Généralement les matériaux à fonctionnel gradues FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace. Conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et

généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des matériaux à fonctionnel gradues FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le matériau à fonctionnel gradues FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (**Figure .4 (a)**) ;

2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (**Figure .4 (b)**), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z)

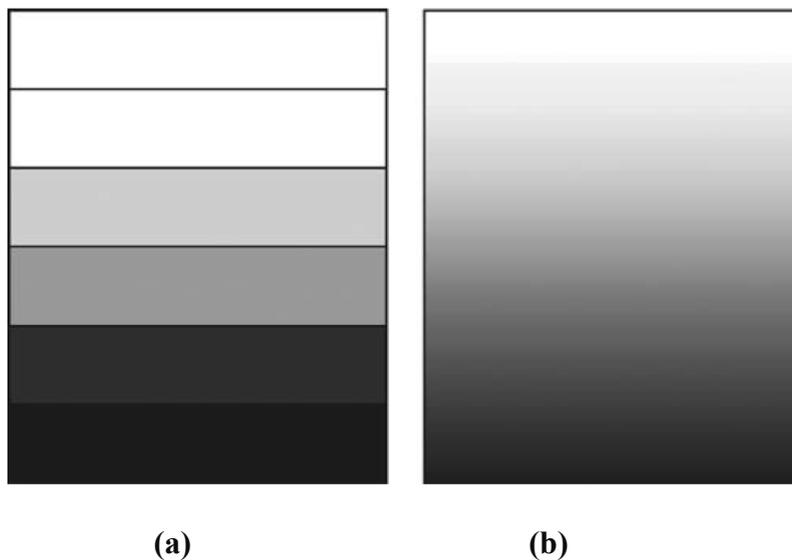


Figure. 1.1 Modèle d'analyse pour une couche d'un matériau à fonctionnel gradues FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal. avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas gratuite.

6. Modélisation mathématique des matériaux FGM

Les matériaux FGM sont modélisés pour les corps cylindriques creux selon le modèle de la structure P-FGM.

6.1/ Modélisation des structures rotors P-FGM

La fraction volumique des structures P-FGM est assurée par la loi de puissance Power Law, pour cela la variation continue du volume fraction entraîne des variations sur les propriétés de la composition FGM, et le volume fraction du mélange (Hui-Shen Shen 2009) pour un cylindre creux est défini par :

$$V_f = \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k \quad (1.1)$$

Avec : r_o Rayon de l'épaisseur externe.

r_i Rayon de l'épaisseur interne.

k Indice de graduation Power Law du volume fraction.

La somme des volumes de fractions est toujours égale à 1 pour une position radiale comprise entre les deux surfaces extrêmes avec la céramique à l'extérieur et le métal à l'intérieur

$$V_m + V_c = 1 \quad (1.2)$$

Les propriétés en fonction de l'épaisseur et de la température sont données par :

$$P(z,T) = [P_o(T) - P_i(T)] \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k + P_i(T) \quad (1.3)$$

Les propriétés en fonction de l'épaisseur sont données par :

$$P(z) = [P_o - P_i] \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k + P_i \quad (1.4)$$

Les propriétés du matériau FGM sont données selon la loi Power Law en fonction de la graduation fonctionnelle du volume fraction pour la masse volumique relation (1.4), et les autres propriétés mécaniques relation (1.5) (Débabrata G 2013).

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m \quad (1.5)$$

la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs est égale à l'unité :

$$\sum V_i=1 \quad (1.6)$$

7. Modélisation P-FGM de l'arbre du système rotor.

Le système tournant étudié est composé d'un arbre creux en matériaux FGM porté par des paliers rigides à roulements et pouvant supporter un ou plusieurs disques isotropes rigides.

7.1. Propriétés de l'arbre P-FGM.

Les propriétés de l'arbre P-FGM dépendent du type de mélange graduel des matériaux utilisés métal, céramique ou autres..., et sont définies selon la distribution de la loi de puissance et varient sur l'épaisseur radiale de l'arbre. Les matériaux FGM sont généralement fabriqués par deux types de matériaux de propriétés différentes et la composition graduée des matériaux FGM est assurée par la variation graduelle du volume fraction du métal V_m et de celui de la céramique V_c le long de l'épaisseur ou de la direction choisie fig 1.2 et fig 1.3.

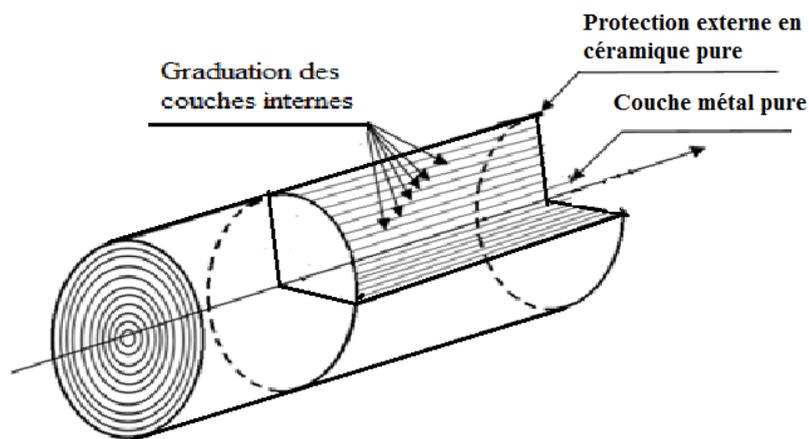


Figure.1.2 Couches de l'arbre en matériaux FGM

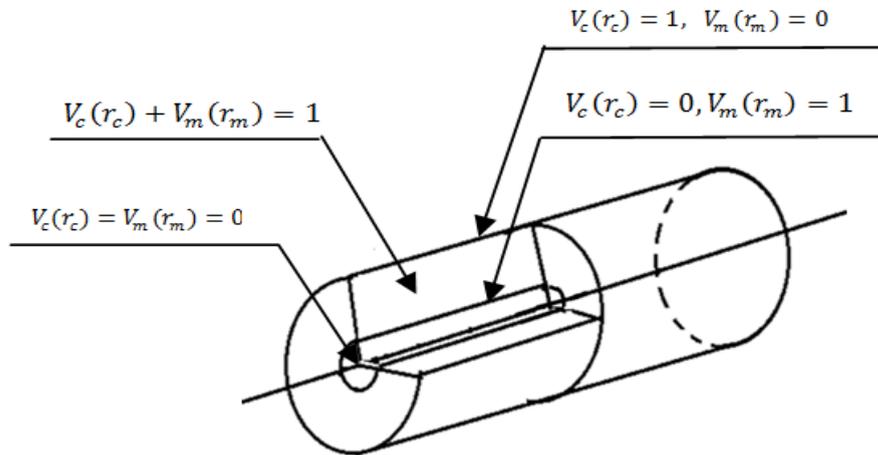


Figure 1.3 Variation du volume fraction de la composition métal-céramique sur l'épaisseur radiale

On peut dire que les propriétés des matériaux FGM changent aussi graduellement le long de cette direction, et sont définis par V_m et V_c donnant le volume fraction du matériau Fgm sur n'importe quelle position de l'épaisseur r définissant le rayon du rotor selon la loi de graduation fonctionnelle Power law, pour cela la variation continue du volume fraction métal V_m ou de celui de la céramique V_c entraîne des variations sur les propriétés de la composition FGM figure 1.3 .

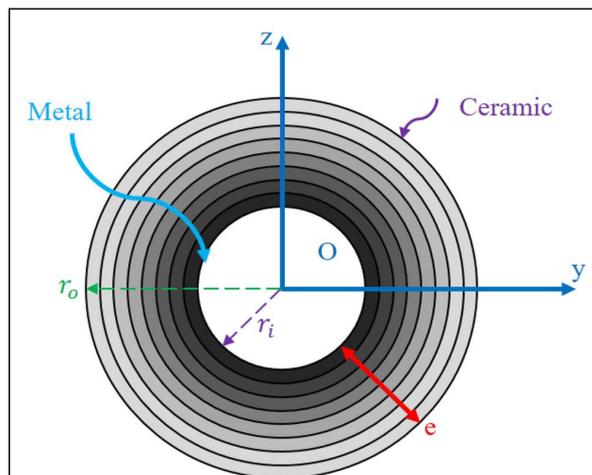


Figure 1.4 Section droite d'un arbre FGM avec protection extérieur en céramique

Capitre I- Matériaux a gradient de propriétés métal-céramique

Les propriétés du matériau Fgm sont données selon la loi Power Law en fonction de la graduation fonctionnelle du volume fraction pour la masse volumique et en fonction de la graduation fonctionnelle du volume fraction et la température pour les autres propriétés mécaniques

Les propriétés ci-dessous sont données pour une répartition céramique a l'extérieur et le métal a l'intérieur.

$$\rho(z)=[\rho_c - \rho_m] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k + \rho_m \quad (1.7)$$

$$E(z,T)=[E_c(T) - E_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k + E_m(T) \quad (1.8)$$

$$\nu(z,T)=[\nu_c(T) - \nu_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k + \nu_m(T) \quad (1.9)$$

$$\alpha(z,T)=[\alpha_c(T) - \alpha_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k + \alpha_m(T) \quad (1.10)$$

$$k(z,T)=[k_c(T) - k_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k + k_m(T) \quad (1.11)$$

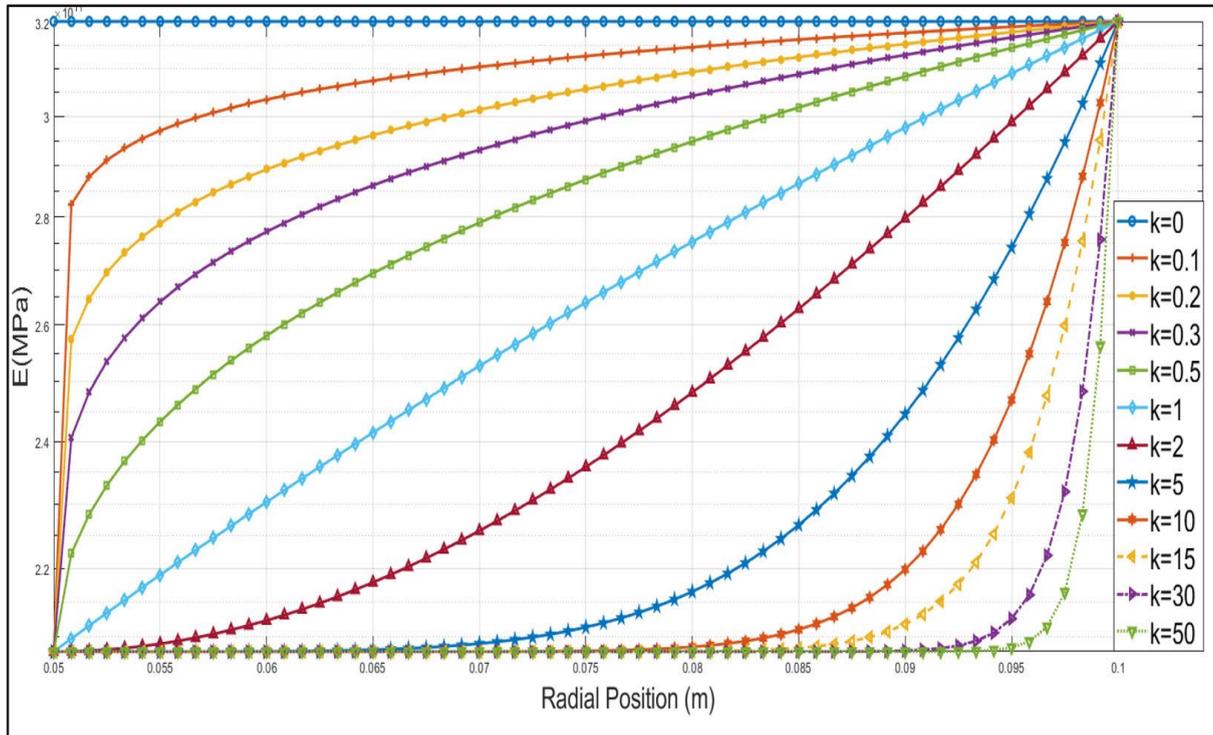


Figure 1.5 Variation du module de Young sur l'épaisseur du rotor FGM

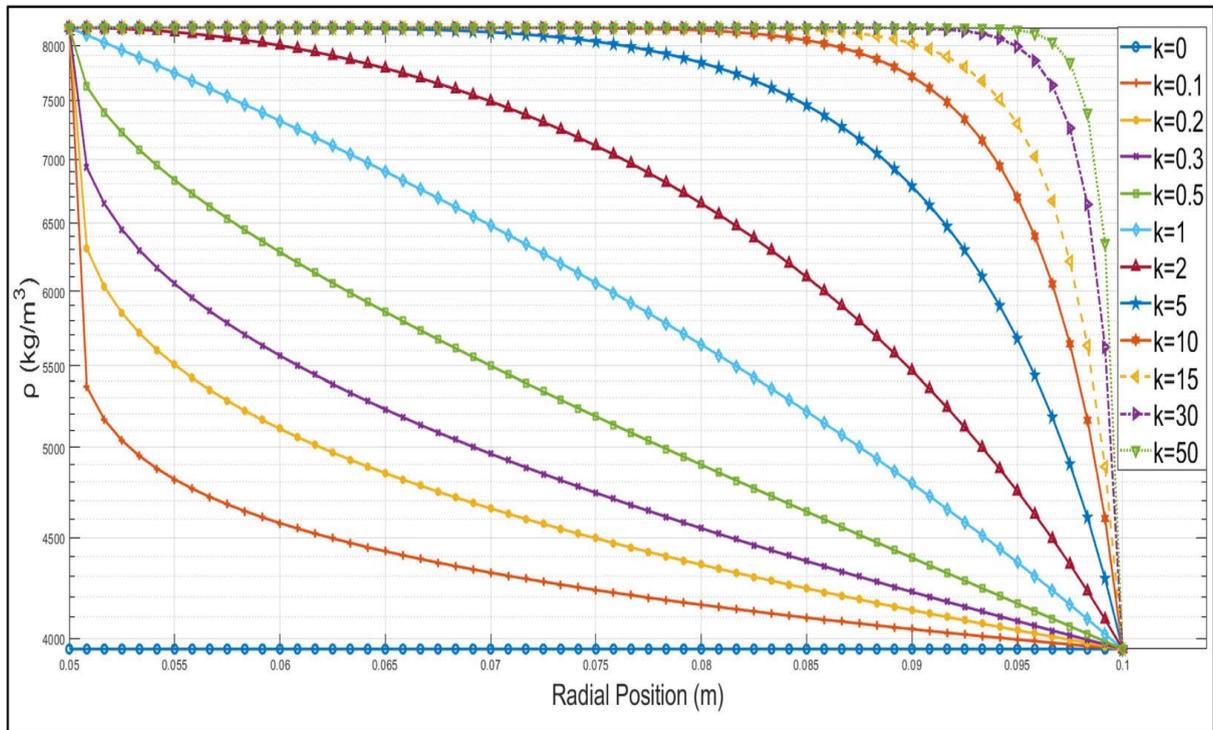


Figure 1.6 Variation de la masse volumique sur l'épaisseur du rotor FGM

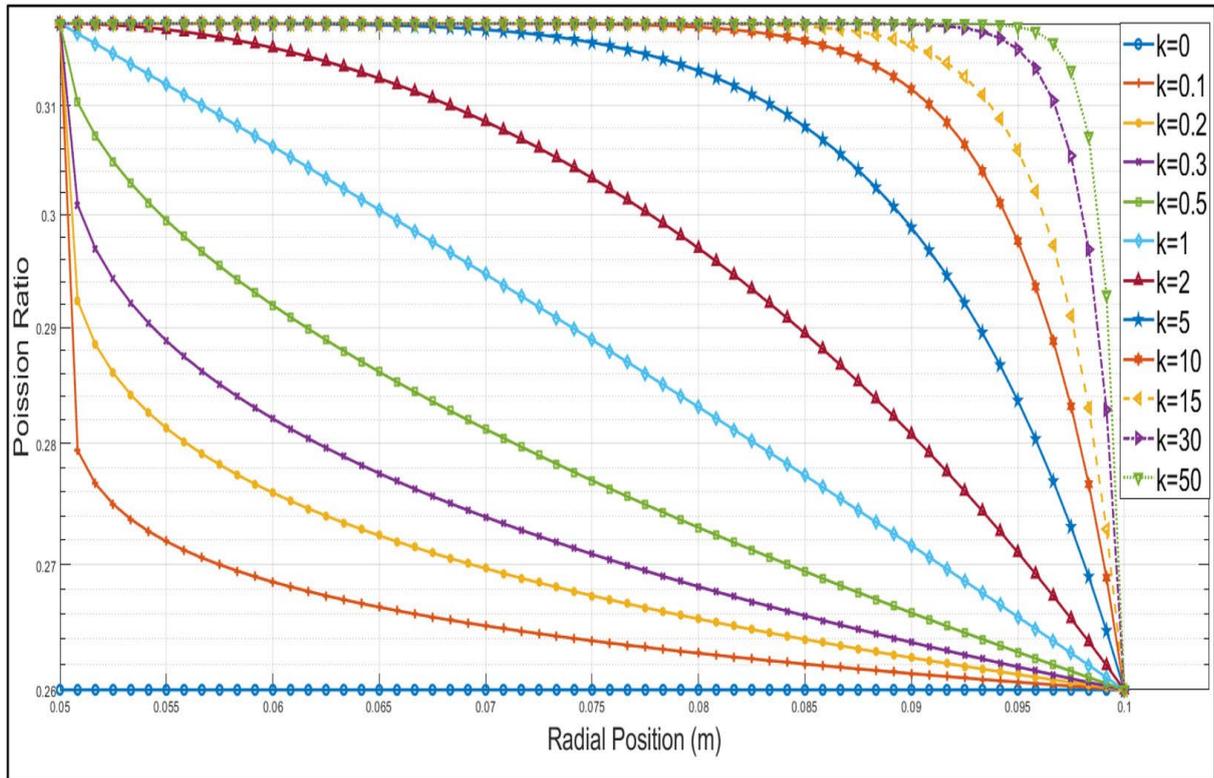


Figure 1.7 Variation du coefficient de Poisson sur l'épaisseur du rotor FGM

Les figures 1.5, Figure 1.6 et Figure 1.7 montrent respectivement les variations des propriétés du module de Young , masse volumique et coefficient de Poisson. Selon la distribution Power Law On constate que les propriétés module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient linéairement sur l'épaisseur pour un indice de volume fraction $k=1$. Pour une gradation du mélange ayant un indice de volume fraction $k=0$ les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche externe pure céramique. Pour k supérieur a la valeur 1, les propriétés du rotor tend vers les propriétés de la couche internes faite majoritairement en matériaux SUS304 acier inoxydable (stainless steel –SS-).

8. Domaines d'application des FGM.

Les matériaux FGM par sa composition graduelle optimisée et contrôlée par l'indice de volume fraction du mélange graduel de deux matériaux pouvant donner des propriétés

rechercher sur mesure pour l'industrie aéronautique, la défense, l'optoélectronique, l'industrie nucléaire, électronique et conversion d'énergie et l'industrie mécanique et la biomécanique (humaine, végétale et animale...).

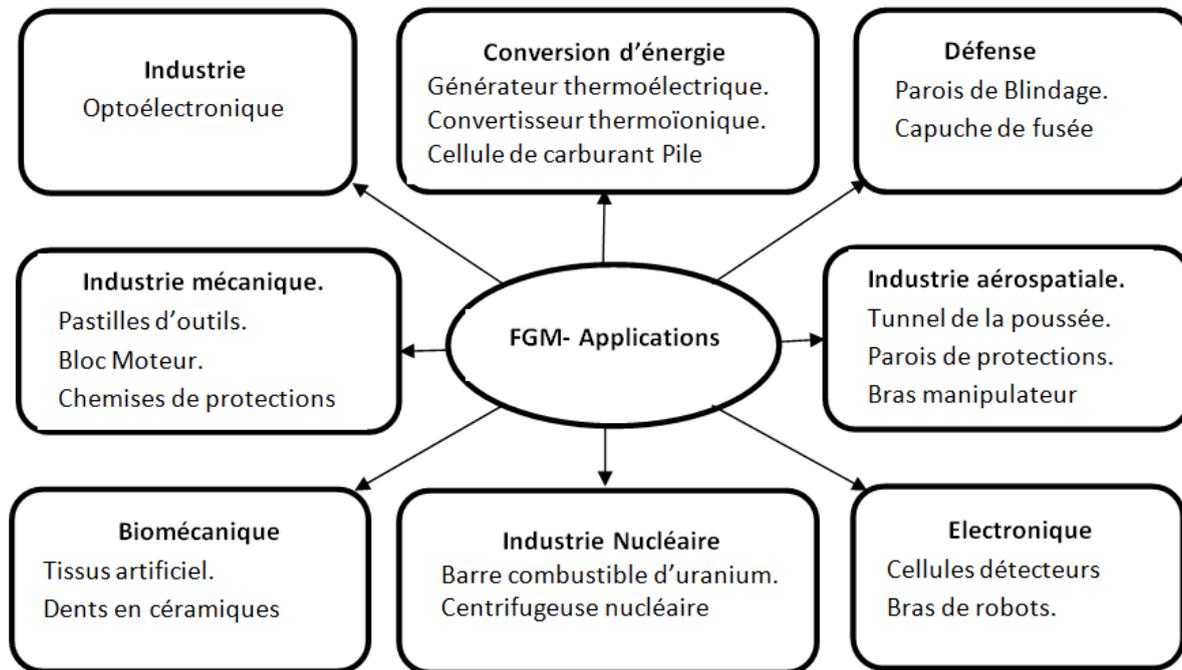


Figure1.8 Les principaux domaines d'application des FGM.

9. Influence de la température :

L'influence de la température sur les solides fabriqués en matériaux FGM est un paramètre essentiel et indispensable pour l'analyse et la stabilité des variations des propriétés sur une direction bien définie des matériaux constituants. Pour un matériau constituant un solide exposé à une température très intense et très variables et nécessitant une durée de vie longue et raisonnable surtout pour les navettes spatiales ou l'aéronautique comme les rotors des réacteurs d'avions ou les turbines de propulsions aéronautiques, les turbines à gaz ou les centrifugeuses nucléaires. Auparavant les recherches scientifiques étaient basées sur l'utilisation d'une protection surfacique des matériaux constituants ces solides contre toutes les variations de la température induisant des dommages non souhaités à ces solides. Cette solution est valide pour les basses et moyennes températures et néfaste et dangereuse pour les hautes températures. On cite l'exemple de la navette spatiale Américaine Columbia fabriquée

par un matériaux à protection surfacique utilisant des tuiles de céramique colées à la surface de la navette jouant le rôle d'une barrière thermique contre les frottements et les rayonnements solaires qui sont très grands et très intense. Les frottements et les rayonnements solaires ont provoqué le décollement de dernières tuiles qui a induit par suite l'explosion et la désintégration de la navette spatiales et de ses occupants avec la mort des neufs astronautes en 1989. Ce décollement est due a une variation brutale des propriétés physiques et mécaniques sur l'interface des deux matériaux et à partir de cette date la dangerosité de cette solution était prouvée. Le problème a été solutionné par l'utilisation des matériaux FGM dont les propriétés mécaniques et physiques qui varient graduellement évitant ainsi le changement brutal des propriétés par suite le problème d'interfaces.

10. Conclusion :

Les matériaux FGM ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale.

Le matériel à gradation fonctionnelle est un excellent matériau avancé qui va révolutionner le monde de la fabrication. Il existe un certain nombre d'obstacles pour réaliser cet objectif. Beaucoup d'études ont été menées sur le comportement des matériaux fonctionnellement classés et la littérature est très riche en raison des vastes domaines d'application de ce nouveau matériau.

Chapitre II

Cinématique du rotor

1 Introduction :

Un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Pour cette étude on suppose que le rotor de la fig 2.1 est un rotor FGM creux

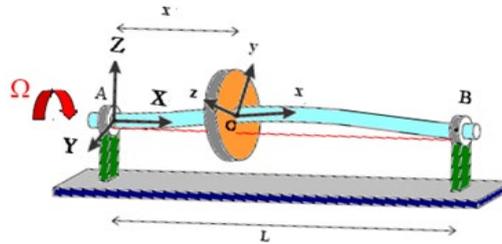


Figure 2.1 Présentation d'un rotor simple

2 Hypothèses cinématiques :

L'étude de ce rotor est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'arbre FGM est déformable.
- Le disque est rigide.
- Le rotor tourne à une vitesse constante Ω .
- On se place dans le cas des poutres de Timoshenko.
- L'effet de la température est pris en considération.

L'arbre est du type poutre de Timoshenko c'est-à-dire toute section plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation ne reste pas plane et perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation de cet arbre et l'effet de cisaillement n'est pas nul fig.2.2 et fig2.3. Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels

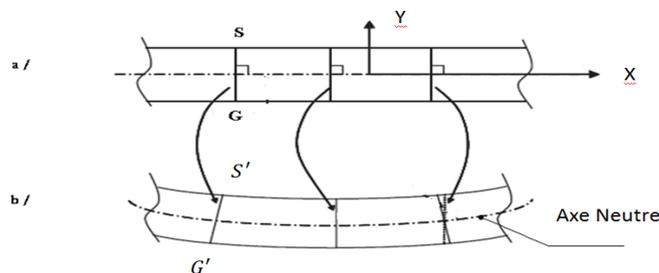


Figure 2.2 Poutre de Timoshenko

a / - Avant déformation Section SG normale / axe neutre

b / - Après déformation Section S'G' quelconque / axe neutre

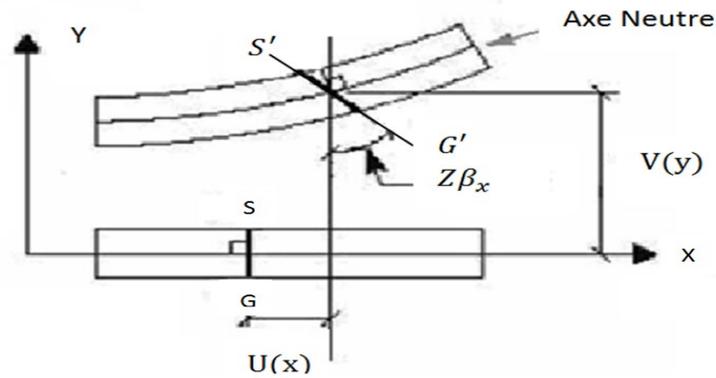


Figure 2.3 Section SG de la poutre de Timoshenko

Le modèle du rotor étudié est présenté dans la figure 2.4. Selon la théorie de Timoshenko nous adoptons les hypothèses cinématiques des déplacements figure 2.5 (U,V,W) en n'importe quels points de la section droite de l'arbre et sont données dans la relation (2.1).

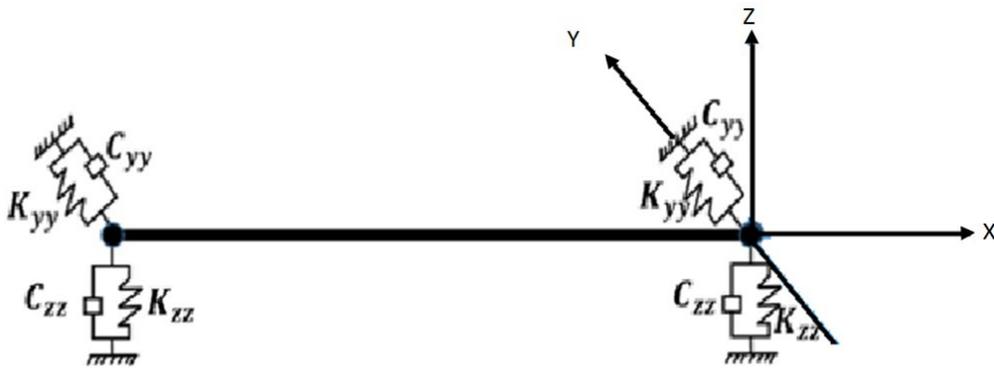


Figure 2.4 Système de rotor arbre roulements

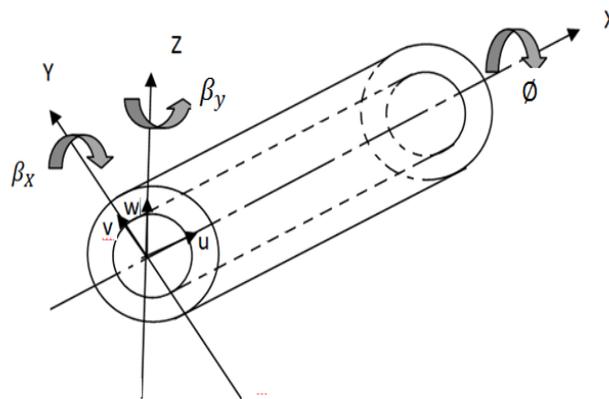


Figure 2.5. Déplacements et degrés de libertés dans les trois directions

Le champ des déplacements est donné par la relation.

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = U_0(x, t) + z\beta_x(x, t) + y\beta_y(x, t) \\ V(x, y, z, t) = V_0(x, t) - z\phi(x, t) \\ W(x, y, z, t) = W_0(x, t) + y\phi(x, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$U_0(x, t)$, Déplacement longitudinal.

$V_0(x, t)$, Déplacement transversal horizontal.

$W_0(x, t)$ Déplacement transversal vertical.

$z\beta_x(x, t)$ Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe z.

$y\beta_y(x, t)$ Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe y.

$\beta_x(x, t)$ Rotation de la section droite autour de l'axe y.

$\beta_y(x, t)$ Rotation de la section droite autour de l'axe z.

$z\phi(x, t)$ Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe z.

$y\phi(x, t)$ Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe y.

$\phi(x, t)$ Rotation de la section droite autour de l'axe x.

Lors du mouvement, le rotor génère plusieurs phénomènes qui sont : La nutation, la précession, la rotation propre du rotor fig2.6 et autres spécifications qui seront étudiés et détaillés ultérieurement en définissant toutes les énergies du rotor et leurs équations du mouvement. La mise en équation du mouvement est obtenue à partir des énergies cinétiques et de déformations des différents composants du rotor.

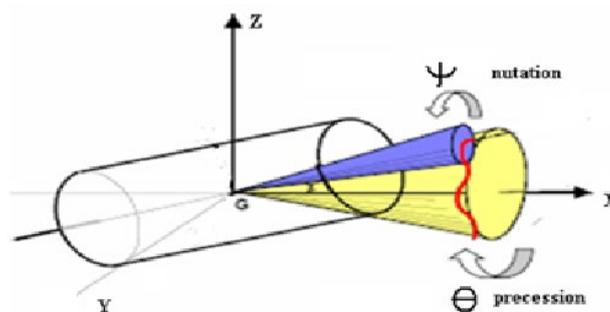


Figure 2.6 Nutation et précession.

2.1. Relation déformation déplacement.

Dans le cas des petits déplacements, les relations déformation -déplacement sont les suivantes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

La relation (2.2) sous forme développée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Le champ des déformations réduit du champ des déplacements s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(-\beta_y + \frac{\partial V_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(-\beta_x + \frac{\partial W_0}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \text{ et } \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \quad (2.5)$$

Le champ des déformations peut s'écrire sous la forme matricielle et en fonction des coordonnées cylindriques par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{xr} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & -2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Donc le tenseur des déformations en un point M de l'épaisseur radiale en fonction des coordonnées cylindriques fig 2.7.

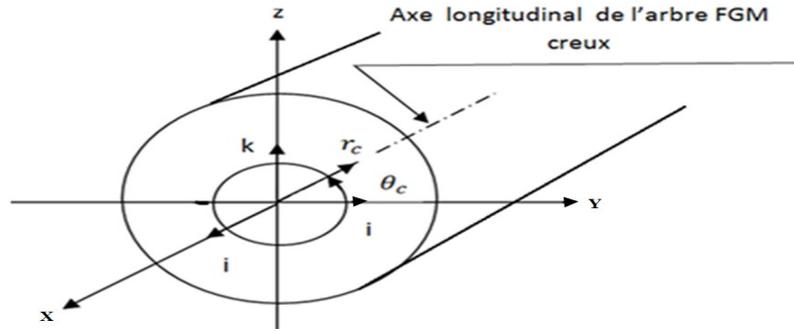


Figure 2.7 Profil gauche de l'arbre FGM creux et coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + r\sin\theta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r\cos\theta \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\beta_y \sin\theta + \beta_x \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial V_0}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} \left(\beta_y \sin\theta - \beta_x \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial W_0}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xr} = \varepsilon_{rx} \text{ et } \varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x} \end{cases} \quad (2.7)$$

Sous forme matricielle le tenseur de déformations est donné par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{rx} & \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta x} & \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2. Relation contraintes –déformations :

La relation contrainte –déformation peut s'écrire sous la forme condensée

$$[\sigma] = [C]\{\epsilon\} \quad (2.9)$$

Cette loi, généralement appelée la loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité $[C]$, symétrique. Le comportement d'un matériau à fonction gradué FGM est décrit en introduisant les constantes de rigidité C_{ij} .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

En simulant le rotor FGM en plusieurs couches, la relation contrainte déformation au niveau de la $i^{ème}$ couche peut s'écrire sous la forme.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = C'_{11i}\epsilon_{xx} + k_s C'_{16i}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} = k_s C'_{16i}\epsilon_{xx} + k_s C'_{66i}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{xr} = k_s C'_{55i}\gamma_{xr} \end{cases} \quad (2.11)$$

Où k_s est le facteur de correction de cisaillement.

Avec

$$C'_{11i} = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \quad (2.12)$$

$$C'_{16i} = \frac{\nu_i E_i}{1 - \nu_i^2} \quad (2.13)$$

$$C'_{66i} = C'_{55i} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \quad (2.14)$$

3. Energie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation de l'arbre FGM creux est exprimée par:

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + 2\tau_{xr}\epsilon_{xr} + 2\tau_{x\theta}\epsilon_{x\theta}) dv \quad (2.15)$$

Qu'on peut écrire de la façon suivante : σ_i

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_i \left[\begin{array}{c} \frac{\partial U_0}{\partial x} + r \sin \vartheta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r \cos \vartheta \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ (\beta_x \sin \vartheta + \beta_y \cos \vartheta - \sin \vartheta \frac{\partial V_0}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial W_0}{\partial x} + r \frac{\partial \phi}{\partial x}) \\ \beta_x \sin \vartheta - \beta_y \cos \vartheta - \sin \vartheta \frac{\partial W_0}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{array} \right] r dr d\vartheta dx$$

(2.16)

Où le paramètre F est donné par :

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} C'_{11i}\varepsilon_{xx} + k_s C'_{16i}\gamma_{x\theta} \\ k_s C'_{16i}\varepsilon_{xx} + k_s C'_{66i}\gamma_{x\theta} \\ k_s C'_{55i}\varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix}$$

En développant, l'énergie de déformation prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_{dA} = & A_{11} \int_0^L \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} k_s B_{66} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[2 \int_0^L \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial x} dx \right] + \frac{1}{2} k_s A_{16} \left[\int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial V_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx \right] \\ & + \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[\int_0^L \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L (\beta_x)^2 dx + \int_0^L (\beta_y)^2 dx + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W_0}{\partial x} dx \right. \\ & \left. - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V_0}{\partial x} dx \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{11} = \pi \sum_{i=1}^{nc} C'_{11i} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \\ A_{55} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{nc} C'_{55i} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \\ A_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{nc} C'_{66i} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} A_{16} = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^{nc} C'_{16i} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \\ B_{11} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{nc} C'_{11i} (r_i^4 - r_{i-1}^4) \\ B_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{nc} C'_{66i} (r_i^4 - r_{i-1}^4) \end{cases} \quad (2.19)$$

nc : Nombre de couche

i : indice de la couche

r_i et r_{i+1} : rayon de la couche.

4. Energie cinétique de l'arbre.

L'arbre FGM creux étudié a une vitesse angulaire Ω et une longueur L. L'expression de l'énergie cinétique est donnée par l'équation suivante:

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_m (\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_p \beta_x \dot{\beta}_y + 2\Omega I_p \dot{\phi} + I_p \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p + \Omega^2 I_d (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right] dx. \quad (2.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} I_m &= \pi \sum_{i=1}^{nc} \rho_i (r_i^2 - r_{i+1}^2) \\ I_d &= \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{nc} \rho_i (r_i^4 - r_{i+1}^4) \\ I_p &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{nc} \rho_i (r_i^4 - r_{i+1}^4) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Où ρ_i est la masse volumique de la $i^{\text{ème}}$ couche de l'arbre en matériaux FGM

Le moment d'inertie massique I_m , le moment d'inertie diamétral I_d et le moment d'inertie polaire I_p de l'arbre tournant par unité de longueur.

Le terme $2\Omega I_p \beta_x \dot{\beta}_y$ représente l'effet gyroscopique, et $I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)$ représente l'effet de l'inertie rotatoire. Le terme $\Omega^2 I_d (\beta_x^2 + \beta_y^2)$ est très petit devant la rigidifiassions centrifuge $\Omega^2 I_p$ Qui sera négligé par la suite de l'analyse.

5. Energie cinétique du disque.

Le disque fixé à l'arbre est supposé rigide et en matériau isotrope.

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_m^D (\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_d^D (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_p^D \beta_x \dot{\beta}_y + 2\Omega I_p^D \dot{\phi} + I_p^D \dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_p^D + \Omega^2 I_d^D (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right] dx. \quad (2.22)$$

Où I_{ma} , I_{da} , I_{pa} sont respectivement le moment d'inertie massique, Le moment d'inertie diamétral et le moment d'inertie polaire du disque. Le terme $\Omega^2 I_d^D (\beta_x^2 + \beta_y^2)$ très petit devant $\Omega^2 I_p^D$, sera négligé.

6. Paliers :

Tous les arbres tournants sont supportés par des paliers, Ils créent des forces sur l'arbre. On peut trouver des paliers lisses hydrodynamiques fig 2.8, des paliers lisses hydrostatiques, paliers à roulements.

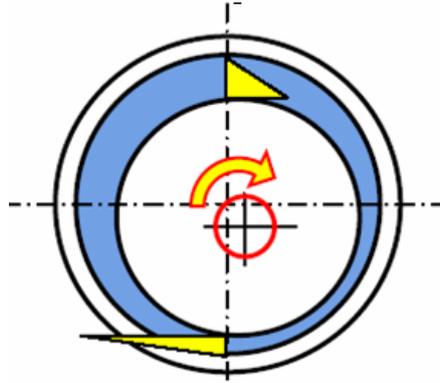


Figure 2.8 Palier hydrodynamique avec profils de vitesse.

La modélisation des paliers est représentée sur la fig 2.9

Ou on note:

La raideur suivant l'axe ox

$$K_{yy} = K_{p11} \quad (2.23)$$

La raideur suivant l'axe oz

$$K_{zz} = K_{p22} \quad (2.24)$$

La raideur des termes croisés

$$K_{zy} = K_{yz} = K_{p21} = K_{p12} \quad (2.25)$$

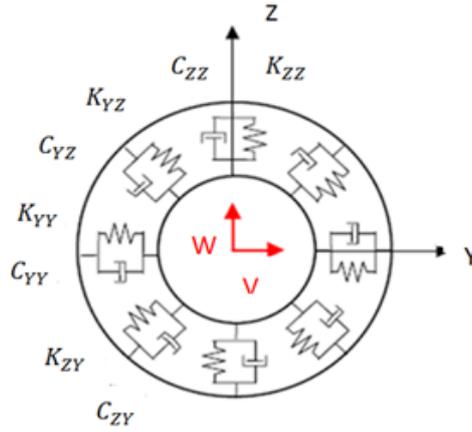


Figure 2.9 Modèle d'un palier.

6.1 Travail des forces de raideur et d'amortissement

Le rotor du système étudié est supposé guidé en rotation par des paliers qui sont rigides et symétrique et dont les termes des constantes de rigidités verticales, horizontales et croisés sont supposés égaux.

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est défini par :

$$dW = F_v \delta v + F_w \delta w \quad (2.26)$$

Avec : F_v et F_w sont les forces généralisées

$$dW = -K_{P11} v \delta v - K_{P12} w \delta v - K_{P21} w \delta w - K_{P22} v \delta w - C_{P11} \dot{v} \delta v - C_{P12} \dot{w} \delta v - C_{P21} \dot{w} \delta w - C_{P22} \dot{v} \delta w \quad (2.27)$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_v \\ F_{\beta_x} \\ F_w \\ F_{\beta_y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{P11} & 0 & K_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{P21} & 0 & K_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \beta_x \\ w \\ \beta_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{P11} & 0 & C_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{P21} & 0 & C_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\beta}_x \\ \dot{w} \\ \dot{\beta}_y \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

les termes de raideur et d'amortissement sont, en général différents, dans notre étude on suppose que les termes de raideur verticale, horizontale et croisés sont égaux.

$$K_{P11} = K_{P12} = K_{P21} = K_{P22} \quad (2.29)$$

Les termes d'amortissement vertical, horizontal et croisés sont aussi égaux.

$$C_{P11} = C_{P12} = C_{P21} = C_{P22} \quad (2.29)$$

Ce système tournant est sous l'effet de l'influence de la température est donc supposé être un arbre rotor travaillant dans un environnement où la variation de la température est très grande.

7. Fonctions de la température.

La fonction de la température agissant sur les paramètres des propriétés constituant la composition FGM est définie selon le modèle mathématique suivant (Touloukian 1967):

$$P_j = P_0(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T^1+P_2T^2+P_3T^3) \quad (2.30)$$

où P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T (en K) pour chaque type de matériau constituant le volume fraction de la graduation du mélange FGM. La distribution de la température le long de la direction radiale du rotor peut être exprimée par la résolution de l'équation de transfert thermique suivante (Hui-Shen Shen – 2009).

$$-\frac{d}{dz} \left(K(r) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (2.31)$$

$K(r)$: conductivité radiale.

La solution de cette équation différentielle qui est fonction de la température est obtenue en posant les conditions aux limites de la température T_m sur la face du métal pur et T_c sur la face de la céramique pure du rotor FGM donnée par la relation suivante.

$$T(Z) = T_m + (T_c - T_m)\mu(Z). \quad (2.32)$$

Avec

$$\mu(Z) = \frac{1}{C} \left[\left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^k - \frac{K_{cm}}{(k+1)K_c} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{k+1} + \frac{K_{cm}^2}{(2k+1)K_c^2} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{2k+1} - \frac{K_{cm}^3}{(2k+1)K_c^3} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{3k+1} + \frac{K_{cm}^4}{(2k+1)K_c^4} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{4k+1} - \frac{K_{cm}^5}{(2k+1)K_c^5} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{5k+1} \right] \quad (2.33)$$

k : Indice du volume fraction.

r_c : Rayon extérieur en céramique.

r_m ; Rayon intérieur en métal.

K_c : Conductivité de la céramique.

K_{cm} : Conductivité de la céramique et du métal.

avec la constante

$$c = 1 - \frac{K_{cm}}{(k+1)K_c} + \frac{K_{cm}^2}{(2k+1)K_c^2} - \frac{K_{cm}^3}{(3k+1)K_c^3} + \frac{K_{cm}^4}{(4k+1)K_c^4} - \frac{K_{cm}^5}{(5k+1)K_c^5} \quad (2.34)$$

Et la constante K_{cm} définissant la conductivité céramique-métal.

$$K_{cm} = K_c - K_m \quad (2.35)$$

K_c : Conductivité de la céramique.

K_m : Conductivité du métal.

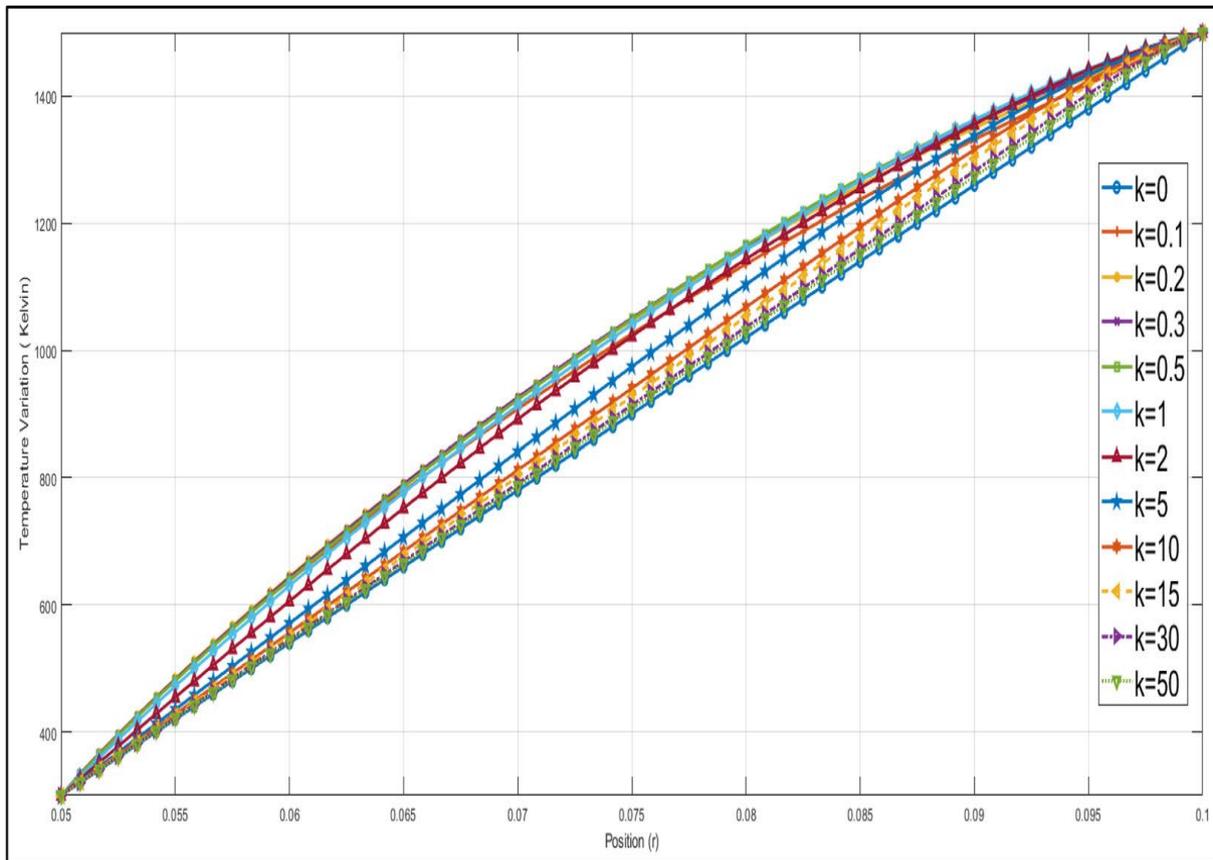


Figure 2.10 Variation de la température sur l'épaisseur de l'arbre FGM pour divers indices de volume fraction k . AL2O3-SUS304

Tab 2.1 Variation de la température sur l'épaisseur de l'arbre pour divers indices de volumes fractions.

r(m)	0.0500	0.0583	0.0667	0.0750	0.0833	0.0917	0.1000
K	$T_1(^{\circ}\text{K})$	$T_2(^{\circ}\text{K})$	$T_3(^{\circ}\text{K})$	$T_4(^{\circ}\text{K})$	$T_5(^{\circ}\text{K})$	$T_6(^{\circ}\text{K})$	$T_7(^{\circ}\text{K})$
0	300	500	700	900	1100	1300	1500
0.1	300	588.47	822.92	1025.9	1204.2	1361.4	1500
0.2	300	592.66	836.43	1046.8	1226.8	1377.7	1500
0.3	300	590.92	836.36	1050.7	1234.1	1384.6	1500
0.5	300	587.99	832.25	1048.8	1236.7	1390.2	1500
1	300	578.81	823.18	1040.0	1231.5	1391.5	1500
2	300	555.75	799.45	1022.1	1219.0	1386.3	1500
5	300	525.76	751.25	974.16	1186.2	1371.2	1500
10	300	513.39	726.77	940.11	1152.3	1353.7	1500
15	300	509.04	718.08	927.13	1136.1	1341.5	1500
30	300	504.58	709.16	910.74	1118.3	1322.8	1500
50	300	502.76	705.53	908.29	1111.1	1313.8	1500

8. Interprétation des résultats

Les variations de la température sur l'épaisseur de l'arbre FGM sont comprises entre la température interne de 300°K et la température externe de 1500°K pour divers indices de volume fraction du mélange graduel constituant l'arbre FGM sont données sur le tableau ci-dessus. L'analyse numérique des variations de la température observées sur ce tableau et sur la figure ci-dessus, montrent que pour un indice $k=0$ les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche externe en céramique pure, la conductivité thermique du transfert de la chaleur de la température de l'extérieur vers l'intérieur est égale a 200°K. Si $k=50$, les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche interne faite majoritairement en métal, le transfert de la chaleur de la température de l'extérieur vers l'intérieur est presque égal a 203°K pour toutes les couches, on dit que le transfert de la chaleur défini par la conductivité du matériau constitue les valeurs limites pour $k=0$ et $k > 50$. Pour les couches FGM, $0 < k \leq 50$ le transfert de la chaleur induite par la température de l'extérieur vers l'intérieur est non linéaire, ce qui est clairement montré sur la figure ci-dessus. Cette variation est due a celle de la conductivité thermique, du module d'élasticité et de la densité qui sont fonction que du rayon de l'arbre et le transfert de la température vers l'intérieur se fait en fonction de la conductivité du mélange graduel définit par l'indice de volume fraction et de la position radiale. On dit que La distribution de température dans la couche FG est non linéaire, ce qui est clairement montré sur la figure 5. Cette variation est due à celle de la conductivité thermique, du module d'élasticité et de la densité qui sont fonction du rayon de l'arbre uniquement. Pour $k=0$ et $k = 1$, la distribution de température est une ligne droite et ne dépend pas des propriétés du matériau de l'arbre. Pour les autres valeurs de k , la distribution de la

température dépend des positions radiales et des propriétés du matériau ainsi que de la loi de graduation, voir le tableau 2.1.

On constate sur le graphe ci-dessus que la variation de la chaleur à travers l'épaisseur radiale de l'arbre du système tournant se propage lentement pour un indice de volume fraction proche de zéro ($k=0$) correspondant à la couche de céramique et se propage rapidement pour un indice de volume fraction ($k \geq 10$) correspondant aux couches constituées majoritairement par du métal.

Chapitre III

Formulation Par la Méthode des éléments Finis

Version Hp

1. Modélisation par la méthode des éléments finis version hp.

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent, Elle est soumise à des sollicitations, des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses. Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :

Les déplacements en tout point.

Les déformations, les contraintes.

Les températures.

Les fréquences propres ...etc.....

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode utilisée pour cette étude est la méthode des éléments finis version hp développée par Ivo Babuška. BQ et GUO 1992. La caractéristique particulière de cette méthode est que l'arbre est modélisé par un raffinement du maillage de la version h et un raffinement du maillage de la version p et que la précision du résultat est obtenue en augmentant l'ordre de raffinement des deux maillages

2. Méthode des éléments finis version hp.

La version hp des éléments finis est une version générale de la méthode des éléments finis, c'est une méthode numérique pour résoudre des équations aux dérivées partielles en fonction des approximations basée sur un nombre des éléments de taille variable (h) et un polynôme de degré (p). Les origines de cette méthode remontent au travail de pionnier de Babuška 1992. qui ont découvert que la méthode des éléments finis converge exponentiellement lorsque le maillage est raffiné en utilisant une combinaison appropriée de h-raffinements. (en divisant la structure en petit éléments) et p-raffinements (en augmentant leur degré du polynôme). La convergence exponentielle rend la méthode très attractive par rapport à la plupart des autres méthodes des éléments finis qui ne convergent qu'avec un taux algébrique. La convergence exponentielle de la version hp de la méthode des éléments finis a été non seulement prédite théoriquement mais aussi observée par de nombreux chercheurs scientifiques indépendants.

3. fonctions de forme.

Dans la version hp de la méthode des éléments finis, avec un assemblage de la même manière que la version h de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments, l'erreur peut être contrôlée non seulement par l'affinage du maillage mais aussi en augmentant le degré des fonctions de forme (degré de polynôme p) de tous les éléments.

Dans notre étude, on utilise la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des fonctions de forme polynomiale K-orthogonale générée par l'équation différentielle de Legendre, combinée avec la méthode des éléments finis classique, en assurant la compatibilité entre les deux versions.

L'arbre en rotation est modélisé par des éléments poutres 3D hiérarchiques,

Chaque élément représenté sur la figure 3.1 et 3.2 à deux nœuds 1 et 2. Dans le cas d'un arbre étagé, plusieurs éléments peuvent être utilisés.

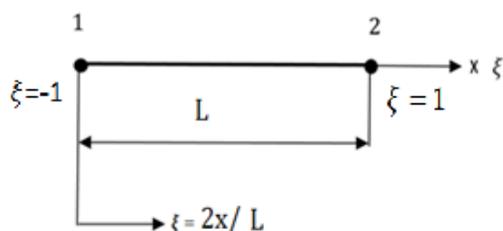


Figure 3.1: Élément poutre 3D à deux nœuds $2x/L$

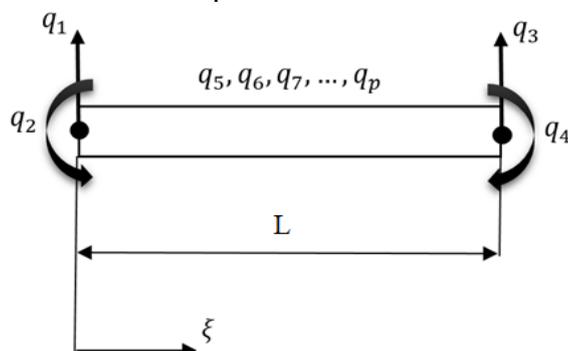


Figure 3.2: Élément poutre à deux nœuds dans un plan, (déplacement nodales et interne)

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par la relation :

$$\xi = (2x/L) - 1 \quad (3.1)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

Dans la version hp des éléments finis le groupe des fonctions de formes est composé de deux parties,

$$[f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_p] \tag{3.2}$$

Les quatre premières fonctions sont celles de la méthode des éléments finis h nécessaires à la description des déplacements q_1, q_3 , et les rotations q_2, q_4 aux nœuds de l'élément, nous utilisons pour cela les fonctions de forme Hermite cubiques Bardell N S (1996).

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_2(\xi) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right) l_e \\ f_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_4(\xi) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right) l_e \end{cases} \tag{3.3}$$

Les autres fonctions de forme au nombre maximal de degré du polynôme p, sont les fonctions qui contribuent au champ de déplacement interne (q_5, q_6, \dots, q_p) et sont de type polynomiale K-orthogonale. Pour ce problème particulier, il y a un grand avantage dans la recherche d'un ensemble des fonctions de formes hiérarchiques qui sont les dérivées secondes orthogonales, à la fois pour eux-mêmes et les quatre fonctions cubique Hermite originaux. Un tel ensemble peut être dérivé de la forme Rodrigues de polynômes spéciaux de Legendre (Peano,1976),

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\frac{(r-1)}{2}} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{(r-2n-1)} \tag{3.4}$$

avec $r > 4$
 $r!! = r(r - 2)(r - 4) \dots (2 \text{ or } 1)$

Le champ de déplacement d'un point de la poutre est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} U = [N_u]\{q_u\} = \sum_{m=1}^{pu} x_m(r)f_m(\xi) \\ V = [N_v]\{q_v\} = \sum_{m=1}^{pv} y_m(r)f_m(\xi) \\ W = [N_w]\{q_w\} = \sum_{m=1}^{pw} z_m(r)f_m(\xi) \\ \beta_x = [N_{\beta_x}]\{q_{\beta_x}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_x} \beta_{x_m}(r)f_m(\xi) \\ \beta_y = [N_{\beta_y}]\{q_{\beta_y}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_y} \beta_{y_m}(r)f_m(\xi) \\ \phi = [N_{\phi}]\{q_{\phi}\} = \sum_{m=1}^{p\phi} \phi_m(r)f_m(\xi) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Le vecteur déplacement $\{B\}$ est donné par :

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_u] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [N_v] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [N_w] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [N_{\beta_x}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [N_{\beta_y}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [N_{\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_{\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Où $[N]$ est la matrice des fonctions de formes.

$$[N_{u,v,w,\beta_x,\beta_y,\phi}] = [f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{p_u}, p_v, p_w, p_{\beta_x}, p_{\beta_y}, p_{\phi}] \quad (3.7)$$

Le vecteur déplacement généralisé:

$$\{q\} = \{q_u, q_v, q_w, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_{\phi}\}^T \quad (3.8)$$

4. Détermination des matrices élémentaires de l'arbre.

L'arbre des machines tournantes en mouvement est défini par l'équation différentielle déduite de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = \frac{\partial W_v}{\partial q_i} \quad (3.9)$$

Le premier terme $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right\}$ correspond à la matrice masse globale, le deuxième terme $\frac{\partial E_c}{\partial q_i}$ englobe les matrices gyroscopiques et amortissement des paliers et le troisième terme $\frac{\partial E_d}{\partial q_i}$ correspond aux matrices de rigidités de l'arbre et la raideur des paliers.

4.1 Matrices de rigidités élémentaires de l'arbre

Les matrices de rigidité sont déduites du terme de l'équation de Lagrange appliquée à l'énergie de déformation de l'arbre.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial \{q_U\}} &= \left[\frac{1}{L} A_{11} \int_{-1}^1 [N_U]^T [N_U] d\xi \right] \{q_U\} + \left[\frac{2}{L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_\phi]^T [N_U] d\xi \right] \{q_\phi\} \\ &= [K_U] \{q_U\} + [K_1] \{q_\phi\}. \\ \frac{\partial E_d}{\partial \{q_U\}} &= [K_U] \{q_U\} + [K_1] \{q_\phi\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial \{q_V\}} &= \left[\frac{1}{L} k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N_V]^T [N_V] d\xi \right] \{q_V\} + \left[\frac{2}{L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_V]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} \\ - [k_s (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_V] d\xi] \{q_{\beta_y}\} &= [K_V] \{q_V\} + [K_2] \{q_{\beta_x}\} + [K_3] \{q_{\beta_y}\} \\ \frac{\partial E_d}{\partial \{q_V\}} &= [K_V] \{q_V\} + [K_2] \{q_{\beta_x}\} + [K_3] \{q_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial \{q_W\}} &= \left[\frac{1}{L} k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N_W]^T [N_W] d\xi \right] \{q_W\} + \\ [k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N_{\beta_x}]^T [N_W] d\xi] \{q_{\beta_x}\} &- \left[\frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_W]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_y}\} \\ \frac{\partial E_d}{\partial \{q_W\}} &= [K_W] \{q_W\} + [K_4] \{q_{\beta_x}\} + [K_5] \{q_{\beta_y}\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_x}\}} = \left[\frac{1}{L} B_{11} \int_{-1}^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} + \left[L k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} -$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N'_{\beta_x}]^T [N'_V] d\xi \right] \{q_V\} + \left[L k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N'_W]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_W\} + \\
 & \left[\frac{1}{2} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_{\beta_Y}]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_Y}\} + \left[\frac{1}{2} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_Y}] d\xi \right] \{q_{\beta_Y}\} \\
 & \frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_x}\}} = [K_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} + [K_2]^T \{q_V\} + [K_4]^T \{q_W\} + [K_6] \{q_{\beta_Y}\} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_Y}\}} &= \left[\frac{1}{L} B_{11} \int_{-1}^1 [N'_{\beta_Y}]^T [N'_{\beta_Y}] d\xi \right] \{q_{\beta_Y}\} + \left[L k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N_{\beta_Y}]^T [N_{\beta_Y}] d\xi \right] \{q_{\beta_Y}\} \\
 & - \left[\frac{1}{2L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N'_V]^T [N_{\beta_Y}] d\xi \right] \{q_V\} + \left[k_s (A_{55} + A_{66}) \int_{-1}^1 [N'_{\beta_Y}]^T [N'_W] d\xi \right] \{q_W\} + \\
 & \left[\frac{1}{2} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_Y}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} + \left[\frac{1}{2} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N'_{\beta_Y}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} \\
 \frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_Y}\}} &= [K_{\beta_Y}] \{q_{\beta_Y}\} + [K_3]^T \{q_V\} + [K_5] \{q_W\} + [K_6]^T \{q_{\beta_x}\} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_Y}\}} &= \left[\frac{1}{L} B_{66} \int_{-1}^1 [N'_\phi]^T [N'_\phi] d\xi \right] \{q_\phi\} + \left[\frac{1}{L} k_s A_{16} \int_{-1}^1 [N_U]^T [N_\phi] d\xi \right] \{q_U\} = \\
 \frac{\partial E_d}{\partial \{q_{\beta_Y}\}} &= [K_\phi] \{q_\phi\} + [K_1]^T \{q_U\} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Par suite la matrice de rigidité de l'arbre en rotation sera composée des matrices élémentaires de rigidité et prend la forme suivante.

$$[K_a] = \begin{bmatrix} [K_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_1] \\ & [K_V] & 0 & [K_2] & [K_3] & 0 \\ & & [K_W] & [K_4] & [K_5] & 0 \\ & & & [K_{\beta_x}] & [K_6] & 0 \\ & & & & [K_{\beta_Y}] & 0 \\ & & & & & [K_\phi] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La matrice de rigidité de l'arbre est une matrice carrée symétrique qui est composée par les matrices élémentaires de l'arbre.

4.2 Matrices Masse et matrice gyroscopique de l'arbre.

De l'équation de Lagrange on a les termes $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_i\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_i\}}$ qui définissent les matrices élémentaires masses et gyroscopiques.

Appliquons les coordonnées adimensionnelles à l'énergie cinétique de l'arbre donnée en coordonnées cartésiennes en (2.31).

La coordonnée adimensionnelle est fonction de y et de la longueur (l_a) de l'arbre :

$$\xi = (2x/L) - 1 \quad (3.17)$$

$$x = \frac{\xi L + L}{2} \quad (3.18)$$

$$dx = l_a d\xi \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} E_{Ca} = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [\{\dot{q}_U\}^T [N_U]^T [N_U] \{\dot{q}_U\} + \{\dot{q}_V\}^T [N_V]^T [N_V] \{\dot{q}_V\} + \{\dot{q}_W\}^T [N_W]^T [N_W] \{\dot{q}_W\}] d\xi + \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{da} \cdot \frac{L}{2} [\{\dot{q}_{\beta x}\}^T [N_{\beta x}]^T [N_{\beta x}] \{\dot{q}_{\beta x}\} + \{\dot{q}_{\beta y}\}^T [N_{\beta y}]^T [N_{\beta y}] \{\dot{q}_{\beta y}\}] d\xi + \Omega \cdot I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [N_\phi] \{\dot{q}_\phi\} d\xi + \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [\{\dot{q}_\phi\}^T [N_\phi]^T [N_\phi] \{\dot{q}_\phi\}] d\xi - \Omega \int_{-1}^1 I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [\{\dot{q}_{\beta x}\}^T [N_{\beta x}]^T [N_{\beta x}] \{\dot{q}_{\beta x}\}] d\xi + I_{pa} \cdot \frac{L}{2} \Omega^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

La matrice masse et gyroscopique sont déduites des termes de l'équation de Lagrange

appliquée à l'énergie cinétique de l'arbre. $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_i\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_i\}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_U\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_U\}} = & \int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_U]^T [N_U] \{\ddot{q}_U\} d\xi = \left(\int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_U]^T [N_U] \{\ddot{q}_U\} d\xi \right) \{\ddot{q}_U\} \\ & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_U\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_U\}} = [M_U] \{\ddot{q}_U\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_V\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_V\}} = & \int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_V]^T [N_V] \{\ddot{q}_V\} d\xi = \left(\int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_V]^T [N_V] \{\ddot{q}_V\} d\xi \right) \{\ddot{q}_V\} \\ & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_V\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_V\}} = [M_V] \{\ddot{q}_V\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_W\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_W\}} = \int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_W]^T [N_W] \{\ddot{q}_W\} d\xi = \left(\int_{-1}^1 I_{ma} \cdot \frac{L}{2} [N_W]^T [N_W] d\xi \right) \{\ddot{q}_W\}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_W\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_W\}} = [M_W] \{\ddot{q}_W\} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_{\beta x}\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_{\beta x}\}} = \left(\int_{-1}^1 I_{da} \cdot \frac{L}{2} [N_{\beta x}]^T [N_{\beta x}] d\xi \right) \{\ddot{q}_{\beta x}\} + \left(\Omega \int_{-1}^1 I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [N_{\beta x}]^T [N_{\beta y}] d\xi \right) \{\ddot{q}_{\beta y}\}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_{\beta x}\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_{\beta x}\}} = [M_{\beta x}] \{\ddot{q}_{\beta x}\} + [G_1] \{\ddot{q}_{\beta y}\}. \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_{\beta y}\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_{\beta y}\}} = \left(\int_{-1}^1 I_{da} \cdot \frac{L}{2} [N_{\beta y}]^T [N_{\beta y}] d\xi \right) \{\ddot{q}_{\beta y}\} + \left(\Omega \int_{-1}^1 I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [N_{\beta y}]^T [N_{\beta x}] d\xi \right) \{\ddot{q}_{\beta x}\}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_{\beta y}\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_{\beta y}\}} = [M_{\beta y}] \{\ddot{q}_{\beta y}\} + [G_1]^T \{\ddot{q}_{\beta x}\}. \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_\phi\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{\phi\}} = \int_{-1}^L I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [N_\phi]^T [N_\phi] \{\ddot{q}_\phi\} d\xi = \left(\int_{-1}^L I_{pa} \cdot \frac{L}{2} [N_\phi]^T [N_\phi] d\xi \right) \{\ddot{q}_\phi\}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_\phi\}} \right\} - \frac{\partial E_c}{\partial \{\phi\}} = [M_\phi] \{\ddot{q}_\phi\} \quad (3.26)$$

Par suite la matrice masse de l'arbre en rotation sera composée des matrices élémentaires des masses et prend la forme suivante :

$$[M_a] = \begin{bmatrix} [M_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [M_V] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & [M_W] & 0 & 0 & 0 \\ & & & [M_{\beta x}] & 0 & 0 \\ & & & & [M_{\beta y}] & 0 \\ & & & & & [M_\phi] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Les moments d'inertie sont définis en annexe. La matrice gyroscopique de l'arbre en rotation sera composée des matrices élémentaires gyroscopiques et prend la forme suivante :

$$[G_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [G_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[G_1]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

5. Détermination des matrices du disque.

La formulation par la méthode des éléments finis version hp présentée ici concerne le cas le plus répandu d'un disque symétrique et rigide, on modélise ce disque par un nœud possédant six degrés de libertés ($U, V, W, \beta_x, \beta_y$ et ϕ).

Par analogie avec la détermination des matrices de l'arbre, appliquons les équations de Lagrange à l'énergie cinétique du disque.

$$E_{Ca} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} I_{m,D}(\dot{U}_0^2 + \dot{V}_0^2 + \dot{W}_0^2) + I_{d,D}(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - 2\Omega I_{pD}\beta_x\dot{\beta}_y + 2\Omega I_{pD}\dot{\phi} + I_{pD}\dot{\phi}^2 + \Omega^2 I_{pD} \\ + \Omega^2 I_{d,D}(\beta_x^2 + \beta_y^2) \end{array} \right] \quad (3.29)$$

Le terme $\Omega^2 I_{d,D}(\beta_x^2 + \beta_y^2)$ est très petit et peu être négligé.

La matrice masse du disque.

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [I_{mD}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [I_{mD}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [I_{mD}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I_{dD}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [I_{dD}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [I_{pD}] \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Les moments d'inertie annexe.

La matrice gyroscopique du disque.

$$[G_D] = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [I_{pD}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[I_{pD}]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Voir annexe pour les moments d'inertie.

6. Détermination des matrices des paliers.

La modélisation des paliers est représentée sur la fig 1.9 par les matrices raideurs $[K_{pe}]$ et amortissements $[C_{pe}]$.

on note :

La raideur suivant l'axe \vec{oy}

$$K_{yy} = K_{p22} \quad (3.32)$$

La raideur suivant l'axe oz

$$K_{zz} = K_{p33} \quad (3.33)$$

La raideur des termes croisés

$$K_{zy} = K_{yz} = K_{p23} = K_{p32} \quad (3.34)$$

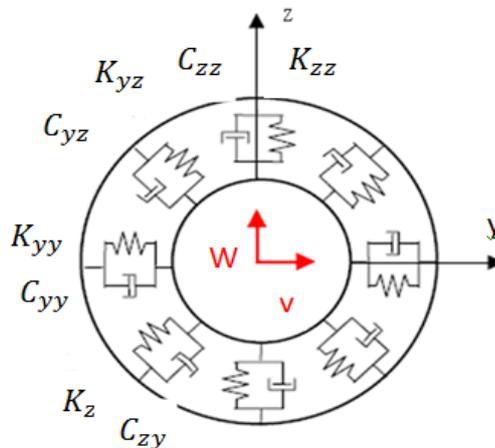


Figure 3.3 Rigidité et amortissement d'un palier.

7. Travail des forces de raideur et d'amortissement.

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est définis par.

$$dW = F_v \delta v + F_w \delta w \quad (3.35)$$

Avec : F_v et F_w sont les forces généralisées

$$dW = -K_{P11}v\delta v - K_{P12}w\delta v - K_{P21}w\delta w - K_{P22}v\delta w - C_{P11}\dot{v}\delta v - C_{P12}\dot{w}\delta v - C_{P21}\dot{w}\delta w - C_{P22}\dot{v}\delta w \quad (3.36)$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$[dW] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{22}] & [K_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{32}] & [K_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta\beta_x \\ \delta\beta_y \\ \emptyset \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{22}] & [C_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{32}] & [C_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta\beta_x \\ \delta\beta_y \\ \emptyset \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

La Matrice de rigidité des paliers.

$$[K_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{22}] & [K_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{32}] & [K_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Matrice amortissement des paliers.

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{22}] & [C_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [C_{32}] & [C_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

En général les termes de raideur et d'amortissement sont différents, Pour cette étude on suppose que les termes de raideur verticale, horizontale et croisés sont égaux.

$$K_{22} = K_{23} = K_{32} = K_{33} \quad (3.40)$$

Et les termes d'amortissement vertical, horizontal et croisés sont égaux.

$$C_{22} = C_{23} = C_{32} = C_{33} \quad (3.41)$$

8. Equation différentielle du mouvement

L'équation du système tournant arbre, disque et paliers prend la forme suivante :

$$([M_a] + [M_D])\{\ddot{q}\} + ([G_a] + [G_D] + [C_p])\{\dot{q}\} + ([K_a] + [K_p])\{q\} = \{0\} \quad (3.42)$$

$[M_a]$: Matrice masse de l'arbre tournant.

$[M_D]$: Matrice masse du disque.

$[G_a]$: Matrice gyroscopique de l'arbre tournant.

$[G_D]$: Matrice gyroscopique du disque.

$[C_p]$: Matrice de l'amortissement des paliers.

$[K_a]$: Matrice de la rigidité de l'arbre tournant.

$[K_p]$ Matrice de la rigidité des paliers.

La résolution de cette équation est donnée par le vecteur déplacement exprimé en fonction de la pulsation du système, valeur propre du système, Tapez une équation ici. et son vecteur propre.

$$q = D e^{i\omega t} \quad (3.43)$$

ω : Valeur propre du rotor du système tournant.

D : vecteur propre compatible avec la vitesse de rotation.

Le déplacement sur $\overline{\partial x}$ exprimé par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$U = [N_u]\{q_u\} = \begin{cases} [N_u] = \sum_{m=1}^{pu} f_m(\xi) \\ \{q_u\} = \sum_{m=1}^{pu} x_m(r) \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\{q_u\} = \sum_{m=1}^{pu} x_m(r) = D \cdot e^{i\omega t} \quad (3.45)$$

Le déplacement sur $\overline{\partial y}$ exprimé par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$V = [N_v]\{q_v\} = \begin{cases} [N_v] = \sum_{m=1}^{pv} f_m(\xi) \\ \{q_v\} = \sum_{m=1}^{pv} y_m(r) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\{q_v\} = \sum_{m=1}^{pv} y_m(r) = D. e^{i\omega t} \quad (3.47)$$

Le déplacement sur \vec{oz} exprimé par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$W = [N_w]\{q_w\} \begin{cases} [N_w] \sum_{m=1}^{pw} f_m(\xi) \\ \{q_w\} \sum_{m=1}^{pw} z_m(r) \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\{q_w\} \sum_{m=1}^{pw} z_m(r) = D. e^{i\omega t} \quad (3.49)$$

La rotation autour de l'axe \vec{oy} exprimée par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$\beta_x = [N_{\beta_x}]\{q_{\beta_x}\} = \begin{cases} [N_{\beta_x}] = \sum_{m=1}^{p\beta_x} f_m(\xi) \\ \{q_{\beta_x}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_x} \beta_{x_m}(r) \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\{q_{\beta_x}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_x} \beta_{x_m}(r) = D. e^{i\omega t} \quad (3.51)$$

La rotation autour de l'axe \vec{oz} exprimée par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$\beta_y = [N_{\beta_y}]\{q_{\beta_y}\} \begin{cases} [N_{\beta_y}] = \sum_{m=1}^{p\beta_y} f_m(\xi) \\ \{q_{\beta_y}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_y} \beta_{y_m}(r) \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\{q_{\beta_y}\} = \sum_{m=1}^{p\beta_y} \beta_{y_m}(r) = D. e^{i\omega t} \quad (3.53)$$

Le déplacement sur \vec{ox} exprimé par les fonctions de formes et le vecteur déplacement

$$\emptyset = [N_{\emptyset}]\{q_{\emptyset}\} \begin{cases} [N_{\emptyset}] = \sum_{m=1}^{p\emptyset} f_m(\xi) \\ \{q_{\emptyset}\} = \sum_{m=1}^{p\emptyset} \phi_m(r) \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\{q_{\emptyset}\} = \sum_{m=1}^{p\emptyset} \phi_m(r) = D \cdot e^{i\omega t} \quad (3.55)$$

L'équation différentielle définissant le mouvement du système tournant prend la forme suivante :

$$[M_g] = [M_a] + [M_D] \quad (3.56)$$

$$[G_g] = [G_a] + [G_D] + [C_p] \quad (3.57)$$

$$[K_g] = [K_a] + [K_p] \quad (3.58)$$

$[M_g]$: Matrice masse globale du système tournant.

$[G_g]$: Matrice gyroscopique globale du système tournant.

$[K_g]$: Matrice raideur globale du système tournant.

L'équation différentielle prend la forme suivante :

$$([M_g])\{\ddot{q}\} + ([G_g])\{\dot{q}\} + ([K_g])\{q\} = \{0\} \quad (3.59)$$

En substituant le vecteur déplacement par sa valeur complexe on obtient.

$$\begin{aligned} -\omega^2([M_g])D \cdot e^{i\omega t} + i\omega([G_g])D \cdot e^{i\omega t} + ([K_g])D \cdot e^{i\omega t} &= \{0\} \\ -\omega^2([M_g]) + i\omega([G_g]) + ([K_g]) &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Chapitre IV

Organisation de la programmation

1 Introduction

Pour la détermination des fréquences vibratoires, définissant le comportement dynamique du système tournant, Un programme en langage Matlab est réalisé. Il permet de faire la lecture de toutes les données physiques et géométriques de la structure, la lecture des fonctions de forme et permet de calculer les fréquences propres et les tracés des diagrammes de Campbell du système.

2. Outils de programmation :

L'exécution de ce travail est faite par le ordinateur (laboratoire IS2M-université de Tlemcen) : HP-PROLIANT 0.8 CPU double processeurs Intel Partinium 24 Cœurs x 2, RAM 128 GB, Carte graphique RADEON-AMD-RX 570. Le logiciel employé est Matlab.

3. Programme principal :

La réalisation du programme principal pour la résolution de l'équation différentielle donnée et les différentes étapes compatibles avec le logiciel utilisé **Matlab**, sont décrites dans l'Algorithme de programmation suivant :

4. Algorithme de Programmation :

L'Algorithme de calcul des fréquences propres d'un arbre en rotation comprend les étapes suivantes :

1^{ère} Etape : Lecture des données physiques et géométriques de l'arbre, du disque et des paliers

2^{ème} Etape : Calculs de toutes les constantes données dans l'équation différentielle.

3^{ème} Etape : Lecture des fonctions de formes.

4^{ème} Etape : Dérivées des fonctions de formes

5^{ème} Etape : Calcule de tous les intégrales

6^{ème} Etape : Formation des matrices :

7^{ème} Etape Introduction des conditions aux limites.

8^{ème} Etape : Transformation du problème aux valeurs propre a un problème aux valeurs standards.

9^{ème} Etape : Calcul et tri des valeurs propres.

5. Description du programme :

- Tous les paramètres utilisés par la méthode des éléments finis version hp et toutes les données physiques et géométriques décrivant l'arbre FGM creux, le disque et les paliers en question sont décrit dans un listing au début du programme.

5.1 Lecture des données :

Les données physiques et géométriques du rotor en mouvement et les paramètres de la méthode des éléments finis version hp -sont définis comme suit :

h : Nombre d'éléments a étudié.

r : Nombre des fonctions hiérarchiques ou degrés du polynôme p.

Ω : Vitesse de rotation de l'arbre [tr/mn]

E_m : Module d'élasticité du métal SUS304 en [Pa]

E_c : Module d'élasticité de la céramique utilisée. en [Pa]

ρ_m : Masse volumique du métal [Kg/m³]

ρ_c : Masse volumique de la céramique [Kg/m³]

S_A : Section droite de l'arbre [m²]

a : Rayon intérieur de l'arbre [m]

b : Rayon extérieur de l'arbre [m]

L : Longueur de l'arbre [m].

S_D : Section droite du disque [m]

A : Rayon intérieur du disque [m]

B : Rayon extérieur du disque [m]

ep : Epaisseur du disque

I : Moment d'inertie de l'arbre [m].

I_p : Moment polaire de l'arbre [m⁴].

5.2 Lecture des fonctions de forme :

La lecture des fonctions de forme pour la méthode des éléments finis version hp pour un arbre en flexion.

5.3 Dérivées des fonctions de forme :

on dérive les fonctions de formes nécessaires pour le calcul des intégrales

6. Calcul de toutes les intégrales des fonctions de forme:

On calcule toutes les intégrales nécessaires pour la formation des matrices. $[M_A]$ $[M_D]$ $[C_{gA}]$

$[C_{gD}]$ et $[K_A]$

7. Formation des matrices :

Détermination des matrices :

Masses de l'arbre et du disque $[M_A], [M_D]$

Matrices raideurs de l'arbre et des paliers $[K_A] [K_P]$:

Matrices gyroscopiques arbre et disque $[C_{gA}]$ et $[C_{gD}]$

Matrice amortissement des paliers. $[C_p]$.

8 Introduction des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont posées pour l'élément poutre à deux nœuds (1 et 2), ayant pour chaque nœud six degrés de libertés.

u : Déplacement suivant Ox

v : Déplacement suivant Oy

w : Déplacement suivant Oz

β_x : Rotation autour de Oy

β_y : Rotation autour de Oz

β_z : Rotation autour de Ox

9 Transformation du problème aux valeurs propres en un problème aux valeurs standards :

La matrice dont on veut calculer les valeurs propres ayant la forme d'une matrice quelconque, la méthode appropriée pour l'extraction des valeurs propres est donc celle de Hessenberg supérieur suivi de la transformation QR, avec Q : matrice orthogonale $Q^{-1} = Q^T$ et R : une matrice triangulaire supérieure.

9.1 Transformation d'une matrice A quelconque en une matrice H de

Hessenberg supérieure :

- On dit qu'une matrice H est une matrice de Hessenberg supérieure si elle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & \dots & \vdots \\ 0 & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

C'est-à-dire $h_{ij} = 0$ pour $i \geq j + 1$.

Soit A une matrice quelconque, il existe une matrice orthogonale P ($P^{-1} = P^T$) telle que :

$$H = P^T A P \tag{4.2}$$

Soit une matrice de Hessenberg supérieur.

Les matrices H et A sont semblables, pour obtenir H la technique est la même que celle de Householder.

Soit la matrice $A \in R^{n \times n}$ peut être transformée en une matrice semblable de Hessenberg supérieurs, le procédé nécessite plusieurs étapes de calcul et cette transformation est obtenue comme un produit de matrices de Householder :

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_{n-2}$$

Et la k ième étape consiste à transformer la matrice A, à l'aide d'une matrice de Householder

P_k afin d'annuler les éléments situés sur les lignes $k + 2 \dots \dots n$ de la k ième colonne

Pour $k = 1 \dots \dots n - 2$

Exemple : Pour $n=4$ la matrice $A(4,4)$ nécessite $n-2$ étapes de calcul.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} * \bar{P}(1) \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} * \bar{P}(2) \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

9.2 Algorithme de Householder

La méthode de Householder génère une suite de matrices A^k qui sont orthogonalement semblable à A :

$$A^{(k)} = P_{(k)}^T A^{(k-1)} P \tag{4.4}$$

$$A^{(k)} = (P_{(k)} \dots \dots P_{(1)})^T A (P_{(k)} \dots \dots P_{(1)}) \tag{4.5}$$

$$A^{(k)} = Q_{(k)}^T A Q_{(k)} \quad k \geq 1 \tag{4.6}$$

En suivant cette procédure et après $(n - 2)$ étapes de réduction de Householder, on obtient une matrice sous la forme :

$$H = A^{(n-2)} \tag{4.7}$$

Appelée matrice de Hessenberg supérieure

9.3 Factorisation QR d'une matrice de Hessenberg supérieure :

Dans cette section expliquons comment effectuer une étape de la méthode QR quand on part d'une matrice de Hessenberg supérieure.

Pour tout $k \geq 1$ la première étape consiste à calculer la factorisation QR de $H^{(k-1)}$ au moyen de $(n - 1)$ rotation:

$$\left(Q^{(k)}\right)^T H^{(k-1)} = \left(G_{(n-1)}^{(k)}\right)^T \dots\dots \left(G_1^{(k)}\right)^T = R^{(k)} \tag{4.8}$$

Pour $j = 1 \dots (n - 1)$

$$G_j^{(k)} = G(j, j + 1)^{(k)} \tag{4.9}$$

Pour $k \geq 1$

La j ième matrice de rotation de Givens dans laquelle θ_j est choisi de manière à ce que les coefficients d'indices $(j + 1, j)$ de la matrice ;

$$\left(G_j^{(k)}\right)^T \dots\dots \left(G_1^{(k)}\right)^T \tag{4.10}$$

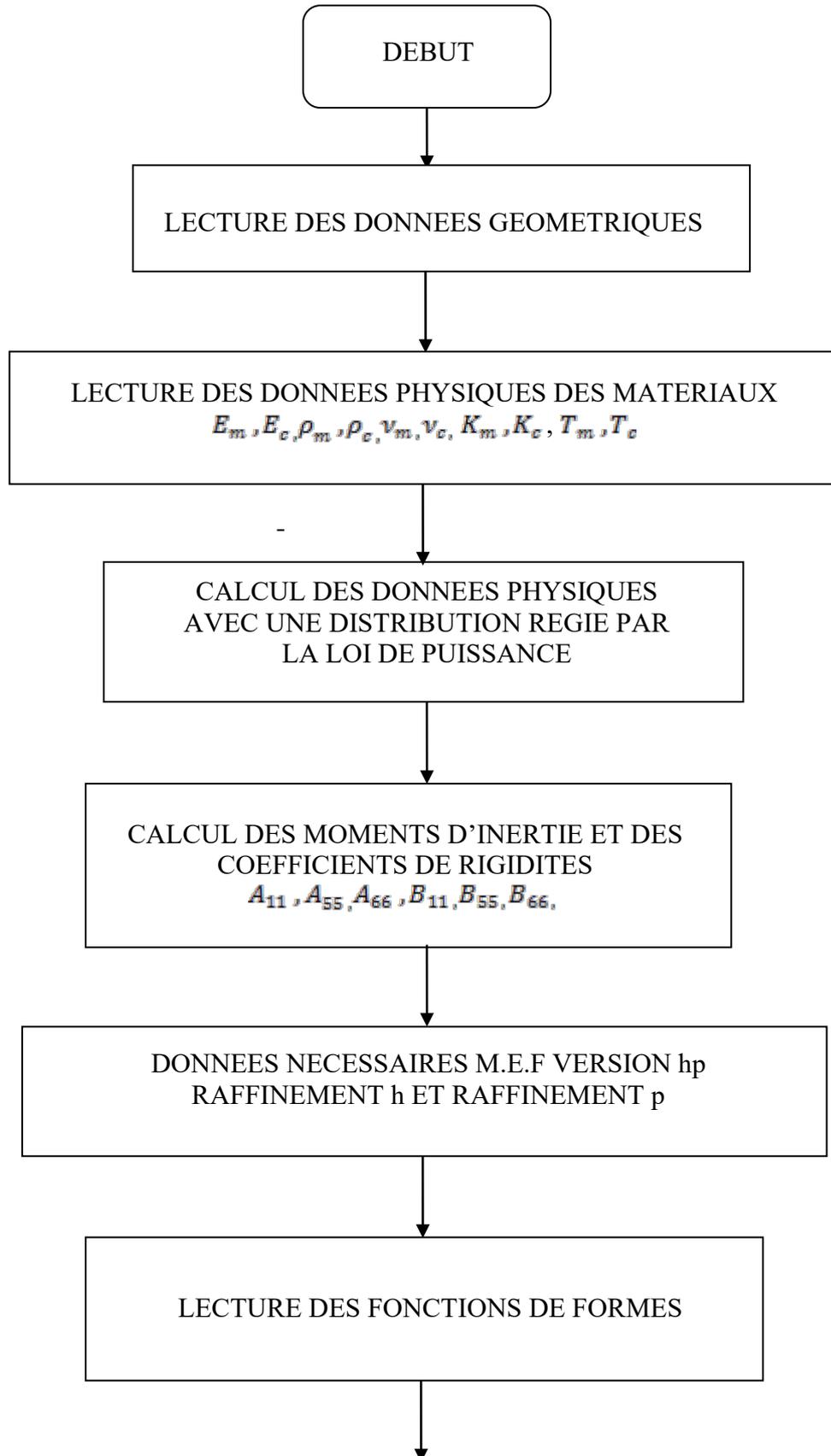
Soient nuls, et les coefficients (j, j) qui restent, représentent les valeurs propres recherchées.

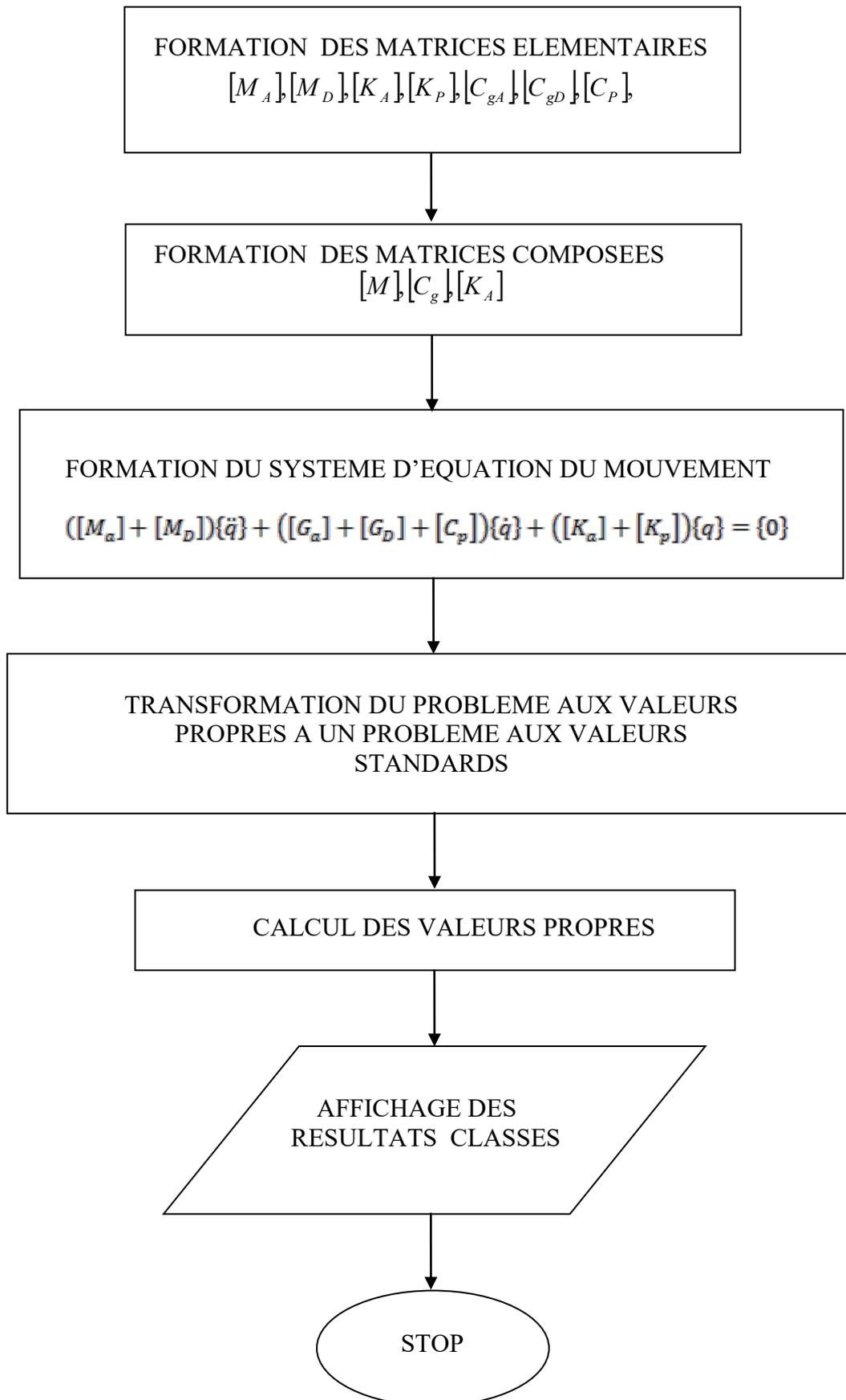
10 Affichage des résultats. :

Les résultats obtenus sont les valeurs propres notées dans le programme par V_f , qui sont les fréquences propres recherchées. (4.11)

11. Organigramme :

L'organigramme suivant montre toutes les procédures (opération de calcul, opération d'affectation, opération de transformation, opération de tris des valeurs et d'affichages.....) effectuées dans un ordre bien définis





Chapitre V

Résultats et interprétations

1 Introduction

Le programme élaboré est un programme servant à calculer les fréquences propres d'une ligne d'arbre constituée par un nombre indéfini d'éléments rotors. On définit un élément rotor par un arbre avec ou sans un disque comme le montre la figure ci dessous

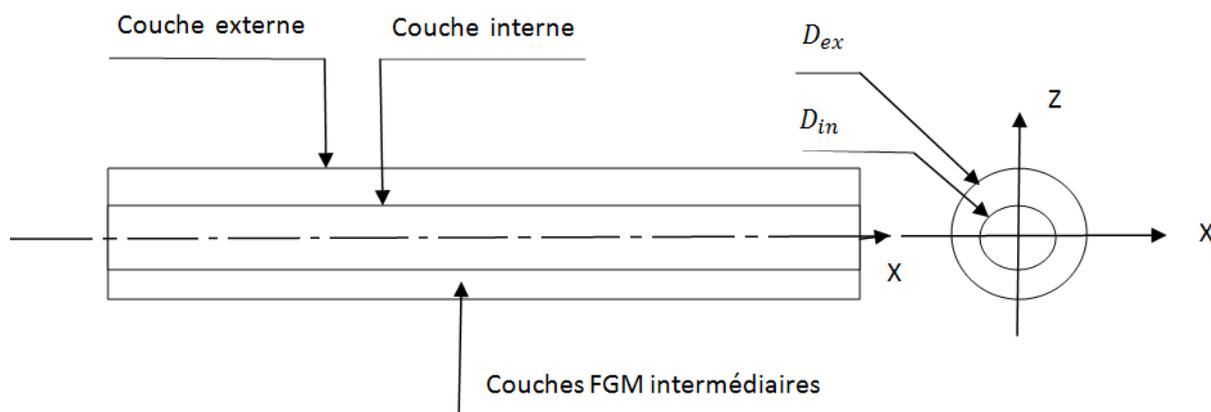


Figure 5.1 Représentation d'un rotor FGM creux.

Pour le calcul des fréquences propres du rotor étudié, nous devons faire une validation du programme élaboré par une comparaison des résultats obtenus par HPMEF avec ceux obtenus par calculs analytiques.

2 Propriétés géométriques de l'arbre :

Pour la validation, l'arbre du rotor du système tournant étudié est défini par le tableau (5.1) définissant les propriétés géométriques et le tableau (5.2) définissant les propriétés du matériau FGM.

Tab 5.1 Propriétés géométriques de l'arbre.

e/R	0.0002
L/R	20

e : épaisseur radiale

L : longueur totale de l'arbre.

R : rayon moyen de l'arbre

$$R = \left(\frac{r_o - r_i}{2} \right) \quad (5.1)$$

r_o : Rayon extérieur

r_i : Rayon intérieur

La raideur et l'amortissement sont définis :

$$k_{yy} = k_{zz} = 7e10 \text{ Nm}^{-1} \quad (5.2)$$

$$C_{yy} = C_{zz} = 5e2 \text{ Nsm}^{-1} \quad (5.3)$$

3. Etude de la convergence :

Le métal utilisé est l'acier inoxydable SUS304 à l'intérieur et la céramique utilisée comme barrière thermique est le Nickel à l'extérieur.

Tab 5.2 : Propriétés des matériaux constituant la composition FGM du rotor :

Propriétés	Acier inoxydable SUS304	Nickel Ni
Module de Young en (GPa)	210	205.098
Masse volumique en (kg/m3)	8166	8900
Coefficient de Poisson	0.30	0.31

Tab5.3 : Coefficients de Température de Ni et SUS304 Hui-(Shen Shen – 2009).

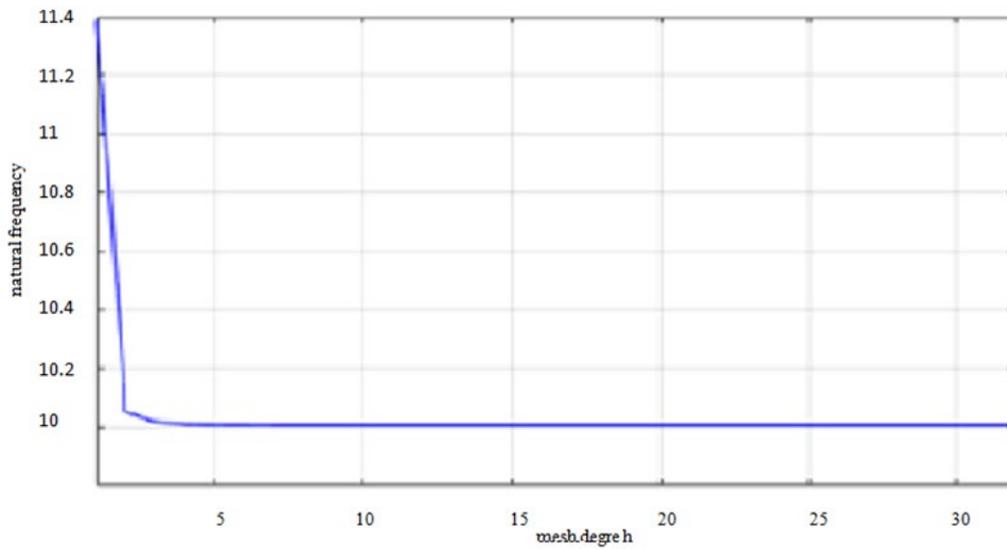
Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa)	SUS304	0	201.04e9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	Nickel	0	223.95e9	-2.794e-4	-3.998e-9	0
K(W/mK)	SUS304	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	Nickel	0	58.754	-4.614e-4	6.670e-7	-1.523e-10
α (1/K)	SUS304	0	12.330e-6	8.086e-4	0	0
	Nickel	0	9.9209e-6	8.705e-4	0	0
ν : Coef de Poisson	SUS304	0	0.3262	-2.002e-4	3.797e-7	0
	Nickel	0	0.3100	0	0	0

4. Convergence :

Les résultats obtenus dans cette étude sont traités avec la version hp de la méthode des éléments finis. L'avantage d'utiliser cette version est la capacité de contrôler les deux paramètres nombre d'éléments h et degré du polynôme p.

4.1. Convergence de la version h

La convergence des fréquences propres du rotor FGM basée sur la formulation de la méthode des éléments finis standard ou version h est obtenue en augmentant le nombre des éléments.



Figure(5.2) a : Convergence de la 1^{ère} fréquence version h

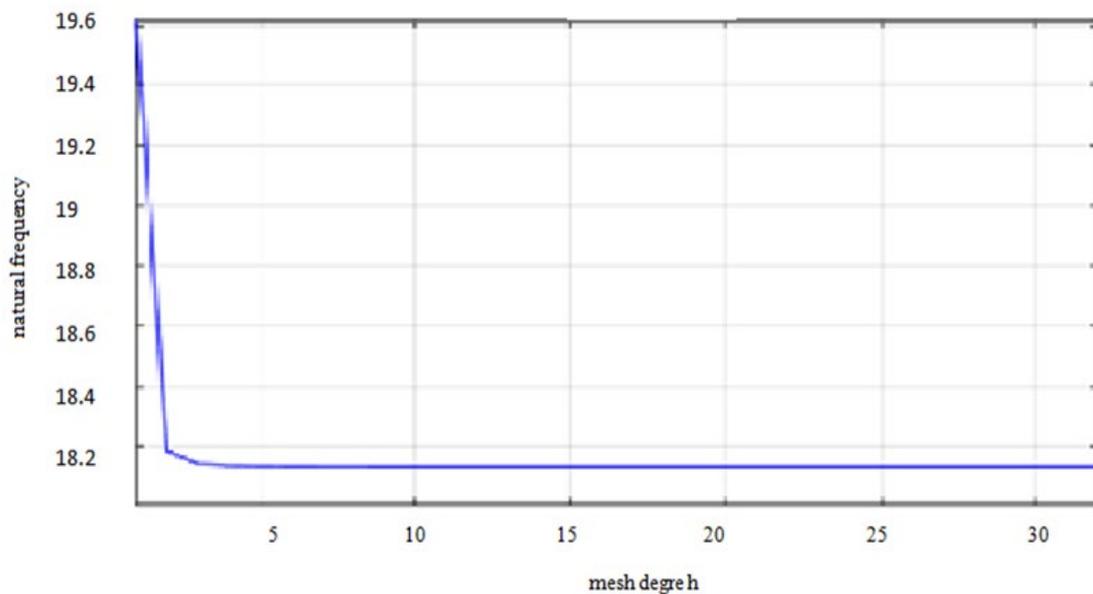


Figure (5.2) b : Convergence de la 2^{ème} fréquence version h

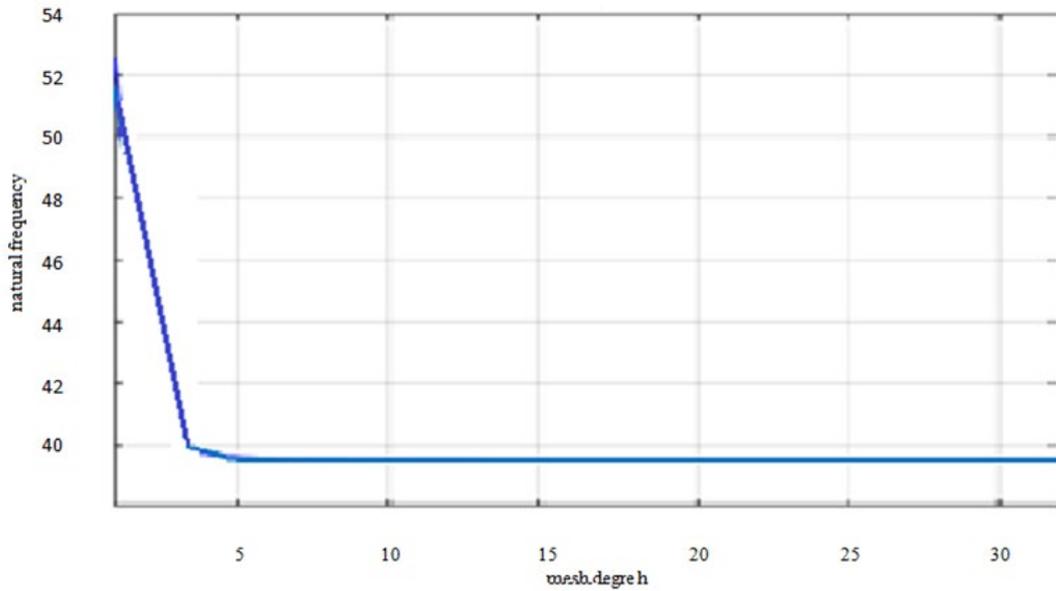


Figure (5.2) c : Convergence de la 3^{ème} fréquence version h

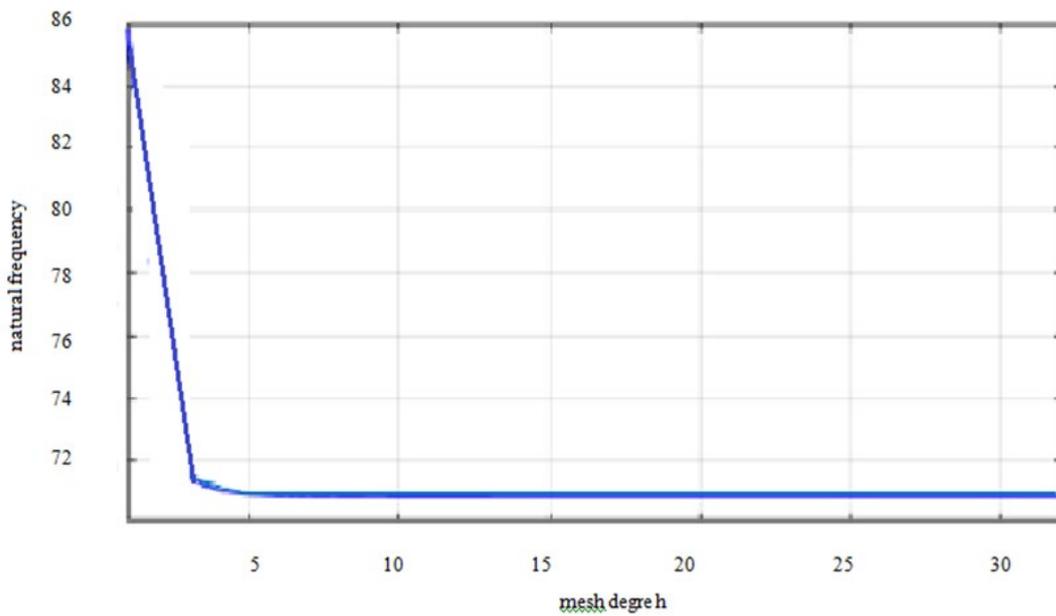


Figure (5.2) d : Convergence de la 4^{ème} fréquence version h

Figure 5.2 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction du nombre des éléments de la version h avec $h=2-34$. avec un pas de 2.

Le nombre d'éléments h varie de 2 à 34 avec un pas de 2 et le degré du polynôme p est fixé pour un seul élément. La figure 5.2 montre clairement que la convergence des résultats du système étudié est obtenue en raffinant le maillage. En augmentant le nombre des éléments de la version h , les résultats convergent rapidement.

4.2. Convergence de la version p :

La convergence de la version p de la méthode des éléments finis est obtenue en augmentant le degré P du polynôme de Legendre.

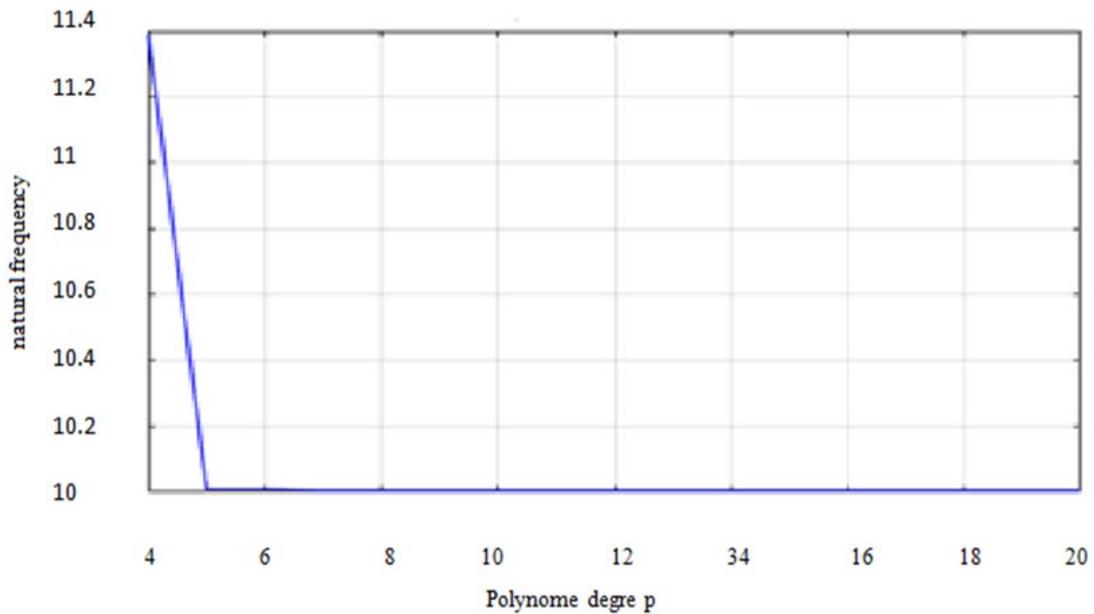


Figure (5.3).a : Convergence de la 1^{ère} fréquence version p

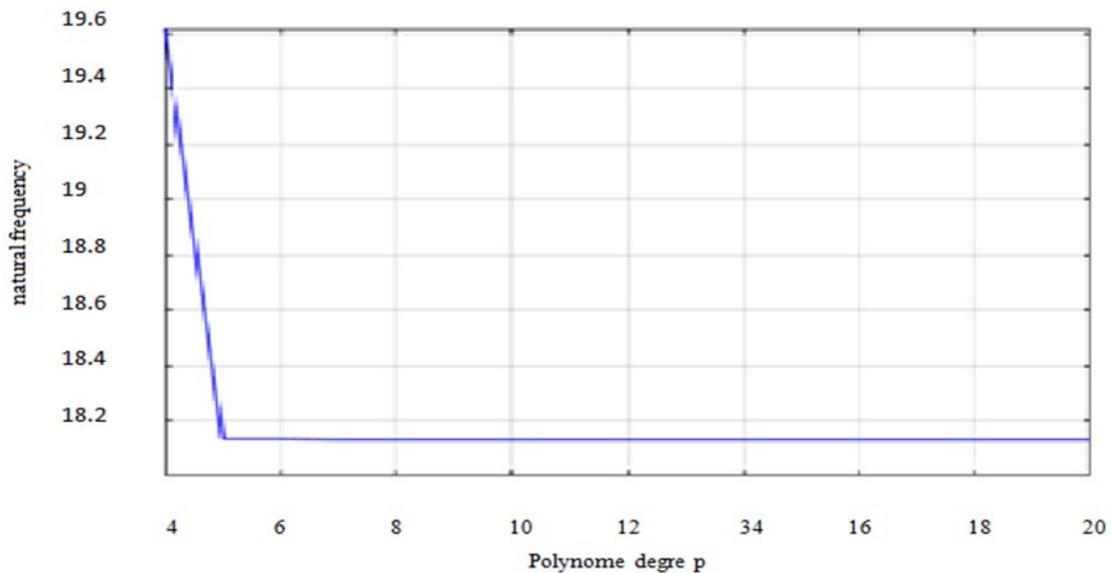


Figure (5.3).b : Convergence de la 2^{ème} fréquence version p

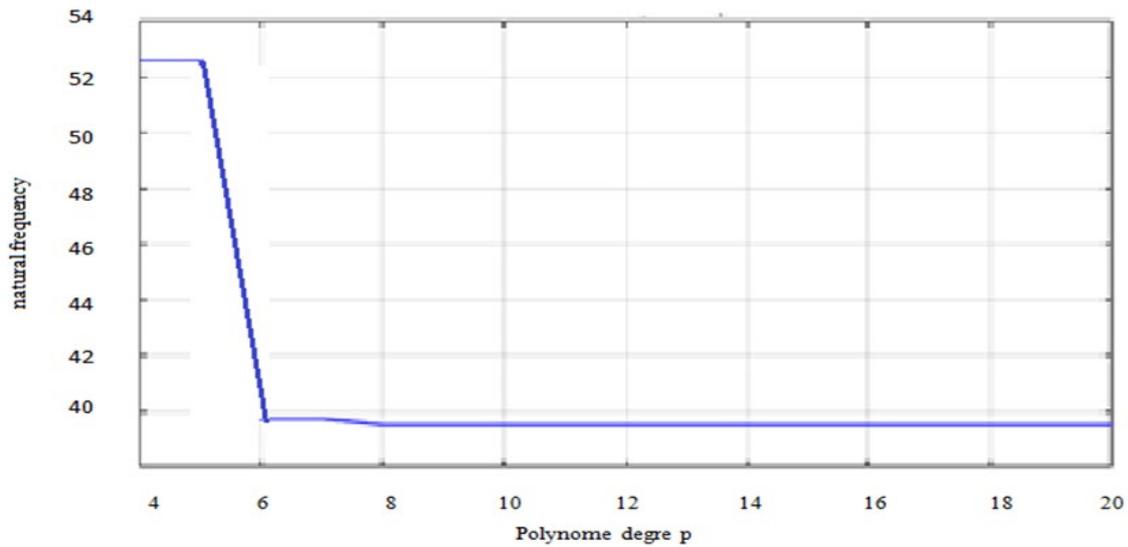


Figure (5.3).c : Convergence de la 3^{eme} fréquence version p

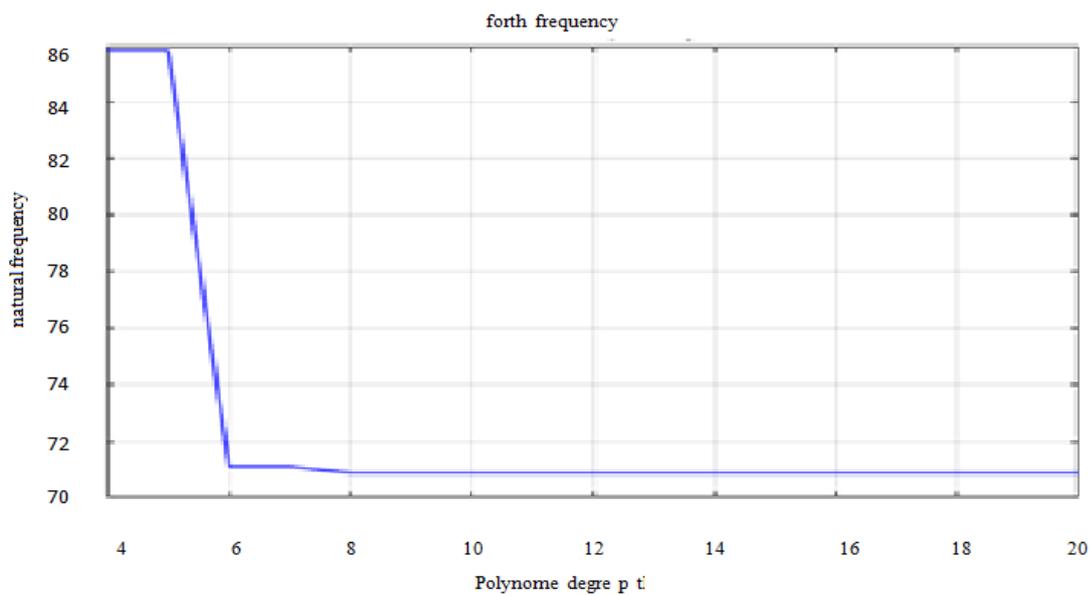


Figure (5.3).d : Convergence de la 4^{eme} fréquence version p

Figure 5.3 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction des degrés p du polynôme de Légendre. p varie de 4 à 20 et h=1

La figure 5.3 montre la convergence des fréquences propres du système tournant en fonction des degrés p du polynôme de Legendre. p varie de 4 à 20 et h=1

4.2. Convergence de la version hp

La convergence de la version hp est obtenue en faisant varier le maillage de la structure en éléments finis limités par deux nœuds définissant ainsi la version h, et en augmentant en même temps le degré P du polynôme de Legendre définissant le maillage entre les nœuds de la version p des éléments finis, et ainsi la structure est doublement raffinée par le nombre d'éléments h et le degré p à la température ambiante $T=300^{\circ}\text{K}$

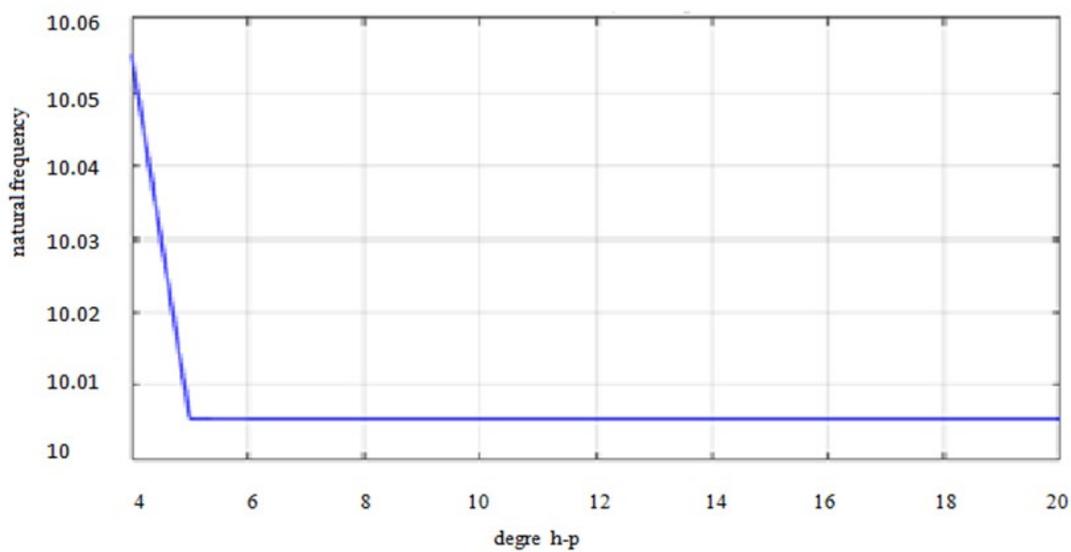


Figure (5.4).a : Convergence de la 1^{ème} fréquence version h-p

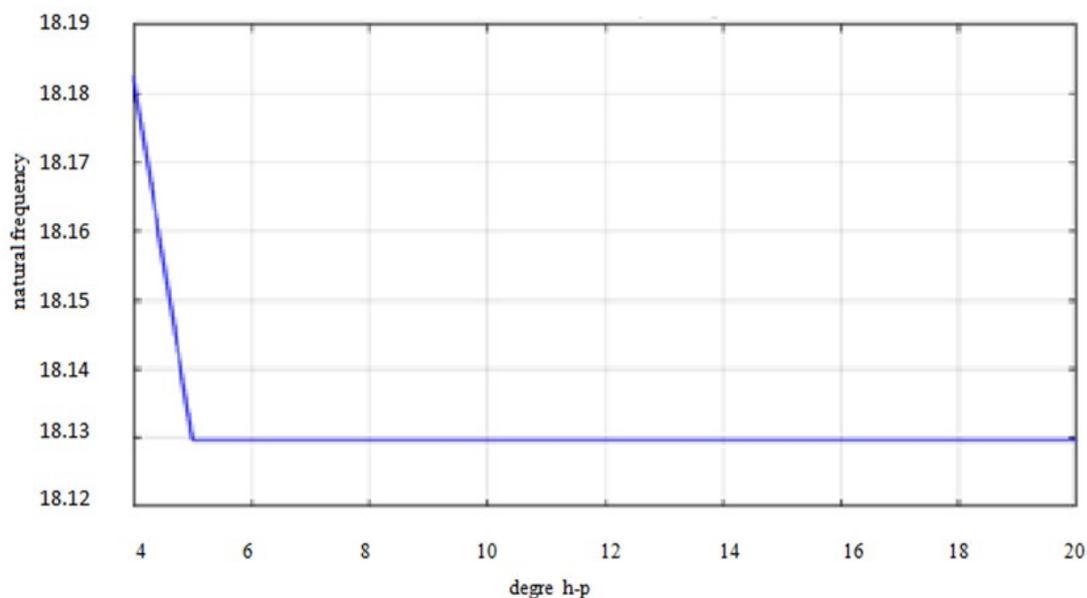


Figure (5.4).b : Convergence de la 2^{ème} fréquence version h-p

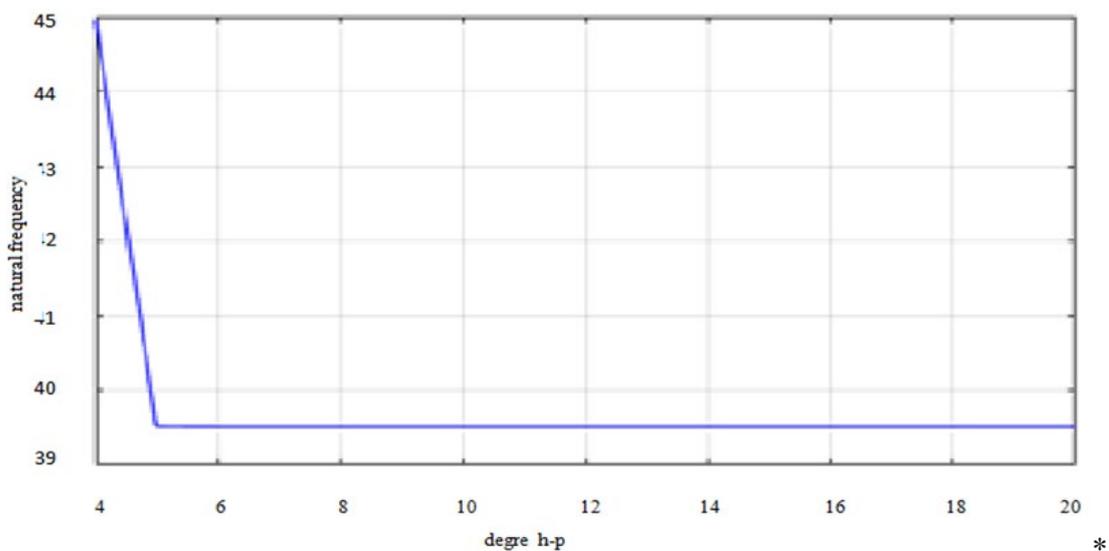


Figure (5.4).c : Convergence de la 3^{ème} fréquence version h-p

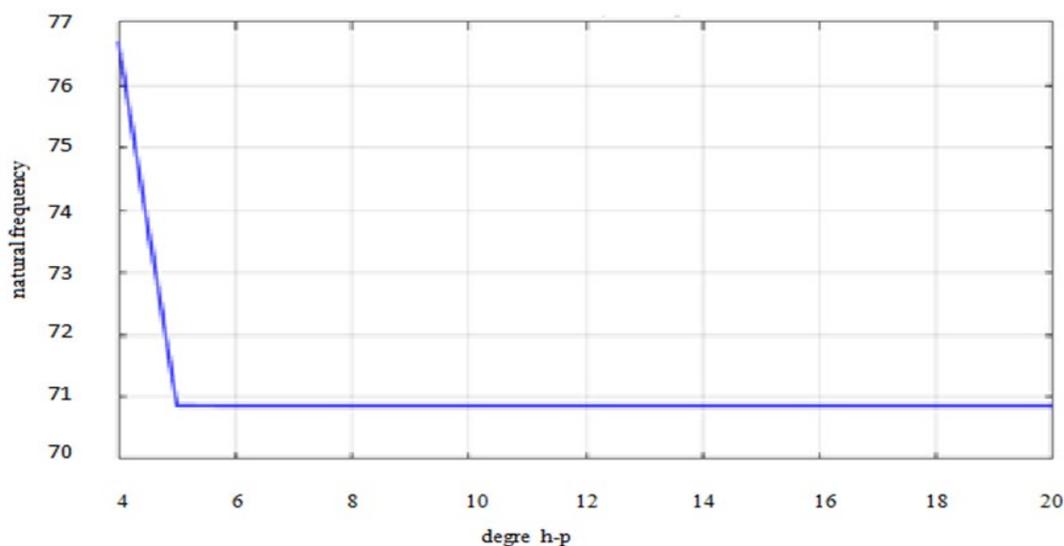


Figure (5.4).d : Convergence de la 4^{ème} fréquence version h-p

Figure 5.4 Convergence des fréquences propres du système tournant en fonction du nombre des éléments de la version h et du degré de polynôme p Le degré p=4 :20, et h=2 :2 :34

Sur la figure 5.4 on constate que les quatre premières fréquences propres du rotor FGM convergent rapidement en raffinant le maillage de la version h de 2 éléments jusqu'à 34 éléments et en augmentant en même temps le degré du polynôme de Legendre de p=4 jusqu'à p=20.

4.3. Convergence en fonction du nombre des couches de la graduation du mélange.

La figure ci-dessous montre la convergence des quatre premières fréquences à la température ambiante $T=300^{\circ}\text{K}$. en fonction du nombre des couches.

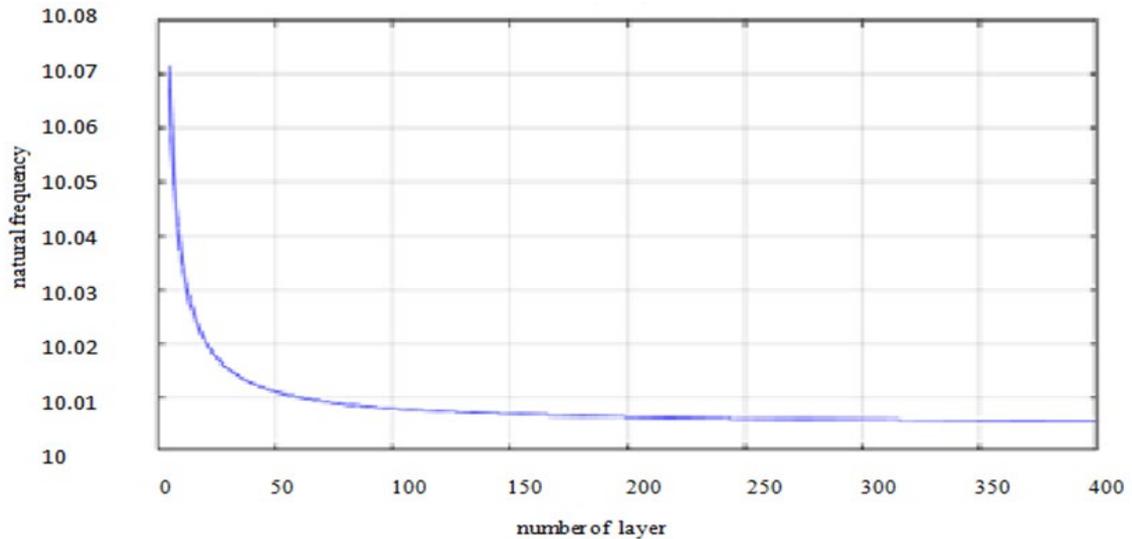


Figure (5.5).a: Convergence de la 1^{ème} fréquence

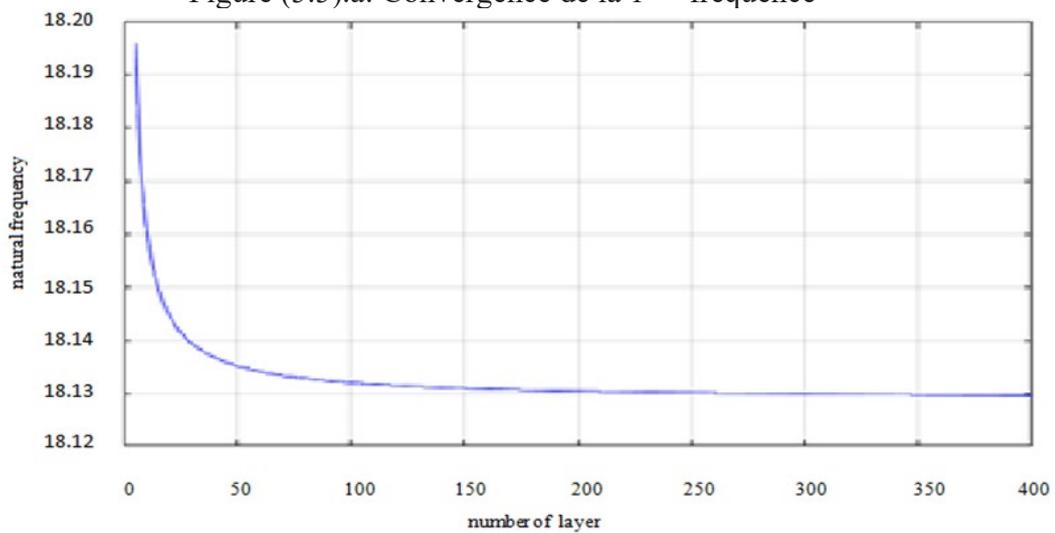


Figure (5.5).b: Convergence de la 2^{ème} fréquence

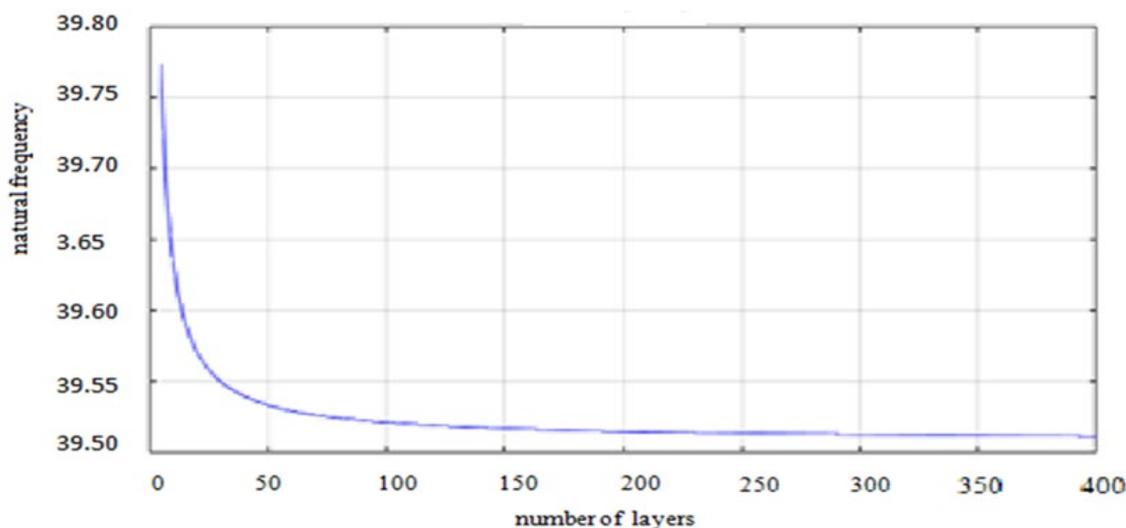


Figure (5.5).c: Convergence de la 3^{ème} fréquence

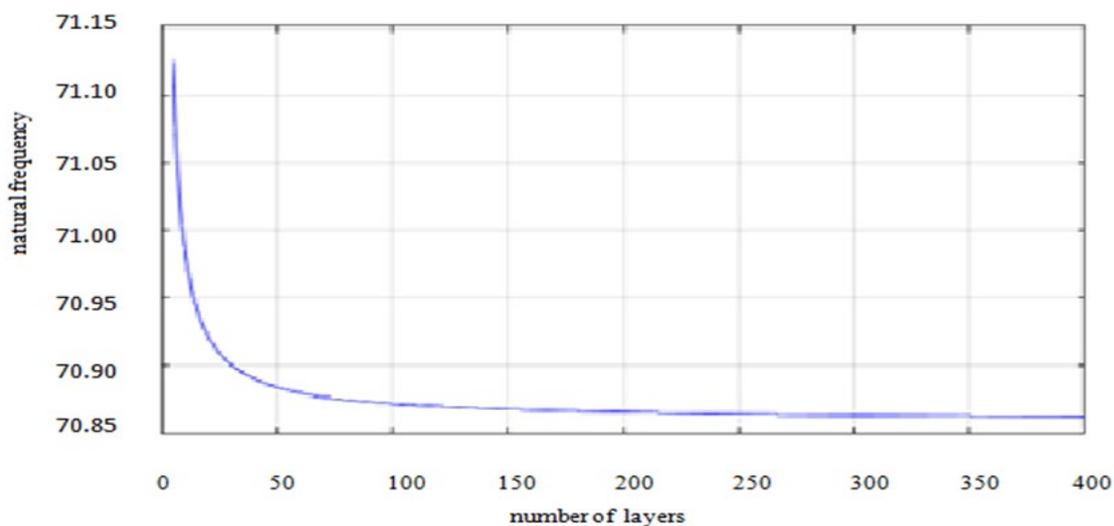


Figure (5.5).d: Convergence de la 4^{ème} fréquence

Figure 5.5 Convergence des 4 premières fréquences de la version h-p de la méthode des éléments finis en fonction du nombre des couches.

Puisqu'on a adopté la variation des propriétés FGM, par plusieurs variations des couches superposées les unes contre les autres, ainsi le volume fraction représentant la gradation du mélange métal-céramique varie progressivement sur chaque couches, et plus le nombre des couches augmente et plus les fréquences convergent rapidement. La fig 5.5 montre que les fréquences propres du rotor FGM, convergent quand on augmente le nombre des couches constituant la composition graduelle métal-céramique.

5. Validation :

Cette validation concerne le programme permettant de résoudre l'équation différentielle (2.10) donnant les fréquences propres d'un arbre creux en matériaux FGM en fonction du volume fraction V_f .

5.1. Validation d'un arbre en matériaux isotrope.

Pour cette validation la géométrie de l'arbre supposé homogène est défini par le diamètre $D=0.05m$ et la longueur $L=0.09m$, le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson sont respectivement égales à $2.10^{11} N/m^2$, $7800kg/m^3$ et 0.3 . La théorie de Timoshenko est appliquée avec un coefficient de correction au cisaillement égal a $6/7$. L'arbre est modélisé par un seul élément finis de la version hp de la méthode des éléments finis avec 2 nœuds pour cette étude $h=1$ et $p=10$.

Les résultats obtenus pour la condition aux limites d'un arbre simplement appuyé en ses deux extrémités sont comparés avec les résultats obtenus analytiquement par René-Jean 1999 utilisant la théorie des poutres d'Euler Bernoulli et par Boukhalfa.A 2014utilisant la version p de la méthode des éléments finis, montrent l'exactitude de la méthode utilisée et confirme l'efficacité de la version hp de la méthode des éléments finis appliquée aux poutres de Timoshenko.

Tab 5.4 : fréquences naturelles des trois premiers modes de vibrations en fonction Ω .

Ω [rd/s]	0				
ω [Hz]	Boukhalfa -1- 2014	René-Jean -2- (1988)	Présent-p-	écart en % (p/1)	écart en % (p/2)
1	128.1837	122.7475	122,6308	0.040	0.095
2	507.0806	490.9899	489,1309	0.032	0.38
3	1120.8937	1104.7273	1095,3826	0.014	0.85

Ω [rd/s]	10^4							
ω [Hz]	Mode direct (B)				Mode indirect (F)			
	Boukhalfa 2014-1-	René- Jean (1988)- 2-	Present -p-	Ecart en % (p/1)	Boukhalfa 2014	René- Jean (1988)	Present	Ecart en % (p/1)
1	122.346	119.7548	122,3144	0.026	134.2918	125.8150	122,9479	0.0922
2	484.652	479.0191	487,8729	0.664	530.4377	503.2598	490,3922	0.0816
3	1073.58	1077.793	1092,578	1.76	1169.809	1132.334	1098,193	0.06.5

5.2. Validation arbre FGM creux :

Pour la validation d'un rotor FGM creux constitué par la gradation métal-céramique (Ni-SS) avec la couche du métal à l'intérieur et la couche de la céramique à l'extérieur les tableaux 5.1 et 5.2 définissent respectivement les paramètres physiques et les coefficients de la température. La gradation des propriétés sur l'épaisseur radiale de l'arbre est donnée selon la théorie Loi de puissance, l'arbre est modélisé par un seul élément finis de la version hp avec $h=1$ et $p=10$ de la méthode des éléments finis appliquée aux poutres de Timoshenko avec un coefficient de correction au cisaillement $k_s=0.5$ et la vitesse de rotation est nulle. Pour cette étude nous faisons une comparaison des fréquences naturelles de vibration de l'arbre respectivement avec les résultats obtenus par la méthode analytique Rayleigh Ritz CT Loy, KY Lam et J N Reedy 1999 données sur le tableau 5.4

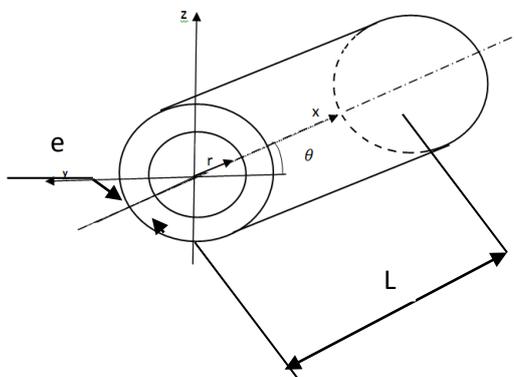


Figure 5.6 Coordonnées cylindriques du système

Tab 5.5 Variation des fréquences naturelles de vibrations en fonction de l'indice k du volume fraction

Indice du Volume fraction k	Fréquences naturelles Loy1999 C.T. Loy et ky Lam et Reedy J.N.	Fréquences naturelles Présent	Ecart en %
0	12.894	13.2537	2.70
0.5	13.103	13.4667	2.69
0.7	13.154	13.5181	2.69
1	13.211	13.5766	2.69
2	13.321	13.6889	2.68
5	13.433	13.8036	2.68
15	13.505	13.8766	2.67
30	13.526	13.8980	2.67

On constate que ces résultats sont similaires pour divers indices de graduations du volume fraction, la méthode utilisée donne des résultats excellents et confirme son efficacité aux poutres de Timoshenko.

6. Etude paramétrique :

Les résultats obtenus sont les fréquences propres des vibrations données par rapport à la variation de la température et de l'indice de gradation du volume fraction pour divers types de mélanges graduels.

6.1-Fréquence propres par rapport à la variation de la température

Les graphes suivante donnent les variations de la fréquence propre en fonction de la température qui augmente jusqu'à 800° K pour divers indices de volumes fractions k. Les mélanges utilisées sont :

Mélange graduel Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

Mélange graduel AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

6.1.1. Rotor FGM Ni (interne) et SUS304 (externe)..

Les propriétés du rotor sont données dans les tableaux 5.1 et 5.2, avec le Nickel a l'intérieur du rotor et l'acier inoxydable a l'extérieur du rotor.

Tab5.6 Propriétés des matériaux Ni et SUS304.

Propriétés	Acier inoxydable SUS304	Nickel Ni
Module de Young en (GPa)	210	205.098
Masse volumique en (kg/m3)	8166	8900
Coefficient de Poisson	0.3	0.31

Tab5.7 Coefficients de Température de Nickel et SUS304 (Hui-Shen Shen – 2009)

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa)	SUS304	0	201.04e9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	Nickel	0	223.95e9	-2.794e-4	-3.998e-9	0
K(W/mK)	SUS304	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	Nickel	0	58.754	-4.614e-4	6.670e-7	-1.523e-10
α (1/K)	SUS304	0	12.330e-6	8.086e-4	0	0
	Nickel	0	9.9209e-6	8.705e-4	0	0
ν : Coef de Poisson	SUS304	0	0.3262	-2.002e-4	3.797e-7	0
	Nickel	0	0.3100	0	0	0

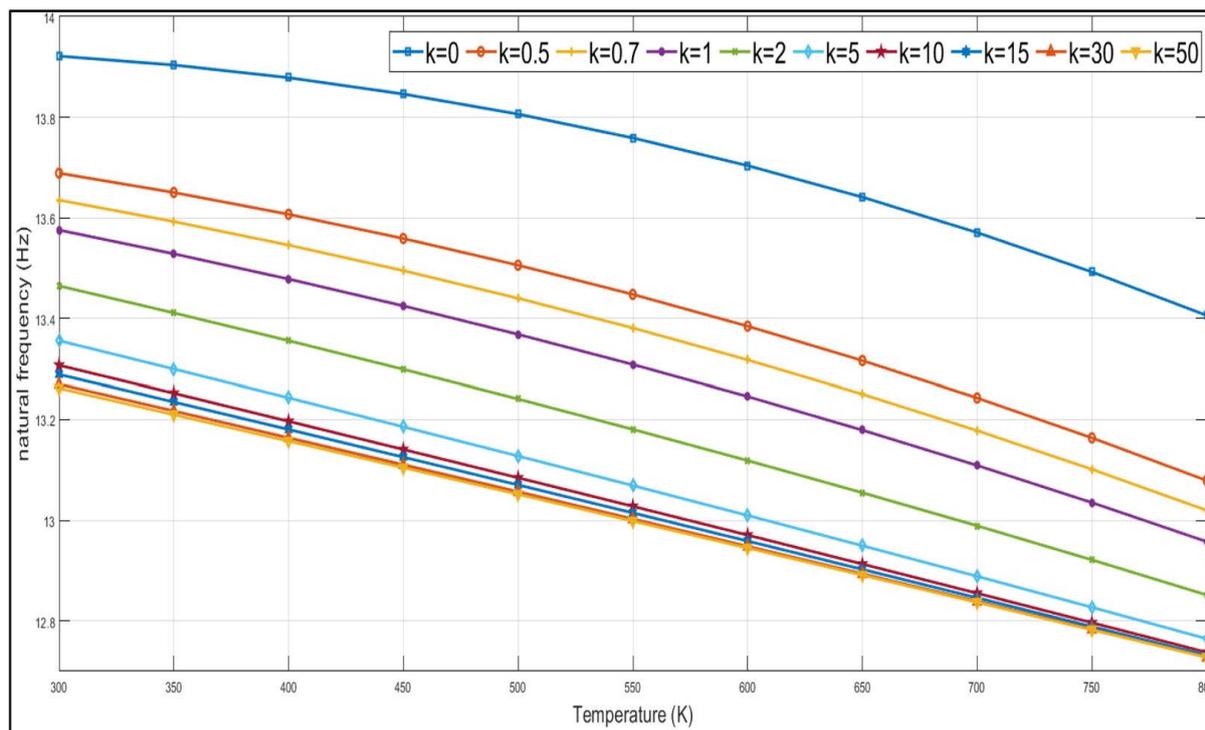


Figure 5.7 Influence de la température interne sur la 1^{ère} fréquence propre du rotor pour divers indices de volumes fractions k, Ni-SUS304

Selon la distribution Loi de puissance Si $k=0$, les propriétés du rotor sont celles de la couche externe constituée uniquement par du métal et quand la température augmente pour cette couche les variations des fréquences propres du rotor prennent l'allure d'une courbe décroissante et les 1^{ères} fréquences restent toujours plus grandes pour cet indice k.

Si $k=30$, les propriétés du rotor sont ceux de la couche interne constituée majoritairement par de la céramique et les variations des 1^{ères} fréquences propres en fonction de la température prennent l'allure d'une courbe qui décroît lentement quand la température augmente mais les fréquences propres restent toujours faibles.

Si $0 < k \leq 30$ Les propriétés du rotor sont les propriétés des couches intermédiaires appelée les couches FGM quand la température augmente pour ces couches les variations des fréquences propres sont fonctions surtout de l'indice du volume fraction du mélange graduel des deux matériaux métal et céramiques.

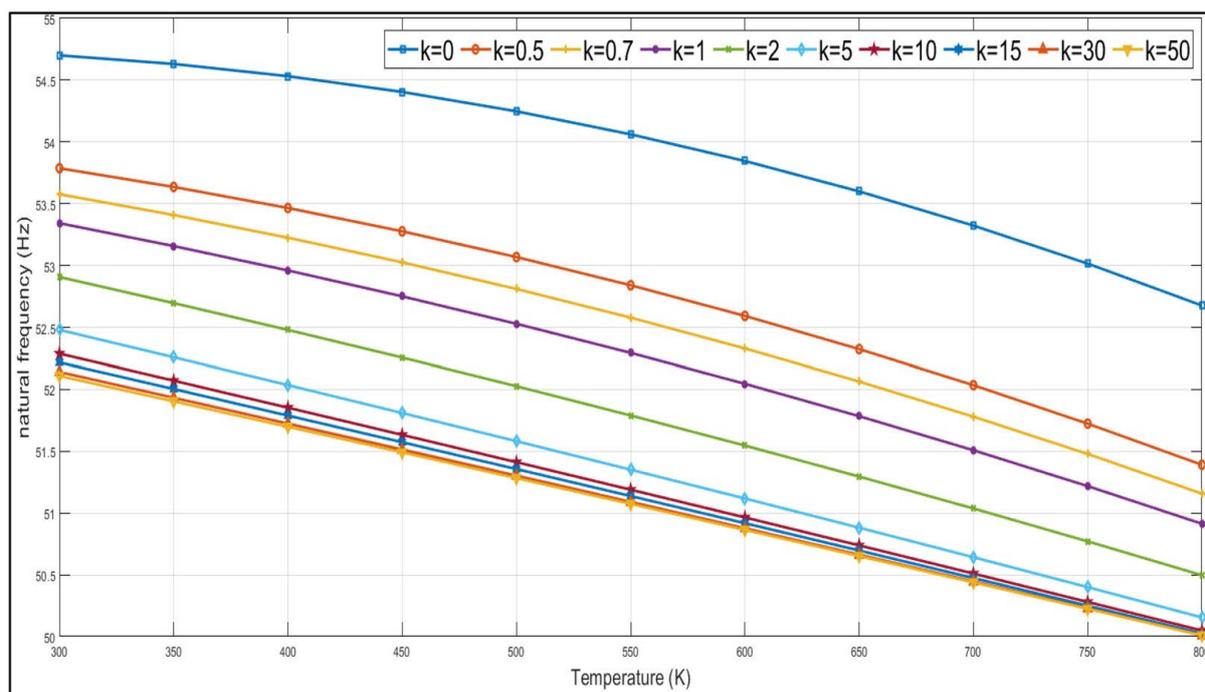


Figure 5.8 Influence de la température interne sur la 2^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k, Ni-SUS304

Les variations des 2^{èmes} fréquences des vibrations du rotor en fonction de la température sont représentées pour divers indices de graduation du volume fraction k. On constate clairement que plus l'indice du volume fraction augmente et plus on s'approche de la couche interne de la céramique donc les fréquences propres diminuent quand la température augmente, et plus l'indice du volume fraction diminue et plus on s'approche du métal à l'extérieur ayant des fréquences propres plus grandes même quand on augmente la température.

6.1.2. Rotor FGM AL_2O_3 (interne) et SUS304 (externe).

Les propriétés du rotor sont données dans les tableaux suivant.

Tab5.8 Propriétés des matériaux AL_2O_3 et SUS304/

Propriétés	Acier inoxydable SUS304	Oxyde Aluminium AL_2O_3
Module de Young en (GPa)	210	390
Masse volumique en (kg/m ³)	7800	3960
Coefficient de Poisson	0.3	0.26

Tab5.9 Coefficients de Température de AL_2O_3 et SUS304 (Hui-Shen Shen – 2009)

Propriété	Matériau x	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa) Module de Young	SUS304	0	201.0354e9	3.079296e-4	-6533971e-7	0
	Al_2O_3	0	349.5486e9	-3853206e-4	4.026993e-7	-16734e-10
K(W/mK) Coef Cond	SUS304	0	15.37895	-0.001264	0.20923e-5	-0.0722 e-10
	Al_2O_3	-1123.6	-14.087	0.00044	0	0
α (1/K) Coef.dilatation	SUS304	0	12.33e-6	0.0008	0	0
	Al_2O_3	0	6.827e-5	0.00018	0	0
ν : Coef de Poisson	SUS304	0	0.32623351	-2.001822e-4	3.797358e-7	0
	Al_2O_3	0	0	0	0	0

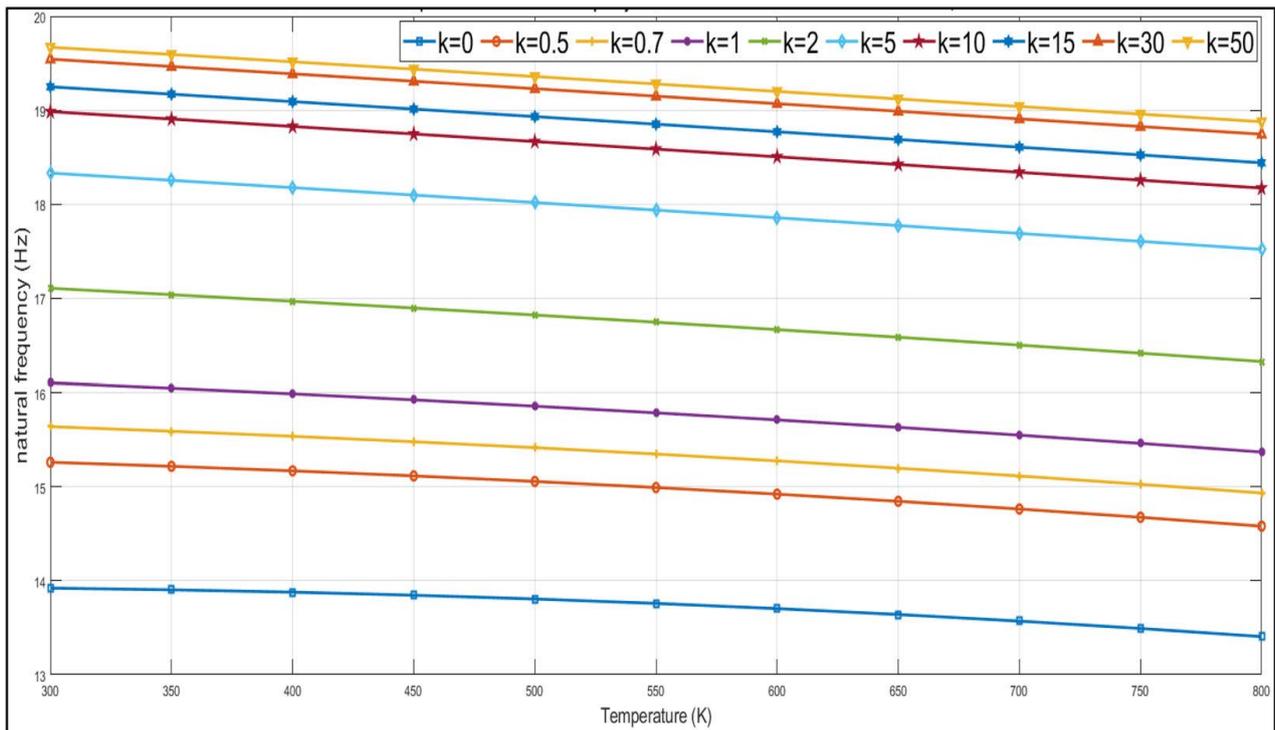


Figure 5.9 Influence de la température interne sur la 1^{ère} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k, AL_2O_3 -SUS304

La courbe ci-dessus, montre les variations des 1^{ères} fréquences propres en fonction de la température d'un rotor FGM constitué par un mélange graduel AL_2O_3 SUS304 avec AL_2O_3 sur la couche interne et le SUS304 sur la couche externe. Avec une source de la chaleur

placée à l'intérieur près de la couche de la céramique. On constate que les variations des fréquences propres du rotor FGM en fonction de la température sont comprises entre les fréquences propres du mélange graduel constitué par l'indice de volume fraction $k=0$ représentant la couche externe du métal pur et ceux pour $k=30$ ou $k=50$ représentant la couche interne constituée par un mélange graduel majoritairement céramique.

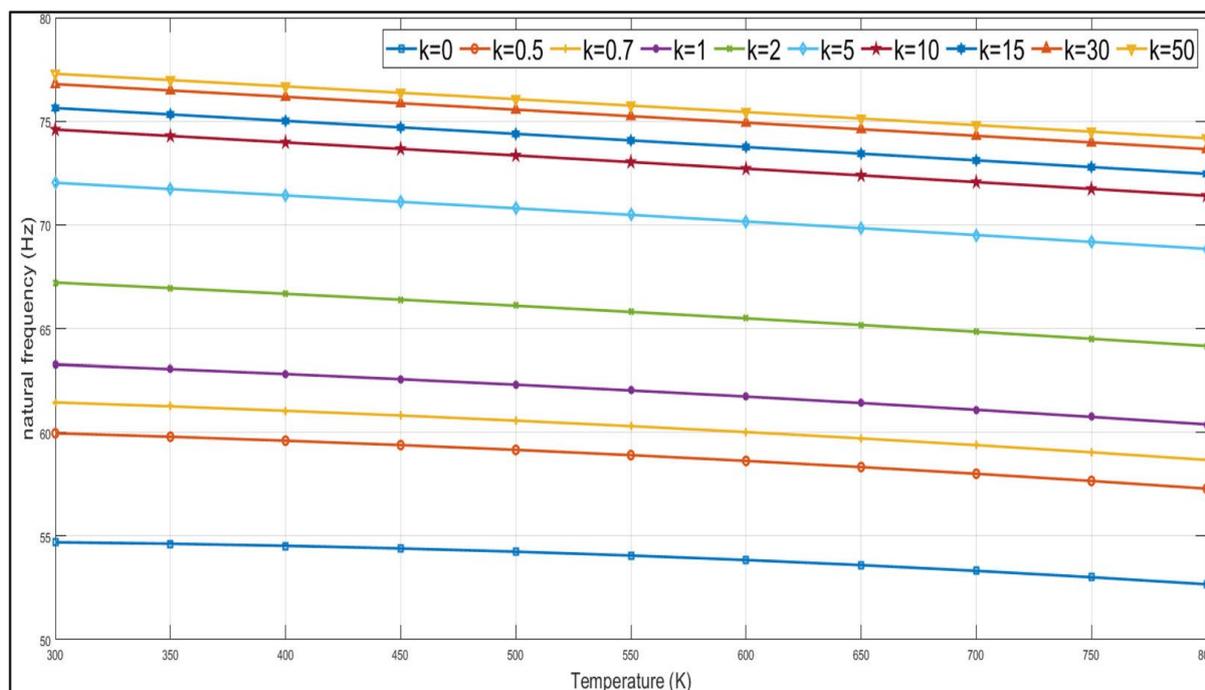


Figure 5.10 Influence de la température interne sur la 2^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices de volumes fractions k , AL_2O_3 -SUS304

De la même manière pour la 2^{ème} fréquence du mélange AL_2O_3 -SUS304, on observe clairement que pour un indice de volume fraction $k=0$, les propriétés du rotor sont ceux de la couche externe constituée uniquement par du métal et pour $k=30$ ou $k=50$ les propriétés du rotor sont ceux de la couche interne constituée majoritairement par de la céramique.

Entre ces deux dernières couches on trouve les couches FGM définies par l'indice de volume fraction $0 < k \leq 50$. Plus l'indice k augmente, plus on s'approche de la couche interne constituée majoritairement par de la céramique et plus les fréquences propres deviennent plus grandes. On peut dire que la couche de la céramique Ni ou AL_2O_3 se trouvant sur la couche interne du rotor reçoit la totalité de la chaleur par convection et empêche la transmission de cette chaleur par conduction aux autres couches adjacentes.

7. Rotor isotrope en SUS304.

Les propriétés du rotor constitué uniquement par de l'acier inoxydable SUS304 sont données au tableau ci-dessus. La figure ci-dessous présente le comportement vibratoire du rotor pour deux plus basses fréquences représentées par les variations des premières et deuxièmes fréquences propres. Pour les hautes fréquences elles sont représentées par les variations de la huitième fréquence propre.

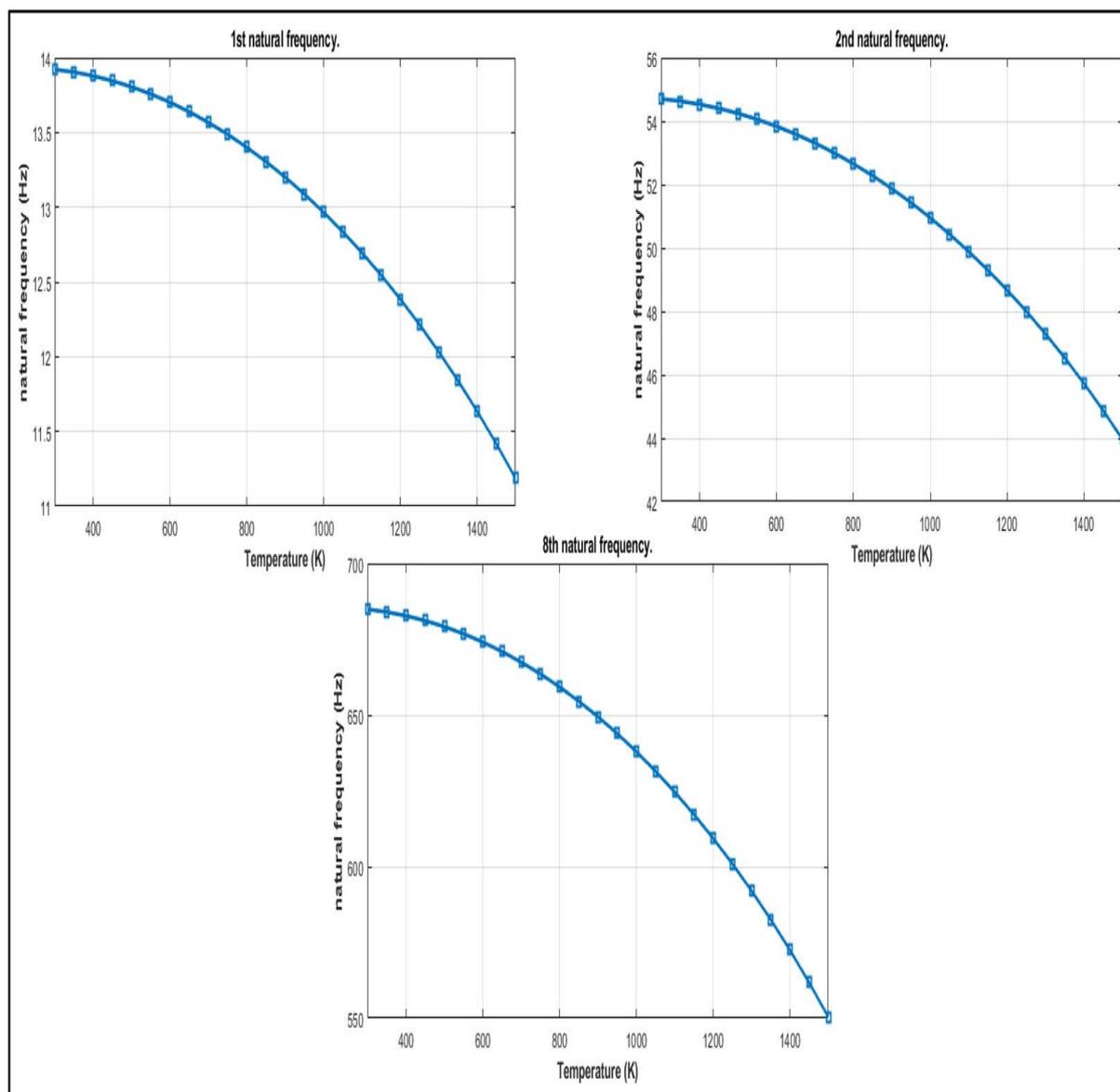


Figure 5.11 Variation de la 1^{ère}, 2^{ème}, et 8^{ème} fréquence en fonction de la température pour un arbre isotrope ($\Omega=0$) 100 % SUS304

Tab 5.10 Comparaison des fréquences vibratoires des rotors.

	SUS 304	FGM Ni-SUS304k=0	FGM AL ₂ O ₃ SUS304k=0
1 ^{ème} fréquence T=300°K (Hz)	14	13.9	14
2 ^{ème} fréquence T=300°K (Hz)	55	55	55
1 ^{ème} fréquence T=800°K (Hz)	13.5	13.4	13.5
2 ^{ème} fréquence T=800°K (Hz)	52.8	52.5	53

On constate clairement que pour une température ambiante de 300° K les premières fréquences propres du rotor sont aux environs de 14 Hz pour ce rotor isotrope et pour les deux autres rotors FGM Ni-SUS304 et **AL₂O₃** -SUS304 ayant un indice de volume fraction k=0. Pour la température de 800° K les premières fréquences propres sont aux environs de 13,5 Hz

Pour le rotor isotrope SUS304, la deuxième fréquence vibratoire pour une température ambiante de 300° K est aux environs de 55 Hz pour ce rotor isotrope SUS304 et pour les deux autres rotors FGM Ni-SUS304 et **AL₂O₃** -SUS304 toujours pour un indice de volume fraction k=0. Pour une température de 800K les premières fréquences propres sont presque égales a 13.5 Hz pour le rotor constitué par le matériau SUS304, pour le rotor FGM Ni-SUS304, pour le rotor FGM **AL₂O₃** -SUS304 et pour le rotor isotrope SUS304.

8. Fréquences propres de l'arbre FGM pour divers matériaux externes.

Les courbes ci dessous présentent le comportement vibratoires des rotors FGM fabriqués par divers types de mélanges graduels constitué a l'intérieur par le métal SUS304 et a l'extérieur de la céramique utilisée comme barrière thermique pour les rotors travaillant sous l'influence de haute variation de la température et pour quatre types d'indices de volume fractions k=0.5, k=1, k=2 et k=10. Les céramiques utilisées sont **AL₂O₃**, Silicone Nitride, Ni(Nickel), Zr(Zircone) et Ti-6Al-4V. Les fréquences propres étudiées sont la 1^{ère}, la 2^{ème} et la 8^{ème}. Les fréquences propres données sur la courbe suivante, décrivent une comparaison du comportement vibratoire en 1^{ère} fréquences d'un rotor FGM constitué par le bis-matériaux **AL₂O₃**-SUS304 avec un deuxième rotor FGM constitué par le bis-matériaux Ni-SUS304 avec un troisième rotor FGM constitué par le bi-matériau Zn-SUS304 avec un quatrième rotor FGM constitué par le bis-matériaux Silicone Nitrid-SUS304 et avec un cinquième rotor FGM constitué par le bi-matériaux Ti6Al 4V-SUS304. Les propriétés de ces derniers rotors FGM sont identiques aux propriétés du rotor données précédemment. Les coefficients de la température sont donnés dans les tableaux de l'annexe.

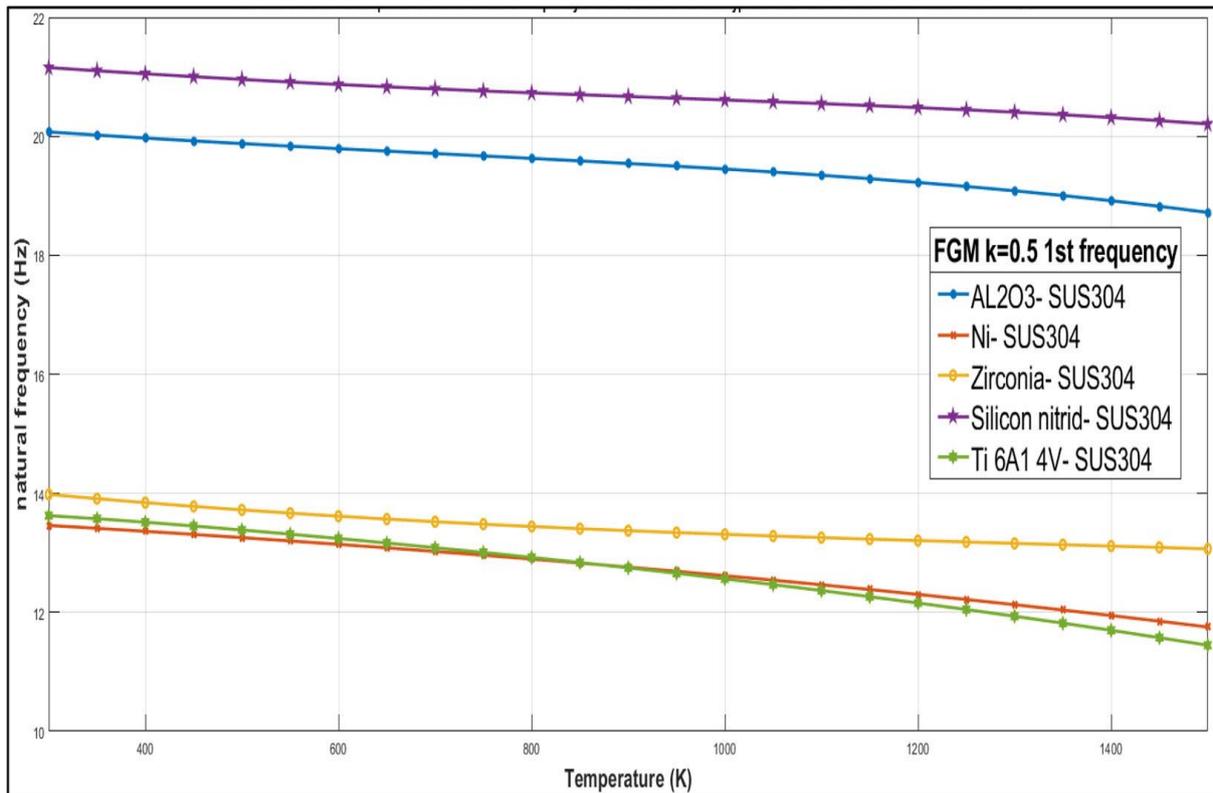


Figure 5.12 Variation de la 1^{ère} fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de matériaux externes

Pour la 1^{ère} fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction de tous les mélanges graduels est $k=0.5$ Quand la température augmente de 300 K a 1500 K on constate que la fréquence des mélange graduel :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 21 jusqu'a 20Hz avec une différence égale a 1Hz.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 20Hz jusqu'a 18.8Hz avec une différence égale à 1.2Hz.
- Zircon-SUS304varie de 14Hz a 13.5Hz avec une différence égale à 0.5 Hz.
- Ni-SUS304 varie de 13.8 à 12.9Hz avec une différence égale à 0.9 Hz.
- Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 13.8 a 11.5 Hz avec une différence égale a 2.3Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente est le Zircon-SUS304 qui varie avec une baisse de fréquence égale a 0.5Hz ensuite Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 0.9 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence de 1 Hz ensuite le AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 1.2 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.3 Hz.

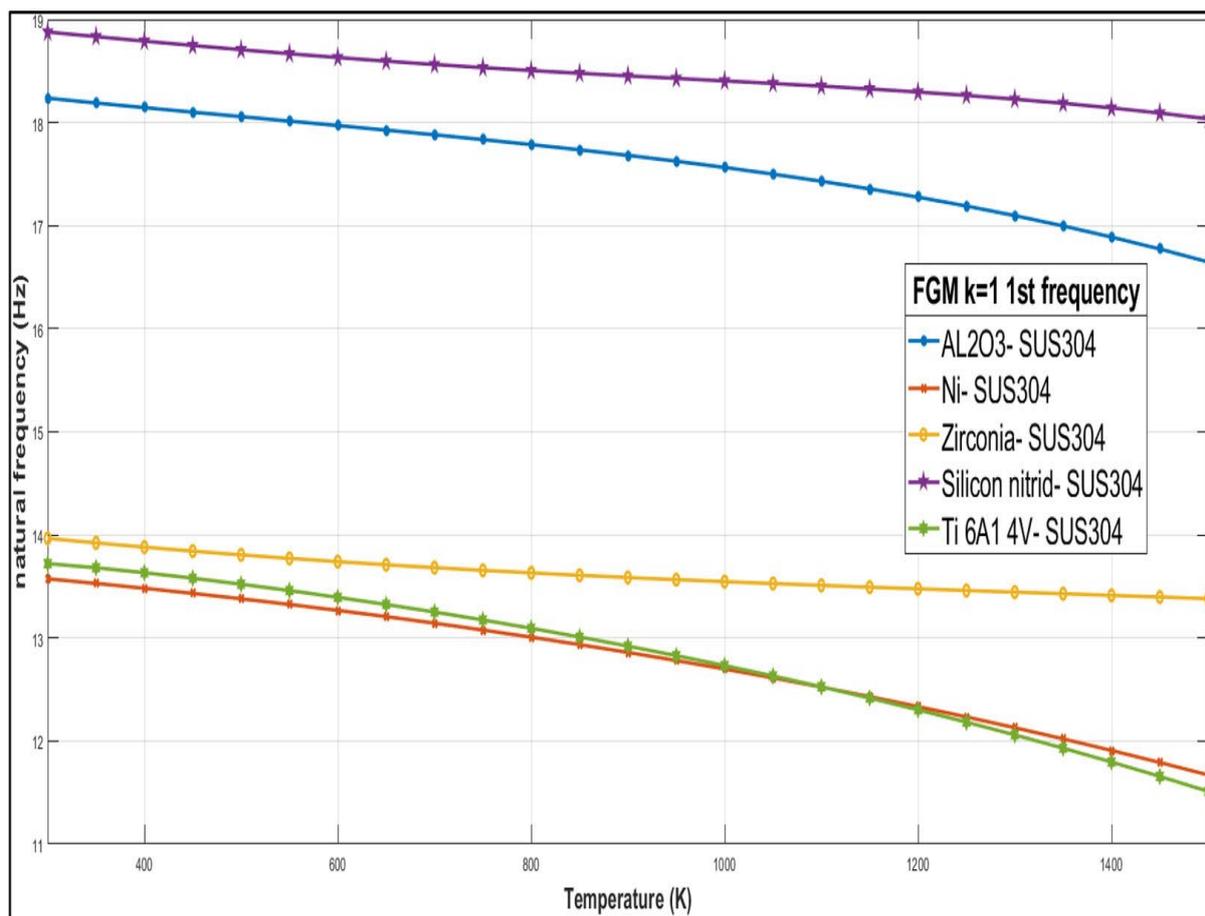


Figure 5.13 Variation de la 1^{ère} fréquences propres en fonction de la température à $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=1$ pour divers types de céramiques

Pour la 1ere fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces mélanges est $k=1$ Quand la température augmente de 300 K à 1500 K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par les mélanges des bis-matériaux :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 18.8 jusqu'à 18Hz avec une différence égale à 0.8H.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 18.3Hz jusqu'à 16.6Hz avec une différence égale à 1.7Hz.
- Zircone-SUS304varie de 14Hz à 13.4H avec une différence égale à 0.6 Hz
- Ni-SUS304 varie de 13.6 à 11.7Hz avec une différence égale à 1.9 Hz.
- Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 13.8 à 11.5 Hz avec une différence égale à 2.3Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour $k=1$ et pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircone-SUS304 avec une baisse de fréquence de 0.6 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 0.8Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une

baisse de fréquence de 1.7 Hz ensuite le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 1.9 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.3 Hz.

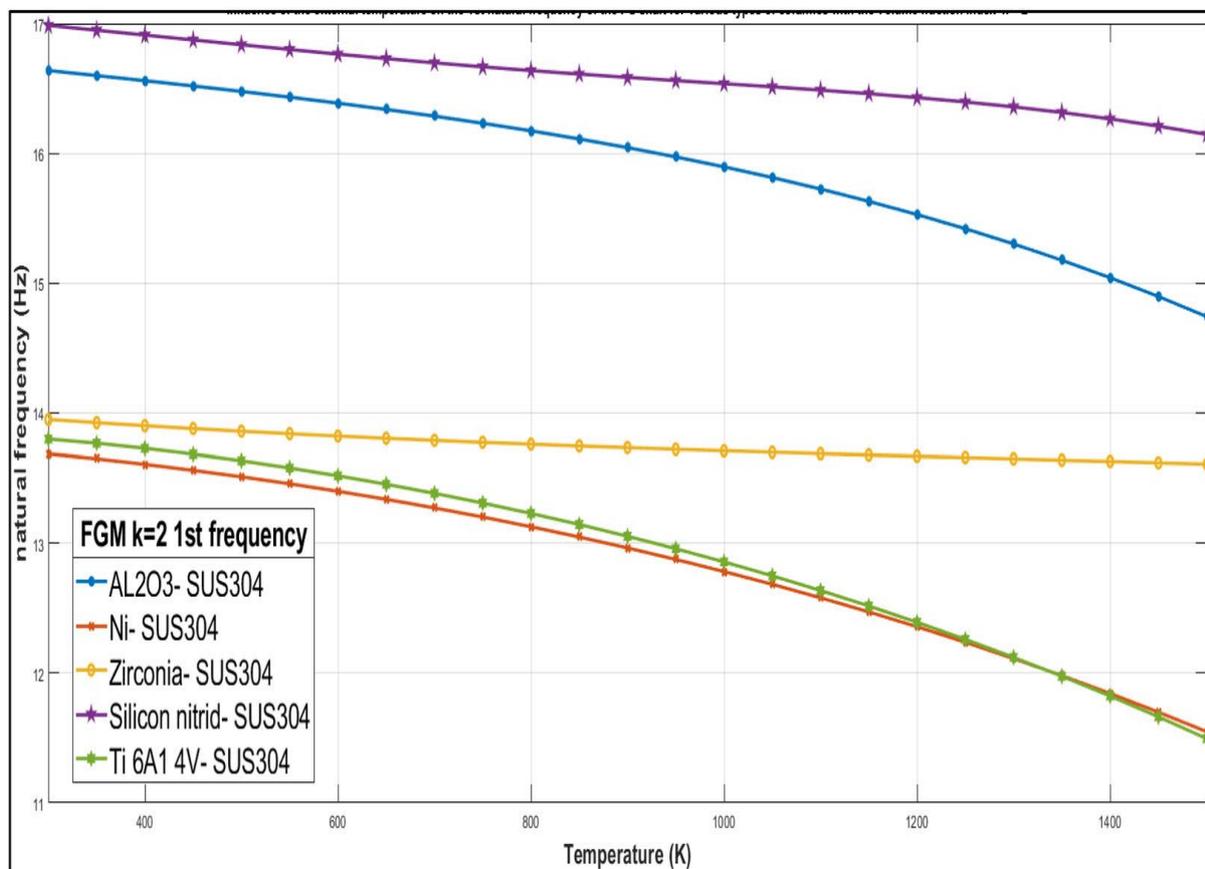


Figure 5.14 Variation de la 1^{ère} fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques

Pour la 1ere fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces mélanges est $k=2$. Quand la température augmente de 300 °K a 1500 °K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bis-matériaux :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 17 jusqu'a 16.2Hz avec une différence égale a 0.8H.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 16.7Hz jusqu'a 14.7Hz avec une différence égale à 2Hz.
- Zircon-SUS304varie de 13.9Hz a 13.6H avec une différence égale à 0.3 Hz
- Ni-SUS304 varie de 13.7 a 11.6Hz avec une différence égale à 2.1 Hz.
- Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 13.8 a 11.5 Hz avec une différence égale à 2.3Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircon-SUS304 avec une baisse de fréquence de 0.3 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304

avec une baisse de fréquence égale a 0.8Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 2 Hz ensuite en suite le NI-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.1 Hz et enfin le Ti 6A1 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.3 Hz.

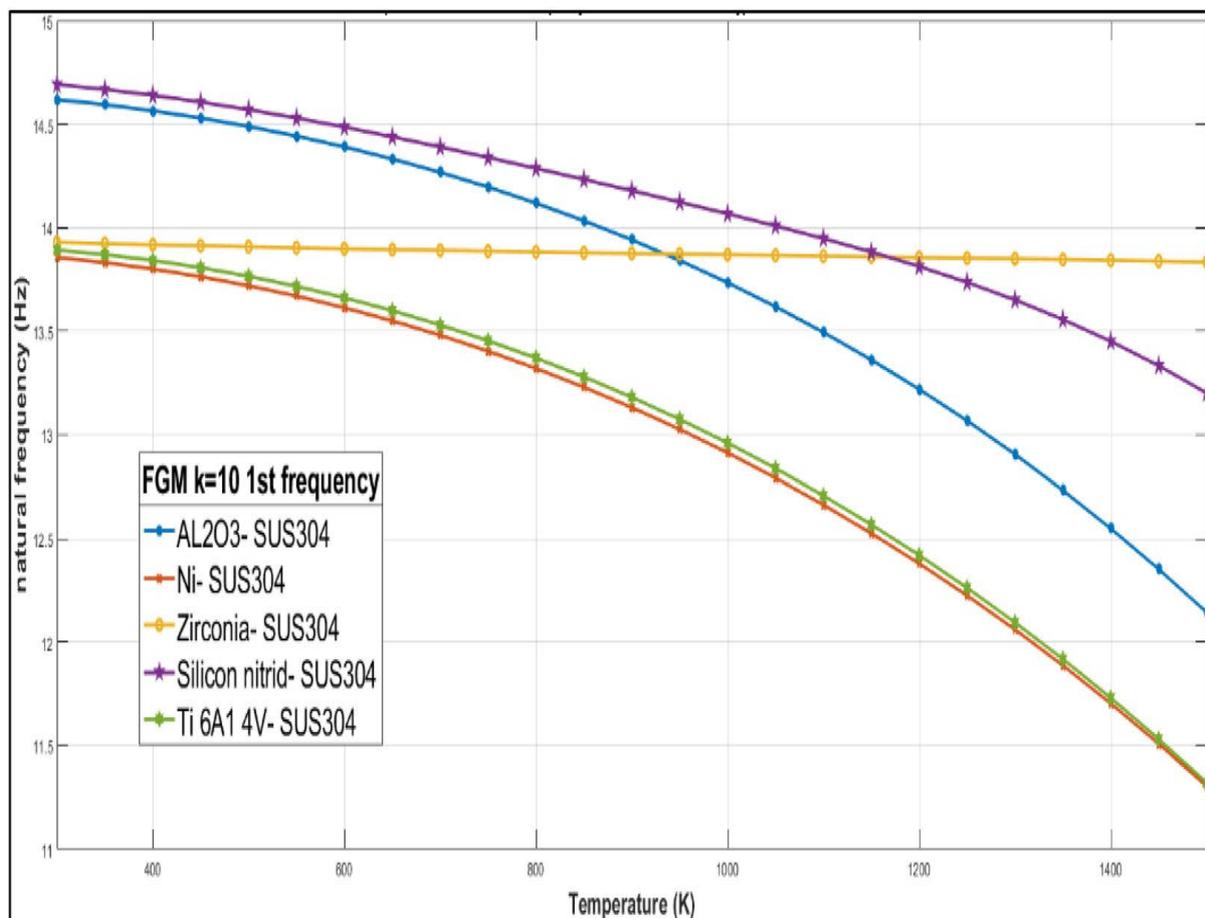


Figure 5.15 . Variation de la 1^{ère} fréquence propre en fonction de la température à $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction k=10 pour divers types de céramiques

Pour la 1^{ère} fréquence vibratoire, l'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces mélanges est k=10 Quand la température augmente de 300 K a 1500 K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bis-matériaux :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie de 14.7 jusqu'a 13.2Hz avec une différence égale à 1.5Hz.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 14.6Hz jusqu'a 12.2Hz avec une différence égale à 2.4Hz.
- Zircon-SUS304varie de 13.Hz a 13.7H avec une différence égale à 0.2 Hz
- Ni-SUS304 varie de 13.7 a 11.2Hz avec une différence égale à 2.5 Hz.
- Ti 6A1 4V-SUS304 varie de 13.8 a 11.2 Hz avec une différence égale à 2.6Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zirconie –SUS304 avec une baisse de fréquence de 0.2 Hz le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale a 1.5Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.4 Hz ensuite en suite le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.5 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2.6 Hz.

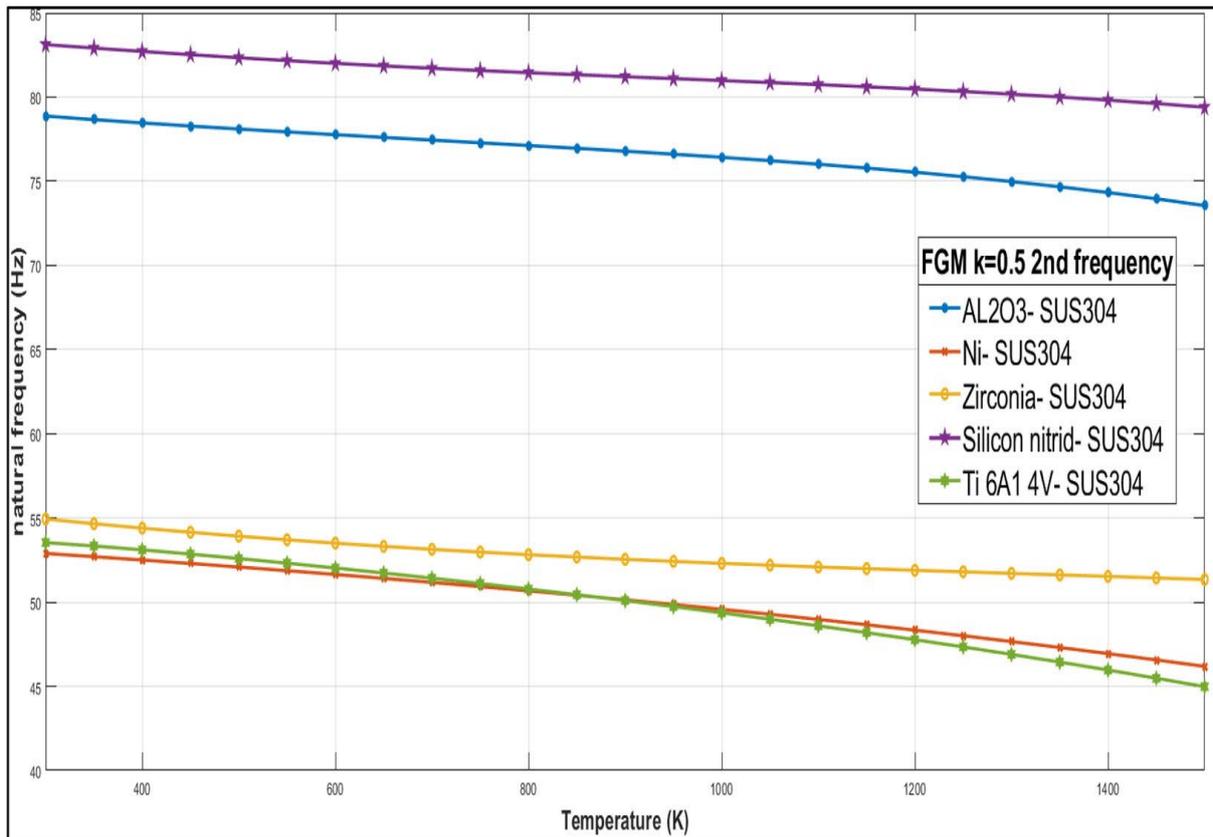


Figure 5.16 Variation de la 2^{ème} fréquences propres en fonction de la température a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{ème} fréquence vibratoire, l'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces mélanges est $k=0.5$ Quand la température augmente de 300 K a 1500 K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bis-matériaux.

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 83 jusqu'a 79 Hz avec une différence égale à 4 Hz.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 78Hz jusqu'a 73Hz avec une différence égale à 5Hz.
- Zirconie-SUS304varie de 55.Hz a 52H avec une différence égale à 3 Hz
- Ni-SUS304 varie de 53Hz a 47Hz avec une différence égale à 6 Hz.

-Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 54 à 45 Hz avec une différence égale à 9Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircon-SUS304 avec une baisse de fréquence de 3 Hz, vient ensuite le Silicium Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 4 Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 5 Hz ensuite le NI-SUS304 avec une baisse de fréquence de 6 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 9 Hz.

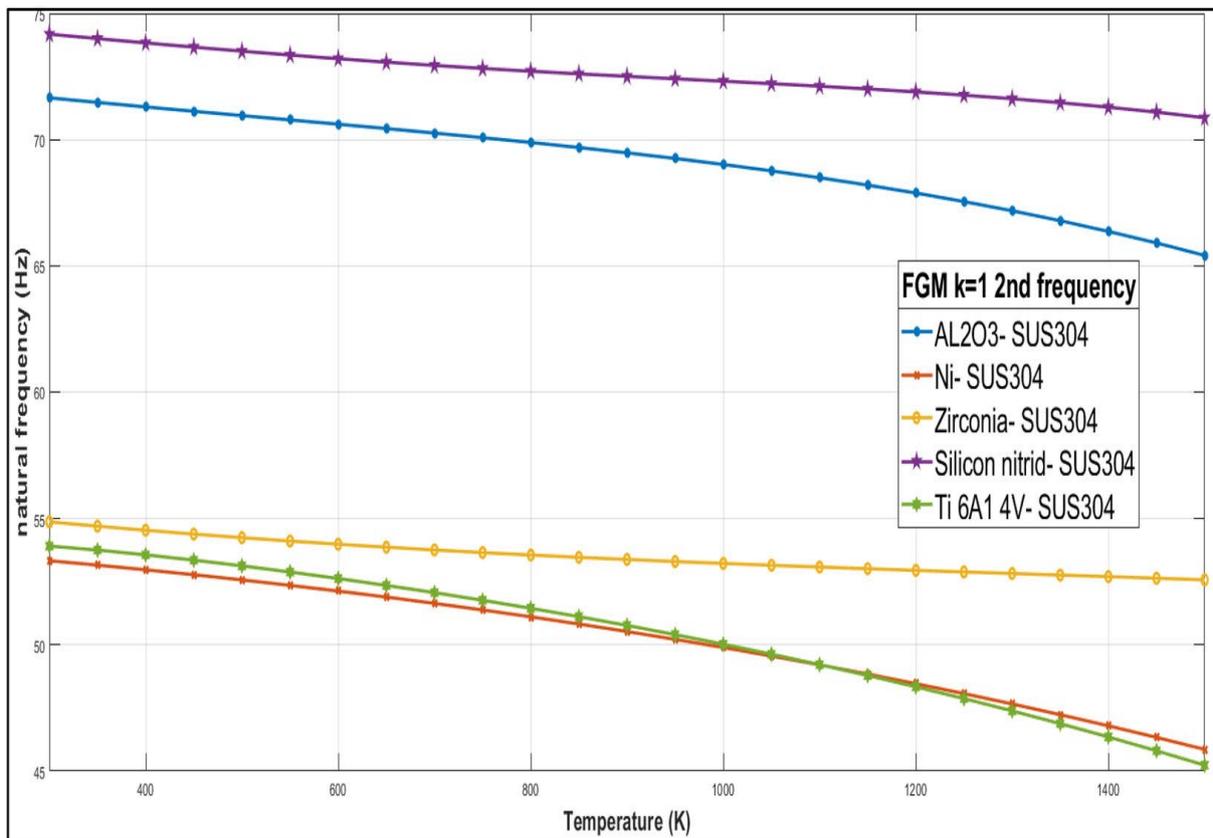


Figure 5.17 Variation des 2 eme fréquences propres en fonction de la température avec $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=1$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{eme} fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces rotors est $k=1$ Quand la température augmente de $300^\circ K$ à $1500^\circ K$ on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bi-matériaux :

-Silicium Nitrid-SUS304 varie presque de 74 jusqu'à 71 Hz avec une différence égale à 3 Hz.

- AL_2O_3 -SUS304 varie de 72Hz jusqu'à 66Hz avec une différence égale à 6Hz.

-Zircon-SUS304 varie de 55.Hz à 53H avec une différence égale à 2 Hz

-Ni-SUS304 varie de 53Hz à 47Hz avec une différence égale à 6 Hz.

-Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 54 à 47 Hz avec une différence égale à 7 Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zirconie-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2 Hz ensuite le Silicium Nitride-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 3 Hz ensuite Al_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 6 Hz ensuite avec le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 6 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 7 Hz.

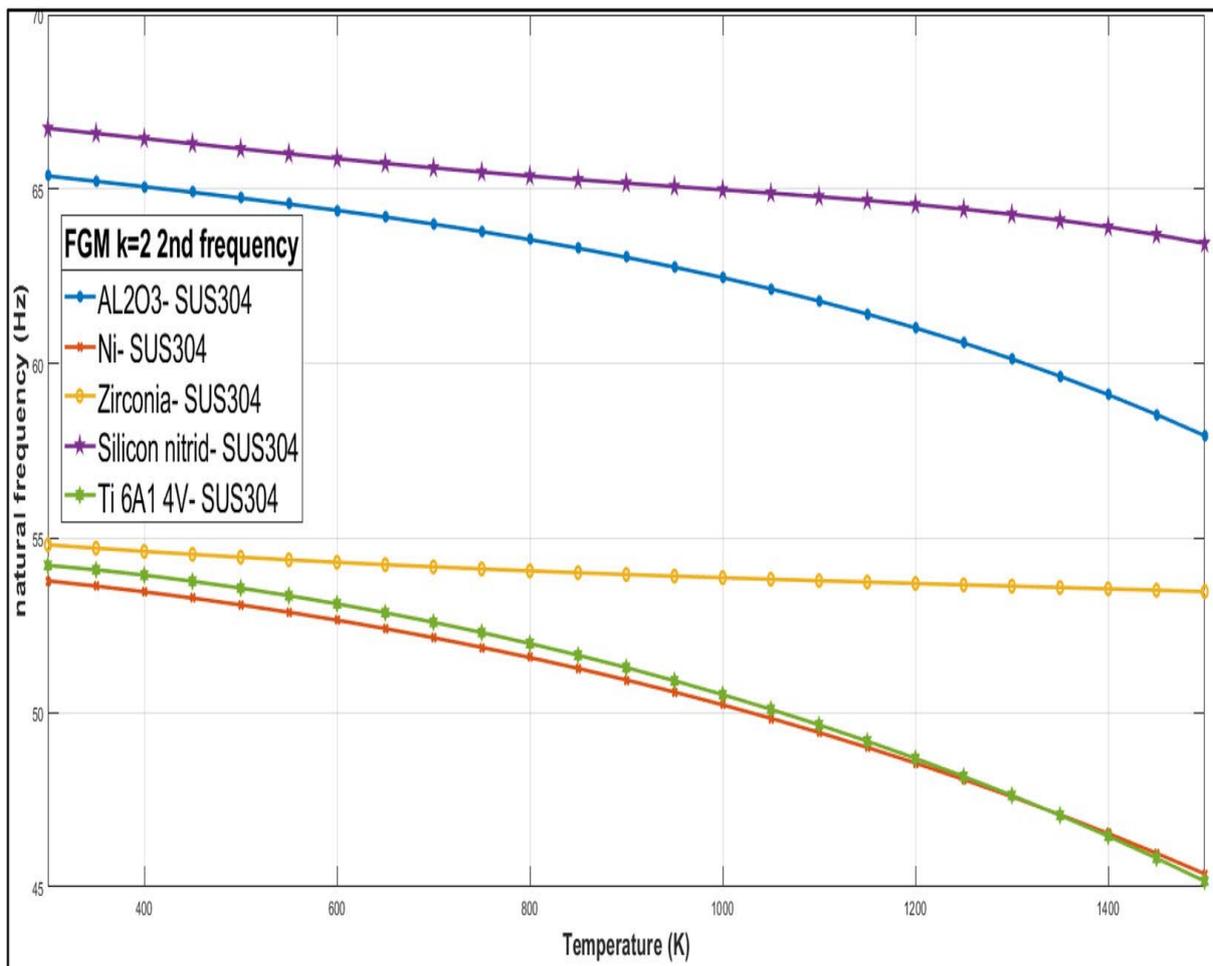


Figure 5.18 Variation de la 2^{ème} fréquences propres en fonction de la température avec $\Omega=0$ et pour un indice de volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques

Pour la 2eme fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces rotors est $k=1$ Quand la température augmente de $300^\circ K$ à $1500^\circ K$ on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bis-matériaux :

-Silicon Nitride-SUS304 varie presque de 68 jusqu'à 64 Hz avec une différence égale à 4 Hz.

- Al_2O_3 -SUS304 varie de 66Hz jusqu'à 57.5Hz avec une différence égale à 8.5Hz.

-Zircone-SUS304 varie de 55.Hz à 53H avec une différence égale à 2 Hz

-Ni-SUS304 varie de 53Hz à 46Hz avec une différence égale à 7 Hz.

-Ti 6A1 4V-SUS304 varie de 54 à 45 Hz avec une différence égale à 9Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircone-SUS304 avec une baisse de fréquence de 2 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale a 4Hz ensuite le NI-SUS304 avec une baisse de fréquence de 7 Hz ensuite Al_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 8.5 Hz ensuite et enfin le Ti 6A1 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 9 Hz.

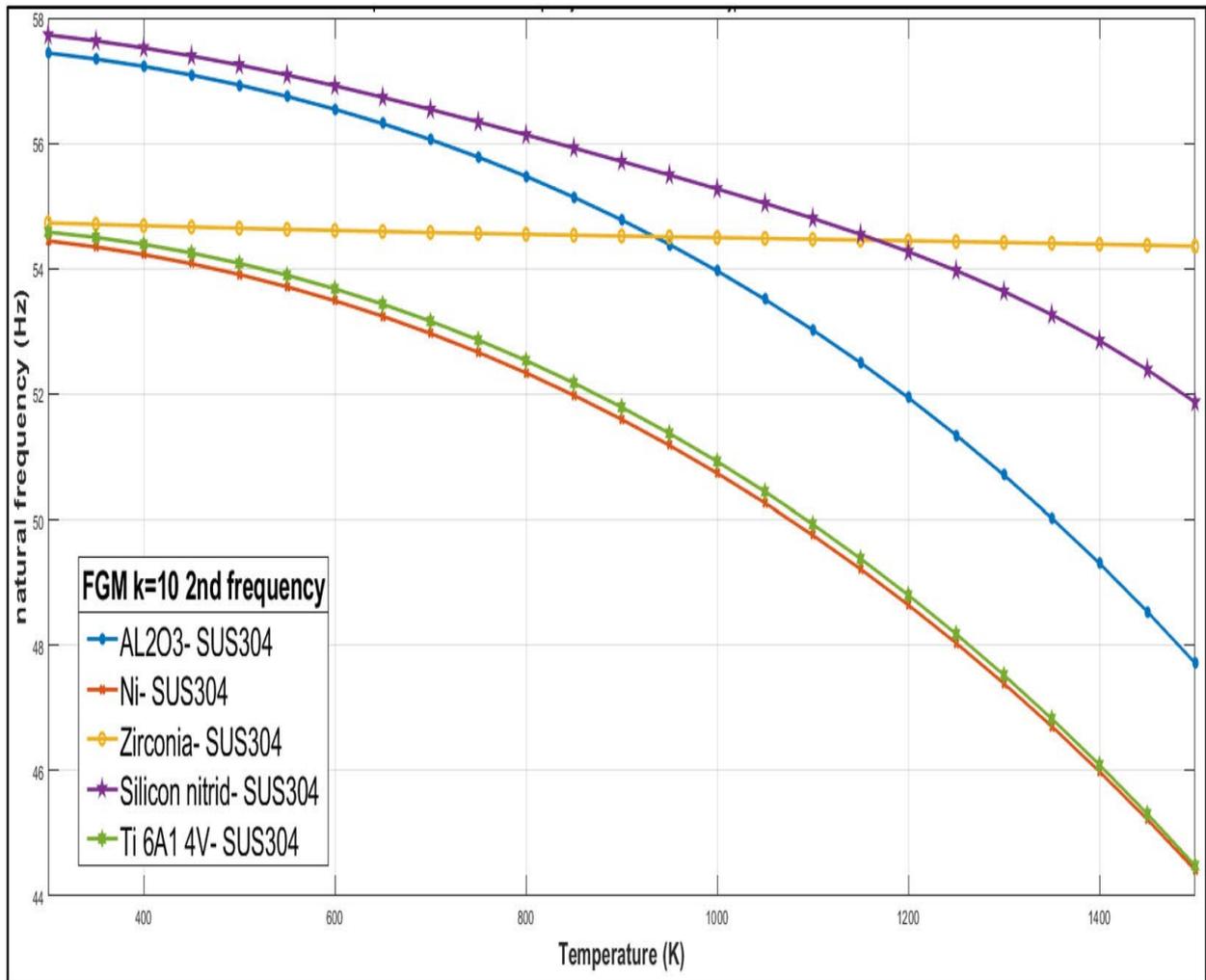


Figure 5.19 Variation de la 2^{ème} fréquences propres en fonction de la température à $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=10$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{ème} fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel est $k=10$ Quand la température augmente de 300 K à 1500 K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par le bimatériel :

-Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 58 jusqu'à 52 Hz avec une différence égale à 6 Hz.

- AL_2O_3 -SUS304 varie de 57.5Hz jusqu'à 48Hz avec une différence égale à 9.5Hz.

-Zircone-SUS304 varie de 55.Hz à 54.5Hz avec une différence égale à 0.5 Hz

-Ni-SUS304 varie de 54.4Hz à 44.5Hz avec une différence égale à 10 Hz.

-Ti 6A1 4V-SUS304 varie de 54.5 à 44 Hz avec une différence égale à 10.5Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircone-SUS304 avec une baisse de fréquence de 0.5 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 6Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de

fréquence de 9.5 Hz ensuite en suite le NI-SUS304 avec une baisse de fréquence de 10 Hz et enfin le Ti 6A1 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 10.5 Hz.

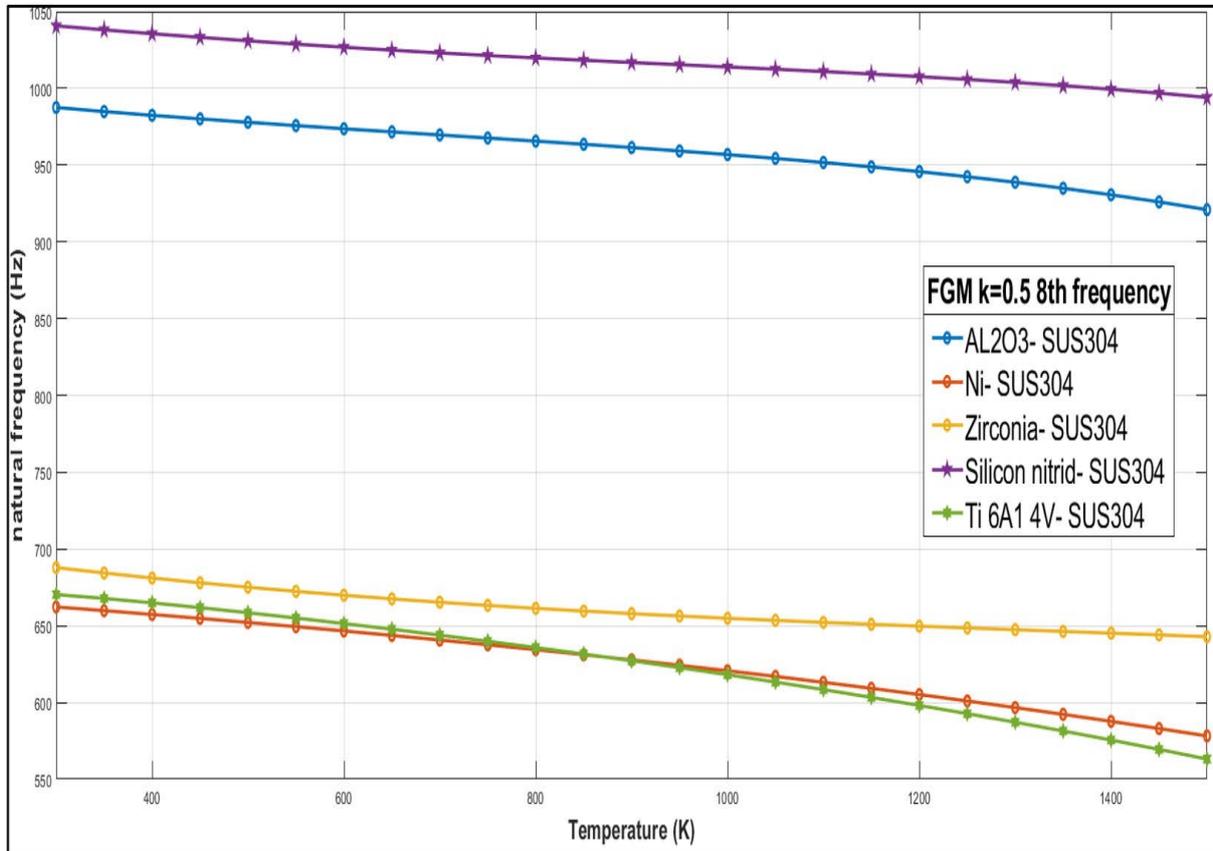


Figure 5.20 Variation de la 8^{ème} fréquence propre en fonction de la température avec $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=0.5$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{ème} fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel est $k=0.5$ Quand la température augmente de $300^{\circ} K$ à $1500^{\circ} K$ on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par les bi-matériaux :

-Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 1050 jusqu'à 1000 Hz avec une différence égale à 50 Hz.

- AL_2O_3 -SUS304 varie de 980Hz jusqu'à 925Hz avec une différence égale à 55Hz.

-Zirconie-SUS304varie de 700Hz à 650Hz avec une différence égale à 50 Hz

-Ni-SUS304 varie de 650Hz à 572Hz avec une différence égale à 78 Hz.

-Ti 6A1 4V-SUS304 varie de 672.5 à 560 Hz avec une différence égale à 112.5Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Silicon Nitrid-SUS304 et le Zirconium-SUS304 avec une baisse de fréquence de 50 Hz ensuite Al_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 55 Hz ensuite le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 78 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 112.5 Hz.

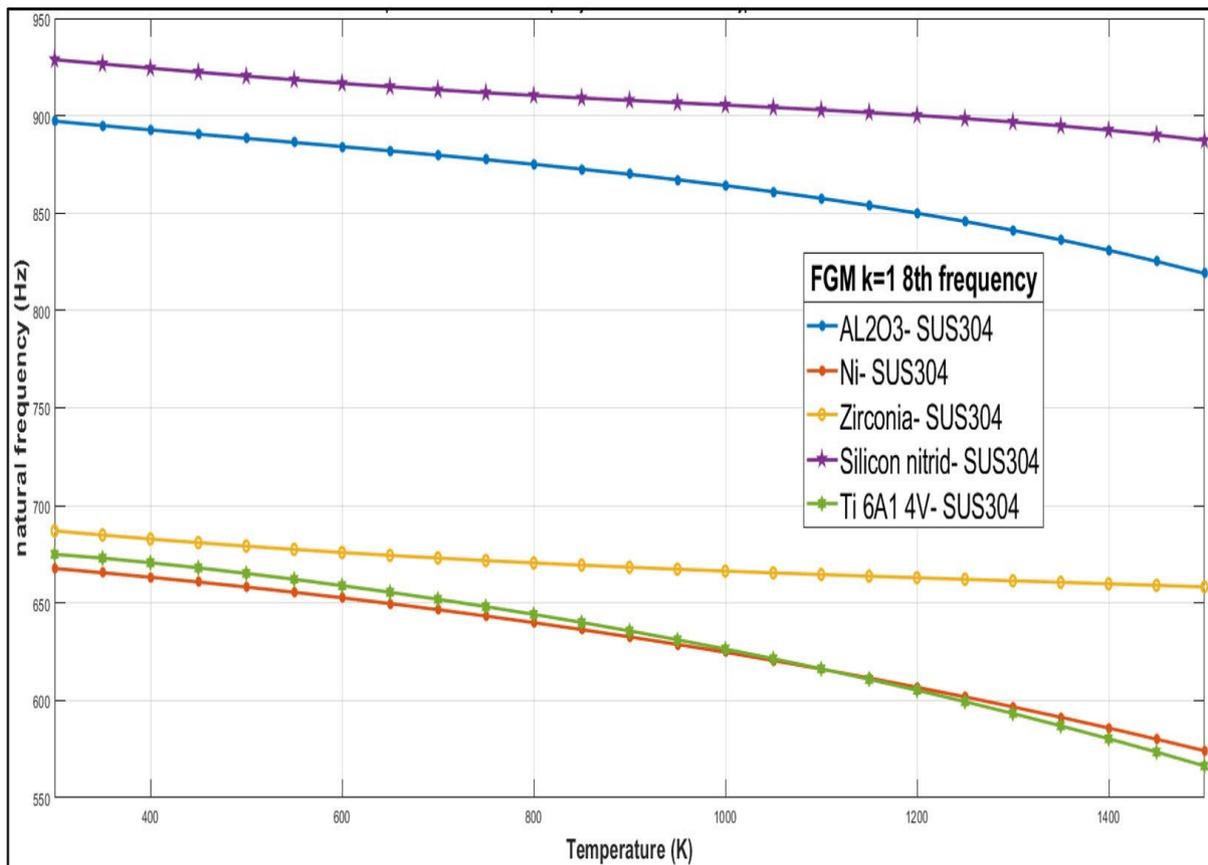


Figure 5.21 Variation de la 8^{ème} fréquences propres en fonction de la temperature a $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction k=1 pour divers types de céramiques

Pour la 2eme fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces rotors est k=1 Quand la température augmente de 300° K à 1500° K on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par les bi-matériaux :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 925Hz jusqu'à 875 Hz avec une différence égale à 50 Hz.
- Al_2O_3 -SUS304 varie de 900Hz jusqu'à 820Hz avec une différence égale à 80Hz.
- Zirconium-SUS304 varie de 680.Hz à 660H avec une différence égale à 20 Hz
- Ni-SUS304 varie de 670Hz à 575Hz avec une différence égale à 95 Hz.
- Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 675 à 570 Hz avec une différence égale à 105Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircon-SUS304 avec une baisse de fréquence de 20 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 50Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 80 Hz ensuite le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 95 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 105 Hz

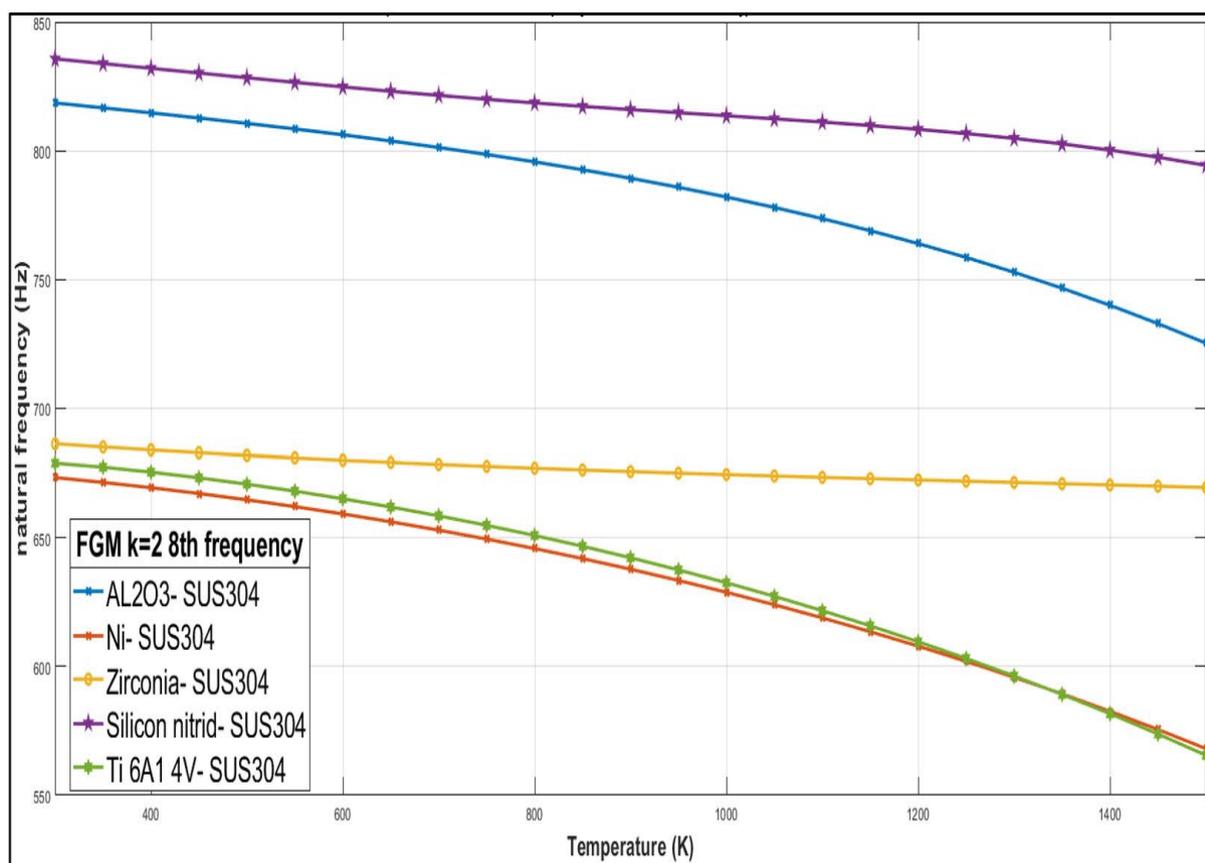


Figure 5.22 Variation de la 8^{ème} fréquence propre en fonction de la température avec $\Omega=0$ et pour un indice de Volume fraction $k=2$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{ème} fréquence propre, l'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces rotors est $k=2$ Quand la température augmente de $300^\circ K$ à $1500^\circ K$ on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par les bi-matériaux :

- Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 840Hz jusqu'à 780 Hz avec une différence égale à 60 Hz.
- AL_2O_3 -SUS304 varie de 820Hz jusqu'à 725Hz avec une différence égale à 95Hz.
- Zircon-SUS304 varie de 680Hz à 620H avec une différence égale à 60 Hz
- Ni-SUS304 varie de 670Hz à 570Hz avec une différence égale à 100 Hz.
- Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 675 à 570 Hz avec une différence égale à 105Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Silicon Nitrid-SUS304 avec le Zirconium-SUS304 avec une baisse de fréquence égale à 60Hz ensuite Al_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 95 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 105 Hz

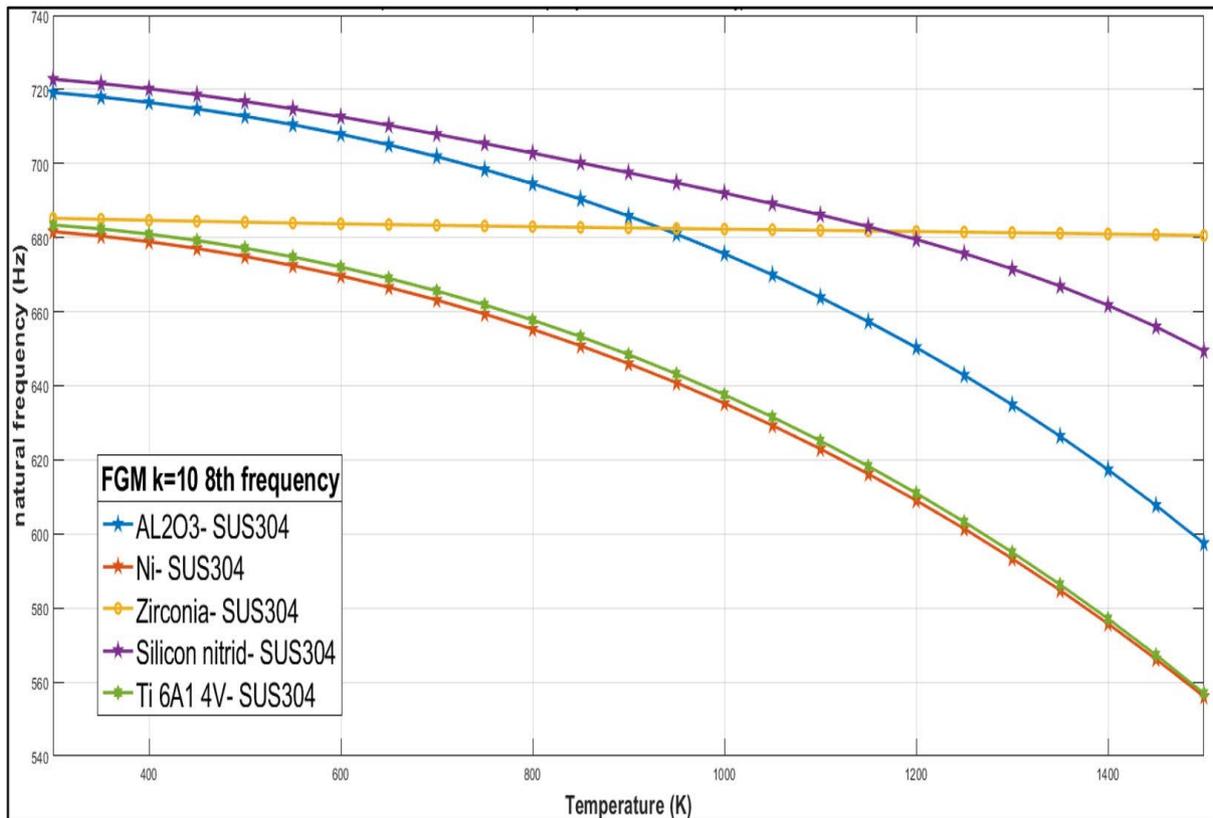


Figure 5.23 Variation de la 8^{ème} fréquence propre en fonction de la température à $\Omega=0$ et pour un indice de volume fraction $k=10$ pour divers types de céramiques

Pour la 2^{ème} fréquence vibratoire, L'indice de volume fraction du mélange graduel de tous ces rotors est $k=10$ Quand la température augmente de $300^\circ K$ à $1500^\circ K$ on constate que la fréquence du mélange graduel constitué par les bi-matériaux :

-Silicon Nitrid-SUS304 varie presque de 720 jusqu'à 650 Hz avec une différence égale à 70Hz.

- Al_2O_3 -SUS304 varie de 720Hz jusqu'à 600Hz avec une différence égale à 120Hz.

-Zirconium-SUS304 varie de 685Hz à 680Hz avec une différence égale à 5 Hz

-Ni-SUS304 varie de 680Hz à 555Hz avec une différence égale à 125 Hz.

-Ti 6Al 4V-SUS304 varie de 682 à 555 Hz avec une différence égale à 127Hz.

On peut dire que le rotor FGM se comporte le mieux pour les très hautes températures en gardant une stabilité de fonctionnement et sans perte de raideur conséquente avec le mélange Zircone-SUS304 avec une baisse de fréquence de 5 Hz ensuite le Silicon Nitrid-SUS304 avec une baisse de fréquence égale a 70 Hz ensuite AL_2O_3 -SUS304 avec une baisse de fréquence de 120 Hz ensuite le Ni-SUS304 avec une baisse de fréquence de 125 Hz et enfin le Ti 6Al 4V-SUS304 avec une baisse de fréquence de 127 Hz.

on peut dire que les matériaux qui résistent le mieux aux hautes températures et sont classés par ordre de décroissance: Zr-SUS304, SiNi-SUS304, $AL_2O_3 - SUS304$, Ni-SUS304, Ti6Al 4V-SUS304.

9. Etude d'un rotor a trois disques.

Cette étude concerne le comportement vibratoire d'un système rotor comportant un arbre avec trois disques qui sera traduit par le diagramme de Campbell. Les digrammes de Campbell défissent le comportement vibratoire d'un rotor par les variations des fréquences propres du système tournant sur le digramme par la précession directe et de la précession indirecte (rétrograde).

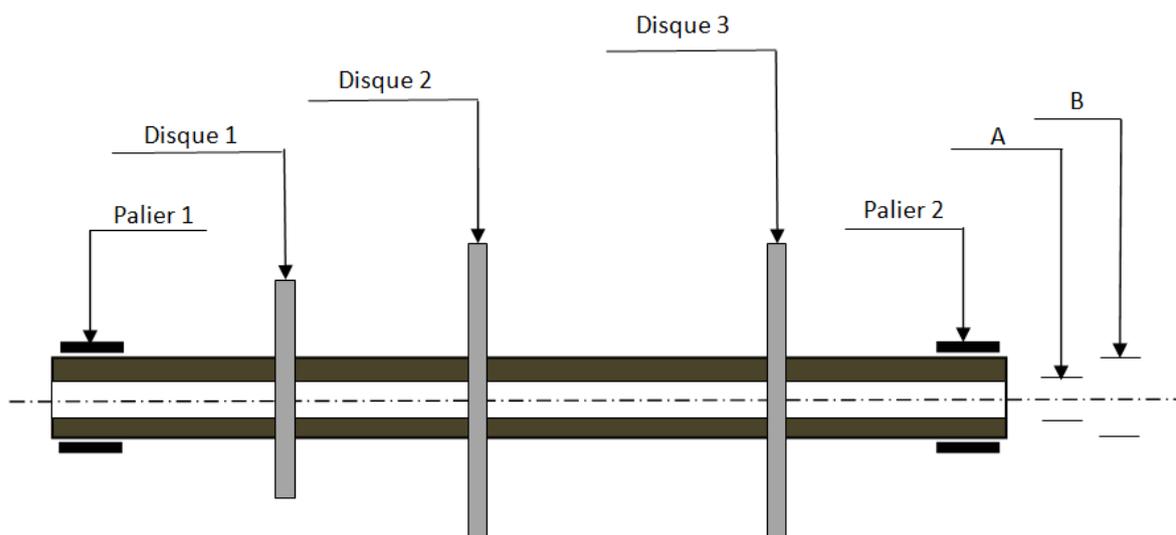


Figure 5.24 Géométrie du Rotor FGM creux avec trois disques

Cette étude est faite pour quatre types de mélanges FGM.

9.1/ Rotor FGM, Ni-SUS304 avec Ni externe.

L'arbre du rotor FGM est construit par le mélange graduel des deux matériaux Ni-SUS304 avec Ni externe et le disque 1, disque 2 et disque 3 en métal SUS304.

Tab 5.11 Propriétés du rotor.

Paramètres	Arbre	Disque 1	Disque 2	Disque3
Longueur arbre. (m)	1.22			
A=Rayon intérieur (m)	0.04	0.05	0.05	0.05
B=Rayon extérieur (m)	0.05	0.06	0.10	0.10
Masse volumique métal (kg/m3)	8166	8166	8166	8166
Masse volumique céramique (kg/m3)	8900			
Température interne métal (°K)	300			
Température externe céramique (°K)	600			
Coefficient de cisaillement	0.08			
Position de gauche (m)		0.2	0.5	1
Epaisseur (m)		0.05	0.08	0.006

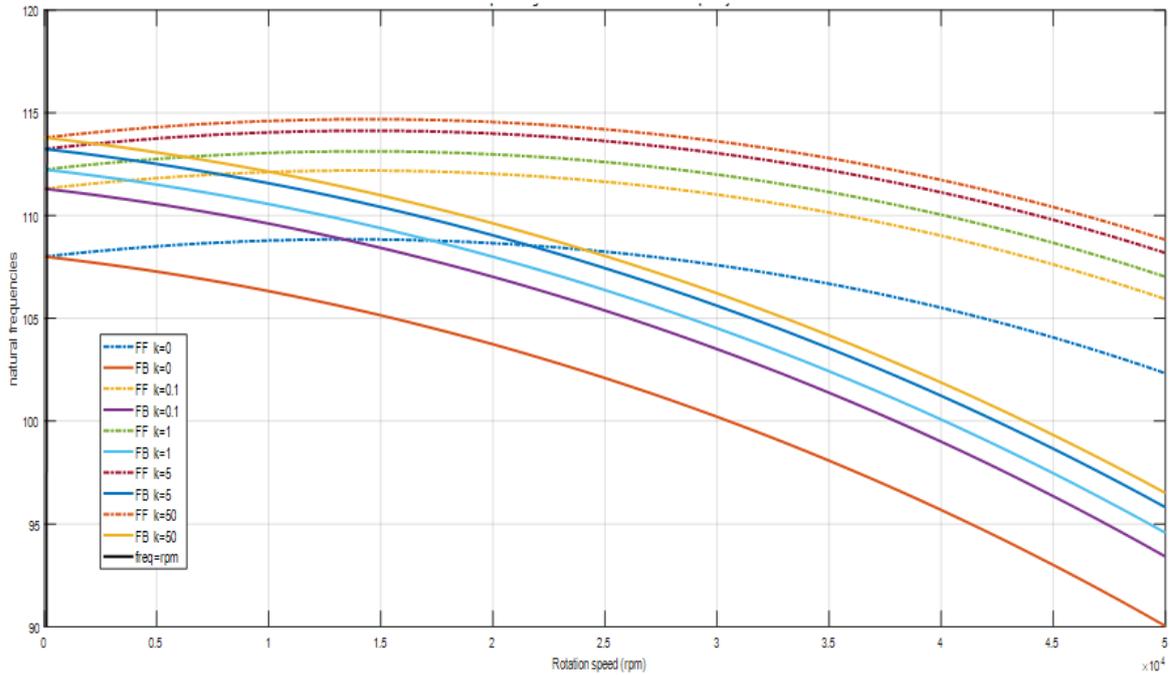


Figure 5.25 Variation de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence Ni-SUS 304, Ni Externe

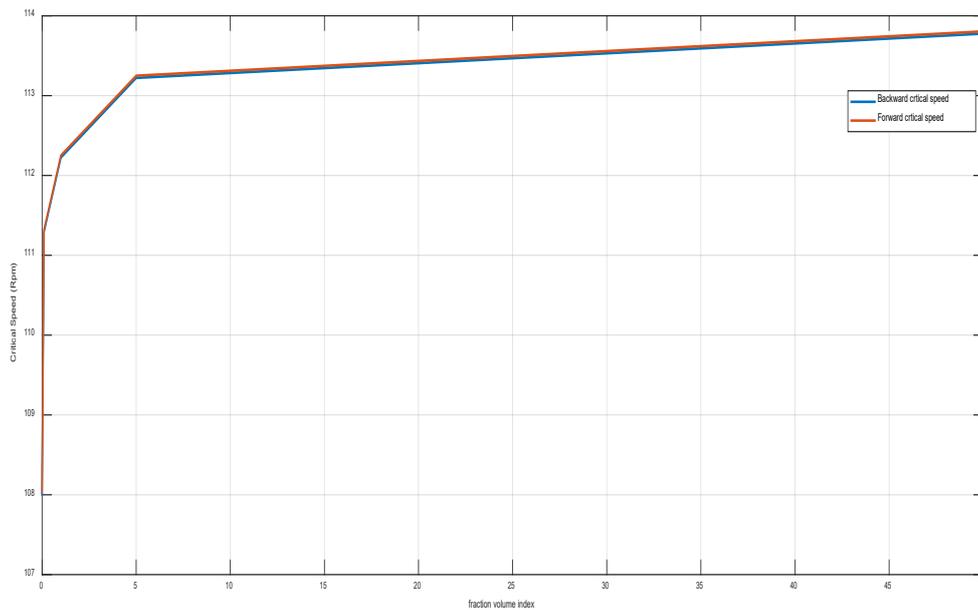


Figure 5.26 Vitesses critiques propres de 1ere fréquence et 2eme fréquence Ni-SUS 304, Ni Externe

On a représenté sur cette figure le diagramme des premières et deuxièmes fréquences d'un rotor FGM fabriqué par le mélange graduel Ni-SUS304 selon la théorie de distribution Loi de puissance et dont la répartition des matériaux est faite par Ni à l'extérieur du rotor creux et SUS304 à l'intérieur. Selon la distribution Loi de puissance, pour $k=0$ les propriétés du rotor

correspondent aux propriétés de la couche externe faite 100% en matériau Ni, les fréquences sont autour de 108Hz. Plus l'indice de volume fraction augmente et plus on s'approche du métal et les fréquences sont grandes et s'approchent de la valeur de 115Hz. On constate que ce rotor FGM tourne avec une symétrie complète des paliers sous l'influence de l'effet gyroscopique qui tend à séparer les deux branches de la précession directe et indirecte. Les variations des fréquences propres du système tournant données par la précession directe sur cette courbe montrent que ce rotor tourne normalement avec des fréquences qui augmentent avec la vitesse de rotation jusqu'à 15000 tr/mn pour l'indice de volume fraction $k=50$ et jusqu'à 20000 tr/mn pour l'indice de volume fraction $k=0$. Au delà de ces deux vitesses les fréquences diminuent.

Pour les variations des vitesses critiques en fonction de l'indice du volume fraction k , on constate que si $k=0$ les propriétés du rotor sont ceux de la couche externe faite par le matériau Ni 100% la vitesse critique est autour de 108 tr/mn et plus on augmente l'indice du volume fraction k et plus on s'approche de la couche interne faite majoritairement en métal et plus les vitesses critiques augmentent pour se stabiliser sur une seule valeur quand cette dernière couche sera faite en SUS304.

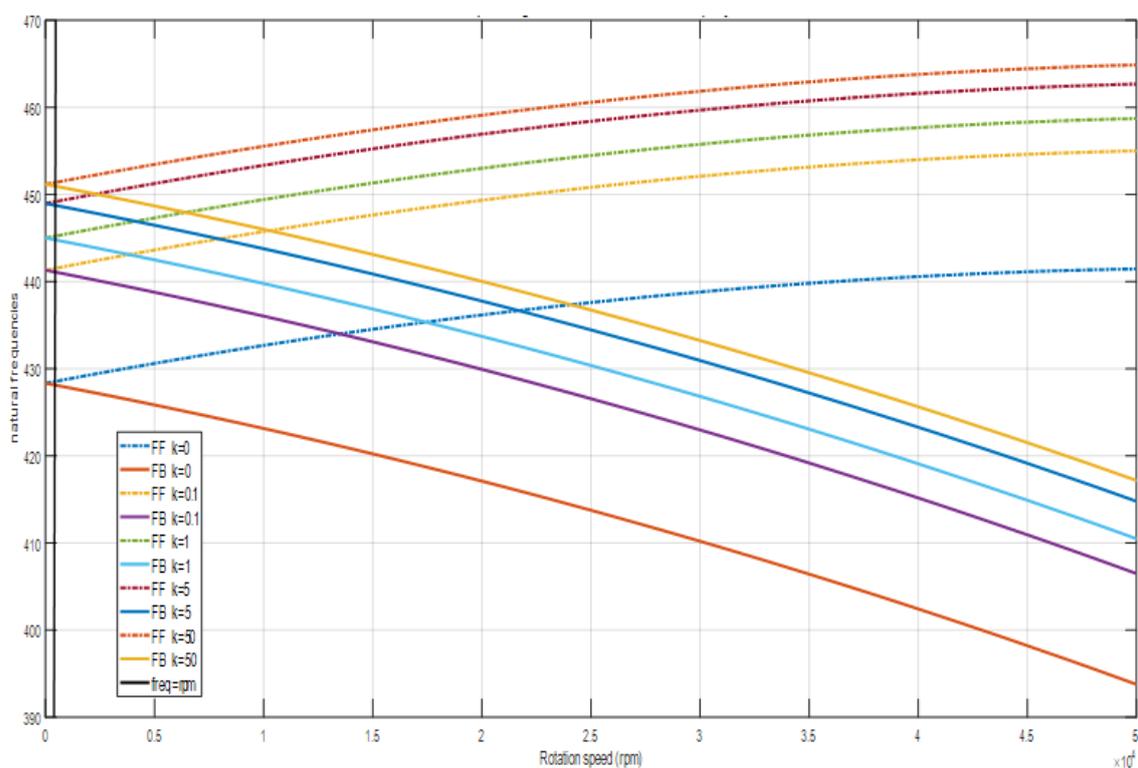


Figure 5.27 Variation des 3^{ème} et 4^{ème} fréquences Ni-SUS304 avec Ni sur la couche externe

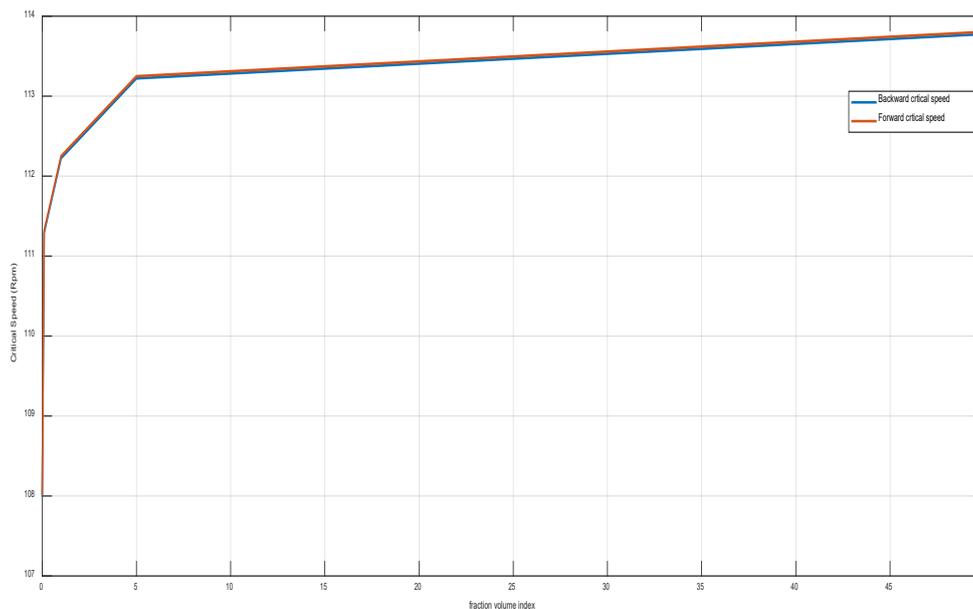


Figure 5.28 Vitesses critiques des 3^{ème} et 4^{ème} fréquences Ni-SUS304 avec Ni sur la couche externe

Cette figure représente le diagramme de Campbell des 3^{ème} et 4^{ème} fréquences du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni à l'extérieur et SUS304 à l'intérieur du rotor creux. On constate que si $k=0$ les fréquences propres sont les plus faibles et sont autour de 428Hz et plus l'indice du volume fraction augmente et plus les fréquences augmentent. Les branches de la précession directes augmentent rapidement avec la vitesse de rotation et les branches indirectes de la précession rétrogradée diminuent rapidement avec l'augmentation de la vitesse de rotation on dit que les 2 branches de la précession directe et indirecte divergent rapidement avec l'augmentation de la vitesse de rotation cela explique la présence de l'effet gyroscopique qui augmente avec la vitesse de rotation et tend à séparer la précession directe de la précession indirecte. Pour les variations des vitesses critiques en fonction de l'indice du volume fraction k , on constate que si $k=0$ les propriétés du rotor sont ceux de la couche externe faite par le matériau Ni 100% la vitesse critique est autour de 430 tr/mn et plus on augmente l'indice du volume fraction k de la composition graduelle des deux matériaux faite majoritairement par Ni et plus les vitesses critiques augmentent rapidement et plus on s'éloigne de cette couche et plus les vitesses critiques augmentent doucement.

9.2/ Rotor FGM, AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 externe.

L'arbre du rotor FGM est construit par le mélange graduel des deux matériaux AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 externe et le disque 1, disque 2 et disque 3 en métal SUS304.

Tab 5.12 Propriétés du Rotor.

Paramètres	Arbre	Disque 1	Disque 2	Disque3
Longueur Arbre (m)	1.3			
Rayon intérieur en métal (m)	0.04	0.05	0.05	0.05
Rayon extérieur en céramique (m)	0.05	0.06	0.10	0.10
Masse volumique métal (kg/m3)	8166	8166	8166	8166
Masse volumique céramique (kg/m3)	3950			
Température interne métal (°K)	300			
Température externe céramique (°K)	600			
Coefficient de cisaillement	0.08			
Position de gauche (m)		0.2	0.5	1
Epaisseur (m)		0.005	0.005	0.006

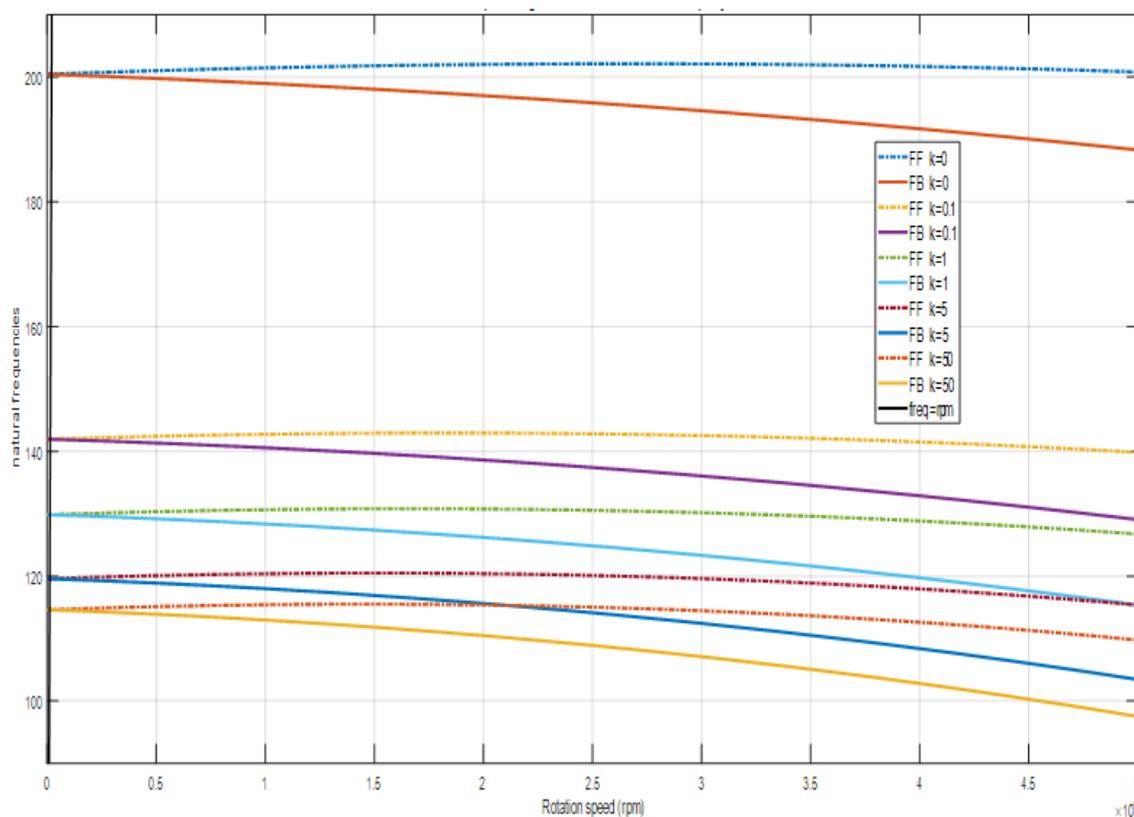


Figure 5.29 Variation de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence du rotor FGM AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 sur la couche externe

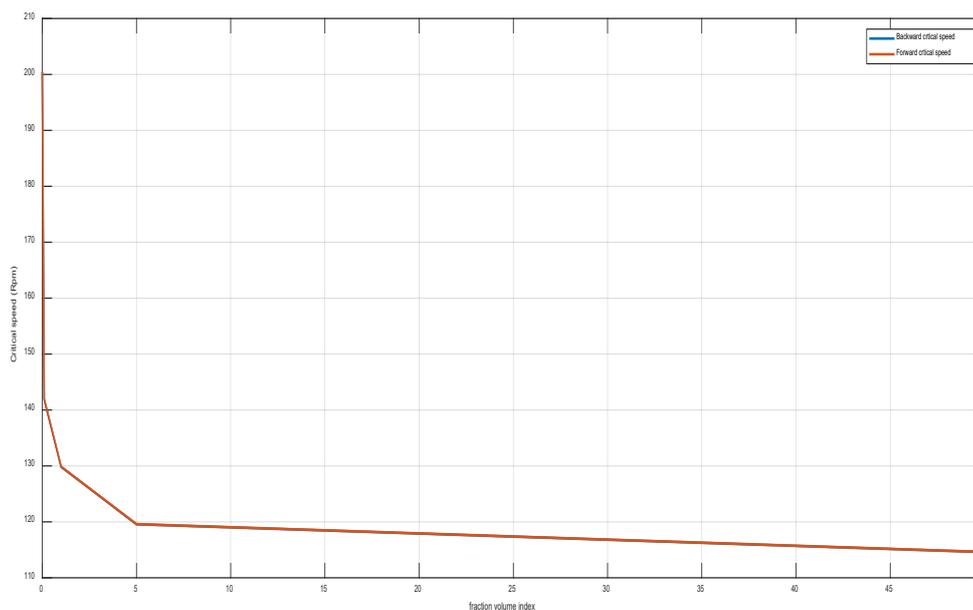


Figure 5.30 Variation de la vitesse critique de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence AL_2O_3 SUS304 avec AL_2O_3 sur la couche externe

Sur cette figure est représenté le diagramme de Campbell de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence du rotor FGM fabriquée par le mélange graduel AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 à l'extérieur et SUS304 à l'intérieur. On constate que ce rotor tourne avec une symétrie complète des paliers et plus on diminue l'indice de volume fraction k et plus on s'approche de la couche externe et plus les fréquences augmentent, et plus on augmente l'indice de volume fraction k et plus on s'approche de la couche interne et plus les fréquences diminuent. La présence de l'effet gyroscopique agissant sur les deux branches est clairement observée et elle est presque invariante pour les divers types d'indices k. Pour les variations des vitesses critiques en fonction de l'indice de volume fraction k représentant la distribution graduel des 2 matériaux, on constate que les vitesses critiques du rotor sont très grandes quand on s'approche de la couche externe et diminuent rapidement quand on augmente l'indice k.

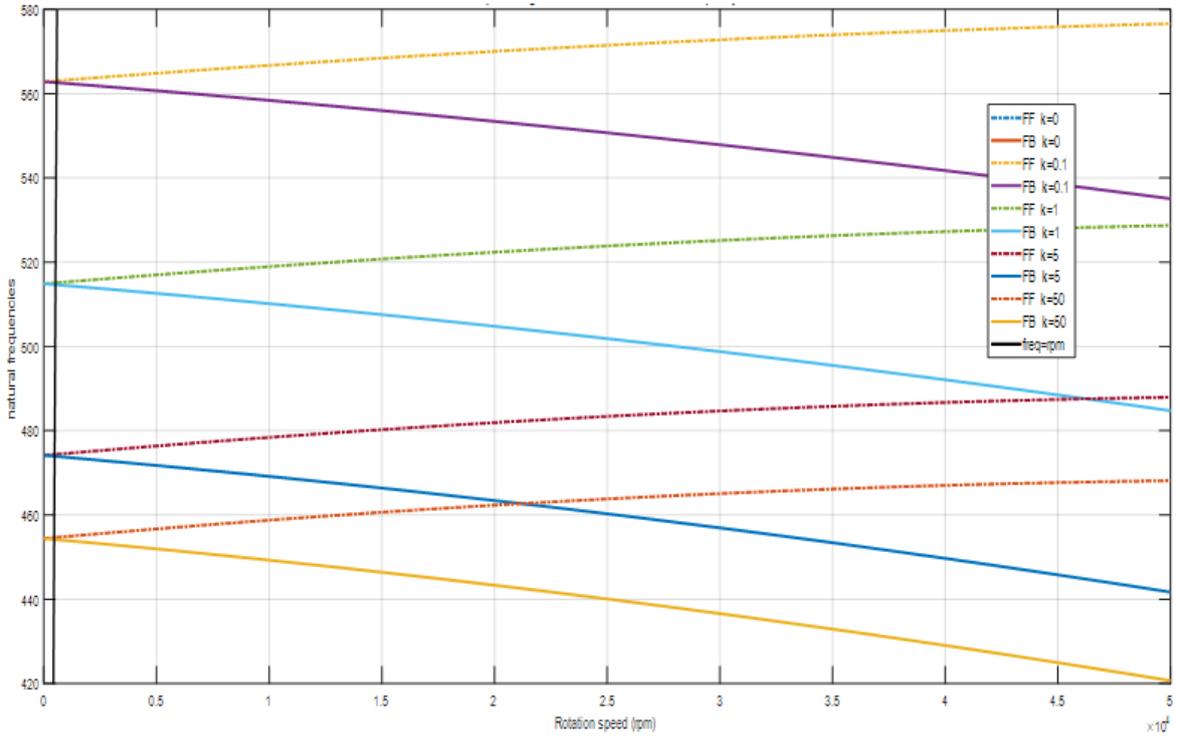


Figure 5.31 Variation des 3^{ème} et 4^{ème} fréquences AL_2O_3 - SUS304 avec AL_2O_3 sur la couche extérieure

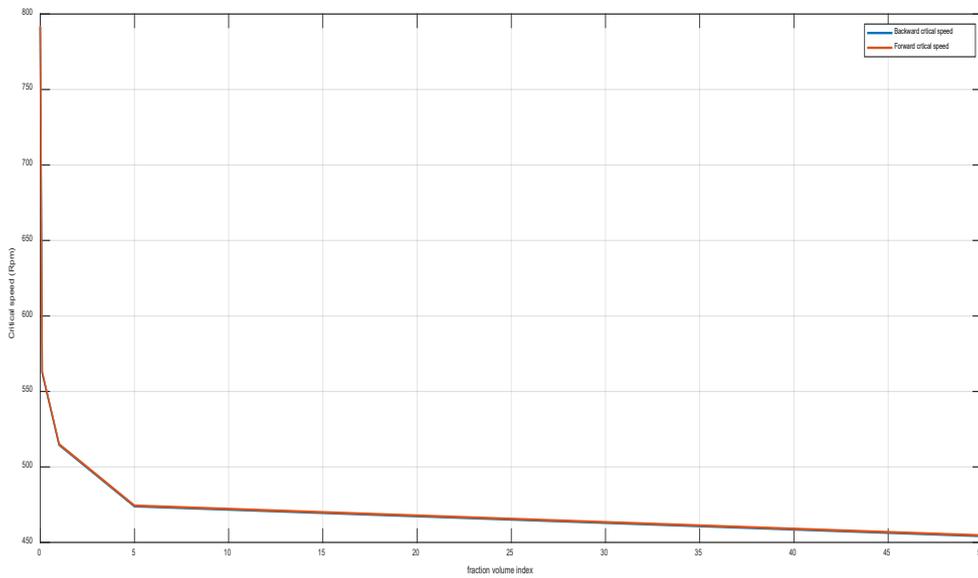


Figure 5.32 Variation des 3^{ème} et 4^{ème} vitesses critiques (AL_2O_3 - SUS304 avec AL_2O_3 à l'extérieur

Pour les 3eme et 4eme fréquences du rotor FGM AL_2O_3 -SUS 304. On constate sur ce graphe que plus l'indice k du volume fraction ne diminue et plus les fréquences augmentent et plus l'indice k augmente et plus les fréquences diminuent. Pour la phase de distribution graduelle des 2 matériaux avec AL_2O_3 majoritaire, les vitesses critiques sont très grandes quand on s'approche de la couche externe et diminuent rapidement quand on augmente l'indice de volume fraction. Pour la phase SUS304 majoritaire, les vitesses critiques sont très faibles et diminuent encore plus pour s'annuler quand on augmente l'indice de volume fraction k.

9.3/ Rotor FGM, Ni-SUS304 avec Ni Interne.

L'arbre du rotor FGM est construit par le mélange graduel des deux matériaux Ni-SUS304 avec Ni interne et le disque 1, disque 2 et disque 3 en métal SUS304.

Tab 5.13 Propriétés du Rotor.

Paramètres	Arbre	Disque 1	Disque 2	Disque3
e/R	0.04	0.05	0.05	0.05
L/R	0.05	0.06	0.10	0.10
Masse volumique métal (kg/m3)	8166	8166	8166	8166
Masse volumique céramiq (kg/m3)	8900			
Température interne métal (°K)	300			
Température externe céramiq (°K)	600			
Coefficient de cisaillement	0.08			
Position de gauche (m)		0.2	0.5	1
Epaisseur (m)		0.05	0.08	0.006

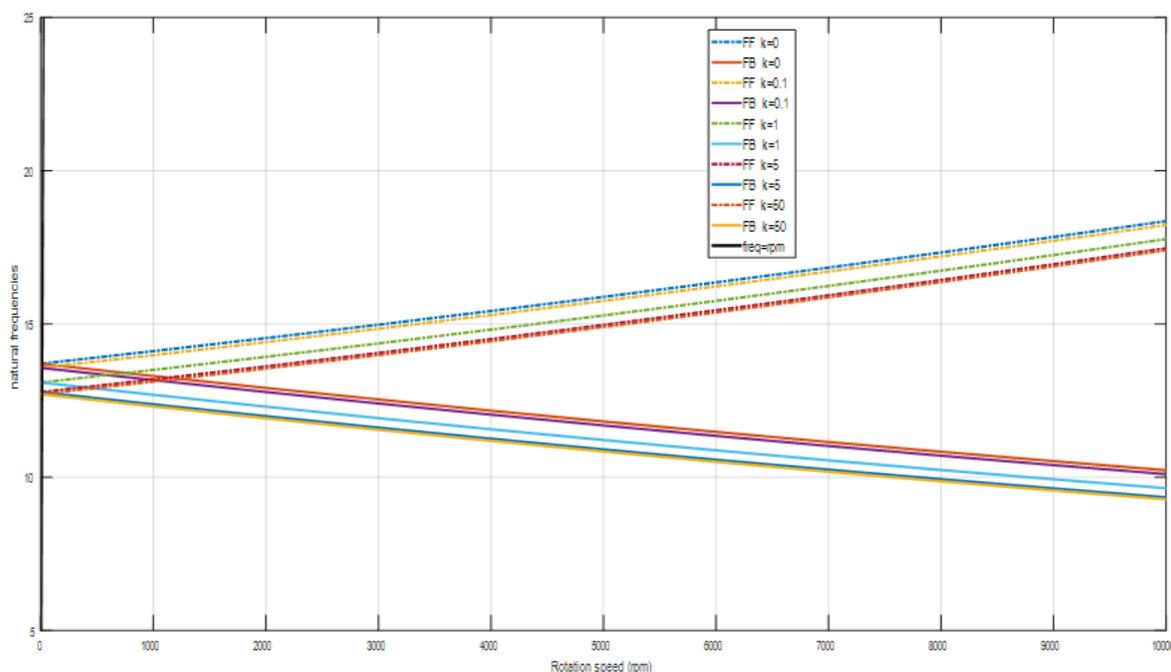


Figure 5.33 Variation de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquences Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

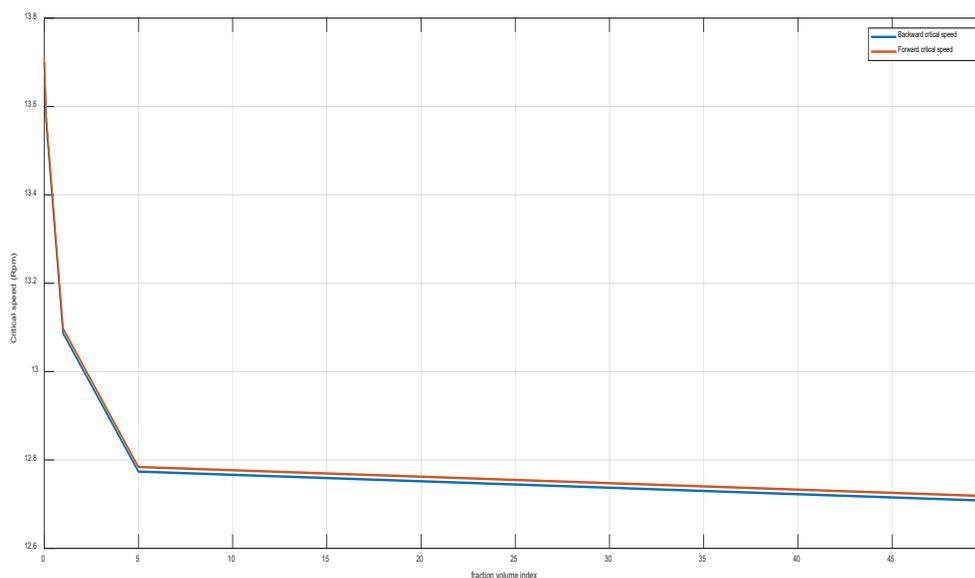


Figure 5.34 Variation de la vitesse critique V_c de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

Pour ce diagramme de Campbell représentant les 1^{ère} et 2^{ème} fréquences, le rotor FGM est fabriqué par le mélange graduel Ni-SUS304 avec Ni se trouve sur la couche interne et SUS304 sur la couche externe. Selon la distribution Loi de puissance si $k=0$ les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche externe SUS304 et les fréquences de vibrations sont grandes et plus on augmente l'indice de volume fraction k et plus les fréquences de vibration du rotor FGM diminuent et prennent des valeurs très basses pour la couche de Ni 100 %. On constate que se rotor tourne avec une symétrie complète dans les paliers et les branches de la précession directes et indirectes divergent faiblement sous l'effet gyroscopique et l'indice volume fraction a peu d'influence sur la séparation des 2 branches de la précession directe et indirecte. Les variations des vitesses critiques en fonction du volume fraction montrent clairement que si $k=0$ les vitesses critiques correspondantes aux propriétés de la couche externe SUS304 sont très grandes et diminuent rapidement si on augmente k en restant dans la phase où SUS304 est majoritaire. Quand l'indice de volume fraction k est grand les vitesses critiques sont très faibles.

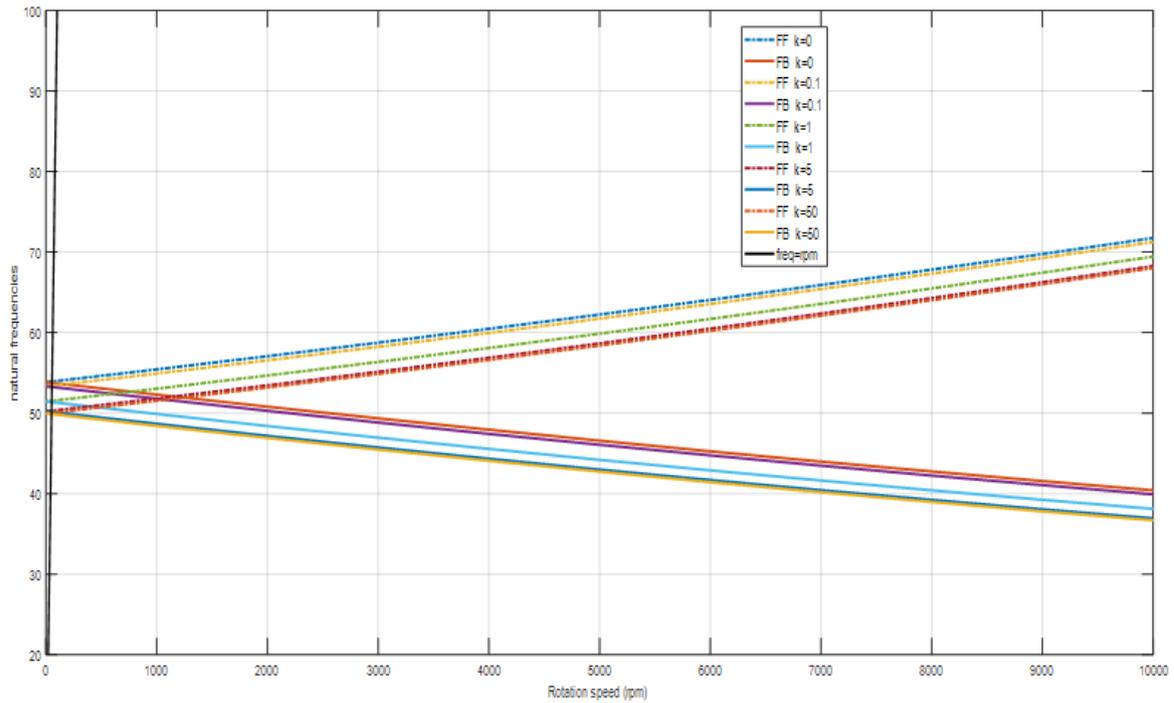


Figure 5.35 Variation des 3^{ème} et 4^{ème} fréquences du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

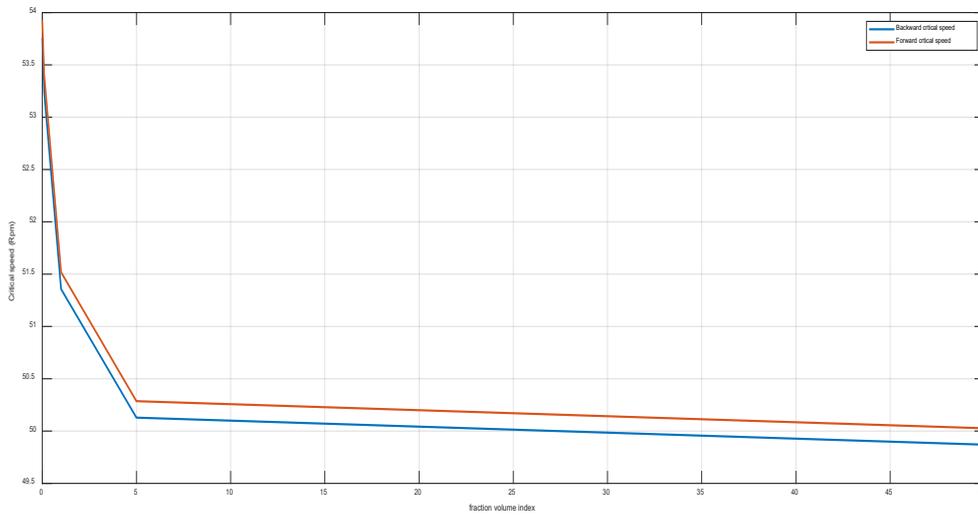


Figure 5.36 Variation de la vitesse critique V_c de la 3^{ème} et 4^{ème} fréquence du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur.

Les 3^{ème} et 4^{ème} fréquences propres du rotor FGM Ni-SUS304 avec Ni à l'intérieur et SUS304 à l'extérieur. On remarque que si $k=0$, les fréquences propres sont très grandes et correspondraient aux fréquences des propriétés de la couche externe, et plus on augmente on augmente l'indice de volume fraction k et plus les fréquences de vibrations diminuent. On constate que la précession directe augmente rapidement avec l'augmentation de la vitesse de

rotation et la précession indirecte diminue avec l'augmentation de la vitesse de rotation. La divergence de ces dernières précessions explique l'effet gyroscopique qui est peu influencé par la variation de l'indice k de la distribution de puissance du mélange graduel. La variation des vitesses critiques de la 3^{ème} et 4^{ème} fréquence en fonction de la variation de l'indice k est clairement observée. Pour k=0 les vitesses critiques sont très grandes et pour k ≥ 5 les vitesses critiques varient faiblement.

9.4/ Rotor FGM, AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 interne.

L'arbre du rotor FGM est construit par le mélange graduel des deux matériaux AL_2O_3 - SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur et le disque 1, disque 2 et disque 3 en métal SUS304.

Tab 5.14 Propriétés du rotor 4.

Paramètres	Arbre	Disque 1	Disque 2	Disque3
Longueur Arbre (m)	1.3			
Rayon intérieur en métal (m)	0.04	0.05	0.05	0.05
Rayon extérieur en céramiq (m)	0.05	0.06	0.10	0.10
Masse volumique métal (kg/m3)	8166	8166	8166	8166
Masse volumique céramique (kg/m3)	3950			
Température interne métal (°K)	300			
Température externe céramique (°K)	600			
Coefficient de cisaillement	0.08			
Position de gauche (m)		0.2	0.5	1
Epaisseur (m)		0.005	0.005	0.006

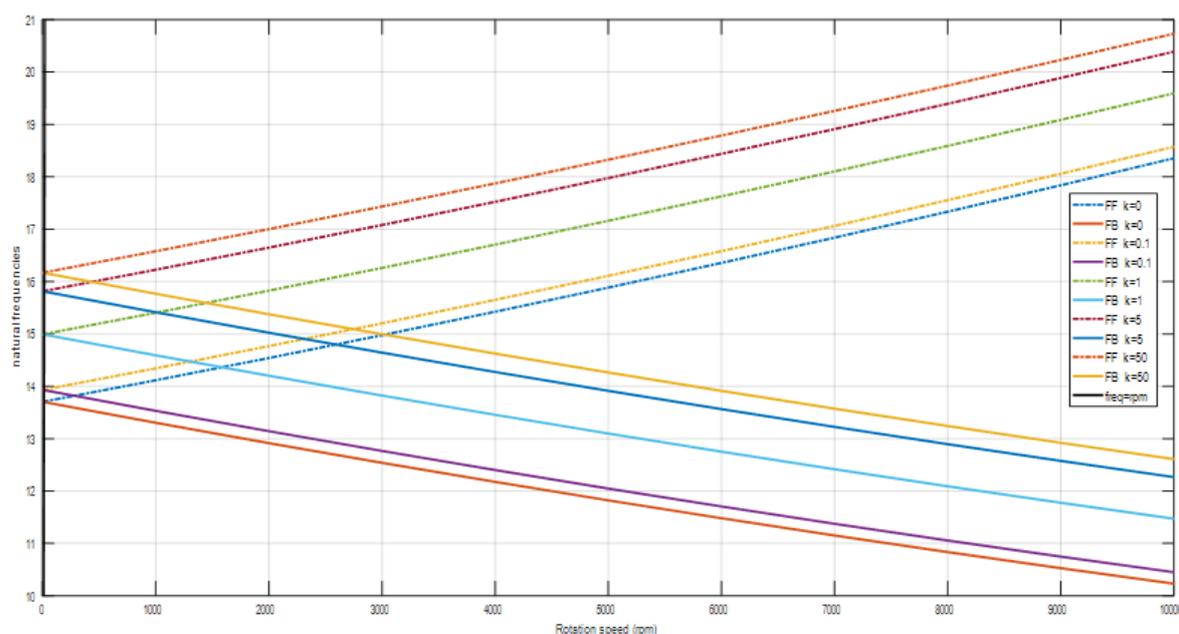


Figure 5.37 Variation de la 1^{ère} et 2^{ème} fréquence du rotor FGM AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur

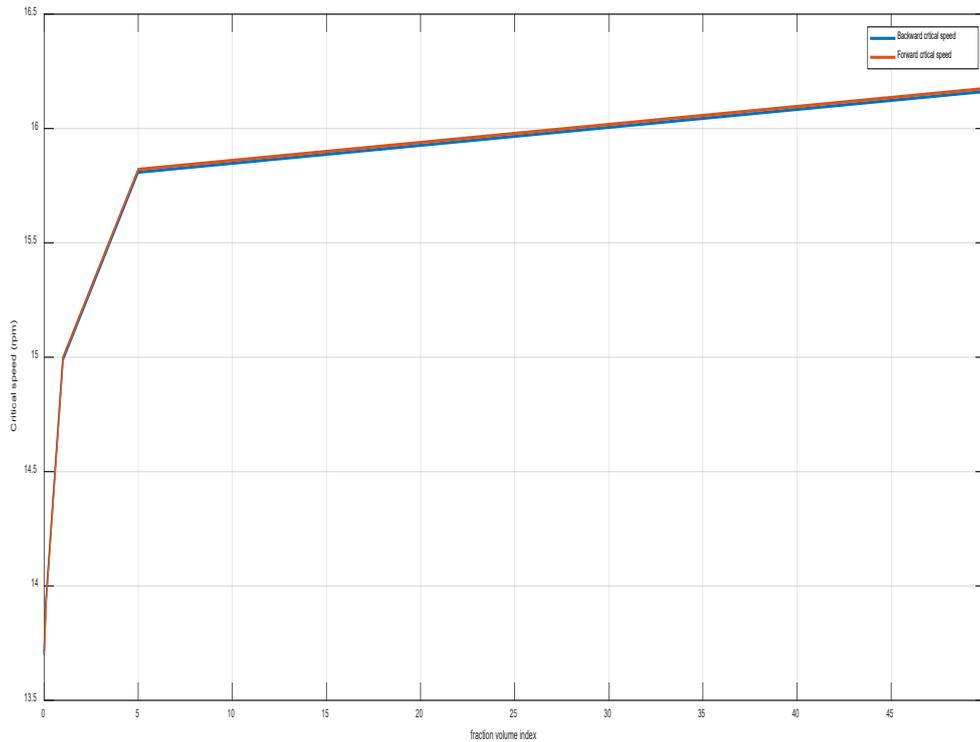


Figure 5.38 Variation des 1^{ère} et 2^{ème} vitesses critiques du rotor FGM AL2O3-SUS304 avec AL2O3 à l'intérieur

Sur cette figure on observe la variation du diagramme de Campbell en fonction de la vitesse de rotation et en fonction de l'indice de graduation du volume fraction du mélange graduel des matériaux AL_2O_3 et SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur SUS304 à l'extérieur. On constate que les fréquences sont très grandes si l'indice k est grand, ces fréquences correspondent aux fréquences de la couche interne. Les fréquences sont très petites si l'indice k est très petit, ces fréquences correspondent aux fréquences de la couche externe. La variation de l'effet gyroscopique est très faible quand l'indice k de volume fraction varie. Les variations des vitesses critiques, sont clairement observées. Pour une valeur de l'indice de volume fraction $k=0$ les vitesses critiques sont très faibles et augmentent rapidement pour $0 \leq k \leq 5$ au delà de cette valeur les vitesses critiques augmentent doucement pour ce stabiliser sur une valeur quand l'indice k prend des valeurs très grandes.

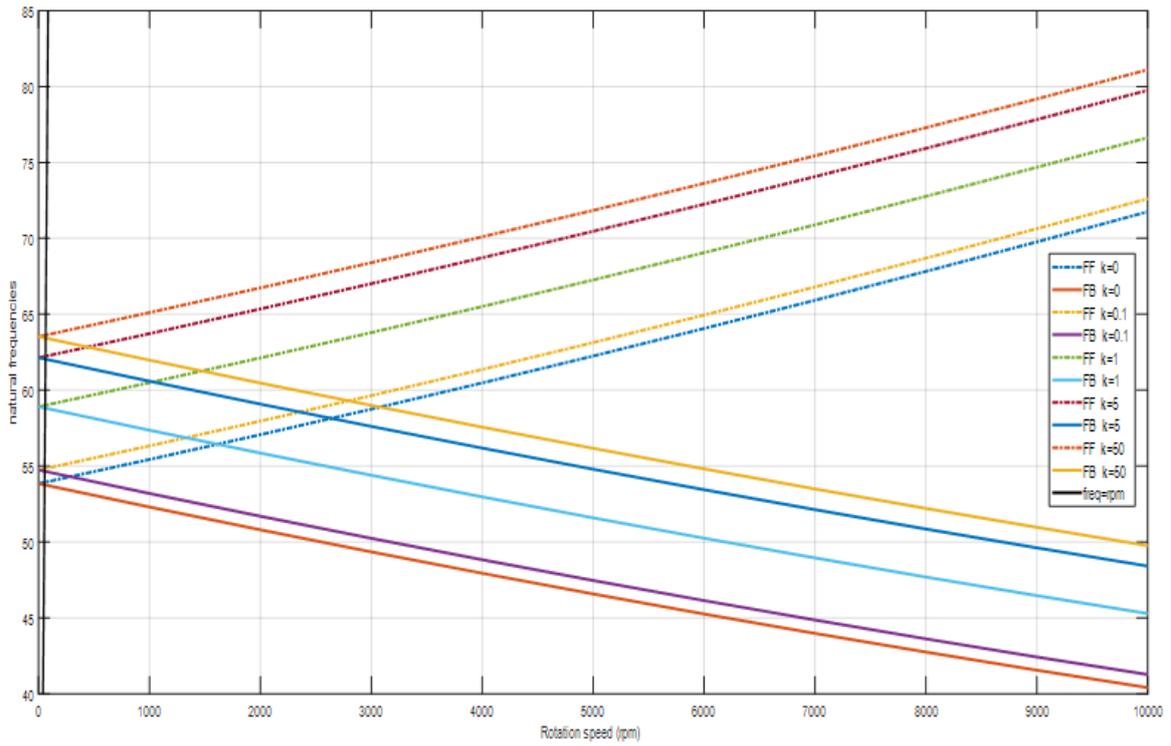


Figure 5.39 Variation de la 3^{ème} et 4^{ème} fréquence du rotor FGM AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur

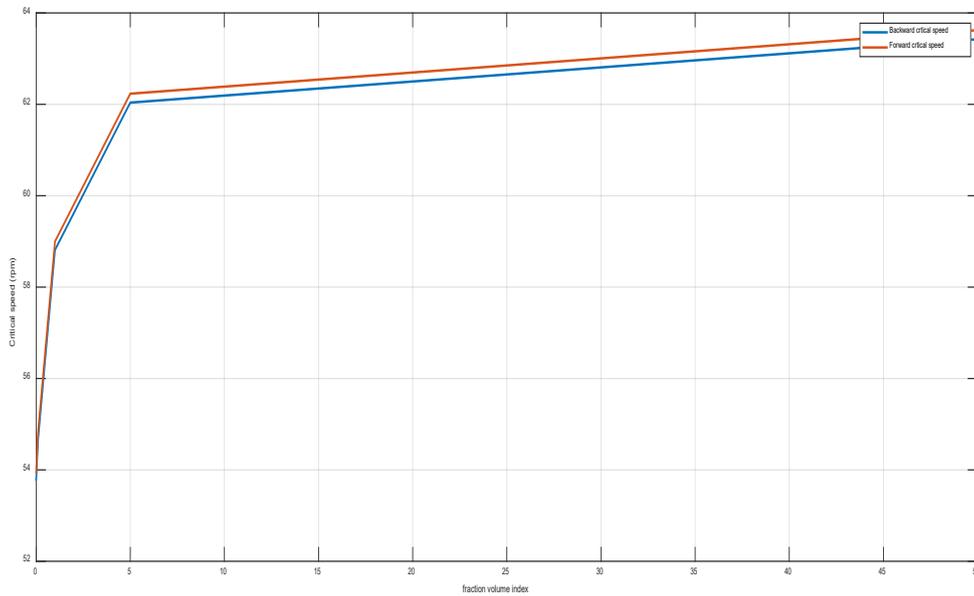


Figure 5.40 Variation de la vitesse critique V_c de la 3^{ème} et 4^{ème} fréquence du rotor FGM AL_2O_3 -SUS304 avec AL_2O_3 à l'intérieur

Les variations de la 3^{ème} et 4^{ème} fréquence en fonction des vitesses de rotation et en fonction de l'indice de volume fraction. Il est observé clairement que les fréquences sont très faibles pour $k=0$ et sont très grandes pour k très grands cela explique que les fréquences sont très petites pour $k=0$ qui correspond aux propriétés de la couche externe et les fréquences sont très grandes quand l'indice k est très grand et qui correspond aux propriétés de la couche interne. Les variations de l'indice k définissant l'indice de graduation du mélange des 2 matériaux a peu d'influence sur la variation de l'effet gyroscopique. Les vitesses critiques sont très faibles quand l'indice du volume fraction $k=0$ et augmente rapidement si $0 \leq k \leq 5$ Les vitesses critiques prennent des valeurs très proches pour $k > 5$.

Conclusion Générale

10. Conclusion générale.

Dans ce travail nous avons déterminé le comportement vibratoire d'un rotor FGM creux sous l'effet de la température, pour divers indices de volume fractions k , en utilisant la version hp de la méthode des éléments finis. L'arbre du rotor est du type poutre de Timoshenko avec un coefficient de correction au cisaillement k_s . Un programme de calcul est réalisé sous Matlab il permet de calculer les fréquences propres des rotors et de tracer les diagrammes de Campbell. Après validation de notre programme plusieurs études paramétriques sont faites, elles visent essentiellement la détermination du meilleur mélange graduel métal-céramique du point de vue vibratoire en considérant l'effet des variations de la température. Les principales conclusions sont :

- La rigidité d'un rotor travaillant sous l'influence de la température dépend des propriétés mécaniques des deux composants du mélange qui le composent.
- Le rotor composé du mélange Ni-SUS304 où le Nickel est à l'extérieur présente un déficit en rigidité pour des vitesses de rotation entre 15000-20000 tr/mn (fléchissement de l'arbre dans cette plage de vitesses).

Pour les autres mélanges nous avons une symétrie complète des paliers et les précessions directes et indirectes divergent sous l'influence de l'effet gyroscopique avec l'augmentation de la vitesse de rotation de façon normale.

Une étude fréquentielle comparative est faite pour divers types de mélanges graduels composés par Zr-SUS304, Ni-SUS304, Al_2O_3 -SUS304, silicone nitrure-SUS304 et Ti6A14V-SUS304 sous l'influence de la température; le rotor FGM résiste différemment à la variation de la température. Nous pouvons classer les mélanges par ordre de bonne résistance à la température comme suit :

- Zr- SUS304,
- Silicone Nitrure- SUS304,
- Al_2O_3 - SUS304
- Ni- SUS304,
- Ti6A14V- SUS304.

Les résultats obtenus pour cette étude peuvent ouvrir des perspectives complémentaires pour l'étude d'un rotor étagé (cas d'un turboréacteur d'avion) sous l'effet de l'amortissement structurel du mélange graduel et de la force axiale.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques.

- Babuška .BQ et GUO 1992:** The h-p version of the finite element method: basis theory and applications, *Advances in Engineering Software*, Volume 15, Issue 3-4, 1992.
- Peano 1976,** Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plane bending. *Comput. Math. Applic.* 2, 211-224 (1976).
- Akbas,, S., D. 2014.** Free vibration of axially functionally graded beams in thermal environment. *International Journal of Engineering & Applied Sciences* 6 (3):37–51. doi:[10.24107/ijeas.251224](https://doi.org/10.24107/ijeas.251224).
- Bardell, N. S. 1996.** An engineering application of the h-p version of the finite element Method to the static analysis of an Euler-Bernoulli beam. *Computers & Structures* 59 (2):195–211. 1996.
- Berthelot, J. 1996.** Composite materials, mechanical behavior and analysis of structures. 2nd ed. Paris: Masson.
- E Carrera, G Giunta, P Nali, M Petrolo., 2010** March 2010 ont présenté des éléments de poutres hiérarchiques étudié sur la base de la formulation Carrera
[Computers & Structures](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.11.002) 88(5-6):283-293 DOI:[10.1016/j.compstruc.2009.11.002](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.11.002)
- Yuming Fu 2012.** a étudié la stabilité d'un rotor en matériaux FG avec une fraction Piézoélectrique. September 2012 *journal of applied mathematical Modeling* 36(9):4324–4340 DOI:[10.1016/j.apm.2011.11.059](https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.059)
- Boukhalfa, A. 2014.** Dynamic analysis of a spinning functionally graded material shaft by the p-version of the finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures* 11 (11):2018–2038.
- Boukhalfa, A., and A. Hadjoui. 2010.** Free vibration analysis of an embarked rotating composite shaft using the hp-version of the FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures* 7 (2):105–41. doi:[10.1590/S1679-78252010000200002](https://doi.org/10.1590/S1679-78252010000200002).
- Chan, S. H. 2001.** Performance and emissions characteristics of partially insulated gasoline engine. *International Journal of Thermal Science* 40:255–61.
- Chang, M.-Y., J.-K. Chen, and C.-Y. Chang. 2004.** A simple spinning laminated composite shaft model. *International Journal of Solids and Structures Mechanic*

Based vol 41 (3-4):637–62.

- Cheng, J., H. Xu, and A. Yan. 2006.** Frequency analysis of a rotating cantilever beam using assumed mode method with coupling effect. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 34 (1):25–47. doi:[10.1080/15367730500501587](https://doi.org/10.1080/15367730500501587).
- Ding, J., L. Chu, L. Xin, and G. Dui. 2018.** Nonlinear vibration analysis of functionally graded beams considering the influences of the rotary inertia of the cross section and neutral surface position. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 46 (2):225–37. doi:[10.1080/15397734.2017.1329020](https://doi.org/10.1080/15397734.2017.1329020).
- Gayen, D., D. Chakraborty, and R. Tiwari. 2017a.** Whirl frequencies and critical speeds of a rotor-bearing system with a cracked functionally graded shaft—Finite element analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 61: 47–58. doi:[10.1016/j.euromechsol.2016.09.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.003).
- Gayen, D., D. Chakraborty, and R. Tiwari. 2017b.** Finite element analysis for a functionally graded rotating shaft with multiple breathing cracks. *International Journal of Mechanical Sciences* 134:411–23. doi:[10.1016/j.ijmecsci.2017.10.027](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.027).
- Gayen, D., R. Tiwari, and D. Chakraborty. 2019.** Finite element based stability analysis of a rotor-bearing system having a functionally graded shaft with transverse breathing cracks. *International Journal of Mechanical Science* 157-158:403–14.
- Hirai, T., and L. Chen. 1999.** Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan. *Materials Science Forum* 308-311:509–14. doi:[10.4028/www.scientific.net/MSF.308-311.509](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.308-311.509).
- Javaheri, R., and M. Eslami. 2002.** Thermal buckling of functionally graded plates. *Journal* 40 (1):162–9. doi: [10.2514/3.15009](https://doi.org/10.2514/3.15009).
- Hui-Shen Shen – 2009:** *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. Edition 2009 par Taylor & Francis Group, LLC 624.1'776--dc22
- Koteswara Rao, D., and T. Roy. 2016.** Vibration analysis of functionally graded rotating shaft system. *Procedia Engineering* 144:775–80.
- Librescu, L., S.-Y. Oh, and O. Song. 2005.** Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: Vibration and stability. *Journal of Thermal Stresses* 28 (6-7):649–712. doi:[10.1080/01495730590934038](https://doi.org/10.1080/01495730590934038).

- Loy, C., K. Lam, and J. Reddy.** 1999. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences* 41 (3):309–24.
doi:[10.1016/S0020-7403\(98\)00054-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X).
- Przybyłowicz, P.** 2005. Stability of actively controlled thermal stresses rotating shaft made of functionally graded material. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 43 (3):609–30.
- Reddy, J., and C. Chin.** 1999. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses* 21 (6):593–626.
doi:[10.1080/01495739808956165](https://doi.org/10.1080/01495739808956165).
- Rene, J. G.** 1999. *Vibrations des structures*. N° 69 de la collection R&D d'EDF chez EYROLLES.
- Saimi, A., and A. Hadjoui.** 2016. An engineering application of the h-p version of the finite elements method to the dynamics analysis of a symmetrical on-board rotor. *European Journal of Computational Mechanics* 25 (5): 388–416.
doi:[10.1080/17797179.2016.1245597](https://doi.org/10.1080/17797179.2016.1245597).
- Touloukian, Y. S., and G. C. Wang.** 1967. *Thermophysical properties of high temperature solid materials*. Purdue University. Thermophysical Properties Research Center. New York, NY: Collier-Macmillan.
- Uemura, S.** 2003. The activities of FGM on new applications. *Materials Science Forum* 423-425:1–10. doi:[10.4028/www.scientific.net/MSF.423-425.1](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.423-425.1).
- Yamanouchi, M., M. Koizumi, T. Hirai, and I. Shiota.** 1990. Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Functionally Gradient Materials Forum, Sendai, Japan, October 8–9. 379p
- Argeso, H., Eraslan, Ahmet N.** 2007, A Computational Study on Functionally Graded Rotating Solid Shafts *International journal for computational Methods in Engineering Science and Machines* Vol 8(6) ;391-399..
- Davoodinik, A.R. and Rahimi, G.H.** (2008) Thermal Behavior Analysis of the Functionally Graded Timoshenko's Beam. *IUST International Journal of Engineering Science*, 19, 105-113.
- Piovan, M.T., Sampaio, R.,** 2009 A study on the dynamics of rotating beams with Functionally graded property *Journal of Sound and Vibration* 327(2009); 134-143.

- Zhao, X.**, Lee, Y.Y., Liew, K.M., 2009 Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Journal sound and vibration* 90 (2009); 161-171.
- Şimşek S, M, T Kocatürk** (2009) Free and forced vibration of a functionally graded Beam subjected to a concentrated moving harmonic load *Journal of Composite Structure –Elsevier-90* (4); 465-473.
- E Carrera, G Giunta, P Nali, M Petrolo** (2010) Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries *Journal composite structure (Elsevier)* 83(5);283-290.
- Afsar, A.M., Go, J.**, 2010 Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk *International journal of sound and vibration Applied Mathematical Modeling (Elsevier)* 34 (3); 3309-3320.
- Simsek, M.**, 2010 Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories *Elsevier) Nuclear engineering and Design (Elsevier)* 240 (4) 697-705
- Alibeigloo, A.**, 2010, Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity *Elsevier Composite structure* 95; 612-622.
- Kocaturk, T., Simsek, M., Akbas, S.D.**, 2011 Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko Beam composed of functionally graded material *Composite structure Elsevier* 87(5); 387-455.
- Mazzei, Arnaldo J., Scott, Richard A.**, 2011 Effect of Functionally Graded Materials on Resonances of Bending Shafts Under Time-Dependent Axial Loading *Journal of vibration and acoustic* 133 (1); 1-11.
- Alashti, R. A., Khorsand, M.**, 2011 Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method *International journal of pressure vessels and piping* 2011, 006-001.

- Xiang, H.J., Yang, J., 2008** Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction *Journal of Composite Part B: Engineering (Elsevier)* 39 (2) 292-303.
- Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S., Xiang, Y., 2009,** Flexural Vibration and Elastic Buckling of a Cracked Timoshenko Beam Made of Functionally Graded Materials *Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures* 2009 Vol 16(6);405-634.
- Hosseini, S.A. A., Khadem, S.E., 2009** Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia *J. Mechanisme and machine theorie (Elsevier)* vol 44 (1); 272-288.
- Boyaci, A., Seemann, W., Proppe, C., 2009,** Run-up of turbocharger rotors in nonlinearly modelled floating bush bearings *MTZ Worldw* 71, 50–55 (2010).
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A., Mechab, I., 2010,** An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions *Journal of Composite structure –Elsevier-vol 92 (8),* 1877-1887.
- Sapountzakis, E. J., Dourakopoulos, J. A., 2010** Shear Deformation Effect in Flexural-torsional Vibrations of Composite Beams by Boundary Element Method (BEM) *Journal of vibration and control* vol 16 (12°; 1763-1789.
- Kiani, Y., Eslami, M.R., 2010** Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *Int J Mech Mater Des* 6, 229–238 (2010).
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M. T., Hajilar, S., 2011** Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beam with classical boundary condition, *Journal of composite Part B Engineering (Elsevier)* vol 42(4);801-808.

Alshorbagy, Amal E., Eltahir, M.A., Mahmoud, F.F., 2011 Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method journal Applied Mathematical Modelling 35(1):412-425

Jiango Ding 2017 Non lineaire vibration analysis of functionally graded beam considering the influence of the rotary inertia of the cross section and neutral surface position J.I , Mechanic Based Design of Structure and Machines. Vol 46 (2); 225-237.

Koteswara.D Raoa and Tarapada Roy, Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Shaft System Procedia engineering –Elsevier- 144 (2016) 775 – 780

D Gayen, D Chakraborty, R Tiwari (2017) Finite element analysis for a functionally graded rotating shaft with multiple breathing cracks x International journal of Mechanic sciences Elsevie vol 134 p 411-423.

D Gayen, D Chakraborty, R Tiwari(2017) Whirl frequencies and critical speeds of a rotor-bearing system with a cracked functionally graded shaft – Finite element analysis European Journal of Mechanics - A/Solids Vol 61, 47-58

Debabrata Gayen Rajiv Tiwari D.Chakraborty (2019) Finite element based stability analysis of a rotor-bearing system having a functionally graded shaft with transverse breathing cracks International Journal of Mechanical Sciences vol, 403-414 .

Bouzidi, I., A. Hadjoui, and A. Fellah. 2020. Dynamic analysis of functionally graded rotor-blade system using the classical version of the finite element method. Mechanics Based Design of Structures and Machines. doi:[10.1080/ 15397734.2019.1706558](https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1706558).

Assem.H, Hadjoui.A, & Saimi.A 2020 Numerical analysis on the dynamics behavior of FGM rotor in thermal environment using h-p finite element method Mechanics Based Design of Structures and Machines, DOI: [10.1080/15397734.2020.1824791](https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1824791)

Annexe

ANNEXE 1

Tab5.2 : Coefficients de Température de Zr (Zircone) et SUS304 Hui-Shen Shen – 2009.

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa) Mo.Young	SUS304	0	201.04 ^{e9}	3.079 ^{e-4}	-6 ;534 ^{e-7}	0
	Zr	0	244 .27 ^{e9}	-1.371 ^{e-3}	1.214 ^{e-6}	-3.681 ^{e-10}
K(W/mK)C oef Cond	SUS304	0	15.379	-1.264 ^{e-3}	2.092 ^{e-6}	-7.223 ^{e-10}
	Zr	0	1.7000	1.276 ^{e-4}	6.648 ^{e-8}	0
α (1/K) Coef.dilat	SUS304	0	12.330 ^{e-6}	0	0	0
	Zr	0	12.766 ^{e-6}	-1.491 ^{e-3}	1.006 ^{e-5}	-6.778 ^{e-11}
ν :Coe Poisson	SUS304	0	03262	1.121 ^{e-4}	0	0
	Zr	0	0.2882	1.133 ^{e-4}	0	0

Tab 5.2 : Coefficients de température de Silicon Nitride et SUS304 Hui-Shen Shen 2009.

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa) Mo.Young	SUS304	0	201.04 ^{e9}	3.079 ^{e-4}	-6.534 ^{e-7}	0
	Silicon Nitride	0	348.43 ^{e9}	-3.070 ^{e-4}	2.160 ^{e-7}	-8.946-11
K(W/mK)C oef Cond	SUS304	0	15.379	-1.264 ^{e-3}	2.092 ^{e-6}	-7223.e-10
	Silicon Nitride	0	13.723	-1.032 ^{e-3}	5.466 ^{e-7}	-7.876-11
α (1/K) Coef.dilat	SUS304	0	12.330 ^{e-6}	8.086 ^{e-4}	0	0
	Silicon Nitride	0	5.8723 ^{e-6}	9.095 ^{e-4}	0	0
ν :Coe Poisson	SUS304	0	0.3262	-2.002 ^{e-4}	3.797 ^{e-7}	0
	Silicon Nitride	0	0.244	0	0	0

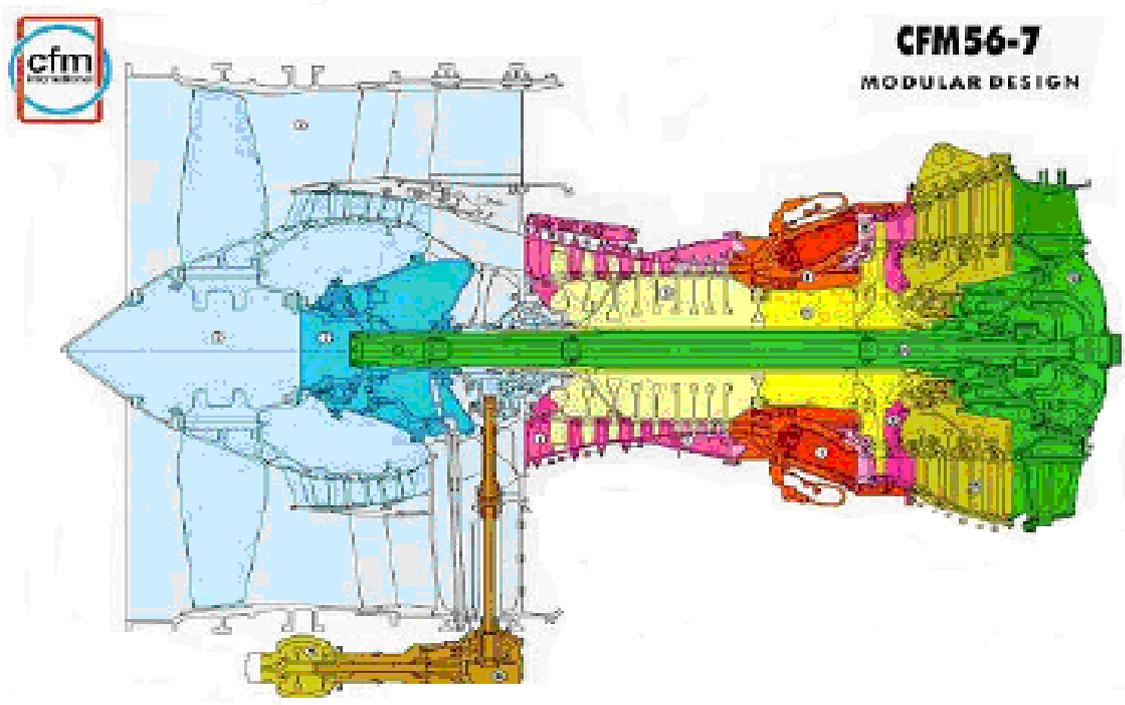
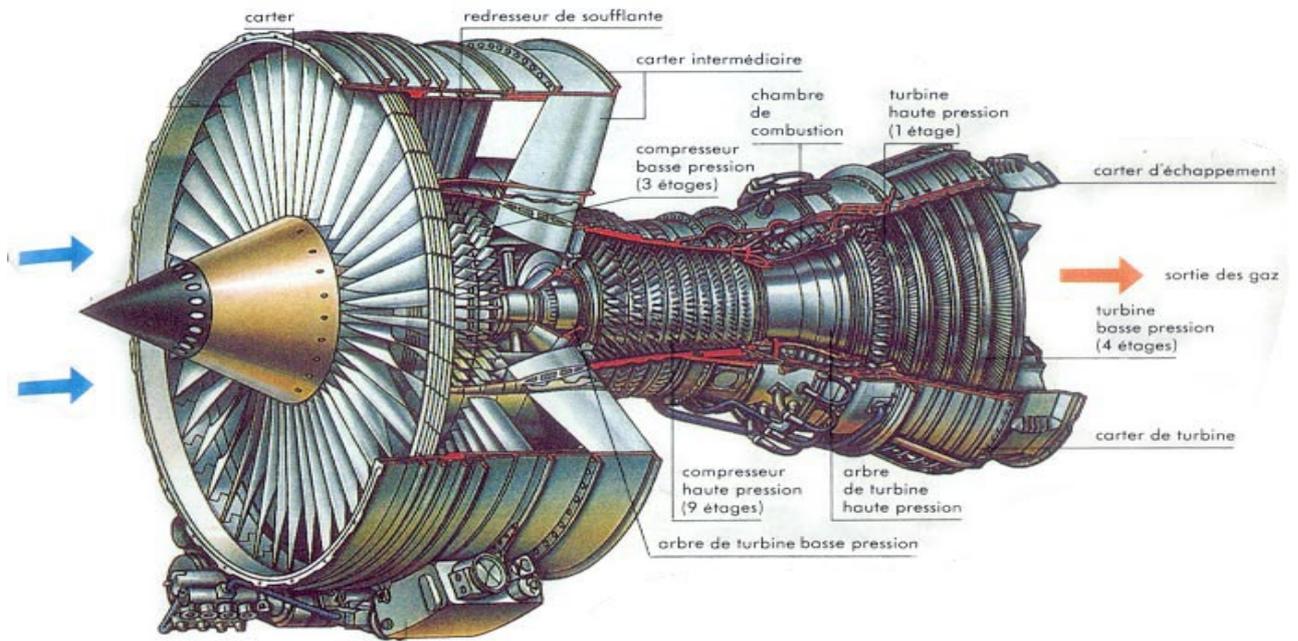
ANNEXE 2

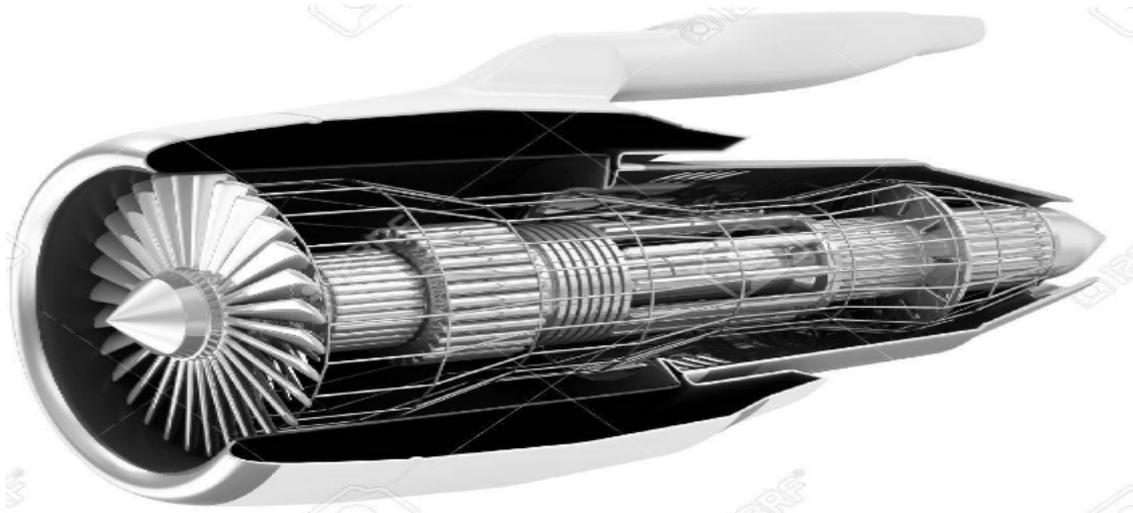
Tab5.2 : Coefficients de Température de Nickel et SUS304 -Hui-Shen Shen – 2009

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa) Mo.Young	SUS304	0	201.04e9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	Nickel	0	223.95 e9	-2.794e-4	-3.998e-9	0
K(W/mK) Coef Cond	SUS304	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	Nickel	0	58.754	-4.614e-4	6.670e-7	-1.523e-10
α (1/K) Coef.dilat	SUS304	0	12.330e-6	8.086e-4	0	0
	Nickel	0	9.9209e-6	8.705e-4	0	0
ν :Coe Poisson	SUS304	0	0.3262	-2.002e-4	3.797e-7	0
	Nickel	0	0.3100	0	0	0

Tab5.2 : Coefficients de Température alliage de Titane Ti-6A1-4V et SUS304 -Hui-Shen Shen – 2009

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa) Mo.Young	SUS304	0	201.04e9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	Ti-6A1-4V	0	125.56e9	-4.586e-4	0	0
K(W/mK) Coef Cond	SUS304	0	15.379	-1.264e-4	2.092e-6	-7.223e-10
	Ti-6A1-4V	0	1.0000	1.704e-2	0	0
α (1/K) Coef.dilat	SUS304	0	7.5788e-6	6.638e-4	-3.147e-6	0
	Ti-6A1-4V	0	7.5788e-6	6.638e-4	-3.147e-6	0
ν :Coe Poisson	SUS304	0	0.3262	-2.002e-4	0	0
	Ti-6A1-4V	0	0.2884	1.121e-4	0	0





Coupe transversale de Modern Airplane Jet Turbine Engine



Rotor d'un Turboreacteur