جامعة أبي بكر بلقايد –تلمسان-

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية


أطروحة مقدمة لاستكمال متطلبات شهادة الدكتوراه علوم في العلوم الاقتصادية

تخصص: الطرق الكمية

**بعنوان:**

# دراسة نموذج شبكات بتدفقات متعددة السلع باستخدام طريقة توليد الأعمدة

## (دراسة حالة شركة الخدمات العامة والأشغال العمومية HMD )


**من اعداد الأستاذ الباحث: رفافة عبد العزيز**


أعضاء لجنة المناقشة

| | | | |
|---|---|---|---|
| أ.د. سعيداني مُحَّد | أستاذ التعليم العالي | جامعة تلمسان | رئيسا |
| أ.د. صوار يوسف | أستاذ التعليم العالي | جامعة سعيدة | مشرفا |
| أ.د. طاوش قندوسي | أستاذ التعليم العالي | جامعة سعيدة | ممتحنا |
| د. بومدين مُحَّد الأمين | أستاذ محاضر أ | جامعة سعيدة | ممتحنا |
| د. خطيب سيدي مُحَّد بومدين | أستاذ محاضر أ | جامعة تلمسان | ممتحنا |
| د. حليمي وهيبة | أستاذ ة محاضرة أ | جامعة تلمسان | ممتحنا |

السنة الجامعية: 2021 - 2022

جامعة أبي بكر بلقايد –تلمسان-

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

أطروحة مقدمة لاستكمال متطلبات شهادة الدكتوراه علوم في العلوم الاقتصادية

تخصص: الطرق الكمية

**بعنوان:**

# دراسة نموذج شبكات بتدفقات متعددة السلع باستخدام طريقة توليد الأعمدة

## (دراسة حالة شركة الخدمات العامة والأشغال العمومية HMD )

**من اعداد الأستاذ الباحث: رفافة عبد العزيز**

أعضاء لجنة المناقشة

| | | | |
|---|---|---|---|
| د. ................ | .................. | ............. | رئيسا |
| أ.د. صـوار يوسـف | أستاذ التعليم العالي | جامعة سعيـدة | مشرفـا |
| د. ................ | .................. | ............. | ممتحنا |
| د. ................ | .................. | ............. | ممتحنا |
| د. ................ | .................. | ............. | ممتحنا |
| د. ................ | .................. | ............. | ممتحنا |

السنة الجامعية: 2021 - 2022

بسم الله الرحمن الرحيم

# الإهـــداء

أهدي هذا العمل إلى من قال فيهما الله عز وجل "وَاخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ مِنَ الرَّحْمَةِ وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا " الإسراء (24)

والداي أقول لهم: أنتم وهبتموني الحياة والأمل والنشأة على شغف الاطلاع والمعرفة

اهدي تخرجي إلى من تمنوا لي النجاح والتوفيق اخي وأخواتي الأعزاء، إلى من لهم الفضل الكبير في نجاحي وسندي في الحياة، زوجتي الغالية، ابنتي ايمان وابني جواد نبضي وسبب تمسكي في هذه الدنيا، إلى كل من ساندني وإلى كل من تمنى لي الخير والنجاح، عائلتي وأصدقائي وزملائي، إليهم جميعاً أهدي تخرجي راجياً من الله الإطالة بأعمارهم وأن يبارك فيهم ويحفظهم ربّي بعينه التي لا تنام.

# شكر وتقدير

أول شكر لله سبحانه وتعالى على ما أسبغه على من نعم، وعلى تيسيره لي السبل، فله الحمد والشكر في كل وقت وفي كل حين.

أشكر على وجه الخصوص استاذي الفاضل الدكتور صوار يوسف على مساندتي وإرشادي بالنصح والتصحيح وعلى اختيار العنوان وإنجاز الموضوع،

الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة على تفضلهم بقبول مناقشة واثراء هذه الأطروحة، جزاهم الله خيرا.

يسرني أن أوجه شكري لكل من نصحني أو أرشدني وأكثره أخواتي حفظهم الله، وكل من وجهني أو ساهم معي في إعداد هذا البحث بإيصالي للمراجع والمصادر المطلوبة في أي مرحلة من مراحله،

وأوجه شكري الخاص إلى زوجتي الكريمة لمساعدتها لي في اعداد هذه الأطروحة.

.

# فهرس المحتويات

## الإطار النظري والدراسات السابقة

## الفصل الأول: الإطار النظري

## الفصل الثاني: الدراسات السابقة

**الدراسة الميدانية**

**الفصل الثالث: الطريقة والاجراءات**

**الفصل الرابع: تطبيق الطريقة وتحليل النتائج**



**الخاتمة العامة**

# قائمة الأشكال

| رقم الشكل | عنوان الشكل | الصفحة |
|---|---|---|

# قائمة الجداول

# المقدمة العامة

- مقدمة
- مشكلة الدراسة
- أهداف الدراسة
- أهمية الدراسة
- مرجعية الدراسة
- منهج الدراسة والأدوات المستخدمة
- فرضيات الدراسة
- حدود الدراسة
- صعوبات الدراسة
- محتوى الدراسة

**المقدمة العامة**

ان البرمجة الخطية هي عبارة عن اسلوب رياضي يستخدم في ايجاد الحل الامثل لكيفية استخدام المشروع لموارده، وتشير كلمة خطية الى ان العلاقات بين المتغيرات هي علاقة خطية أما كلمة برمجة فتشير الى التقنية الرياضية المستخدمة في ايجاد الحل. حيث تستخدم في حل المشاكل المتعلقة بتخصيص الموارد النادرة من الاستخدامات البديلة المتاحة بأفضل تخصيص بهدف تعظيم دالة منفعة لمتخذ القرار وذلك بتخصيص او تدنية الموارد المتاحة بصورة تحقق اقصى ارباح ممكنة إذا كان الهدف تعظيم الربح، مع أن اغلب مشاكل النقل يتم صياغتها بواسطة نموذج تقليل التكاليف. حيث يتم الاعتماد عليها أساسيا في حل مسائل الشبكات.

ظهرت نظرية الشبكات في البداية سنة 1735 نتيجة فضول رياضي طرح من العالم Euler الذي حاول في إحدى جولاته عبور جسور مدينة koeinsberg السبعة (تسمي حاليا Kaginingrad ) مرة واحدة فقط انطلاقا من نقطة الأصل ثم العودة إليها. ثم بعد ذلك قام العالم الانجليزي Sylvester بعدة أبحاث في المجال سنة 1822 إضافة إلى العالم D.Kning سنة 1936 الذي قام بنشر أول مجموعة عن نظرية الشبكات وأساليب تطبيقاتها في مختلف الميادين إلى غاية سنة 1958 حيث قام Claude berge بنشر " نظرية البيانات وخوارزميتها وتطبيقاتها في الاقتصاد " وقد تم تطوير هذه العملية خاصة بعد سنة 1971 خصوصا في بعض دول أوروبا والولايات المتحدة الأمريكية.

تعتبر نظرية الشبكات إحدى الوسائل المهمة والفعالة في اتخاذ القرار الأمثل من خلال نمذجة وحل مختلف المشاكل التي تواجهها بحوث العمليات فقد أصبحت تستخدم في حل وتمثيل العديد من المشاكل الواقعية خاصة في مجالات التسيير الأمثل للموارد كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز والكهرباء... إضافة إلى أنها تسعى إلى معالجة مشاكل النقل وبعض الحالات التي لا يمكن اللجوء فيها إلى استعمال البرمجة الخطية في شبكات النقل.

**مشكلة الدراسة:**

كيف يمكن صياغة نموذج لشبكات النقل بتدفقات متعددة السلع وتحديد التدفقات لإيجاد الكميات المثلى المنقولة وبأقل تكلفة اجمالية ممكنه؟ مما يسمح لنا بطرح الأسئلة الفرعية التالية:

هل يمكن لطرق نماذج النقل التقليدية من حل مشكلة التدفقات متعددة السلع.

هل يمكن حل مشكلة التدفقات متعددة السلع باستخدام طريقة السمبلكس المراجعة.

هل يجب استعمال طريقة توليد الأعمدة للوصول الى الحل الأمثل بأقل تكاليف.

**أهداف الدراسة**

تهدف الدراسة الى البحث والتعمق في مبادئ نظرية الشبكات بصفة عامة ونخص بالذكر منها الشبكات بتدفقات متعددة السلع. التي تمثل أرض خصبة لجميع الباحثين في المجال، نظرا لتنوع التطبيقات في كل الميادين. وخاصة تعتبر الدراسة حديثة باللغة العربية مما يوفر للباحثين بها طرق ومصطلحات جديدة. تمكنهم من تطويرها والتقدم في دراسات ونماذج أهم.

**أهمية الدراسة**

تعتبر هذه الدراسة مهمة جدا نظرا لأهمية هذه المسألة في التطبيقات العملية. باعتبار جميع الشبكات الحقيقية معقدة وصعبة الصياغة. حيث نجد هذه الأنواع من المشكلات في أغلب ان لم نقل جميع المجالات العملية. إضافة الى الاهتمام المفروض على الشركات الكبرى المتخصصة في المجال في البحث عن حلول مثلى لتسيير أحسن واتخاذ قرارات أفضل من أجل تدنية تكاليفها أو حتى تعظيم أرباحها. وتحسيس مسؤولي المؤسسات بأهمية تطبيق الأساليب والنماذج الرياضية في ترشيد القرار ات.

**مرجعية الدراسة**

اعتمدنا في إعداد الإطار النظري للدراسة على الكثير من الكتب والمراجع المتنوعة باللغتين الفرنسية وخاصة الإنجليزية. التي اعتمدت تقريبا نفس مجال البحث في دراسة الشبكات والتدفقات المتعددة. بالإضافة الى المقالات والتقارير، والأبحاث والدراسات السابقة التي تناولت موضوع الدراسة. إضافة الى تصفح مواقع الانترنت المختلفة. وذلك بهدف معرفة آخر التحديثات الحاصلة على الأبحاث التطبيقية.

**منهج الدراسة والأدوات المستخدمة:**

إن الطابع الكمي لإشكالية البحث يستلزم الاعتماد على المنهج المتكامل في البحوث التطبيقية للإجابة عليها واختبار مدى صحة الفرضية التي تقوم عليها الدراسة، حيث اعتمدنا على المنهج الوصفي التحليلي في الجانب النظري للموضوع وهذا بالاعتماد على قائمة كبيرة من المراجع ذات أهمية بالغة. في مجال نظرية الشبكات وطرق حل مشاكل التدفقات متعددة السلع والتي لها علاقة وطيدة بموضوع الدراسة. أما فيما يتعلق بالجانب التطبيقي من الدراسة سيتم الاعتماد على منهج دراسة الحالة في إحدى الشركات الجزائرية، وباستخدام منهج التحليل الكمي الرياضي نقوم بعرض أهم الصيغ الرياضية لتقنيات الحل لا سيما توليد الأعمدة والمساعدة على صياغة وحل النماذج المتعلقة بتسيير عملية نقل وتوزيع السلع بالشركة وذلك بالاستعانة ببرنامج الحاسوب GAMS. ولتطبيق الدراسة والالمام بمعظم جوانب البحث قمنا بتحديد المشكلة وجمع البيانات والمعلومات المتعلقة. خاصة تحديد وصياغة الشبكة والمسارات المتعلقة بها. من حيث مجموع التدفقات بالنسبة لكل مسار. وتحديد تكلفة النقل بالنسبة لكل سلعة بدقة. حيث تم الاعتماد على مختلف طرق الأمثلية في بحوث العمليات لحل النموذج متعدد التدفقات والسلع. الطرق التي تمثلت في السمبلكس المراجعة وطريقة توليد الأعمدة.

**فرضيات الدراسة**

طرق نماذج النقل التقليدية تعجز عن حل مشكلة التدفقات متعددة السلع.

مشكلة التدفقات متعددة السلع يمكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس المراجعة.

يجب استعمال طريقة توليد الأعمدة للوصول الى الحل الأمثل بأقل تكاليف.

**حدود الدراسة**

الحدود المكانية: شملت الدراسة نموذج لشبكة طرق وطنية مختلفة تربط بين عدة ولايات. من مصادر السلع الى أماكن الوصول.

الحدود الزمانية: تم جمع بيانات الدراسة المتعلقة بالشبكة وتحديد مختلف التكاليف بين فترة 2018 و2020

**صعوبات الدراسة**

- فترة جمع البيانات والمعلومات المتعلقة بالمسارات وتكاليف السلع المتعلقة بالشبكة.
- عدم توفر المراجع تماما باللغة العربية في مجال البحث.
- صعوبة ترجمة أغلب المصطلحات العلمية من الأبحاث الأجنبية الى اللغة العربية باعتبارها غير مستعملة تماما.
- طبيعة الموضوع في حد ذاته حيث يضم الكثير من المفاهيم المتداخلة والحديثة خاصة نظرية الشبكات، ومختلف نماذج التدفقات وصياغاتها المتعددة، بالإضافة إلى طرق الحل المستخدمة.
- صعوبة الحصول وتوفر البرمجية الحاسوبية المناسبة لحل نموذج الدراسة واعداد الخوارزمية المطلوبة.

**محتوى الدراسة**

قمنا بتقسيم الدراسة الى قسمين. القسم الأول الذي يعالج الجانب النظري والذي ينقسم بدوره الى فصلين. الفصل الأول: الذي يهتم بأهم المبادئ والأسس المتعلقة بنظرية الشبكات. ومشاكل التدفقات مع طرق حلها من الناحية النظرية. والفصل الثاني: الذي يتطرق الى الدراسات السابقة المنجزة بالغات الأجنبية. أما القسم الثاني من الدراسة يتكون من فصلين أيضا. الفصل الثالث: الذي يناقش الطريقة العملية والإجراءات التطبيقية التي تهدف الى حل الإشكالية المطروحة. بينما الفصل الرابع: يهتم بتطبيق وتحليل النموذج ومناقشتها.

# الدراسة

# النظرية

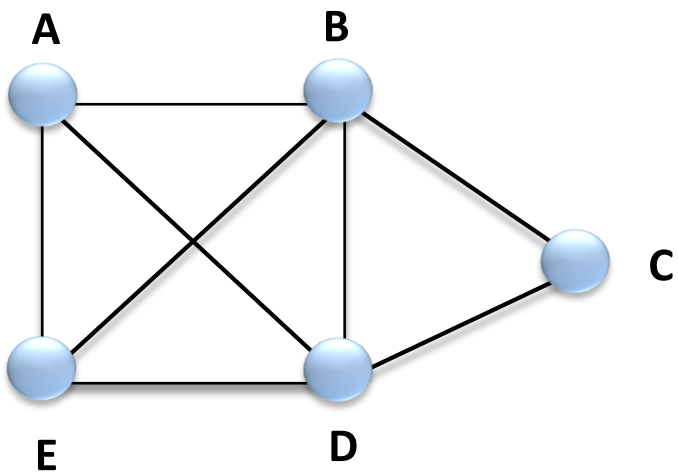
# الفصل الأول
# الإطار النظري

- ❖ مفاهيم نظرية حول الرسوم Graph
- ❖ الشبكات ومشاكل التدفق الأحادي:
- ❖ تقنيات الحل في نظرية الشبكات
- ❖ مشاكل التدفقات المتعددة في الشبكات
- ❖ تدفقات السلع المتعددة
- ❖ تقنيات الحل لنماذج التدفقات متعددة السلع

## تمهيد:

يتم التعرف في هذا الفصل على أهم المفاهيم والتعاريف الأساسية المستخدمة في نظرية الرسوم مع بعض التطبيقات في تحليل الشبكات. فنلاحظ **الشكل** (**1**) أدناه الذي يطلق عليه اسم "رسم graph ". يتكون من مجموعة نقاط ترتبط مع بعضها بعلاقات معينة يُعبر عنها بخطوط أو خطوط موجهة تصل بين هذه الأزواج. وبالمثل فإنه يمكن أن نمثل الكثير من الأنظمة أو الحالات التي تقع عمليا بمجموعة من النقاط ومجموعة من الخطوط الموجهة أو غير الموجهة التي تعبر عن علاقات معينة تربط بين بعض أو كل أزواج هذه المجموعة.

**الشكل 1: مثال توضيحي لرسم بياني غير موجه بسيط**




**المصدر: من إعداد الباحث**

وقد نتج عن ذلك تطور ما يُسمى "نظرية الرسوم Graph theory" وهذه النظرية هي في الحقيقة ليست إلا نظرية العلاقات التي غالبا ما تمثل فيها العلاقات المتناظرة برسوم غير موجهة والعلاقات غير المتناظرة برسوم موجهة. ونظرا لاتساع دائرة المشاكل التي تقع تحت هذا التعريف لنظرية الرسوم فإن هذه النظرية لعبت وتلعب دورا كبيرا في معالجة الكثير من المشاكل في بحوث العمليات. ومع ذلك فإن الرسوم أو الرسوم الموجهة لا تكفي أحيانا للتعبير عن حالة معينة إذ لابد أن تقترن قيما عددية بمجموعة النقاط أو مجموعة الخطوط التي يتكون منها الرسم أو الرسم الموجه للتعبير عن تكاليف، مسافات، احتمالات حوادث، ...: ويطلق على هذا النوع الأخير من الرسوم اسم "الشبكات Networks".

## 1.1 مفاهيم نظرية حول الرسوم Graph

### 1.1.1 الرسم:

الرسم هو مجموعة غير خالية ومنتهية من النقاط بينها خطوط غير موجهة.

**الشكل** (**1**) عبارة عن رسم مجموعة نقاطه W= ( A , B , C , D , E) ومجموعة خطوطه

$N = \{\{A,B\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,E\},\{B,D\},\{B,C\},\{D,C\}\}$.

نطلق على نقاط رسم Yاسم "رؤوس vertices" أو "عقد nodes"كما نطلق على خطوطه اسم "أضلاع edges". فإن كانت W هي مجموعة رؤوس الرسم Y وN مجموعة أضلاعة فنكتب ذلك اختصارا:

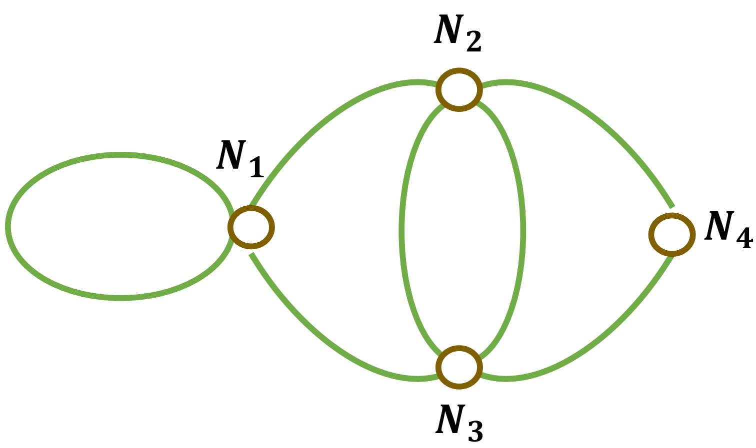
$$Y = (W(Y), N(Y))$$

أو $Y = (W,N)$ أو $Y(W,N)$.

### 2.1.1 الرسم الموجه:

الرسم الموجه هو مجموعة غير خالية ومنتهية من العناصر يطلق عليها اسم الرؤوس ومجموعة من الخطوط الموجهة التي تربط بينها ويطلق عليه اسم أقواس أو أضلاع موجهة.

**الشكل 2: رسم بياني موجه غير بسيط**




**المصدر: من إعداد الباحث**

يمكن لرسم (رسم موجه) أن يحوي أضلاع (أقواس) تربط رؤوسا بنفسها ويطلق على مثل هذه الأضلاع اسم "حلقة loop". فمثلا يحوي الرسم المعطى **بالشكل** (**2**) على حلقة عند الرأس $N_1$ (لو كانت الرؤوس $N_1, N_2, N_3, N_4$ هي أمكنة معينة فيمكننا مثلا أن ننظر إلى الحلقة عند $N_1$ على أنه موقف سيارات في $N_1$ يمكن الدوران منه و العودة إلى $N_1$). (البلخى، 1998)

كذلك يمكن لرسم (أو رسم موجه) أن يحتوي على عدة أضلاع (أقواس) متوازية أو متعددة. فمثلا يحوي الرسم المعطى **بالشكل** (**2**) ضلعين متوازيين يربطان الرأسين $N_2$ و $N_3$.

### 3.1.1 الرسم البسيط:

يقال عن رسم (أو رسم موجه) أنه "بسيط Simple" إذا لم يحوي على حلقات ولا على أضلاع (أقواس) متوازية. فمثلا **الشكل** (**1**) يمثل رسما بسيطا بينما نجد أن الرسم الموجه في **الشكل** (**2**) غير بسيط.

### 4.1.1 الرأسان المتجاوران:

نقول عن رأسين RوL من رسم أنهما "متجاوران adjacent" إذا وجد ضلع $F = \{R, L\}$ من الرسم يربط بينهما ونقول عندها أن الضلع F يرتكز (incident) على كل من RوL. كذلك نقول عن ضلعين مختلفين $F_1$ و$F_2$ من رسم أنهما متجاوران إذا وجد بينهما رأس ارتكاز مشترك. (البلخى، 1998)

### 5.1.1 بداية المسار ونهايته:

إذا كان (L,R) هو مسار في رسم موجه M قلنا إن الرأس L مجاور للرأس R ونسمي عندها L بداية المسار (L,R) وR نهايته. كما ونقول إن المسار (L,R) يرتكز من L إلى R. فإذا كان المسار (R,L) من أقواس M قلنا أن R مجاور لـL وأطلقنا على R بداية المسار (R,L) و على L نهايته وقلنا أن المسار (R,L) يرتكز من R إلى L. و نقول أن L و R غير متجاورتين إذا لم تكن أي منهما مجاورة للأخرى.

### 6.1.1 مصفوفة التجاور Adjacency Matrix

يمكن أيضًا استخدام أدوات الجبر الخطي الكلاسيكية لترميز الرسوم البيانية. الفكرة الأولى هي اعتبار كل مسار كحلقة وصل بين رأسين.

بالنظر إلى الرسم البياني $G = (X, A)$ برؤوس n. مصفوفة تقارب G تساوي المصفوفة $U = (u_{ij})$ بدرجة n × n على هذا النحو (Maquin، 2008)

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- إذا كان $(i, j) \in A$ (ما يعني أن $(i, j)$)
- عدا ذلك

بشكل مبسط يتم طرح السؤال التالي: هل هناك تدفق غير معدوم في الاتجاه (i,j)؟

إذا كان الجواب نعم فقيمة الرمز في المصفوفة تكون 1. عكس ذلك تكون 0.

مثل هذه المصفوفة، التي تحتوي فقط على "0" و "1" تسمى بشكل عام المصفوفة المنطقية.

يحتوي أي رسم بياني موجه على مصفوفة تجاور، بينما يحتوي الرسم البياني غير الموجه على مصفوفة تجاور متماثل. ينتج عن عدم وجود حلقة قطري صفر. مصفوفة تجاور الرسم البياني في **الشكل 4** هي كما يلي:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**مصفوفة التجاور للرسم الموضح في الشكل 4**

يعطي هذا الشكل من التمثيل مصفوفات متفرقة جدًا (تتضمن العديد من الأصفار). ومع ذلك، فإن البحث عن المسارات أو السلاسل يتم بسهولة باستخدام مثل هذا التمثيل. بالإضافة إلى أنه، تحتوي المصفوفة المجاورة على بعض الخصائص التي يمكن استغلالها. لننظر إلى الرسم البياني G والمصفوفة المجاورة المرتبطة به U:

- مجموع عناصر خط $i^{eme}$ لـ U يساوي الدرجة الخارجة $d_s$ $(x_i)$ للرأس $x_i$ لـ G.
- مجموع عناصر خط $j^{eme}$ لـ U يساوي الدرجة الداخلة $d_e$ $(x_j)$ إلى الرأس $x_j$ لـ G.
- U متماثل إذا كان الرسم البياني G متماثلًا فقط.

### 7.1.1 مصفوفة الارتكاز Incidence Matrix

الفكرة الثانية التي تسمح بتمثيل مصفوفة للرسم البياني تستغل علاقة الوقوع بين الأضلاع والرؤوس. (Maquin، 2008)

ليكن رسمًا بيانيًا موجهًا بدون حلقة $G = (X, A)$ يشتمل على رؤوس n $x_i, \dots, x_n$ و الأضلاع M $a_1, \dots, a_m$. نسمي مصفوفة الحدوث (عند الأضلاع) لـ G المصفوفة $M = (m_{ij})$ من البعد n × m بحيث:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

- إذا كانت $x_i$ هي النهاية الأولية لـ $a_j$
- إذا كانت $x_i$ هي النهاية الطرفية لـ $a_j$
- إذا لم يكن $x_i$ نهاية لـ $a_j$

بشكل مبسط: إذا كان الرأس xi هو بداية الضلع الموجه aj فقيمة الرمز في المصفوفة تكون 1. وإذا كان يمثل نهاية الضلع تكون ‎-1. عكس ذلك تكون 0.

بالنسبة لرسم بياني غير موجه بدون حلقة، يتم تحديد مصفوفة الحدوث (عند الأضلاع) من خلال:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- إذا كانت $x_i$ هي نقطة نهاية $a_j$
- عدا ذلك

تمت كتابة مصفوفة حدوث الرسم البياني في **الشكل 4** كما يلي:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**مصفوفة الارتكاز للرسم الموضح في الشكل 4**

### 8.1.1 مصفوفة التجاور لرسم موجه:

مصفوفة التجاور (adjacency matrix) لرسم Z: هي مصفوفة عناصرها $a_{it}$ معرفة كما يلي:

$$a_{it} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- إذا كان الضلع (i,t) من أضلاعه Z:
- عدا ذلك :

مصفوفة التجاور لرسم موجه M: هي مصفوفة عناصرها $G_{it}$ معرَّفة كما يلي:

$$G_{it} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان المسار (i,t) من أقواس M:} \\ 0 & \text{عدا ذلك:} \end{cases}$$

### 9.1.1 مصفوفة الارتكاز لرسم موجه:

مصفوفة الارتكاز (incidence matrix): هي مصفوفة عناصرها $B_{it}$ معرفة كما يلي: (البلخي، 1998)

$$B_{it} = \begin{cases} 1 & \text{إذا ارتكز الضلع t على الرأس} \\ 0 & \text{عذا ذلك} \end{cases}$$

مصفوفة الارتكاز لرسم موجه هي مصفوفة تعرف عناصرها $B_{it}$ كما يلي:

$$B_{it} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت نهاية المسار it هي الرأس} \\ -1 & \text{إذا كانت بداية المسار it هي الرأس} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

**درجة الرأس في الرسم:**

درجة (degree) الرأس N في رسم هي عدد الأضلاع المرتكزة على هذا الرأس وسنرمز لها بالرمز $\delta(\mathrm{N})$ .

وبموجب هذا التعريف فإن كل حلقة في رأس من رسم تساهم بمقدار 2 في درجة هذا الرأس لأنها ترتكز عليه مرتين. ففي الرسم (2) مثلا نجد أنَّ

$$\delta(N_1) = 4;\ \delta(\mathrm{N}_2) = 4,\ \delta(N_3) = 4,\ \delta(N_4) = 2$$

ومن السهولة أن نلاحظ أنه لو جمعنا درجات جميع الرؤوس في الرسم فإن النتيجة تكون عدد زوجي. وهذا العدد هو بالضبط ضعفي عدد الأضلاع في ذلك الرسم لأن كل ضلع يساهم بمقدار 2 في مجموع الدرجات. (Jungnickel، 2013)

### 10.1.1 الدرجة الخارجة والدرجة الداخلة لرسم موجه:

أما بالنسبة للرسوم الموجهة فإننا نعرف ما يسمى الدرجة الخارجة (out-degree)؛ والدرجة الداخلية (in-degree) لرأس موجه، ونرمز لهما بـِ $\overleftarrow{M(i)}$ و $\overrightarrow{M(i)}$ على الترتيب، كما يلي:

الدرجة الخارجة لِ i: هي $\overleftarrow{M(i)}$ = عدد الأقواس التي تتجه لخارج الرأس i.

الدرجة الداخلة لِ i: هي $\overrightarrow{M(i)}$ = عدد الأقواس التي تتجه نحو i.

و تعرف درجة الرأس i– و التي سنرمز لها بـِ $-M(i)$ بالعلاقة

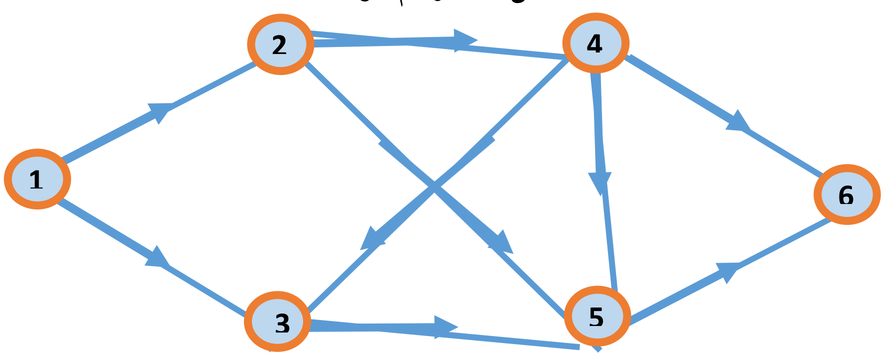
$$M(i) = \overleftarrow{M(i)} + \overrightarrow{M(i)}$$

### 11.1.1 تعريف المنبع والمصبّ:

في رسم موجه نطلق اسم (منبع source) على رأس درجته الداخلة تساوي الصفر ونطلق اسم (مصب sink) على رأس درجته الخارجة تساوي الصفر. (البلخى، 1998)

فمثلا في الرسم الموجه (**3**) نجد أنَّ الرأس 1 هو المنبع لأن $\overrightarrow{M(1)} = 0$ بينما نجد انّ الرأس 6 هو المصب لأنَّ هي $\overleftarrow{M(6)} = 0$.

**الشكل 3: رسم موجه**




**المصدر: من إعداد الباحث**

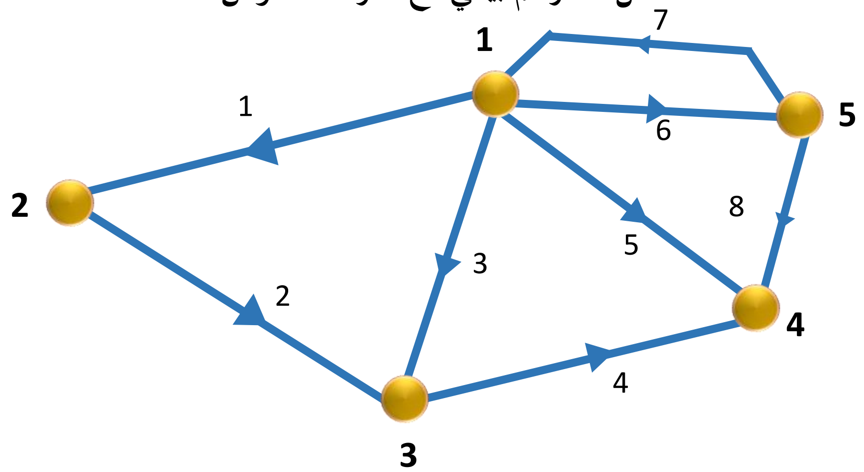
### 12.1.1 طرق تمثيل رسم بياني:

كما تمَّ الذِّكر سابقًا، يرجع ظهور نظرية الرسم البياني أساسًا إلى ظهور الآلات الحاسبة القوية. لذلك من المشروع أن يتم الاهتمام بكيفية تمثيل الرسوم البيانية في الكمبيوتر. يمكن النظر في العديد من أنماط التمثيل اعتمادًا على طبيعة المعالجة التي يرغب المرء في تطبيقها على الرسم البياني المدروس.

### 13.1.1 القوائم المتتالية:

يمكن تمثيل الرسم البياني باستخدام القاموس؛ هذا جدول إدخال فردي حيث يتوافق كل صف مع رأس ويتضمن قائمة المتتاليات أو السوابق لذلك الرأس. ليكن الرسم البياني في **الشكل 4**.

**الشكل 4 رسم بياني مع قدرات الأقواس**




**المصدر: من إعداد الباحث**

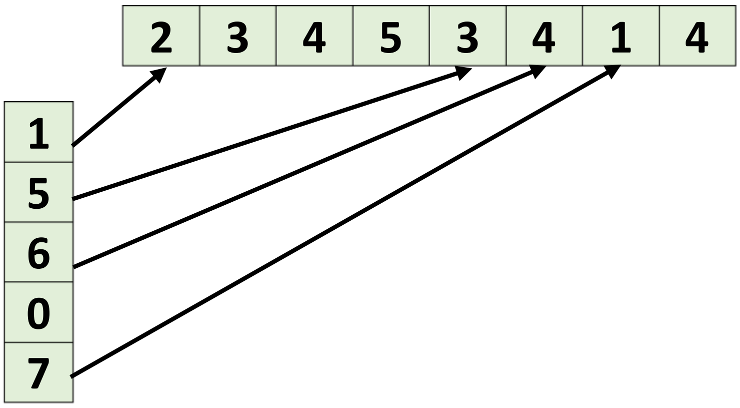
يمكن تمثيل ذلك بالجدولين التاليين: (Balakrishnan R، 2012)

| | |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1,2 |
| 4 | 1,3,5 |
| 5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | 2,3,4,5 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | – |
| 5 | 1,4 |

في حالة جدول مُعطى، فإن عدد القوائم المتتالية أو السابقة ليس هو نفسه لكل رأس، فمن الأفضل تمثيل المصفوفة في شكل جدولين: الأول يشتمل على العديد من العناصر مثل الرؤوس، تشير هذه العناصر، في جدول ثان، إلى بدايات القوائم المتتالية (أو السابقة). يوضح **الشكل 5** هذا التنظيم:

الشكل 5: **ترميز قائمة المتتاليات**



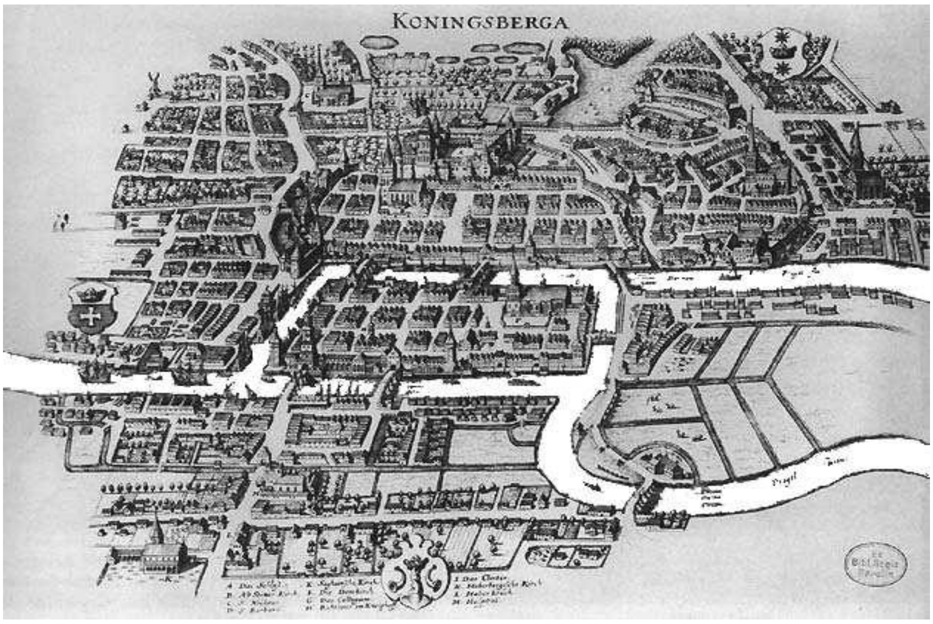

**المصدر**: (Lopez، 2008)

هذا التمثيل اضافي في حالة الرسوم البيانية غير الموجهة؛ ومع ذلك، فهو مناسب تمامًا لاجتياز الرسم البياني. حجم هذا التمثيل ضئيل لأنه يتوافق تمامًا مع كمية المعلومات التي يوفرها الرسم البياني.

### 2.1 الشبكات ومشاكل التدفق الأحادي:

لتحليل شبكات النقل جانب كبير من الأهمية في التقدم الاقتصادي حيث يعبر **فيتز جيرالد** عن ذلك بقوله" إن التباين في خصائص شبكات النقل هو انعكاس للمظاهر الاقتصادية والاجتماعية". وكان أول كتاب حول نظرية الشبكات من طرف العالم الرياضي المجري د.كوينيج سنة 1936. ولقد ظهرت بعض المسائل الهامة في نظرية الشبكات منها أول دراسة تعرض جسور كونيغسبرغ (**Königsberg**) السبعة فهي مسألة تاريخية. في عام 1736 أدى برهان نفي وجود حل للمسألة من قبل **Leonhard Euler** إلى إنشاء علم نظرية الشبكات. كانت المسألة تنص على إيجاد مسار ضمن المدينة بحيث يتم العبور على كل جسر مرة واحدة فقط. لم يكن بالإمكان الوصول إلى الجسر بأي طريقة أخرى غير الجسور وكان يجب عبور الجسر كاملاً في كل مرة. أتضح لأويلر أن هذه المسألة بدون حل. وضح أويلر أنه ليس من المهم مكان وجود الجسور بل ترتيب علاقاتها الارتباطية مع بعضها البعض، مما سهل عليه صياغة المسألة بشكل مجرد كانت أساس نظرية الشبكات.

**الشكل6 : جسور Königsberg السبعة**




**المصدر**: (Monmege، 2020)

وفي خلال الحرب العالمية الثانية أدى ظهور الكثير من الدراسات والأبحاث في المجال العسكري، الى تطور علم بحوث العمليات وخاصة نظرية الشبكات، حيث تبينت الضرورة الملحة لاستخدامها، مما أدى الى تبني هذا العلم في المجال الاقتصادي.

### 1.2.1 مفاهيم حول الشبكات:

- ✓ يسمى الرسم البياني المتصل بقوة، بدون حلقة وله أكثر من رأس واحد، بالشبكة.
- ✓ نسمي بِعقدة الشبكة رأسًا بهِ أكثر من مسارين. الرؤوس الأخرى تسمى العقد العكسية.
- ✓ نسمي بالفرع أي مسار يكون رأساه الأول والأخير فقط عقدتين.

في الرسم البياني الموجه G، التدفق هو تخصيص قيمة حقيقية لكل مسار من G، يمثل كمية منقولة على هذا المسار، بحيث يكون مجموع التدفقات الواردة عند كل رأس مساويًا لمجموع التدفقات الخارجة (قانون KIRCHHOFF: حفظ التدفقات عند كل قمة).

من بين المشاكل الأكثر كلاسيكية، يمكننا الاستشهاد بإيجاد أقصى تدفق. نبحث عن سعة قصوى على كل مسار والتي ستكون الحد الأعلى للتدفق المسموح به على هذا المسار. تتمثل مشكلة التدفق الأقصى في

تحديد التدفق الذي تكون قيمته القصوى في مكان معين. بالإضافة إلى ذلك، يمكننا أن نعتمد تكلفة نقل لوحدة تدفق واحدة على كل مسار ونجد أقصى تدفق بأقل تكلفة.(Minoux, Gondran 2009)

**تعريف**: نسمي شبكة النقل رسمًا بيانيًا موجهًا غير متماثل بقيمة $G = (X, A, C)$ ، بدون حلقة وفيها:

- قمة الرأس $x_1$ بدون تدفق داخلي اليها (أي $\Gamma^{-1}(x_1) = \theta$) تسمى دخول أو مصدر (منبع) للشبكة،
- قمة الرأس $x_n$ بدون تدفق خارجي منها (أي $\Gamma(x_n) = \theta$) تسمى خروج أو مصب للشبكة،

وهذا يعني أن مسارًا واحدًا على الأقل يوحد $x_1$ إلى $x_n$ في G. (Ravindra K. Ahuja, ، ,Thomas L. Magnanti ،، و James B. Or، 1993)

يُفترض أن دالة الترجيح C موجبة ونطلق على سعة المسار a بالرقم C(a).

إذا أشرنا بواسطة $A_x^-$ إلى مجموعة الأقواس الخارجة من الرأس x و $A_x^+$ مجموعة الأقواس الواردة من نفس الرأس x ، فإننا نقول أن الدالة $\varphi(a)$ محددة في A وبقيم حقيقية تمثل تدفق لشبكة النقل إذا:

- تكون موجبة: $\varphi(a) \geq 0, \forall_a \in A$،
- يتحقق من قانون Kirchhoff للعقد:

$$\sum_{a\in A_x^-} \varphi(a) - \sum_{a\in A_x^+} \varphi(a) = 0, \qquad \forall_x \neq x_1 \text{ و } x \neq x_n$$

- لا تتجاوز سعة الأقواس: $\varphi(a) \leq C(a), \forall_a \in A$.

إذاكانت x ليست $x_1$ ولا $x_n$، يجب أن تكون الكمية الداخلة في x مساوية للكمية الخارجة منها التي نشير إليها بـ $\varphi_x$:

$$\varphi_x = \sum_{a\in A_x^-} \varphi(a) = \sum_{a\in A_x^+} \varphi(a)$$

إذاكان $\varphi$تدفقًا على شبكة النقل G، فعندئذ يكون لدينا $\varphi_{x_1} = \varphi_{x_n}$؛ هذه الكمية تسمى قيمة التدفق.

السؤال الرئيسي بالنسبة لشبكة نقل معينة هو تحديد تدفق القيمة القصوى بالإضافة إلى التدفقات على طول كل مسار. غالبًا ما يحدث أيضًا أنه يتعين علينا التفكير في الشبكات ذات القدرات الموجودة ليس فقط على الحواف ولكن أيضًا على الرؤوس. هذا هو الحال بشكل خاص بالنسبة لشبكات الهاتف التي يرجع حد السعة فيها إلى الخطوط بقدر ما يرجع إلى المراكز. يمكننا بسهولة تحويل هذه المشكلة إلى المشكلة السابقة؛ يكفي تقسيم كل رأس إلى مدخل ومخرج مرتبطين بمسار له السعة التي تم تخصيصها مسبقًا للرأس.

### 2.2.1 التدفق الكامل

بالنسبة للتدفق $\varphi$ في شبكة النقل $G = (X, A, C)$، نقول إن المسار مشبع إذا كان لدينا $\varphi(a) = C(a)$.(Fournier, 2013)

يقال إن التدفق مكتمل إذا كان أي مسار ينتقل من $x_1$ إلى $x_n$ يحتوي على مسار مشبع واحد على الأقل.

إذا أخذنا في الاعتبار الرسم البياني الجزئي الذي تم إنشاؤه بواسطة الأقواس غير المشبعة بالتدفق وإذا لم يكتمل التدفق، فهناك بالضرورة مسار $\mu$ ينتقل من الإدخال إلى الإخراج. يمكننا بعد ذلك تحديد تدفق جديد للشبكة عن طريق زيادة تدفق كل من الأقواس التي تشكل المسار $\mu$ بمقدار 1؛ ثم تزداد قيمة التدفق بمقدار 1. بالتالي يمكننا زيادة قيمة التدفق غير الكامل تدريجيًا حتى يكتمل. من خلال مراعاة الاختلافات بين القدرات وقيمة التدفق على أقواس $\mu$، يمكننا أن نعرف مسبقًا الزيادة المحتملة في التدفق. ومع ذلك، فإن التدفق الكامل الذي يتم الحصول عليه بهذه الطريقة ليس هو الحد الأقصى للتدفق بشكلٍ عام.

### 3.2.1 تحسين التدفق:

ليكن $\varphi$ التدفق الكامل. سنستخدم إجراءً تكراريًا لتحديد جميع رؤوس الرسم البياني وتمييزها حيث يمكن تمرير وحدة تدفق إضافية.

نحدد عملية وضع العلامات على رؤوس معينة في الرسم البياني. في $x_1$ ، نضع علامة $\boxed{+}$. لنفترض أن $x$ هو قمة رأس مميزة بالفعل:(Balakrishnan & Ranganathan, 2012)

- نقوم بتسمية $\boxed{+\,x}$ أي تدفق غير محدد y لـ x لا يكون التدفق عنده عند الحد الأقصى $\left((x,y)\,\epsilon\, A\right.$ و $\left.\varphi(x,y) < C(x,y)\right)$.
- –نقوم بتسمية $\boxed{-\,x}$ أي تدفق غير محدد y لـ x لا يكون التدفق له صفراً $\left((x,y)\,\epsilon\, A\right.$ و $\left.\varphi(y,x) > 0\right)$.

يتمثل دور الملصق في إعطاء اسم داخل أو خارج لقِمة معينة، مما يشير إلى ما إذا كان يمكن زيادة التدفق في اتجاه معين (التسمية $\boxed{+\,x}$) أو إنقاصه إذا كان في الاتجاه المعاكس (التسمية $\boxed{-x}$).

إذا وصلنا إلى تحديد الرأس $x_n$ بهذا الإجراء، فهناك سلسلة μ من $x_1$ إلى $x_n$ يتم تمييز رؤوسها بفهرس الرأس السابق باستثناء الإشارة. لاحظ أنه لا يتعين علينا تحديد جميع القمم (جميع المدخلات أو المخرجات لرأس معين), الهدف ببساطة هو بناء سلسلة محددة من $x_1$ إلى $x_n$. (Jungnickel، 2013)

إما يكون

$$\begin{cases} \varphi'(a) = \varphi(a) & \text{إذا كان } a \notin \mu \\ \varphi'(a) = \varphi(a) + 1 & \text{إذا كان } a \in \mu \text{ وإذا تم توجيه a في اتجاه } \mu \\ \varphi'(a) = \varphi(a) - 1 & \text{إذا كانت } a \in \mu \text{ وإذا كانت a موجهة في الاتجاه المعاكس لـ } \mu \end{cases}$$

يمكننا بسهولة التحقق من أن $\varphi'$ لا يزال تدفقًا. نظرًا لأن $\varphi'_{x_n} = \varphi_{x_n} + 1$، فإن قيمة التدفق $\varphi$ أكبر ، وبالتالي فهي أفضل من قيمة $\varphi$.

يمكننا بعد ذلك تنظيم الفكرة السابقة من خلال تقديم مفهوم الرسم البياني للفجوة أو الشبكة المتبقية.

**تعريف**: يجب أن تكون شبكة نقل $G = (X, A, C)$ لها تدفق كامل $\varphi$. نسمي الرسم البياني للانحراف أو الشبكة المتبقية، الشبكة $\bar{G}(\varphi) = (X, \bar{A}, \bar{C})$ بحيث:

- إذا كان $a \,\epsilon\, A$ و $\varphi(a) < C(a)$ فإن $a \in A$ و $\bar{C}(a) = C(a) - \varphi(a)$
- إذا كان $a = (x,y) \in A$ فإن $a^{-1} = (y,x) \in \bar{A}$ و $\bar{C}(a^{-1}) = \varphi(a)$

تشير الشبكة المتبقية إلى أي من الأقواس يمكننا زيادة أو تقليل التدفق. فيه

لتظهر فائدة الرسم البياني للانحراف في النظرية التالية:

ليكن $\varphi$ تدفق G (من $x_1$ إلى $x_n$) و $\bar{G}(\varphi)$الشبكة المتبقية المرتبطة بـ$\varphi$ .. الشرط الضروري والكافي لتدفق $\varphi$ إلى أقصى حد هو عدم وجود مسار من $x_1$ إلى $x_n$ في $\bar{G}(\varphi)$. (Maquin، 2008)

يعتمد إثبات هذه النظرية على أقواس مينتي Minty الملونة، والتي لن نذكر تفاصيلها هنا.

### 4.2.1 مسالة التدفق الأكبر:

إذا كان لدينا شبكة موجهة ذات منبع و مصب فإنَّ "مسألة التدفق الأكبر the maximal flow problem" تهدف إلى إيجاد أكبر تدفق ممكن من المنبع إلى المصب.

فإذا كانت طاقة (capacity) المسار مثلا تمثل عدد السيارات الذي يمكن أن تعبر المسار في وحدة الزمن (باعتبار ان هذا المسار يمثل طريقا ذات اتجاه محدد) فإن مسألة التدفق الأكبر تهدف عندئذ إلى إيجاد أكبر عدد ممكن من السيارات بين نقطتين (منبع ومصب) في شبكة الطرق. وإذا كانت طاقة المسار تمثل الطاقة (الكهربائية أو المائية ..إلخ) التي يمكن أن تمر عبر هذا المسار في وحدة الزمن فإن مسألة التدفق الأكبر تهدف إلى إيجاد أكبر تدفق ممكن (الكهربائية أو المائية ..إلخ) بين عقدتين (منبع ومصب) في شبكة (كهرباء أو مياه ..إلخ) و إذا كانت طاقة المسار تمثل حجم المعلومات التي يمكن ان تمر عبر هذا المسار في وحدة زمن معينة فإن الهدف من مسألة التدفق الأكبر يكون عندئذ إيجاد أكبر حجم ممكن من المعلومات يمكن تمريره بين عقدتين (منبع ومصب) في شبكة. (Todinov, 2013)

قبل البحث عن خوارزمية لحل مسالة التدفق الأكبر لابد من التطرق لبعض المصطلحات الخاصة بهذه المسألة. نذكر أولا بأن طاقة المسار إلى نهايته. وفيها عدا عقدتي المنبع والمصب فإننا سنفترض أن التدفق الداخل لأية عقدة يساوي التدفق الخارج منها وهو ما نعبر عنه بقانون "حفظ التدفق conservation of flow" وينتج عنه أن التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل في المصب. ونطلق على هذا التدفق (الخارج من المنبع أو الداخل في المصب) اسم "قيمة التدفق".

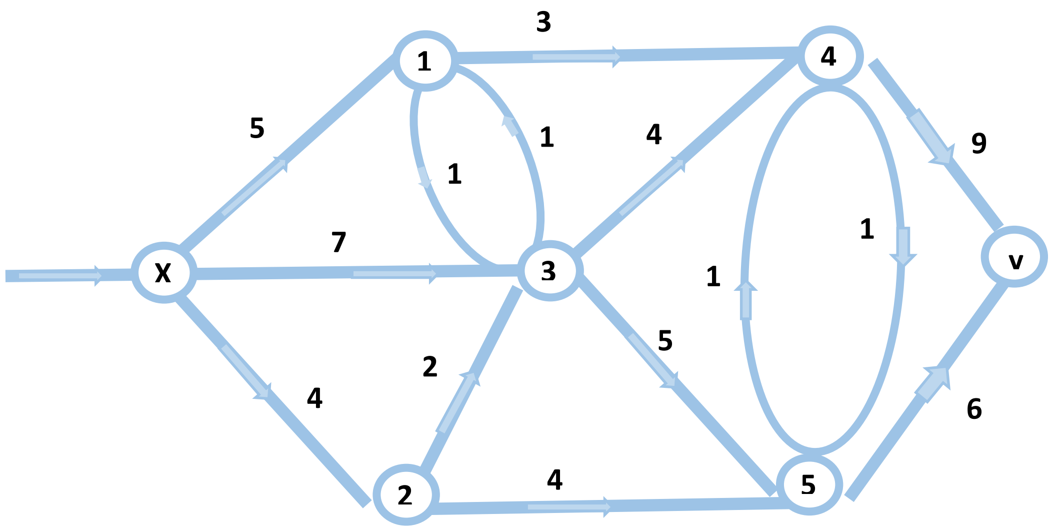
فإذا كان لدينا مسار ما بين المصدر والمصب فإننا نعرف "التدفق الممكن" عبر هذا المسار بأّنه أقل طاقة من طاقات الأقواس التي تقيد المسار. لأنه من غير الممكن أن نمرر على طول المسار تدفقا يتجاوز أكبر تدفق ممكن لأحد الأقواس المشكلة لهذا المسار. فمثلا لو كانت طاقة المسار من شبكة تمثل أكبر عدد من السيارات

التي يمكن ان تمر عبر هذا المسار وأخذنا مسارا يتألف من عدد من الأقواس بين نقطتين من شبكة فلا يمكن أن نمرر على طول هذا المسار عددا من السيارات يتجاوز طاقة الأقواس في هذا المسار.

### 5.2.1 خوارزمية لمعالجة مسألة التدفق الأكبر:

نفترض أن الشبكة التالية تمثل شبكة طرق تصل بين وسط المدينة والحي الجامعي فيها. وأن الأرقام المرفقة على أقواس هذه الشبكة تمثل أكبر عدد (بالآلاف) من السيارات يمكن أن يمر عبر هذه الأقواس في الساعة.

*الشكل 7:* **X وسط المدينة و Y الحي الجامعي**




**المصدر: من إعداد الباحث**

فمسألة التدفق الأكبر في الشبكة (4) تعني إيجاد مسار من هذه الشبكة يملك أكبر تدفق ممكن. فلو أخذنا المسارات الثلاثة التالية:

$$P_1 = X \to 1 \to 3 \to 4 \to Y$$

$$P_2 = X \to 3 \to 5 \to Y$$

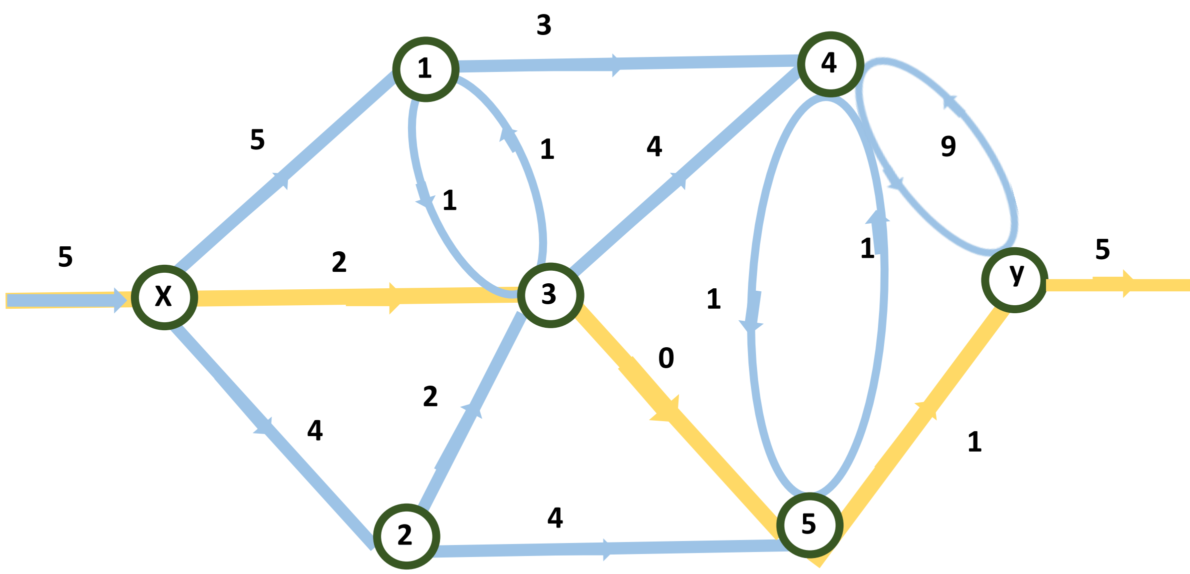
$$P_3 = X \to 2 \to 5 \to Y$$

لكان التدفق الممكن لها هو 1 لـ $P_1$، 5 لـ $P_2$ و4 لـ $P_3$. ومن الواضح أنَّ $P_2$ أفضل من $P_1$ و $P_3$. بمعنى أنّه يملك تدفقا ممكنا أكبر من التدفق لكل من $P_1$ و $P_3$. ولإيجاد أفضل مسار (وهو المسار الدي يملك أكبر تدفق ممكن بالمقارنة مع بقية المسارات) نتبع الخطوات التالية:

**خطوة (1)**: نوجد مسار من المنبع إلى المصب يملك تدفقا ممكنا موجبا (إذا لم يوجد مثل هذا المسار فإن التدفق الحالي هو التدفق الأكبر او الأمثل) ثم نطرح التدفق الممكن لهذا المسار من جميع طاقات الأقواس في هذا المسار. (Bazaraa, Jarvis, & Sherali, 2008)

فلو أخذنا المسار $P_2$ الذي تدفقه الممكن 5 وطرحنا 5 من طاقات الأقواس التي تشكِّل $P_2$ لأصبحت طاقات أقواس هذا المسار كما هي معطاة في الرسم (8) التالي:

**الشكل 8: ايجاد مسار يملك تدفقا ممكنا موجبا**




**المصدر: من إعداد الباحث**

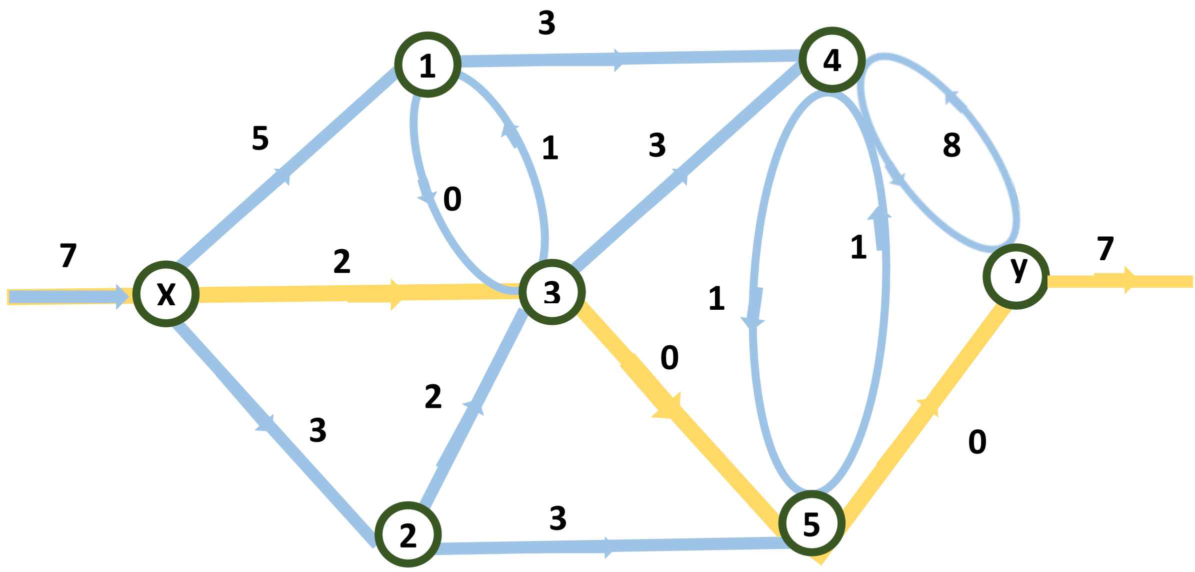
ولتسهيل الفهم فقد أعدنا رسم المسار $P_2$ والطاقات الجديدة لأقواس بخطوط واضحة على الشكل (8). و سنصطلح على كتابة قيمة التدفق الممكن للمسارات عن المنبع X و المصب Y (وهو بالنسبة للمسار $P_2$ في المثال).

**خطوة (2)**: نكرِّر الخطوة (1) من أجل جميع المسارات الممكنة من المنبع X إلى المصب Y حتى نصل إلى الحل الأمثل الذي يتحدد وفقا للقاعدة التالية.

**النتيجة**: يكون التدفق الناتج أمثليًّا إذا أصبحت طاقات جميع المسارات مساوية للصفر وقيمة التدفق الأمثل عندئذ هي القيمة المتجمعة من التدفقات الممكنة لهذه المسارات.

فلو كرَّرنا العمل بالنسبة للمسار $P_1$ لأصبح التدفق المتجمع هو 6. ولو كررناه بالنسبة للمسار $P_3$ لأصبح التدفق المتجمع هو 7 ولأصبحت التدفقات الجديدة لأقواس الشبكة كما في الشكل (9).

**الشكل 9: تحسين مسار التدفق**




**المصدر: من إعداد الباحث**

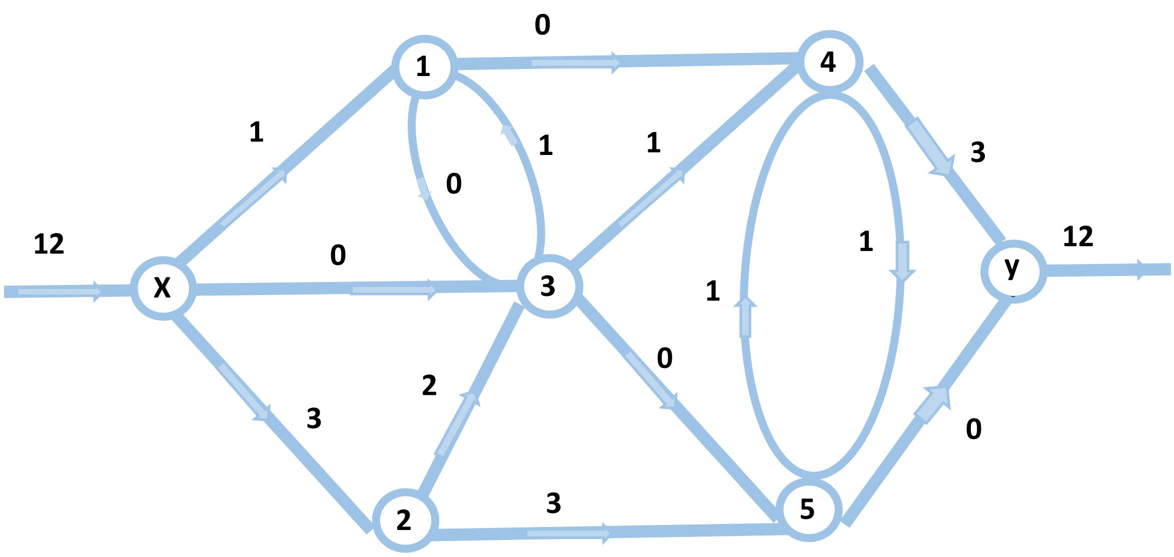
مما تجدر ملاحظته في هذا الصدد هو إهمال أي مسار سابق أو أي مسار ناتج طاقته الممكنة صفر. فمثلا إلى الآن لا فائدة من اعتبار المسار $P_4 = X \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow Y$

لأن طاقته الممكنة (بعد التحول الناتج على طاقات الأقواس) معدومة وكذلك لا نعتبر المسارات المشابهة للمسار $P_4$.

لو اعتبرنا المسار $P_5 = X \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow Y$ لحصلنا على النتائج الممثلة **بالشكل (10)** وبتدفق مساوٍ لِـ 9.

ولو اعتبرنا المسار $P_6 = X \to 1 \to 4 \to Y$ لحصلنا على النتائج الممثلة **بالشكل** (**10**) أيضا وبتدفق مساوٍ لـ 12.

**الشكل 10: تحسين مسار التدفق**

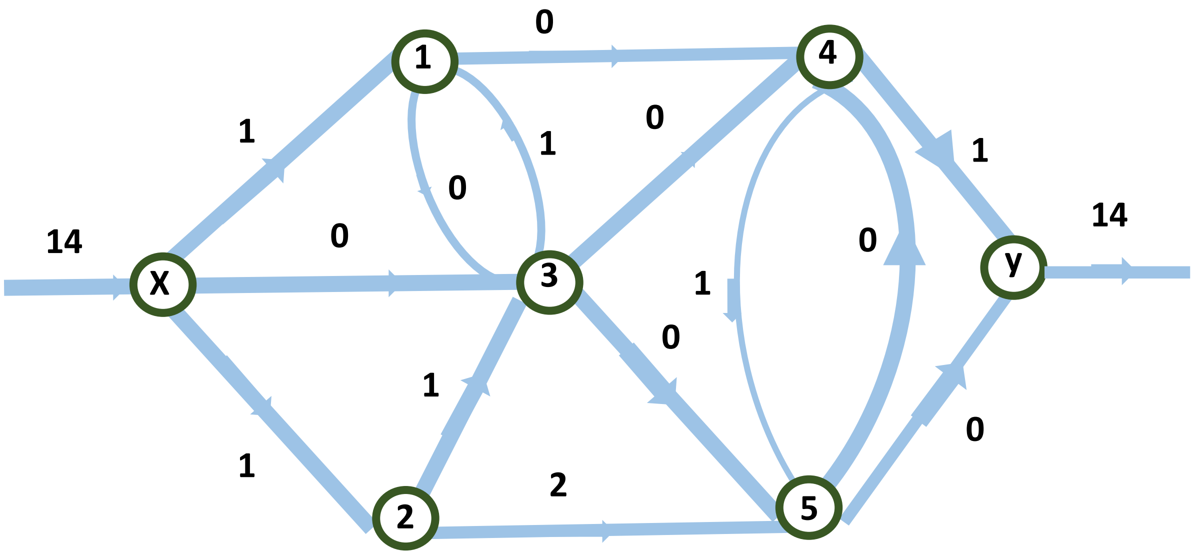



**المصدر: من إعداد الباحث**

وأخيرا لو اعتبرنا المسار $P_7 = X \to 2 \to 5 \to 4 \to Y$ ثم المسار $P_8 = X \to 2 \to 3 \to 4 \to Y$ لحصلنا على النتائج المعطات على **الشكل** (**11**) وبتدفق متجمع مقداره 14.

وهذا التدفق هو التدفق الأكبر الممكن بين المنبع X والمصب Y لان الطّاقات النهائية للأقواس الموصلة للعقدتين 4 و5 والتي عن طريقها يتم الوصول إلى Y وبالتالي فإن الطاقة الممكنة النهائية لأي مسار من X إلى Y أصبحت صفرا. ووفقا لمدلولات المثال فإن النتيجة 14 للتدفق الأكبر تعني أنَّ العدد الأكبر من السيارات والذي يمكن ان يمر كل ساعة من X إلى Y يساوي 14000 سيارة.

**الشكل 11 : التدفق الأكبر الممكن بين المنبع X والمصب Y**




**المصدر: من إعداد الباحث**

### 6.2.1 **البحث عن أقصى تدفق:**

من النتائج السابقة، يمكننا الآن اقتراح طريقة بناءة لإيجاد أقصى تدفق. باستخدام خوارزمية فورد وفولكرسون Ford et Fulkerson . (Lucas, 2010)

1) التكرار k=0

بدأً من التدفق الأولي $0\varphi^0$ (متوافق مع قيود السعة)،

على سبيل المثال $\varphi^0 = (0, 0, \dots, 0)$.

2) A التكرار k, إما يكون $\varphi^k$ التدفق الحالي.

ابحث عن مسار $\mu^k$ من $x_1$ إلى $x_n$ في الرسم البياني للانحراف.$\bar{G}(\varphi^k)$

إذا لم يتواجد، **النهاية:** التدفق $\varphi^k$ هو الحد الأقصى.

3) ليكن $\varepsilon^k$ تكون السعة المتبقية للمسار $\mu^k$

(الحد الأدنى من السعات المتبقية لأقواس المسار).

يُحدد التدفق $\varphi^{k+1}$ من خلال:

إذا كان $a \in \mu$ وإذا تم توجيه a في اتجاه μ

إذا كانت $a \in \mu$ وإذا كانت a موجهة في الاتجاه المعاكس لـ μ

$$\begin{cases} \varphi_a^{k+1} = \varphi_a^k + \varepsilon^k \\ \varphi_a^{k+1} = \varphi_a^k - \varepsilon^k \end{cases}$$

قم باعتبار $k \leftarrow k + 1$ والعودة إلى (2).

من خلال تعريف الرسم البياني، فإن التدفقات $\varphi^k$ كلها متوافقة مع السعات. علاوة على ذلك، تكون $\varepsilon^k$ موجبة في كل تكرار، ونتيجة لذلك، تنتج الخوارزمية سلسلة من التدفقات المتوافقة لقيم متزايدة بشكل تام.

في كل خطوة، تتمثل الطريقة في إيجاد سلسلة تربط $x_1$ بـ $x_n$. من الواضح أن اختيار هذه الطريقة ليس نادرا. بل حاولت العديد من الدراسات تطبيق هذا الاختبار من أجل تحسين متوسط أداء الخوارزمية.

### 7.2.1 البحث عن أقصى تدفق بأقل تكلفة:

يمكن البحث عن أقصى تدفق بأقل تكلفة باستخدام خوارزمية Busacker-Gowen التي تسمح بتحديد المجموعة الكاملة لجميع تدفقات الحد الأدنى من التكلفة من قمة الرأس $x_1$ إلى قمة الرأس $x_n$ ومن القيمة$\varphi = 1, 2, \dots, v$. نذكر هنا هذه الخوارزمية التكرارية بشكل نظري بدون تطبيقها على "للكمبيوتر". (Maquin، 2008)

عند رقم التكرار k، يُفترض أن التدفق الحالي $\varphi^k$ هو تدفق بقيمة $\varphi_0^k$ وتكلفة الحد الأدنى بين مجموعة جميع تدفقات القيمة $\varphi_0^k$.

ليكن $\bar{G}(\varphi^k)$ هو الرسم البياني للانحراف المرتبط بـ $\varphi^k$ ؛ نربط للأضلاع $\bar{G}(\varphi^k)$ التكاليف $\bar{w}$ و القدرات (السعات) $\bar{c}$ التالية:

- إذا كانت $a = (x_i, x_j) \in A$ و $\varphi(a) < c(a)$، فإن المسار $a^+ = (x_i, x_j)$ له تكلفة $\bar{w}(a) = w(a)$ والقدرة $\bar{c}(a) = c(a) - \varphi(a) > 0$.
- إذا كانت $a = (x_i, x_j) \in A$ و $\varphi(a) > 0$، فإن المسار $a^- = (x_i, x_j)$ له تكلفة $\bar{w}(a) = -w(a)$ والقدرة $\bar{c}(a) = \varphi(a)$.

$\mu^k$ يكون مسارًا بأقل تكلفة بالنسبة للتكاليف $\bar{w}$ بين $x_1$ و $x_n$ على الرسم البياني $\bar{G}(\varphi^k)$؛ نشير بواسطة $\varepsilon^k$القدرة المتبقية لهذا المسار. ثم نحدد التدفق $\varphi^{k+1}$ كما في خوارزمية Ford-Kulkerson. إذا كانت $\mu$ هي الشعاع المرتبط بالمسار $\mu^k$ أي أن $\mu_a = 1$ إذا كانت $a^+ \in \mu^k$

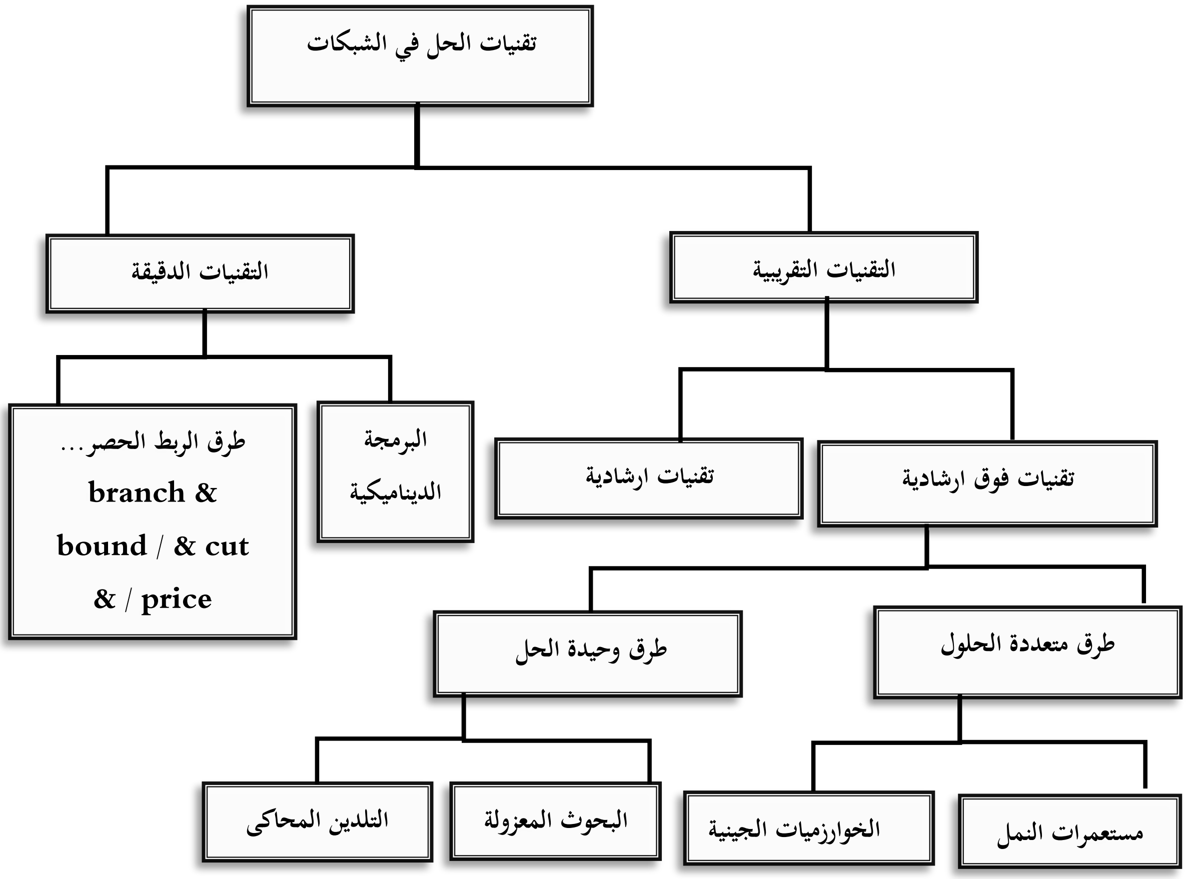
و $\mu_a = -1$ إذا $a^- \in \mu^k$، فلدينا $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varepsilon^k \mu$ والتدفق $\varphi^{k+1}$ هو الحد الأدنى لتدفق التكلفة بقيمة $\varphi_0^k + \varepsilon^k$.

لاحظ أنه في كل تكرار، يجب أن نجد أقصر مسار (بمعنى مسار التكلفة الدنيا) من $x_1$ إلى $x_n$ في الرسم البياني حيث يمكن أن تكون (التكلفة) على طول الأقواس سالبة؛ لذلك سيكون من المستحسن استخدام خوارزمية تتكيف مع هذا الموقف (خوارزمية Dijkstra غير مناسبة). ومع ذلك، هناك تحسين لهذه الخوارزمية اقترحه إدموندز وكارب (Edmonds et Karp) واستند إلى تقنية تعديل التكاليف مما يجعل من الممكن جعلها جميعًا إيجابية مع الحفاظ على نفس التسلسل الهرمي للمسار على الرسم البياني؛ في هذه الحالة يمكن استخدام خوارزمية Dijkstra.(Todinov, 2013)

## 3.1 تقنيات الحل في نظرية الشبكات:

أدى تنوع المشاكل التي تتم مواجهتها في الحياة اليومية إلى اعتماد الباحثين على طرق دقيقة وفعالة لتحسين أدائهم من حيث وقت الحساب الضروري و / أو جودة الحل المقترح . بعد عدة سنوات من البحث، تم اقتراح العديد من أساليب حل المشاكل ذات التعقيدات المختلفة بتنوع كبير من حيث المبدأ والاستراتيجية والأداء. جعل ذلك من الممكن تجميع أساليب حل المشاكل المختلفة في فئتين رئيسيتين: فئة الطرق الدقيقة وفئة الطرق التقريبية. أدى تهجين طرق هاتين الفئتين إلى ظهور فئة أخرى تضم ما يسمى بالطرق الهجينة (الشكل 12).

**الشكل 12: تقنيات الحل في نظرية الشبكات**




**المصدر:** (S. BenIsmail, 2012)

### 1.3.1 التقنيات الدقيقة:

تجد هذه الطرق الحل الأمثل بقيمة مؤكدة، لكنها تتطلب الكثير من الوقت من حيث حساب الوقت ومساحة الذاكرة اللازمة. لهذا، فهي تستخدم أكثر بكثير لحل المشاكل السهلة.

تكمن فائدتها أنها توفر الحل الأمثل للمشكلة التي يتم معالجتها. لكنها من الممكن تصفح مساحة البحث بأكملها من أجل ضمان الحل الأمثل. فهي تتطلب تكلفة البحث التي غالبا ما تكون مهمة من حيث الموارد المطلوبة. غالبًا ما يكون وقت البحث و / أو مساحة الذاكرة المطلوبة للحصول على الحل الأمثل عالية للغاية، خاصةً للمشاكل الكبيرة(Salimifard & Bigharaz, 2020) .

يزداد تعقيد نوع الخوارزمية بشكل كبير اعتمادًا على حجم المشكلة المراد معالجتها، ويصبح مهمًا جدًا للمشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات و / أو الدوال الموضوعية و / أو المعايير.

## 1.1.3.1 طريقة الربط والحصر Branch and Bound

تستند هذه الخوارزمية إلى طريقة الشجرة لإيجاد الحل الأمثل بالربط والحصر؛ عن طريق تمثيل حالات الحلول بواسطة شجرة مع العقد والأوراق (A.H.Land & A.G.Doig, 1960)

**الشكل12 : خوارزمية طريقة الربط والحصر**

**Algorithm 1:** Branch-and-Bound($X, f$)

```
Set L = {X} and initialize x̂
while L ≠ ∅:
    Select a subproblem S from L to explore
    if a solution x̂′ ∈ {x ∈ S | f(x) < f(x̂)} can be found:  Set x̂ = x̂′
    if S cannot be pruned:
        Partition S into S_1, S_2, ..., S_r
        Insert S_1, S_2, ..., S_r into L
    Remove S from L
Return x̂
```

المصدر (David R. Morrisona, 2016)

تعتمد هذه التقنية على ثلاثة محاور رئيسية:

-التقييم،

- الربط،

- استراتيجية المسار.

### أ. التقييم

إنه يعمل على الحد من مساحة البحث عن طريق إزالة المجموعات الفرعية التي لا تحتوي على الحل الأمثل. والهدف من ذلك هو محاولة تقييم اهتمام استكشاف مجموعة فرعية من الشجرة.

تستخدم هذه الطريقة المتفرعة في شجرة البحث على النحو التالي: البحث عن حل أدنى تكلفة هو حفظ أقل تكلفة حل واجهتها أثناء الاستكشاف، ولمقارنة تكلفة تبحث كل عقدة على أفضل الحلول.

إذا كانت تكلفة العقدة التي تم النظر فيها أعلى من أفضل تكلفة، فسنوقف استكشاف الفرع وستكون جميع حلول هذا الفرع بالضرورة أعلى تكلفة من أفضل حل موجود بالفعل.

**ب. الربط**

إنها تتكون في فصل المشكلة إلى مشاكل فرعية. وبالتالي، فمن خلال حل جميع المشاكل الفرعية والحفاظ على أفضل الحلول، من المؤكد أن أحدها قد حل المشكلة الأولية. هذا مثل بناء شجرة لسرد جميع الحلول.

تسمى مجموعة من عقد الشجرة التي لا يزال يتعين علينا أن نرى أنه من المحتمل أن تحتوي على حل مثالي، بمعنى أنه لا يزال يتعين تقسيمها، وتسمى مجموعة من العقد النشطة.

**ج. استراتيجية المسار**(Gabrel, Knippel, & Minoux, 1999)

– **الأقرب أولاً**: تفضل هذه الاستراتيجية القمم الأقرب إلى الجذر عن طريق إجراء فواصل أقل للمشكلة الأولية. إنه أقل فعالية من الاستراتيجيتين الأخريين.

– **الأبعد أولاً**: تفضل هذه الاستراتيجية القمم البعيدة عن الجذر (ذات البعد الأعلى) بتطبيق المزيد من الفواصل على المشكلة الأولية. هذا المسار يؤدي بسرعة إلى الحل الأمثل مع توفير للذاكرة.

– **الأفضل أولاً**: تتمثل هذه الاستراتيجية في استكشاف المشاكل الفرعية مع أفضل محطة. كما أنه يتجنب استكشاف جميع المشاكل الفرعية التي لها تقييم سيئ مقارنة بالقيمة المثلى.

### 2.1.3.1 طريقة قطع المستوى: Cutting-Plane

تم تطوير هذه الطريقة من قِبل A. Schrijver في عام 1986، لحل مشاكل التحسين التوافقية التي

$$\begin{cases} Min\ C^T x \\ Ax \geq b \\ x \in R^n \end{cases}$$

صيغت في شكل البرنامج الخطي التالي:

في الحالة التي تكون فيها مشكلة التحسين التوافقية كبيرة، يتم استخدام تقنية تتكون من إزالة بعض هذه القيود وحل المشكلة البسيطة. ويرد الحل الأمثل في مجموعة من الحلول الممكنة لهذه التجزئة.

تستخدم هذه التقنية لحل مشكلة التجزئة، ولإضافتها إلى قيود المشكلة الأولية. نحن نحد من مشكلة التقليل من الزوجين (s, s0) أو$R^n$ ∋ s, و R ∋31 $s_0$, ويقال إن هذا القيد لا يلبيه الحل الحالي $x^-$ إذا كانت $\in \{x: Ax \geq b\}$ , يكون لدينا

$S^T Y \geq S_0$ و $S^T X^- < S_0$

ثم تسمى هذه القيود قطع المستوى. سيتم إيقاف الخوارزمية عند عدم وجود قيود أخرى لا تلبي بواسطة الحل الحالي؛ ليكون هذا هو الحل الأمثل للمشكلة الأولية.(A.Schrijver, 1986)

### 3.1.3.1 طريقة الربط والقص Branch and Cut

تجمع هذه الطريقة بين خوارزمية طريقة الربط والحصر مع طريقة قطع المستوى. عند حل برنامج خطي صحيح، تبدأ طريقة الربط والقص أولاً في تخفيف المشكلة ثم تقوم بتطبيق خوارزمية طريقة قطع المستوى على الحل الموجود.

إذا لم نعثر على حل كامل، فسنقسم المشكلة إلى عدة مشاكل فرعية سيتم حلها بالطريقة نفسها.

نريد حل مشكلة التحسين التوافقية التالية:

$$\begin{cases} Min\ C^T x \\ Ax \geq b \\ x \in R^n\ , A \in R^{mxn}, b \in\ R^m \end{cases}$$

**الشكل13 : خوارزمية طريقة الربط والقص**

**Procedure** *Branch and Cut*

**0.** Define problem $P^0 = P \setminus \{\text{eqns. (6), (7) and (8)}\}$, $UP = \{P^0\}$. Set $Count = 0$ *and* $Best = \infty$.
**1. If** $UP = \phi$ **then** END
  **Else** choose and solve a $P^j \in UP$
**2. If** $P^j$ infeasible **then** $UP = UP \setminus \{P^j\}$; **go to 1**
  **Else**
   **If** $Z^j \geq Best$ **then** $UP = UP \setminus \{P^j\}$; **go to 1**
    **Else** Run *Separation*
**3. If** *Separation* finds and adds violated cuts, **then**
   $P^{Count+1} = P^j \cup \{\text{violated cuts}\}$; $UP = UP \setminus \{P^j\} \cup \{P^{Count+1}\}$;
   $Count = Count + 1$; **go to 1**
  **Else**
   **If** one or more $v_k^j \notin \mathbb{Z}$ **then**
    Choose $v_k$ to branch on; $P^{Count+1} = P^j \cup \{v_k = 0\}$; $P^{Count+2} = P^j \cup \{v_k = 1\}$;
    $UP = UP \setminus \{P^j\} \cup \{P^{Count+1}, P^{Count+2}\}$; $Count = Count + 2$; **go to 1**
   **Else If** $Z^j < Best$ **then**
    $Best = Z^j$; $UP = UP \setminus \{P^k \mid Z^k \geq Best]$; **go to 1**

المصدر(Obreque, Donoso, Gutiérrez, & Marianov, 2010)

### 4.1.3.1 البرمجة الديناميكية:

يتم استخدام هذه الطريقة لحل فئة معينة من مشاكل التحسين المقيدة، والتي يتم تعريف وظيفتها الهدفية على أنها مجموعة من الدالات الروتينية غير التناقصية للموارد. يمكن تطبيق هذه الطريقة على العديد من المشاكل المختلفة تمامًا مثل المشاكل الإحصائية المستمرة والمستقلة (Rustichini, 1998).

يستند حل مشكلة في البرمجة الديناميكية إلى تجزئة الأخير إلى مشاكل فرعية أبسط. كل مشكلة فرعية لديها مجموعة من الخيارات؛ يتم تمثيل كل خيار بتكلفة في دالة الهدف (Y. Dumas, J. Desrosiers, & J. Soumis, 1986).

الخوارزميات القائمة على البرمجة الديناميكية، في معظم الحالات، سهلة التنفيذ وفعالة للغاية في حل المشاكل الصغيرة والمتوسطة الحجم.

على عكس تطبيقه على الحالات الكبيرة عادة ما يكون مكلفًا للغاية أو حتى مستحيلًا لأسباب تتعلق بالتعقيد المكاني و / أو الزمني.

### 2.3.1 الطرق التقريبية (Metaheuristic)

هذه الطرق تجعل من الممكن توفير حلول تقريبية في وقت حساب ومساحة ذاكرة معقولة. تعتبر أكثر عملية لحل المشاكل الصعبة. وتنقسم هذه الأساليب إلى فئتين: الطرق التجريبية والطرق التقريبية (الشكل 12)

الأساليب الإرشادية محددة لمشكلة معينة. أنها تتطلب معرفة مجال المشكلة التي يجري معالجتها. من ناحية أخرى، فإن الطرق التقريبية هي طرق عامة، استدلال متعدد الاستخدامات ينطبق على مجموعة واسعة من المشاكل. بالإمكان بناء بديل لطرق الكشف عن الحل عندما لا يعرف تحديد البحث عن مشكلة معينة....

تقدم الطرق التقريبية حلولًا جيدة النوعية في وقت معقول للمشاكل التوافقية الصعبة التي لا نعرف طريقة كلاسيكية أكثر كفاءة. تم تصميم هذه الطرق لتفادي الحد الأدنى المحلي، فهي هياكل عامة يجب تحديد مكوناتها وفقًا للمشكلة، على سبيل المثال حلول البدء أو معايير التوقف.

إنها في معظم الحالات خوارزميات تكرارية تتقارب نحو المستوى العالمي الأمثل من خلال تقييم دالة موضوعية معينة. إنها تتصرف مثل خوارزميات البحث التي تؤدي إلى أفضل تقريب للحل (Baeck T, Fogel D.B, & Michalewicz Z, 1997).

الاهتمام المتزايد للطرق التقريبية في تسليط الضوء على الحاجة إلى إنشاء آلات مع قدرات حسابية هائلة، وهذا سمح لتصميم طرق تقريبية أكثر وأكثر تعقيدا مما سمح حل العديد من المشاكل NP صعبة.

### 1.2.3.1 محاكاة التلدين (Simulated Annealing)

محاكاة التلدين هي طريقة بحث محلية تستخدم استراتيجية معينة لتجنب الحد الأدنى المحلي. تعتمد هذه الطرق التقريبية على تقنية قديمة يستخدمها علماء المعادن للحصول على سبيكة خالية من العيوب ودورات متناوبة لإعادة التسخين (أو التلدين) وتبطيء تبريد المعادن. (N.Metropolis, M.N.Rosenbluth,, & H.A.Teller, 1953)

هذه التقنية مستوحاة من خوارزمية Métropolis ، والتي يمكن تلخيص مبدأها (لتعظيم النموذج) على النحو التالي:

**الشكل 14 : خوارزمية طريقة محاكاة التلدين**

**Algorithm 1** Simulated annealing algorithm

**procedure** SA($f, N, \Omega, x^0, T_0$)
  $k \leftarrow 0$
  $x_{\min} \leftarrow x^k$
  $f_{\min} \leftarrow f(x_{\min})$
  $T_k \leftarrow T_0$
  **while** stopping criterion is not satisfied **do**
    $z^k \leftarrow rand\left(N(x^k, T_k)\right)$
    $y^k \leftarrow x^k + z^k$
    **if** $rand(0,1) \leq \min\{1, \exp\{(f(x^k) - f(y^k))/T_k\}\}$ **then**
      $x^{k+1} \leftarrow y^k$
    **else**
      $x^{k+1} \leftarrow x^k$
    **if** $f(x^{k+1}) < f_{\min}$ **then**
      $x_{\min} \leftarrow x^{k+1}$
      $f_{\min} \leftarrow f(x_{\min})$
    $k \leftarrow k+1$
    $T_{k+1} \leftarrow$ temperature is updated
  **return** $x_{\min}$

المصدر (Wang، Li، Gao، Li، و Gupta، 2021)

محاكاة التلدين يجعل من الممكن قبول حل رديء الجودة هو الحل الحالي بهدف تنويع البحث وتجنب فخ الأمثل المحلي. يمكن أن يؤدي قبول هذه الحلول إلى البحث عن حل جيد النوعية (الأمثل) لكنه يمكن أن يكون جزءًا من حل سيء وليس حلاً جيدًا.

من ناحية أخرى، يمكن أن يؤدي قبول حلول ذات جودة رديئة إلى فقدان أفضل حل تمت مواجهته أثناء البحث ويؤدي إلى تقارب نحو حل نوعية رديئة من الحل الموجود بالفعل. للتغلب على هذه المشكلة، تتيح إضافة متغير لحفظ أفضل حل موجود.

### 2.2.3.1 البحوث المحضورة (RT)

وهي طرق تقريبية على أساس حل فريد اقترحه Glover في عام 1986. إنها طريقة بحث محلية متقدمة تستخدم مجموعة من القواعد والآليات لتوجيه البحث بذكاء. (F.Glover,, G.A.Kochenberger,, & B.Alidaee, 1998)

تعتمد استراتيجية البحث الخاصة به عن الحل الأمثل على نقطتين (F. Glover & M. Laguna, 1997) :

-استخدام مفهوم التجاور.

- استخدام ذاكرة تسمح بالتوجيه الذكي لعملية البحث.

تجدر الإشارة إلى أن هناك العديد من المتغيرات للبحوث المحضورة. تعتمد هذه المتغيرات بشكل أساسي على اختيار المجاور وكيفية إدارة قائمة الحضر.

تعمل خوارزمية البحوث المحضورة على النحو التالي:

**الشكل15 : خوارزمية طريقة البحوث المحضورة**

1. Set $t = 0$.
2. Generate an initial solution $x$.
3. Initialize the tabu lists $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ and the size of tabu list $L$.
4. **Repeat**:
   a. Set the candidate set $\mathcal{A}(x, t) = \{x' \in \mathcal{N}(x) \setminus \mathcal{T}(x, t) \cup \tilde{\mathcal{T}}(x, t)\}$.
   b. Find the best $x$ from $\mathcal{A}(x, t)$: Set $x' = \arg\min_{y \in \mathcal{A}(x,t)} f(y)$.
   c. If $f(x')$ is better than $f(x)$, $x \leftarrow x'$.
   d. Update the tabu lists and the aspiration criteria.
   e. If the tabu list $\mathcal{T}$ is full, then old features from $\mathcal{T}$ are replaced.
   f. Set $t = t + 1$.
   **until** termination criterion is satisfied.

المصدر (Swamy، 2016)

### 3.2.3.1 الخوارزميات الجينية:

تستند هذه الخوارزميات إلى آليات الوراثة والانتقاء الطبيعي. لقد تم تكييفها مع التحسين التوافقي من قبل John Holland، ثم تم إثرائها بعمل David Goldberg.(J.H.Holland, 1975)

في هذا السياق نجد نفس المفردات المستخدمة في نظرية التطور وعلم الوراثة:

- ✓ **جينة**: مجموعة من الرموز تمثل قيمة المتغير. بشكل عام، يتم تمثيل الجين قليلاً أو عدد صحيح أو حقيقي أو حرف.
- ✓ **كروموسوم**: مجموعة من الجينات، يتم تقديمها بترتيب معين حتى تأخذ في الاعتبار قيود المشكلة.
- ✓ **الفرد**: واحد أو أكثر من الكروموسومات. هذا هو الحل الممكن للمشكلة.
- ✓ **المجتمع**: مجموعة من الأفراد.
- ✓ **جيل**: مجموعة من التكرار تسمح بالانتقال من مجتمع إلى آخر.

يتم تشغيل هذه الخوارزمية على النحو التالي:

**الشكل16 : خوارزمية طريقة الخوارزمية الجينية**

```
input  : Problem P_0
output: Solution S_final(P_0)
begin
    level := 0;
    while Not reached the desired number of levels do
        P_level+1:= Coarsen (P_level);
        level := level + 1;
    end
    /* Initial Solution is computed at the lowest level */;
    S(P_level) =Initial Solution (P_level) ;
    while (level > 0) do
        S_start(P_level-1): = Uncoarsen (S_final(P_level));
        S_final(P_level-1) := Refine (S_start(P_level-1));
        level := level - 1;
    end
end
```

المصدر (Bouhmala، 2018)

أ. ترميز البيانات

ب. جيل المجتمع الأولي

ت. وظيفة التكيف (اللياقة البدنية)

ث. الاختيار

ج. العبور

ح. التحول

### 4.2.3.1 خوارزمية مستعمرة النمل:

الفكرة الأصلية تأتي من مراقبة استغلال الموارد الغذائية عند النمل. فعلى الرغم من محدودية قدراتهم المعرفية بشكل فردي، إلا أنهم قادرون بشكل جماعي على إيجاد أقصر طريق بين مصدر الغذاء وعشهم.

لاحظ علماء الأحياء، في سلسلة من التجارب التي أجريت منذ عام 1989، أن مستعمرة النمل مع اختيار مسارين من أطوال مختلفة تؤدي إلى مصدر غذائي تميل إلى استخدام أقصر مسار.

نموذج يشرح هذا السلوك كما يلي: (Douiri, Elbernoussi, & Lakhbab)

1- نملة (تسمى "الكشفية") تسعى أكثر أو أقل بشكل عشوائي حول المستعمرة،

2- إذا اكتشفت مصدرًا غذائيًا، فإنها تعود بشكل أو بآخر مباشرة إلى العش، تاركة في طريقها مجموعة من الفيرومونات؛

3- كون هذه الفيرومونات جذابة، فإن النمل الذي يمر بالقرب منها يميل إلى اتباع هذا المسار بشكل أو بآخر؛

4- بالعودة إلى العش، فإن هذا النمل نفسه سيعزز المسار.

5- إذا كان من الممكن الوصول إلى مسارين من نفس مصدر الغذاء، فسيكون المسار الأقصر، في نفس الوقت، مروراً بنمل أكثر من المسار الطويل؛

6- وبالتالي، سيتم تعزيز المسار القصير أكثر، وبالتالي يكون أكثر جاذبية؛

7- سوف يختفي المسار الطويل في النهاية، وتكون الفيرومونات مستقطبة؛

8- في نهاية المطاف، جميع النمل حدد و "اختار" أقصر مسار.

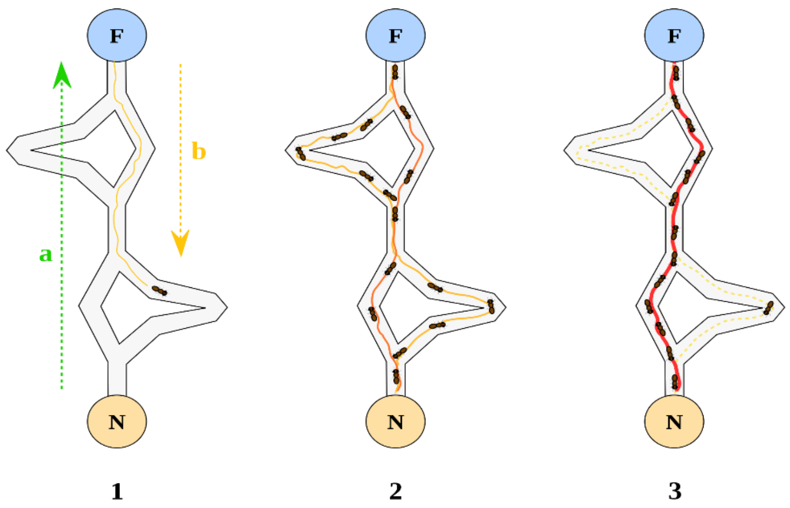
يستخدم النمل البيئة كوسيلة للتواصل: فهم يتبادلون المعلومات بشكل غير مباشر عن طريق إيداع الفيرومونات، وكلهم يشاركون "عملهم". المعلومات التي تم تبادلها لها نطاق محلي، فقط نملة موجودة في البداية تقوم بإيداع الفيرومونات. يسمى هذا النظام "الاتصال غير مباشر"، وتستخدمه العديد من الحيوانات الاجتماعية.

تعد آلية حل مشكلة معقدة للغاية بحيث لا يمكن معالجتها بواسطة النمل المفرد مثالًا جيدًا على النظام الذاتي. يعتمد هذا النظام على التغذية المرتدة الإيجابية (تجذب رواسب الفيرومون النمل الآخر الذي سيعززه بدوره) والتغذية المرتدة السلبية (تبديد المسار عن طريق التبخر يمنع المجموعة من السباق).

من الناحية النظرية، إذا بقيت كمية الفيرومون متطابقة مع مرور الوقت على جميع الفروع، فلن يتم اختيار أي مسار. ومع ذلك، بسبب التغذية المرتدة، سيتم تضخيم تباين صغير على فرع ومن ثم السماح باختيار فرع.

ستسمح الخوارزمية بالانتقال من حالة غير مستقرة حيث لا يوجد فرع أكثر من غيره، إلى حالة مستقرة حيث يتكون المسار من الفروع "الأفضل".

**الشكل18 : طريقة مستعمرات النمل**




المصدر (Duran Toksari، 2016)

1) تجد النملة الأولى مصدر الإسناد (F)، عبر أي مسار (أ)، ثم تعود إلى العش (N) تاركة وراءها مسار فرمون (ب).

2) يقوم النمل بتشريب المسارات الأربعة المحتملة بشكل غير مبال، لكن تعزيز المسار يجعله أكثر جاذبية في أقصر الطرق.

3) يأخذ النمل أقصر طريق، والأجزاء الطويلة من المسارات الأخرى تفقد أثر الفيرومونات.

خوارزمية النمل، التي تم اقتراحها لأول مرة لحل مشكلة المسافر التجاري هي كما يلي:

(A. Colorni,, M. Dorigo,, & V. Maniezzo, 1998)

**الشكل 19: خوارزمية طريقة مستعمرة النمل**

```
Initialize colony parameters
Initialize pheromone matrix τ with τ_max for each pair of cities
for t = 1 to ni do
    for k = 1 to m do {TOUR CONSTRUCTION}
        Place ant_k on a randomly chosen city
        while the n cities are not all visited do
            Move ant_k to next city according to state transition rule
        Compute length L_k of the tour T_k produced by ant_k
    for k = 1 to m do {LOCAL SEARCH}
        while T_k is improved do
            for all 0 < a < n and 0 < b < n and 0 < c < n do
                Delete arcs (a, a + 1), (b, b + 1), (c, c + 1)
                Produce T′ by reconnecting partial tours with other arcs
                Compute L′
                if L′ < L_k then
                    Update T_k with T′
    for k = 1 to m do
        if L_k < L_it then
            Update T_it with T_k
    if L_it < L_gl then
        Update T_gl with T_it
    Evaporate τ and update τ for each pair of cities of T_it or T_gl
    Control τ_min < τ < τ_max and update τ with trail smoothing mechanism
```

المصدر (Delevacq، Delisle، و Krajecki، 2013)

### 5.2.3.1 الأمثلية بواسطة السرب المعين:

وقد اقترح Kennedy وEberhart هذه الطرق التقريبية في عام 1995. إنه مستوحى من السلوك الاجتماعي لدى الحيوانات التي تنتقل بالأسر (schrenk، 2010)اب. في البداية، سعيا لمحاكاة قدرة الطيور على الطيران بشكل متزامن وقدرتهم على تغيير الاتجاه فجأة دون فقدان شكل السرب الأمثل. لا يستخدم كل فرد ذاكرته فحسب، بل يستخدم أيضًا معلومات حول جيرانه المقربين لتوجيه حركته. يستخدم قواعد مثل "تنظيم سرعته بالنسبة إلى الآخرين" أو "الطيران في نفس الاتجاه" أو "الابتعاد عن الجيران القريبين". هذه بعض القواعد التي تضمن تناغم السرب.(J.Kennedy & R.Eberhart, 1995)

**استنتاج:**

تضمن طرق الحل الدقيقة حلاً مثالياً، ولكن في بعض الحالات، يمكننا البحث عن حلول ذات جودة جيدة، دون ضمان الأمثلية، ولكن بوقت حساب أقصر. لذلك، يتم تطبيق أساليب تسمى الطرق التقريبية، تتكيف مع كل مشكلة تم معالجتها، مع احتمال عدم وجود في المقابل أي معلومات عن نوعية الحلول التي تم الحصول

عليها. الاستدلال أو الاستدلالات الفوقية عموما تستغل العمليات العشوائية في استكشاف الفضاء البحثي للتعامل مع كثرة الاستخدام التوافقي الناجم عن استخدام الطرق الدقيقة.

بالإضافة إلى هذا الأساس العشوائي، غالبًا ما تكون الاستدلالات الفوقية تكرارية، لذا تتكرر نفس عملية البحث أثناء القرار. الأهمية الرئيسية لاستخدام هذه الطرق تأتي بالتحديد من قدرتهم على تجنب الحد الأدنى المحلي من خلال تحمل انخفاض قيمة دالة الهدف أثناء التقدم في العمليات.

## 4.1 مشاكل التدفقات المتعددة في الشبكات:

مسائل التدفق يمثلون المشاكل الأساسية بالنسبة للشبكات. حيث يجب تحويل بضاعة من خلال شبكات معينة لتلبية الطلبات المختلفة. يرجع السبب في تعاظم الضغط على شبكات النقل إلى العديد من المصادر. فازدياد تكامل الاقتصادات من خلال التكتلات التجارية .كمنطقة التجارة الحرة بين أوروبا وبلدان البحر المتوسط، يؤدي الى زيادة حجم التبادل التجاري بين البلدان. كما أنه لا يعطي دفعة إلى التكامل الاقتصادي فحسب، بل وسيفضي أيضاً إلى ازدياد فرص العمل الجديدة. إذ أدت إلى زيادة كبيرة في حركة السفر لأغراض السياحة بين البلدان. كما يُعزى الضغط الواقع على أنظمة وشبكات النقل إلى ارتفاع معدل العمران الحضري، حيث يبلغ متوسط سكان المدن والمناطق الحضرية ما يزيد على خمسين في المائة من مجموع السكان .

ومع ازدياد مستوى الطلب على خدمات قطاع النقل، تعرضت الطرق والمطارات والموانئ إلى العمل بأكثر من طاقتها، مما وضع قيوداً على النمو الاقتصادي وتخفيض أعداد الفقراء. ويؤدي ضعف أداء الأصول العاملة إلى زيادة التكاليف التشغيلية، بينما يفضي عدم كفاية أنظمة شبكات النقل في المناطق الحضرية إلى تفاقم ازدحام حركة السير، وتلوث الهواء، والحد من القدرة على الانتقال، فضلاً عن ارتفاع تكلفة النقل العام. فالحاجة لصيانة وتحديث مرافق البنية الأساسية في قطاع النقل، ولذا ينبغي على الحكومات إيجاد سبل لتمويل التحسينات اللازمة.(Kennington, 1978)

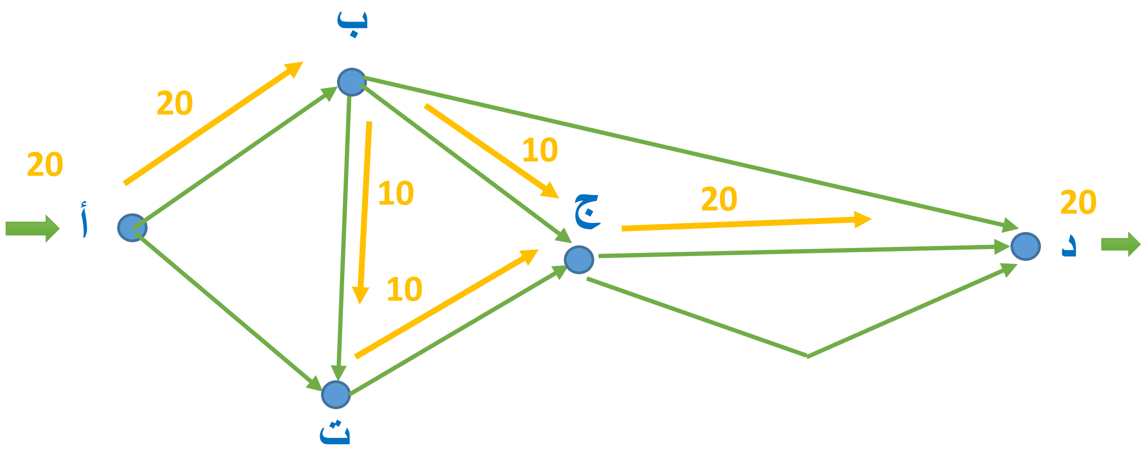
ولقد تطور نمط التجارة الدولية خلال العقدين الماضيين تطورًا جذريًا، من حيث الحجم والمكونات واتجاهات حركة السلع والطرق الرئيسية التي تنقل عبرها. ولما كان بيت القصيد في التجارة الدولية، وفى ظل تحديات العولمة، وما يصاحبها من التوجه نحو التكتل الإقليمي، هو تنمية التجارة الخارجية للدول، مع زيادة قدرتها التنافسية في الأسواق العالمية، فإنه يمكن من خلال عنصر النقل تحقيق جانب رئيسي من التنمية المستدامة.

لذلك يعتبر وجود شبكات متعددة التدفقات متكاملة ومتطورة من الشروط المهمة والضرورية لإقامة صرح التكامل الاقتصادي نظراً لأن توافر طرق النقل والمواصلات بوسائطها المختلفة يمكن أن تحقق سهولة انتقال الأفراد والسلع براً، وبحراً، وجواً بين الدول وداخلها في المشروع التكاملي. ولقد أثبتت التجارب المعاصرة أن فرص تحقيق أية نجاحات في جهود التكامل الاقتصادي لابد أن تعتمد بشكل أساسي على توافر بنية أساسية للنقل لتكون على درجة عالية من الكفاءة، بمثابة القاعدة التي يمكن أن يقوم عليها أي تكتل اقتصادي، نتيجة للدور الهام الذي يحتله قطاع النقل في هذا المجال.

### 1.4.1 التدفق:

التدفق في الشبكة هو وظيفة ترتبط بكل مسار (i، j) كمية $X_{ij}$ تمثل كمية التدفق التي تمر عبر هذا المسار. يجب أن يتوافق التدفق مع القاعدة التالية: مجموع كميات التدفق على الأقواس يجب أن تكون المدخلات إلى العقدة (بخلاف المصدر والبئر) مساوية لمجموع كميات التدفق على الأقواس الخارجة من نفس العقدة. بمعنى آخر، فإن إجمالي كمية التدفق التي تدخل العقدة تساوي إجمالي كمية التدفق الذي يخرج على مستوى الشبكة من الشكل 20؛ يتم تمييز كل مسار من الأقواس الموجودة بين المصدر أ والمصب د بالتدفق والسعة. (Bruno Bachelet, s.d.)

**الشكل 20: مثال عن شبكة بتدفقات أحادية**




المصدر: من إعداد الباحث

### 2.4.1 التدفق المتوافق:

التدفق X متوافق مع شبكة إذا كان لدى أي مسار (i، j):

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}$$

فلكل مسار، يجب ألا يتجاوز قدرة المسار في التدفق الذي يمر من خلاله (Bruno Bachelet, s.d.)

### 3.4.1 التدفق الكامل:

اكتمال التدفق X إذا كان هناك مسار مشبع واحد على الأقل لأي مسار ينتقل من المصدر إلى المصب. وهذا يعني أن التدفق الذي يمر من خلاله يساوي قدرة المسار.

يمكن تقديم مشكلة التدفق بأشكال مختلفة، ولكل منها خوارزمية مناسبة لحلها:

- ✓ تستجيب خوارزمية Ford وFulkerson للبحث عن أقصى تدفق بين العقدتين. يسمح إصدار آخر من هذه الخوارزمية بالبحث عن تدفق بحدود منخفضة للسعة (لكل مسار حد أدنى)، بينما يبحث إصدار ثالث عن تدفق التكلفة الأدنى (لكل مسار تكلفة وحدة تدفق متداولة).
- ✓ تهدف خوارزمية كلاين إلى إيجاد حد أدنى لسعر التكلفة مع حدود أقل وأعلى للسعة.
- ✓ تهدف خوارزمية Busacker وGowen إلى إيجاد الحد الأدنى من التكلفة والقيمة المعطاة بصفر أقل.

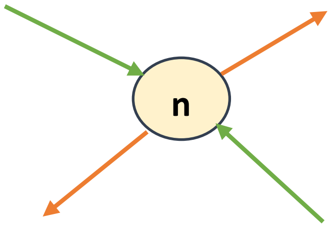
### 4.4.1 مشكلة التدفق الأقصى:

سواء $G = (N . A)$ عبارة عن رسم بياني يتكون من مجموعة N من العقد n ومجموعة A من m من الأقواس.

$\Delta^{+}(n)$ : مجموعة من الأقواس تخرج من n،

$\delta^{-}(n)$ : مجموعة من الأقواس تدخل في n,

**الشكل 21: الأقواس الواردة والصادرة**




**المصدر: من إعداد الباحث**

نعتبر عقدتين معينتين: عقدة مصدر s وعقدة t المصب. تسمى الدالة $f\colon A \to R$ تدفق s–t إذا:

$$f(a) \geq 0 \ \forall a \in A$$
$$\sum_{a\in\delta^+(n)} f(a) = \sum_{a\in\delta^-(n)} f(a) \ \forall n \in N/\{s,t\}$$

تسمى الكمية أدناه قيمة $s - t$ تدفق:

$$f_0 = \sum_{a\in\delta^+(s)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(s)} f(a)$$

مشكلة الحد الأقصى للتدفق تُصاغ على النحو التالي:

- بالنظر إلى الرسم البياني $G = (N . A)$ مصدر s, مصب t ومعادلة القدرة $c : A \to \mathbb{R}^+$
- البحث عن $S - T$ تدفق F متوافق مع c وتعظيم قيمة f.

يمكن صياغته باعتباره البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max\ f_0 \\ \displaystyle\sum_{a\in\delta^+(n)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(n)} f(a) = \begin{cases} f_0 & si\ n = s \\ 0 & si\ n \in N\backslash\{s,t\} \\ -f_0 & si\ n = t \end{cases} \\ 0 \leq f(a) \leq c(a)\ \forall\ a \in A \\ f_0 \text{est la valeur du flot } f \end{cases}$$

- **التدفقات والتخفيضات:**

لأي مجموعة $W \subset N$ نلاحظ:

مجموعة الأقواس الخارجة من w $\delta^{+}(w) = \{(i,j) \in A, i \in w, j \notin w\}$

مجموعة الأقواس الداخلة في w $\delta^{-}(w) = \{(i,j) \in A, i \notin w, j \in w\}$

إذا كان $s \in w$ و $t \notin w$ نقول ان $\delta^{+}(w)$ عبارة عن قطع $s - t$.

قدرة $\delta^{+}(w)$ تمثل مجموع قدرات أقواس $\delta^{+}(w)$:

$$c(\delta^{+}(w)) = \sum_{a \in \delta^{+}(w)} c(a)$$

- **الحالة 1**

لكل $s - t$ تدفق $f$ وكل $s - t$ قطع $\delta^{+}(w)$, لدينا:

$$F_0 \leq c\,(\delta^{+}(w))$$

القيمة القصوى لـ $s - t$ تدفق متوافق مع قدرة $c$ لا تتجاوز أبدا قدر $s - t$ قطع.

- **الحالة 2**

إذا كان $s - t$ تدفق $f$ و $s - t$ قطع $\delta^{+}(w)$ تماثل $c\,(\delta^{+}(w))$ $F_0 \leq$ فيكون $f$ و $s - t$ التدفق الأعظم و $\delta^{+}(w)$ قطع من الحد الأدنى من القدرات.

- **الحالة 3**

الشرط الضروري والكافي لكي تكون مشكلة التدفق الأعظم حلاً محدد القيمة هو عدم وجود مسار ذو سعة غير محدودة بين s و t.

### 5.4.1 مشكلة التدفق المتعدد **Multi flow**:

ليكن $G = (N . A)$ رسمًا بيانيًا يتكون من مجموعة $N$ من العقد $n$ ومجموعة $A$ من الأقواس $m$ الموجهة. لكل مسار $(i, j) \in A$ يرتبط بتكلفة الوحدة $C_{ij}$ (التكلفة لكل وحدة من التدفق على هذا المسار).

نفترض أن تكلفة التدفق على المسار هي خطية فيما يتعلق بالتدفق $X_{ij}$. كل مسار لديه القدرة $U_{ij}$ الذي يصف الحد الأقصى لكمية التدفق الذي تمت على هذا المسار: $Xij <= Uij$.

هناك K نوع من التدفقات المختلفة بين أزواج العقد (المصدر-المصب): (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993)

$(s1, t1), (s2, t2),.........., (sK, tK)$.

تدفق النوع k على مسار $A \ni (i, j)$ يكتب $X^k_{ij}$.

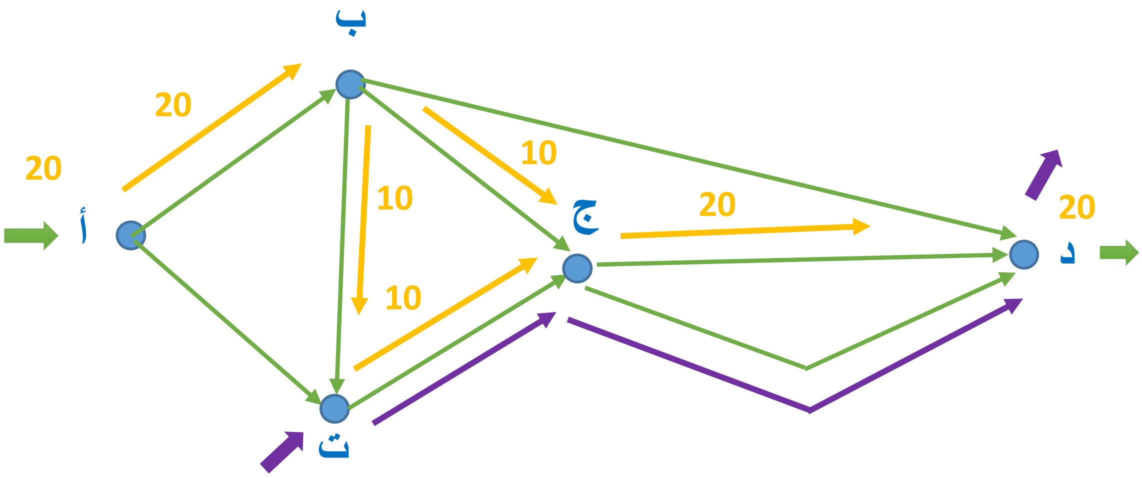
يمكننا بعد ذلك ربط كل عقدة $i \in N$ عدد صحيح $b^k(i)$ يمثل المصدر / الطلب لنوع التدفق k:

إذا كان $0 < b^k(i)$, العقدة i هي مصدر لنوع التدفق k،

إذا كان $0 > b^k(i)$, يمثل طلبية،

إذا كان $b^k(i) = 0$, مجموع تدفقات أنواع التدفق k الواردة والصادرة متساوي.

الشكل 22: مثال عن شبكة بتدفقات متعددة




المصدر: من إعداد الباحث

نجد إشكالية التدفقات المتعددة في عدة مجالات مختلفة. تعتبر العديد من المشاكل الواقعية متعددة التدفق مع معايير أمثلية مختلفة نذكر من بينها:

– **شبكة الاتصالات (شبكة توصيل الحزمة)**

هو عبارة عن شبكة مكونة من تدفقات داخلة وخارجة البيانات. يتكون تدفق البيانات من الحزم الذي يأخذ كل منها مسارًا (وليس بالضرورة هو نفسه) على الشبكة.

يكون معيار الأمثلية في تدنية المدة الزمنية في إرسال واستقبال البيانات أو تعظيم التدفقات الإجمالية لهذه. (SOUAR.H, 2016)

– **شبكة الطرق**

يمكن أن نتخيل تدفقات مثل السلع التي يتم نقلها بين أماكن مختلفة أو تدفقات مثل سيارات الأشخاص في حركة المرور. يوضح هذا المثال أيضًا أن التدفقات المختلفة تستخدم نفس الروابط (الطرق هنا) ذات سعة محدودة. قد تكون تكلفة استخدام الرابط هي المسافة بين المدن، أو شبكات الطرق، أو بعض المعايير الأخرى المحددة.

## 5.1 تدفقات السلع المتعددة: Multicommodity Flow

حتى هذه المرحلة، تطرقنا الى نماذج الشبكات التي تتكون من سلعة واحدة. بهدف ارسالها من مصدرها إلى وجهتها بطريقة مثلى، على طول أقصر مسار أو عن طريق تدفق بتكلفة دنيا. في العديد من المجالات الواقعية، تشترك عدة سلع مادية أو رسائل، تحكم كل منها قيود تدفق الشبكة الخاصة بها، في نفس الشبكة. على سبيل المثال، في تطبيقات الاتصالات السلكية واللاسلكية، والمكالمات الهاتفية بين أزواج عقدة محددة في شبكة هاتفية أساسية تحدد كل سلعة منفصلة. إذا لم تتفاعل السلع بأي شكل من الأشكال، فلحل المشاكل المتعلقة التدفقات متعددة السلع، فسيتم حل كل مشكلة على حدة باستخدام تقنيات أخرى سنتطرق لها في أخر الفصل. ومع ذلك، في حالات أخرى، نظرًا لأن السلع تشترك في تسهيلات مشتركة، فإن مشاكل السلع الفردية ليست مستقلة، لذا لإيجاد التدفق الأمثل، يلزم حل المشاكل بالتنسيق مع بعضها البعض. في هذا الجزء، يتم دراسة نموذج، يُعرف باسم مشكلة التدفق المتعدد السلع، حيث تتقاسم السلع الفردية قدرات المسار المشتركة. أي أن لكل مسار قدرة $u_{ij}$ تقيد التدفق الكلي لجميع السلع على هذا المسار.

يرمز لـِ $X_{ij}^{k}$ للدلالة على تدفق السلعة k على المسار (i، j)، والرمز لـ $X^k$ و $C^k$ بالإشارة إلى متجه التدفق وكل متجه تكلفة الوحدة للسلعة k. باستخدام هذا الترميز، يمكننا صياغة مشكلة تدفق السلع المتعددة كما يلي:(Assad, 1978)

$$\sum_{1\le k\le K} c^k x^k \qquad \text{تدنية} \qquad (1.1)$$

بقيود:

$$\sum_{1\le k\le K} x_{ij}^{k} \le u_{ij} \qquad \text{لكل}\ (i,j) \in A, \qquad (1.2)$$

(1.3)

$$\mathcal{N}x^k = b^k \qquad \text{لكل}\ k = 1,\dots,k, \qquad (1.3)(1.4)$$

$$0 \le x_{ij}^{K} \ge u_{ij}^{K} \qquad \text{لكل}\ (i,j) \in A \quad \text{وكل} \quad k = 1,2,\dots,k. \qquad (1.4)$$

تحتوي هذه الصيغة على مجموعة من قيود k توازن الحزمة العادية (**1.3**) , على غرار تدفق كل سلعة k 1,2 =,...,K "الحزمة" تربط قيود (**1.2**) السلع عن طريق تقييد التدفق الإجمالي $\sum 1 \le k \le K$, $X_{ij}^{k}$ لجميع السلع على كل مسار (i،j) إلى أقصى حد . لوحظ أيضًا أنه تُفرض حدود تدفق فردية $u_{ij}^{k}$ على تدفق السلعة k على المسار (i، j). العديد من التطبيقات لا تفرض هذه الحدود، لذلك بالنسبة لهذه التطبيقات، قمنا بتعيين كل منضمة على + ∞. على الرغم من أنه تمت صياغة مجموعة متنوعة من النماذج البديلة لمشكلة تدفق السلع المتعددة مع افتراضات مختلفة، فإنه يُشار إلى هذا النموذج باعتباره مشكلة تدفق السلع المتعددة.

في بعض الأحيان في المناقشة، سيكون أكثر ملاءمة لتوضيح قيود الحزمة (**1.2**) على أنها مساواة بدلاً من عدم المساواة. في هذه الحالات، تُقدم متغيرات "الركود" غير السلبية $s_{ij}$ وتكتب قيود الحزمة مثل:

$$\sum_{1\le k\le K} x_{ij}^{k} + s_{ij} = u_{ij} \qquad \text{for all } (i,j) \in A. \qquad (\text{1.2أ})$$

يقوم متغير الركود $S_{ij}$ للمسار (i، j) بقياس سعة الحزمة غير المستخدمة على هذا المسار (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993) .

### 1.5.1 فرضيات النموذج:

يُلاحظ أن النموذج (**1**) يفرض قدرات على الأقواس ولكن ليس على العقد. لا تؤدي فرضية النمذجة هذه أي فقدان للعمومية، حيث أنه باستخدام تقنيات تقسيم العقدة، يمكننا استخدام هذه الصيغة لنمذجة المواقف بقدرات العقدة أيضًا. ثلاث ميزات أخرى للنموذج تجدر الإشارة إليها.

فرضية السلع المتجانسة. من المفترض أن كل وحدة تدفق لكل سلعة تستخدم وحدة واحدة من السعة لكل مسار. يسمح النموذج الأكثر عمومية لتدفق الوحدة لكل سلعة k باستهلاك كمية معينة $p_{ij}^k$ من السعة (أو بعض الموارد الأخرى) المرتبطة بكل مسار (i، j)، واستبدال قيد الحزمة بقيود توفر الموارد العامة $\sum 1 \leq k \leq K$ $p_{ij}^k\ X_{ij}^k \leq u_{ij}$ مع التعديلات الطفيفة، تنطبق تقنيات الحلول التي سيتم مناقشتها في هذا الفصل على هذا النموذج الأكثر عمومية أيضًا.

لا توجد فرضية الازدحام. من المفترض أنه تتوفر سعة ثابتة على كل مسار وأن التكلفة على كل مسار خطية في التدفق على هذا المسار. في بعض التطبيقات التي تمت مواجهتها في مجالات الاتصالات والنقل والمجالات الأخرى، تتفاعل السلع بطريقة أكثر تعقيدًا، بمعنى أنه مع زيادة تدفق أي سلعة على المسار، إنه يُتحمل تكلفة متزايدة وغير خطية على هذا المسار. ينشأ هذا النوع من النماذج بشكل متكرر، في شبكات المرور حيث تتمثل دالة الهدف في العثور على نمط التدفق لجميع السلع التي تقلل من التأخير الكلي للنظام. في هذا الإعداد، بسبب تأثيرات قائمة الانتظار، كلما زاد التدفق على مسار، كلما زاد تأخير قائمة الانتظار عليه. على سبيل المثال، قد يحتوي نموذج "الازدحام" لتدفقات السلع المتعددة على قيود التدفق الفردية (**1.2**) و (**1.3**)، ولا توجد قيود على الحزمة، ولكن تصبح دالة الهدف غير الخطية للنموذج:

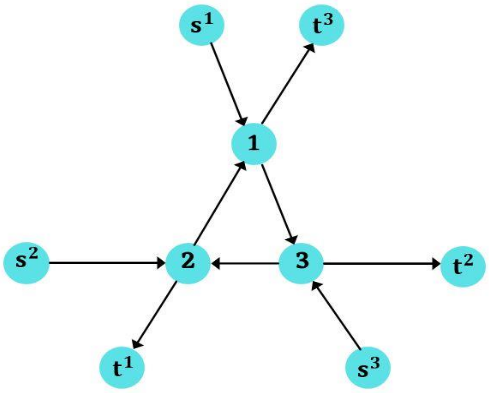
$$\text{تدنية} \qquad \sum_{(i,j)\in A} \frac{x_{ij}}{u_{ij} w_{ij}}$$

في هذا النموذج، تكون $U_{ij}$ هي السعة "الاسمية" للمسار (i، j)؛ نظرًا لأن التدفق الكلي $= \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}^k$ $x_{ij}$ على أي مسار يقترب من القدرة الاسمية للمسار، يقترب التأخير من $+\infty$ (هذا الشكل من دالة الهدف مستمد من النتائج الأساسية في نظرية الطوابير). غالبًا ما يستخدم الباحثون هذا النوع من النماذج في سياق "أداء النموذج" لمعرفة كيف يتغير النموذج أو الأداء الكلي له كدالة لمختلف صياغات النموذج (مثلا، استجابة للتغيرات في طوبولوجيا الشبكة). في بحثنا لا نتطرق الى كيفية حل هذه النماذج غير الخطية لسلعة واحدة كتعميم لمشكلة تدفق التكلفة الدنيا. ولا كيفية حل مشاكل التدفق متعدد السلع غير الخطية.

فرضية السلع غير القابلة للتجزئة. يفترض النموذج (**1**) أن متغيرات التدفق يمكن أن تكون كسرية. في بعض التطبيقات التي تمت مواجهتها في التطبيقات العملية، يعد هذا الجمع مناسبًا؛ في سياقات أخرى، ومع ذلك، يجب أن تكون للمتغيرات قيمة عدد صحيح. في هذه الحالات، يظل النموذج الذي ندرسه مفيدًا، نظرًا لأن نموذج البرمجة الخطية يكون تقريبًا جيدًا لنموذج البرمجة الصحيح، أو يمكننا استخدام نموذج البرمجة الخطية كنظام تحويل خطي للبرنامج الصحيح.

يلاحظ أن تكامل الحلول هو إحدى السمات المميزة المهمة للغاية بين مشاكل التدفق الفردية والمتعددة السلع، تتمثل إحدى الميزات الرائعة لمشاكل تدفق العمل الصافي في سلعة واحدة في أن لديهم دائمًا حلولًا صحيحة كلما كانت قيمة العرض / الطلب والقدرة ذات قيمة صحيحة. مشاكل التدفق للسلع المتعددة لا تلبي هذه الخاصية التكاملية. على سبيل المثال، نوضح مشكلة تدفق الحد الأقصى للإدارة المتعددة للسلع مع ثلاث نقاط 1 و 2 و 3 وثلاث سلع كما هو موضح في الشكل **23**. كل مسار لديه قدرة 1 وحدة. نود أن نجد حلاً يزيد من التدفق الكلي بين عقد المصدر وعقد السلع الثلاثة.

**الشكل 23: مشكلة التدفق الأقصى للسلع المتعددة مع حل جزئي.**




المصدر: من إعداد الباحث

الحل الأمثل هو إرسال 0.5 وحدة بين مصدر ومصب جميع السلع الثلاثة لإجمالي تدفق 1.5 وحدة. الحل الأمثل لهذه المشكلة من شأنه أن يرسل وحدة واحدة بين سلعة واحدة فقط من السلع الثلاثة لإجمالي تدفق وحدة واحدة. وذلك لإظهار أن هذا النموذج لا يحتوي دائمًا على حلول متكاملة حتى عندما تكون بيانات المشكلة لا تتجزأ. (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993)

### 2.5.1 منهجية الحل لمشكلة التدفق متعدد السلع:

طور الباحثون عدة طرق لحل مشكلة التدفق متعدد السلع، بما في ذلك:

1- تجزئة السعر الموجه.

2- تجزئة الموارد الموجهة.

3- طرق التجزئة.

تضع طرق تجزئة توجيه السعر مضاعفات (أو أسعار) لاغرانج على قيود النمودج وتضعها في دالة الهدف بحيث تتجزئ المشكلة الناتجة إلى مشكلة تدفق أدنى بحد أدنى منفصلة لكل سلعة k. أي أن هذه الطرق تزيل قيود السعة وبدلاً من ذلك "تشحن" كل سلعة لاستخدام سعة كل مسار. تحاول هذه الطرق العثور على الأسعار المناسبة بحيث يحل أيضًا الحل الأمثل لمشكلة التسعير الناتجة أو مشكلة لاغرانج الفرعية مشكلة التدفق متعدد السلع. تتوفر عدة طرق للعثور على الأسعار المناسبة. بالاعتماد مثلا على طرق تحويل لاغرانج. وكذلك تجزئة Dantzig-Wolfe.

تجزئة Dantzig-Wolfe هو أسلوب آخر للعثور على الأسعار الصحيحة؛ هذه الطريقة هي مقاربة عامة تهدف الى تحليل المشاكل التي تحتوي على مجموعة من القيود "السهلة" وأيضًا مجموعة من القيود "الصعبة" (بمعنى، القيود التي تجعل المشكلة أكثر صعوبة في حلها). بما يتعلق بمشاكل التدفق متعدد السلع، فإن قيود تدفق الشبكة هي السهلة وقيود الحزمة هي الصعبة. مثل تحويل لاغرانج، ينطلق من خلال تجاهل أو فرض الأسعار على قيود الحزمة وحل المشاكل الفرعية لاغرانج مع قيود تدفق شبكة سلعة واحدة فقط. لا تحتاج الحلول الناتجة إلى تلبية قيود الحزمة، وتستخدم الطريقة البرمجة الخطية لتحديث الأسعار بحيث تلبي الحلول الناتجة من المشاكل الفرعية لقيود الحزمة. تعمل الطريقة على حل مشكلتين مختلفتين: مشكلة لاغرانج الفرعية وبرنامج خطي لتحديد الأسعار. لعبت هذه الطريقة دورًا مهمًا في مجال الأمثلية لأن الخوارزمية نفسها أثبتت أنها مفيدة للغاية وأيضًا لأنها حفزت العديد من الطرق الأخرى لتحليل المشاكل. علاوة على ذلك، فإن الخوارزمية والنظرية الأساسية المرتبطة بها كان لها تأثير كبير على مجال الاقتصاد لأن هذا النوع من تجزئة الأسعار يضفي الطابع الجدي على مسائل أسعار التحويل والتنسيق التي تكمن في قلب التخطيط الاقتصادي. في الأقسام التالية، نصف استخدام تجزئة Dantzig-Wolfe والتقنية المرتبطة بها في توليد الأعمدة لحل مشكلة التدفق متعدد السلع.(Wang, 2018)

طريقة بديلة لعرض مشكلة التدفق متعدد السلع هي مشكلة تخصيص السعة. تتنافس جميع السلع على السعة الثابتة $U_{ij}$ لكل مسار (i،j) من الشبكة. أي لحل مثالي لمشكلة التدفق المتعدد للسلع سيصف تدفقًا محددًا على كل مسار (i،j) لكل سلعة وهو القدرة المناسبة للتخصيص لتلك السلعة. إذا تم تخصيص هذه القدرات للسلع وبعد ذلك حل مشاكل التدفق المستقلة (السلعية) الناتجة، لنتمكن من حل المشكلة بسهولة تامة كمجموعة من مشاكل التدفق السلعي المستقل. تقدم طرق توجيه الموارد توجيهًا لحل عام لتطبيق هذه الفكرة. فهي تبدأ بتخصيص القدرات للسلع الأساسية، ثم استخدام المعلومات المستخلصة من الحل للمشاكل الناتجة عن السلعة الفردية لإعادة تخصيص القدرات بطريقة تحسن التكلفة الإجمالية للنموذج.

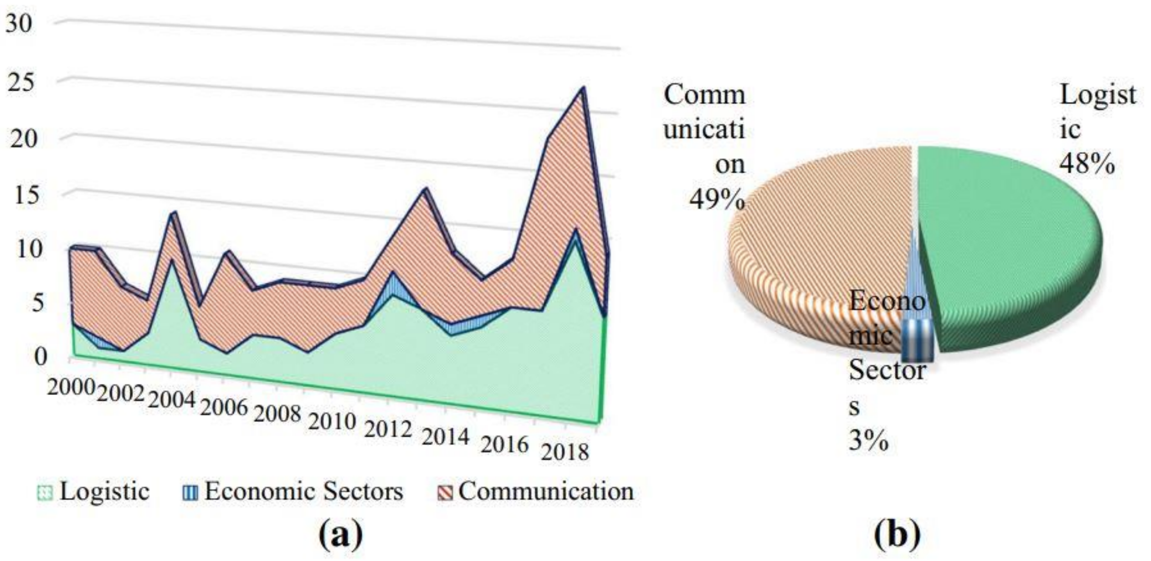
تستغل طرق التجزئة حقيقة أن مشكلة التدفق متعدد السلع هي برنامج خطي منظم بشكل خاص مع مشاكل تدفق الشبكة المدمجة. كما يُلاحظ، لحل أي مشكلة في تدفق سلعة فردية، يتمكن استخدام طريقة الشبكة البسيط، والتي تعمل من خلال توليد سلسلة من تحسين حلول الأشجار الممتدة. سيتم توضيح كيفية تفسير طريقة simplex للشبكة كتطبيق خاص لطريقة simplex للبرامج الخطية العامة ويظهر أن حلول الأشجار الممتدة تتوافق مع الحلول الممكنة الأساسية لمشكلة تدفق التكلفة الدنيا. تثير هذه الملاحظة الأسئلة التالية: (1) هل يتمكن اعتماد نهج مماثل لحل مشكلة التدفق المتعدد للسلع؟ (2) هل يتمكن بطريقة ما استخدام حلول شجرة الامتداد لقيود تدفق الشبكة المدمجة.$Nx^k = b^k$؟ طريقة التجزئة هي طريقة برمجة خطية تتيح الإجابة عن كلا السؤالين بالإيجاب. إنها تحافظ على أساس البرمجة الخطية التي تتكون من قواعد (الأشجار الممتدة) من مشاكل التدفق الفردي للسلع الفردية بالإضافة إلى أقواس إضافية مطلوبة "لربط" هذه الحلول معًا لاستيعاب قيود الحزمة. (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993)

تتطلب تقنيات الحلول المختلفة التي تم وصفها في هذا الفصل خلفية برمجة خطية. قبل مناقشة تقنيات الحل، نصف العديد من تطبيقات مشكلة تدفق السلع المتعددة.

### 3.5.1 تطبيقات مشكلة تدفق السلع المتعددة:

تنشأ مشاكل التدفق للسلع المتعددة في مجموعة واسعة من سياقات التطبيق. في هذا القسم، نأخذ في الاعتبار عدة حالات لنوع واحد من التطبيقات العامة بالإضافة إلى مثال على تخطيط وتخزين الإنتاج ومثال على خطة تخطيط موكب المركبات.

الشكل24 : a: تطور التطبيقات على شبكة التدفقات متعددة السلع. b: مجموع الأعمال المنشورة في التطبيقات




المصدر: (Salimifard و Bigharaz، 2020)

**توجيه السلع المتعددة:** في العديد من تطبيقات مشكلة التدفق متعدد السلع، تتميز السلع بأنها سلع مادية مختلفة، و / أو بسبب وجود نقاط محددة ووجهة مختلفة؛ أي تشترك عدة سلع مميزة ماديًا (مثلا، سلع مصنعة مختلفة) في شبكة مشتركة، أو سلعة مادية واحدة (مثل الرسائل أو المنتجات) تتدفق على شبكة، ولكن للسلعة نقاط متعددة من الأصل والوجهة المحددة بواسطة أزواج مختلفة من العقد في الشبكة التي تحتاج إلى تبادل الإرسال لبعضها البعض. هذا النوع الثاني من التطبيق ينشأ بشكل متكرر في سياقات مشكلة مثل أنظمة الاتصالات أو التوزيع! أنظمة النقل. سنتطرق للعديد من مجالات التطبيق من كلا النوعين.

**شبكات الاتصالات**. في شبكة الاتصالات، تمثل العقد محطات المنشأ والمقصد للرسائل، وتمثل الأقواس خطوط النقل. تحدد الرسائل بين أزواج مختلفة من العقد سلعًا مميزة؛ العرض والطلب على كل سلعة هو عدد الرسائل المراد إرسالها بين العقد الأصلية والمقصد لتلك السلعة. لكل خط نقل قدرة ثابتة (في بعض التطبيقات، تكون سعة كل مسار ثابتة؛ وفي حالات أخرى، قد نتمكن من زيادة السعة بتكلفة معينة لكل وحدة). في هذه الشبكة، مشكلة تحديد الحد الأدنى لتكلفة توجيه الرسائل هي مشكلة تدفق متعدد السلع.

**شبكات الحاسب**. في شبكة اتصالات الكمبيوتر، تمثل العقد أجهزة التخزين أو الأجهزة الطرفية أو أنظمة الكمبيوتر. تتوافق اللوازم والإزالة مع معدلات نقل البيانات بين الكمبيوتر وأجهزة التخزين، وقدرات خط النقل تحدد قيود الحزمة.

**طريق السكك الحديدية**. شبكات النقل. في شبكة السكك الحديدية، تمثل العقد المصدر ونقاط الوصول، وتمثل الأقواس أقسام المسار بين الخطوط. الطلب يقاس بعدد المقطورات (أو أي مقياس آخر يعادل الحمولة) ليتم تحميله على أي قطار. نظرًا لأن النموذج يتحمل تكاليف مختلفة للسلع المختلفة، فإننا نقسم الطلب على حركة المرور إلى فئات مختلفة. تتوافق كل سلعة في هذه الشبكة مع فئة معينة من الطلب بين زوج وجهة ومصدر معين. سعة الحزمة لكل مسار هي عدد السيارات التي يمكننا تحميلها على القطارات المجدولة ليتم إرسالها على هذا المسار (خلال فترة زمنية معينة). تتمثل مشكلة القرار في هذه الشبكة في تلبية طلبات المقطورات بأقل تكلفة تشغيل ممكنة.

**شبكات التوزيع**. في تخطيط أنظمة التوزيع، يهدف الى توزيع المنتجات المتعددة (غير المتجانسة) من المصانع إلى تجار التجزئة باستخدام أسطول من الشاحنات أو عربات السكك الحديدية واستخدام مجموعة متنوعة من رؤوس السكك الحديدية والمستودعات. تحدد المنتجات السلع الأساسية لمشكلة التدفق متعدد السلع، والقدرات المشتركة للمصانع والمستودعات وخطوط السكك الحديدية وممرات الشحن تحدد قيود الحزمة. لاحظ أنه في هذا التطبيق، تحتوي العقد (المصانع والمستودعات) وكذلك الأقواس على قيود الحزمة.

شبكة تصدير واستيراد الحبوب الغذائية. تتوافق العقد في هذه الشبكة مع المواقع المشتتة جغرافياً في مختلف البلدان، والأقواس تتوافق مع الشحنات بواسطة السكك الحديدية والشاحنات والشحن البحري. بين هذه المواقع، والسلع الأساسية هي العديد من الحبوب الغذائية، مثل الذرة والقمح والأرز وفول الصويا. تحدد السعات الموجودة في المنافذ قيود الحزمة.

**تخزين المنتجات الموسمية:** شركة تصنع منتجات متعددة من منتجات موسمية، مع اختلاف الطلبات أسبوعيًا أو شهريًا أو ربع سنوي. لاستخدام القوة العاملة والمعدات الرأسمالية بكفاءة، ترغب الشركة في "سلاسة" الإنتاج، وتخزين الإنتاج قبل الموسم لتكملة إنتاج موسم الذروة. تمتلك الشركة مستودعًا ذو سعة

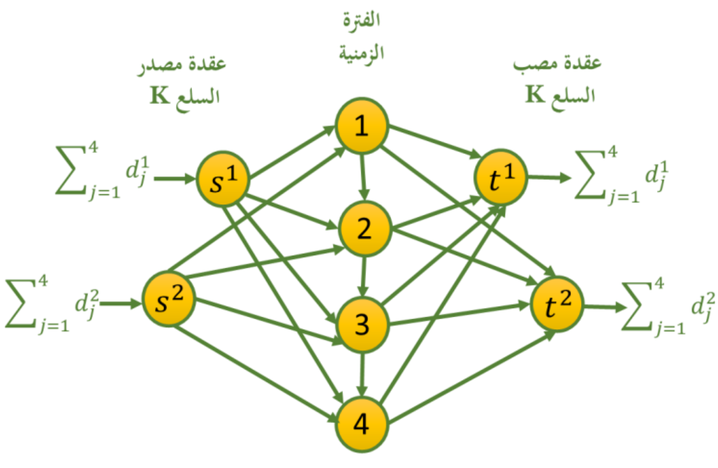
ثابتة R تستخدمه لتخزين جميع المنتجات التي تنتجها. تتمثل مشكلة القرار في تحديد مستويات الإنتاج لجميع المنتجات لكل أسبوع أو شهر أو ربع العام مما سيتيح لها تلبية الطلبات التي تتكبد بأقل تكاليف إنتاج وتخزين ممكنة.

يتمكن النظر إلى مشكلة التخزين هذه كمشكلة تدفق متعدد السلع المحددة على شبكة مناسبة. للبساطة، يوضع في الاعتبار موقف تصنع فيه الشركة منتجين وتحتاج الشركة إلى جدولة إنتاجها لكل فصول السنة. يوضع $d_j^1$ و $d_j^2$ لدلالة على الطلب على المنتجات 1 و 2 في الربع j. يُفترض أن الطاقة الإنتاجية للربع j هي $u_j^1$ و $u_j^2$, وأن تكلفة الإنتاج لكل وحدة لهذا الربع هي $c_j^1$ و $c_j^2$ . يوضع $h_j^1$ و $h_j^2$ تشير إلى تكاليف التخزين (القابضة) للمنتجين من الربع j إلى الربع $j + 1$.

يوضح الشكل **25** الشبكة المقابلة لمشكلة التخزين. على عقدة واحدة لكل فترة زمنية (ربع) وكذلك عقدة مصدر ومغسلة لكل سلعة. العرض والطلب من مصدر تحتوي الشبكة وحوض العقد هو إجمالي الطلب على السلعة على مدى الأرباع الأربعة. تحتوي كل عقدة مصدر $S^k$ على أربعة أقواس صادرة، واحدة تقابل كل ربع. سلعة واحدة فقط تتدفق على كل من هذه الأقواس. يتم ربط تكلفة $c_j^k$ وقدرة $u_j^k$ بالمسار $(s^k, j)$.

وبالمثل، فإن عقدة الحوض $t^k$ لديه أربعة أقواس واردة ؛ نقطة وصول المسار $(j, t^k)$ لها تكلفة صفر وقدرة $d_j^k$. الأقواس المتبقية من النموذج $(j, j + 1)$ لأجل $j = 1, 2, 3$; يمثل التدفق على هذه الأقواس الوحدات المخزنة من الفترة j إلى الفترة $j + 1$. لكل من أقواس التخزين هذه سعة R، وتدفق لكل وحدة من $h_j^1$ للسلعة 1 وتكلفة تدفق لكل وحدة من $h_j^2$ للإنتاجية 2. تشترك السلعتان في قدرة هذا المسار.

**الشكل25 : التخزين الأمثل للمنتجات الموسمية**




**المصدر: من إعداد الباحث**

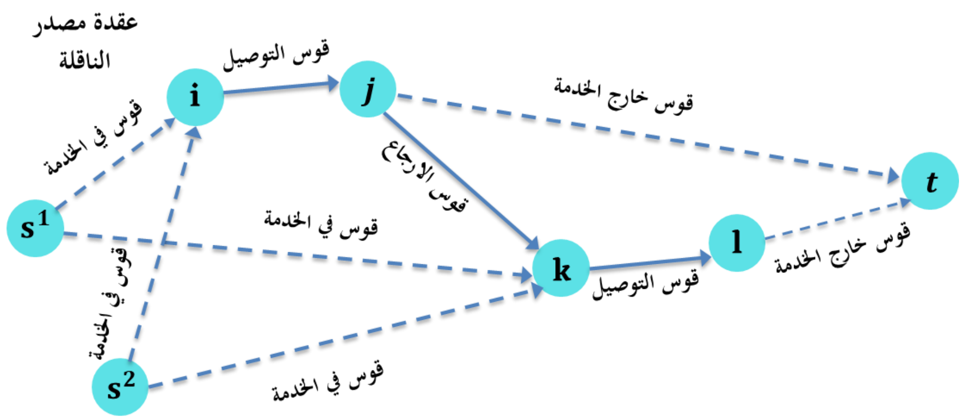
من السهل أن نرى أن كل تدفق عملي متعدد للسلع x في الشبكة يحدد جدول إنتاج ومخزون عملي للمنتجين بنفس تكلفة التدفق.x من خلال تحسين تدفق السلع المتعددة، نجد خطة الإنتاج والمخزون المثلى. مشكلة التخزين التي تمت دراستها هي نموذج بسيط نسبيًا؛ يمكن إعادة صياغتها لتشمل تعقيدات أكثر واقعية: على سبيل المثال، مصاريف النقل التي تتحمل بين مستودع المصنع، ومستودع التجزئة، وتوليفات مصنع التجزئة.

**جدولة ناقلة متعددة المركبات:**

افتراضا أن الهدف هو تحديد التوجيه الأمثل لناقلات زيت الوقود اللازمة لتحقيق جدول زمني محدد لعمليات التسليم: كل شحنة هي شحنة لها تاريخ تسليم معين لبعض السلع من نقطة العرض إلى نقطة الطلب. في أبسط أشكال هذه المشكلة تعتبر منتج واحد (على سبيل المثال، البنزين أو النفط الخام) يتم تسليمها بواسطة نوع واحد من الناقلات. وظهرت كيفية تحديد الحد الأدنى لأسطول الناقلات لتلبية جدول التسليم من خلال حل مشكلة التدفق الأقصى. تدرس مشكلة جدولة ناقلة متعددة المركبات، جدولة وتوجيه أسطول ثابت من الناقلات غير المتجانسة لتلبية مجموعة محددة مسبقًا من شحنات منتجات متعددة. تختلف الصهاريج في سرعاتها وقدرات حملها وتكاليف التشغيل.

لصياغة مشكلة جدولة ناقلة متعددة المركبات باعتبارها مشكلة تدفق متعدد السلع، ندع السلع المختلفة تتوافق مع أنواع مختلفة من ناقلات النفط. تتشابه الشبكة المناظرة لمشكلة جدولة ناقلة متعددة المركبات مع تلك الخاصة بنوع السيارة الفردية، باستثناء أن كل نوع متميز من الناقلات ينشأ عند عقدة مصدر فريدة من نوعها $S^k$. تحتوي هذه الشبكة على أربعة أنواع من الأقواس (انظر الشكل **26** للحصول على مثال جزئي بنوعين من الصهاريج): أقواس أثناء الخدمة، أقواس خارج الخدمة، أقواس التسليم، ومسار الإرجاع. يتوافق المسار أثناء الخدمة مع الاستخدام الأولي لنوع الناقلة؛ تكلفة هذا المسار هي تكلفة انتقال الناقلة في منشأ الشحنة. وبالمثل، يتوافق مسار خارج الخدمة مع إزالة الناقلة من الخدمة. يمثل مسار التسليم (i، j) شحنة من الأصل i إلى الوجهة j؛ تكلفة $C_{ij}^{k}$ من هذا المسار هي تكلفة التشغيل لنقل الشحنة بواسطة ناقلة من النوع k. يشير مسار الإرجاع (j، k) إلى حركة ("النقل الخلفي") لناقل فارغ، بتكلفة مناسبة، بين إثنين من الإرساليات المتتالية (i، j) و (k، I).

**الشكل26 : مشكلة جدولة الناقلات لعدة مركبات**




المصدر: من إعداد الباحث

تبلغ سعة كل مسار في الشبكة 1. تحتوي أقواس الشحن على سعة حزمة تضمن خدمات مسار واحد على الأكثر في النوع. يحتوي كل مسار شحن أيضًا على تدفق أقل من وحدة واحدة، مما يضمن أن الجدول الزمني المختار يقوم بالفعل بتسليم الشحنة. قد تحتوي بعض الأقواس أيضًا على قدرات قائمة على السلع الأساسية $u_{ij}^{k}$. على سبيل المثال، إذا لم يكن باستطاعة الصهريج من النوع 2 التعامل مع الشحنة على المسار(i, j), فيتم تعيين $u_{ij}^{2} = 0$. علاوة على ذلك، إذاكان من الممكن أن يستخدم الصهريج 2 مسار الإرجاع (j, k), ولكن لا يمكن للناقلة 1 (نظرًا لأنه بطيء جدًا في إجراء الاتصال بين مرسلي السفن)، يتم تعيين $u_{ij}^{1} = 0$. (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993)

**جدولة شركات الطيران** هي مجال آخر تطبيق مهم لهذا النوع من النماذج. في هذا السياق المشكل، تكون المركبات من أنواع مختلفة من الطائرات في أسطول شركة طيران (على سبيل المثال، طائرات بوينج Boeing أو McDonald Douglas DC lOs). تمثل أقواس التسليم في هذا السياق مشكلة مسارات الطيران التي ترغب شركة الطيران في تغطيتها.

قد يُلاحظ أنه في هذه الصيغة لمشكلة جدولة ناقلات متعددة المركبات، تم الاهتمام بالحلول الصحيحة لمشكلة تدفق السلع المتعددة .لا يجب أن تكون الحلول التي حصلت عليها خوارزميات تدفق السلع المتعددة الموضحة في هذا الفصل متكاملة. ومع ذلك، قد يكون الحل الكسري مفيدًا في عدة حالات على سبيل المثال، قد نتمكن من تحويل الحل غير المتكامل إلى حل متكامل (ربما، دون المستوى الأمثل) عن طريق تحويل

بسيط، أو كما ذكرنا سابقًا، قد نستخدم الحل غير التكاملي كحل ملزم في حل المشكلة ذات القيمة الصحيحة بواسطة فصل وحصر مراحل التعداد.

### 4.5.1 شروط الأمثلية:

قبل اعتماد أي مشكلة جديدة، نبدأ بتحديد شروط الأمثلية لوصف حل مناسب. القيام بذلك يسمح بتقييم ما إذا قد توصلنا إلى الحل الأمثل للمشكلة أم لا. كما يسمح بتفسير العديد من الخوارزميات على أنها طرق خاصة لحل ظروف الأمثلية، وفي العديد من الحالات، اقترحت أساليب حسابية جديدة لحل المشكلة التي يتم دراستها. تخدم شروط الأمثلية لمشكلة تدفق السلع المتعددة نفس الأهداف؛ لذلك قبل مناقشة الخوارزميات لحل المشكلة، يتم وصف هذه الشروط. يتم افتراض أن تدفق المتغيرات $x_{ij}^{k}$ ليس لديهم حدود تدفق فردية, وهذا ان كل $u_{ij}^{k} = +\infty$ في الصياغة (**1**).

نظرًا لأن مشكلة تدفق السلع المتعددة هي برنامج خطي، يمكننا استخدام شروط تحسين البرمجة الخطية لوصف الحلول المثلى لهذه المشكلة. تفترض هذه الشروط شكلًا بسيطًا ومألوفًا بشكل خاص لمشكلة تدفق السلع المتعددة. نظرًا لأن صياغة البرمجة الخطية (**1**) للمشكلة لها قيد حزمة واحد لكل مسار (i, j) من الشبكة وقيد توازن تدفق واحد لكل تركيبة عقدة سلعة، يشتمل البرنامج الخطي الثنائي على نوعين من المتغيرات الثنائية: سعر $w_{ij}$ على كل مسار (i, j) وسعات العقد $\pi^{k}(i)$ لكل مجموعة من سلعة k وعقدة i. باستخدام هذه المتغيرات الثنائية ، نقوم بتعريف التكلفة المنخفضة $c_{ij}^{\pi,k}$ للمسار (i, j) فيما يتعلق بالسلعة k على النحو التالي:

$$c_{ij}^{\pi,k} = c_{ij}^{k} + w_{ij} - \pi^{k}(i) + \pi^{k}(j)$$

في تدوين المصفوفة، هذا التعريف هو $c^{\pi,k} = c^{k} + w - \pi^{k}N$

يلاحظ أنه نظرا إلى السلعة الثابتة k، فإن هذه التكلفة المخفضة تشبه التكلفة المخفضة التي استخدمت مسبقًا من أجل الحد الأدنى من مشكلة تدفق التكلفة؛ الفرق هو أنه يضاف الآن سعر المسار $w_{ij}$ إلى تكلفة المسار $c_{ij}^{k}$. نلاحظ أنه مثلما وفرت قيود الحزمة رابطًا بين متغيرات تدفق مختلف السلع المستقلة $x_{ij}^{k}$، توفر أسعار المسار $w_{ij}$ رابطًا بين التكلفة المستقلة للسلعة الأخرى المخفضة. (Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or, 1993)

لاستخدام نظرية ازدواجية البرمجة الخطية لوصف الحلول المثلى لمشكلة التدفق متعدد السلع، نكتب أولاً المشكلة الثنائية المتعلقة بتدفق السلع المتعددة (**1**):

$$- \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} w_{ij} + \sum_{k=1}^{k} b^k \pi^k \qquad \text{تعظيم}$$

قيود:

$$c_{ij}^{\pi,k} = c_{ij}^k + w_{ij} - \pi^k(i) + \pi^k(j) \geq 0 \qquad \text{for all } (i, j) \in A \text{ and all } k = 1, \ldots, K,$$
$$w_{ij} \geq 0 \qquad \text{for all } (i, j) \in A.$$

تنص شروط الأمثلية للبرمجة الخطية، والتي تسمى شروط الركود التكميلي (للأمثلية)، على أن الحل الابتدائي الممكن x والحل الابتدائي الثنائي ($w, \pi^k$) هو الأمثل للمشاكل المعنية إذا وفقط إذا كان ناتج كل متغير أولي (ثنائي) والراكد في القيد ثنائي (أولي) معدوما. شروط الركود التكميلية للزوج الأولي–الثنائي لمشكلة تدفق السلع المتعددة تفترض النموذج الخاص التالي. (نستخدم $y_{ij}^k$ للدلالة على قيمة محددة لمتغير التدفق $x_{ij}^k$).

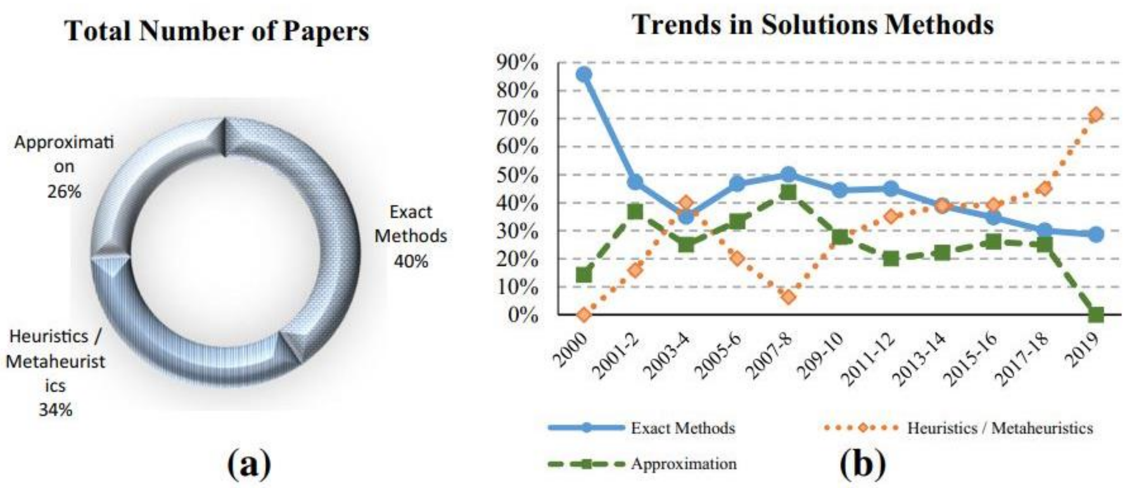
### 5.5.1 شروط الركود التكميلية لتدفق السلع المتعددة:

تدفقات السلع $y_{ij}^k$ هي الأمثل في مشكلة تدفق السلع المتعددة (**1**) مع كل منها $+\infty$ = $y_{ij}^k$ فقط إذا كان ذلك ممكنًا، وبالنسبة لبعض الخيارات لأسعار المسار (غير السالبة) $w_{ij}$ و(غير محددة الاشارة) إمكانات العقدة $\pi^k(i)$, التكاليف المنخفضة وتدفقات المسار تلبي شروط الركود التكميلية التالية:

نظرًا لأن هذه التدفقات $y_{ij}^k$ هي الأمثل والتدفقات $w_{ij}$ هي أسعار المسار المثلى لمشكلة التدفق متعدد السلع (**1**)، فإن هذه المتغيرات مع مجموعة من العقد المحتملة $\pi^k(i)$ تلبي حالة الركود التكميلي (**2**أ). حاليا، تعد شروط (**2.2**أ) و (**2.3**أ) أفضل شروط الأمثلية لمشكلة الحد الأدنى لتدفق التكلفة بدون سعة بالنسبة للسلعة k مع تكاليف المسار ($c_{ij}^k + w_{ij}$). تتضمن هذه الملاحظة أن التدفقات $y_{ij}^k$ توفر الحل لمشكلة تدفق التكلفة الدنيا في هذا النموذج.

تبين هذه الخاصية أنه يتمكن استخدام منهج متسلسل للحصول على أفضل أسعار المسار وإمكانيات العقد. في الأقسام القليلة التالية، تُستخدم هذه الملاحظة لتطوير وتقييم الخوارزميات لحل مشكلة التدفق متعدد السلع. يوضح الشكل التالي تطور الأبحاث والتطبيقات لتقنيات الحل في شبكة التدفقات المتعددة:

الشكل 27: a: مجموع الأبحاث b: تطور الأبحاث لتقنيات الحل في شبكة التدفقات متعددة السلع




**المصدر**: (Salimifard و Bigharaz، 2020)

## 6.1 تقنيات الحل لنماذج التدفقات متعددة السلع:

### 1.6.1 طريقة لاغرانج:

لتطبيق طريقة لاغرانج على مشكلة التدفق متعدد السلع، نربط مضاعفات لاغرانج غير السالبة بـ $w_{ij}$ مع قيود الحزمة (**1.2**)، مما يخلق المشكلة الفرعية لاغرانج التالية من:

$$L(w) = \min \sum_{1\le k\le K} c^k x^k + \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}\left(\sum_{1\le k\le K} x_{ij}^k - u_{ij}\right) \qquad (4.1)$$

$$L(w) = \min \sum_{1\le k\le K} \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij}^k + w_{ij})x_{ij}^k - \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}\, u_{ij} \qquad (4.1)$$

$$\mathcal{N}x^k = b^k \quad \text{لكل} \quad k = 1,\dots,k, \qquad (4.3)$$

$$x_{ij}^K \ge 0 \quad \text{لكل}\ (i,j)\in A \quad \text{وكل} \quad k = 1,2,\dots,k. \qquad (4.4)$$

يلاحظ أنه إذا كان $-\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}u_{ij}$ في دالة الهدف للمشكلة الفرعية للاغرانج يبقى ثابت لأي اختيار معين لمضاعفات لاغرانج، بالنسبة لأي قيمة معطاة لهذه المضاعفات، هذا المصطلح ثابت وبالتالي يمكن تجاهله. دالة الهدف الناتجة عن المشكلة الفرعية للاغرانج لها تكلفة $c_{ij}^k + w_{ij}$ المرتبطة بكل متغير تدفق $x_{ij}^k$. نظرًا لعدم احتواء أي من القيود في هذه المشكلة على متغيرات التدفق لأكثر من سلعة واحدة، فإن المشكلة تتجزأ إلى أجزاء مشاكل تدفق الحد الأدنى من التكلفة، واحدة لكل سلعة. وبالتالي، لتطبيق إجراء الأمثلية على هذه المشكلة، بالتناوب (1) نحل مجموعة من تدفق الحد الأدنى من التكلفة (للحصول

على قيمة ثابتة لمضاعفات للاغرانج (w مع معاملات التكلفة $w_{ij}$ + $c_{ij}^{k}$, و (2) تحديث المضاعفات.
في هذه الحالة، إذا كانت $y_{ij}^{k}$ تشير إلى الحل الأمثل للحد الأدنى من المشاكل الفرعية لتدفق التكلفة عندما يكون لمضاعفات للاغرانج القيمة $w_{ij}^{q}$ في التكرار الرابع، تصبح صيغة تحديث التدرج الفرعي:

$$w_{ij}^{q+1} = \left[ w_{ij}^{q} + \theta_q \left( \sum_{1 \le k \le K} y_{ij}^{k} - u_{ij} \right) \right]^{+}.$$

في هذا التعبير، تدل العلامة $[\propto]^{+}$ على الجزء الموجب من$\propto$ , أي، كحد أقصى $(0, \propto)$ يمثل العدد القياسي $\theta_q$ حجمًا للخطوة يحدد مدى انتقالنا من الحل الحالي $w_{ij}^{q}$. يلاحظ أن صيغة التحديث هذه تزيد المضاعف $w_{ij}^{q}$ على مسار (i, j)بالمقدار $uij - \Sigma_{1 \le k \le K}\ y_{ij}^{k}$ إذا كانت الحلول المشكلة الفرعية $y_{ij}^{k}$ تستخدم أكثر من السعة المتاحة من هذا المسار. إذا، فإن الانخفاض يسبب مضاعف $w_{ij}^{q+1}$ لتصبح سالبة، ويتم تقليل المضاعف إلى قيمة الصفر. تُختار أحجام الخطوة $\theta_q$ للتكرار $q=1,2,\ldots$.
نلاحظ أنه كلما طبقنا طريقة لاغرانج على أي برنامج خطي، مثل مشكلة التدفق متعدد السلع، فإن القيمة المثلى $L^{*}= \max_{w \ge 0} L(w)$ مشكلة لاغرانج المضاعف تساوي قيمة دالة الهدف المثالية $Z^{*}$ للبرنامج الخطي. (Dai, Sun, & Wandelt, 2016)

يعد استخدام تحسين المستوى الفرعي لحل مشكلة مضاعف لاغرانج مهما لعدة أسباب.

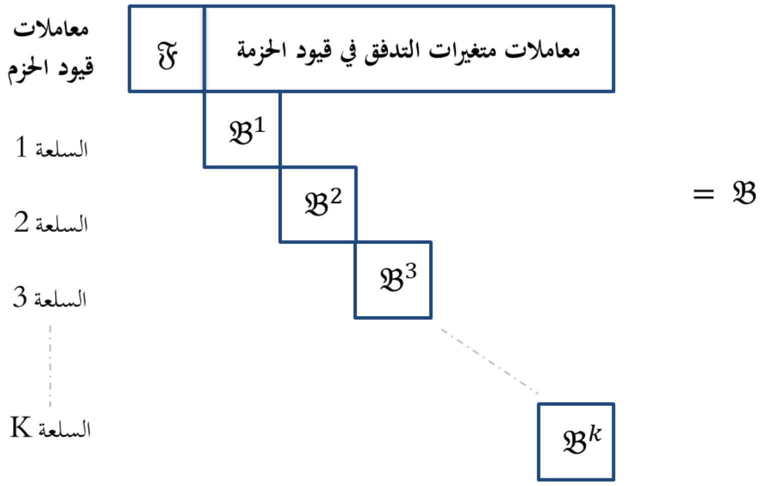
أولاً، يتيح لنا منهج الحل هذا استغلال بنية تدفق الشبكة الأساسية

ثانياً، تعد الصيغ الخاصة بتحديث مضاعفات لاغرانج $W_{ij}$ بسيطة جدًا وسهلة الترميز في برنامج الكمبيوتر. ومع ذلك، لديها أيضا بعض القيود. لضمان التقارب، نحتاج إلى اتخاذ أحجام صغيرة؛ نتيجة لذلك، لا تتقارب الطريقة بسرعة كبيرة. ثالثا، الطريقة تعتمد على الثنائية، وعلى الرغم من أنها تتقارب مع المتغيرات الثنائية المثالية $W_{ij}$، إلا أن الحلول المثلى $y_{ij}^{k}$ لحل المشاكل الفرعية لا تحتاج إلى أن تؤول للحل الأمثل لمشكلة التدفق متعدد السلع. لكن إذا قمنا بتعيين مضاعفات لاغرانج على قيمها المثلى قد يكون لهذه المشاكل الفرعية أيضًا حلول مثالية أخرى لا تفي بقيود الحزمة.

قد يُلاحظ أنه يمكن أيضًا الجمع بين طريقة لاغرانج مع البرمجة الخطية لاستخدامها لتطوير "أساس متقدم" لبدء صياغة البرمجة الخطية. (Ravindra K. Ahuja, ، Thomas L. Magnanti, ، و James B. Or, 1993)

نلجأ بعد ذلك إلى حل بديل، يُعرف باسم تجزئة Dantzig-Wolfe، لحل مشكلة مضاعف لاغرانج. يستلزم هذا النهج مزيدًا من العمل في كل تكرار لتحديث مضاعفات لاغرانج لحل البرنامج الخطي ولكنه أثبت أنه يتقارب بشكل أسرع من إجراء تحسين المستوى الفرعي للعديد من فئات المشاكل.

**الشكل178 : أساس أولي يتكون من أسس المشاكل الفرعية للسلع الفردية**




المصدر: من إعداد الباحث

### 2.6.1 **طريقة توليد الأعمدة:**

#### **1.2.6.1 نبذة تاريخية لطريقة توليد الاعمدة:**

تم استخدام طريقة توليد الأعمدة لأول مرة في عام 1961 بواسطة Gilmore و Gomory لحل مشكلة مخزون القطع. منذ ذلك التاريخ ، أتاحت طريقة توليد الأعمدة حل عدد كبير من البرامج الخطية التي تحتوي على عدد كبير جدًا من المتغيرات. ثم بدأ اعتماد هذه التقنية لحل البرامج الخطية الصحيحة بواسطة Desrosiers et al. حيث جمع بين هذه الطريقة مع طريقة الفصل والحد؛ ما سمح له باستخدامها بنجاح في عدد كبير من مجالات التطبيق (Mehdi Lamiri, 2007)

تعتبر طريقة تكرارية تستخدم في حل البرامج الخطية، بدلاً من استخدام كامل البرنامج الخطي، يتم تقسيمها إلى مشكلة رئيسية مقيدة (RMP) مع واحد أو أكثر من المشاكل الفرعية (SP). RMP هو ببساطة البرنامج الخطي الأولي مقيد مع مجموعة فرعية من المتغيرات. تُستخدم المشاكل الفرعية (SP) لتوليد متغيرات جديدة لRMP . يجب أن يكون لهذه المشاكل الفرعية خاصية توليد متغيرات جديدة إذا كان بإمكانها

تحسين حل RMP حتى التأكد من عدم وجود متغيرات يمكنها تحسين حل RMP. قد يكون من المفيد تطبيق مثل هذه التقنية عندما يكون عدد المتغيرات كبيرا. لتطبيق طريقة توليد الأعمدة على مشكلة ما، يجب أولاً ايجاد صيغة تفي بالشروط المذكورة أعلاه. حيث نجد هذا هو الحال بالنسبة لعدد كبير من مشاكل جولات المركبات. هناك مشكلة عامة في جولات المركبات حيث يمكن تلبية طلبات العديد من العملاء باستخدام مسارات مختلفة. قد تكون أنواع الرحلات المختلفة بسبب مستودعات مختلفة، وقدرات مركبة مختلفة، وساعات عمل مختلفة، وما إلى ذلك.

تحديد المتغيرات والمعلمات التالية. ليكن $\Omega^t$, $t \in T$, مجموع الجولات الممكنة من نفس النوع t, في كل جولة $p \in \Omega^t$, $t \in T$ , ترتبط المعلمات التالية: $C_p^t$ الكلفة, و $V_{ip}^t$, $i \in N$, يأخذ القيمة 1 إذا كان العميل i تمت تلبيته بواسطة الجولة P و 0 خلاف ذلك. يمكننا تحديد قيمة $k_t$, $t \in T$ كأقصى عدد من جولات النوع t. أخيرًا، متغير ثنائي $\theta_p^t$ تحدد لكل جولة $p \in \Omega^t$, $t \in T$, يأخذ القيمة 1 إذا كانت الجولة p جزءًا من الحل و 0 خلاف ذلك.

يمكن بعد ذلك صياغة مشكلة جولة في المركبة كمشكلة تجزئة مع قيود إضافية:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{p \in \Omega^t} c_p^t \theta_p^t \tag{2.1}$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{p \in \Omega^t} v_{ip}^t \theta_p^t = 1, \qquad \forall\, i \in \mathcal{N} \tag{2.2}$$

$$\sum_{p \in \Omega^t} \theta_p^t \leq \mathcal{K}^t, \qquad \forall\, t \in \mathcal{T} \tag{2.3}$$

$$\theta_p^t \in \{0,1\}, \qquad \forall\, p \in \Omega^t, \forall\, t \in \mathcal{T}. \tag{2.4}$$

دالة الهدف (**2.1**) تهدف إلى تدنية التكلفة الإجمالية. القيود (**2.2**) تضمن زيارة كل عميل مرة واحدة فقط في جولة واحدة. القيود (**2.3**) تحدد إذا لزم الأمر، عدد الجولات من كل نوع t. من هذه الصيغة، يمكن تطبيق طريقة لتوليد الأعمدة لحل المشكلة. (Desaulniers, Desrosiers, & Solomon, 2006)

على الرغم من أن هذه الصيغة تشمل عددًا كبيرًا من المتغيرات لمشكلة جولات المركبات، إلا أنها لا تغطي جميع الاحتمالات. يجب إضافة قيود أخرى إلى النموذج لأخذها في الاعتبار. يتم استخدام توليد الأعمدة

لحل البرنامج الخطي للنموذج والذي يمثل المشكلة الرئيسية. يتم حل المشكلة الرئيسية المقيدة (RMP) بشكل متكرر لمجموعة فرعية من المتغيرات والعديد من المشاكل الفرعية، واحد لكل نوع جولة t . حل نموذج RMPيوفر الحل الأولي والحل الثنائي. يتم نقل هذا الحل الثنائي إلى المشاكل الفرعية التي تهدف إلى إنشاء متغيرات بتكلفة منخفضة سلبا لإضافتها إلى RMP. ثم يتم حل هذا الأخير مرة أخرى في التكرار التالي مع زيادة مجموعة فرعية من المتغيرات. تنتهي هذه الطريقة عندما لا توجد مشكلة فرعية يمكنها توليد متغير بتكلفة منخفضة سلبا. يمكننا بعد ذلك أن نستنتج أن حل RMP هو الأمثل.

يمكن حل RMP عن طريق خوارزمية البرمجة الخطية مثل طريقة السمبلكس المراجعة. المشاكل الفرعية (Irnich, Desaulniers, et. 2005) هي مشاكل أقصر مسار أولي مع قيود الموارد.

من أجل الحصول على حلول كاملة، من الممكن تداخل طريقة توليد أعمدة بطريقة الفصل والحصر، branch-and-bound لتسمى هذه الطريقة بالفصل والسعر branch-and-price (Barnhartet al., 1998b;Desaulnierset al., 1998a)

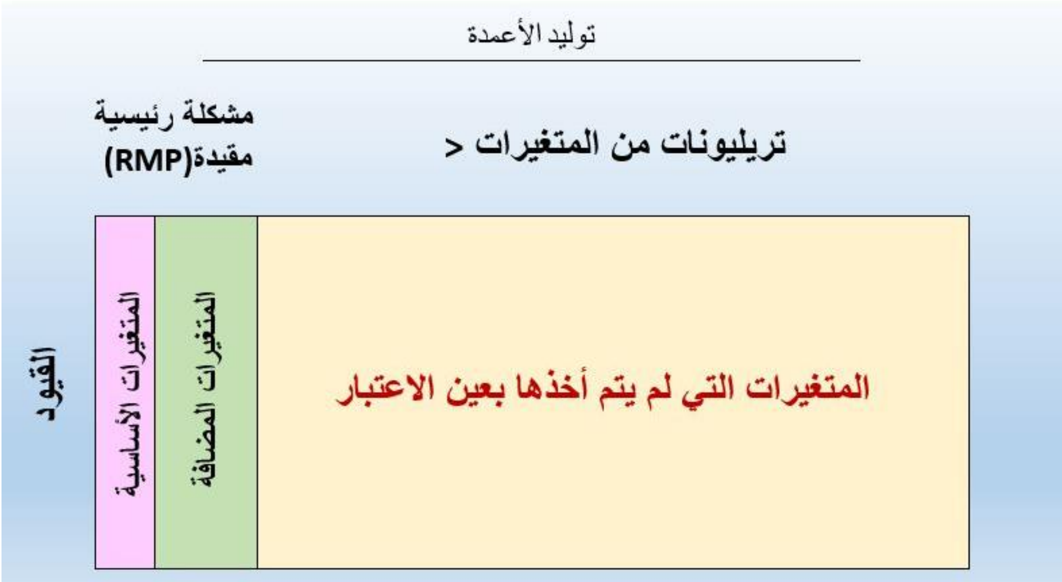
ظهرت طريقة توليد الأعمدة في بداية الستينيات على أساس مبدأ تجزئة Danzig and Wolfe لأي برنامج خطي وأيضًا بشكل مباشر لمشكلة القطع (Gilmore et al، 1961). منذ ذلك الحين، كانت هناك العديد من الأبحاث حول هذا الموضوع (Desrosiers et al.، 1995، Desaulniers et al.، 1998a، Barnhart et al.، 1998b، Lübbecke and Desrosiers، 2005) وكذلك كتاب (Desaulniers et al. 2005).

(1999) KOHL والآخرون قدموا فكرة القطع k-path. لقد اختبروا فقط القطع ثنائية الاتجاه فقط ولكن بنجاح كبير. لقد أثبت (1999) Cook and Rich أن تطبيق المقاطع العرضية لـ $k \geq 3$ يمكن أن يزيد بشكل كبير من الحدود الداخلية. Jepsen وآخرون. (2008) طبقوا شرائح Chvátal-Gomory المحددة في متغيرات المشكلة الرئيسية وأظهرت كيفية تعديل المشكلة الفرعية لأخذها بعين الاعتبار.

على مستوى المشكلة الفرعية، تم تطوير العديد من الاستراتيجيات. وضعت Irnich et Villeneuve(2006) إجراءً للقضاء على الدورات k لأجل الـESPPRC) مشكلة أقصر مسار ابتدائي مع قيود الموارد) للحصول عليها بسبب القيم العشوائية. كما تم إجراء العديد من الدراسات حول هذا الموضوع ( Feilletet al., 2004, 2007;Chabrier, 2006; Righini et Salani, o 2006)، حيث تمت إضافة الموارد لضمان الدقة. Righini et Salani (2008) et (Bolandet al. 2006) تم تطويرها بشكل مستقل عن الخوارزميات المشابهة لتجد أن الموارد تضاف ديناميكيًا إذاكانت الجولات التي تم العثور عليها ليست أولية.

هناك طريقة أخرى تم استخدامها حديثا على (مشكلة في توجيه المركبات مع نوافذ الوقت) للاستفادة من توليد الأعمدة وهي التعاون مع الأساليب الارشادية. اقترح (Danna et Le Pape 2005) طريقة تدمج بين توليد الأعمدة، وبرمجة في الأعداد الصحيحة (يعتمد على طريقة الفصل والحصر) وديناميكيات وصفية (بحث في المعزول أو شارات). على سبيل المثال) للحصول على حلول كاملة خلال عملية القرار (Desaulnierset al. 2008) قدموا طريقة من بحث في المعزول لحل المشكلة في بداية القرار من خلال توليد الأعمدة عند وجود العديد من الأعمدة ذات التكلفة السلبية. وقد طوروا أيضًا كمشكلة فرعية قصيرة الأجل مقيدة جزئيًا بالموارد حيث يتم فرض العنصر فقط على مجموعة فرعية من العقد يتم اختيارها ديناميكيًا. تم أيضًا تطبيق توليد الأعمدة على العديد من مشكلات توجيه المركبات الأخرى، بما في ذلك التجميعات واالتوصيلات. ( Dumaset al., 1991; Savels-bergh et Sol, 1995; Ropke et Cordeau, 2009; Guti ́errez-Jarpaet al., 2010) مع التسليم المشترك (Gendreauet al., 2006; Desaulniers, 2010; Archettiet al., 2009b) ومع طلبات احتمالية، (Christiansen et Lysgaard, 2007). كما أنه يستخدم بشكل شائع في مناطق النقل الأخرى لحل مشاكل جداول المركبات وجداول الطاقم، من بين أمور أخرى، في النقل الحضري. ( Ribeiro et Soumis, 1994; Desaulnierset al., 1998b; Desrochers et Soumis, 1989; Haaseet al., 2001) في النقل الجوي (Desaulnierset al., 1997; Barnhartet al., 1998a; Vanceet al., 1997; Gamacheet al., 1999; Klabjanet al.,2002; Boubakeret al. 2010، )، في النقل بالسكك الحديدية (Ziaratiet al.، Peeters et Kroon, 1997; Cordeauet al.,2001a; ، 1997; 2008; Huisman, 2007) وفي النقل البحري ( Christiansen et Nygreen, 2006; Gronhauget al., 2010) . هناك أيضًا تطبيقات لهذه الطريقة في مجالات أخرى مختلفة، لا سيما في الإنتاج والاتصالات السلكية واللاسلكية.(Prescott-Gagnon، 2011)

**الشكل29 : ملخص طريقة توليد الأعمدة**




المصدر: (Optimization, 2010)

### 2.2.6.1 مفاهيم نظرية لطريقة توليد الأعمدة:

تتناول طريقة توليد الأعمدة أولاً التحويل الخطي للمشكلة [5.2] وتقسيمها إلى جزأين: مشكلة رئيسية وبعض المشاكل الفرعية. المشكلة الرئيسية تنسق القيود الكلية أو القيود المعدلة للنموذج المقدم. يتم اختيار مجموعة فرعية من مسارات التكلفة الدنيا لتغطية جميع العمليات. المشاكل الفرعية، كل واحدة حسب نوع المركبة أو عضو الطاقم أو مجموعة مماثلة، تولد، حسب الحاجة، مسارات تلبي القيود المحلية. يتم الحصول على الحل الأمثل عن طريق حل المشكلة الرئيسية والمشاكل الفرعية بدلاً من ذلك؛ من خلال حل المشكلة الرئيسية في المسارات الحالية، نحصل على أفضل الحلول، ثم نولد، من خلال حل المشاكل الفرعية، مسارات جديدة تمكننا في نهاية المطاف من تحسين هذا الحل للمشكلة الرئيسية. ليكن النموذج التالي:

$$\text{تدنية} \quad \sum_{k=K} c_k Y_k$$

$$\text{القيود} \quad \sum_{k=K} B_k Y_k = d \qquad [5.2]$$

$$\sum_{k=K} D_k Y_k = d$$

$$Y_k \geq 0, \quad \text{صحيح} \quad , \forall k \in K$$

### 3.2.6.1 أسلوب توليد الأعمدة:

تعالج هذه الطريقة معظم القيود المعقدة (على سبيل المثال، اتفاقيات العمل) على مستوى المشاكل الفرعية. يمكن حل المشكلة الرئيسية التي تحتوي على قيود خطية ودالة تكلفة خطية بكفاءة باستخدام خوارزمية simplex. بالنسبة للمشاكل الفرعية، كان من الضروري تطوير مجموعة كاملة من خوارزميات البرمجة الديناميكية، وحلها بالأعداد صحيحة لمشكل أقصر مسار مع القيود غير الخطية ووظائف التكلفة، والتي ليست بالضرورة محدبة (I. Irnich and G. Desaulniers، 2005). دون كل تفاصيل الجوانب الرياضية، من المستحيل تقديم طريقة توليد الأعمدة بشكل كامل. ومع ذلك، سنبرز النقاط الأساسية.

تُسمى مشكلة رئيسية مقيدة مشكلة رئيسية يتم تشكيلها بواسطة مجموعة فرعية من جميع المسارات المقبولة. يوفر حل هذه المشكلة بشكل أساسي ثلاثة أنواع من المعلومات: من ناحية، قيمة دالة التكلفة وقيمة المتغيرات الحالية $Y_k$ ، ومن ناحية أخرى، أشعة المتغيرات الثنائية $\pi_b$ و$\pi_d$ مرتبطة مع قيود الصياغة **[5.2]**.

في خوارزمية simplex لحل البرامج الخطية، يتم اختيار متغير جديد يدخل الأساس من حساب التكلفة المنخفضة للمتغيرات. المتغيرات الأساسية لها قيمة تكلفة مخفضة صفر. إذا كانت التكلفة الدنيا لمتغير غير

$$c_k^{\pi} = c_k - (\pi_b B_k + \pi_d D_k).$$

أساسي سلبية، فيمكنها إدخال الأساس؛ وإلا فإن الحل الحالي هو الأمثل. في سياقنا، يتم التعبير عن شعاع التكاليف المنخفضة المرتبطة بالنوع $k$ من خلال التعبير:

يُستخدم بالضبط نفس النوع من المعلومات لتقييم المسارات التي لم تظهر بعد في المشكلة الرئيسية المقيدة، ولكن يمكن أن يحسن هذا الحل في النهاية. لمعرفة هيكل المسارات التي يجب أن تُبنى، يتوجب حل مشكلة التحسين التي تعد مشكلة أقصر مسار، في نفس الوقت دمج القيود المحلية والأشعة الثنائية الحالية. يتعين هنا حل مشكلة أقصر المسارات مع القيود المحلية التي أدخلت في شكل ملصقات متعددة الأبعاد أثناء دمج المعلومات الثنائية في دالة التكلفة ($\pi_d$ , $\pi_b$) للنوع $k$, يتم تعريف المشكلة الفرعية على الرسم البياني $Gk= (Vk; Ak)$ , دالة التكلفة الجديدة للتدنية تأخذ النموذج:

$$\sum_{(i,j)\in A_k} c_{ijk}^{\pi} X_{ijk},$$

حيث، كما كان من قبل، $X_{ijk}$ هو متغير ثنائي، بينما $C_{ijk}^{\pi}$ يدمج بشكل مناسب في أقواس الرسم البياني $G_k$ المعلومات الثنائية للتغطية والقيود الكاملة الأخرى. $G_k$ هي في الواقع شبكة فضائية حيث تمثل الأقواس أنشطة مختلفة (مثل المهمة، والانتظار، والراحة، والنقل الفارغ، وما إلى ذلك) بينما تكون الرؤوس أماكن في أوقات محددة (على سبيل المثال، المطار، ومحطة السكك الحديدية، ومنطقة التخزين، إلخ...).

لحساب التكلفة المنخفضة $C_{ijk}^{\pi}$ للمسار، نطرح من $C_{ijk}$ التكلفة الأصلية المتغيرات الثنائية المقابلة $\pi_b$و$\pi_d$، يتم ضرب هذه المتغيرات الأخيرة بمساهمة هذا المسار في قيود التغطية في $B_k$ وفي القيود الكاملة الأخرى في $D_k$.

إذا كانت هناك مشكلة فرعية تكون فيها القيمة المثلى لدالة التكلفة المعدلة سالبة، فيمكن للمسار الموجود أن يحسن حل المشكلة الرئيسية المقيدة الحالية ويضاف العمود المقابل لهذا المتغير غير الأساسي إلى بنية المصفوفة. وإلا، عندما تكون قيمة دالة التكلفة لكل المشاكل الفرعية هي صفر، يكون الحل الحالي للمشكلة الرئيسية المقيدة هو الحل الأمثل للتحويل الخطي للمشكلة الرئيسية وتنتهي عملية توليد الأعمدة. يحدد حل المشاكل الفرعية بالتالي تفاصيل المسارات وذلك لإنشاء مصفوفات $B_k$ و$D_k$ للصياغة [5.2]. كما يوفر معيار التوقف لطريقة توليد العمود. (Finke، 2008)

### 4.2.6.1 الحلول التي تلبي القيود التكاملية:

للحصول على الحل بأعداد صحيحة للمشكلة [5.2]، من الضروري اعتماد طريقة الربط والحصر، أي، القرارات المتفرعة والقطع المستوية متوافقة مع طريقة توليد العمود (G. Desaulniers، 1998). في الواقع، لقد نجحت هذه التطورات الرياضية في حل مشكلة مفتوحة معروفة منذ بداية الستينيات عندما بدأت طريقة توليد العمود في استخدامها مع بعض مشاكل الأمثلية، ولكن التقنيات اللازمة للحصول على حلول صحيحة لم يتم تطويرها بشكل جيد بعد.

الصعوبة الرئيسية هي ما يلي. لنفترض أن متغيرات القرار $Y_k$ للمشكلة [5.2] تأخذ فقط قيمًا ثنائية: 1 إذا تم استخدام المسار المقابل في الحل، و0 خلاف ذلك. عندما يكون حل التحويل الخطي للمشكلة الرئيسية كسريًا، فمن السهل إصلاحه عن طريق ربط هذا المتغير إلى 1. في الواقع، إنها مسألة طرح من المتجهات $b$ و$d$ مساهمة هذا العمود وحل مشكلة جديدة أصغر من السابقة. ومع ذلك، لا توجد طريقة بسيطة لتثبيت متغير القرار الى 0. لا يمكننا ببساطة إزالة هذا العمود من المشكلة الرئيسية المقيدة لأنه نظرًا أن جزء من الحل الأمثل للتحويل الخطي، سيتم توليده مرة أخرى بواسطة أحد، مشاكل فرعية.

الحيلة هي إعادة كتابة المشكلة العامة [5.2] كنموذج تدفق متعدد السلع، غير خطي وعدد صحيح في $G_k$ و k € K، مع قيود اقتران ومتغيرات الموارد (D. Villeneuve، 2005.). تمثل كل سلعة k € K نوعًا من المسارات، حسب أفراد الطاقم أو المركبة. تؤخذ قيود تغطية المهام مباشرة في الاعتبار من خلال هيكل قيود التدفق على الأقواس التي تتضمن المهام بينما تحدد قيود الاقتران القيود الكلية الأخرى.بالإضافة إلى ذلك، تعمل متغيرات الموارد، مثل وقت العمل، وحمولة المركبة، والمسافة المقطوعة منذ آخر صيانة، وما إلى ذلك، على صياغة القيود المحلية على مسار واحد. يتم تجميعها على أقواس المسار، والتحقق منها وتحديثها على القمم، في التطبيق العملي لعدة وظائف غالبا ما تكون غير خطية.

تُستغل بنية هذا النموذج الجديد بأسلوب رياضي: تم تطوير تجزئة Dantzig-Wolfe ( G.B. Dantzig and P. Wolfe، 1960) في بداية الستينيات. تنشئ هذه الطريقة بشكل صريح نفس بنيات المشكلة الرئيسية والمشاكل الفرعية التي تم تقديمها من خلال توليد الأعمدة. حتى إذا أضفنا قيودًا جديدة ناشئة عن عمليات الربط والقطع المستوية، تظل آلية التجزئة هذه صالحة لتظهر هذه القيود الجديدة إما في بنية القيود الكلية $D_k$ و k € K والمتجه D، أو أنها تعدل أقصر المسارات للمشاكل فرعية. يمكن لعمليات الربط توفير متغيرات التدفق الثنائية $X_{ijk}$ أو على متغيرات الموارد. وبالتالي، يمكننا على سبيل المثال، إصلاح متغير التدفق عند 0 أو 1، استخدام تقسيم الفواصل الزمنية، أو استخدام قيود معروفة من الأبحاث لتحديد حلول عدد صحيح. يتم تطبيق مبدأ التجزئة في كل مرة من أجل حل التحويل الخطي للمشكلة الرئيسية الجديدة. حل المشكلة الرئيسية، بالنسبة إلمتغيرات المسار $Y_k$ ، الكسري أم لا، يتم تقديمها لصياغة نموذج التدفق متعدد السلع للتحقق مما إذا كانت المتغيرات $X_{ijk}$ هي أعداد صحيحة أم لا. في التطبيقات العملية، يتطلب كل تطبيق استراتيجيات مُكيّفة للتفرّع والقطع تستغل خصائصه. ومع ذلك، يتم وضع الصعوبات النظرية التي تواجه طريقة توليد الأعمدة المطبقة على البرامج بأعداد صحيحة بشكل جانبي (M.E. Lübbecke and J. Desrosiers، 2005,).

### 5.2.6.1 تنوع القيود المحلية:

يستفيد منهج الحل بالتجزئة من قيود المشاكل الحقيقية عن طريق الحفاظ على القيود المحلية على مستوى تكوين المسارات الممكنة. أما بالنسبة لمشكلة أقصر مسار في النوافذ الزمنية، فغالبًا ما يتم التعبير عن هذه القيود المحلية بمساعدة متغيرات الموارد المتراكمة على أقواس المسار، والتحقق منها وتحديثها على القمم، في

التطبيقات العملية مع دالة الهدف غير الخطية. على الرغم من تنوع القيود المحلية، فان معظم دوال الهدف من قمة إلى أخرى هي غير متناقصة. (G. Desaulniers، 1998):

### 6.2.6.1 تطبيقات في شبكات النقل الكبيرة:

أول هذه التطبيقات التي تم تحقيقها في شبكات النقل الكبيرة كانت جدولة سائقي الحافلات والمترو ( M. Desrochers and F. Soumis، 1989)كان هذا في الواقع في أصل البحث الذي أجري من 1984 إلى 1986 بشأن الخوارزميات لأقصر مشكلة في مسار متغيرات الموارد .ومع ذلك، كان من الضروري الانتظار حتى عام 1990 لرؤية أول منشأة تجارية في ليون، فرنسا. في 15 سنة التالية، تم إضافة المنشآت الأخرى في أكثر من 250 مدينة، بما في ذلك طوكيو وسنغافورة وهلسنكي وستوكهولم وفيينا وبرشلونة ونيويورك وشيكاغو. يقع مُحسِّن GENCOL (توليد الأعمدة) الذي يحل النموذج الرياضي [5.2] بواسطة توليد الأعمدة في قلب نظام برمجياتHASTUS الموزع بواسطة GIRO، شركة استشارية في مونتريال لبحوث العمليات.

من أجل التغلب على الصعوبات التي واجهتها البيانات في طوكيو في عام 1993، حدثت العديد من التطورات التقنية. تتألف مشاكل الاختبار من 2000 إلى 3000 رحلة بالحافلة، ورحلات المترو والضواحي، مع فترات عمل مدتها يوم أو يومين، واتفاقيات عمل معقدة للغاية. وبالتالي، كان من المستحيل على المبرمجين اليابانيين إيجاد حلول ترضي جميع قواعد عقدهم. بعد ثلاثة أشهر من بدء المشروع البحثي، والوقت اللازم لنمذجة الشبكة بشكل صحيح وجميع القواعد، أنتج مُحسِّن GENCOL (توليد الأعمدة) حلولًا مع توفير كبير بنحو 15٪ من كشوف المرتبات.

نشأ تطبيقان آخران في النقل الحضري. يمكن أيضًا استخدام المحسِّن لتخصيص الحافلات للطرق: بهدف العثور على طرق المركبات بأقل تكلفة عن طريق اختيار الحافلات من محطات الحافلات في المدينة ( C. Ribeiro and F. Soumis، 1994). أخيرًا، تم دمج GENCOL (توليد الأعمدة) أيضًا في نظام DARSY (نظام الاتصال الهاتفي) للأشخاص المعوقين وكبار السن (J. Desrosiers، 1983). تم إنتاج النموذج الأولي خلال الفترة 1985-1987. كان من الضروري أولاً تطوير خوارزمية جديدة لحل مشكلة أقصر الطرق التي تجمع بين التجميع والتسليم (Y. Dumas J.، 1991). يجب أن ندرك أيضًا أنه في المدن الكندية الكبيرة يوميًا، يحتاج أكثر من 5000 شخص إلى مواصلات ملائمة،

حيث يمكنهم تحديد الساعات المطلوبة. في الماضي، كان على من يطلبون النقل حجز مقعد مقدما في الأسبوع. تتم الآن المسارات المحسّنة في أمسية واحدة، ويتم إدراج طلبات إضافية في سياق العمليات.

فيما يتعلق بالنتائج الحسابية، تمت مصادفة مشكلة في Air Canada لطاقم الطائرة على طائرات DC-9 وA320 في شهر واحد و5 قواعد و11،914 مقطع رحلة. بالنسبة لشركة الطيران هذه، تمثل التكاليف المتغيرة 7.80٪ من التكلفة الإجمالية للتناوب. أدى الحل الذي وجده مُحسِّن GENCOL (توليد الأعمدة) إلى خفض هذه القيمة إلى 2.03٪ فقط.

تم دمج مُحسِّن GENCOL (توليد الاعمدة) في Altitude Suit ، وهي مجموعة من المنتجات التي توزعها شركة الاستشارات AD OPT في مونتريال، وهي أحد أقسام شركة Kronos Canadian Systems Inc.، ويستخدمها أكثر من 20 شركة طيران لتحضير تناوب طاقمها، للقيام بالتخطيط الشهري (M. Gamache، 1998)وإدارة أسطول طائراتهم (G. Desaulniers J.، 1997).

كنسبة مئوية، وفورات من نفس الترتيب من حيث الحجم لجميع هذه التطبيقات. قدمت الاختبارات التي تم إجراؤها للتخطيط الشهري في الخطوط الجوية الفرنسية فيما يتعلق بإسناد 3000 دورة إلى 840 من أفراد الطاقم في مطار شارل ديغول في باريس تغطية لأعضاء الطاقم المنتظمين بنسبة 7.6٪ أكثر من الطريقة التي تستخدمها الشركة. لإدارة الأسطول الجوي، أظهرت الاختبارات التي تم إجراؤها على Air Canada أنه بالنسبة لمشكلة تضم ما يقرب من 3000 رحلة أسبوعيًا و 91 طائرة من 9 أنواع مختلفة، عن طريق التصريح بنوافذ زمنية لأكثر من 20 دقيقة أو أقل فيما يتعلق بجدول الرحلات المقترح، ممكن لخفض تكاليف التشغيل بنسبة 8.9 ٪.

بالنسبة لشركات النقل الجوي الكبيرة، تمثل نتائج التحسين هذه وفورات تصل إلى عشرات الملايين من الدولارات سنويًا وتبرير الأموال التي يتم استثمارها في الأبحاث بسهولة.

وبطبيعة الحال، لا تقتصر طريقة الحل حسب توليد الأعمدة للنموذج الرياضي على التطبيقات المقدمة في هذا النص فقط في النقل الحضري والجوي والسكك الحديدية. بل نجد أيضًا البعض في مجال النقل البحري لإدارة المخزونات الكيميائية (M. Christiansen and B. Nygreen، 2005)؛ في مجال إدارة الطاقة عن طريق التحكم (انقطاع التيار الكهربائي) في سخانات المياه الكهربائية (J.C. Laurent، 1995) ؛ في الإنتاج للتصنيع المرن (S. Gélinas and F. Soumis، 2005)، إلخ. في الواقع،

كل مشكلة يمكن تمثيل حلها من خلال مجموعة من المسارات في شبكة المكان والزمان يشكل مجال التطبيقات المحتملة للنموذج المقدم (Finke, 2008) .

**الجدول 1: تطبيقات الخوارزميات المعتمدة على توليد الأعمدة**

| المراجع | تطبيق | المراجع | تطبيق |
|---|---|---|---|
| (Ribeiro et al., 1989) | تخصيص حركة المرور Traffic assignment | (Desrosiers et al., 1984; Desrochers et al., 1992; Kohl et al., 1999) | جولات المركبة مع نوافذ للوقت Vehicle routing with time windows |
| (Larsson et al., 2004) | توازن حركة المرور Traffic equilibrium | (Ribeiro and Soumis, 1994; Desaulniers et al., 1998) | جدولة المركبات Vehicle scheduling |
| (Lee and Park, 2001) | تخصيص الفاصل الزمني في الأقمار الصناعية Time slot assignment in a satellite system | (Desaulniers et al., 2001; Haase et al., 2001; Freling et al., 2003) | تزامن المركبات وجدولة الطاقم Simultaneous vehicle and crew scheduling |
| (Günlük et al., 2002) | مزادات الطيف Spectrum auctions | (Savelsbergh and Sol, 1998; Christiansen and Fagerholt, 2002; Lübbecke and Zimmermann, 2003) | الاستلام والتسليم Pickup and delivery |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Jaumard et al., 1991) | المنطق الاحتمالي Probabilistic logic | (Butt and Ryan, 1999) | جولات متعددة مع أعظم تجميع Multiple tour maximum collection |
| (Tombus and Bilgiç, 2004) | تشكيل ائتلاف في نظام متعدد الوكلاء Coalition formation in multiagent systems | (Barnhart and Schneur, 1996) | تصميم شبكة الطيران Air network design |
| (Mehrotra et al., 2001) | إدارة قطع الغيار Management of spare parts | (Hane et al., 1995) | تخصيص الأسطول Fleet assignment |
| (Boland and Surendonk, 2001) | تخطيط التسليم Delivery planning | (Desrochers and Soumis, 1989; Vance et al., 1997; Yan and Chang, 2002; Yan et al., 2002) | جدولة الطاقم Crew scheduling |
| (Wilhelm, 1999) | تصميم نظام التجميع Assembly system design | (Gamache et al., 1999) | تسجيل طاقم الجوي Aircrew rostering |
| (Martins et al., 2003) | ادارة الغابات Forest management | (Jaumard et al., 1998; Mehrotra | جدولة العمال Staff scheduling |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | et al., 2000; Sarin and Aggarwal, 2001; Bard and Purnomo, 2004; Eveborn and Rönnqvist, 2004) | | |
| جدولة الوظائف<br>Job scheduling | (Akker et al., 1999; Chen and Powell, 1999; Akker et al., 2000; Akker et al., 2002) | التسجيل في الدورات<br>Course registration | (Sankaran, 1995) |
| قطع الخزون والتعبئة<br>Cutting stock and bin packing | (Vance et al., 1994; Carvalho, 1999; Vanderbeck, 1999; Alves and Carvalho, 2003) | توجيه السفن وإدارة المخزون<br>Ship routing and inventory management | (Christiansen and Nygreen, 1998) |
| موقع المنشأة<br>Facility location | (Shaw, 1999; Klose and Drexl, 2002) | ادارة سلسلة الامدادات<br>Supply chain management | (Bredström et al., 2004) |
| الوسيط-P<br>P-median | (Ceselli and Righini, 2002; Lorena and Senne, 2004; Senne | تصميم حلقة الشبكة<br>Ring network | (Henningsson et al., 2002) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | design | et al., 2005 | |
| (Persson and Göthe-Lundgren, 2005) | تخطيط الشحنات في مصافي النفط Shipment planning at oil refineries | (Vanderbeck, 1998; Kang et al., 1999; Degraeve and Jans, 2003) | قياس المساحات Lot sizing |
| (Caprara et al., 2001) | فرز التباديل بواسطة الانعكاسات Sorting permutations by reversals | (Jørgensen and Meyling, 2002) | توجيه صندوق التغيير Switch-box routing |
| (Boland et al., 2004) | شعاع في الوقت المحدد في إشعاع السرطان Beam-on time in cancer radiation | (Ebem-Chaime et al., 1996) | تقسيم الدوائر Circuit partitioning |
| (Jeong et al., 2002) | التعبأة بشجرة شتاينر Steiner tree packing | (Sutter et al., 1998) | تحديد مستوى المضاعفات Placement of multiplexers |
| (Mehrotra and Trick, 1996) | تلوين الرسم البياني Graph coloring | (Savelsbergh, 1997) | التخصيص المعمم Generalised assignment |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Bourjolly et al., 1997) | مجموعة مستقرة عظمى Maximum stable set | (Lingaya et al., 2002) | تخصيص مركبات القطارات Car assignment to trains |
| (Mehrotra and Trick, 1998) | التصنيف Clustering | (Jaumard et al., 2002) | تخصيص القناة Channel assignment |

**المصدر**: (Pereira، da-Cunha، و Alvelos، 2005)

### 7.2.6.1 أسلوب طريقة توليد الأعمدة:

لتبسيط العمل، نأخذ بعين الاعتبار حالة خاصة لمشكلة التدفق متعدد السلع: نفترض أن كل سلعة k لها عقدة مصدر واحدة $S^k$ و $t^k$ لعقدة واحدة نقطة وصول ومتطلبات التدفق لوحدات $d^k$ بين هذه المصادر و العقد. يُفترض أيضًا أنه لا تُفرض حدود للتدفق على السلع الفردية بخلاف قيود الحزمة. لذلك، لكل سلعة k، تحدد قيود المشكلة الفرعية $Nx^k=b^k,x^k\geq 0$ تحديد مشكلة أقصر مسار: بالنسبة لهذا النموذج، لأي خيار $W_{ij}$ من مضاعفات لاغرانج لقيود الحزمة، يتطلب تحويل لاغرانج حل سلسلة من مشاكل المسار الأقصر، واحدة لكل سلعة.

### 8.2.6.1 إعادة الصياغة مع مسار التدفقات:

أولاً تُعاد صياغة مشكلة التدفق متعدد السلع باستخدام المسار ودورة التدفقات بدلاً من تدفقات المسار. علما أنه بالإمكان صياغة أي مشكلة في تدفق الشبكة باستخدام المسار ودورة التدفقات. لتبسيط المناقشة إلى أبعد من ذلك، يُفترض أنه مقابل كل سلعة، تكون تكلفة كل دورة W في الشبكة الأساسية غير سلبية. تفي المشكلة بهذا الشرط، على سبيل المثال، إذا كانت تكاليف تدفق المسار كلها غير سالبة. إذا فُرض شرط تكلفة الدورة غير السلبية، ثم في بعض الحلول المثلى لهذه المشكلة، يكون التدفق في كل دورة صفراً، حتى نتمكن من التخلص من متغيرات تدفق الدورة. لذلك، يُفترض أنه يمكن تمثيل أي حل محتمل كمجموع

التدفقات على المسارات الموجهة. فيما يتعلق بتجزئة المسار والدورة، المصمم قليلاً لمشكلة التدفق متعدد السلع.

لكل سلعة k، pk تشير إلى جميع المسارات الموجهة من عقدة المصدر Sk إلى عقدة المصب $t^k$ في الشبكة الأساسية (N, A) = G. في صياغة تدفق المسار، كل متغير قرار f(P) هو التدفق على المسار P بالنسبة للسلعة برتبة k، فإنه يتحدد هذا المتغير لكل مسار موجه P في $P^k$.

كما يوضع $\delta_{ij}$ (p) عبارة عن متغير مؤشر مسار المسار، أي أن $\delta_{ij}$ (p) تساوي 1 إذا كان المسار (i، j) موجودًا في المسار P، و 0 على خلاف ذلك. تنص نظرية تجزئة التدفق على الشبكة على أنه يمكن دائمًا تحليل بعض تدفق المسار المثالي $x_{ij}^k$ إلى مسار التدفق f(p) كما يلي:

$$f(P) = w_{ij}^k \sum_{p \in \mathrm{P}^k}$$

يوضع $\boldsymbol{C^k(P)} = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k\, w_{ij}(P) = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij}^k$ تشير إلى تكلفة وحدة التدفق لكل مسار $p \in P^k$ بالنسبة للسلعة k. يُلاحظ أنه لكل سلعة k، إذا استبدلت متغيرات تدفق المسار في دالة الهدف، نجد أن:

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k \left[\sum_{p \in \mathrm{P}^k} \delta_{ij}(P) f(P)\right] = \sum_{p \in \mathrm{P}^k} c^k(P) f(P)$$

توضح هذه الملاحظة أنه يمكن التعبير عن تكلفة أي حل إما ككلفة تدفقات المسار أو كلفة تدفقات المسار.

عن طريق استبدال متغيرات المسار في تركيبة التدفق للسلع المتعددة، نحصل على صيغة تدفق المسار المكافئة التالية للمشكلة:

$$\sum_{1\le k\le K} \sum_{p \in \mathrm{P}^k} c^k(P) f(P) \qquad \text{تدنية} \qquad (5.1)$$

$$\sum_{1\le k\le K} \sum_{p \in \mathrm{P}^k} \delta_{ij}(P) f(P) \le u_{ij} \qquad \text{لكل } (i,j) \in A, \qquad (5.2)$$

$$\sum_{p \in \mathrm{P}^k} f(P) = d^k \qquad \text{لكل } k = 1,2,\dots,k. \qquad (5.3)$$

$$f(P) \ge 0 \ \text{لكل} \ k = 1,2,\dots,k. \ \text{وكل} \ P \in \mathrm{P}^k \qquad (5.4)$$

في صياغة هذه المشكلة، استندنا إلى نظرية تجزئة التدفق، لقد استندنا إلى نظرية تجزئة التدفق التي تفيد بأنه يمكننا تجزئة أي تدفق مسار ممكن للنموذج $N\ x^k = b^k$ في مجموعة من التدفقات والمسار والدورة بطريقة تجعل المسار يتناسب مع حالة توازن القيد (**5**).

لاحظ أن صياغة المسار لمشكلة التدفق متعدد السلع لديها بنية قيد بسيطة للغاية. تحتوي المشكلة على قيد واحد لكل مسار (i، j) والذي ينص على أن مجموع المسار الذي يتدفق عبر المسار هو $U_{ij}$ على الأكثر، وقدرة المسار.

علاوة على ذلك، فإن المشكلة لها قيد واحد (**5.3**) لكل سلعة k والتي تنص على أن إجمالي التدفق على جميع المسارات التي تربط العقدة المصدر $S^k$ ويجب أن تساوي العقدة $t^k$ للسلعة k يجب أن يساوي الطلب $d^k$ لهذه السلعة.

لشبكة ذات عقد n، الأقواس m، والسلع K، تحتوي صياغة تدفق المسار على قيود m + K (بالإضافة إلى قيود عدم السلبية المفروضة على قيم تدفق المسار). عكس ذلك، تحتوي صياغة المسار (**1**) على قيود m + nK نظرًا لأنها تحتوي على قيد توازن جماعي واحد لكل تركيبة عقدة وسلعة. على سبيل المثال، تحتوي الشبكة ذات العقد n = 1000 و m = 5000 أقواس ومع سلعة بين كل زوج من العقد على ما يقرب من $k \approx n^2 = 1{,}000{,}000$ لذلك، تحتوي صياغة تدفق المسار على حوالي 1،005،000 قيود. في المقابل، تحتوي صياغة تدفق المسار على حوالي 1،000،0005000 من القيود. ولكن الفرق أكثر وضوحًا: كون السبب لا يظهر أي مسار في أكثر من واحدة من القيود (**5.3**)، يمكننا تطبيق طريقة خاصة من simplex، والمعروفة باسم طريقة السمبلكس المراجعة ، لحل المسار وصياغة التدفق بكفاءة عالية. على الرغم من أن أساس البرمجة الخطية في مثالنا يبلغ حجمه 1005000 مع 10005000, إن طريقة السمبلكس المراجعة قادرة على أداء جميع حسابات المصفوفة الخاصة بها على أساس أصغر بكثير من الحجم 5000 مع 5000. تعمل هذه الطريقة بشكل أساسي على حل المشكلة كما لو كانت تحتوي على قيود حزمة m، والتي تعني، بالنسبة لعينة البيانات هذه، أنه يمكن حل برنامج خطي مع 5000 قيد فقط بدلاً من أكثر من مليار قيد في صياغة المسار. ومع ذلك، فإن هذا التوفير في عدد القيود يأتي بتكلفة، نظرًا لأن صياغة تدفق المسار بها متغير لكل مسار يربط بين عقدة المصدر ونقطة وصول العقدة لكل من السلع. عادة ما يكون عدد المتغيرات هائلاً، ويتزايد بشكل كبير في حجم الشبكة. حيث أنه يُتوقّع أن عددًا قليلاً فقط من المسارات سيحمل التدفق في الحل الأمثل للمشكلة. في الواقع،

تسمح نظرية البرمجة الخطية بإظهار أن مسارات K + m على الأكثر تحمل تدفقًا إيجابيًا في بعض الحلول المثلى للمشكلة. لذلك، بالنسبة لمشكلة وجود 1،000،000 سلعة و5000 مسار كما في المثال السابق، يمكننا، من حيث المبدأ، حل تدفق المسار باستخدام 10000000 مسار. نظرًا لأن المشكلة تحتوي على 1،000،000 سلعة، فإن هذا الحل سوف يستخدم مسارين أو أكثر لما لا يقل عن 5000 سلعة ومسار واحد لما لا يقل عن 995،000 سلعة متبقية. إذا تمت معرفة المجموعة الأمثل من المسارات، أو مجموعة جيدة جدًا من المسارات، فيمكن الحصول على حل مثالي (أي قيم لتدفقات المسار) من خلال حل برنامج خطي يحتوي فقط على السلع مع مجموعتين أو أكثر من المسارات. يسمح لنا إجراء البرمجة الخطية السمبلكس المراجعة لحل البرامج الخطية باستغلال هذه الملاحظة.

**شروط الأمثلية**

بالتذكير أن طريقة السمبلكس المراجعة للبرمجة الخطية تحافظ على الأساس في كل خطوة، وباستخدام هذا الأساس يحدد متجه مضاعفات السمبلكس للقيود. نظرًا لأن صياغة مسار المسير (**5**) تحتوي على قيد حزمة واحد لكل مسار وقيد طلب واحد (**5.3**) لكل سلعة، يحتوي البرنامج الخطي الثنائي على $w_{ij}$ متغير ثنائي لكل مسار وآخر $\sigma^k$ متغير ثنائي لكل سلعة K=1.2……K. مع اعتبار المتغيرات الثنائية، لتكون التكلفة المنخفضة $c_p^{\sigma,w}$ لكل مسار متغير f(p) هي:

$$c_P^{\sigma,w} = c^k(P) + \sum_{(i,j)\in P} w_{ij} - \sigma^k.$$

وشروط الركود التكميلية (**2**) لصياغة مسار المشكلة الأصلية تفترض النموذج التالي:

**مسار تدفق شروط الركود التكميلية**. تدفقات مسار السلع f(p) هي الأمثل في صياغة مسار التدفق (**5**) لمشكلة التدفق متعدد السلع، فقط لبعض أسعار المسار وأسعار السلع، تفي التكاليف المنخفضة وتدفقات المسار شروط الركود التكميلية التالية:

$$(1) \quad w_{ij}\left[\sum_{1\le k\le K}\sum_{p\in \mathrm{P}^k} \delta_{ij}(P)f(P) - u_{ij}\right] = 0 \text{ لكل } (i,j)\in A. \qquad (6.1)$$

$$(2) \quad c_P^{\sigma,w} \ge 0 \text{ لكل } k = 1,2,\dots,k. \text{ وكل } P \in \mathrm{P}^k. \qquad (6.2)$$

$$(3) \quad c_P^{\sigma,w} f(P) = 0 \text{ لكل } k = 1,2,\dots,k. \text{ وكل } P \in \mathrm{P}^k \qquad (6.3)$$

هذه الظروف المثالية لها تفسير بديهي. تشير الحالة (**a**) إلى أن السعر $w_{ij}$ للمسار (i, j) يساوي صفر إذا كان الحل الأمثل f(p) لا يستخدم كل سعة $U_{ij}$ للمسار. أي إذا لم يستخدم الحل الأمثل قدرة هذا المسار بشكل كامل، فقد يتم تجاهل القيد (لا يُوضع السعر عليه). نظرًا لأن تكلفة $c^k(p)$ الخاصة بالمسار P هي مجموع تكلفة الأقواس الموجودة في هذا المسار، أي $c^k(P) = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij}^k$ يمكن كتابة انخفاض تكلفة المسار P على النحو التالي:

$$c_P^{\sigma,w} = \sum_{(i,j)\in P} (c_{ij}^k + w_{ij}) - \sigma^k.$$

وهذا يعني أن التكلفة المنخفضة للمسار P هي تكلفة هذا المسار فيما يتعلق بالتكاليف المعدلة $c_{ij}^k +$ $w_{ij}$ ناقص تكلفة السلعة $\sigma^k$. ينص قيد الركود التكميلية (**6.2**) على أن المسار المعدل يكلف $\sum_{(i,j)\in P} (c_{ij}^k + w_{ij})$ لكل مسار يربط عقدة المصدر $s^k$، يجب أن تكون العقدة $t^k$ للسلعة k كبيرة على الأقل بنفس تكلفة السلعة في $\sigma^k$. تشير الشرط (**6.3**) إلى أن التكلفة المنخفضة $c_p^{\sigma,w}$ يجب أن تكون صفر لأي مسار P يحمل التدفق في الحل الأمثل [بمعنى أين يكون التدفق f(p) موجب]؛ وهذا يعني أن التكلفة المعدلة $\sum_{(i,j)\in P} (c_{ij}^k + w_{ij})$ من هذا المسار يجب أن يساوي تكلفة السلع $\sigma^k$. لذلك، تشير الشروط (**6.2**) و (**6.3**) إلى أن $\sigma^k$ هو أقصر مسافة المسار من العقدة $S^k$ إلى العقدة $t^k$, فيما يتعلق بالتكاليف المعدلة $c_{ij}^k + w_{ij}$ وفي الحل الأمثل، يجب أن يكون كل مسار من العقدة $S^k$ إلى العقدة $t^k$ الذي يحمل تدفقًا إيجابيًا أقصر مسار فيما يتعلق التكاليف المعدلة.

توضح هذه النتيجة أن تكاليف المسار $w_{ij}$ تسمح بتحليل مشكلة التدفق متعدد السلع إلى مجموعة من مشاكل "التكلفة" المستقلة "أقصر الطرق".

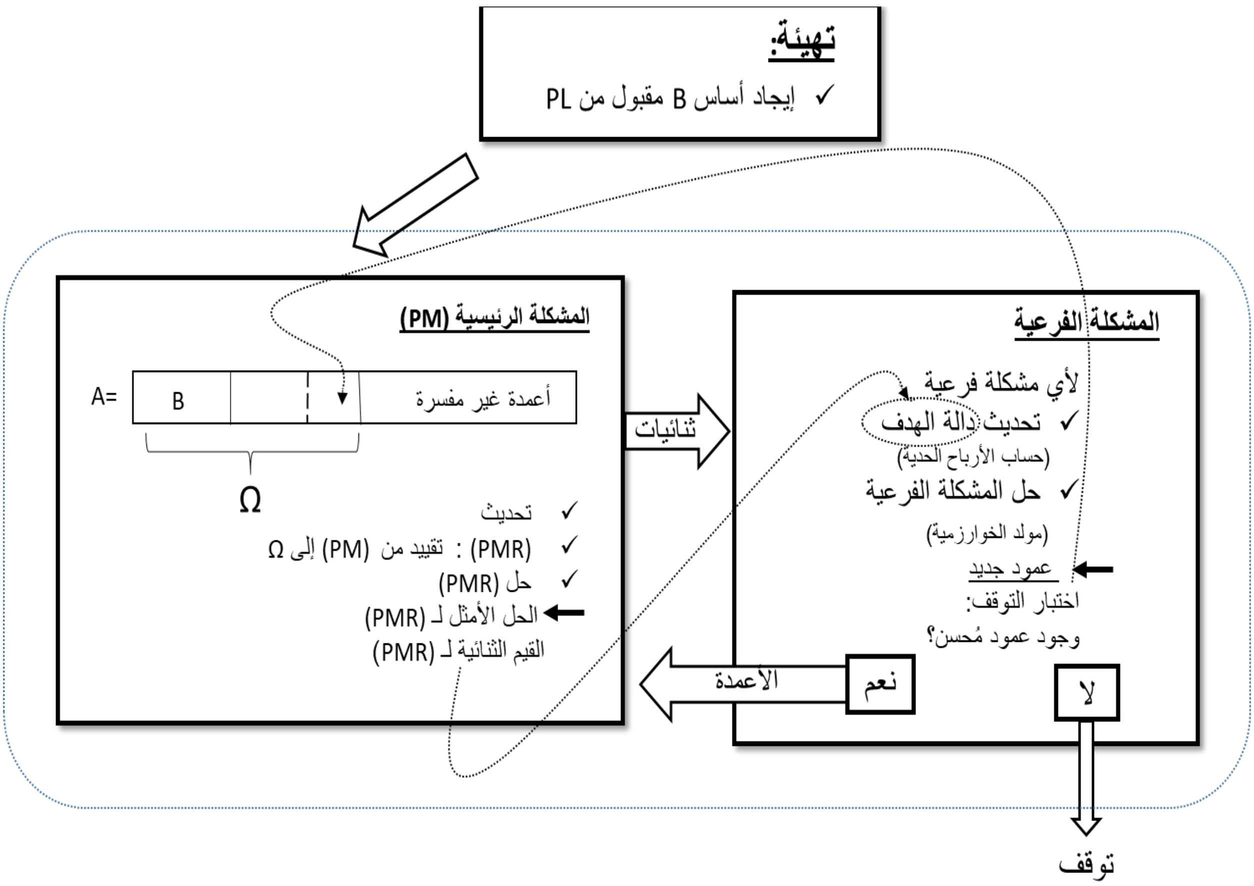
**9.2.6.1 مراحل حل طريقة توليد الأعمدة:**

في هذه النقطة، تمت إعادة تأكيد مشكلة التدفق متعدد السلع كبرنامج خطي واسع النطاق مع عدد هائل من الأعمدة مع متغير تدفق واحد لكل مسار يربط بين مصدر ونقطة وصول أي سلعة. لقد ظهرت أيضًا كيفية وصف أي حل مثالي لهذه الصيغة من حيث متغيرات البرمجة الخطية $W_{ij}$ و$\sigma^k$، إن تفسير هذه الشروط على أنها أقصر شروط المسار فيما يتعلق بالمسار المعدل الذي تم تعديله $c_{ij}^k + w_{ij}$ يُعرض بعد ذلك كيفية حل المشكلة باستخدام إجراء حل يُعرف باسم توليد الأعمدة.

إن الفكرة الأساسية في توليد الأعمدة هي عدم إدراج جميع أعمدة صياغة المشكلة بشكل صريح، وإنما في توليدها فقط "حسب الحاجة". طريقة simplex المراجعة للبرمجة الخطية مناسبة تمامًا لتنفيذ هذه

الاستراتيجية الحسابية. بالذكر أن طريقة simplex المراجعة تحافظ على أساس $\mathcal{B}$ عند كل تكرار. يستخدم هذا الأساس لتعريف مجموعة من مضاعفات simplex π عبر حساب المصفوفة $\pi\mathcal{B}=C_{\mathcal{B}}$ (في التطبيق، تكون المضاعفات هي w و σ). بمعنى، تقوم الطريقة بتعريف مضاعفات simplex بحيث تكون التكاليف المخفضة $c_{\mathcal{B}}^{\pi}$ للمتغيرات الأساسية صفرية؛ بمعنى ان $c_{\mathcal{B}}^{\pi}=c_{\mathcal{B}}-\pi\mathcal{B}=0$ . للعثور على مضاعفات simplex، لا تتطلب الطريقة معلومات حول الأعمدة (المتغيرات) ولا في الأسس. بل تستخدم لاحقا المضاعفات لتسعير الأعمدة غير الأساسية، أي حساب تكاليفها المخفضة. إذا كانت تكلفة أي انخفاض سلبية (بافتراض صيغة التدنية)، تقدم الطريقة متغيرًا غير أساسي واحد في الأساس بدلاً من أحد المتغيرات الأساسية الحالية، وتُعيد حساب مضاعفات simplex π، ثم تكرر هذه العمليات الحسابية. لاستخدام نهج توليد الأعمدة، يجب أن يكون للأعمدة خواص هيكلية تسمح بإجراء عمليات التسعير دون فحص كل عمود بشكل صريح.

الشكل 30: مراحل حل برنامج خطي عن طريق توليد الأعمدة




المصدر: (CATHERINE MANCEL، 2004)

عند تطبيقها على صياغة تدفق المسار لمشكلة التدفق متعدد السلع، فيما يتعلق بالأساس الحالي في أي خطوة (التي تتكون من مجموعة من الأعمدة، أو متغيرات المسار، للمشكلة)، تحدد طريقة simplex المراجعة مضاعفات simplex $W_{ij}$ و$\sigma^k$ بحيث تكون التكلفة المخفضة لكل متغير في الأساس صفر. لذلك، إذا كان المسار P الذي يربط المصدر $S^k$ و نقطة الوصول $t^k$ للسلعة k هو أحد المتغيرات الأساسية، إذن $c_p^{\sigma,w}=0$ أو ما يُعادل $\sum_{(i,j)\in P}(c_{ij}^k + w_{ij}) = \sigma^k$. لذلك، تحدد طريقة simplex المراجعة مضاعفات simplex $W_{ij}$ و $\sigma^k$ بحيث تلبي المعادلات التالية:

$$\sum_{(i,j)\in P}(c_{ij}^k + w_{ij}) = \sigma^k$$

لكل مسار P في الأساس.

نلاحظ أنه نظرًا لأن كل أساس يتكون من مسارات K + m، فإن كل أساس يؤدي إلى K + m من هذه المعادلات. علاوة على ذلك، تحتوي المعادلات على متغيرات K + m, (بأخذ m أسعار الاقواس $w_{ij}$ و K أقصر مسافة للمسارات $\sigma^k$) تستخدم طريقة simplex المراجعة حسابات مصفوفيه لحل معادلات K + m وتحدد القيم المحددة لمضاعفات simplex.

تحدد حالة الركود التكميلي (**6.3**) أن $f(p)=0$ $c_p^{\sigma,w}$ لكل مسار P في الشبكة. بما أن كل مسار P في الأساس يحقق الشرط $c_p^{\sigma,w}=0$ يمكن ارسال أي كمية من التدفق عليه ولا يزال يلبي الزيادة (**6.3**). لتلبية هذا الشرط لمسار P ليس في الأساس، وُضع $f(P) = 0$. الاعتبار التالي: حالة الركود التكميلية (**6.1**). إذا كان متغير الركود $S_{ij} = [\sum_{1\le k\le K}\sum_{(i,j)\in P^k}\delta_{ij}(P)f(P) - u_{ij}]$ ليس في الأساس, $S_{ij}=0$, لذلك الحل يحقق (**6.1**). من ناحية أخرى، إذا كان المتغير الراكد $S_{ij}$ في الأساس، فإن تكلفته المخفضة، التي تساوي $0-W_{ij}$، تساوي الصفر، مما يعني أن $wij=0$ والحل يحقق (**6.1**). وتبين أن الحل المحدد بواسطة الأساس الحالي يحقق الشروط (**6.1**) و (**6.3**) ؛ هو الأمثل إذا استوفى الشرط (**6.2**) (أي أن التكلفة المنخفضة لكل متغير تدفق مسار غير سالب). كيف يمكن التحقق من هذا الشرط؟ وبذلك، كيف يمكن التحقق لمعرفة ما إذا كان لكل سلعة k،

$$\boldsymbol{c_P^{\sigma,w}} = \sum_{(i,j)\in P}(c_{ij}^k + w_{ij}) - \sigma^k \ge 0 \qquad \text{لكل} \quad P\in \mathrm{P}^k.$$

أو مكافئ لـ،

$$\min_{P\in \mathrm{P}^k}\sum_{(i,j)\in P}(c_{ij}^k + w_{ij}) \ge \sigma^k.$$

كما نلاحظ أن الجانب الأيسر من هذه المتراجحة يمثل طول أقصر مسار يربط بين عقدة المصدر ونقطة الوصول، $S^k$ و $t^k$، للسلعة k فيما يتعلق بالتكاليف المعدلة $c_{ij}^k + w_{ij}$. وبالتالي، لمعرفة ما إذا كانت أسعار المسار $w_{ij}$ تندرج مع مسافات المسار الحالية $\sigma^k$ وتحقق شروط الركود التكميلية، فإنه يتم حل مشكلة أقصر مسار لكل سلعة k. إذا كان طول أقصر مسار لتلك السلعة بالنسبة لجميع السلع k كبيرًا بقدر $\sigma^k$ , يتم تحقيق شرط الركود التكميلي (**6.2**).

خلاف ذلك، إذا كان لبعض السلع k، تُشير ϱ إلى أقصر مسار فيما يتعلق بالتكاليف المعدلة الحالية $c_{ij}^k + w_{ij}$ والتكلفة المخفضة للمسار ϱإ أقل من الطول $\varrho^k$ لمسار التكلفة الأدنى من $\mathbf{p}^k$ المحدد، إذن

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}} = \sum_{(i,j)\in\varrho} (c_{ij}^k + w_{ij}) - \sigma^k < 0$$

له تكلفة منخفضة سلبية، لذلك يمكننا استخدامه بشكل σفيما يتعلق بالبرنامج الخطي (**5**)، فإن المسار في الأساس الحالي $\mathcal{B}$. وعليه، باستخدام الخطوات Pمفيد في البرنامج الخطي بدلاً من أحد المسارات في الأساس الحالي. القيام ϱالمعتادة للأسلوب البسيط، يتم القيام بإجراء تغيير أساسي مع إدخال المسار ومسافة أقصر جديدة تم $W_{ij}$بذلك من شأنه أن يسمح لنا بتحديد مجموعة جديدة من أسعار المسار . يتم اختيار قيم هذه المتغيرات بحيث تكون kبين عقد المصدر ونقطة الوصول للسلعة $\varrho^k$تعديلها في التكلفة المخفضة لكل متغير أساسي صفر. أي باستخدام عمليات المصفوفة، يتم حل النموذج مرة أخرى

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}} = \sum_{(i,j)\in P}(c_{ij}^k + w_{ij}) - \sigma^k = 0$$

في المتغيرات $W_{ij}$ و $\varrho^k$. عندئذٍ، كما كان من قبل، تُحل مشكلة أقصر مسار لكل سلعة k ويُلاحظ ما إذا كان لأي مسار طول أقصر من $\varrho^k$. إذا كان الأمر كذلك، فيتم تقديم هذا المسار إلى الأساس وتتم متابعته بالتناوب (1) لإيجاد قيم جديدة لأسعار المسار $W_{ij}$ ولطول المسارات $\varrho^k$، و (2) حل مشكلة أقصر مسار.

توضح هذه المناقشة كيفية تحديد المتغير الذي سيتم إدخاله في الأساس في كل خطوة. باقي خطوات تنفيذ طريقة simplex (على سبيل المثال، تحديد المتغير المراد إزالته من الأساس في كل خطوة) هي نفسها المتبعة في الطريقة العادية، لذلك لا تُحدد أي تفاصيل أخرى.

**تحديد الحدود الدنيا:**

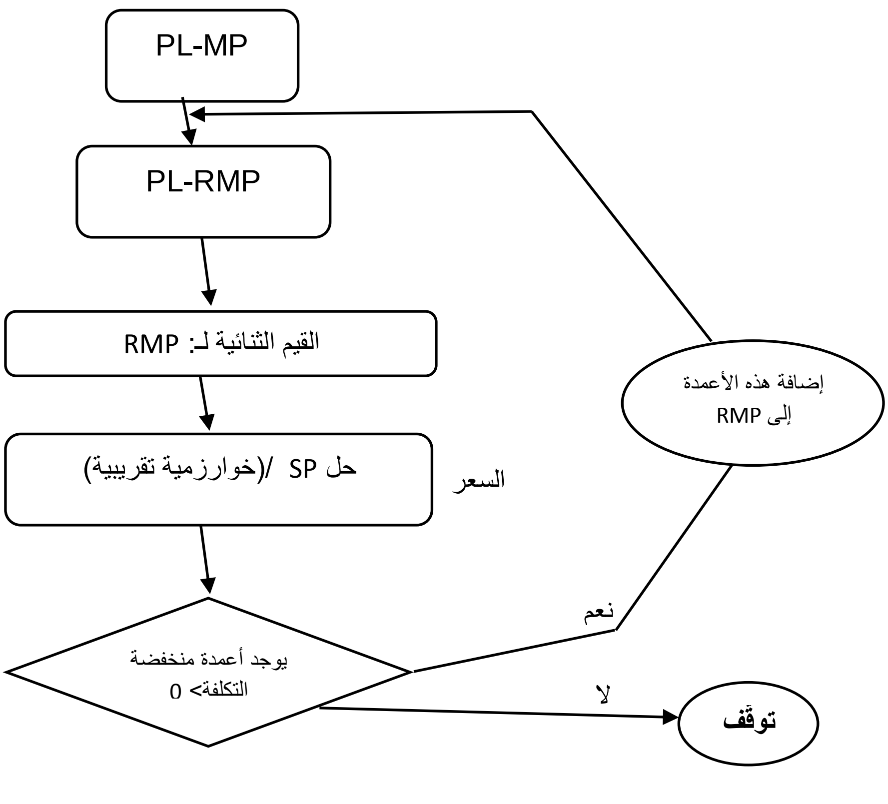
نضع $z^*$ تشير إلى قيمة دالة الهدف المثلى لمشكلة التدفق متعدد السلع (**5**) ويوضع $z^{ip}$ يشير إلى قيمة دالة الهدف المثلى في أي خطوة في حل صياغة تدفق المسار للمشكلة (**5**) من خلال طريقة simplex. نظرًا لأن $z^{ip}$ يتوافق مع حل ممكن للمشكلة $z^*\leq z^{ip}$. كما نلاحظ أنه لأي خيار من أسعار المسار w، فإن القيمة المثلى $L(w)$ للمشكلة الفرعية لاغرانج هي حد أدنى على $z^*$. لذلك، بافتراض أنه في أي مرحلة خلال الخوارزمية، يتم حل المشكلة الفرعية لاغرانج فيما يتعلق بأسعار المسار الحالية $W^{ij}$. وهذا يعني أنه يتم حل أقصر أطوال المسار $L^k(w)$ لجميع السلع k فيما يتعلق بالتكاليف المعدلة $c_{ij}^k + w_{ij}$. (يُلاحظ أن هذا هو نفس الحساب الذي يتم به تسعير الأعمدة في طريقة simplex). ثم من (**4**) تكون القيمة $L(w)$للمشكلة الفرعية لاغرانج هي

$$\boldsymbol{L(w)} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{l^k(w)} - \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}\, u_{ij},$$

وبنظرية تحويل لاغرانج،   $L(w)\leq z^*\leq z^{ip}$

كناتج ثانوي لإيجاد أقصر مسافة للمسار $L^k(w)$ أثناء القيام بتسعير الأعمدة في تنفيذ إجراء توليد الأعمدة

الشكل31 : خوارزمية توليد الأعمدة لحل برنامج خطي في حالة التعظيم




المصدر: (SCHRENK، 2010)

حيث أن:

PL-MP: البرنامج الخطي للنموذج الرئيسي

PL-RMP: البرنامج الخطي للنموذج الرئيسي المقيد

SP : النموذج الفرعي

يتم الحصول على حد أدنى لقيمة دالة الهدف. يسمح هذا الحد الأدنى بالحكم على جودة الحل الحالي في تقنية توليد العمود وفي كثير من الأحيان إنهاء الإجراء دون مزيد من العمليات الحسابية إذا كان الفرق بين قيمة الحل $Z^{ip}$ و$L(w)$ منخفضًا بدرجة كافية. قد يُلاحظ نظرًا لأنه في كل خطوة من خطوات أسلوب simplex، تظل القيمة الموضوعية $Z^{ip}$ للمشكلة كما هي أو تتناقص، فإن الحد العلوي لا يتزايد بشكل كبير من خطوة إلى أخرى. من ناحية أخرى، لا نحتاج تقليل القيمة $L(w)$ لمشكلة لاغرانج للبرنامج الفرعي من خطوة إلى أخرى، لذلك في أي وقت في الخوارزمية، تُستخدم أكبر القيم $L(w)$ التي تم إنشاؤها في جميع الخطوات السابقة كأنها أفضل حد أدنى.

### 10.2.6.1 تجزئة Dantzig-Wolfe

تم توضيح كيفية استخدام إجراء توليد الأعمدة لحل مشكلة التدفق متعدد السلع التي صيغت في مجال تدفقات المسار. في هذا القسم، نفسر هذا المنهج في إطار آخر، يُعرف باسم تجزئة Dantzig-Wolfe. بوضع برامج مختلفة K وكذلك "كود منسق" يقوم بحل مشكلة التدفق متعدد السلع-K. يلعب كل كود دورًا خاصًا في حل المشكلة. تتمثل مهمة البرنامج المنسق في حل صياغة المسار (**17.5**) للمشكلة، والتي يُشار إليها على أنها المشكلة "الرئيسية" أو "التنسيقية". في "حل المشكلة، لا يقوم المنسق بتوليد أعمدة للمشكلة الرئيسية؛ وبدلاً من ذلك، تقوم البرامج K، بتوجيه من المنسق في مقدمة أسعار المسار، بتوليد هذه الأعمدة، مع البرنامج kth، وتوليد أعمدة المشكلة الرئيسية المقابلة للسلعة kth.

بشكل عام، لدى المنسق مجموعة فرعية فقط من أعمدة المشكلة الرئيسية. نظرًا لأن المنسق يمكنه حل البرنامج الخطي باعتباره مقصورًا على هذه المجموعة الفرعية من الأعمدة، التي تشير إلى هذا البرنامج الخطي المصغر باعتباره المشكلة الرئيسية المقيدة.

تشتمل صياغة مسار مشكلة التدفق المتعدد للسلع على قيود $m + K$ (1) واحدة لكل سلعة k، مع تحديد أن تدفق السلعة k هو $d^k$ ؛ و (2) واحد لكل مسار (i,j)، مع تحديد أن إجمالي التدفق على هذا

المسار هو $U^{ij}$ على الأكثر. يقوم المنسق بحل المشكلة الرئيسية المقيدة إلى بدرجة كاملة باستخدام خوارزمية simplex، ويحتاج بعد ذلك إلى تحديد ما إذا كان حل المشكلة الرئيسية المقيدة هو الأمثل للمشكلة الأصلية أو إذا كانت بعض الأعمدة الأخرى لها تكلفة سالبة منخفضة. تحقيقًا لهذه الغاية، يقوم المنسق بتحديد المجموعة المثلى من مضاعفات simplex (أو أسعار) المشكلة الرئيسية المقيدة، أي تحديد سعر المسار $W^{ij}$ المرتبط بالمسار (i,j), وطول المسار $\varrho^{k}$ المرتبط بكل سلعة k.

بعد أن يحدد المنسق الأسعار، تحدد البرامج للسلعة k الطريقة الأقل تكلفة لشحن وحدات $d^k$ من عقدة المصدر $S^k$ إلى المصب $t^k$ للسلعة k، بافتراض أن كل مسار (i,j) له قيمة مقترنة لـ $W_{ij}$ بالإضافة إلى تكلفة المسار $c_{ij}^{k}$ إذا كانت تكلفة هذا المسار الأقصر أقل من $\varrho^{k}$، فسيقوم البرنامج kth احالة هذا الحل كحل أفضل للمنسق. إذا كانت تكلفة هذا المسار مساوية $\varrho^{k}$، فلن يحتاج البرنامج kth مواصلة الحساب. (لن تكون التكلفة أكبر من $\varrho^{k}$ أبدًا لأنه، كما يتضح من المناقشة لشروط الأمثلية، يستخدم المنسق بعض مسارات التكلفة في $\varrho^{k}$ للسلعة kth في حله الأمثل). لنرى أن هذا التفسير متوافق مع القسم السابق، يُلاحظ أنه لتحديد أسعار أعمدة السلعة k، نحتاج إلى حل مشكلة المسار الأقصر التالية:

$$\sum_{1\leq k\leq K}\sum_{p\in \mathrm{P}^k}\left[c^k(p)+\sum_{(i,j)\in P} w_{ij}\right] f(P)$$

$$\sum_{p\in \mathrm{P}^k} f(P)=\ d^k \qquad \text{لكل}\ k=1,2,\dots,k.$$

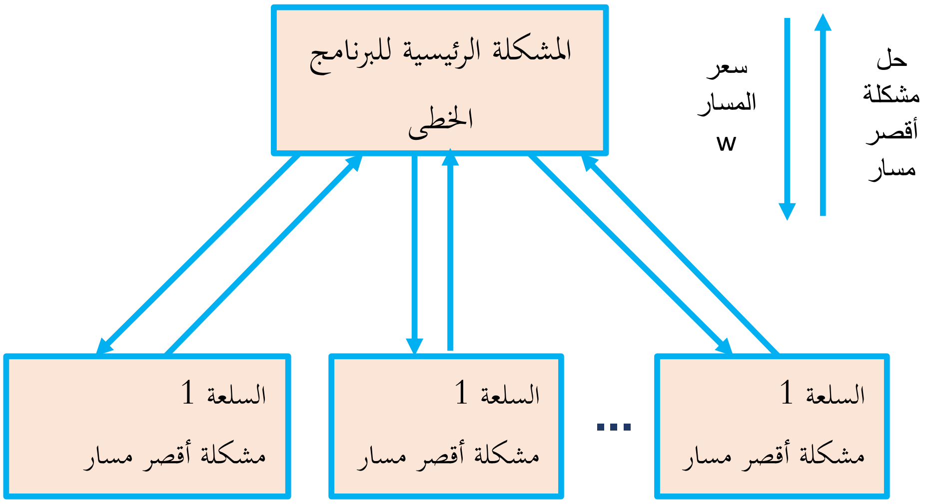
$$\boldsymbol{f(P)\geq 0} \qquad \text{لكل}\ k=1,2,\dots,k.\ \text{وكل}\ \ P\in\ \mathrm{P}^{\mathrm{k}}.$$

الذي يتوافق، بما أنّ $c^k(P)=\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}^k$ , على وجه التحديد لإيجاد أفضل طريقة لتلبية الطلب على السلعة kth على افتراض تكلفة $c_{ij}^{k}+w_{ij}$ المرتبطة بكل مسار (i,j). علاوة على ذلك، فإن أقصر مسار للسلعة k سيكون له تكلفة مخفضة سالبة إذا وفقط إذا كانت تكلفة أقصر مسار للمسافة kth أقل من $\varrho^{k}$. يتم الاشارة إلى المشاكل التي تم حلها من قبل كل البرامج K كمشاكل فرعية لأنها تُستخدم فقط لغرض توليد أعمدة جديدة للمشكلة الرئيسية المقيدة أو لإثبات الأمثلية للحل الحالي.

تم تفسير هذا الإجراء كطريقة لتوليد الأعمدة يحدد إدخال المتغيرات عن طريق حل K في أقصر مشاكل المسار. تتسبب مشكلة kth للمسار الأقصر في إصلاح مشكلة أقصر مسار للسلعة kth مع التكلفة المضافة لـ $w_{ij}$ المرتبطة بالمسار (i,j). في تفسير Dantzig-Wolfe ، يقوم المنسق المركزي بحل صياغة مسار مشكلة التدفق متعدد السلع مقتصراً على الأعمدة الموجودة لديه. بعد الحصول على الحل الأمثل لهذه المشكلة الرئيسية المقيدة، يطلب المنسق من كل البرامج K حل مشكلة أقصر مسار باستخدام تكلفة مسار إضافية لـ $W_{ij}$ على كل مسار (i,j). يقوم كل برنامج (مشكلة فرعية) بتزويد المنسق بمسار جديد أو يقول

الشكل 32: تدفق المعلومات في تجزئة DANTZIG-WOLFE

إنه لا يمكنه إنشاء مسار أقصر من المسار (أو المسارات) الذي يستخدمه المنسق حاليًا. يعطي الشكل 32 تمثيلًا تخطيطيًا لتدفق المعلومات في الخوارزمية.




المصدر: من إعداد الباحث

تعتبر الطريقة مرنة من عدة جوانب. عند تنفيذها كطريقة السمبلكس مراجعة، ستحتفظ الخوارزمية بأساس برمجة خطية وتضيف عمودًا واحدًا في كل تكرار. قد يُفسرٌ هذا النهج على أنه حل رئيسي لمشكلة رئيسية مقيدة في كل خطوة مع عمود واحد غير موجود في الأساس؛ وبالتالي، فإن الخوارزمية تتجاهل أي عمود يترك أساس البرمجة الخطية. ومع ذلك، فإن توليد أعمدة جديدة قد يأخذ وقتًا مستغرقًا في الجمع، لذلك قد يكون من المفيد حفظ الأعمدة القديمة نظرًا لأنه قد يكون لها بعد ذلك تكلفة مخفضة سالبة. لذلك، عند تنفيذ خوارزمية التجزئة، يمكن الاحتفاظ ببعض أو كل الأعمدة التي تم توليدها سابقًا. نتيجة لذلك، عندما

يتم حل المشكلة الرئيسية المقيدة، سيتم عمومًا إجراء أكثر من تغيير أساسي (لحل المشكلة الرئيسية المقيدة) قبل أن تُبث أسعارًا جديدة وتُحل مرة أخرى المشاكل الفرعية ذات أقصر المسار.

يشترك إجراء توليد العمود وإجراء التجزئة في ميزة محتملة أخرى في إمكانية حل المشكلة باستخدام معالجات متوازية. بمجرد أن تُحدد أسعار مسار $W_{ij}$ في أي من الإجراءين، فإن أقصر الطرق الفرعية تكون مستقلة عن بعضها البعض، حتى نتمكن من حل كل منها في وقت واحد، باستخدام معالج منفصل لكل مشكلة من أقصر مسار.

نظرًا لأن كل عمود من المشكلة الرئيسية يتوافق مع واحد من عدد محدد من المسارات لكل سلعة، فإن تقنية التجزئة ستكون محدودة طالما أنه لا يتم أبدًا تجاهل أي أعمدة من المشكلة الرئيسية المقيدة. (في النهاية، سيتم توليد كل عمود في المشكلة الرئيسية الكاملة) بدلاً من ذلك، يمكن تجاهل الأعمدة فقط لتحسين حل المشكلة الرئيسية المقيدة بشكل صارم. أو يمكن استخدام قاعدة خطية قائمة على البرمجة، لاختيار المتغير لتغيير الأساس في كل تكرار؛ أي قاعدة ستضمن دقة الخوارزمية لأنها ستضمن عدم تكرار أي عدد محدد من القواعد للبرنامج الخطي.

أخيرًا، يُلاحظ أن المشاكل الفرعية K تتوافق مع مشكلة لاغرانج مع مضاعف $W_{ij}$ المفروضة على كل مسار (i,j). وبالتالي، يمكن النظر إلى المنسق كإعداد مضاعفات لاغرانج وحل مشكلة لاغرانج المضاعفة. في الواقع تعد تجزئة Dantzig-Wolfe طريقة فعالة لحل مشكلة مضاعف لاغرنج إذا تم قياس الكفاءة بعدد التكرارات التي تقوم بها الخوارزمية. (وفقًا للنظرية 16.7، تقوم خوارزمية Dantzig-Wolfe بحل مشكلة مضاعف Lagrangian نظرًا لأن مشكلة التدفق المتعدد للسلع هي برنامج خطي، وبالنسبة للبرامج الخطية، فإن مشكلة Lagrangian مضاعفة لها نفس قيمة دالة الهدف للبرنامج الخطي). لسوء الحظ، عند تطبيق تحليل Dantzig-Wolfe، يجب على المنسق في كل تكرار حل برنامج خطي مع قيود m + K، وتعد هذه الخطوة تحديثا لمضاعفات simplex مكلفة للغاية. يستغرق حل برنامج خطي وقتًا أطول بكثير من تحديث المضاعفات. نظرًا لأن كل تحديث مضاعف لتجزئة Dantzig-Wolfe مكلف للغاية من الناحية الحسابية، ومع ذلك، يحتوي تجزئة Dantzig-Wolfe على ميزة واحدة مهمة تميزه عن الخوارزميات الأخرى التي تستند إلى لاغرانج، تحافظ خوارزمية تجزئة Dantzig-Wolfe دائمًا على حل عملي للمشكلة. نظرًا أنها توفر حل المشاكل الفرعية حدًا أدنى للقيمة المثلى للمشكلة، وفي كل

خطوة يتم الالتزام أيضًا بمدى ارتباط الحل الأمثل الحالي. لذلك، يمكن إنهاء الخوارزمية في أي خطوة ليس فقط من خلال حل عملي، ولكن أيضًا مع ضمان لمدى هذا الحل، من حيث القيمة دالة الهدف المثلى.

طريقة لاجرانج وتجزئة Dantzig-Wolfe هي أساليب توجيه السعر التي تجزئ مشكلة التدفق متعدد السلع في مشاكل تدفق شبكة سلعة واحدة (مشاكل أقصر مسار) عن طريق وضع الرسوم أو الأسعار على قيود حزمة معقدة. تعتمد طريقة توجيه الموارد على طريقة حسابية مختلفة. بدلاً من استخدام الأسعار لحل المشكلة، فإنه يخصص سعة حزمة مشتركة لكل مسار للسلع الفردية. عند تطبيقها على صياغة المشكلة (**1**)، يخصص نهج توجيه الموارد وحدات $r_{ij}^k \le u_{ij}^k$ للقدرة $U_{ij}$ من المسار (i,j) للسلعة k، مما ينتج عنه مشكلة توجيه الموارد التالية:(Ho & Sundarraj, 1989)

$$z = min \sum_{1\le k\le K} c^k x^k \qquad (7.1)$$

$$\sum_{1\le k\le K} r_{ij}^k \le u_{ij} \qquad \text{لكل} \quad (i,j) \in A, \qquad (7.2)$$

$$\mathcal{N} x^k = b^k \quad \text{لكل} \quad k = 1,2,\dots,k, \qquad (7.3)$$

$$0 \le x_{ij}^k \le r_{ij}^k \quad \text{لكل}\ (i,j) \in A \quad \text{وكل}\ k = 1,2,\dots,k. \qquad (7.4)$$

علما أن القيد (**7.2**) يضمن أن إجمالي تخصيص الموارد للمسار (i,j) لا يتجاوز سعة حزمة المسار. بإيداع $r = r_{ij}^k$ تشير إلى متجه تخصيصات الموارد.

مشكلة توجيه الموارد (**7**) تعادل مشكلة التدفق المتعدد للسلع الأصلية (**1**) بمعنى أن 1 إذا كانت (x، r) ممكنة في مشكلة توجيه الموارد، فإن x ممكنة نفس قيمة دالة الهدف في المشكلة الأصلية، و 2 إذا كانت x ممكنة في المشكلة الأصلية وقمنا بتعيين r = x، فإن (x، r) ممكنة ولديها نفس قيمة دالة الهدف في مشكلة توجيه الموارد.

الآن من خلال النظر في المنهج التالي لحل مشكلة توجيه الموارد (**7**). بدلاً من حل المشكلة عن طريق اختيار المسارات r و x في وقت واحد، يتم اختيارها بالتتابع. أولاً بإصلاح تخصيصات الموارد $r_{ij}^k$ ثم اختيار تدفق $x_{ij}^k$. بمعنى، السماح لـ r(z) للدلالة على القيمة المثلى لمشكلة توجيه الموارد للحصول على قيمة ثابتة لتخصيص الموارد r واعتماد مشكلة تخصيص الموارد المشتقة التالية:

$$Z(r) \quad \text{تدنية} \qquad (8.1)$$

$$\sum_{1\le k\le K} r_{ij}^{k} \le u_{ij} \qquad \text{لكل} \quad (i,j)\in A, \qquad (8.2)$$

$$0 \le r_{ij}^{k} \le u_{ij}^{k} \quad \text{لكل}\ (i,j)\in A \quad \text{وكل}\ k=1,2,\ldots,k. \qquad (8.3)$$

دالة الهدف r(z) لهذه المشكلة معقدة. تُعرف قيمتها بشكل ضمني فقط كحل لمشكلة التحسين في متغيرات التدفق $x_{ij}^{k}$. علاوة على ذلك، يُلاحظ أنه بالنسبة لأي قيمة ثابتة لمتغيرات الموارد $r_{ij}^{k}$، فإن مشكلة توجيه الموارد تتجزأ إلى مشكلة فرعية منفصلة لتدفق الشبكة لكل سلعة. وبهذا فإنه $z(r) = \sum_{k\in K} z^{k}(r^{k})$ مع القيمة $z^k(r^k)$ للمشكلة الفرعية kth التي قدمها:

$$z^{k}(r^{k}) = min \sum_{1\le k\le K} c^{k}x^{k} \qquad (17.9a)$$

القيود

$$\mathcal{N}x^{k} = b^{k} \quad \text{لكل} \quad k=1,\ldots,k, \qquad (17.9b)$$

$$0 \le x_{ij}^{k} \le r_{ij}^{k} \quad \text{لكل}(i,j)\in A \quad \text{ولكل}\ k=1,2,\ldots,k.$$

مشكلة توجيه الموارد (7) تعادل مشكلة تخصيص الموارد (8)، بمعنى أن (1) إذا كانت (x، r) ممكنة في مشكلة توجيه الموارد، فإن r ممكنة في تخصيص الموارد مشكلة و $z(r) \le cx$، و (2) كنة في مشكلة تخصيص الموارد، فبالنسبة لبعض المسارات (x,r),x ممكنة في المشكلة الأصلية و $cx = z(r)$. (Conejo, Castillo, Minguez, & Garcia-Bertrand, 2006)

بدلاً من حل مشكلة التدفق المتعدد للسلع بشكل مباشر، يمكن أن تجزئتها إلى مشكلة تخصيص الموارد مع بنية قيود بسيطة للغاية مع وجود قيود عدم مساواة واحدة ولكن بدالة الهدف معقدة$z(r)$. على الرغم من أن الهيكل العام لدالة الهدف معقد، إلا أنه من السهل تقييمه: للعثور على قيمته لأي اختيار من متجه تخصيص الموارد r، يتم الاعتماد فقط إلى حل مشاكل التدفق السلعي K الفردية.

هناك طريقة أخرى لعرض دالة الهدف$z(r)$ وهي كلفة البرنامج الخطي (7) كدالة للمعلمات على الجانب الأيمن r. بمعنى أن أي قيمة r لمتجه التخصيص تحدد قيم معلمات الجانب الأيمن لهذا البرنامج الخطي. توضح النتيجة المعروفة في البرنامج الخطي أن الدالة لها شكل خاص. نضع هذه النتيجة لمشكلة البرمجة الخطية العامة التي تحتوي على مشكلة التدفق متعدد السلع كحالة خاصة.

الجدول 2: المشكلة الفرعية المقابلة لنماذج بعض الأبحاث باستخدام توليد الأعمدة.

| البرنامج الفرعي لتوليد الأعمدة | المشكلة |
|---|---|
| **مشكلة حقيبة الظهر** Knapsack Problem | Bin Packing Problem Scholl et al. [1997], de Carvalho[2002 ,1999] |
| **مشكلة أقصر مسار مقيدة** Constrained Shortest Path Problem | Crew Pairing Problem Barnhart et al. [1998a, 2003] |
| **مشكلة حقيبة الظهر** Knapsack Problem | Cutting Stock Problem Gilmore and Gomory [1961], Marcotte [1985], Vance [1998] Vanderback [1999], Degraeve and Schrage [1999], Degraeve and Peeters [2003] |
| Single Machine Sequencing Problem with Time Window | Job Shop Problem Chen and Powell [1999a,b, 2003], Gelinas and Soumis [2005] |
| **مشكلة أقصر مسار** Shortest Path Problem | Multicommodity Network Flow Problem Ahuja et al. [1993], Barnhart et al. [2000] |
| **مشكلة العنصر الواحد** Single-Item Problem | Multi-Item Lot-Sizing Problems Eppen and Martin [1987] |
| **مشكلة البائع الجوال** Problem Traveling Sales Man Problem | Vehicle Routing Desrochers et al. [1992], Kohl et al. [1999] Chabrier [2006], Irnich and Villeneuve [2006] |

**المصدر:** (LIANG، 2011)

**خلاصة الفصل**

تنشأ مشاكل التدفق متعدد السلع عندما تشترك عدة مشاكل في تدفق الشبكة في نفس الشبكة الأساسية. لقد ركز هذا الفصل على مشكلة التدفق المتعدد للسلع الأساسية مع وجود سعة حزم ثابتة مفروضة على إجمالي التدفق على أي مسار من جانب جميع السلع. كما لوحظ في هذا الفصل، أنه ينشأ هذا النموذج في مجموعة واسعة من إعدادات التطبيق في مجالات الاتصالات واللوجستيات والتصنيع والنقل وكذلك في مجالات الاختبار المحتملة مثل الإسكان في المناطق الحضرية وتصدير الحبوب الغذائية. تحاول طرق حل مشكلة التدفق متعدد السلع عمومًا استغلال بنية تدفق العمل الصافي لمشاكل التدفق السلعي الفردي.

يوفر إجراء توليد الأعمدة كخوارزمية لتحديد الأسعار مع أساس البرنامج الخطي الذي يحددها على سعة الحزمة، ويبث هذه الأسعار إلى المشاكل الفرعية لأقصر مسار، واحدة لكل سلعة. عندما يتم تفسيرها بهذه الطريقة، فإن إجراء تجزئة Dantzig-Wolfe يعتبر حل بديل لحل تحويل لاغرانج للمشكلة. حيث نستخدم برنامجًا خطيًا، بدلاً من الانتقال ببساطة في اتجاه درجة فرعية، لتحديث قيم مضاعفات لاغرانج في كل خطوة. نلاحظ أن طريقة توليد الأعمدة و تجزئة Dantzig-Wolfe، تفترض أن كل سلعة في مشكلة التدفق متعدد السلع لها مصدر واحد ومصب واحدة. تنطبق هذه الخوارزميات على مشاكل التدفق المتعدد للسلع ذات المصادر والمصارف المتعددة لكل سلعة وعلى المشاكل الأكثر عمومية المتعلقة بالمشاكل الفرعية المستقلة التي تقترن بقيود الموارد المشتركة.

يعد تحليل توجيه الموارد بمثابة نهج مفاهيمي بديل لحل مشكلة التدفق متعدد السلع. بدلاً من إزالة قدرات الحزمة المعقدة، هذا النهج يحلل المشكلة إلى مشكلة منفصلة لتدفق السلع الأساسية لكل سلعة من خلال تخصيص قدرات حزمة نادرة لمختلف السلع. إن العثور على التخصيص الأمثل (على سبيل المثال، التخصيص الذي يوفر أقل تكلفة إجمالية) هو مشكلة تحسين مع صيغة قيد بسيطة مع دالة الهدف لتكلفة (معقدة). وبالتالي يمكن حل مشكلة التخصيص عن طريق برنامج بتقنية تحسين التدرج الفر

# الفصل الثاني

# الدراسات السابقة

- الدراسات باللغة الإنجليزية
- الدراسات باللغة الفرنسية
- ما يميز الدراسة الحالية عن الدراسات السابقة.

**تمهيد:**

في هذا الفصل نحاول التطرق لأغلب الدراسات والتطبيقات التي سبقتنا في تناول الإشكالية المقترحة في البحث، المتمثلة في نماذج الشبكات بتدفقات متعددة السلع. حيث أن الدراسات المراجعة باللغتين الإنجليزية والفرنسية فقط، وذلك لعدم توفر أبحاث باللغة العربية في هذا المجال. مما يجبرنا على محاولة ترجمة الكثير من المصطلحات العلمية من اللغات الأجنبية الى اللغة العربية. الأمر الذي تلقينا فيه صعوبة معتبرة باعتبار كثرة الطرق المستخدمة من مختلف الأبحاث. مع العلم أن الترجمة الصحيحة للمصطلح العلمي لا تكون من خلال القاموس، بل يجب الاستيعاب الجيد للطريقة المطلوبة وفهم خصائصها جيدا، للحصول على المصطلح المطلوب. الأمر الذي يصعب تحقيقه في وقت محدد. في هذا الخصوص نترك للقارئ المجال الواسع للتقدم والتعمق أكثر في هذه الطرق التي أقل ما نقول عنها أنها جد مهمة.

## 1.2 الدراسات باللغة الإنجليزية:

Barnhart, Cynthia, Hane, Christopher A, Johnson, Ellis L, & Sigismondi, Gabriele. (1994). A column generation and partitioning approach for multi-commodity flow problems. *Telecommunication Systems, 3*(3), 239-258.

تقدم هذه الدراسة إجراء حل التجزئة لمشاكل التدفق متعدد السلع على نطاق واسع مع عدة سلع، في مجال الاتصالات السلكية واللاسلكية .باستخدام صياغة متعددة السلع الأساسية وتقنيات توليد الأعمدة، تم حل سلسلة من البرامج الخطية ذات الحجم الصغير والتي يتم فيها تخفيف عدد كبير من القيود. كل حل لمشكلة الحجم الصغير هو حل أساسي محسّن ثنائي للمشكلة الأصلية، وبعد عدد محدود من الخطوات، يتم تحديد الحل الأمثل للتدفق المتعدد السلع. يتم اكتساب الخبرة الحاسوبية في حل مشكلات الاختبار التي تم إنشاؤها عشوائيًا ومشكلات توجيه الرسائل في مجال الاتصالات. أظهرت الاختبارات أن هذا الإجراء يحل مشكلات التدفق السلعة المتعددة على نطاق واسع بشكل أسرع من إجراءات حل البرمجة الخطية أو الجيل الحالي.

Larsson, Torbjörn, Patriksson, Michael, & Rydergren, Clas. (2004). A column generation procedure for the side constrained traffic equilibrium problem. *Transportation Research Part B: Methodological, 38*(1), 17-38.

لحل مشاكل الشبكات في حالات توازن حركة مرور يتم إضافة قيود جانبية لنوع سعة تدفق المسار وقيود البرنامج الخطي العام. تقدم هذه الدراسة إجراءً لتوليد الأعمدة لحل المشكلة. تم تقديم نموذج تثبيت ثنائي لتحسين الأداء الحسابي والتجارب الحسابية لحالة القيود الجانبية الخطية. إجراء توليد العمود هو تعديل لذلك المعطى، على سبيل المثال، في (1970) Lasdon, الفصل 4.4 حيث تقنية التثبيت في (1975) Marsten and all تم تقديمها للحصول على خوارزمية أكثر كفاءة من الناحية الحسابية. تعمل الخوارزمية بشكل جيد وتؤدي بشكل أفضل للحالات التي يكون فيها عدد القيود الحدية صغيرًا. بالنسبة لعقدة Nine وشبكة Sioux Falls, فإن الأداء, المقاس من عدد أسرع للمشكلات التي تم حلها, يمكن مقارنته بنتيجة الخوارزمية المقدمة في (2000) Law Pongpanich حيث يتم تقديم النتائج الحسابية لثلاثة أنواع من القيود الحدية مع التركيز على مشكلة الاختبار

Borndörfer, Ralf, Grötschel, Martin, & Pfetsch, Marc E. (2007). A column-generation approach to line planning in public transport. *Transportation Science, 41*(1), 123-132.

مشكلة تخطيط خط السكك الحديدية هي إحدى المشكلات الأساسية في التخطيط الاستراتيجي للنقل العام والسكك الحديدية. تتضمن إيجاد الخطوط والترددات المقابلة في شبكة النقل بحيث يمكن تلبية طلب رحلة معين. هناك (على الأقل) هدفان: ترغب شركة النقل في تقليل تكاليف التشغيل إلى أدنى حد، ويريد الركاب تقليل أوقات السفر إلى الحد الأدنى. فتم اقتراح نموذج جديد لشبكة متعددة التدفق والسلع. وتتمثل ميزاته الرئيسية مقارنةً بالنماذج الحالية، في إمكانية نقل مسارات الركاب بحرية وإنشاء خطوط ديناميكية. نوقشت خصائص هذا النموذج، وبُحِث في تعقيده، ومثلتْ خوارزمية توليد الأعمدة لحلها. يسمح النموذج بالتعامل مع المتطلبات المتعددة في التطبيق. لقد ظهر أنه يمكن حل هذا المشكل في مدينة متوسطة الحجم ضمن جودة مقبولة باستخدام تقنيات البرمجة الصحيحة. تشير النتائج الحاسوبية إلى إمكانات تحسين كبيرة. النتائج التي توصلت إليها هذه الدراسة على إمكانية متعددة الحدود من تحويل LP لحالة أطوال خط لوغاريتمي تأكد أن النموذج يمكنه التعامل مع مشاكل أكبر أيضا.

Alvelos, Filipe, & de Carvalho, JM Valério. (2007). An extended model and a column generation algorithm for the planar multicommodity flow problem. *Networks: An International Journal, 50*(1), 3-16.

يقدم هذا البحث نموذجًا جديدًا لتوليد الأعمدة من أجل مشكلة تدفق التكلفة الدنيا متعددة السلع الخطية. يحتوي النموذج الجديد على فروقين عند مقارنته بالصيغة التقليدية القائمة على التدفقات على المسارات: فهو يحتوي على مجموعة إضافية من المتغيرات ومجموعة إضافية من عدم المساواة. ترتبط المتغيرات الإضافية مع التدفقات على الدوائر التي يتم فيها عكس بعض الأقواس. وتؤكد أوجه عدم المساواة الإضافية أن الحل الأمثل للنموذج يمكن تحويله إلى حل مثالي لصياغة المسار. من أجل الحصول على هذا الحل يستخدم توليد الأعمدة، يتم اعتبار المتغيرات الإضافية بشكل صريح في المشكلة الرئيسية، من بداية عملية توليد العمود. تبقى المشكلة الفرعية مجموعة من مشاكل المسار الأقصر. يرتبط العمل باستخدام الفروقات الثنائية المثلى في هذا المعنى، بحيث يصاغ نموذجًا يحتوي على متغيرات ابتدائية إضافية / عدم مساواة ثنائية. النتائج الحسابية ومقارنتها مع التكرار العام للعمود، وطريقة الحزمة، وبالنسبة للحالات المختبرة، بينت تحسن فعال في الوقت الحسابي لتوليد العمود عندما تم استخدام النموذج الموسع.

Lindstrom, Joe. (2004). *Multi-commodity Network Flow-Methods and Applications.* Paper presented at the Proc. Information Resources Management Association International Conference (IRMA04), Business Process Management Tools and Technologies Track, New Orleans, Louisiana, May 2004.

يصف هذا التطبيق مشكلة شبكة متعددة التدفق والسلع، حيث يجب أن تتقاسم العديد من السلع الموارد في شبكة مكثفة مشتركة. تحتوي المشكلة على العديد من التطبيقات والاختلافات المهمة. يحاول التطبيق تغطية أهم أساليب الحل، وكلها تستغل البنية الأساسية لتدفق الشبكة، تشكل مشكلة شبكة متعددة التدفق والسلع جزءًا صعبًا من البرمجة الخطية والتحسين التوافقي. وقد استخدمت العديد من أساليب التجزئة، والتي هي مفيدة في المجالات الأخرى كذلك. بسبب هيكلها المهم من الناحية النظرية، وبسبب إمكاناتها القوية للنمذجة، فإن لديها عددًا كبيرًا من التطبيقات. مما يجعل من شبكة متعددة التدفق والسلع MMCF مجال بحث مهم.

Liang, Zhe. (2011). *Column generation and network modeling in large-scale logistics networks*: Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick.

تم استخدام التجزئة في حل العديد من المشكلات في الرياضيات، الحاسوب، الهندسة، الإدارة وبحوث العمليات. في هذا البحث، استخدمت طرق تكوين لحل ثلاث مشاكل عملية اندماجية ناشئة في الاتصالات وتخطيط شركات الطيران. في الجزء الأول من البحث، درست مشكلة توجيه متعدد الإرسال متكررة مع مجموعة متنوعة من القيود (RMRGD) التي تنشأ في العديد من الشبكات والتطبيقات مثل أنظمة الاتصالات وأنظمة توزيع الإمداد بالطاقة وشبكات النقل وغيرها. اقترحت ثلاثة نماذج مختلطة لعدد صحيح مبرمجة بـ (MIP)، وهو القائم على الحد، القائم على المسار، والنموذج القائم على شجرة، لحل RMRGD. اقترحت طريقتين للتجزئة تستندان إلى توليد الأعمدة والربط والسعر لحل النماذج القائمة على المسار والقائمة على الأشجار. تشير النتائج العملية إلى أن النموذج القائم على الحد يتفوق على المشكلات الصغيرة ومتوسطة الحجم، في حين أن النموذج القائم على الأشجار يؤدي مشاكل أعلى، اقترح نموذج تسلسل طيران قائم على التجزئة (FSM) يحدد مجموعة مثالية من تسلسل الطيران لتقليل التكلفة الإجمالية. تُظهر نتائج الحساب أن طرق الحل المقترحة تتفوق على طرق الحلول الأخرى، وتحل حالات اختبار الحياة الحقيقية على النحو الأمثل خلال فترة زمنية معقولة. في الجزء الثالث من البحث، تتم دراسة مشكلة

توجيه صيانة الطائرات. تهدف مشكلة توجيه صيانة الطائرات إلى تحديد مواعيد دوران الطائرات بحيث يتم توفير فرص صيانة كافية لكل طائرة في الأسطول. قدّم البحث عرضين جديدين لشبكة جولة الدوران المدمجة، وهما مشكلة توجيه صيانة الطائرات اليومية (AMR) ومشكلة توجيه صيانة الطائرات الأسبوعية (WAMR)، واقتراح صيغ خطية جديدة مختلطة متعددة التكامل لحل هاتين المشكلتين. تشير الدراسة الحسابية إلى أن النماذج المقترحة قادرة على حل حالات اختبار الحياة الواقعية الكبيرة على النحو الأمثل في وقت معقول.

Benhamiche, Amal, Mahjoub, A Ridha, Perrot, Nancy, & Uchoa, Eduardo. (2017). Column generation based algorithms for the capacitated multi-layer network design with unsplittable demands. *Pesquisa Operacional, 37*, 545-570.

تم البحث عن متغير لمشكلة تصميم الشبكات متعددة الطبقات حيث يجب تثبيت الحد الأدنى لسعر التكلفة عند طبقة افتراضية بحيث يمكن توجيه مجموعة من طلبات المرور وتخصيص كل سعة (نطاق فرعي) للمسار، لا يمكن تقسيم طلبات المرور عبر عدة مسارات (ولا حتى العديد من السعات المثبتة على نفس الرابط)، مما يجعل المشكلة أكثر صعوبة. في هذه الدراسة، تقدم تركيبات ILP جديدة لنمذجة المشكلة وتوفر إجراءات توليد الأعمدة، استنادًا إلى تقنية تجزئة Dantzig-Wolfe المختلفة لحلها. بتعبير أدق، يتم إعطاء صياغة تدفق المسار للمشكلة وتستخدم لاشتقاق تركيبات مسارات مختلفة: غير مجمعة ومجمعة. يحتوي الأول على مجموعتين من متغيرات المسار ويتطلب إجراء توليد عمود ثنائي لحلها، في حين يعتمد الأخير على متغير مسار مفرد بهيكل محدد. تقترب هذه النماذج البديلة مع طريقة الربط والسعر، الخوارزميات التي تسمح لحل المشكلة بكفاءة لعدة فئات من الحالات.

Gabrel, Virginie, Knippel, Arnaud, & Minoux, Michel. (1999). Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. *Operations Research Letters, 25*(1), 15-23.

تم وصف إجراء حل دقيق، استنادًا إلى استخدام برنامج LP قياسي، لمشاكل تحسين شبكة متعددة الوظائف مع وظائف التكلفة غير المستمرة المتواصلة. تتضمن هذه الفئة من المشكلات ما يسمى بمشاكل تحميل

الشبكة المكثفة والمتعددة المنشآت كحالات خاصة. قد تتم معاينة الإجراء المقترح كتخصص لإجراءات تقسيم BENDERS المعروف، مما يؤدي إلى حل تكراري لمشكلة فرعية لتحويل البرمجة الخطية 0-1 الصحيحة والتي يتم زيادتها تدريجياً من خلال توليد القيد. تم اقتراح تحسين تنفيذ مبدأ توليد القيد حيث يتم تضمين العديد من القيود (N) O)) الجديدة في كل خطوة في المشكلة الحالية، وذلك بفضل تقليل العدد الإجمالي للتكرارات بشكل كبير. تم اجراء التجارب الحسابية المنهجية للشبكات التي يصل عددها إلى 20 عقدة و37 مسار ووظائف التكلفة بمتوسط ست خطوات لكل مسار.

Alvelos, Filipe Pereira. (2005). Branch-and-price and multicommodity flows. Universidade do Minho

في هذه الأطروحة، تم تناول الطرق المعتمدة على توليد الأعمدة للبرمجة الخطية والأعداد الصحيحة وتطبيقها على ثلاث مشاكل شبكة متعددة التدفق والسلع. بالنسبة لمشكلات البرمجة الصحيحة (المختلطة)، تتمثل الطريقة المتبعة في إعادة صياغة نموذج أصلي، باستخدام مبدأ تجزئة Dantzig-Wolfe، ثم دمج توليد الأعمدة مع الفصل والحصر (الفصل والسعر) من أجل الحصول على حلول مثالية. المشكلة الرئيسية عند تطوير خوارزمية الفصل والسعر تمثل مخطط التفريع. تتمثل الطريقة التي تم استكشافها في هذا العمل في التفرع على متغيرات النموذج الأصلي، مع الحفاظ على بنية المشاكل الفرعية لطريقة توليد العمود دون تغيير. كما تم اعتماد دمج الطرق (الفصل والسعر والقطع)، مرة أخرى دون تغيير هيكل المشكلة الفرعية. بناءً على هذه المنهجية العامة، تم تطوير مجموعة من فئات -C ++ (ADDing – Automatic Dantzig-Wolfe Decomposition for INteger column Generation)، والتي تنفذ خوارزمية الفصل والسعر. الميزة المميزة الرئيسية هي أنه يمكن استخدامه ك "صندوق أسود": كل ما يتعين على المستخدم القيام به هو توفير النموذج الأصلي. يمكن أيضًا تخصيص ADDing لمواجهة مشكلة معينة، إذا كان المستخدم مستعدًا لتقديم حل فرعي للمشكلة و / أو مخططات فرعي محددة. تم تطوير بناء خوارزميات الجيل القائمة لثلاث مشاكل تدفق السلع المتعددة. في هذا النوع من المشاكل، تم توجيه مجموعة من السلع عبر شبكة مكثفة بأقل تكلفة. في المشكلة الخطية، كل وحدة من كل سلعة قابلة للقسمة. باستخدام نموذج يحتوي على متغيرات مرتبطة بالمسارات والدوائر، أدت الى تحسينات كبيرة في أوقات الحلول عبر تقنية توليد الأعمدة القياسي، للحالات المحددة في شبكات المستوى (في العديد من الحالات كان التحسن النسبي أكبر من 60٪). في مشكلة عدد صحيح، كل وحدة من كل سلعة غير قابلة للتجزئة. يمكن

تقسيم تدفق سلعة ما بين مسارات مختلفة، ولكن يجب أن يكون التدفق على كل مسار من هذه المسارات صحيحًا. بشكل عام، كانت خوارزمية الفصل والسعر المقترحة أكثر فاعلية من Cplex 6.6 في مجموعات الحالات التي يتم فيها تعريف كل سلعة بزوج مصدر–مصب؛ بالنسبة لبعض المجموعات الأخرى من الحالات، أعطى Cplex 6.6 نتائج وقت أفضل. في المشكلة الثنائية، يجب توجيه كل تدفق لكل سلعة على طول مسار واحد. قمنا بتطوير خوارزمية الفصل والسعر استنادًا إلى تجزئة النموذج وتعديله (باستخدام نموذج فرعي مختلف) خوارزمية الفصل والقطع بناءً على تحليل المسار. كانت نتيجة الاختبارات الحسابية مهمة، بالنظر إلى أنه من المفترض عادة أن الطرق المحددة أكثر كفاءة من الطرق العامة. بالنسبة للحالات التي تم اختبارها، أعطت الأهداف العامة الحديثة (Cplex 8.1)، بشكل عام، نتائج أفضل بكثير في كل من تقنيات التجزئة.

Gendron, Bernard, Crainic, Teodor Gabriel, & Frangioni, Antonio. (1999). Multicommodity capacitated network design. In *Telecommunications network planning* (pp. 1-19): Springer.

يقدم هذا البحث دراسة استقصائية شاملة للنماذج والخوارزميات الخاصة بمشاكل تصميم الشبكات متعددة السعة، والتي تواجه في الغالب في تخطيط شبكات الاتصالات والنقل. هذه المشاكل مهمة ليس فقط بسبب الأهمية الكبيرة لتطبيقاتها، ولكن أيضًا لأنها تشكل تحديات كبيرة في النمذجة والخوارزميات. يقدم نموذجًا عامًا قائمًا على المسار، ونصف تركيبات بديلة مفيدة، ويستعرض المؤلفات حول مستويات القطع المبنية على أساس بسيط لطريقة تحويل لاغرانج. يتم التركيز بعد ذلك على مساهمة خاصة التي تقوم بتطوير ومقارنة العديد من طرق التحويل لحالة معينة من هذا النموذج، مشكلة الشحن الثابت. تعتمد هذه الأساليب على أساليب تحويل Lagranean وتقنيات التحسين غير المميّزة. تشير النتائج التجريبية، إلى أن حل هذه المشكلات الصعبة بكفاءة يتطلب مزيجًا حكيماً من قطع المساحات وطرق تحويل Lagrangean والاستدلال متطورة. بالإضافة إلى ذلك، نظرًا لخصائص التجزئة غير المترابطة، يمكن تكييف هذه التقنيات مع برامج الحوسبة، وهو أمر مهم للغاية من أجل حل الحالات ذات الحجم الكبير.

Maurras, Jean-François, & Vaxès, Yann. (1997). Multicommodity network flow with jump constraints. *Discrete Mathematics*, *165*, 481-486.

يعد تدفق شبكة المتعدد في السكن مشكلة مهمة تحدث في العديد من مجالات بحوث العمليات. بالنظر إلى مجموعة من السلع التي يتعين نقلها بين عقد معينة من شبكة مكثفة، فإن المشكلة العامة تكمن في إيجاد التوزيع الأمثل لحركة المرور بحيث يتم تلبية جميع الاحتياجات مع تلبية قيود السعة. كون صياغة هذه المشكلة كبرنامج خطي كبير يتم استخدام هيكله لتسريع طريقة simplex: توجيه السعر وتجزئة توجيه الموارد، و التجزئة ، وتقنية محددة لهيكل GUB، وما إلى ذلك. وتكييف لطريقة simplex المصممة لحل مشكلة التدفق متعدد الإمكانات واستخدمت تقنية التجزئة لصياغة سلسلة المسار. الهدف من هذا البحث هو إظهار كيف يمكن استخدام نفس النهج لحل مشكلة أكثر تعقيدًا، ناشئة عن تحسين شبكة الاتصالات: مشكلة التدفق المتعدد للسلع مع قيود. تختلف هذه المشكلة عن المشكلة السابقة بحقيقة أن السلع لا يمكن أن تتدفق إلا عبر مسارات لا تزيد عن عدد ثابت من الأقواس. علاوة على ذلك، يتم تقديم نتيجة جديدة وأقصر البراهين التي تتناول خصائص الحلول الناتجة عن التجزئة الأولية.

Weibin, DAI, Zhang, Jun, & Xiaoqian, SUN. (2017). On solving multi-commodity flow problems: An experimental evaluation. *Chinese Journal of Aeronautics*, *30*(4), 1481-1492.

يمكن تطبيق مشاكل التدفق للسلع المتعددة في العديد من المجالات، مثل النقل والاتصالات واللوجستيات. لذلك، اعتمدت مثل هذه المشكلات من قبل العديد من الباحثين واقترح مجموعة متنوعة من الطرق لحلها. ومع ذلك، فإن معظم الباحثين يناقشون فقط خصائص النماذج والخوارزميات المختلفة دون مراعاة مساهمة التطبيقات الفعلية. في الواقع، قد يكون الأداء لأحد الأساليب مختلفًا إلى حد كبير مع اختلاف التطبيقات. في هذه الدراسة، تمت مناقشة العديد من حلول التحسين الشائعة لتنفيذ وإنشاء تحويل Lagrangian. من أجل اختبار قابلية التوسع والتنفيذ الأمثل لهذه التطبيقات، يتم استخدام ثلاث مجموعات من الشبكات ذات الهياكل المختلفة كدراسات حالة. يتضح أن توليد الأعمدة يتفوق على تحويل لاغرانج في معظم الحالات، ولكن الأخير أفضل ملاءمة في الشبكات التي تحتوي على عدد كبير من السلع. في التقييم، تتم مقارنة الفجوات الوظيفية الموضوعية، ووقت الحساب، وعدد التكرارات للتطبيقات المختلفة. يتضح أن توليد الأعمدة، بشكل عام، يؤدي بشكل أفضل من تحويل Lagrangian مع جميع معايير التقييم الثلاثة لحل

MCFP. ومع ذلك، بالنسبة للشبكات الكبيرة التي تضم عددًا كبيرًا من السلع (مثل شبكة مطار الصين)، فإن تحويل لاغرانج أسرع من توليد الأعمدة. بشكل منفصل، بالنسبة لتوليد الأعمدة، GLPK أفضل الخصائص، لكن CVXPY يمكن أن يتفوق على GLPK مع حل MCFP بعدد كبير من السلع. من أجل تحويل لاغرانج، يتبين أن استخدام الطريقة الأقصر للمسارات في ديكسترا لحل المشكلة الفرعية لاجرانج هو الخيار الأفضل. بشكل عام، يقوم GUROBI بمستوى متوسط في كل من الخوارزميات ويكون SCIPY دائمًا هو الأسوأ. تضع هذه الدراسة الأساس لتقييم تطبيقات خوارزمية MCFP. بالنسبة لهذا التقييم الأولي، تتم مقارنة خوارزميات وعدة تطبيقات. ومع ذلك، لا يتم تقييم عدة خوارزميات شائعة الاستخدام (مثل الربط والحصر) ومحللات التحسين. لمزيد من العمل، يجب النظر في تقنيات الحلول هذه، كما يجب زيادة حجم مجموعات البيانات بناءً على نتائج دراستنا.

Dai, Liyun, Zhao, Hengjun, & Liu, Zhiming. (2019). Solving Splitted Multi-Commodity Flow Problem by Efficient Linear Programming Algorithm. *arXiv preprint arXiv:1903.07469*.

غالبًا ما يستخدم توليد الأعمدة لحل مشاكل التدفق متعدد السلع. يتضمن برنامج توليد الأعمدة دائمًا وحدة نمطية تحل المعادلة الخطية. في هذه الدراسة، تم تناول ثلاث قضايا رئيسية في حل المشكلة الخطية أثناء إجراء توليد الاعمدة وهي كيفية استخدام الخاصية المتفرقة لمصفوفة المعامل؛ كيفية تقليل حجم مصفوفة المعامل؛ وكيفية إعادة استخدام الحل لمعادلة مماثلة. تحقيقًا لهذه الغاية، تم أولاً تحليل الخاصية المتفرقة لمصفوفة معامل الخطية وتجد أن المصفوفات التي تحدث في التكرار قليلة جدًا. بعد ذلك، تم تقديم خوارزمية (incSolverلمحلل النموذج المحول) للمعادلات الخطية ذات المصفوفات المشتتة للمعامل والجانب الأيمن. هذه الخوارزمية يمكن أن تقلل من عدد المتغيرات. بعد ذلك، تم تقديم الخوارزمية) incSolver لمحلل النموذج الإضافي) الذي يستخدم التشابه في تكرارات البرنامج لنموذج معادلة خطية. كل هذه التقنيات الثلاثة يمكن استخدامها في توليد عمود من المشاكل المتعددة للسلع. تبين التصورات العددية الأولية أن incSolverأسرع بكثير من الخوارزميات الموجودة. على سبيل المثال، تُظهر حالات الاختبار العشوائي أن incSolver لا يقل عن 37 مرة ويصل إلى 341 فاصل زمني عن محلل LAPACK الشهير.

أخيرًا، تقدم خوارزميتين. الأولى هي خوارزمية سريعة incSolver (حل النموذج المحول) التي يمكن أن تقلل من عدد المتغيرات في حل نموذج المعادلة الخطية عندما تكون كل من مصفوفة معامل والجانب الأيمن متفرقة.

والآخر هو خوارزمية incSolver (لمحلل النموذج الإضافي) الذي يستخدم التشابه أثناء التكرار في حل نموذج المعادلة الخطية. يمكن استخدام جميع الخوارزميات في توليد عمود من مشكلة السلع المتعددة. تُظهر التجارب العددية الأولية أن الخوارزميات أسرع بكثير من الخوارزميات الموجودة. على سبيل المثال، في حالات الاختبار العشوائي، يوفر incSolver تحسينًا يصل إلى 341 × (من 37 ×) في جزء حل المعادلة الخطية مقارنةً بـ LAPACK. بالإضافة إلى ذلك، مع الأخذ في الاعتبار الوقت الكلي، عندما يهيمن حل المعادلة الخطية على جزء منه، فإن incSolver سوف يحقق تسريعًا عاليًا. على سبيل المثال في بعض الاختبارات التي تستخدم incSolver بدلاً من LAPACK، ستحقق 19 × تحسينًا. ن ناحية أخرى، عندما يكلف حل المعادلة الخطية وقتًا أقل، يمكن أن يقلل incSolver من حل المعادلة الخطية إلى كسر ضئيل. على سبيل المثال، في بعض الحالات، يؤدي استخدام incSolver بدلاً من LAPACK إلى تقليل وقت حل المعادلة الخطية إلى أقل من 1٪ من الإجمالي.

Wollmer, Richard D. (1969). *The Dantzig-Wolfe decomposition principle and minimum cost multicommodity network flows*. Retrieved from

نشر J. A. TOMLIN بحث عن اجتماع التدفقات المطلوبة لشبكة متعددة السلع بأقل تكلفة. لقد صاغ هذه المشكلة في كل من شكل عقدة المسار ومسارين. تمت معالجة البرنامج الخطي NODEARC بواسطة مبدأ تجزئة Dantzig-Wolfe من خلال التعبير عن البرنامج الرئيسي المشتق كمجموعات محدبة من النقاط المتطرفة للبرامج الفرعية المشتقة. في هذه المذكرة، يظهر أن هذه المشكلة هي بالفعل حالة خاصة للمشكلة حيث يحاول تلبية الحد الأدنى من تكلفة تدفقات السلع المتعددة دون متطلبات التدفق على السلع الفردية. ثم يتم تعديل خوارزمية TOMLIN لحل هذه المشكلة الأكثر عمومية. عندما يتم ذلك، تكون البرامج الفرعية متجانسة والبرنامج الرئيسي عبارة عن مزيج غير سلبي من حلولها المستقلة.

لقد ثبت أن المشكلة التي يتم التعامل معها هي حالة خاصة من التي تمت معالجتها. مثل الحالات الخاصة الأخرى، تتضمن المشكلة المعالجة تعظيم مزيج خطي من تدفقات السلع الفردية وإيجاد تقنية فعالة تأخذ في الاعتبار قيمة كل من تدفقات السلع الفردية وتكاليف النقل المعنية. يتم إنجاز ROMER هذه من خلال ربط، لكل سلعة، والعقدة الاصطناعية ومسار اصطناعي موجه منه إلى المصدر. يتم منح الأقواس الصناعية قدرات وتكاليف لا حصر لها تتناسب سلبياتها مع المعاملات الخطية لتدفقات السلع في الدالة الخطية التي يجب تعظيمها. بالنسبة للمشكلة الأخيرة، يضيف أيضًا نفس العقد والأقواس المصطنعة، والأقواس الجديدة

ذات سعة غير محدودة. التكلفة على المسار الاصطناعي للسلعة k هي القيمة السلبية لوحدة تدفق السلعة k. وبالتالي، قد يزداد نطاق المشكلات التي تتم معالجتها بشكل كبير من خلال التغييرات الصغيرة نسبيًا في صياغة المشكلة والخوارزميات.

Karsten, Christian Vad, Pisinger, David, Ropke, Stefan, & Brouer, Berit Dangaard. (2015). The time constrained multi-commodity network flow problem and its application to liner shipping network design. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 76*, 122-138.

تعد مشكلة تدفق الشبكة متعددة السلع مشكلة فرعية مهمة في العديد من الأساليب البحثية والطرق الدقيقة لتصميم شبكات الطرق لسفن الحاويات. تحدد المشكلة الفرعية كيفية نقل السلع عبر الشبكة التي توفرها طرق الشحن. تدرس هذه الدراسة مشكلة تدفق شبكة السلع المتعددة مع قيود وقت العبور والتي تضع قيودًا على مدة عبور السلع عبر الشبكة. يتبين أنه بالنسبة للتطبيق المعين، فإنه لا يزيد من وقت الحل ليشمل قيود وقت العبور وأن تضمين صبغة العبور ضروري لتزويد العملاء بقناة تنافسية.

يوضح التحليل المقدم بوضوح أنه من المهم والضروري النظر في القيود المفروضة على أوقات السفر في عملية تصميم الشبكة. حذف قيود وقت العبور عند تصميم الطرق يؤدي إلى نقل السلع على طول الطرق المعقدة التي لن تكون مقبولة في الممارسة. قد يُخشى أن يؤدي تضمين قيود الجير العابر في مشكلة MCF إلى أوقات تعاونية أعلى بكثير، لكن التجارب الحالية تُظهر أن هذا ليس هو الحال بالنسبة للحالات قيد الدراسة. تساعد الأشكال البيانية المقترحة وهياكل إعادة الشحن الأكثر بساطة على زيادة تسريع وقت حلول مشكلة تدفق الشبكات المتعددة السلع. تتمثل الخطوة التالية في تضمين الخوارزمية المقترحة للوقت الذي يقيد فيه مشكلة التدفق الصافي للعمل متعدد السلع في الاستدلال لحل مشكلة تصميم شبكة شحن الخطوط الملاحية المنتظمة .

تم الأخذ في الاعتبار، أنه عند تصميم شبكة لشحن الخطوط الملاحية المنتظمة، فإن أوقات المغادرة الفعلية (الجدول الزمني) لم يتم تحديدها بعد، مما يعني أن أوقات الشحن ليست سوى تقديرات. وبالتالي، بدلاً من استخدام قيود مشددة جدًا على وقت الشحن، يمكن استخدام طريقة للتغلب على الحد الأقصى المسموح به لوقت إعادة الشحن حتى الحد الأعلى المعطى. وهذا على سبيل المثال يمنح أيضًا فائدة مقابل أوقات التحويل. تشير الطريقة إلى مدى صعوبة تصميم جدول لاحق يلبي قيود الجير. كل هذا يمكن معالجته بسهولة

من خلال وجود قائمة كاملة بأوقات العبور والتكاليف الناتجة عن حل مشكلة أقصر الطرق باستخدام خوارزمية برمجة ديناميكية.

Barnhart, Cynthia, Hane, Christopher A, & Vance, Pamela H. (2000). Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*, *48*(2), 318-326.

تم تقديم نموذج توليد الأعمدة وخوارزمية الفصل والسعر لمشكلات تدفق عدد صحيح من جهة الوصول إلى الوجهة الأصلية. تعد مشكلة تدفق عدد صحيح من جهة المقصد الأصلية عدد صحيح من إصدار مقيد من مشكلة تدفق خطي متعدد أماكن الإقامة التي قد يستخدم فيها تدفق السلعة (المحددة في هذه الحالة بواسطة ثنائي مصدر-مصب) مسارًا واحدًا فقط من تحديد أصل الأصل. يعتبر "الفصل والسعر والقطع" أحد أشكال الفروع والمحددة، حيث يتم توفير الحدود من خلال حل البرامج الخطية باستخدام توليد الأعمدة والقطع في عقد شجرة القرار الفصل والربط. لأن النموذج المدروس يحتوي على متغير واحد لكل مسار وجهة أصل، لكل سلعة، يتم حل تحويل البرمجة الخطية في عقد شجرة القرار المقيدة والشجرة باستخدام توليد العمود، أي التسعير الضمني للمتغيرات غير الأساسية لتوليد أعمدة جديدة أو لإثبات LP الأمثلية. تستخدم قاعدة NEWBRANCHING تسمح بتوليد الأعمدة بكفاءة في كل عقدة من شجرة الفصل والربط. بعد ذلك، تم تصنيف التخفيضات التي يمكن إنشاؤها في كل عقدة من شجرة الفصل والربط. هذه التخفيضات تساعد على تعزيز التحويل الخطي وتخفيف آثار التماثل المشكلة. تم التوضيح بالتفصيل تقنية تنفيذ طريقة توليد الأعمدة والقطع المدمجة والنتائج الحسابية الحالية لمجموعة من مشكلات الاختبار الناشئة عن تطبيقات الاتصالات. تم توضيح قيمة قاعدة التفريعات عند استخدامها لإيجاد حل استكشافي والمقارنة بين أساليب الفصل والسعر والامتياز والسعر لإيجاد الحلول المثالية للمشاكل المكثفة للغاية.

Moradi, Siamak, Raith, Andrea, & Ehrgott, Matthias. (2015). A bi-objective column generation algorithm for the multi-commodity minimum cost flow problem. *European Journal of Operational Research, 244*(2), 369-378.

تم تقديم خوارزمية توليد عمود لحل مشكلة تدفق التكلفة الدنيا ثنائية الهدف للسلع المتعددة. تعتمد هذه الطريقة على أسلوب simplex ثنائية الهدف و تجزئة Dantzig-Wolfe. تم تحديد الأسلوب عن طريق تحسين المشكلة فيما يتعلق بالهدف الأول، مشكلة تدفق سلع متعددة موضوعية واحدة، التي يتم حلها باستخدام تجزئة Dantzig-Wolfe. بعد ذلك، على غرار طريقة simplex ثنائية الهدف، تنتقل هذه الخوارزمية بشكل تكراري من نقطة متطرفة غير مهيمنة إلى النقطة التالية عن طريق إيجاد متغيرات إدخال مع الحد الأقصى لنسبة تحسين الهدف الثاني على تدهور الهدف الأول. تقوم الطريقة المتبعة بإعادة صياغة المشكلة لتصبح مشكلة رئيسية ثنائية الهدف على مجموعة من قيود السعة والعديد من المشكلات الفرعية الخطية الفردية لكل منها على مجموعة من قيود الحفاظ على تدفق الشبكة. المشكلة الرئيسية تقوم بتحديث معاملات التكلفة بشكل متكرر من أجل كسور فرعية. مشاكل. بناءً على معاملات التكلفة هذه، يتم الحصول على الحل الأمثل لكل مشكلة فرعية. يمثل الحل الذي يحتوي على أفضل قيمة موضوعية لجميع المشكلات الفرعية المتغير الأساسي للأساس الرئيسي. تنتهي الخوارزمية عندما لا يكون هناك متغير دخول يمكن أن يحسن الهدف الثاني بتدهور الهدف الأول. هذا يعني أنه يتم الحصول على كل النقاط المتطرفة غير المهيمنة للمشكلة الأصلية. تم الإبلاغ عن أداء الخوارزمية في العديد من مثيلات الشبكة ثنائية الهدف الموجهة ذات الخصائص المختلفة والأرقام المختلفة للسلع.

Yaghini, Masoud, Rahbar, Mohadeseh, & Karimi, Mohammad. (2013). A hybrid simulated annealing and column generation approach for capacitated multicommodity network design. *Journal of the Operational Research Society, 64*(7), 1010-1020.

تقدم هذه الدراسة خوارزمية تلدين مُحاكي (SA) ومحاكاة لتوليد الأعمدة (CG) من أجل الصياغة المستندة إلى المسار لمشكلة تصميم شبكات بتدفقات المتعدد السلعة (PCMND). في الطريقة المقترحة، تقوم خوارزمية metaheuristic SA بإدارة الأقواس المفتوحة والمغلقة. ليتم اقتراح وتقييم العديد من الاستراتيجيات التي تقوم بإدخال الأقواس وإسقاطها. بالنسبة لتقنية حل معينة في النهج المختلط المقترح،

تصبح مشكلة PCMND مشكلة تدفق تكلفة متعددة (CMCF) مكثفة. يتم إجراء التقييم الدقيق لمشكلة CMCF باستخدام خوارزمية CG. يتم ضبط الاعدادات عن طريق تصميم نهج التجارب. يتم تقييم أداء الخوارزمية المقترحة من خلال حل العديد من الحالات المرجعية. تتوافق نتائج الخوارزمية المقترحة مع حلول CPLEX والطريقة الأكثر شهرة في حدود زمنية مختلفة. يثبت التحليل الإحصائي أن الخوارزمية المقترحة قادرة على الحصول على حلول أفضل.

Machado, Catia MS, Mayerle, Sergio F, & Trevisan, Vilmar. (2010). A linear model for compound multicommodity network flow problems. *Computers & operations research, 37*(6), 1075-1086.

اقترح هذا العمل نموذج برنامج خطي لتدفق الشبكة لحل مشكلة تقليل تكاليف الإنتاج وتوزيع السلع المتعددة المركبة. في النموذج المقترح، يتم النظر في قيود الاقتران من أجل معالجة التناسب الحالي بين العديد من التدفقات للسلع المختلفة اللازمة للمزيج لتكوين سلع جديدة. مصفوفة قيد الاقتران لهذا النوع من المشاكل كبيرة جدًا بشكل عام. تقلل الصيغة المتبعة من قيود التناسب العددية التي تتيح استخدام تقنية الحل استنادًا على تخصص الخوارزمية الثنائية التي يتم تطبيقها على مرحلتين مختلفتين. كحل أولي، يتم استخدامه كأساس مدمج للطريقة الإرشادية التي تخصص التدفقات في المسارات منخفضة التكلفة. لتنفيذ عملية تغيير الأساس، يتم تخزين مصفوفة العمل كنموذج ناتج من المعكوس للحفاظ على ثبات أبعادها والحفاظ على التباين. النتائج التجريبية التي تحتوي على حوالي 200000 قيد و75000 مسار تنطبق على توزيع سلع متعددة لصناعة البتروكيماويات تم تحقيقها بنجاح. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها كفاءة الكمبيوتر للخوارزمية المطورة وإمكانية تطبيق النموذج المصاغ.

Holmberg, Kaj, & Yuan, Di. (2003). A multicommodity network-flow problem with side constraints on paths solved by column generation. *INFORMS Journal on Computing, 15*(1), 42-57.

يتعلق نموذج تدفق الشبكات المتعددة السلع بتوجيه عدد من السلع عبر شبكة مكثفة بأقل تكلفة. في النموذج الأساسي، يُفترض أنه بالنسبة لكل سلعة، يمكن توجيه التدفق على أي مسار يربط أصله ووجهته. في تطبيقات الاتصالات، حيث تمثل سلعة ما زوجًا من الاتصالات، غالبًا ما تكون هناك متطلبات تأخير أو موثوقية إضافية على المسارات المستخدمة للتوجيه. قد تختلف هذه المتطلبات حسب زوج الاتصالات،

ممثلة بفئات أولوية مختلفة. في هذه الورقة، تم توسيع نموذج تدفق الشبكة الأساسي متعدد السلع ليشمل هذه القيود الجانبية على المسارات. المشكلة الموسعة صعبة مع مشكلة أقصر مسار مقيدة كحالة خاصة. لحل النموذج الممتد، استخدم نهج توليد الأعمدة، حيث يتم بناء الحل بشكل متتابع من خلال إنشاء المسار. يتم التعامل مع القيود الجانبية بكفاءة في المشكلة الفرعية لتوليد المسار. تم مناقشة المزيد من التحسينات لهذا النهج. توضح النتائج الحسابية أن أسلوب توليد الأعمدة يوفر طريقة فعالة لحل النموذج الممتد، حتى بالنسبة للشبكات الكبيرة إلى حد ما.

Kawarabayashi, Ken-ichi, & Kobayashi, Yusuke. (2013). *All-or-nothing multicommodity flow problem with bounded fractionality in planar graphs.* Paper presented at the 2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.

تم دراسة مشكلة تدفق السلع المتعددة في الرسوم البيانية المستوية. هذه المشكلة صعبة للغاية بالنسبة للأشجار، وخوارزمية تقريب 2 معروفة بالأشجار. بالنسبة إلى الرسوم البيانية العامة، CHEKURI et all. (STOC'04)إعطاء خوارزمية تقريب عامل متعدد اللوغاريتمي وإظهار أن التحويل LP الطبيعي لديه فجوة تكامل متعددة اللوغاريتمية. تتناقض هذه النتيجة مع فجوة التكامل (√n Ω) لمشكلة مسارات التدفق الأقصى. النتيجة الرئيسية هنا تعزز هذه النتيجة إلى حد كبير عندما يكون الرسم البياني للمدخلات مستو. وهي مشكلة التدفق متعدد المساحات في الرسوم البيانية المستوية، يقدم هذا البحث خوارزمية تقريب ( O 1) ونظهر أن فجوة التكامل هي (O 1). على وجه الخصوص، في وقت متعدد الحدود، يتمكن العثور على فهرس مجموعة W مع | OPT) Ω = | W) ومسارات لكل i في W بحيث يتم استخدام كل حد على الأقل ثماني مرات في هذه المسارات (مع التعدد)، حيث OPT هي القيمة المثلى لتحويل LP لمشكلة التدفق متعدد السلع. يمكن مقارنة النتيجة المتحصل عليها بالنتيجة الأخيرة التي أجراها S'EGUIN-CHARBONNEAU و SHEPHERD (FOCS'11) الذين يعطون خوارزمية تقريب (O 1) لمشكلة مسارات فك ارتباط الحد الأقصى في الرسوم البيانية المستوية مع الازدحام (ولكن ليس ضمنيًا من هذه النتيجة).

Grande, Enrico, Nicosia, Gaia, Pacifici, Andrea, & Roselli, Vincenzo. (2018). An exact algorithm for a multicommodity min-cost flow over time problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, *64*, 125-134.

في هذا البحث تم دراسة مشكلة الحد الأدنى من تكلفة تدفق السلع المتعددة مع مرور الوقت، يتطلب مسارات بدون حلقة ولا يسمح بتخزين التدفق في العقد. تم اقتراح نموذج LP غير مكثف وحلّه عبر تقنية توليد الأعمدة. وقدمت نتائج دراسة حسابية أولية تبين أن النهج المقترح مفيد. ومع ذلك، فإن حجم نماذج LPالناتجة، والتي يتعين حلها بواسطةCplex ، لا يزال يمثل أحد العيوب الرئيسية بسبب الكمية الزائدة من المساحة المطلوبة. لذلك، تمت إعادة تنفيذ الشيفرات البرمجية الخاصة بالدراسة باستخدام هياكل بيانات أكثر فاعلية وإصدار أحدث من LP . علاوة على ذلك، تم تصميم مجموعة جديدة من التجارب لتشمل الحالات "الصعبة"، وهي الحالات التي تتطلب فيها الحلول المثلى مسارات تحتوي على دورات. (في الواقع، تصبح مشكلة التسعير أكثر صعوبة لهذا النوع من الحالات.

أخيرًا، يتم اقتراح خوارزميات اندماجية جديدة للمشكلة التي تمت معالجتها لاستنباط حلول مجدية في المرحلة الأولية من الخوارزمية واستخدامها كإجراء مستقل. في الحالة الأخيرة، يمكن إجراء مقارنة بين الفعالية والكفاءة فيما يتعلق بتقنية توليد العمود.

Ciappina, Jussara Rodrigues, Yamakami, Akebo, & Silva, Ricardo Coelho. (2012). Decomposition's Dantzig–Wolfe applied to fuzzy multicommodity flow problems. *Computers & operations research*, *39*(12), 3394-3407.

تم التقديم في هذه الدراسة، طريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية بتكاليف ضبابية تعتمد على الطريقة التقليدية لتجزئة Dantzig-Wolfe. الأساليب التي تستخدم تقنيات التجزئة تتعامل مع المشكلات التي لها بنية خاصة في مجموعة القيود. مثال على هذه المشكلة التي لديها هذا الهيكل هو مشكلة التدفق السلبي المتعدد للسلع. يمكن صياغة هذه المشكلة من خلال رسم بياني تمثل نقاطه نقاط العرض والطلب ومرور السلع التي تنتقل على أقواس الشبكة. الهدف هو تحديد تدفق كل سلعة على الأقواس، من أجل تلبية الطلب بأقل تكلفة مع مراعاة قيود السعة الخاصة بالأقواس وقيود الحفاظ على التدفق للعقد. باستخدام نظرية المجموعات الضبابية تهدف الطريقة المقترحة إلى إيجاد الحل الأمثل. أثبتت النتائج التي تم الحصول عليها كفاءة الطريقة المقترحة، لأنها وجدت الحل الأمثل لجميع المشاكل. العمل المستقبلي المحتمل هو تطبيق الخوارزمية على المشاكل الحقيقية الكبيرة. ومعالجة أوجه عدم اليقين في القيود (القدرات) لتعظيم دالة الهدف.

Dai, Weibin, Sun, Xiaoqian, & Wandelt, Sebastian. (2016). *Finding feasible solutions for multi-commodity flow problems.* Paper presented at the 2016 35th Chinese Control Conference (CCC).

يمكن صياغة العديد من مشكلات النقل والاتصالات واللوجستيات على أنها مشكلات تدفق كبيرة متعددة السلع، والتي غالباً ما يتم حلها باستخدام طريقة توليد الأعمدة التقليدية. أثناء تطبيق توليد الأعمدة، يحتاج إلى إيجاد حلول أولية، ما يسمى بالأعمدة الممكنة في الخطوة الأولى. من أجل تحديد هذه الأعمدة الممكنة وأيضًا حل مشكلات الأسعار التابعة في غضون وقت مقبول، تقترح هذه الدراسة عدة طرق جديدة: طريقتان من خلال حل المشكلة العامة وطريقتين من خلال إيجاد أقصر وأوسع المسارات المقترحة لحساب الأعمدة الأولية. علاوة على ذلك، تم اقتراح طريقتين من خلال إيجاد أقصر الطرق مع السلع والمصادر (SPC وSPS) لحل مشاكل السعر. يتم استخدام العديد من أنواع الشبكة المعروفة كدراسات حالة في التقييم لاختبار كفاءة كل طريقة. يظهر أن طريقة المسار الأوسع هي الأفضل للعثور على الأعمدة الأولية. لحل مشاكل الأسعار، يعتمد تفضيل طريقتي البحث عن المسار على بنية الشبكة.

Larsson, Torbjörn, Patriksson, Michael, & Rydergren, Clas. (2003). Inverse nonlinear multicommodity flow optimization by column generation. *Optimization Methods and Software, 18*(5), 601-613.

في هذه الدراسة قُدمت خوارزمية حل لمشكلة تدفق شبكة سلعة متعددة غير معكوسة. تتمثل هذه المشكلة في العثور على تعديلات تكلفة المسار التي تجعل حل تدفق المسارات المستهدف المعطى هو الأمثل في مشكلة تدفق الشبكة متعددة المسارات غير الخطية، والتي هي الأمثل فيما يتعلق بهدف محدد. لإجراء الحل يُستخدم توليد الأعمدة. تم تقديم نتائج حسابية للحالات التي تكون فيها مشاكل تدفق الشبكة متعددة المسارات غير الخطية لمشاكل توازن حركة المرور الصغيرة والمتوسطة، حيث يتم استهداف تدفقات المسار الأمثل للبرنامج. تظهر النتائج الحسابية أن إجراء الحل هو نهج قابل للتطبيق لحل أنواع متوسطة الحجم لمشكلة توازن حركة المرور العكسية. إن مشكلة تدفق الشبكة متعددة الخطوط غير الخطية ترقى إلى إيجاد حد أدنى لتدفق تكلفة السلع في شبكة يكون لكل رابط فيها تكلفة تعطى بواسطة دالة غير خطية لتدفق المسار.

Wang, I-Lin. (2018). Multicommodity network flows: A survey, part II: Solution methods. *International Journal of Operations Research*, *15*(4), 155-173

تعد مشكلة تدفق الشبكة متعددة السلع (MCNF) موضوعًا مهمًا وصعبًا في العديد من تطبيقات الجدولة والتوجيه. كدراسة متابعة للدراسات السابقة التي تركز على تطبيقات وصيغ MCNF، تقدم هذه الدراسة أولاً طرق حل MCNF التقليدية مثل توجيه السعر وطريقة توجيه الموارد وتقسيم الأساس، ثم يلخص التقدم المحرز مؤخرا في تطبيق خوارزميات التقريب، خوارزميات النقطة الداخلية، خوارزميات البرمجة التربيعية، والاستدلال لحل مشاكل تدفق شبكة خطية أو متكاملة متعددة السلع. أخيرًا، تتم مقارنة الأداء الحسابي لأساليب الحل المختلفة في النظريات واقتراح اتجاهات البحث في المستقبل.

للمساعدة على فهم التطورات في أساليب حل MCNF، تم مراجعة أكثر من 200 مرجع وتلخيص معظم أساليب حلول MCNF في النظريات. إلى جانب الطرق الأولية الثنائية ، وأساليب تقسيم الأساس، وأساليب توجيه الموارد، وأساليب توجيه الأسعار التي ظهرت في الدراسة الاستقصائية السابقة، فتم تقديم أساليب النقطة داخلية، أساليب البرمجة المحدبة والتقدم الحديث في طرق تقريب كثير الحدود للوقت لحل مشكلة MCNF الخطية. وتغطي هذه الدراسة أيضا تقنيات لحل مشكلة MCNF متكاملة والاستدلال للحصول على حل MCNF مجدية سريعة. أخيرًا يلخص الأداء الحسابي للعديد من خوارزميات MCNF. وتشير الأبحاث أيضًا إلى أن بعض الأساليب الأساسية ( McBride & Mamer، 2001) وتوجيه الأسعار (.Barnhart et al، 1995؛ Frangioni & Gallo، 1999)، تعتبر أساليب فعالة لحل مشكلات MCNF الخطية، بينما نجحت طرق النقطة الداخلية (Castro، 2000b، 2001) في حل مشكلات MCNF التربيعية. كان التقدم في الجوانب النظرية والحسابية لخوارزميات التقريب خلال العقدين الأخيرين شيقا. يُقترح كتاب (Bienstock 2002) المزيد من التفاصيل.

Babonneau, Frédéric. (2006). *Solving the multicommodity flow problem with the analytic center cutting plane method.* University of Geneva,

الهدف من الرسالة هو حل مشاكل التدفق المتعدد للسلع على نطاق واسع (MCF). يتم استخدام إصدار جديد من طريقة التحليل المركزي لقطع المستويات (ACCPM) لحل مشكلة لاغرانج الثنائية. في هذه الأطروحة، تم اقتراح ميزات مهمة تحسن إلى حد كبير من أداء طريقة الحل على MCF الخطية وغير الخطية.

يُعتقد أنه يمكن تسريع هذه الطريقة من خلال استغلال حقيقة أن الهدف هو مجموع المكونات المستقلة. في الدراسات السابقة حول مشكلة التدفق غير الخطي للسلع المتعددة، تنفيذ استغلال حقيقة أن الدالة في مجموع | K | وظائف مستقلة. يربط مع كل واحد منهم متغير لخفض الأمثلية. وبالتالي يتم نقل معلومات أكثر إلى البرنامج الرئيسي الذي يتيح التقارب في عدد قليل جدًا من التكرارات الخارجية (غالبًا ما يكون أقل من 15 في المشكلات الكبيرة). في غضون ذلك، يزيد وقت حساب المراكز التحليلية بشكل كبير. نتيجة لذلك، يتم قضاء 95٪ من الوقت في البرنامج الرئيسي الذي يحسب المراكز التحليلية. في الأطروحة، تكون النسبة عكسية تمامًا: يُلاحظ أن 95٪ من الوقت يقضيه في حل مشكلات أقصر الطرق في حالات المشكلة الأكبر. إذا تمكن تحقيق توازن أفضل بين عنصري الخوارزمية، فيتحسن الأداء.

Chung, William, & Fuller, J David. (2010). Subproblem approximation in Dantzig-Wolfe decomposition of variational inequality models with an application to a multicommodity economic equilibrium model. *Operations Research*, *58*(5), 1318-1327.

في هذه الدراسة تم تقديم تعديلاً لتجزئة Dantzig-Wolfe لمشاكل عدم المساواة المتفاوتة (VI) التي تسمح بتقريب مناظرة VI في المشكلة الفرعية. يتم تحديد التقريب بواسطة حل المشكلة الرئيسية الأحدث، ويجب أن يفي باثنين من المتطلبات البسيطة. يتوضح أن أدلة التقارب وغيرها من الخصائص المهمة تمر بتقريب المشكلة الفرعية. يتم توضيح إجراء التقريب من خلال تطبيق على فئة من نماذج التوازن الاقتصادي متعدد الإمكانات (MCEEMs): لا تتيح تجزئة Dantzig-Wolfe القياسي حسب السلعة أن تتجزأ المشكلة الفرعية إلى مشاكل فرعية منفصلة لكل سلعة، لكن يظهر طريقتين لتقريب دالة الطلب العكسي للمشكلة الفرعية، وكلا الطريقين يسمحان بتقسيم المشكلة الفرعية إلى مشكلات منفصلة لكل سلعة. يتم الجمع بين تقريب إضافي مع كل من تقريبية الطلب العكسي؛ في الواقع، يتم إدخال منحنى تقريبي للعرض أو الطلب في المشكلة الفرعية لكل سلعة لنقل السلع بين المشاكل الفرعية المختلفة، وبالتالي السماح للمشاكل الفرعية لإنتاج مقترحات أفضل. يتم تضمين التوضيح ل MCEEM الذي يمثل أسواق الطاقة في كندا.

## 2.2 الدراسات باللغة الفرنسية:

Touati, Nora. (2008). *Amélioration des performances du schéma de la génération de colonnes: Application aux problemes de tournées de véhicules.* Paris 13,

تهتم هذه الرسالة بتسريع طريقة توليد الأعمدة، وبعد مراجعة الأدبيات الخاصة بأساليب التجزئة، تستخدم مبدأ التجزئة في Dantzig وWolfe لصياغة تجزئة Lagrangian. انطلاقًا من هذه الصيغة الجديدة، تعيد كتابة الدليل على هيمنة الحدود التي تم الحصول عليها بتجزئة لاغرانج مقارنة بالتجزئة المقدمة من تجزئة Dantzig وWolfe. حيث أن العديد من مشكلات الأمثلية في الممارسة العملية معقدة وكبيرة، مما يجعلها خارج نطاق قدرات دقة البرامج المتوفرة اليوم، حتى تلك الأكثر تخصصًا. لتتمكن من معالجتها، يتم استخدام طرق تحليل مساحة الحل. تؤدي التجزئة إلى توليد مشاكل مع عدد مفرط من المتغيرات، وبالتالي اهتمام متزايد بأسلوب توليد الأعمدة الذي تتمثل نقطته القوية في القدرة على توصيف الحل الأمثل للمشكلة عن طريق معالجة مجموعة متغيرات منخفضة. لقد أثبتت هذه الطريقة فعاليتها في حل العديد من مشكلات التحسين التوافقية، ومع ذلك، فهي معروفة بمشاكل التقارب.

Mr. SOUAR Hamid (2016) "*Résolution du problème de multi-flot compatible à coût minimal par l'approche génération de colonnes* " Université des Sciences et de la Technologie d'Oran

تنقسم النماذج متعددة التدفقات إلى فئتين عريضتين: النماذج الخطية والنماذج غير الخطية. في هذه الدراسة، تم الاهتمام بمشكلة التدفق المتعدد المتوافقة مع الحد الأدنى من التكلفة والتي تنتمي إلى الدرجة الأولى. واختيرت صيغة المسار الأعلى لصياغة هذه المشكلة وطريقة توليد الأعمدة لحلها. سمح استخدام نهج توليد الأعمدة بحل مشكلة التدفق المتعدد لتدنية التكاليف والتي تمت صياغتها في شكل مسار عقدة sommet–arc في وقت قصير نسبيًا. النتائج الأولية التي حُصلَ عليها مشجعة للغاية. ومع ذلك، وجد أن صياغة المسار الأعلى لمشكلة التدفق المتعدد المتوافقة مع الحد الأدنى من التكلفة تولد عددًا كبيرًا من المتغيرات بشكل خاص في الحالات الكبيرة. حيث تعد مشكلات التدفق المتعدد فئة مهمة من مشاكل الأمثلية. مع تطبيقاتها المتعددة. سواء في مجال الاتصالات، أو الجدولة، أو إدارة الإنتاج، أو في العديد من المجالات الأخرى، فتواجه غالبًا مشكلات تحتاج إلى أخذها في الحسبان كالجمع بين العديد من المنتجات على أي شبكة، مع القدرة

المنتهية. بشكل عام، يوجد نماذج للتدفقات المتعددة في جميع المجالات، كما هو الحال في هيكل العديد من المشاكل التوافقية المعقدة.

McMasters, Alan W, & Mustin, Thomas M. (1970). Optimal interdiction of a supply network. *Naval Research Logistics Quarterly*, *17*(3), 261-268.

تناقش هذه الدراسة إجراء حل لتدفقات الشبكات متعددة السلع مع قيود الموارد في حالة التكلفة الدنيا وتطور امتدادًا للسماح باستبدال الموارد. في ظل ظروف معينة، قد تكون هناك قدرة محدودة على توفير القدرة من خلال خصائص شبكة النقل التي يجب أن تتدفق عليها الإمدادات. يمكن استخدام طريقة لتقليص سعة تلك الشبكة. تختلف آثار هذه الجهود باختلاف المهام والأهداف. مع توافر ميزانية محدودة، يجب على الباحث تحديد الأهداف وبأي جهد. يتم تقديم خوارزمية لتحديد خطة الاعتراض المثلى لتقليل سعة تدفق الشبكة عندما تكون السعة الدنيا على المسار موجبة والتكلفة هي دالة خطية لتقليل سعة المسار. حظيت مشكلة تدفقات السلع المتعددة في الشبكات المكثفة باهتمام كبير. قام فورد وفولكرسون بإتباع إجراء حسابي لحل الحالة القصوى للتدفق العام. مدد TOMLIN الإجراء ليشمل حالة التكلفة الدنيا. أشار جيويل إلى العلاقة التاريخية والمنطقية القوية بين هذا الإجراء لحل مشكلة السلع المتعددة وخوارزمية التجزئة في DANTZIGAND WOLFE, والمشكلة ذات الصلة, التي لم يتم التصدي لها مباشرة, هي تحديد تدفقات السلع المتعددة في نموذج مقيد بتوفر الموارد. على سبيل المثال، يتم تقييد التدفقات في شبكات النقل بالموارد المتاحة التي يجب مشاركتها بين مسارين أو أكثر في الشبكة. يمكن تطبيق تحديد مجموعة المسارات وتخصيص الموارد لهذه المسارات لزيادة التدفقات المتعددة للسلع الأساسية أو لتقليل تكلفة النموذج في تلبية متطلبات التدفق الثابت إلى العديد من المشكلات في مجال الخدمات اللوجستية ومجالات أخرى.

Ben-Ameur, Walid, Bauguion, Pierre, & Gourdin, Eric. Une modélisation arborescente performante pour les problèmes de multi-flots.

في هذه الدراسة، اقتُرح تجزئة جديدة لمعظم المشكلات متعددة التكافؤ، وقادرة على حل الحالات الكبيرة من هذه المشكلات. يتم استبدال جيل من شجرة القرار البديلة هنا لجيل من المسارات التي تستخدم عادة في هذا النوع من المشاكل. تظهر بعد ذلك أن هذه التجزئة مكافئة. التجارب العددية تبين أن هذا النهج هو

أكثر كفاءة بكثير. اقترحت أيضًا خوارزمية اندماجية دقيقة للغاية ومتعددة الحدود لحل مشكلة التدفق الأقصى المتزامن (MCF) في حالة المصدر الأحادي. قدمت صيغة معادلة جديدة لمعظم المشاكل متعددة التدفقات بناءً على تحليل شجرة القرار، في نفس الوقت أقوى بكثير وسهلة الإعداد. قدمت أيضًا خوارزمية دقيقة وصعبة للغاية لحل التدفق الأقصى المتزامن في حالة المصدر الواحد، والتي يمكن تعديلها للاستجابة لفئات مماثلة من المشاكل.

Ben Amor, Hatem. (1997). *Résolution du problème de découpe unidimensionnelle par une méthode de génération de colonnes*: École Polytechnique de Montréal.

الهدف من هذه الأطروحة هو حل مشكلة مخزون القطع (CSP) كمشكلة مقيدة في توجيه المركبة. يتم صياغة المشكلة على أنها مشكلة تدفق سلع متعددة حيث يتم تمثيل أنماط القطع على شبكة حلقية. طبقت تقنية Dantzig-Wolfe decornposition على هذه التركيبة للحصول على مشكلة رئيسية يتم تحفيزها فيما يتعلق بالنمط Mnables وأقصر مشكلة في المسار مع تقييد السعة كمشكلة فرعية. يتم تنفيذ Brding على متغيرات التدفق. أولاً يختبر النهج في مشكلة مخزون القطع الثنائي. حيث يتم التعامل مع قرارات الفروع والربط من خلال إزالة الأقواس من شبكة المشاكل الفرعية. بعد ذلك، اقترحت تقنيات تسريع الحل من أجل تحسين أداء الحصر الخطي وعملية براندي.

بعد ذلك توضح أنه إذا تم تجميع القيود المقابلة للعناصر ذات الطول المتساوي، فإن عملية حل الاسترخاء الخطي تكون أسرع بكثير. للحالة العامة، فإن النظر في القرارات المتفرعة داخل المشكلة الفرعية من شأنه أن يفسد هيكلها. لذلك، وجب إضافة قيود جديدة على المشكلة الرئيسية بحيث يتم الحفاظ على بنية المشكلة الفرعية. يتم تقديم النتائج الأولية لهذا النهج واقترح بعض ميزات التحسين. على الرغم من أن مشكلة مخزون القطع سهلة الحل وأن فجوة تكاملها صغيرة جدًا، إلا أنها تقدم كثيرًا من التناظر الذي يؤثر على استقرار عملية الحل. العديد من الاستنتاجات حول مشاكل التوجيه المثارة من هذا العمل. الحدود السفلية الجيدة وتهيئة الكشف عن مجريات الأمور تكون مفيدة للغاية لتحسين المشكلة. يمكن الحصول على تفرع أكثر كفاءة من خلال أخذ بند الحساب في الاعتبار أو عن طريق اتخاذ العديد من القرارات في وقت واحد. أيضًا، قد يؤثر انتكاس المشكلة الثنائية على ثبات عملية حل توليد الأعمدة. وبالتالي، فإن تقنيات الاستقرار ستكون مفيدة للغاية لحل المشاكل الصعبة.

Bentz, Cédric. (2006). *Résolution exacte et approchée de problèmes de multiflot entier et de multicoupe: algorithmes et complexité.* Thèse de docteur en informatique, Conservatoire Nationale des Arts et …,

في هذه الأطروحة، يهتم بمشاكل متعددة النواة والمضاعفة، والتي تعمم المشاكل الكلاسيكية المتمثلة في الحد الأقصى للتدفق والحد الأدنى من التكلفة. تتم دراسة جانبين من هذه المشكلات بشكل خاص: الدقة في الوقت وتقريب كثير الحدود. من وجهة نظر القرار الدقيق، تتعلق المساهمات الرئيسية بالمواضيع التالية:

-مسارات مفككة تحدها الرسوم البيانية.

-تخفيضات متعددة في الرسوم البيانية الحلقية الموجهة، في الرسوم البيانية غير الموجهة من عرض شجرة القرار المقيدة وفي الرسوم البيانية المستوية.

-موجات متعددة في الحلقات.

-تخفيضات متعددة وبمضاعفات في عدة أنواع خاصة من شبكات.

من وجهة نظر التقريب متعدد الحدود، تتعلق مساهمات الباحثين الرئيسية بالمواضيع التالية:

-مسارات منفصلة في الرسوم البيانية المستوية عند مستويات الحدية.

-عدد صحيح متعدد النقاط في الرسوم البيانية للأرقام الدورية

-تخفيضات متعددة في الرسوم البيانية الموجهة غير مرجح من عرض شجرة القرار والحد الأقصى لدرجة التدفق.

-عدد صحيح متعدد التدفقات في الرسوم البيانية الموجهة.

وصف الباحثون أيضًا مجريات البحث الجديدة للعثور على عدد صحيح متعدد النوى في رسم بياني، واختباره في حالات تم إنشاؤها عشوائيًا.

Rezig, Wafa. (1995). *Problèmes de multiflots: état de l'art et approche par décomposition décentralisée du biflot entier de coût minimum.* Université Joseph-Fourier-Grenoble I,

يكرّس الفصل الأول من هذه الأطروحة لعرض المشكلات متعددة التدفقات، من خلال إدخال صيغها الرئيسية ووصف تطبيقاتها العديدة. يوضح هذا الفصل أيضًا الفرق، وبالتالي الصعوبة النسبية للمشاكل متعددة الخطوات مقارنة بمشاكل التدفق البسيطة.

الفصل الثاني يعرض عدة تقنيات لحل مشاكل التدفقات المتعددة. يجب أن يكون معروفًا أنه على عكس تدفق واحد، فإن حل المشكلات متعددة التدفق والتواجد في شكل برامج خطية، يصعب حلها. فمن ناحية، لم يعد بالإمكان إعادة إنتاج عمليات التبادل البسيط، والتي يمكن تنفيذها مباشرة على شبكات التدفق الأحادي، كما على شبكات التدفق المتعدد. من ناحية أخرى، فإن نظرية القيم الصحيحة للتدفق البسيط لا تعمم في حالة التدفقات المتعددة. فتم أولاً القيام بتفصيل تقنيات حل المشكلات متعددة التدفق في الحالة المستمرة. إذا أضيف قيدًا من التكاملية، ضمنيًا تقريبًا لهذا النوع من المشكلات، فستصبح صعبة .NP ثم، في المرة الثانية، قدمت الطرق الحالية لحل المشكلة كاملة. تسلط هذه النظرة العامة الضوء على الاختلال الهائل بين الجهد البحثي المخصص للقطاعات المتعددة المستمرة والجهد المكرس للعدد الصحيح للعدد المتعدد. تعد مشكلات التدفق المتعدد فئة من المشكلات التي تمثل للغاية مشاكل الأمثلية التوافقية. مع تطبيقاتها متعددة. سواء في مجال الاتصالات، أو الجدولة، أو إدارة الإنتاج، أو في العديد من المجالات الأخرى، فنحن نواجه غالبًا مشكلات نحتاج إلى أخذها في الحسبان الجمع بين العديد من المنتجات على أي شبكة. بشكل عام، نجد نماذج للقطاعات المتعددة، مثل البنى التحتية، في العديد من المشكلات التوافقية المعقدة. من ناحية أخرى، فإن مشاكل التدفقات المتعددة، بفضل البنية الأساسية، وخاصة مهمة، التدفق البسيط، لتوليد نهج حل لفئات معينة من المشاكل الشبكة.

Minoux, M. (1975). Résolution des problèmes de multiflots en nombres entiers dans les grands réseaux. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, 9*(V3), 21-40.

. توضح هذه الدراسة طريقة إرشادية لحل المشكلات المتوافقة مع العديد من الأشكال في أعداد كاملة على الرسوم البيانية الكبيرة، في وقت حساب وفي حجم ذاكرة منخفضة على الحاسبة الإلكترونية. نتائج الحساب التي تم الحصول عليها، وكذلك على المشاكل الحقيقية كما في الأمثلة ذات الحجم الصغير، تشير إلى انحرافات صغيرة جدًا (بالقيمة النسبية) بين الحل الاستكشافي والحل الأمثل النظري، ويُقترح تعميم لمشكل متعدد التدفقات المتوافق والحد الأدنى من التكلفة. في مجال إدارة وتخطيط شبكات الاتصالات، تواجه مشكلة إيجاد متعدد التدفقات المتوافق مع رسم بياني غير موجه أقواسه مزودة بقدرات. يتم حلها، تقليديًا، عن طريق البرمجة الخطية ولكن في هذه الحالة، خوارزمية simplex غير مناسبة؛ من ناحية، إنها أداة ثقيلة جدًا نظرًا لحجم المشكلات التي تمت معالجتها؛ من ناحية أخرى، الحل الذي توفره غير مكتمل بشكل عام يعد البحث عن ملف متعدد متوافق، بأرقام كاملة، مشكلة أساسية في إدارة شبكات الاتصالات وتخطيطها.

تتيح طريقة الاستبانة التي تم كشفها معالجة الشبكات التي تضم مئات العقد وعدة مئات من المسارات في وقت حسابي بترتيب دقيق، على الحاسبة الإلكترونية (النوع BGE 6000) تتيح تجارب الحساب التي أجريت على أمثلة صغيرة التأكيد على أن النتائج المقدمة تنحرف قليلاً (من حيث القيمة النسبية) عن النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق البرمجة الخطية (عن طريق تخفيف القيود) وبالتالي فهي قريبة من الحل الأمثل الكامل. تطبيقات هذا الكشف في مجال الاتصالات السلكية واللاسلكية عديدة بالفعل. يذكر منها:

-تكملت عمليات إعادة توجيه الجولة أثناء حدوث خطأ في مسار الشبكة.

- إدارة الأمن على المدى المتوسط.

لكنه يُعتقد أيضًا أنه يمكن أن يوجد تطبيقات مثيرة للاهتمام في مجالات أخرى تنشأ فيها مشكلات متعددة التدفقات ومنخفضة التكلفة: شبكات الكمبيوتر، والنقل البري، والشبكات الهاتفية إلخ.

Bauguion, Pierre-Olivier. (2014). *Décomposition de multi-flots et localisation de caches dans les réseaux*. Evry, Institut national des télécommunications,

قد اعتمد الباحثون أسلوب للمراقبة الفورية، حيث تم زيادة تدفق / جودة خدمة العملاء على شبكة حالية، عن طريق توجيه مثالي: محاولة الاستفادة القصوى من قدرات شبكتهم. في هذه المشكلة، الحد الأقصى للتدفق المتزامن، هي مشكلة معروفة، إذا كان لهذه المشكلة تعقيد متعدد الحدود، يصعب في الواقع حلها على الأحجام الكبيرة. لذلك اقترحوا طريقة معينة، تمتد، لتكون قادرة على التعامل مع الرسوم البيانية لهذه النماذج. لقد ظهرت أيضًا خوارزمية متعددة الحدود للغاية لحل مشكلة التدفق الأقصى المتزامن في نسخته أحادية المصدر، التي تتفوق أدائها بشكل جذري على جميع النماذج الخطية الواضحة. كما أنه يحل العديد من المشكلات ذات الصلة (خاصة مشاكل المهام). من المنظور الآخر الذي يتدفق بشكل طبيعي من هذا المسار هو إيجاد توتر سابق لهذه الخوارزمية لنقل الحالة العامة. نظرًا لأن هذه الحالة العامة لم تعد تضمن بعض الخصائص المحددة (مثل عدم وجود انتقالات ثنائية)، فإن هذا الامتداد يبدو مهما.

ثم يتم توضيح هذه الدراسة في نقطتين متكاملتين؛ أولاً، يعطي مؤشرات على أهمية هذه الأساليب في مشاكل معينة. يبدو نموذج البرمجة الديناميكي الذي اقترح، والتعامل مع مجموعات من الحلول، مناسبًا بشكل خاص لهياكل شجرة القرار والمشاكل ذات القيود المعقدة. حتى لو كان لهذه الخوارزميات، في البداية، تعقيدات مرتبطة نظريًا بأرقام الأس، فإن التجربة العملية مرضية. وبالتالي فإن الدراسات المستقبلية ستفهم بشكل تحليلي وبشكل أفضل، وما إذا كان يمكن النظر في هياكل التطبيقات الأخرى (مثل أي رسم بياني). تتعلق

النقطة الثانية بشكل عام بأدوات دعم اتخاذ القرار بشأن مشكلات النقل، وفقًا لفرضيات مختلفة. تتيح الخوارزميات التي تم تطويرها إمكانية الاستجابة السريعة للأسئلة اللوجيستية وفقًا للمحاور الاستراتيجية و / أو الاستثمارية. ينبغي إجراء مزيد من الدراسات على شبكات توزيع المحتوى.

ويستند الجزء الثاني على الملاحظة الفورية لأوجه القصور في عملية إعادة "من حيث قدراتها؛ التوجيه الأمثل والروابط الحرجة. هذه هي مشكلة الحد الأقصى للتدفق المتزامن .(FCM) بالنظر إلى أن ذاكرة التخزين المؤقت تجعل من الممكن تقليل حركة مرور روابطها في اتجاه التدفق، فإن توطين هذه الروابط يقدم ضمنيًا نصيحة عن الموقع، من أجل تخفيف هذا الضعف الملحوظ.

ثم اقترحت تركيبات عامة لنمذجة FCM، قابلة للتطبيق على العديد من المشكلات الأخرى ذات الصلة، واظهر اهتمامها العملي بأقصى مشكلة تدفق متزامن. في هذه المشكلة الأخيرة، قدمت خوارزمية مخصصة لحالة المصدر الأحادي، التي يتجاوز أدائها النظري والعملي أفضل النماذج، يتمكن بعد ذلك التساؤل أولاً ما إذا كانت هناك طرق لبناء تركيبات أكثر كفاءة تتكيف مع مشاكل محددة متعددة التدفق. يمكن للدراسات الجديدة أن تجعل من الممكن بناء خوارزميات متعددة الحدود للغاية مع تعقيدات أفضل لحالة التدفق الأقصى المتزامن مع مصدر واحد. أخيرًا، إذا كان من الممكن تمديد هذه الخوارزمية لحل مشكلة الحد الأقصى المتزامن للتدفق في نسخته العامة.

Létocart, Lucas, Costa, Marie-Christine, & Roupin, Frédéric. (2003). *Multicoupes minimales et multiflots maximaux en nombres entiers dans les anneaux.* Paper presented at the 5ème congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision.

في هذه الرسالة، تم دراسة مشاكل الحد الأدنى والأقصى من الضرب في الأعداد الصحيحة، وكذلك العديد من المشاكل ذات الصلة. لقد تم محاولة تقديم نظرة، على أوسع نطاق ممكن، لنتائج التعقيد وطرق الحل التي تم اقتراحها لجميع هذه المشاكل. الملاحظة الأولى التي يمكن إجراؤها تتعلق بصعوبة هذه المشاكل. مجموعة المشاكل المعروضة في هذه الرسالة هي NP–الصعب في الرسوم البيانية. يصعب تقريب معظم المشاكل، وغالبًا ما يكون من الضروري مراعاة الرسوم البيانية المعينة أو تحديد عدد التدفقات للحصول على مشاكل أسهل، أي تحديد المشاكل التي نعرف كيفية حلها، إما تقريبية، أو على النحو الأمثل، من خلال خوارزمية متعدد الحدود.

النتائج المقدمة في هذه الرسالة تفتح العديد من وجهات النظر البحثية. أولاً، تم التخطيط لتكييف استخدام البرمجة شبه المحددة مع المشكلات الصحيحة، مما سيتيح اتباع نهج جديد لحل IMFP، والذي يمكن دمجه في فرع ملزم. تم التفكير أيضًا في تكييف طريقة الدقة المستخدمة لحل IMCP في شجرة القرار بحيث يمكن حل هذه المشاكل، بالإضافة إلى المشاكل متعددة المجالات، في أي رسم بياني. هذا التكيف يتطلب التفكير في الصياغة للاستخدام. في الواقع، في أي رسم بياني، يصبح عدد السلاسل بين المصدر والمصب المرتبط أسي. قد يكون من الأفضل استخدام تركيبة ذات عدد من المتغيرات متعددة الحدود في حجم المشكلة. في هذه الحالة سيكون من الضروري إنشاء تحويل جديد سيتم تحديده. سيكون من المثير للاهتمام أيضًا دمج تخفيضات Gomory وإيجاد تخفيضات أخرى صالحة لهذه المشاكل من أجل حلها بشكل أكثر فعالية. بالإضافة إلى ذلك، لا يزال هناك العديد من الأسئلة المفتوحة، مثل معرفة تعقيد مشكلة biflot في الرسوم البيانية ثنائية الاتجاه المعززة، أو ما إذا كان من الممكن تقريب IMCP مع نسبة ثابتة. في الرسوم البيانية غير الموجهة، أو معرفة مدى تعقيد IMFP في الحلقات. يجب معالجة هذه القضايا المعقدة. سيكون من المثير للاهتمام أيضًا الحصول على خوارزميات لحل المشكلات المعروفة فقط بأنها متعددة الحدود، مثل IMCP في الأشجار الموجهة.

Gauvin, Charles. (2012). *Un algorithme de génération de colonnes pour le problème de tournées de véhicule avec demandes stochastiques.* École Polytechnique de Montréal,

تقدم هذه الأطروحة خوارزمية دقيقة لتوليد الأعمدة مع قطع المستويات لمشكلة جولات المركبة مع طلبات عشوائية. طرحت المشكلة كبرنامج عشوائي عدد صحيح من خطوتين واعتمدت صيغة تعتمد على الرسم البياني. استخدم بعد ذلك تجزئة Dantzig-Wolfe لإنتاج مشكلة تقسيم رئيسية ومشكلة مسار أقصر مع قيود الموارد. اقترح حل هذا النموذج باستخدام خوارزمية باستخدام أحدث التقنيات. عند حل المشكلة الفرعية، دون الاعتماد فقط على الطرق التقليدية؛ تم أيضًا إجراء تجارب على الطرق n وكذلك المسارات الأولية. لتنفيذ هذه المفاهيم والقضاء على الدورات الكبيرة، أُضيفت موارد الزيارة الثنائية التي تشير إلى ما إذا كان لا يزال من الممكن زيارة العميل في امتداد المسار الأساسي الحالي.

من أجل حل المشكلة الفرعية، استخدمت خوارزمية علامات ثنائية الاتجاه تستفيد من حدة الرسم البياني وتأخذ في الاعتبار مرة واحدة فقط كل عقدة. للحد من عدد العلامات التي تم إنشاؤها في كل تكرار لهذا الإجراء، قُدمت قاعدة محسّنة تستغل بنية الرسم البياني الأساسي. أُستخدم أيضًا مفهوم العملاء الذين لا

يمكن الوصول إليهم للترويج للتخلص من الملصقات غير الضرورية. بالإضافة إلى ذلك، طُبقت طريقة بحث المحظور لتسرع في الحصول على مسارات ممكنة بتكلفة سلبية منخفضة. لزيادة الحد الأدنى الموجود في كل تكرار لخوارزمية توليد العمود، أُضيف نوعين من أوجه عدم المساواة الصحيحة إلى المشكلة الرئيسية: قيود السعة وقيود مجموعة الصفوف الفرعية. تم تعديل بنية المشكلة الفرعية من أجل مراعاة هذه التخفيضات التي تم إنشائها ديناميكيًا في كل عقدة اتصال بطريقة ارشادية. إذا فشلت خوارزمية الفصل في العثور على أوجه عدم مساواة صحيحة فهي لا تلبي الحل الجزئي الحالي، يتم الانتقال إلى الفرع بناءً على المهام المشتركة. أخيرًا، تم تقديم نتائج رقمية توضح القدرة التنافسية للخوارزمية. تحل الطريقة المتبعة بفعالية 20 نسخة جديدة من النظريات في أقل من 20 دقيقة وتسرع بشكل كبير من حل الحالات التي تم حلها بالفعل. تبقى حالتان فقط من الحالات الأربعين لمجموعة الاختبار الخاصة بالمشروع دون حل.

Schrenk, Susann. (2010). *Contributions à la conception de réseau de service en transport.* Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG,

في هذه الرسالة، تم الاهتمام بمشكلتين صناعيتين في مجال النقل. الأولى هي مشكلة في تصميم شبكة الخدمة مع إدارة الموارد لنقل السلع بشكل منتظم. والثانية هي مشكلة إدارة الاضطرابات في قطاع الهواء، موضوع التحدي .ROADEF'2009 في كلتا الحالتين، هذه هي المشاكل العملية الصعبة التي تنطوي على قيود غير قياسية معقدة. يتضح التحدي بشكل أكبر لأن النماذج التي يتعين حلها كبيرة والمشاكل لها بعد زمني قوي. لقد تم تحليل مدى تعقيد المشكلات من خلال دراسة تعقيد المشكلات التوافقية، والمشكلات الفرعية التي تكمن في لب مشاكلنا الصناعية. تم تقديم تركيبات MIP مختلفة لمشكلة تصميم شبكة خدمة مع إدارة الموكب .

توضح هذه الدراسة أن المستحضرات القائمة على دورة المركبات مهمة للغاية. أخيرًا، تم تقديم هذه المساهمة في تحدي ROADEF'2009. اقترحت طريقة الدقة السريعة، على أساس التجزئة، مما يسمح لإيجاد حلول جيدة لمشكلة صناعية معقدة في وقت محدود.

Marcus, Karina. (1996). *Multiflots, métriques et graphes h-parfaits: les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire.* Université Joseph-Fourier-Grenoble I,

هذا العمل في مجال الأمثلية التوافقية. تمت بشكل أكثر تحديدًا دراسة خصائص النماذج التي تصبح فيها كثير من المشاكل، في الحالة العامة مكتملة NP، متعددة الحدود، تم أولاً مناقشة مشكلة جدوى مجموعة متعددة، والتي لها تطبيقات مهمة للغاية في مجال البحوث التشغيلية. ما يعنى به النظر إلى مواصفات المشكلة، مع الشبكة، والقدرات والطلبات، بهدف اثبات وجود أو عدم وجود حل. تتمثل إحدى طرق التعامل مع هذه المشكلة في توفير الظروف الضرورية والكافية لوجود مجموعة متعددة، مثل تلك المعروفة باسم حالة القطع. تم تقديم شرط يعمم حالة القطع و "يكرر" حالة أخرى موجودة. يسمح هيكل المشكلة متعددة التدفقات أيضًا بالنظر إلى مشكلة وثيقة الصلة، وهي مشكلة "تعبئة" المقاييس. بالتعامل مع حالة التعبئة الصحيحة والعدد الصحيح، عندما تتضمن مجموعة المقاييس مقاييس CC3 ومقاييس K_5 وF_7. تم تمييز فئة الرسوم البيانية، حيث يتمكن العثور على عبوات كاملة ونصف صحيحة، تحت بعض الفرضيات الإضافية. بعد ذلك، تم الاهتمام بالخصائص العامة للرسوم البيانية h وt، ومشكلة التلوين المرتبطة بها. توفر النتائج التي قُدمت حدودًا لأرقامها، والفصول التي تلبي تخمين الباحث. وأخيراً قُدم التسلسل الهرمي للرسوم البيانية التي تمت دراستها، والتي يتم الحصول عليها بفضل أدوات مثل الرسوم البيانية ثنائية القطب، تكتل ثنائي ومصفوفات المكونة0.1. تم اكمال هذه الأطروحة عن طريق تحديد بعض اتجاهات البحث التي ستكون قادرة على متابعة هذا العمل، وكذلك حول موضوع جدوى مشاكل multiflot، كما هو الحال في تلوين الرسوم البيانية h وt-perfect.

Thierry MAUTOR et Edith NAUDIN (2000) "*Décomposition de Dantzig-Wolfe et Génération de colonnes Applications au Problème de tournées de véhicules avec des contraintes de ressource*"

إن تجزئة Dantzig-Wolfe تجعل من الممكن التعبير عن برنامج رياضي كمجموعة من المشاكل الفرعية المستقلة التي يتم حلها. يمكن تعريف المساحة القابلة للتحقيق لكل مشكلة فرعية من خلال مجموعة من النقاط التي تقوم بتكوينها بدلاً من المعادلات التي تصفها. وترتبط هذه المشاكل الفرعية ببعضها بواسطة ما يسمى بالقيد الخطي للاقتران. المشكلة الجديدة التي تم الحصول عليها وبالتالي تتكون من مشاكل فرعية مستقلة وقيود اقتران خطية. حل المشكلة الأولية يأتي إلى حل مشكلة خطية تحتوي على عدد كبير من المتغيرات. هاته الخاصيتين تسمحان بحلها عن طريق أسلوب توليد الأعمدة. في هذا التقرير، تم اقتراح تحليلًا جديدًا ينطبق على مشاكل النموذج، والتي يمكن حلها عن طريق توليد الأعمدة. إن الميزة الرئيسية لهذا التحليل، الذي يرتبط بعد ذلك بالمشكلات الفرعية، يصبح مشكلة أسهل بكثير من العثور على مسار أقصر .

كان الهدف من هذا البحث هو تقديم عرض نظري لمثل هذا النموذج، ولكن الخطوة التالية في هذا العمل هي تنفيذ خوارزمية فعالة لتوليد الأعمدة والتحقق من صحة هذا النموذج.

Quilliot, Alain, Bendali, Fatiha, & Mailfert, Jean. (2005). Flots entiers et multiflots fractionnaires couplés par une contrainte de capacité. *RAIRO-Operations Research*, *39*(3), 185-224.

في هذا البحث تم تقديم نموذج Flow / Multi-commodity Flow لمشاكل النقل وتخطيط الإنتاج. والتعامل مع هذا النموذج من خلال تقنيات التحويل والتحليل الهرمي لاجرانج، التي تنطوي على حل تدفق معين مع أقل تكلفة لمشكلة فرعية متكاملة، والتي تتطلب تصميم بعض عمليات التجميع. واستنتج من هذا التحليل العديد من المخططات الإرشادية، واختتم بمناقشة التجارب العددية. حيث تم تقديم شكليات عامة تسمح بنمذجة بعض مشكلات تغطية التدفقات بواسطة البنى التحتية للنقل باستخدام مجرى "مركبة" بأكمله و "مستخدم كسور" متعدد الجوانب، إلى جانب قيود السعة. أولاً تم الاقتراح على هذه المشكلات، خطط التجزئة والتحويل المختلفة، ثم عُزلت مشكلة فرعية للحد الأدنى لتدفق التكلفة الإجمالية، وأخيراً قُدمت آلية تجميع، والتي سمحت بمعالجة المشكلة من خلال التفكير في البرنامج المحدد بواسطة "المستخدم" متعدد النقاط كبرنامج رئيسي، والاستفادة من البنية الخاصة لمسافات التدفق. أثناء القيام بذلك، تم الكشف عن

العديد من المشكلات المساعدة، مثل البحث عن دائرة معممة ذات تكلفة سلبية أو تلك التي تأخذ في الاعتبار، في سياق البحث عن دائرة سلبية، القيود الإضافية المرتبطة بالتخفيضات. هذه المشكلات معقدة والتعامل معها بشكل استرشادي فقط. سيكون من المهم تحليلها بدقة. وبالمثل، سيكون من مفيد معالجة مشكلة CFEMF من خلال مراعاة مرونة طلبات توجيه التدفق بالتكاليف الفردية للسفر (التكاليف p (k)، kc K)، حتى تكون أقرب إلى حقائق بعض مشاكل النقل. أخيرًا، تم توقع إمكانيات تطبيقات النماذج والتقنيات التي تم ادخالها في هذا البحث على المشكلات الحقيقية المتمثلة في النقل وتنظيم الإنتاج.

## 3.2 ما يميز الدراسة الحالية عن الدراسات السابقة:

عند الاطلاع على مختلف الدراسات السابقة التي كانت كلها باللغات الأجنبية بدون استثناء، فرغم بحثنا المتواصل عن المراجع باللغة العربية الا أننا لم نلتقي ولا مرجع في حدود علمنا. فأكثر ما يميز هذه الدراسة عن الدراسات السابقة هي أنها الأولى التي تطرح إشكالية شبكة بتدفقات متعددة السلع والطرق المستخدمة في حلها، لا سيما طريقة توليد الأعمدة وتجزئة Dantzig-Wolfe، باللغة العربية. أما بخصوص الدراسات باللغة الأجنبية نجد أن بعضها تطرق إلى استخدام التقنيات المختلفة في بحوث العمليات والبرمجة الخطية، بالنسبة لنظرية الشبكات ونماذج التدفقات المختلفة، إضافة الى التطرق الى العديد من الأساليب والتقنيات المتنوعة لحل مختلف النماذج. كما تطرق البعض الآخر إلى استخدام أساليب الحل التقريبية أو الارشادية باعتبارها تقنيات تمكن من الوصول للحل الأمثل فيما تعجز الطرق الدقيقة في تحقيقه نظرا لصعوبة الكثير من النماذج المعقدة في شبكات الإمداد ومحاولة صياغة مختلف النماذج. ومن خلال محاولة إجراء مقارنة للنتائج المحصلة من مختلف النماذج. لاحظنا أن الدراسات السابقة ساعدتنا كثيرا على تكوين فكرة واضحة عن المفاهيم النظرية لشبكات الإمداد بمختلف أنواعها، مع الأساليب الكمية وتقنيات بحوث العمليات المتقدمة المستخدمة في صياغة وحل مشاكل التدفقات المعقدة. مع اعتبار دراستنا تكملة للدراسات السابقة.

**الخلاصة:**

في هذا الفصل حاولنا الالمام بأغلب الدراسات والتطبيقات السابقة التي تناولت نفس ميدان الدراسة المتمثل في نماذج الشبكات بتدفقات متعددة السلع، حيث فاق عددها 40 دراسة باللغتين الإنجليزية والفرنسية، مع الأسف لم نلتقي أي دراسة في هذا الخصوص باللغة العربية، مما شكل عائقا في بحثنا محاولين ترجمة الكثير من المصطلحات العلمية لأول مرة. حيث لاحظنا أنه رغم التطرق الى نفس موضوع الدراسة الى أنه تباينت طرق الحل المستخدمة من طرف أغلب الدراسات. التي استفدنا منها كثيرا في انجاز هذا العمل المتواضع.

# الدراسة الميدانية

# الفصل الثالث
# الطريقة و الاجراءات

- مقدمة
- وصف منهجية الدراسة الميدانية
- وصف اشكالية الدراسة الميدانية
- نموذج الدراسة التطبيقية
- أداة الدراسة التطبيقية

## تمهيد:

تمت مناقشة عدة مبادئ نظرية في الفصل أولاً، ووصف مجموعة من مشاكل الشبكات ذات التدفقات متعددة السلع من أنظمة نقل السلع، تنظم هذه المشاكل وفقًا لمستويات التخطيط المختلفة. حسب أنشطة وأنظمة النقل المتنوعة، وهنا تتوضح لنا الفائدة من وجهة نظر البحوث التطبيقية. ليصبح تصميم الشبكات وتخطيطها أكثر تعمقا وتحديًا. خاصة بعد الاطلاع على العديد من المفاهيم النظرية لمختلف النماذج واختيار طريقة السمبلكس المراجعة لدراسة مفاهيمها وخصائصها ومحدداتها ومراحل الحل فيها ليتم إنجاز الخوارزمية والمخطط الانسيابي لها. وبعد ذلك يتم التطرق الى طريقة توليد الأعمدة مع طريقة تجزئة Dantzig-Wolfe لإيجاد أفضل الحلول النهائية الممكنة لمشكلة قرار معقدة تتعلق بتدفقات متعددة السلع.

### 1.3 وصف منهجية الدراسة الميدانية:

تمت الدراسة التطبيقية في شركة الخدمات العامة والأشغال العمومية في بلدية حاسي مسعود، حيث توفر الشركة العديد من الخدمات من بينها نقل السلع والبضائع عبر كافة التراب الوطني. لذلك يتم محاولة تصميم شبكة نقل على المستوى الوطني لسلع متعددة تتمثل في ثلاث أنواع من السلع تم اختيارها لأنها الأكثر تداولا، بهدف تحقيق تدفقات معتبرة في أغلب المسارات. حيث تتمتع كل سلعة بتكلفة نقل مختلفة بالنسبة لكل مسار. ولكل مسار سعة قصوى للنقل، هذا يعتمد على طاقة استيعاب المركبة الناقلة الموجهة في المسار. بينما تهدف الدراسة الى تدنية التكاليف الاجمالية للنقل، من خلال تحديد كميات ونوع السلع الواجب نقلها في كل مسار. ولتحقيق الهدف المرجو نعتمد عل أساليب حديثة في بحوث العمليات والبرمجة الخطية، بحيث يتم الاعتماد على طريقة توليد الأعمدة وتجزئة Dantzig-Wolfe باستخدام خوارزمية برنامج GAMS

#### 1.1.3 نظام نقل السلع:

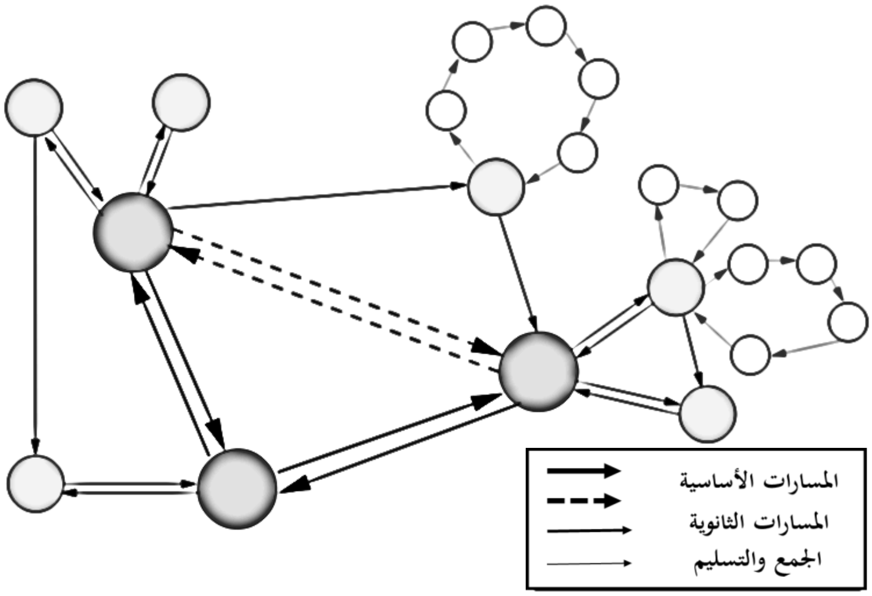
يعرف كنظام يسمح بنقل السلع (أو الخدمات) بين أماكن الإنتاج والاستهلاك. من الأمثلة النموذجية على هذه الأنظمة: النقل الدولي ومتعدد الوسائط للحاويات، ونقل السلع بالسكك الحديدية أو الشاحنات، ونظم البريد السريع والمنتظم، وجمع النفايات المنزلية، وما إلى ذلك. تجري عمليات نقل السلع عبر المسافات الطويلة وأنشطة التجميع والتوزيع عمومًا على نطاق محلي (مثل النقل والإمداد بالشاحنات). (T. G. Crainic و Semet، 2005)

على سبيل المثال، هناك النقل بالشاحنات في حمولة كاملة، والنقل السريع للسلع. والنقل الموحد، مثل النقل العام. يتم تجميع سلع العديد من العملاء وتوحيدها وتحويلها معًا على متن نفس المركبات (نفس الموكب). مثلا نجد النقل بالسكك الحديدية، الخطوط العادية للقارب، ناقلات السيارات ذات الحمولة الصغرى...

#### 2.1.3 النقل مع التوحيد:

تدعم المركبة طلبات العملاء المختلفين. بشكل عام، يتم تنظيم شركة النقل لتقديم خدمة منتظمة، فيجب تحديد المسارات، وجميع ترددات الخدمات، والجداول الزمنية التي يجب إعدادها. يتم تنظيم وكلاء الشحن الموحد في شكل شبكات، كما هو موضح في الشكل 33

**الشكل 33: شبكة الشحن الموحد**




**المصدر: من إعداد الباحث**

الميزة الرئيسية هي أن هذا النوع من الشبكات يفضل وفرات الحجم. يتم فرز التدفقات الأكبر وتجميعها، ليتم توجيهها إلى أطراف أخرى عبر خدمات عالية التدفق وعالية السعة. من ناحية أخرى، غالبًا ما تكون الطرق أطول، كما أن تكلفة ووقت العمليات في المحطات الطرفية قد تعرقل أيضًا. بالإضافة إلى ذلك، فإن مخاطر الخسارة وتلف السلع أكبر.

وبالتالي تلعب المحطات دورًا أساسيًا في الأنظمة التي تعمل على التوحيد: فهي تسمح بفرز السلع، وتوحيد الشحن عبر العمليات في الحدود، وتجميع المركبات في المواكب، وإعادة ترتيب هذه المواكب وتعديلها. وهذا يتطلب العديد من المعدات المحددة، ويولد عددًا كبيرًا من مشاكل التسيير.

تسمح أنظمة التوحيد، شريطة أن يتم التخطيط الجيد، بالتنفيذ الجيد لهذا التخطيط والإدارة الفعالة للعمليات، خاصة في المحطات الطرفية، لتخفيض تكاليف العميل والناقل. كما أنها توفر حلول أفضل، السعر الذي يتعين دفعه يتبع تقليل الخطورة للعميل، والذي لن يرضى إلا إذا تم احترام جودة الخدمة الموعودة (الوقت، الموثوقية، ...). من ناحية الناقل، تعد طرق التخطيط وتوجيه العمليات ضرورية، حيث أن فعاليتها تحدد ربحية شركة النقل.

### 3.1.3 مستويات التخطيط:

نجد المستويات الثلاثة للتخطيط وفقًا لتصنيف (Crainic T. G., 1997).

**المستوى الاستراتيجي**. يرتبط التخطيط طويل المدى عادة ببنية تحتية مادية للنظام. ويشمل القضايا التالية:

-موقع المحطة الطرفية (منصة متعددة الوسائط، محطة شحن، موقف المركبات، ...) ؛

- معدات النقل (نوع وعدد المركبات) ؛

-بناء خطوط إضافية (الطرق وخطوط السكك الحديدية) ؛

**المستوى التكتيكي**. يرتبط التخطيط المتوسط الأجل عادة بالإدارة والتحكم الأمثل في الموارد والطرق والتخطيط. تتمثل إحدى النقاط الرئيسية في هذا المستوى في ضمان رضا الشركة من حيث جودة الخدمة المقدمة لعملائها ومن الناحية الاقتصادية. المشكلة الرئيسية للتخطيط التكتيكي هي تصميم شبكة الخدمة. في هذا المستوى، نقدم إجابات لأسئلة مثل:

- ماهي الطرق التي من خلالها يجب علينا تقديم الخدمة؟
- ما نوع الخدمة المستخدمة؟
- كم مرة ينبغي تقديم الخدمة وفي أي وقت؟
- كيفية نقل السلع عبر الشبكات المادية وشبكات الخدمة؟
- كيفية توزيع الحمل على المحطات المختلفة للشبكة؟

التخطيط التكتيكي ينتج خطة نقل تضمن جودة الخدمة المطلوبة للعملاء والاستخدام الفعال للموارد لضمان أفضل الأرباح للناقل. وبالتالي، فإن القرارات التي يتم اتخاذها على المستوى التكتيكي تتعلق أساسًا: باختيار الخدمات التي سيتم تقديمها وتواترها (أو كل ساعة)، وتوزيع نقل الطلبات على هذه الخدمات، والسياسات على مستوى المحطات الطرفية (تشكيل الموكب، وسياسة التوحيد، وسياسات إعادة تخطيط بديلة...)

**المستوى التشغيلي**. مع العمليات والمشاكل التشغيلية وتحت تأثير قوي من الوقت. عادة في الإدارة والتحكم الديناميكي في الموارد والطرق والجداول الزمنية. نجد المشاكل التالية:

- مشاكل في نقل الشحن: جدولة الرافعات، وتخصيص وجدولة الرفوف، وإدارة مساحة التخزين.
- مشاكل جولات المركبة، أو مشكلة توجيه المسار.

مشكلة تصميم شبكة الخدمات الخاصة بالدراسة لنقل السلع هي بشكل أساسي على المستوى التكتيكي. كما أنه يشتمل على بعض المكونات التشغيلية، بما في ذلك بناء الجداول الزمنية لطرق المركبات. المشاكل الأساسية لمسارات النقل تظهر كمشاكل فرعية:

- مشكلة الوقود متعدد التدفق.
- مشاكل جولات المركبة.

- تصميم الشبكات.

فيما يلي، نقترح مراجعة اشكالية تصميم شبكة الخدمة في حالة التدفقات متعددة السلع.

## 2.3 وصف اشكالية الدراسة الميدانية:

### 1.2.3 صياغة نماذج الشبكات في حالة التدفقات متعددة السلع:

في بحوث العمليات، مشكلة إمكانية قبول الحل موجودة بكثرة: كما نجدها في حالة البحث عن تدفق متعدد مثالي بالنسبة لمستوى غير محدود لكن يخضع لقيود محدودة. حيث لا يمكن مقارنتها مع مشاكل الشبكات الفردية uni flots، من جهة أخرى الحلول المقدمة من البرمجة الخطية لاسيما طريقة السمبلكس تعتبر غير كاملة، حيث لا يوجد شروط واضحة لتحديد مدى صحة النتائج في حالتنا. مهما يكن، لا مفَر من البرمجة الخطية لكن علينا استعمال أساليب أخرى مختلفة عن الطرق التقليدية من بينها طريقة السمبلكس المراجعة التي تعتمد في حلها على المصفوفات، إضافة الى طريقة توليد الأعمدة باعتبار أنَ الشبكة معقدة.

### 2.2.3 مشكلة التدفقات المتعددة: **Multi–flots**:

في شبكة مصممة بالفعل، مع سعات على المسارات، تتمثل المشكلة في توصيل الطلبات على هذه الشبكة. إنها مشكلة تدفق متعدد المحتوى أو متعدد السلع. في حالة سلعة واحدة، ربما مع أصول ووجهات متعددة، تكون المشكلة هي مشكلة التدفق.

هذه المشكلة متعددة الحدود، حتى لو حاولنا اكتمال متغيرات التدفقات. طالما أن هناك سلعتين على الأقل، فإن طلب جميع متغيرات التدفق يجعل المشكلة معقدة، ففي (Even, 1976). (A. A. Assad, 1978) (Ahuja, 1993) نجد اقتراح حالتين من النماذج بما في ذلك النماذج الكلاسيكية وطرق حل لمشاكل التدفق المتعدد. فسنحاول تقديم صياغة كلاسيكية لمشكلة التدفق المتعدد على شبكة مع قدرة المسار، ومتغيرات التدفق على الأقواس.

يُلاحظ أن G= (N,A) الشبكة، المسار (j i) لديها القدرة $u_{ij}$. كل طلب $k \in K$ يجب أن يتم نقل أصله $o^k$ إلى وجهتها $d^k$ في الكمية $w^K$. تكاليف النقل خطية، نلاحظ $CV_{ij}^K$ تكلفة نقل وحدة الطلب k على المسار (ij). إدخال متغيرات التدفق $X_{ij}^k$ والتي تمثل كمية السلع k المنقولة على المسار (ij).

صياغة لمشكلة متعدد التدفق مع القدرة مسار.

$$\min \sum_{k\in K} \sum_{ij\in A} CV_{ij}^{k} x_{ij}^{k}, \qquad (3.1)$$

**قيود تدفق السلع:**

$$\sum_{j\in N} x_{ij}^{k} - \sum_{j\in N} x_{ji}^{k} = \begin{cases} w^k & si \quad i = o^k, \\ -w^k & si \quad i = d^k, \\ 0 & sinon, \end{cases} \quad \forall i \in N, \forall k \in K, \qquad (3.2)$$

**قيود سعة المسارات:**

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^{k} \le u_{ij} \qquad \forall (ij) \in A, \qquad (3.3)$$

**فضاء المتغيرات:**

$$x_{ij}^{k} \ge 0, \qquad \forall (ij) \in A, \forall k \in K. \qquad (3.4)$$

الهدف من الدالة 3-1 هو تقليل تكاليف النقل. القيود **3.2** هي قيود حفظ التدفق وتلبية الطلبات. ويضمن القيد **3.3** احترام قدرات الأقواس.

البحث عن حل أمثل لمشكلة التدفق متعدد السلع أو على المتغيرات التي تم تكييفها مع التطبيقات وكذلك العمل النظري حول هذا الموضوع تكرر كثيرًا في السنوات الأخيرة. نجد تقريبا أكثر من 3000 مقالة تمت الإشارة إليها والتي تم نشرها بين عامي 2007 و2020.

### 3.2.3 **جولات المركبة:**

مشكلة جولات المركبة، تكون بين مستويات التخطيط التكتيكي والتشغيلي. هذه المشكلة الكلاسيكية المتمثلة في تحسين التوافقية هي تعميم لمشكلة البائع المتجول. تمت دراستها على نطاق واسع، لا سيما بسبب كثرة التطبيقات. يتم تعريف هذه المشكلة وفقًا لـ (Ahuja, 1993) على النحو التالي:

- شبكة محددة عبر الرسم البياني الموجه (N,A) =G؛
- أسطول من المركبات V الموجودة في مستودع مشترك في d ∈ N،
- مجموعة من مواقع العملاء (j) لكل منها طلب (تحتاج إلى زيارة)؛
- التكلفة الثابتة $CF_{ij}$ للانتقال من الموقع i إلى الموقع j.

يجب تحديد مجموعة من الجولات لتلبية جميع العملاء بأقل تكلفة. لذلك تم الاهتمام بشكل أساسي بطرق (المسارات) للمركبات، ومسارات السلع الضمنية.

المتغيرات في هذه المشكلة عديدة. فيما يلي بعض جولات المركبات ذات السعة، مع قيود المسافة، ونوافذ زمنية، بموكب غير متجانس، مع توصيلات منفصلة، ومركبات للتسليم. تم تقديم حالة كاملة من أنواع النماذج والطرق الدقيقة والتقريبية للقرار في (Toth, 2002) و (Laporte, 1992). مشاكل جولات المركبة هي مجموعة غنية جدا من المشاكل، ومعظمها معقدة.

الصياغات في شكل البرمجة الخطية في الأعداد الصحيحة. تُعطي صياغة المسار للمشكلة الكلاسيكية لجولة المركبة دون توفر القدرة. لهذا، تم تقديم المتغيرات الثنائية $Y_{ijv}$، $Y_{ijv}=1$ إذا كانت جولة المركبة v تنتقل من i إلى j عن طريق استعمال المسار (ij).

صياغة لمشكلة جولة المركبة بدون سعة المسار.

$$\text{Minimiser} : \sum_{v\in V}\sum_{ij\in A} CF_{ij}y_{ijv}, \tag{3.5}$$

**قيود الجولات:**

$$\sum_{j\in\delta^+(d)} y_{djv} = 1, \qquad \forall v \in V, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i\in\delta^-(d)} y_{idv} = 1, \qquad \forall v \in V, \tag{3.7}$$

$$\sum_{i\in\delta^-(j)}\sum_{v\in V} y_{ijv} = 1, \qquad \forall v \in V, \forall j \in N, \tag{3.8}$$

**قيود التخلص من الجولات غير الكاملة:**

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} y_{ijv} \leq |S| - 1, \qquad \forall v \in V, \forall S \subset N, 2 \leq |S| \leq |N| - 2, \tag{3.9}$$

**فضاء المتغيرات:**

$$y_{ijv} \in \{0,1\}, \qquad \forall (ij) \in A. \tag{3.10}$$

تضمن القيود (3.6) و (3.7) أن تقوم كل مركبة بجولة تبدأ وتنتهي في المستودع. القيد (3.8) يضمن زيارة كل عميل عن طريق جولة واحدة بالضبط. القيد (3.9) يضمن اتصال الدورات عن طريق منع تشكيل الجولات غير الكاملة.

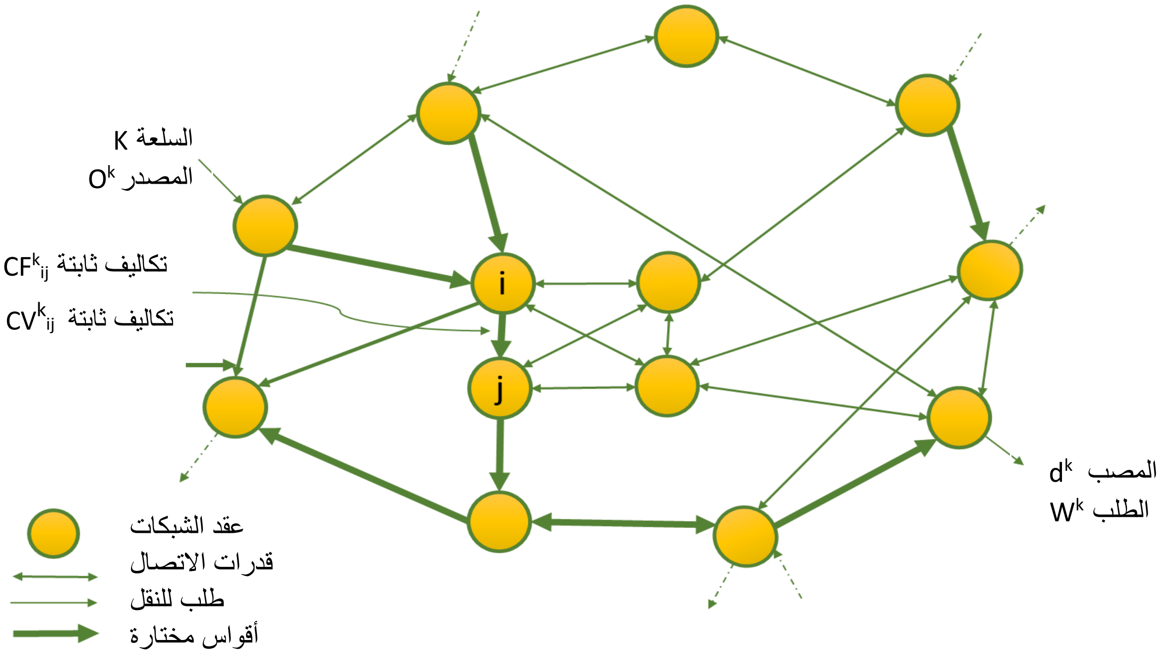
### 4.2.3 **تصميم الشبكات:**

تعد مشاكل تصميم الشبكات مهما جدًا وتنتشر في كل من تطبيقات تخطيط شبكات الاتصالات والنقل. بشكل عام، إن الأمر يتعلق بتمرير التدفقات (السلع والأشخاص والمعلومات والإشارات) باستخدام المعدات المثبتة بالفعل وربما تثبيت المعدات الجديدة. من الضروري عندئذ الدفع ليس فقط لعبور التدفق، ولكن أيضًا لاستخدام أو تثبيت المعدات. الهدف هو تقليل التكلفة الإجمالية (تكلفة التصميم + تكلفة التوجيه) مع تقديم حل بجودة الخدمة المطلوبة. (Schrenk، 2010)

بمعنى آخر، تكمن المشكلة في اختيار مجموعة فرعية من الاتصالات التي تقلل من مجموع تكاليف التوجيه الخطي وتكاليف التصميم الثابت. بشكل عام، مشاكل تصميم الشبكة هي مشاكل في الرسم البياني من الضروري تحديد رسم فرعي أمثل لرسم بياني معين، مع مراعاة القيود. العديد من مشاكل الرسم البياني هي مشاكل خاصة في تصميم الشبكات. فنجد على وجه الخصوص، مشاكل في الرسم البياني مثل الاقتران المثالي بتكلفة دقيقة، زمرة الحد الأدنى للتغطية، الشجرة التي تمتد إلى الحد الأدنى للوزن أو شجرة Steiner، كلها مصمّمة في شكل رسوم بيانية. لمسائل تصميم الشبكة. (Feremans, 2003)

مشاكل تصميم الشبكة هي معقدة (Magnanti et Wong, 1984) على وجه الخصوص شجرة الحد الأدنى للوزن. يوضح الشكل **34** اختيار شبكة وتصميم موجه على هذه الشبكة.

**الشكل34 : تصميم الشبكة**




**المصدر: من إعداد الباحث**

يتم عرض مراجعات نظرية بالإضافة إلى أمثلة مختلفة للتطبيقات في المقالات (Magnanti et Wong, 1984) و(Minoux, 1989) وكذلك في الفصل 13 من كتاب (Ahuja, 1993). تم اقتراح ملخص في (Balakrishnan, 1997). كما هو الحال مع مشاكل جولات المركبات، هناك مجموعة واسعة من مشاكل تصميم الشبكات النموذجية. يوجد بشكل رئيسي فئتان رئيسيتان من مشاكل تصميم الشبكات: تصميم الشبكة بدون سعة للمسار وتصميم الشبكة مع سعة للمسار.

لقد تم تطوير خوارزميات عالية الدقة لحل مشاكل تصميم الشبكات بدون سعة على أقواس. على وجه الخصوص، يقترح (Balakrishnan A. M., 1989) مقاربة مزدوجة تسمح بسرعة الحصول على حدود أقل من 1-4 ٪ من الأمثل.

تعد مشاكل تصميم الشبكة ذات السعة على الأقواس أكثر صعوبة في حلها. تكمن الصعوبة الرئيسية في تحديد الحدود بدقة. تم التطرق إلى هذه المشاكل في (Gendron, 1998)، التي تقترح أيضًا طريقة لتحويل لاغرانج. تتمثل مشكلة تحميل الشبكة في حالة خاصة لمشكلة تصميم الشبكة. الهدف هو تثبيت عدد معين من البنى التحتية على كل من الأقواس (على سبيل المثال الكابلات) التي لديها بعض القدرات. هذه القدرات هي بوجه خاص، مضاعفة لبعضها البعض. مرة أخرى، يتم التعامل مع هذه المشاكل كثيرا في الأبحاث، وكذلك عن طريق النهج متعدد المستويات في (Magnanti, 1995).

مشكلة تصميم الشبكة الموجهة مع السعة تتم بواسطة رسم بياني موجه (N = G، A). يجب تلبية مجموعة K من الطلبات، ويجب أن يتم نقل كل طلب $k \in K$ بكمية $w^k$ من أصل $o^k$ إلى الوجهة $d^k$. تكاليف النقل خطية،

نلاحظ $cv_{ij}^k > 0$ تكلفة وحدة نقل السلع k على المسار (ij). نلاحظ $CF_{ij}$ التكلفة الثابتة لفتح المسار (ij)، هذه التكلفة يجب دفعها عند استخدام المسار (ij). نلاحظ $u_{ij}$ قدرة المسار (ij) الهدف هو تقليل مجموع التكاليف المتغيرة لتوجيه التدفق وتكاليف التصميم الثابتة.

تم تقديم نمذجة لمشكلة تصميم الشبكة مع السعة والسعر الثابت. بالنسبة لهذه الصيغة، اُستخدمت متغيرات التدفق$x_{ij}^k \geq 0$ التي تصف نقل السلعة k على المسار (ij). وقُدمت أيضًا متغيرات التصميم الثنائية $y_{ij}$ التي تحدد الاتصالات المفتوحة.

صياغة مسار تصميم مشكلة في الشبكة مع القدرة.

$$: \sum_{ij\in A} CF_{ij}y_{ij} + \sum_{k\in K}\sum_{ij\in A} CV_{ij}^k x_{ij}^k \qquad (3.11)$$

**تدفق السلع:**

$$\sum_{j\in N} x_{ij}^k - \sum_{j\in N} x_{ji}^k = \begin{cases} w^k & si \quad i = o^k, \\ -w^k & si \quad i = d^k, \\ 0 & sinon, \end{cases} \quad \forall i \in N, \forall k \in K, \qquad (3.12)$$

**القيود المحدبة:**

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \leq u_{ij}y_{ij} \qquad \forall (ij) \in A, \qquad (3.13)$$

**فضاء المتغيرات:**

$$x_{ij}^k \geq 0, \qquad \forall (ij) \in A, \forall k \in K, \qquad (3.14)$$
$$y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (ij) \in A. \qquad (3.15)$$

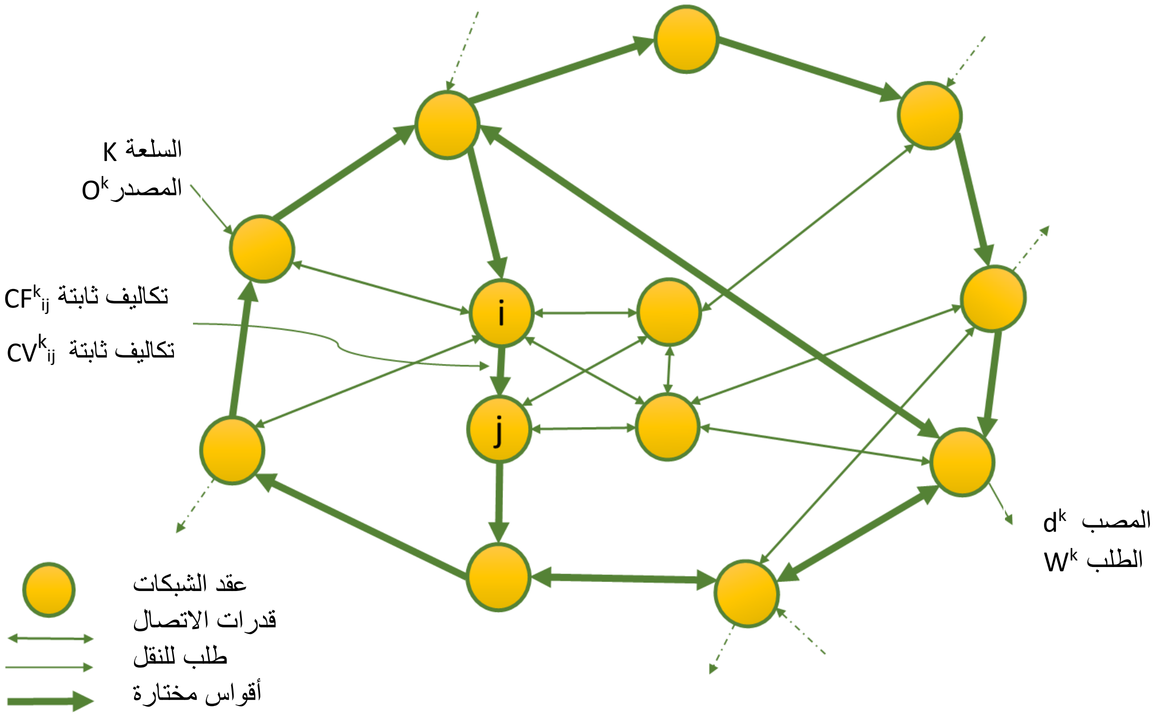
نجد قيود التدفق (3.12). القيود المحدبة (3.13).. تهدف دالة الهدف (3.11) إلى إيجاد أفضل حل وسط بين التكلفة الثابتة لتصميم الشبكة وتكلفة النقل الخطية المتغيرة.

### 5.2.3 تصميم شبكة الخدمة

تتمثل الخاصية الإضافية في تصميم شبكة الخدمة (service network design) في ضرورة تخصيص الموارد (المركبات) عند تصميم الشبكة. لكي يكون المسار مفتوحًا، من الضروري تشغيل هذا المسار بمركبة. هذا ينطوي على قيود جديدة. على وجه الخصوص، في تصميم شبكة الخدمة، يجب أن يتيح اختيار الأقواس المشغّلة تحديد مسارات للمركبات. لهذا، نطلب التوازن بين عدد المركبات التي تصل إلى العقدة والعدد الذي يخرج منها، وهذا هو ما يسمى قيد تصميم التوازن. (Schrenk، 2010)

يوضح الشكل **35** نفس الشبكة الموجهة في تصميم شبكة خدمة. مقارنةً **بالشكل 34** المصمم على الشبكة، يحتوي رقم شبكة الخدمة **35** على المزيد من الأقواس. هذا الحل أعلى كلفةً، لكنه يدمج بالفعل تسيير المركبات، ويتضمن إضافة مواقع من شأنها أن ترفع التكلفة. على وجه الخصوص، نلاحظ تعديل على الشبكة المصممة: لم يعد المسار ($O_i^k$) الذي تم اختياره سابقا في شبكة الخدمة.

**الشكل35 : تصميم شبكة الخدمة**




**المصدر: من إعداد الباحث**

يتم تعريف الخدمة على أنها مسار محدد (من محطة مغادرة إلى محطة وصول) في أوقات محددة (مع تكرار معين) مع جودة خدمة معينة.

يهدف تصميم شبكة الخدمة إلى توفير دعم القرار من خلال الإجابة على الأسئلة التالية:

- ما هي الخدمات (الطرق والجداول الزمنية / الترددات) المفتوحة؟
- ما هي المركبات (ذات السعة) التي يجب استخدامها لتشغيل هذه الخدمات؟
- كيفية تمرير الطلبات من خلال شبكة الخدمة عن طريق ضمان مستوى جودة الخدمة المطلوبة (التأخير، الموثوقية...)؟
- ما هي أفضل استراتيجيات إعادة وضع المركبة لتلبية الاحتياجات المستقبلية؟

يتم توفير رؤية شاملة لتصميم شبكة الخدمة في (Crainic T. G., 2000) مما يجعل هذه المشكلة بمثابة المشكلة الرئيسية للتخطيط التكتيكي. عادةً ما يتم استخدام تصميم شبكة الخدمة لحل مشاكل نقل السلع مع الدمج: بالسكة الحديدية (Barnhart, 2000), بواسطة الطائرة (Barnhart C. K., 2002), (Jaillet, 1996)وأيضًا بواسطة شاحنة (Farvolden, 1994) تتمثل إحدى المشاكل الكلاسيكية لتصميم شبكة الخدمة في النقل السريع للطرود أو الرسائل مثل UPS (Kim، 1997), أو Deutsche Post AG (Irnich، 2002). تم اقتراح حالة حديثة من الأبحاث من قبل (Wieberneit، 2008).

نقدم نموذج لمشكلة تصميم شبكة الخدمة مع السعة والتكلفة الثابتة. نأخذ مرة أخرى تدوينات مشكلة تصميم الشبكة. نقدم مجموعة من الموارد (المركبات) V لكل مورد v ∈ V قدرة $u_v$. تظل متغيرات التدفق $x_{ij}^k \geq 0$. تتم إضافة مؤشر إضافي، يشير إلى المورد المعين للخدمة، يضاف إلى المتغيرات الثنائية للتصميم. وبالتالي يشير المتغير الثنائي $y_{ijv}$ إلى ما إذا كانت الخدمة (ij) يتم تشغيلها بواسطة المورد v.

الصياغة مسار–مسار من تصميم مشكلة شبكة خدمة

$$: \sum_{ij\in A} CF_{ijv} y_{ijv} + \sum_{k\in K}\sum_{ij\in A} CV_{ij}^k x_{ij}^k, \qquad (3.16)$$

مع القيود

تدفق السلع:

$$\sum_{j\in N} x_{ij}^k - \sum_{j\in N} x_{ji}^k = \begin{cases} w^k & \text{كان إذا } i = o^k \\ -w^k & \text{كان إذا } i = d^k \\ 0 & \text{وإلا} \end{cases}, \forall i \in N, \forall k \in K, \qquad (3.17)$$

القيود الملزمة:

(3.18)

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^{k} \leq \sum_{v\in V} U_v y_{ijv}, \qquad \forall (ij) \in A,$$

قيود تصميم التوازن:

$$\sum_{v\in V}\sum_{j\in N} y_{ijv} - \sum_{v\in V}\sum_{j\in N} y_{ijw} = 0, \qquad \forall i \in N, \qquad (3.19)$$

فضاء المتغيرات

$$x_{ji}^{k} \geq 0, \qquad \forall (ij) \in A, \forall k \in K \qquad (3.20)$$

$$y_{ijv} \in \{0,1\}, \qquad \forall (ij) \in A, \forall v \in V \qquad (3.21)$$

دالة الهدف (3.16) والقيود (3.17) و (3.18) لم تتغير عن نموذج تصميم الشبكة. القيد الجديد (3.19) هو قيد تصميم التوازن، وهو قيد يميز تصميم شبكة الخدمة عن تصميم الشبكة. يفرض هذا القيد عددًا متساوًا من المركبات التي تدخل وتغادر كل محطة في الشبكة. تم استخدام هذه القيود في النماذج لتصميم شبكة خدمة للنقل الجوي السريع في (Barnhart C.، 1996) و (Barnhart C.، 2002), عن طريق البر (Farvolden، 1994)ولطلب تطبيق خدمة عبارات الركاب في [Lai et Lo,2004, (Wang D.، 2008)].

## 3.3 نموذج الدراسة التطبيقية:

### 1.3.3 تحديد المشكلة المطروحة في نقل السلع:

من الواضح أن مشكلة تصميم شبكة الخدمة الخاصة بمشروع نقل السلع تمثل عقبة في تصميم شبكة الخدمة. ومع ذلك، فإنه يحتوي على بعض الخصائص الإضافية. تتعلق الخاصية الأولى بتسيير المركبات. للسماح بالتخطيط المنتظم، يجب أن تكون خطة النقل المحسوبة على مدار فترة قابلة للتكرار بشكل دوري. للقيام بذلك، تجدر الإشارة إلى أنه في بداية كل فترة يتم إرسال المركبات بطريقة مماثلة. بمعنى أنه يوجد عدد مماثل من المركبات من نفس النوع في كل محطة في بداية ونهاية فترة التخطيط، أي بداية الفترة التالية. ليست بالضرورة نفس المركبة التي يجب أن تكون في نفس المكان، فالمركبات قادرة على التناوب من فترة إلى أخرى. في سياق الطلب، فإن الوقت الذي تجد فيه المركبة طريقها الأولي مقيد بعدد N من الفترات. في التطبيقات العملية، نادراً ما تنطلق المركبات على أكثر من 3 إلى 4 فترات. (Chou، 2003) يقدمون مثالًا على

جولات المركبات للنقل البحري، و (Yan، 2005) للنقل الجوي. هذا نادرا ما يحدث في النقل البري. على وجه الخصوص، تتضمن المشكلة بعدًا زمنيًا.

القيد الثاني المحدد على المركبات هو أنه يجب استخدامها بطريقة متوازنة: في نهاية الموسم، يجب ألا يتم استغلال أي مركبة بصفة مبالغة أو قليلة. طول الطريق الذي تشغله السيارة v خلال فترة معينة يكون محصور بين أدنى وأكبر مسافة. في الأبحاث المتعلقة بمشاكل جولات المركبة، يُطلق على هذا القيد بقيد الوقت أو قيد المسافة (Laporte، 1992).

هيكل التكلفة كلاسيكي، يمثل تكلفة متغيرة خطية لتدفق السلع وتكلفة ثابتة لانطلاق الخدمة. تسعى إلى تحقيق أقصى قدر من الربح، وليس فقط لتقليل التكلفة. يتم جمع الأهداف بواسطة شركة النقل لكل وحدة شحن يتم نقلها إلى وجهتها. بالتالي، يجب على الناقل حسن الاختيار بين جميع عمليات النقل والإيرادات لتحقيق أقصى قدر من الأرباح، لذلك يجب عليه تلبية الطلبات "الأكثر ربحية" له، ورفض بعض أو جميع الطلبات. لذلك هناك قرار إضافي يجب اتخاذه. تُعرف هذه الخاصية، سواءً كانت تلبية طلبًا أم لا، بمشكلة توجيه الجولات، فقد تمت دراستها بواسطة (Feillet، 2005) (Archetti، 2008) في العديد من المشاكل المتعلقة بجولات المركبات.

### 2.3.3 مشكلة تدفقات السلع المتعددة:

في أغلب مشاكل التدفق التي درست سابقا، لم يكن من الضروري التمييز بين الوحدات المتدفقة في الشبكة. وتسمى هذه الفئة من مشاكل تدفق الشبكة بمشاكل التدفق لسلعة واحدة. هناك أيضًا فئة من مشاكل تدفق الشبكة التي هي قيد الدراسة تسمى مشاكل تدفق السلع المتعددة والتي تعتمد على التمييز بين التدفقات في الشبكة. المجال الأكثر تطبيقا لتدفقات السلع المتعددة يحدث في حركة المرور في ساعة الذروة في أي مدينة حضرية. فإذا تم تقسيم المدينة إلى مناطق، فهناك عدد من الأشخاص في المنطقة i يجب عليهم الانتقال للعمل في المنطقة j. المواقع التي يقيمون فيها الأشخاص ينشؤون عرضًا (B< 0)، وحيث يرغبون في الذهاب، نحصل على طلب (0> B). إذا تم التعامل مع المشكلة على أنها مشكلة تدفق سلعة مفردة، فإن إجراء التدفق بأقل تكلفة (السمبلكس) سيستخدم عرض الأشخاص في منطقة معينة لتلبية الطلب في نفس المنطقة. هذا حل غير مقبول. في هذه المشكلة والمشاكل المشابهة لها، يجب التمييز بين أنواع التدفق المختلفة. بمعنى يجب أن يكون هناك ناقل تدفق مختلف ومجموعة من القيود لكل سلعة.

لا تتمتع مشاكل التدفق متعدد السلع بنفس الخصائص الخاصة التي تتمتع بها مشاكل التدفق للسلع الفردية. كمثال، تؤخذ بعين الاعتبار الشبكة في الشكل 12.9. بافتراض أن هناك ثلاث سلع تتدفق عبر الشبكة. مصدر سلعة 1 هو العقدة 1، ومخرج سلعة 1 هي العقدة 3. أي أن سلعة 1 يجب أن تنطلق فقط من العقدة 1 وتصل فقط في العقدة 3. وبالمثل، يُعتبر مصدر ومصب سلعة 2 عقدتين 2 و1، على التوالي. أخيرًا، المصدر والمخرج للسلعة 3 هما العقدتان 3 و2 على التوالي. مع التقيد بأن مجموع كل السلع التي تتدفق على مسار ما, يجب ألا يتجاوز سعته $U_{ij} = 1$، ما هو الحد الأقصى لتدفقات السلع، f1 + f2 + f3، الممكن في الشبكة؟ (M. S. Bazaraa، 2010)

يعد العثور على الحد الأقصى للتدفق لمشكلة السلع الثلاثة في الشكل **12.9** أمرًا بسيطًا نسبيًا حيث لا يوجد سوى مسار واحد يمكن لكل سلعة أن تسلكه من مصدرها إلى وجهته. مسارات السلع 1 و2 و3، على التوالي، هي

$$P_1 = \{(1,2),(2,3)\}$$
$$P_2 = \{(2,3),(3,1)\}$$
$$P_3 = \{(3,1),(1,2)\}.$$

إذا تم وضع وحدة تدفق واحدة على أحد المسارات، فسيتم حظر المسارات الأخرى تمامًا (أي، يجب أن يكون هناك تدفق صفري)، وبالتالي يكون إجمالي التدفق 1. ومع ذلك، هناك حل أفضل متاح إذا لم يتم طلب تدفقات عدد صحيح. بافتراض أنه تم وضع 2/1 وحدة من تدفق السلعة 1 على$P_1$ ، و 2/1 وحدة من تدفق السلعة 2 على$P_2$، و2/1 وحدة من تدفق السلعة 3 على $P_3$. في هذه الحالة، يتم تلبية قدرات المسار ويبلغ التدفق الكلي لجميع السلع 2/3. من هذا يُستنتج أن مشاكل التدفق المتعدد للسلع لا توفر بالضرورة تدفقات صحيحة.

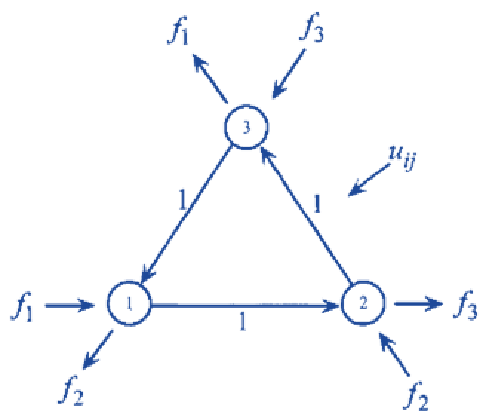
على الرغم من أن مشاكل التدفق للسلع المتعددة ليس لها صياغة "بسيطة" مثل مشاكل التدفق للسلع الفردية، فإنها لا تزال برامج خطية (إذا تم تجاهل تكامل المتغيرات). كما سيتوضح قريبًا، فإن مشاكل التدفق المتعدد للسلع لديها هيكل خاص يفرض تطبيق تقنيات التجزئة وتوليد الأعمدة.

## 4.3 مختلف مشاكل التدفق في تصميم الشبكة:

### 1.4.3 مشكلة تدفق التكلفة الدنيا للسلع المتعددة:

بافتراض أنه تم الحصول على شبكة G لها عقد m وأقواس n حيث تتدفق سلع مختلفة. بوضع $\mathbf{u}_i$، تمثل شعاع الحدود العليا لتدفق السلعة i في أقواس الشبكة. وبالتالي، فإن $u_{ipq}$ هو الحد الأعلى لتدفق السلع i في المسار (p ،q). أيضًا، بوضع **u** تمثل شعاع الحدود العليا على مجموع جميع السلع التي تتدفق في أقواس الشبكة.

**الشكل36 : مشكلة أعظم تدفق لثلاث سلع**




نضع $u_{pq}$ هو الحد الأعلى لمجموع جميع تدفقات السلع في المسار (p ،q). و $c_i$ يمثل شعاع تكاليف المسار في الشبكة للسلعة i. وبالتالي، فإن $c_{ipq}$ هي تكلفة الوحدة للسلعة i على المسار (p ،q). أخيرًا، بوضع b، يمثل شعاع الإمدادات (أو الطلبات) للسلعة i في الشبكة. لذلك، $b_{iq}$ هو العرض (إذا كان $b_{iq} > 0$) أو الطلب (إذا $b_{iq} < 0$) للسلعة i عند العقدة q.

فيما يلي صياغة البرمجة الخطية لمشكلة التدفق بأقل تكلفة للسلع المتعددة:

$$\sum_{i=1}^{t} C_i X_i$$

$$\sum_{i=1}^{t} X_i \leq u$$

$$AX_i = b_i, \quad i = 1, \dots \dots, t$$

$$0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots \dots; t.$$

حيث $x_i$ هو شعاع تدفقات السلعة i في الشبكة وA هي مصفوفة الارتكاز مسار–العقد للشبكة. تسمى الصيغة السابقة الصياغة عقدة–المسار لمشكلة التدفق متعدد السلع، حيث إنها تستخدم مصفوفة حدوث مسار عقدة. (M. S. Bazaraa، 2010)

مشكلة التدفق للتكلفة الدنيا للسلع المتعددة n (t + 1) ومتغيرات n + mt (بما في ذلك المتغيرات الراكدة الخاصة بقيود الاقتران وتجاهل القيود غير السلبية والقيود ذات الحدود العليا $0 \le x_i \le u_i$). وبالتالي، حتى بالنسبة للمشاكل المعتدلة، ستكون مصفوفة القيد كبيرة. على سبيل المثال، بافتراض مشكلة في وجود 100 عقدة و250 مسارا و10 سلع. سيكون لهذه المشكلة 2750 متغير و1250 قيد.

بأخذ تطبيق خوارزمية التجزئة لمشكلة التدفق متعدد السلع بأقل تكلفة. بوضع $X_i = \{x_i: Ax_i = b_i, 0 \le x_i \le u_i\}$. باعتبار أن كل مكون من عناصر $u_i$ محدود بحيث يكون $X_i$ محصورا . عندئذٍ يمكن التعبير عن كل $x_i$ كتركيبة للنقاط القصوى لـ $X_i$ على النحو التالي:

$$\boldsymbol{X_i = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} X_{ij}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} = 1}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{ij}} \ge 0, \quad \text{j} = 1, \dots, \boldsymbol{k_i}$$

و $x_{i1}$،$x_{i2}$،.....،$x_{iki}$ هي النقاط الحدية لـ $X_i$. بالتعويض عن $x_i$ في مشكلة التدفق بأقل تكلفة للسلع المتعددة والإشارة إلى شعاع المتغير الراكد S، نحصل على ما يلي:

تدنية $$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{k_i} (C_i X_{ij})\, \lambda_{ij}}$$

القيود $$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{k_i} X_i \lambda_{ij} + s = u}$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} \boldsymbol{\lambda_{ij} = 1}, \quad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{t}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{ij}} \geq 0, \quad \mathrm{j} = 1, \dots, \boldsymbol{k_i, i = 1, \dots ; t}$$

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0}.$$

بافتراض أن لدينا حلًا عمليًا أساسيًا لمشكلة التكلفة الدنيا متعدد التدفق من حيث متغيرات-$\lambda_{ij}$، ونترك ($w$، $\alpha$) شعاعا للمتغيرات الثنائية المقابلة للحل الممكن الأساسي (يحتوي w على n مكون و $\alpha$ لديه t مكون). الحل الممكن الثنائي يعطى بواسطة الشرطين التاليين:

$$w_{pq} \leq 0 \quad \text{المقابلة لكل} \quad s_{pq}, \qquad \text{(i)}$$

$$WX_{ij} + \alpha_i - c_j X_{ij} \leq 0 \quad \text{المقابلة لكل} \ \lambda_{ij} \quad \text{(ii)}$$

إذا تم عدم تلبية أي من هذه الشروط، فإن المتغير المقابل ($s_{pq}$ $or$ $\lambda_{ij}$) مرشح لدخول الأساس الرئيسي. هنا $s_{pq}$ مرشح لدخول الأساس إذا كان $w_{pq} > 0$. بالنسبة للسلعة المعطاة i، متغير $\lambda_{ij}$ غير أساسي يمكن إدخاله في الأساس إذا كانت قيمة الدالة المثلى للمشكلة الفرعية التالية موجبة (لماذا؟):

$$(w - c_i)X_i + \alpha_i$$
$$Ax_i = b_i$$
$$0 \leq X_i \leq u_i$$

نظرًا لأن A عبارة عن مصفوفة حدوث (ارتكاز) مسار–عقدة، فتعتبر مشكلة في شبكة بتدفق سلعة أحادية. وبالتالي، يمكن حلها بإحدى التقنيات المعتمدة لحل مشاكل تدفق شبكة سلعة أحادية.

**ملخص خوارزمية التجزئة المطبق على مشكلة تدفق التكلفة الدنيا للسلع المتعددة:**

**خطوة التهيئة:**

البدأ بالحل الأساسي الممكن للمشكلة الرئيسية. نخزين $B^{-1}, b^{-} = B^{-1}\binom{u}{1}$ و $(w, \alpha) =$ $\hat{c}_b B^{-1}$ , حيث $\hat{c}_{ij} = c_i x_{ij}$ من اجل المتغير $\lambda_{ij}$– ( قد تكون هناك حاجة إلى طريقة المرحلتين أو طريقة big-M)

1- بوضع $(w, \alpha)$ كونه شعاع المتغيرات الثنائية المتوافق مع الحل العملي الحالي الأساسي للمشكلة الرئيسية. إذا كان أي $w_{pq} > 0$ فإن المتغير المقابل $s_{pq}$ مرشح لدخول الأساس الرئيسي. إذا كان $w_{pq} \leq 0$ لكل مسار، بالنظر في المشكلة الفرعية ith التالية:

$$(w - c_i)X_i + \alpha_i$$
$$Ax_i = b_i$$
$$0 \leq X_i \leq u_i$$

هذه مشكلة تدفق سلعة واحدة. إذا كان الحل $x_{ik}$ لهذه المشكلة لديه $z_{ik} - c_{ik} = (w - c_i)x_i + \alpha_i > 0$, إذن $\lambda_{ik}$ مرشح لدخول الأساس الرئيسي.

2- إذا لم يكن هناك مقترح لدخول الأساس الرئيسي، إذن توقف؛ باعتباره الحل الأمثل. خلاف ذلك، حدد متغير مقترح، يتم تحديث العمود الخاص به وفقا لـ :

$$3\text{- } B^{-1}\begin{pmatrix} e_{pq} \\ 0 \end{pmatrix} \; for\ s_{pq} \;\; and\ B^{-1}\begin{pmatrix} X_{ik} \\ e_i \end{pmatrix}$$

لقيم $\lambda_{ij}$ والمحور. نشير بأن $\mathbf{e}_{pq}$ يمثل شعاع الوحدة مع 1 في السطر الذي يشترك مع المسار (p, q) . هذا التحيين لمعكوس الأساس، المتغيرات الثنائية والجانب الأيمن. تعود عند الخطوة 1.

تتوافق مصفوفة الأساس المحولة لمشكلة التدفق بأقل تكلفة للسلع المتعددة مع شجرة متفرعة لكل سلعة بالإضافة إلى مجموعة من المسارات والأقواس الراكدة. (M. S. Bazaraa، 2010)

## 5.3 أداة الدراسة التطبيقية:

### 1.5.3 السمبلكس المراجعة: Le Simplex révisé

من خلال التعامل مع خوارزمية السمبلكس لوحظ أنه عدد العمليات المحورية هو حوالي m3/2 فاذا كانت m أقل بكثير من n فمن الواضح أن جزءا كبيرا من أعمدة المصفوفة لن تجري عليها عمليات محورية وبالتالي فان الوقت المستنفد على مثل هده الحسابات هو وقت ضائع. بالإضافة الى دلك فان تخزين تلك الأعمدة هو أيضا مضيعة لذاكرة الحاسب. حيث تقوم خوارزمية السمبلكس المراجعة بترتيب مراحل السمبلكس بشكل يتجنب حساب وتخزين المعلومات غير الضرورية، وهدا بطبيعة الحال يؤدي الى زيادة كفاءتها مما يؤهلها لحل المسائل العملية المعقدة بشكل فعال.

### 2.5.3 طريقة السمبلكس المراجعة:

لفهم طريقة السمبلكس المراجعة (RSM)، نأخذ البرنامج الخطي (LP):

| | | |
|---|---|---|
| Cx | تدنية | (2.1) |
| Ax = B | القيود | (2.2) |
| $X \geq 0$ | | (2.3) |

حيث A هي مصفوفة بدرجة n – m،

m ..... 1 = b / n ... 1 = c

مع اعتبار:

$c_B$ هو الشعاع المتكون من عناصر c المقابلة للمتغيرات الأساسية؛

$c1_B$ يمثل شعاع التكلفة الأساسي في المرحلة 1؛

$c_j$ يمثل العنصر $j^{th}$ من شعاع c.

$c1_j$ يمثل العنصر $j^{th}$ من المرحلة 1 شعاع الهدف.

$a_j$ يمثل $j^{th}$ عمود المصفوفة A.

B يمثل المصفوفة الأساسية (أو الأساس)؛

$d_j$ يمثل الشعاع الذي تم الحصول عليه عن طريق تحديث $a_j$ مع الأساس B؛

π يمثل شعاع ثنائي في المرحلة 2.

1π يمثل شعاع ثنائي في المرحلة1. و $x^*$ يمثل شعاع الحل.

لما تكون القيود (**2.2**) متساوية في شكل قياسي. يمكن تحويل أي برنامج خطي إلى النموذج القياسي عن طريق إدخال متغيرات الركود والمتغيرات الفائضة والمتغيرات الاصطناعية اعتمادًا على نوع القيد (أقل من أو أكبر من أو المساواة). وبالتالي، سيتم الإشارة إلى جميع المتغيرات التي يتم تقديمها لتحويل المشكلة إلى النموذج القياسي كمتغيرات منطقية أو كمجالات منطقية. لذلك يُفترض أن هناك عمود وحدة لمتغير منطقي لكل صف في A.. يمكن تلخيص خوارزمية السمبلكس المراجعة في الخطوات التالية.

1. تشكيل أشعة التكلفة الأساسية. في المرحلة 2، يكون $c_B$ وفي المرحلة 1 يكون $cl_B$.
2. حساب الشعاع الثنائي بحل $\pi B = c_B$ من أجل π في المرحلة 2 و $\pi 1 B = c1_B$.

3. التكلفة المنخفضة لجميع الأعمدة j غير الأساسية. في المرحلة 1 التكلفة المنخفضة، $c1_j -$ $\pi 1 a_j$ هو $-\pi 1 a_j$ بما ان $c1_j$ يساوي الصفر إذا كان العمود $j^{th}$ غير أساسي. في المرحلة 2 التكلفة المنخفضة تكون $c_j - \pi a_j$.
4. البحث عن عمود الإدخال استنادًا إلى التكلفة المنخفضة. إذا لم يكن هناك عمود إدخال، فيكون الحل هو الأمثل إذا كانت في المرحلة 2 أو غير ممكن إذا كانت في المرحلة 1 والتوقف.
5. حل $Bd_j = a_j$ لتحديث إدخال العمود $a_j$ إلى $d_j$.
6. البحث عن الصف المحوري باستخدام اختبار النسبة. إذا لم يكن أيا منها، يتم الإعلان أن المشكلة غير محدودة والتوقف.
7. العودة إلى الخطوة 1.

### 3.5.3 تقنية تنفيذ طريقة السمبلكس المراجعة:

من أجل استغلال حجم المصفوفة يتم تخزين العناصر غير الصفرية فقط.

هيكل البيانات يتكون من ثلاث مصفوفات كما هو موضح أدناه.

(أ) المصفوفة A تتضمن العناصر غير الصفرية لمصفوفة البيانات.

(ب) المصفوفة IA تتضمن قيم السطر للعناصر غير الصفرية.

(ت) المصفوفة LA تتضمن المواضع في A من أول عنصر غير صفري في كل عمود.

لذلك، يتم تحديد عدد العناصر غير الصفرية في العمود $i^{th}$ بواسطة $LA(i+1) - LA(i)$ .

كلما كان هناك حاجة لعمود من مصفوفة البيانات خلال عمليات حل simplex، يجب أن يتم توليده باستخدام المعلومات الموجودة في المصفوفات أعلاه. هذا هو المعروف باسم التجزئة ويتم على النحو التالي.

نفترض أن العمود $i^{th}$ سيتم اضافته في المصفوفة Y.

1- تهيئة Y إلى المصفوفة صفر.

2- البحث عن عدد العناصر غير الصفرية في العمود ith بواسطة مقارنة $LA(i+1) - LA(i)$.

3- البدأ بـ $LA(i)^{th}$ عنصر A .واستخدام IA لتعيين العنصر للمكون المناسب للمصفوفة Y وتكرار هذا الإجراء لجميع العناصر غير الصفرية في العمود $i^{th}$.

على سبيل المثال، بالوضع في الاعتبار مصفوفة البيانات:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= [1,2,3,5,6] \\ \mathrm{IA} &= [1,3,2,3,2] \\ \mathrm{LA} &= [1,3,5,6] \end{aligned}$$

لتفكيك العمود الأول يتكون من 2 = $(= LA(2) - LA(1))$ عناصر, تتم تهيئة Y لأول مرة إلى الشعاع صفر. ثم يتم تعيين A(1) على Y(1) لأن IA(1) هي A(2) تم تعيينها إلى Y(3) لأن IA(2) =3.

**عامل الأساس:**

يوضع في الاعتبار مصفوفة أساسها $n - n$. لنفترض أن $B_1$تم الحصول عليها من $B$ باستبدال العمود $r^{th}$ بشعاع العمود $s$. إذن

$$\mathrm{B}_1 = B + (s - \mathrm{B}\ \mathrm{u_r})\mathrm{u_r}^{\mathrm{t}}$$

حيث $u_r$ هو $r^{th}$ شعاع عمود الوحدة و $u_r t$ هو منقوله. وبالتالي

$$\begin{aligned} B_1 &= B[I + B^{-1}(s - Bu_r)u_r^t] \\ &= B[u_1, \dots, u_{r-1}, t, u_{r+1}, \dots, u_n] \\ &= BF_1 \\ \mathrm{t} &= B^{-1}s. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

إذا تم تنفيذ العملية k مرات ينتج:

$$B_k \quad = \quad B_0 1 \ldots F_K \qquad (2.7)$$

مع هذا الأساس، يتم تنفيذ الخطوتين 2 و 5 من RSM على النحو التالي.

الخطوة 2: لحل π في التكرار $k^{th}$ من RSM لدينا:

$$\pi B_k = c_B$$

بعد استخدام (2.7) يصبح

$$\pi \quad = \quad (((c_B\, E_k)E_{k-1}) \ldots)E_1 \qquad (2.8)$$

مع:

$E_i \;=\; f_{i^{-1}}$ من أجل كل $i = 1, \ldots., k.$

بما أن $F_i$ عبارة عن مصفوفة أولية، فإن $E_i$ أيضًا عبارة عن مصفوفة أولية. وبالتالي فإن الحل لـ π في الخطوة $k^{th}$يتضمن k متغيرات داخلية.

الخطوة 5: لحل $d_j$ عند التكرار $k^{th}$ من RSM لدينا

$$B_{k^{d_j}} = a_j$$

بعد استخدام (2.7) يصبح

$$d_j = E_1(\ldots\left(E_{k-1}\left(E_{k^{a_j}}\right)\right)) \qquad (2.9)$$

**أساس معدل**:

يتم التعامل مع سطر التكلفة كسطر غير ملزم في مجموعة القيود الأصلية، وبالتالي تغيير حجم الأساس إلى (m + 1) و (m + 1). لذلك تتم إعادة كتابة البرنامج الخطي في (2.1) - (2.3) كما هو موضح أدناه:

$$\begin{array}{llll} \text{خفض} & & -s_0 & (2.10) \\ \text{تخضع الى} & s_0 + cx & = 0 & (2.11) \\ (LP2) & Ax & = b & (2.12) \\ & x & \geq 0 & (2.13) \end{array}$$

يُلاحظ أن العمود $j^{th}$ من LP1 يتوافق مع العمود $(j\ +\ 1)^{st}$ من LP2. بما أن المتغير الأساسي $S_0$ غير مقيد باشارة (2.11) فهو قيد غير ملزم فعليًا. أيضًا، إذا بدأ $S_0$ كمتغير أساسي، فلن يترك الأساس. (Sundarraj، 1989)

**c** ليكن شعاع $[1, c]$.

**x** ليكن شعاع $[s_0, x]$.

**A** المصفوفة $\begin{bmatrix} s_0 & c \\ 0 & A \end{bmatrix}$

$c_B$ ليكن شعاع التكلفة الأساسي للنموذج الفعال؛

$c_j$ يكون العنصر $j^{th}$ من c.

$\boldsymbol{a_j}$ يكون العمود $j^{th}$ من **A**؛

**B** تكون المصفوفة الأساسية للنموذج المعدل؛

$\mathbf{d_j}$ يكون العمود الذي تم الحصول عليه عن طريق تحديث $\mathbf{a_j}$ مع الأساس **B**؛

π يكون الشعاع الثنائي للنموذج معدل،

$x^*$ يكون شعاع الحل للنموذج معدل.

نعيد تأكيد الخطوات المختلفة لـ RSM مع LP2.

الخطوة 1: في المرحلة 2، يكون شعاع التكلفة الأساسي هو

$$c_B\ =\ [-1{,}0] \qquad (2.15)$$

في المرحلة الأولى، يكون شعاع التكلفة الأساسي في موضع $i^{th}$ 1 إذا كان الاساس $i^{th}$ أعلى من الحد الأعلى ؛ $a\ -1$ إذا كان الاساس $i^{th}$ أقل من منطقه الحد الأدنى ؛ و0 خلاف ذلك.

هذا النموذج لديه المزايا التالية

- يمكن استخدام أي سطر كسطر الهدف عن طريق اختياره للحل الأمثل.
- تختلف المرحلة 1 والمرحلة 2 فقط في تعريف $C_B$.

الخطوة 2: في النموذج المعدل، يتم كتابة الأساس الجديد ومعكوسه كما يلي:

$$B\ =\ \begin{bmatrix} 1 & c_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

$$B^{-1}\ =\ \begin{bmatrix} 1 & -\pi \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

في المرحلة 1

$$\pi = [0, -c1_B]\mathbf{B}^{-1} = [0, -\pi 1]. \qquad (2.19)$$

في المرحلة 2

$$\pi = [1,0]\mathbf{B}^{-1} = [1, -\pi]. \qquad (2.20)$$

وبالتالي، في كلتا الحالتين، يكون الشعاع الثنائي للمشكلة الأصلية (LP1)، سالب الاشارة، المكون الثاني من الشعاع الثنائي للنموذج المعدل.

الخطوة 3: يتم كتابة العمود $a_{j+1}$ للنموذج المعدل:

$$a_{j+1} = [c_j; a_j]^t \qquad (2.21)$$

يتوافق العمود $j^{th}$ من LP1 مع العمود $(j+1)^{st}$ من LP2. لذلك، يتم حساب التكلفة المخفضة للعمود $j^{th}$ من LP2 عن طريق ضرب الشعاع الثنائي للنموذج المعدل مسبقًا على $a_{j+1}$.

في المرحلة 1

$$\pi a_{j+1} = [0, -\pi 1]\,[c_j, a_j]^t = -\pi 1 a_j\ ; \qquad (2.22)$$

و في المرحلة 2

$$\pi a_{j+1} = [1, -\pi]\,[c_j, a_j]^t = c_j - \pi a_j \qquad (2.22)$$

والتي تسعى لخفض التكاليف المناسبة في كل حالة.

الخطوة 5: تحديث عمود النموذج الفعال هو

$$d_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\pi \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_j \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j - \pi a_j \\ B^{-1} a_j \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

يوفر الجزء الثاني من $d_{j+1}$ تحديث العمود المطلوب.

**تسعير متعدد:**

في طريقة السمبلكس المراجعة، تتم مقارنة التكاليف المخفضة لجميع الأعمدة غير الأساسية ويتم اختيار العمود ذي التكلفة "الأفضل" كعمود إدخال. عادة، لن تختلف الأسعار الثنائية في التكرار اختلافًا كبيرًا عن

التكرار السابق، وسيظل عدد من الأعمدة التي يتم تسعيرها مرشح في التكرار السابق. يتم استخدام نموذج التسعير المتعدد التالي للاستفادة من الملاحظة أعلاه من أجل تقليل الحساب. (Sundarraj، 1989)

(a) بدلاً من النظر فقط في العمود ذي التكلفة "الأفضل"، يتم اختيار مجموعة من الأعمدة المرشحة (تسمى أحيانًا أعمدة الدخول المحتملة) بتكاليف منخفضة جيدة.

(b) يتم تحديث كل عمود في النموذج من الأساس الحالي.

(c) يتم تحديد العمود الذي يوفر أكبر قدر من التحسين في دالة الهدف لإدخاله في أساس.

(d) يتم تحديث الأساس. يتم توليد مصفوفة جديدة ويتم حذف العمود الداخل من النموذج المرشح.

(e) لاختبار ما إذا كانت الأعمدة المتبقية في المجموعة مقبولة للانضمام الى الأساس الجديد، يتم حساب التكاليف المخفضة الجديدة على النحو التالي. أولاً، ضرب تحديثات العمود مسبقًا بواسطة المصفوفة الجديدة. ثم ضربها في أشعة التكلفة المناسبة.

(f) الخطوات من ***(c)*** إلى ***(e)*** يتم تكرارها حتى يتم إدخال جميع الأعمدة في النموذج إلى الأساس أو لا تأخذ بالاعتبار.

### 4.5.3 طريقة توليد الأعمدة: **Column Generation**

تتمثل في تحديد خوارزمية معينة لحل مسائل معقدة تحتوي على معلومات واسعة، لربح الوقت والتكاليف. حيث تعتمد على تقنيات التجزئة، فهناك حالات خاصة من مسائل الأمثلية لها خواص هيكلية، هذه الخواص هي ان تكون المسالة ذات هيكل قابل للتجزئة. والتي يمكن ان تستغل حسابيا بشكل مفيد لجعل الحل اكثر سهولة عن طريق تطبيق ما يسمى بتقنيات التجزئة إذ تعود اولى المبادئ لتجزئة مسائل الأمثلية (techniques de Décomposition). عام 1960 الى ( Wolfeو Dantzig)

انَ اغلب المسائل العملية في مجال الهندسة والعلوم لها هيكل قابل للتجزئة، ومن اجل تطبيق مميز لتقنيات التجزئة فان المسالة يجب ان يكون لها هيكل مناسب وبشكل عام هناك هيكلان للمسالة، الأول يتصف بقيود معقدة والثاني بمتغيرات معقدة، المتغيرات والقيود المعقدة هي التي تعقد الحل للمسالة او تمنع الحل المجزأ للمسالة ومن ثم تجعل حل المسالة اكثر صعوبة.

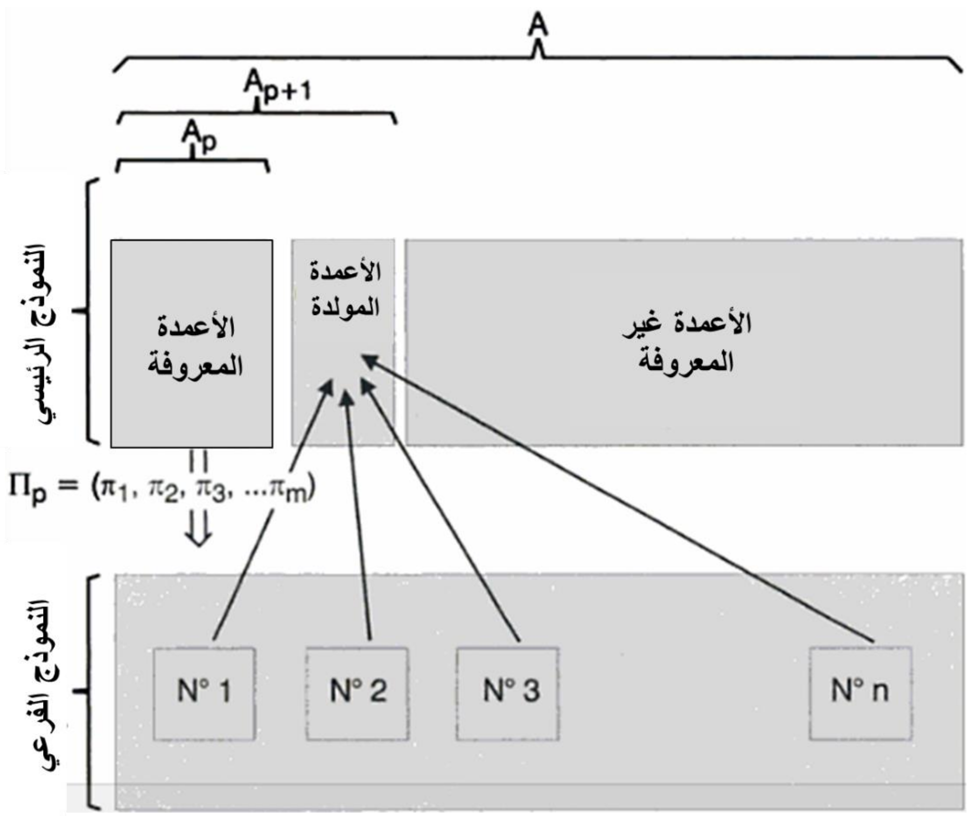
تقنيات التجزئة تسمح بتحويل الحل لمسائل الأمثلية التي تحتوي على متغيرات او قيود معقدة الى حل لمتتابعة من المسائل بأبعاد اصغر ، لذلك فان تقنيات التجزئة يمكن ان تعرف بانها تقنيات حسابية تأخذ بعين

الاعتبار وبشكل غير مباشر القيود (المتغيرات) المعقدة لكن الثمن الذي سيُدفع لهذا التبسيط هو التكرار إذ بدلا من حل المسالة الأصلية بقيود (متغيرات) معقدة سيتم حل مسألتين بصورة تكرارية هما مسالة رئيسة ومسألة مشابهة للمسألة الأصلية لكن من دون قيود (متغيرات) معقدة تسمى مسالة جزئية وبهذا الاسلوب فان القيود (المتغيرات) المعقدة تُأخذ بالحسبان بصورة تدريجية .

هناك حالة اخرى تتطلب تطبيق تقنيات التجزئة للحصول على الحل الأمثل وهي حين تكون مسألة الأمثلية ذات هيكل قابل للتجزئة ثنائية المستوى إذ يكون أحد القيود (او أكثر من قيد) هو عبارة عن مسألة أمثلية اضافية، وحين تكون المسألة من هذا النوع فانه من المستحيل ايجاد الحل الأمثل لها باستخدام خوارزميات الأمثلية القياسية لذلك تظهر هنا الحاجة الضرورية الى تطبيق تقنيات التجزئة.

و الشكل الموالي يوضح فكرة تجزئة النموذج خلال عملية توليد الأعمدة.(Column Generation)

**الشكل37 : توليد الأعمدة**




المصدر: (Baptiste، 2005)

### 5.5.3 تجزئة **Dantzig-Wolfe**:

من أجل تقديم نظرة عامة على تجزئة Dantzig-Wolfe

**ليكن** $X = \{\mathbf{x}|Ax = b, \ \ x \geq 0\}$. تكون النقطة x تنتمي ل X إذا وفقط إذا كان يمكن كتابتها على أنها مجموعة من نقاطها الحدية بالإضافة إلى نموذج خطي غير سالب من مولدات الأشعة الحدية (حلول متجانسة) من X ؛ بمعنى آخر

$$x = \sum_j (\mathcal{B}_j \boldsymbol{x}^j) \qquad (2.38)$$

حيث

$$\sum_j(\mathcal{B}_j \, \partial_j) = 1 \quad ; \quad \mathcal{B}_j \geq 0 \text{ من اجل كل } j. \qquad (2.39)$$

$\partial_j = 0$ إذا كان $\boldsymbol{x}^j$ مولد شعاع حدي من X.

$\partial_j = 1$ إذا كان $\boldsymbol{x}^j$ هي النقطة الحدية من X.

مبدأ التجزئة:

باعتبار البرنامج الخطي:

(LP3)

$$A_1 x = b_1 \qquad (2.42)$$

$$A_{21} x = b_2 \qquad (2.43)$$

$$x \geq 0 \qquad (2.44)$$

$A_1$ هي مصفوفة بدرجة $n- m_0$، و $A_2$ هي مصفوفة بدرجة n–m وجميع الأشعة والمصفوفات الأخرى لها أبعاد مناسبة. يكون:

$$s = \{x|A_2 x = b_2, x \geq 0\} \qquad (2.45)$$

ثم يتم إعطاء أي نقطة في S بواسطة:

$$x = \sum_j (\mathcal{B}_{jxj}) \qquad (2.46)$$

حيث

$$(2.47) \qquad \sum_j(\mathcal{B}_j \, \partial_j) = 1 \quad ; \quad \mathcal{B}_j \geq 0 \text{ من اجل كل } j \text{ و :}$$

$\partial_j = 0$ إذا كان $\boldsymbol{x}^j$ مولد شعاع حدي من S.

(2.48) $\partial_j = 1$ إذا كان $\boldsymbol{x}^j$ هي النقطة الحدية من S.

يعمل الترميز j على جميع النقاط الحدية ومولدات الأشعة الحدية في S.

استبدال لـ x في LP3 يعطي:

$$\sum_j (cx^j)\mathcal{B}_j \qquad (2.49)$$

بقيود:

(LP4)

$$\sum_j \left(A_1 x^j\right)\mathcal{B}_j = \quad b_1 \qquad (2.50)$$

$$\sum_j \left(\mathcal{B}_j \partial_j\right) = \quad 1 \qquad (2.51)$$

$$\mathcal{B} \;\; \geq \;\; 0 \qquad (2.52)$$

مع $\partial_j$ كما هو موضح في (2.48).

المشاكل LP3 و LP4 متكافئة لأنه من بين جميع الحلول (2.43) فقط الحلول التي تحقق (2.42) يتم اختيارها من قبلLP4 . تسمى LP4 المشكلة الرئيسية وتعرف (2.51) - (2.52) من المشكلة الرئيسية باسم القيود محدبة. يحتوي المشكل الرئيسي على صفوف ($m_0$ + 1) مقارنةً بالصفوف ($m_0$ + m) الخاصة بالمشكلة الأصليةLP3 . من ناحية أخرى، يحتوي على العديد من الأعمدة حيث توجد نقاط وأشعة حدية في S ويمكن أن يكون هذا الرقم كبيرا. علاوة على ذلك، هذه الأعمدة غير معروفة سلفًا. نجد أدناه وصف لتجزئة Dantzig وWolfe [1960] للبحث عن هذه الأعمدة.

**توليد الأعمدة**: لحل LP4 مع RSM، يمكن تنفيذ جميع الخطوات الموضحة في الفقرة 2.1، باستثناء خطوة إيجاد التكلفة المخفضة، بشكل روتيني. للعثور على انخفاض التكلفة.

$$cx^j - \pi \begin{bmatrix} A_1 x^j \\ \partial_j \end{bmatrix} \qquad (2.53)$$

العمود $[A_1 x^j, \partial_j]$ مطلوب ولكنه غير متاح بسهولة. ومع ذلك، يمكن إجراء التسعير على النحو التالي.

التجزئة

$$\pi = \; [\pi_0, \mu] \qquad (2.54)$$

حيث $\pi_0$ هو الشعاع الثنائي للقيود الواردة في (2.50) و$\mu$ هو الشعاع الثنائي للقيد (2.51) وتكون التكلفة المخفضة:

$$(\mathrm{c} - \; \pi_0 A_1)x^j - \mu\partial_j . \qquad (2.55)$$

للعثور على العمود الداخل وفقًا لقاعدة اختيار العمود المعتادة (أي التكلفة المنخفضة الأكثر سلبية) نحتاج

$$min_j\{(c-\ \pi_0 A_1)x^j - \mu\partial_j\} \qquad (2.56)$$

هذا يعادل حل LP التالي:

تدنية $(\mathrm{c}-\ \pi_0 A_1)x$

يخضع الى

$$A_2 x =\ b_2 \qquad (LP5)$$
$$x\ \geq 0.$$

(a) يسمى LP5 المشكلة الفرعية. ثلاث حالات قد تؤدي إلى:

تسفر المشكلة الفرعية عن حل مثالي $x^*$بحيث:

$$(\mathrm{c}-\ \pi_0 A_1)x^* >\ \mu\partial_j \qquad (2.57)$$

في هذه الحالة لا توجد أعمدة داخلة في المشكلة الرئيسية LP4، مما يعني بدوره أن LP4 هو الحل الأمثل أو غير الممكن. (Jeong & Leon, 2002)

(b)تسفر المشكلة الفرعية عن حل مثالي x * وتجتاز اختبار الترشيح المعطى بواسطة (2.58).

$$(c-\ \pi_0 A_1)x^* <\ \ \mu\partial_j \qquad (2.58)$$

يتم تحديد العمود الداخل المطلوب بواسطة (2.59).

$$\begin{bmatrix} cx^* \\ A_1 x^* \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.59)$$

(c) المشكلة الفرعية غير مقيدة من الأسفل والتي تسهل من حل متجانس x * يرضي $(c-\ \pi_0 A_1)x^* <\ \ 0$ يمكن الحصول عليه. يتم إعطاء عمود الإدخال في LP4 بواسطة

$$\begin{bmatrix} cx^* \\ A_1\ x^* \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

تسمى هذه الأعمدة التي تدخل في المشكلة الرئيسية الناتجة عن حل المشكلة الفرعية بالمقترحات.

### 6.5.3. خوارزمية D–W لمشاكل نموذج الزاوية

يكون لنموذج الزاوية LP مع R قيد الشكل:

بتدنية: $z =\ \sum(c_r x_r)$ (2.61)

بقيود:

$$\sum (A1_r x_r) = \quad b_0 \qquad (2.62)$$

$$A2_r x_r = \quad b_r \qquad r = 1, \dots ; R \qquad (2.63) \; (LP6)$$

$$x_r \geq \quad 0 \; r = 0, \dots , R \qquad (2.64)$$

حيث $c_r$ هو 1 بواسطة $n_r$، $b_r$ هو $m_r$ بواسطة 1 وكل المتجهات والمصفوفات الأخرى ذات أبعاد مناسبة.

ويظهر في الشكل 38 مشكلة نموذج الزاوية.

**الشكل38 : برنامج خطي لنموذج الزاوية**

| $x_0$ | $x_1$ | ………… | $x_r$ | |
|---|---|---|---|---|
| $c_0$ | $c_1$ | ………… | $c_r$ | |
| $A1_0$ | $A1_1$ | ………… | $A1_r$ | $b_0$ |
| | $A2_1$ | | | $b_1$ |
| | | $\ddots$ | | $\vdots$ |
| | | | $A2_r$ | $b_r$ |

**المصدر**: (K, P, & Sundarraj, 1989)

على افتراض أن كل نموذج من القيود (2.62) و (2.63) ممكن حله، فإن قيود $m_0$ في (2.62)، والتي تسمى قيود الاقتران (تحتوي كل متغيرات القيود)، ستستخدم لتحديد مشكلة رئيسية والتي كما سنرى لاحقًا تختلف عن LP4 من ناحيتين:

(a) يحتوي على R سطر محدب، واحد لكل نموذج أو نموذج فرعي.

(b) كل نموذج ممثل بمجموعة منفصلة من ß's.

في دورة k من الخوارزمية، تحدد المشكلة الرئيسية الأسعار $\pi_{0k}$ على القيود (2.62) و (2.63). باستخدام هذه الأسعار، يمكن تعريف مشكلة فرعية من الحزمة r في الدورة k بواسطة

**تدنية:** $$v_{rk} = (c_r - \pi_{0k} \, A1_r) x_r \qquad (2.65)$$

**بقيود:**

$$A2_r x_r = \; b_r \qquad (LP7_{rk}) \qquad (2.66)$$

$$x_r \geq 0 \quad (2.67)$$

$(LP7_{r^k})$ لديه إما حل نقطة حدية أو شعاع حدي. في كلتا الحالتين، إذا كان الحل $x_r{}^{*k}$ اجتياز اختبار الاقتراح، يمكن تعريف الاقتراح $k_r{}^{th}$ الذي تم إنشاؤه بواسطة نموذج r في الدورة k للمشكلة الرئيسية على أنه :

$$\begin{bmatrix} p_r^{kr} \\ q_r{}^{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r x_r^{*k} \\ A1_r x_r^{*k} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

تمثل جميع المقترحات من نموذج r بمثابة مصفوفة، لدينا

$$\begin{bmatrix} p_r^{kr} \\ Q_r^{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_r^1, \dots, p_r^{kr} \\ q_r^1, \dots, q_r^{kr} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

ليتم الحصول على المشكلة الرئيسية $(LP8^k)$ الموضحة أدناه من (2.61) و (2.62) عن طريق استبدال $x_0 r = 1, \dots, R,$ بتركيبات محدبة من المقترحات.

**تدنية:** $$z^k = c_0 x_0 + \sum (p_r{}^{kr} ß_r{}^{kr}) \quad (2.70)$$

**بقيود:**

$$A1_0 x_0 + \sum \left( Q_r{}^{kr} ß_r{}^{kr} \right) = b_0 \quad (2.71) \quad (LP8^k)$$

$$\partial_r{}^{kr} ß_r{}^{kr} = 1 \quad (2.72)$$

$$x_0 \geq 0. \quad ß_{r^{kr}} \geq 0; r = 1, \dots . R \quad (2.73)$$

حيث $[ß_{r^1}, \dots., ß_{r^{kr}}] = ß_{r^{kr}}$ مع $ß_{r^1}$ كونه رتبة الاقتراح $l^{th}$ من النموذج r؛ و= $\partial_r{}^{kr}$ $[\partial_r{}^1, \dots, \partial_r{}^{kr}]$ مع $\partial_r{}^1$ كونه واحد إذا كان الاقتراح $l^{th}$ يتوافق مع نقطة حدية أو صفر خلاف ذلك. وأخيرا، نلاحظ الشعاع الثنائي من $(LP8^k)$ بواسطة $[\pi_{0^k}, \mu_1{}^k, \dots, \mu_R{}^k]$ حيث يتوافق $\pi_{0^k}$ مع قيود الاقتران (2.71) و $\mu_r{}^k$ مع القيود المحدبة $r^{th}$ في (2.72). يمكن الآن وصف الخوارزمية التي تتكون من ثلاث مراحل.

**المرحلة 1 (امكانية الحل):**

الخطوة 1: (امكانية حل كل نموذج). حل المشكلة الفرعية ($LP7_{rk}$) لـ r = 1 إلى R. إذا كانت إحدى المشاكل الفرعية غير ممكنة، فإن المشكلة بأكملها غير ممكنة؛ وبالتالي توقف. بخلاف ذلك، يتم توليد اقتراح للمشكلة الرئيسية ($LP8^1$).

الخطوة 2: (جدوى قيود الاقتران). نستخدم المرحلة 2 لتقليل مجموع نقاط الضعف في ($LP8^1$). إذا كانت القيمة المثلى موجبة فإن المشكلة غير ممكنة؛ وبالتالي نتوقف. خلاف ذلك، يتم استعادة دالة الهدف الأصلية والانتقال إلى المرحلة 2.

**المرحلة 2 (للحصول على الأمثلية):**

الخطوة 0: اضبط k على 1 إذا كانت دالة الهدف هي مجموع نقاط غير ممكنة الحل. إذا كان الهدف هو الأصلي، فقم بتعيين $z'^{k-1}$ كحد أدنى على القيمة المثلى لدالة الهدف.

الخطوة 1: حل المشكلة الرئيسية الحالية ($LP8^k$). إذا كان غير محدود، فإن المشكلة الأصلية غير محدودة. وبالتالي نتوقف. بخلاف ذلك، ندخل الشعاع الثنائي $[\pi_{0^k}, \mu_r{}^k]$ إلى مشكلة فرعية من r = 1 إلى R.

الخطوة 2: حل المشكلة الفرعية ($LP7_{rk}$). استخدم اختبار الترشح في (2.74) لتحديد ما إذا كان يمكن توليد اقتراح وفقًا لـ (2.68) للمشكلة الرئيسية.

$$v_{r^*k} = \left(c_r - \pi_{0^k} A1_r\right) x^*{}_{rk} < \mu_{rk} \qquad (2.74)$$

الخطوة 3: (وقف المعيار). إذا لم يتم توليد أي اقتراح في الخطوة 2 من المرحلة 2، فنتوقف. إذا كانت دالة الهدف هي مجموع نقاط غير ممكنة الحل، فنقوم بإنهاء الخطوة 2 من المرحلة 1. وإلا ننتقل إلى المرحلة 3. إذا تم تحسين جميع المشاكل الفرعية ودالة الهدف الأصلية، فنقوم بتحديث الحد الأدنى على القيمة المثلى وفقًا لما يلي:

$$z'^k = \max(z'^{k-1}, z^k + \sum(v_r{}^{*k} - \mu_r{}^k)) \qquad (2.75)$$

إذا كانت $z^k - z'^k < \Delta$، حيث $\Delta$ صغير بعض الشيء وإيجابي يوفر للمستخدم تفاوت مقبول, فننتقل إلى المرحلة 3. وإلا نقوم بتعيين k إلى k + 1 وننتقل إلى الخطوة 1 من المرحلة 2.

**المرحلة 3 (لإعادة بناء الحل الابتدائي):**

الخطوة 1 (حساب التخصيص). ليكن الحل الأمثل لـ ($LP8^k$) هو $\left[z^{*k}؛ x_0{}^*, ß_1{}^{*k}، \dots، ß_R{}^{*k}\right]$ بحساب:

$;y_r = Q_r{}^{kr} ß_r{}^{*kr}$ من أجل: $r = 1, \dots\dots R$ و: (2.76)

يحدد لأجل $r = 1, \dots\dots R:$ :

**بتدنية:** $c_r x_r$

**بقيود:**

$$(LP9_r) \qquad A1_r x_r = y_r \qquad (2.77)$$

$$A2_r x_r = b_r$$

$$x_r \geq 0$$

الخطوة 2 (إعادة الصياغة). حل ($LP9_r$) لـ $X_r{}^*, r = 1, \dots, R.$ ثم $[X_0{}^*, X_1{}^*, \dots\dots, X_R{}^*]$ تشكل حلاً للمشكلة الأصلية ذات دالة الهدف $z^{*k}$.

هناك ثلاثة جوانب رئيسية في التصميم الفعال لنموذج التجزئة:

a. حل النموذج الرئيسي والمشاكل الفرعية مع RSM.

b. معالجة البيانات لتحديث وحل المشاكل الرئيسية والفرعية.

c. اتباع المنهجية الحسابية التي نوقشت سابقا.

زيادة قيود الاقتران للمشكلة فرعية:

تتغير دالة الهدف في المشكلة الفرعية من مرحلة إلى أخرى. ومع ذلك، مع نظام توليد الأعمدة للمصفوفات، فإنه ليس من المناسب حساب وتخزين قيم دالة الهدف بشكل مفصل مما قد يتضمن إدراج وحذف العناصر غير الصفرية. علاوة على ذلك، لتوليد اقتراح جديد نضرب $x_r$ بشكل مفصل في $A1_r$ يتطلب التمييز بين بيانات $A1_r$ و$A2_r$ المخزنة بشكل مدمج في هيكل البيانات المقترحة. كل من هذه الصعوبات يمكن التغلب عليها بالطريقة التالية:

في RSM تكون دالة الهدف مطلوبة فقط للعثور على التكلفة المخفضة. يمكن القيام بذلك إذا تم تنظيم المشكلة الثنائية كما هو موضح في الشكل 37. يظهر الأساس $B_r$، والمعكوس $B_r^{-1}$، المقابل لهذا الهيكل في الشكلين 38و 39على التوالي. يتم الآن تبيان خطوات تحليل RSM وD-W المتعلقة بهذا الهيكل على النحو التالي.

**الشكل39 : تنظيم مشكلة فرعية**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $c_r$ | | | |
| 0 | 1 . . . . 1 | 0 | $A1_r$ | : : | 0 | **القيود غير الملزمة** |
| 0 | 0 | 1 . . . . 1 | $A2_r$ | = | $b_r$ | |

المشكلة الفرعية الأساسية المشكلة الفرعية المهيكلة

**المصدر**: (K, P, & Sundarraj, 1989)

**الشكل40 : أساس المشكلة الفرعية.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $c_{rB}$ |
| 0 | 1 . . . . . . 1 | $B1_r$ |
| 0 | 0 | $B2_r$ |

**المصدر**: (K, P, & Sundarraj, 1989)

**الشكل 41: معكوس أساس المشكلة الفرعية.**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $-c_{rB}\ B2_r^{-1}$ |
| 0 | 1 . . . . . . 1 | $-B1_r\ B2_r^{-1}$ |
| 0 | 0 | $B2_r^{-1}$ |

**المصدر**: (K, P, & Sundarraj, 1989)

الخطوة 1 من RSM: (شعاع التكلفة الأساسية). تكلفة الأشعة الأساسية في مشكلة فرعية هي:

$$[1, -\pi_0{}^k, 0] \tag{2.78}$$

الخطوة 2 من RSM (الأسعار الثنائية) ناتج جداء (2.78) في المعكوس الوارد في الشكل 39 يعطي:

$$[1, -\pi_0{}^k, -\pi_r{}^k] \tag{2.79}$$

بحيث يتم تحديد الشعاع الثنائي، بإشارة سالبة، من خلال الخطوة الثالثة.

الخطوة 3 من RSM: (تخفيض التكاليف) ناتج جداء (2.79) مع العمود $j^{th}$ غير الأساسي للمصفوفة الواردة في الشكل 37 تعطي:. $c_j - \pi_r{}^k A1_{rj} - \pi_r{}^K A1_{rj}$. هذا يوضح تعريف تخفيض التكلفة المطلوب.

توليد اقتراحات النقط الحدية:

قبل ضرب معكوس الأساس بشعاع الجانب الأيمن $[0,0,b_r]^t$، ينتج:

$$\begin{bmatrix} -c_{rB}\ B2_r^{-1}\ b_r \\ -B1_r\ B2_r^{-1}\ b_r \\ B2_r^{-1}\ b_r \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

حيث يحتوي المكونان الأولان على اقتراح النقطة الحدية المطلوب المحدد في (2.68) بحيث $B2_r^{-1}\ b_r$ يعتبر الحل الحالي للنقطة الحدية.

توليد اقتراحات الأشعة الحدية: يتم الحصول على حلول الأشعة الحدية إذا تم العثور على عمود الدخول غير محدود. نفترض العمود j، والذي يمكن كتابته كـ $\left[c_{rj}, A1_{rj}^{t}, A2_{rj}^{t}\right]^{t}$ بمعنى غير محدود، ثم نضرب في معكوس الأساس لينتج:

$$\begin{bmatrix} c_{rj} \ - c_{rB}\ B2_r^{-1}\ A2_r \\ A1_{rj} \ - B1_r\ B2_r^{-1}\ A2_r \\ B2_r^{-1}\ A2_r \end{bmatrix} \qquad (2.81)$$

الشعاع الحدي (حل متجانس لـ (2.63) و (2.64)) من خلال إعداد :

$$y_j = 1;$$

$$y_s = -u_i\left[B2_r{}^{-1}A2_{rj}\right]$$ إذا كان $X_s$ أساسي في الصفi ,

$$y_s = 0,.$$ خلاف ذلك.

$u_i$ هو شعاع سطر الوحدة $i^{th}$. باستخدام هذا الحل في (2.68) نرى أن الشعاع الحدي المقترح المطلوب تم تقديمه بواسطة المكونان الأولان من (2.81).

باعتبار (2.80) و (2.81) يتبين أن كل من النقطة الحدية والشعاع الحدي المقترحين يمكن الحصول عليها من البيانات التي تحتفظ بها RSM للمشكلة الفرعية كما هو موضح أعلاه. في الحالة الأولى، اقتراح (تحديد الاشارة) نجده في rhs المحين. في الحالة الثانية، يوجد في العمود المقترح المحين.

### 2.6.3 محاولات لتحسين الخوارزمية:

هذه التحسينات في الخوارزمية الأساسية تهدف إلى تسريع التقارب. لكن لا يمكن ضمان فوائدها نظريا.

وسيط مرحلة توليد العمود:

نظرًا لأن أي حل للمشكلة الفرعية التي تجتاز اختبار الاقتراح الذي تناوله (2.74) يمكن أن يؤدي إلى تحسن في المشكلة الرئيسية، ويمكن استخدامه لتوليد العمود. هذا يسمح بإمكانية الحصول على العديد من الأعمدة من مشكلة فرعية أثناء مرحلة واحدة. كما أظهرت التجربة التطبيقية (LK. Ho and E. Loute، 1981) أن هذه الاستراتيجية يمكن أن تسرع التقارب بشكل كبير. تعتمد الدراسة على آلية للتحكم في توليد الأعمدة على ثلاثة عوامل: – التحكم في التكرار. – تحسن نسبي لتخفيض تكلفة الاقتراح المحتمل؛

- إجمالي عدد الأعمدة التي تم توليدها.

يحدد المستخدم أربعة معلمات: $q_{freq}$، $q_{perc}$، $q_{max}$ و$q_{intr}$. يتم توليد العمود بمجرد اجتياز الحل الحالي لاختبار الاقتراح. ثم يتم توليد الأعمدة في كل تكرارات $q_{freq}$ أو كلما تم تحسين التكلفة المخفضة للعمود المقترح بواسطة $q_{perc}$. لا يتم اقتراح أكثر من $q_{max}$ عمود، إلى البرنامج الرئيسي. يتم توقيف المرحلة الحالية بمجرد توليد إجمالي الأعمدة $q_{intr}$ بواسطة كافة النماذج الفرعية أثناء المرحلة الحالية.

توقيف المراحل:

لا يتم فقدان تقارب خوارزمية التجزئة في حالة توقيف المرحلة. في الواقع، سنرى كيف يمكن أن يكون توقيف المرحلة مفيدًا في بعض الحالات. يمكن توقيف المرحلة لأي من الأسباب التالية:

1. كما هو موضح أعلاه، يتم توقيف المرحلة إذا تم توليد مجموعة من الأعمدة $q_{intr}$ أثناء حل النموذج الفرعي. في المرحلة التالية، نبدأ بالنموذج الفرعي التالي. يتم ذلك لإعطاء جميع النماذج الفرعية فرص متساوية لتوليد الأعمدة.
2. لكن في كثير من الأحيان قد يكون من المفيد تفضيل بعض النماذج الفرعية لتوليد الأعمدة أكثر من غيرها. يتم ذلك إذا كانت بعض المعلومات بطبيعة المشكلة تشير إلى أن بعض النماذج الفرعية من المحتمل أن تكون أكثر نشاطًا في توليد الأعمدة من غيرها. في هذه الحالة، يتم توقيف المرحلة ما إذا كان النموذج الفرعي غير مثالي وقد أدى إلى توليد الأعمدة $q_{max}$. تبدأ المرحلة التالية بنفس النموذج الفرعي.

المرحلة النهائية لتوليد العمود.

يوجد النموذج الفرعي في مرحلته النهائية إذا تحققت الأمثلية أو إذا تم اكتشاف عمود غير محدود. إذا كان النموذج الفرعي هو الأمثل، يتم توليد عمود واحد يتوافق مع النقطة الحدية للحل الأمثل. عندما يكون غير محدود، يتم توليد عمودين مترافقان. عمود الأول هو من مولد الأشعة الحدية التي تسببت في عدم التحديد والثاني هو من النقطة الحدية المقابلة للحل الفعلي الحالي الممكن. لاكتشاف أشعة حدية أخرى، يتم تثبيت العمود الذي يسبب عدم التحديد عند الصفر واستمرار تحسين النموذج الفرعي المقيد. ولتحسين الاقتراح، يجب إزالة الأعمدة غير النشطة فيه بشكل دوري للحفاظ على متطلبات التخزين في حدود مقبولة. نظرًا لتزايد حجم المشكلة الرئيسية بإضافة أعمدة جديدة

**الخلاصة:**

في الفصل الثالث حاولنا وصف إشكالية الدراسة التطبيقية من عدة جوانب، من حيث الصياغات المختلفة لنماذج الشبكات في حالة التدفقات المتعددة، إضافة الى عرض أداة الدراسة المستخدمة. في حالة التعامل مع نماذج كبيرة الحجم من حيث المتغيرات والقيود، خاصة عندما تكون التدفقات متعددة خلال مسارات الشبكة. يصعب حل هذا النوع من النماذج بل يستحيل إذا ما اعتمدنا على الطرق الكلاسيكية. لهذا نلجأ الى طريقة تجزئة Dantzig-Wolfe التي تجسد منهج فعال للحل باستخدام توليد الأعمدة، في هذه الطريقة نحتاج الى تهيئة نموذج ملائم لتطبيق توليد الأعمدة. بعد حل البرنامج المقيد المعرف بمتغيرات أقل حجما، يمكننا التأكد من أمثلية الحل من خلال النموذج الفرعي، مما يسهل على الباحث عملية الحل والبحث عن الأمثلية بصفة مبسطة. تتمثل إحدى الطرق لحل مشكلة الحد الأدنى لتدفق التكلفة في طريقة simplex التي يتم تنفيذها لاستغلال بنية تدفق الشبكة الأساسية، وخاصة تفسير الشجرة الممتدة لأي أساس برمجة خطي. طريقة تقسيم الأساس لحل مشكلة التدفق متعدد السلع هي تعميم لهذا النهج. ويستخدم حقيقة أن أي أساس للبرمجة الخطية لمشكلة تدفق السلع المتعددة يحتوي على أساس لكل سلعة. وبالتالي، من خلال تغيير المتغيرات، يمكن تحويل أي أساس للمشكلة إلى أساس لكل سلعة وكذلك أساس عمل صغير لقيود البرنامج التي تحتوي على معلومات حول التنسيق بين السلع الفردية. تسمح هذه الطرق بحل مشكلة التدفق متعدد السلع من خلال الجمع بين طريق الشبكة البسيط الخاص لكل سلعة مع حسابات مصفوفيه للبرمجة الخطية الأكثر عمومية كما سيتم تطبيقها لاحقا.

# الفصل الرابع
# تطبيق الطريقة وتحليل النتائج

- تمهيد
- تطبيق برنامج أداة الدراسة
- تحليل نموذج الدراسة الميدانية
- صياغة نموذج الدراسة
- تحديد الخوارزمية المستعملة في برنامج الحل
- تحليل نتائج الدراسة
- مناقشة نتائج الدراسة

## تمهيد:

بعد التطرق الى أهم المفاهيم النظرية في الجانب النظري، وعرض الإشكالية الميدانية وطرق الصياغات المختلفة لنموذج التدفق متعدد السلع، إضافة الى شرح طريقة أداة الدراسة في الجانب التطبيقي، نحتاج في هذا الفصل الى محاولة تطبيق أداة الدراسة على الإشكالية الميدانية. من خلال صياغة النموذج الخطي المطلوب استعماله في الخوارزمية، والاعتماد على برنامج الحاسوب GAMS الذي يحتوي على عدد معتبر من الخوارزميات المطبقة، ما يمكننا من اختيار الطريقة المناسبة والتعديل عليها في الخوارزمية حسب معطيات الدراسة الميدانية. التي توضح شبكة مسارات من طرق وطنية تربط بين عقد المصدر والمصب لتدفق السلع المتعددة.

## 1.4 تطبيق برنامج أداة الدراسة:

### 1.1.4 طريقة توليد الأعمدة باستعمال برنامج GAMS

تمثل طريقة توليد الأعمدة تقنية حل كلاسيكية لمشاكل البرمجة الخطية المعقدة. سنشرح في هذا الجزء كيف يمكن تنفيذ طريقة توليد الأعمدة في برنامج GAMS على بيانات الدراسة. حيث تحتوي لغة برمجة GAMS ما يكفي من شيفرات مختلفة لتكون قادرة على تنفيذ خوارزميات معقدة إلى حد ما مع توفرها على العديد من التطبيقات لتحليل عدة نماذج رياضية مختلفة. طريقة توليد الأعمدة تعتبر أداة مهمة لحل النماذج الهيكلية الكبيرة التي لا يمكن حلها باستخدام خوارزمية Simplex البسيطة لأنها تجاوزت قدرة تلك التقنيات. مع الجيل الحالي من البرامج والتقدم الهائل في الأجهزة القياسية (سواء من حيث سرعة وحدة المعالجة المركزية الخام وتوافر كميات كبيرة من الذاكرة)، أصبحت خوارزمية طريقة توليد الأعمدة أسهل استخداما.

في هذا التطبيق نقوم بدراسة حسابية عند تطبيق التجزئة على مشاكل الشبكة متعددة السلع.

باعتبار البرنامج الخطي:

$$\text{Min } c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

حيث A له هيكل خاص:

$$Ax = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_k \\ A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

القيود

$$\sum_{p=0}^{p} B_p x_p = b_0$$

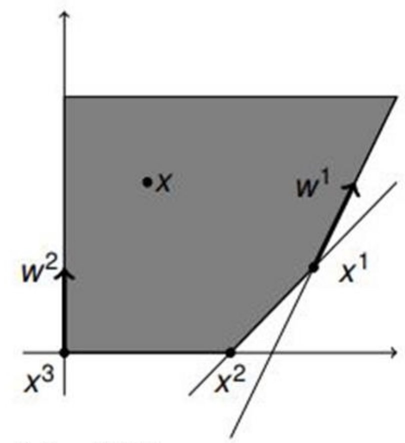
نعتمد تقنية Dantzig-Wolfe في تجزئة هذا النموذج، بحيث لا يتم حل النموذج كاملا مع تضمين جميع النماذج الفرعية $A_p x_p = b_p$. بدلاً من ذلك، يتم وضع نموذج رئيسي يركز فقط على قيود الاقتران، ويتم حل النماذج الفرعية بشكل فردي. ونتيجة لذلك، لا يلزم حل سوى سلسلة من النماذج الأصغر.

نعتبر منطقة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي:

نظرية مينكوفسكي: كل منطقة حلول ممكنة F لبرنامج خطي يمكن صياغتها باستخدام نقاطها وأشعتها الحدية.

$$F = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$$

الشكل 42: تمثيل بياني يوضح نظرية مينكوفسكي




- النقط الحدية: $x^1, x^2, x^3$
- الأشعة الحدية: $w^1, w^2$
- $x = \lambda x^2 + (1-\lambda)x^3 + \mu w^2, 0 \leq \lambda \leq 1, \mu \geq 0$

**المصدر**: (Papavasiliou، 2018)

إذا كانت F مقيدة، فيمكننا وصف أي نقطة $x \in F$ كمجموعة خطية من نقاطها الحدية $x^{(j)}$:

$$x = \sum_j \lambda_j x^{(j)}$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

إذا لم يكن من الممكن افتراض أن منطقة الحلول الممكنة مقيدة، فنحن بحاجة إلى التحويل التالي:

$$x = \sum_j \lambda_j x^{(j)} + \sum_i \mu_i r^{(i)}$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\mu_i \geq 0$$

حيث $r^{(i)}$ هي الأشعة الحدية لـ F.

يُعرف القيد1= $\sum_j \lambda_j$ (.convexity constraint). القيود المحدبة التي تقع كل نقاطها في منطقة الحلول الممكنة. حيث $\lambda_j$ يمثل معاملات النقاط الحدية التي تحقق هذا الشرط.

A تستخدم الصيغة التالية :

$$x = \sum_j \lambda_j x^{(j)}$$

$$\sum_j \delta_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

حيث

$$\delta_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- إذا كانت $x^{(j)}$ نقطة حدية
- إذا كانت $x^{(j)}$ شعاعًا حديا

يمكننا صياغة المشكلة باستخدام المتغيرات $\lambda$ بدلاً من المتغيرات الأصلية x. في التطبيق العملي، لا يمكن تطبيق إعادة الصياغة هذه مباشرة، حيث يصبح عدد المتغيرات $\lambda_j$ كبيرًا جدًا. لذلك نقوم بتطبيق مبدأ التجزئة للنموذج كما يلي:

قيود النماذج الفرعية P

$$A_p x_p = b_p$$

$$x_p \geq 0$$

بينما تتميز المشكلة الرئيسية بالمعادلات:

$$\min \sum_p c_p^T x_p$$

$$\sum_p B_p x_p = b_0$$

$$x_0 \geq 0$$

يمكننا استبدال المعادلات، مما ينتج عنه:

$$\min c_0^T x_0 + \sum_{p=1}^{p} \sum_{j=1}^{p_p} \left( c_p^T x_p^{(j)} \right) \lambda_{p,j}$$

$$B_0 x_0 + \sum_{p=1}^{p} \sum_{j=1}^{p_p} \left( B_p x_p^{(j)} \right) \lambda_{p,j} = b_0$$

$$\sum_{j=1}^{Pp} \varepsilon_{p,j} \, \lambda_{p,j} = 1 \ \left( \text{من أجل } \mathrm{P} = 1, \ldots., \mathrm{P} \right)$$

$$x_0 \geq 0$$

$$\lambda_{p,j} \geq 0$$

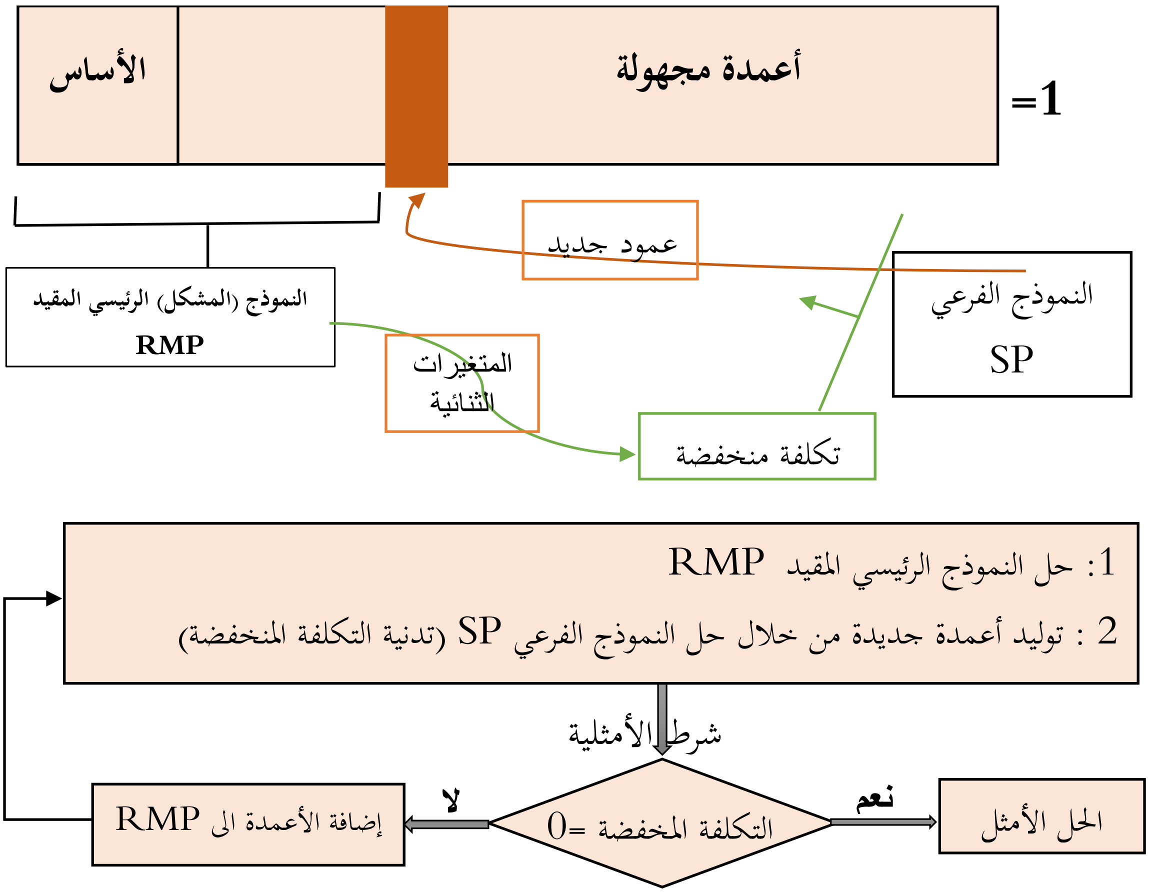
هذا النموذج يمثل برنامج خطي كبير. على الرغم من تقليل عدد الصفوف، فإن عدد النقاط والأشعة الحدية $x_p^{(j)}$ لكل مشكلة فرعية كبير جدًا، مما ينتج عنه عدد هائل من المتغيرات $\lambda_{p,j}$ ومع ذلك ، فإن العديد من هذه المتغيرات ستكون غير أساسية عند القيم المعدومة، ولا يلزم أن تكون جزءًا من المشكلة. الفكرة هي أن المتغيرات فقط ذات التكلفة المنخفضة ستؤخذ في الاعتبار فيما يعرف أيضًا باسم خوارزمية توليد العمود المتأخر. ويمكن كتابة النموذج بعدد قليل من المتغيرات $\lambda$ (Kalvelagen، 2009)

$$c_0^T x_0 + c^T \lambda'$$
$$B_0 x_0 + B\lambda' = b_0$$
$$\Delta\lambda' = 1$$
$$x_0 \geq 0$$
$$\lambda' \geq 0$$

النموذج الأخير يدعى النموذج (المشكل) الرئيسي المقيد يرمز له ب $RMP$

يتم حل هذا النموذج عدة مرات وفي كل مرة نقوم بإضافة المتغيرات (الأعمدة) لهذا النموذج خلال كل خطوة من الخوارزمية. حيث تولد هذه المتغيرات من خلال البرنامج (المشكل) الفرعي $SP$. كما هو موضح في الشكل التالي:

**الشكل 43: مراحل الحل في طريقة التجزئة**




**المصدر:** (Soumis, 2013)

المتغيرات $\lambda_{p,j}$ يمكن قياسها بتكلفتها المخفضة. بالإشارة إلى المتغيرات الثنائية للقيد

$$B_0 x_0 + B\lambda' = b_0 \quad \text{بـ} \quad \pi_1$$

وتلك الخاصة بقيود التحدب $\pi_2^{(p)}$ ب $\sum_j \delta_{p,j}\lambda_{p,j}=1$, ثم خفض تكلفة المشكلة الرئيسية كما يلي:

$$\sigma_{p,j} = \left(c_p^T x_p^{(j)}\right) - \pi^T \begin{pmatrix} B_p x_p^{(j)} \\ \delta_{p,j} \end{pmatrix} = \left(c_p^T - \pi_p^T B_p\right) x_p^{(j)} - \pi_2^{(p)} \delta_{p,j}$$

بافتراض أن المشكلة الفرعية محصورة، فإن (الحل الأساسي الممكن) $x_p$ لإدخاله في المشكلة الرئيسية يتم تحديده من خلال تعظيم التكلفة المخفضة مع إعطاء LP التالي:

$$\min_{x_p} \sigma_p = \left(c_p^T - \pi_1^T B_p\right) x_p - \pi_2^{(p)}$$

$$B_p x_p = b_p$$

$$x_p \geq 0$$

غالبًا ما تسمى عملية تحديد هذه التكاليف المخفضة **بالتسعير**. إذا كانت القيمة $\sigma_p^* < 0$ ، فيمكننا ادخال عمود جديد $\lambda_{p,j}$ إلى البرنامج الرئيسي، بمعامل تكلفة $c_p^T x_p^*$.

### 2.4 تحليل نموذج الدراسة الميدانية:

الدراسة الميدانية تمثل نموذج شبكة وطنية بين عدة ولايات من بينها 3 ولايات تعتبر مصادر التوزيع، التي تحتوي على مخازن السلع المختلفة، هذه المخازن موجهة الى توزيع السلع عبر الشبكة الى 7 مناطق أساسية تمثل ولايات مختلفة، وتعتبر المصب في الشبكة. لتكون كميات العرض حسب الطلبيات المقدمة للشركة:

جدول 3: كميات الطلب على السلع:

| الطلب | ZN1 | ZN2 | ZN3 | ZN4 | ZN5 | ZN6 | ZN7 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Labtop | 70 | 60 | 75 | 75 | 50 | 70 | 100 | 500 |
| telphn | 250 | 180 | 280 | 220 | 270 | 250 | 350 | 1800 |
| Tablet | 100 | 100 | 40 | 150 | 120 | 80 | 150 | 740 |

المصدر: بيانات الشركة

جدول 5: كميات العرض على السلع:

| العرض | ORAN | ALGR | HMSD | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| Labtop | 120 | 200 | 180 | 500 |
| telphn | 550 | 650 | 600 | 1800 |
| Tablet | 190 | 230 | 320 | 740 |

المصدر: بيانات الشركة

نلاحظ تساوي كميات العرض والطلب والذي يعتبر من بين شروط نماذج النقل. وشرط لتلبية الطلبيات.

### 1.2.4 مسارات الشبكة المستخدمة في النموذج:

تسعى الشركة الناقلة الى توزيع كميات العرض المتوفرة في 3 مناطق تعتبر مصدر التدفقات (وهران، العاصمة، وحاسي مسعود)، يتم توزيعها على 7 مناطق مختلفة تعتبر مصب التدفقات، حسب الطلبيات المتوفرة لدى الشركة. يمكن اقتراح كل المسارات بدون استثناء. الشبكة الوطنية المعتمدة للتوزيع موضحة في الشكل التالي:

**الشكل 44: مسارات الشبكة المستخدمة في النموذج**


المصدر: بيانات الشركة

**تكاليف النقل بالنسبة لمسارات الشبكة:**

تم تحديد تكاليف النقل حسب عدة معايير متعلقة بالشركة فقط، ولذلك هذه التكاليف ليست معيارية فلا يمكن تعميمها على شركات أخرى. بحيث تختلف تكاليف النقل الوحدوية بالنسبة لعدة عوامل من بينها:

نوع السلعة، طول مسافة المسار، نوع المركبة الناقلة، أجرة سائق المركبة، تكاليف الصيانة، نوع الوقود ...

تكاليف النقل المختلفة حسب كل مسار وبالنسبة لكل سلعة موضحة في الجداول التالية:

جدول 5: تكاليف نقل الحاسوب المحمول عبر مختلف المسارات:

| Labtop | تلمسان | معسكر | شلف | الجلفة | سطيف | قسنطينة | الوادي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ZN1 | ZN2 | ZN3 | ZN4 | ZN5 | ZN6 | ZN7 |
| وهران | 250 | 200 | 300 | 550 | 1100 | 1300 | 1650 |
| العاصمة | 950 | 750 | 350 | 450 | 350 | 500 | 950 |
| حاسي مسعود | 1750 | 1550 | 1350 | 500 | 700 | 700 | 400 |

المصدر: بيانات الشركة

جدول 6: تكاليف نقل الهواتف النقالة عبر مختلف المسارات:

| Telphn | تلمسان | معسكر | شلف | الجلفة | سطيف | قسنطينة | الوادي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ZN1 | ZN2 | ZN3 | ZN4 | ZN5 | ZN6 | ZN7 |
| وهران | 150 | 100 | 200 | 450 | 950 | 1100 | 1300 |
| العاصمة | 800 | 550 | 200 | 350 | 250 | 400 | 700 |
| حاسي مسعود | 1450 | 1250 | 1050 | 400 | 600 | 600 | 300 |

المصدر: بيانات الشركة

جدول 7: تكاليف نقل اللوحات الالكترونية عبر مختلف المسارات:

| Tablet | تلمسان | معسكر | شلف | الجلفة | سطيف | قسنطينة | الوادي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ZN1 | ZN2 | ZN3 | ZN4 | ZN5 | ZN6 | ZN7 |
| وهران | 250 | 150 | 250 | 500 | 1150 | 1250 | 1550 |
| العاصمة | 900 | 750 | 250 | 350 | 350 | 500 | 850 |
| حاسي مسعود | 1600 | 1400 | 1100 | 450 | 650 | 650 | 350 |

المصدر: بيانات الشركة

### 2.2.4 صياغة نموذج الدراسة:

صياغة النموذج لمشكلة التدفقات المتعددة السلع.

$CV_{ij}^{p}$ : التكلفة المتغيرة بالنسبة لكل مسار (i j) وحسب كل نوع من السلع p.

$x_{ij}^{p}$ : تمثل التدفقات المختلفة لكل مسار (i j)

حيث أن: i ترمز للمصدر و j ترمز للمصب (الوجهة) أما p فترمز الى نوع السلعة.

تدنية:

$$\sum_{p\epsilon P}\sum_{ij\epsilon A} CV_{ij}^{p} x_{ij}^{p}$$

القيود

تدفق السلع:

$$\sum_{i,j\in N} x_{ij}^{p} - \sum_{j,i\in N} x_{ji}^{p} = \begin{cases} \omega^{p} & i = s^{p}, \\ \omega^{p} & i = d^{p}, \quad \forall i \in N, \forall p \in P, \\ 0\ sinon, & \end{cases}$$

القيود المفروضة على القدرات:

$$\sum_{p\epsilon P} x_{ij}^{p} \le u_{ij} \qquad \forall (ij) \in A,$$

فضاء المتغيرات:

$$x_{ij}^{p} \ge 0, \quad \forall (ij) \in A, \qquad \forall k \in P,$$

الهدف هو تقليل تكاليف النقل. مع قيود الحفاظ على التدفق وتلبية الطلبات. حيث يتم ضمان احترام قدرات المسار.

في هذا السياق، تسعى مشكلة الحد الأقصى متعدد التدفق إلى تدنية تكاليف النقل وتعظيم مجموع تدفقات كل سلعة التي يمكن توجيهها في G مع احترام السعات. تمت صياغة هذه المشكلة على شكل البرنامج الخطي التالي:

يمكن تحديد مشكلة تدفق الشبكة متعددة السلع على النحو التالي:

$$\min \sum_{p\in P} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}^{p} x_{i,j}^{p}$$

$$\sum_{i,j\in N} x_{ij}^{p} - \sum_{j,i\in N} x_{ji}^{p} = b_j^p$$

$$\sum_{p\in P} x_{i,j}^{p} \le u_{i,j}$$

$$x_{i,j}^{p} \ge 0$$

يدعى هذا النوع من النمذجة، صياغة (عقدة–مسار).

تجزئة Dantzig-Wolfe تبين منهجية حل مناسبة لهذا النوع من الصياغة. حيث يتم إنشاء مشكلة فرعية لكل سلعة.

نعتبر هنا مشكلة نقل متعددة السلع:

$$\min \sum_{p\in P} \sum_{(i,j)} c_{i,j}^{p} x_{i,j}^{p}$$

$$\sum_{j} x_{i,j}^{p} = \text{العرض}_i^p$$

$$\sum_{i} x_{i,j}^{p} = \text{الطلب}_j^p$$

$$\sum_{p\in P} x_{i,j}^{p} \le u_{i,j}$$

$$x_{i,j}^{p} \ge 0$$

### 3.2.4 خوارزمية التجزئة:

في هذا القسم، تُقدم خوارزمية التجزئة، لِ Danzig وWolfe، والتي تعتبر تقنية أثبتت أهميتها وفعاليتها تسمى توليد الأعمدة. يمكن صياغة خوارزمية التجزئة Dantzig-Wolfe كما يلي:

تهيئة النموذج:

نبدأ بحل كل مشكلة فرعية:

$$\min C_p^T x_p$$
$$A_p x_p = b_p$$
$$x_p \geq 0$$

إذا كان أي من المشاكل الفرعية غير قابل للحل، فإن المشكلة الأصلية غير قابلة للحل أيضا. خلاف ذلك، يمكننا استخدام القيم المثلى $x_p^*$ (أو الأشعة) لتوليد مجموعة أولية من المقترحات (الأعمدة).

المرحلة 1 / 2 :

قد لا تلبي الاقتراحات الأولية قيود الاقتران. فيمكننا صياغة مشكلة المرحلة الأولى عن طريق إدراج متغيرات اصطناعية وتدنيتها. ويلاحظ أن التكلفة المخفضة لمشكلة المرحلة الأولى تختلف قليلاً عن مشكلة المرحلة الثانية.

اذا كانت قيود الاقتران من الشكل:

$$\sum_j x_j \leq b$$

يمكننا إضافة متغير اصطناعي $x_a \geq 0$ على النحو التالي:

$$\sum_j x_j - x_a \leq b$$

هدف المرحلة الأولى هو تدنية $x_a$

التكلفة المخفضة للمتغير $x_j$ ؛ عندما $c_p^T = 0$ .

تجدر الإشارة إلى أنه من المهم التخلص من المتغيرات الاصطناعية بمجرد بداية المرحلة الثانية. لذلك، نقوم في الخوارزمية بتثبيت المتغيرات الاصطناعية عند القيمة صفر.

### 3.4 تحديد الخوارزمية المستعملة في برنامج GAMS:

فيما يلي نوضح الخوارزمية المستعملة في برنامج GAMS لحل نموذج البرنامج الخطي بهدف تحديد التدفقات المتعددة السلع عبر كل مسار، مع تدنية تكاليف النقل لشبكة ذات مسارات محددة السعة.

#### 1– تسمية النموذج:

```
توليد الأعمدة
C o m p i l a t i o n


      نموذج شبكات بتدفقات متعددة باستخدام طريقة توليد الأعمدة
```

#### 2– تحديد المسارات وكمية العرض والطلب للسلع المتعددة:

```


sets
  i  'origins'       /ORAN, ALGR, HMSD /
  j  'destinations'  /ZN1, ZN2, ZN3, ZN4, ZN5, ZN6, ZN7 /
  p  'products'      /Labtop, telphn, Tablet/
;

table supply(p,i)
           ORAN   ALGR   HMSD
   Labtop   120    200    180
   telphn   550    650    600
   Tablet   190    230    320
;

table demand(p,j)
           ZN1   ZN2   ZN3   ZN4   ZN5   ZN6   ZN7
   Labtop   70    60    75    75    50    70   100
   telphn  250   180   280   220   270   250   350
   Tablet  100   100    40   150   120    80   150
;

```

### 3– تحديد السعة القصوى لمجموع تدفقات المسار:

تم تحديد السعة القصوى لمجموع تدفقات المسار بقدر 290 وحدة منقولة، وذلك بسبب القدرة المحدودة لحمولة المركبات الناقلة، باعتبارها تنقل سلع أخرى غير التي يتم دراستها، لذلك خصصت الشركة جزء محدد في المركبة لتلبية الطلبيات، طاقة استيعابه لا تزيد عن 290 وحدة.

```
parameter limit(i,j);
limit(i,j) = 290;

```

### 4– تحديد تكاليف النقل لكل سلعة عبر مسارات الشبكة:

يتم تحديد تكاليف النقل عبر كل المسارات الموجودة في الشبكة كما هو موضح في الخوارزمية التالية:

```
table cost(p,i,j) 'unit cost'
                ZN1  ZN2  ZN3  ZN4  ZN5  ZN6  ZN7
  Labtop.ORAN   250  200  300  550 1100 1300 1650
  Labtop.ALGR   950  750  350  450  350  500  950
  Labtop.HMSD  1750 1550 1350  500  700  700  400

  telphn.ORAN   150  100  200  450  950 1100 1300
  telphn.ALGR   800  550  200  350  250  400  700
  telphn.HMSD  1450 1250 1050  400  600  600  300

  Tablet.ORAN   250  150  250  500 1150 1250 1550
  Tablet.ALGR   900  750  250  350  350  500  850
  Tablet.HMSD  1600 1400 1100  450  650  650  350
;


```

### 5– صياغة البرنامج الخطي العام:

ترميز المتغيرات وتحديد دالة الهدف وقيود العرض والطلب، مع القيد الذي يوضح القدرة الاجمالية لمجموع تدفقات المسار.

```
*----------------------------------------------------------------------------
* صياغة البرنامج الخطي
*----------------------------------------------------------------------------


positive variable
   x(i,j,p)     'shipments'
;
variable
   z     'objective variable'
;


equations
```

```
   obj
   supplyc(i,p)
   demandc(j,p)
   limitc(i,j)
;

obj..  z =e= sum((i,j,p), cost(p,i,j)*x(i,j,p));

supplyc(i,p).. sum(j, x(i,j,p)) =e= supply(p,i);

demandc(j,p).. sum(i, x(i,j,p)) =e= demand(p,j);

limitc(i,j).. sum(p, x(i,j,p)) =l= limit(i,j);


model m/all/;
solve m minimizing z using lp;


```

## 6- صياغة البرنامج الفرعي:

بعدها يتم تعريف الرموز المستعملة في صياغة البرنامج الفرعي للمشكلة كما يلي:

```
*-----------------------------------------------------------------
-----------
* النموذج الفرعي
*-----------------------------------------------------------------
-----------

positive variables xsub(i,j);
variables zsub;

parameters
   s(i)      'supply'
   d(j)      'demand'
   c(i,j)    'cost coefficients'
   pi1(i,j)  'dual of limit'
   pi2(p)    'dual of convexity constraint'
   pi2p
;

equations
   supply_sub(i)    'supply equation for single product'
   demand_sub(j)    'demand equation for single product'
   rc1_sub          'phase 1 objective'
   rc2_sub          'phase 2 objective'
;

supply_sub(i).. sum(j, xsub(i,j)) =e= s(i);
demand_sub(j).. sum(i, xsub(i,j)) =e= d(j);
rc1_sub..       zsub =e= sum((i,j), -pi1(i,j)*xsub(i,j)) -
pi2p;
```

```
rc2_sub..       zsub =e= sum((i,j), (c(i,j)-pi1(i,j))*xsub(i,j)) - pi2p;


model sub1 'phase 1 subproblem' /supply_sub, demand_sub, rc1_sub/;
model sub2 'phase 2 subproblem' /supply_sub, demand_sub, rc2_sub/;



```

## 7- صياغة البرنامج الرئيسي:

طريقة Dantzig-Wolfe توضح جيدًا تقنية الحل من خلال "توليد الأعمدة". في هذه الطريقة، نحتاج أولاً إلى تحديد مشكلة مكافئة حيث يُطبق توليد العمود. على المشكل الرئيسي التالي:

```
*------------------------------------------------------------------------
* النموذج الرئيسي
*-------------------------------------------------------------------------

set k 'proposal count' /proposal1*proposal1000/;
set pk(p,k);
pk(p,k) = no;

parameter proposal(i,j,p,k);
parameter proposalcost(p,k);
proposal(i,j,p,k) = 0;
proposalcost(p,k) = 0;


positive variables
   lambda(p,k)
   excess   'artificial variable'
;
variable zmaster;

equations
    obj1_master    'phase 1 objective'
    obj2_master    'phase 2 objective'
    limit_master(i,j)
    convex_master
;

obj1_master..  zmaster =e= excess;
obj2_master..  zmaster =e= sum(pk, proposalcost(pk)*lambda(pk));

limit_master(i,j)..
   sum(pk, proposal(i,j,pk)*lambda(pk)) =l= limit(i,j) + excess;

```

```
convex_master(p).. sum(pk(p,k), lambda(p,k)) =e= 1;

model master1 'phase 1 master' /obj1_master, limit_master,
convex_master/;
model master2 'phase 2 master' /obj2_master, limit_master,
convex_master/;
```

## 8- تحسين مراحل الحل وتسريع الحساب:

الشكل التالي يوضح جزء من الخوارزمية التي تهدف الى تحسين مراحل الحل وتسريع الحساب:

```
*-----------------------------------------------------------------------
* خيارات لتقليل مخرجات الحل
*-----------------------------------------------------------------------

option limrow=0;
option limcol=0;

master1.solprint = 2;
master2.solprint = 2;

sub1.solprint = 2;
sub2.solprint = 2;

*-----------------------------------------------------------------------
* خيارات لتسريع عملية الحل
*-----------------------------------------------------------------------

master1.solvelink = 2;
master2.solvelink = 2;
sub1.solvelink = 2;
sub2.solvelink = 2;
```

## 9- تحديد مراحل الحل في الخوارزمية:

```
*-----------------------------------------------------------------------
* المرحلة الأولى للتجزئة
*    اختبار امكانية الحل للنموذج الفرعي
*    انشاء مجموعة من المقترحات الأولية
*-----------------------------------------------------------------------
```

```
display "-----------------------------------------------------------------------
       ",
             "المرحلة الأولية",
             "-----------------------------------------------------------------------
       ";

set kk(k) 'current proposal';
kk('proposal1') = yes;

loop(p,

*
* حل النموذج الفرعي والتأكد من امكانية الحل
*
    c(i,j) = cost(p,i,j);
    s(i) = supply(p,i);
    d(j) = demand(p,j);
    pi1(i,j) = 0;
    pi2p = 0;
    solve sub2 using lp minimizing zsub;
    abort$(sub2.modelstat = 4) " النموذج الفرعي لا يمكن حله: النموذج الأصلي كذلك";
    abort$(sub2.modelstat <> 1) " النموذج الفرعي لم يصل الى الحل الأمثل";

*
* التوليد المقترح
*
    proposal(i,j,p,kk) = xsub.l(i,j);
    proposalcost(p,kk) = sum((i,j), c(i,j)*xsub.l(i,j));
    pk(p,kk) = yes;
    kk(k) = kk(k-1);

);

option proposal:2:2:2;
display proposal;

```

## 10- حل النموذج (المشكل) الرئيسي المقيد RMP:

البرنامج التالي يدعى النموذج (المشكل) الرئيسي المقيد يرمز له ب $RMP$

```
*---------------------------------------------------------------------
* خوارزمية توليد الأعمدة
*   while (true) do
*      حل النموذج الرئيسي المقيد
*      حل النموذج الفرعي
*   الى غاية عدم وجود اقتراحات
*---------------------------------------------------------------------
```

```


set iter 'maximum iterations' /iter1*iter15/;
scalar done /0/;
scalar count /0/;
scalar phase /1/;
scalar iteration;

loop(iter$(not done),

    iteration = ord(iter);
    display "-----------------------------------------------------------------------",
            iteration,
            "-----------------------------------------------------------------------";

*
* حل النموذج الرئيسي للحصول على النموذج الثنائي
*
    if (phase=1,
        solve master1 minimizing zmaster using lp;
        abort$(master1.modelstat <> 1) " النموذج الرئيسي لم يصل الى الحل الأمثل";
        if (excess.l < 0.0001,
           display "الانتقال الى المرحلة 2";
           phase = 2;
           excess.fx = 0;
        );

    );

```

## 11- خوارزمية تكرار مراحل الحل لغاية تحقيق الأمثلية:

يتم حل هذا النموذج عدة مرات وفي كل مرة نقوم بإضافة المتغيرات (الأعمدة) لهذا النموذج خلال كل خطوة من الخوارزمية والتحقق من شرط الأمثلية في حل RMP. حيث تولد هذه المتغيرات من خلال البرنامج (المشكل) الفرعي $SP$ التالي:

```
    if (phase=2,
        solve master2 minimizing zmaster using lp;
        abort$(master2.modelstat <> 1) " النموذج الرئيسي لم يصل الى الحل الأمثل";
    );

    pi1(i,j) = limit_master.m(i,j);
    pi2(p) = convex_master.m(p);

    count = 0;
```

```
     loop(p$(not done),

  *
  * حل كل مشكلة فرعية
  *
         c(i,j) = cost(p,i,j);
         s(i) = supply(p,i);
         d(j) = demand(p,j);
         pi2p = pi2(p);

         if (phase=1,
            solve sub1 using lp minimizing zsub;
            abort$(sub1.modelstat = 4) "النموذج الفرعي لا يمكن حله: النموذج الأصلي كذلك";
            abort$(sub1.modelstat <> 1) "النموذج الفرعي لم يصل الى الحل الأمثل";
         else
            solve sub2 using lp minimizing zsub;
            abort$(sub2.modelstat = 4) "النموذج الفرعي لا يمكن حله: النموذج الأصلي كذلك";
            abort$(sub2.modelstat <> 1) "النموذج الفرعي لم يصل الى الحل الأمثل";
         );


```

### 12- تحديد شروط التوقف عند تحقيق الأمثلية:

بعد حل أحد قيود المشكلة المحددة بمجموعة فرعية من المتغيرات (التي توجد مؤشراتها في G)، فإن آلية التحقق مما إذا كان الحل الأمثل لهذا النموذج الرئيسي المقيد هو الحل الأمثل للمشكلة المحددة. إذا لم يكن الحل الأمثل للمشكلة، فإن الآلية تولد في نفس الوقت أعمدة جديدة تجعل من الممكن تحديد متغير جديد يؤدي إدخاله إلى قيمة مثالية أفضل. المشكلة الفرعية المستخدمة لها هيكل يسمح بحلها "بسهولة". (للتحقق مما إذا كان الحل هو ممكن للمشكلة المراد حلها)

```
  *
  * اقتراحات
  *
         if (zsub.l < -0.0001,
            count = count + 1;
            display "اقتراح جديد", count,xsub.l;
            proposal(i,j,p,kk) = xsub.l(i,j);
            proposalcost(p,kk) = sum((i,j), c(i,j)*xsub.l(i,j));
            pk(p,kk) = yes;
```

```
            kk(k) = kk(k-1);
        );

     );

*
* لا يوجد اقتراحات جديدة
*
   abort$(count = 0 and phase = 1) "النموذج لا يمكن حله";
   done$(count = 0 and phase = 2) = 1;
);

abort$(not done) "Out of iterations";

```

## 13- تحديد مخرجات الحل:

تتضمن المشكلة المراد حلها عددًا كبيرًا جدًا من المتغيرات التي يصعب تحديدها مسبقًا، ولكن من السهل توليدها عن طريق حل المشكلة الفرعية التي تحدد آلية الحل بهدف تدنية قيمة دالة الهدف. وإيجاد التدفقات المتعددة في مختلف المسارات.

```
*-----------------------------------------------------------------------
* تحديد الحل
*-----------------------------------------------------------------------

parameter xsol(i,j,p);
xsol(i,j,p) = sum(pk(p,k), proposal(i,j,pk)*lambda.l(pk));
display xsol;

parameter totalcost;
totalcost = sum((i,j,p), cost(p,i,j)*xsol(i,j,p));
display totalcost;

```

## 14- تطبيق خوارزمية إضافية لمخرجات الحل في ملف إكسيل:

باعتبار أن مخرجات البرنامج GAMS غير موضحة على شكل جداول، نضيف الشيفرة التالية التي تتيح لنا قراءة المخرجات في جداول بصيغة برنامج Excel.

```
*=== Export to Excel using GDX utilities

*=== First unload to GDX file (occurs during execution phase)
execute_unload "results.gdx" x.L x.M

*=== Now write to variable levels to Excel file from GDX
```

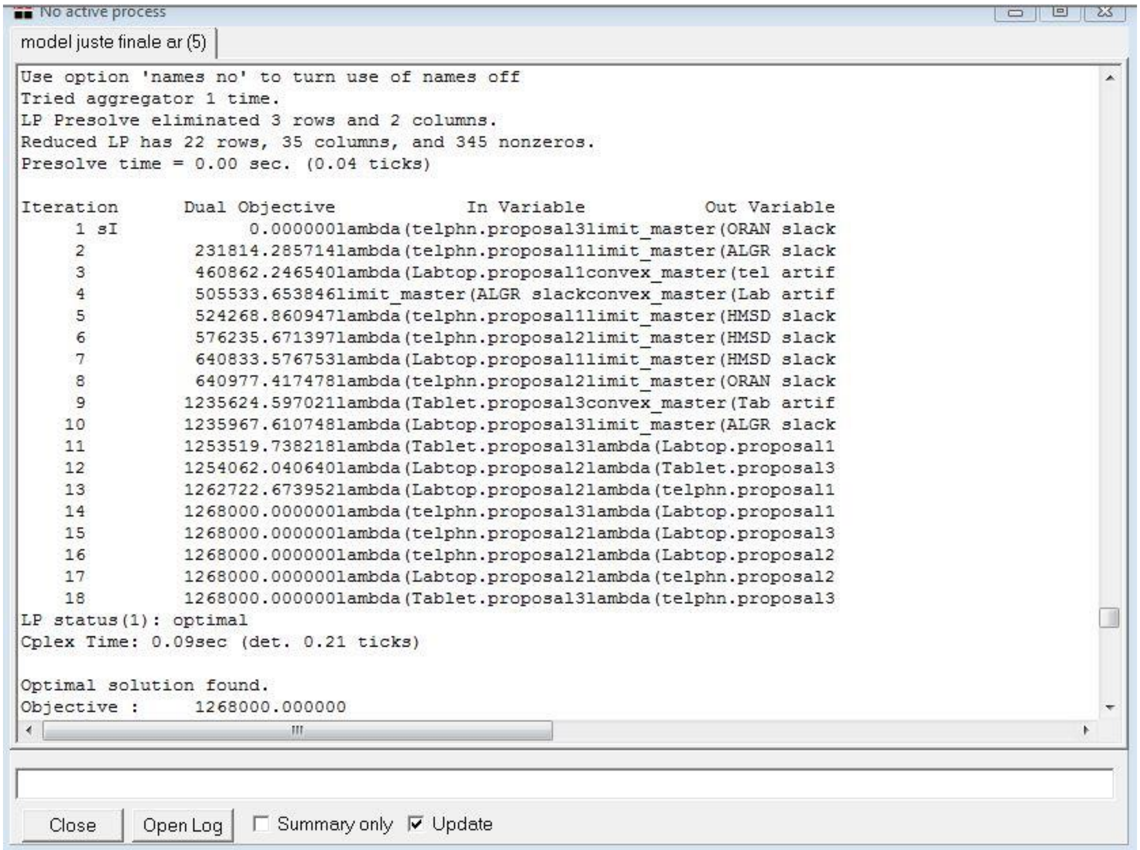
```
*=== Since we do not specify a sheet, data is placed in first sheet
execute 'gdxxrw.exe results.gdx o=results.xls var=x.L'

*=== Write marginals to a different sheet with a specific range
execute 'gdxxrw.exe  results.gdx o=results.xls var=x.M rng=NewSheet!f1:i4'
```

## 4.4 تحليل نتائج الدراسة:

يتمتع برنامج GAMS بكفاءة ومرونة عالية جدا في التعامل مع مثل هذه النماذج. حيث بمجرد إطلاق تنفيذ الخوارزمية يحتاج البرنامج لوقت قصير لحل النموذج والوصول الى الحل الأمثل:

**الشكل27 : نافذة البرنامج خلال عملية تحديد الحل الأمثل**



**مراحل تنفيذ عملية الحل عن طريق برنامج GAMS:**

**كتابة دالة الهدف بالتفصيل:**

```
COMPILATION TIME     =        0.000 SECONDS
      3 MB  25.1.3 r4e34d435fbd WIN-VS8

GAMS 25.1.3  r4e34d435fbd Released Oct 30, 2018 WIN-VS8 x86
32bit/MS Windows 10/14/21 22:42:21 Page 2
توليد الأعمدة
Equation Listing    SOLVE m Using LP From line 78


---- obj  =E=

obj..  - 250*x(ORAN,ZN1,Labtop) - 150*x(ORAN,ZN1,telphn)

      - 250*x(ORAN,ZN1,Tablet) - 200*x(ORAN,ZN2,Labtop) -
100*x(ORAN,ZN2,telphn)

      - 150*x(ORAN,ZN2,Tablet) - 300*x(ORAN,ZN3,Labtop) -
200*x(ORAN,ZN3,telphn)

      - 250*x(ORAN,ZN3,Tablet) - 550*x(ORAN,ZN4,Labtop) -
450*x(ORAN,ZN4,telphn)

      - 500*x(ORAN,ZN4,Tablet) - 1100*x(ORAN,ZN5,Labtop)

      - 950*x(ORAN,ZN5,telphn) - 1150*x(ORAN,ZN5,Tablet)

      - 1300*x(ORAN,ZN6,Labtop) - 1100*x(ORAN,ZN6,telphn)

      - 1250*x(ORAN,ZN6,Tablet) - 1650*x(ORAN,ZN7,Labtop)

      - 1300*x(ORAN,ZN7,telphn) - 1550*x(ORAN,ZN7,Tablet)

      - 950*x(ALGR,ZN1,Labtop) - 800*x(ALGR,ZN1,telphn) -
900*x(ALGR,ZN1,Tablet)

      - 750*x(ALGR,ZN2,Labtop) - 550*x(ALGR,ZN2,telphn) -
750*x(ALGR,ZN2,Tablet)

      - 350*x(ALGR,ZN3,Labtop) - 200*x(ALGR,ZN3,telphn) -
250*x(ALGR,ZN3,Tablet)

      - 450*x(ALGR,ZN4,Labtop) - 350*x(ALGR,ZN4,telphn) -
350*x(ALGR,ZN4,Tablet)

      - 350*x(ALGR,ZN5,Labtop) - 250*x(ALGR,ZN5,telphn) -
350*x(ALGR,ZN5,Tablet)

      - 500*x(ALGR,ZN6,Labtop) - 400*x(ALGR,ZN6,telphn) -
500*x(ALGR,ZN6,Tablet)

      - 950*x(ALGR,ZN7,Labtop) - 700*x(ALGR,ZN7,telphn) -
850*x(ALGR,ZN7,Tablet)
```

```
      - 1750*x(HMSD,ZN1,Labtop) - 1450*x(HMSD,ZN1,telphn)

      - 1600*x(HMSD,ZN1,Tablet) - 1550*x(HMSD,ZN2,Labtop)

      - 1250*x(HMSD,ZN2,telphn) - 1400*x(HMSD,ZN2,Tablet)

      - 1350*x(HMSD,ZN3,Labtop) - 1050*x(HMSD,ZN3,telphn)

      - 1100*x(HMSD,ZN3,Tablet) - 500*x(HMSD,ZN4,Labtop)

      - 400*x(HMSD,ZN4,telphn) - 450*x(HMSD,ZN4,Tablet) -
700*x(HMSD,ZN5,Labtop)

      - 600*x(HMSD,ZN5,telphn) - 650*x(HMSD,ZN5,Tablet) -
700*x(HMSD,ZN6,Labtop)

      - 600*x(HMSD,ZN6,telphn) - 650*x(HMSD,ZN6,Tablet) -
400*x(HMSD,ZN7,Labtop)

      - 300*x(HMSD,ZN7,telphn) - 350*x(HMSD,ZN7,Tablet) + z =E= 0 ;
(LHS = 0)
```

**تفصيل قيود العرض:**

```
---- supplyc  =E=

supplyc(ORAN,Labtop)..  x(ORAN,ZN1,Labtop) + x(ORAN,ZN2,Labtop)

      + x(ORAN,ZN3,Labtop) + x(ORAN,ZN4,Labtop) +
x(ORAN,ZN5,Labtop)

      + x(ORAN,ZN6,Labtop) + x(ORAN,ZN7,Labtop) =E= 120 ;

      (LHS = 0, INFES = 120 ****)

supplyc(ORAN,telphn)..  x(ORAN,ZN1,telphn) + x(ORAN,ZN2,telphn)

      + x(ORAN,ZN3,telphn) + x(ORAN,ZN4,telphn) +
x(ORAN,ZN5,telphn)

      + x(ORAN,ZN6,telphn) + x(ORAN,ZN7,telphn) =E= 550 ;

      (LHS = 0, INFES = 550 ****)

supplyc(ORAN,Tablet)..  x(ORAN,ZN1,Tablet) + x(ORAN,ZN2,Tablet)

      + x(ORAN,ZN3,Tablet) + x(ORAN,ZN4,Tablet) +
x(ORAN,ZN5,Tablet)

      + x(ORAN,ZN6,Tablet) + x(ORAN,ZN7,Tablet) =E= 190 ;

      (LHS = 0, INFES = 190 ****)

REMAINING 6 ENTRIES SKIPPED
```

**تفصيل قيود الطلب:**

```
---- demandc  =E=

demandc(ZN1,Labtop)..  x(ORAN,ZN1,Labtop) + x(ALGR,ZN1,Labtop)

      + x(HMSD,ZN1,Labtop) =E= 70 ; (LHS = 0, INFES = 70 ****)

demandc(ZN1,telphn)..  x(ORAN,ZN1,telphn) + x(ALGR,ZN1,telphn)

      + x(HMSD,ZN1,telphn) =E= 250 ; (LHS = 0, INFES = 250 ****)

demandc(ZN1,Tablet)..  x(ORAN,ZN1,Tablet) + x(ALGR,ZN1,Tablet)

      + x(HMSD,ZN1,Tablet) =E= 100 ; (LHS = 0, INFES = 100 ****)

REMAINING 18 ENTRIES SKIPPED
```

**تفصيل قيود سعة المسارات:**

```
---- limitc  =L=

limitc(ORAN,ZN1)..  x(ORAN,ZN1,Labtop) + x(ORAN,ZN1,telphn) +
x(ORAN,ZN1,Tablet)
      =L= 290 ; (LHS = 0)

limitc(ORAN,ZN2)..  x(ORAN,ZN2,Labtop) + x(ORAN,ZN2,telphn) +
x(ORAN,ZN2,Tablet)
      =L= 290 ; (LHS = 0)

limitc(ORAN,ZN3)..  x(ORAN,ZN3,Labtop) + x(ORAN,ZN3,telphn) +
x(ORAN,ZN3,Tablet)
      =L= 290 ; (LHS = 0)

REMAINING 18 ENTRIES SKIPPED



GAMS 25.1.3  r4e34d435fbd Released Oct 30, 2018 WIN-VS8 x86
32bit/MS Windows 10/14/21 22:42:21 Page 3
توليد الأعمدة
Column Listing      SOLVE m Using LP From line 78


---- x  shipments

x(ORAN,ZN1,Labtop)
                (.LO, .L, .UP, .M = 0, 0, +INF, 0)
     -250       obj
        1       supplyc(ORAN,Labtop)
        1       demandc(ZN1,Labtop)
        1       limitc(ORAN,ZN1)
```

```
x(ORAN,ZN1,telphn)
                (.LO, .L, .UP, .M = 0, 0, +INF, 0)
     -150       obj
        1       supplyc(ORAN,telphn)
        1       demandc(ZN1,telphn)
        1       limitc(ORAN,ZN1)

x(ORAN,ZN1,Tablet)
                (.LO, .L, .UP, .M = 0, 0, +INF, 0)
     -250       obj
        1       supplyc(ORAN,Tablet)
        1       demandc(ZN1,Tablet)
        1       limitc(ORAN,ZN1)

REMAINING 60 ENTRIES SKIPPED

---- z  objective variable

z
                (.LO, .L, .UP, .M = -INF, 0, +INF, 0)
        1       obj
```

**ملخص عن العمليات الحسابية:**

خلال عملية تنفيذ الخوارزمية يوفر البرنامج عدة بيانات من بينها عدد المعادلات الفردية خلال عملية الحل 52 معادلة بينما عدد المتغيرات الفردية 64. فيما يخص القيم غير المعدومة قدرت ب 253. بينما يوضح البرنامج أن الفترة الزمنية لعملية التنفيذ كانت قصيرة جدا. مما يؤكد الكفاءة العالية للبرنامج. كما يوضحه الشكل التالي:

```
GAMS 25.1.3  r4e34d435fbd Released Oct 30, 2018 WIN-VS8 x86
32bit/MS Windows 10/14/21 22:42:21 Page 4
توليد الأعمدة
Model Statistics    SOLVE m Using LP From line 78


MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS           4     SINGLE EQUATIONS           52
BLOCKS OF VARIABLES           2     SINGLE VARIABLES           64
NON ZERO ELEMENTS           253


GENERATION TIME      =        0.000 SECONDS
      4 MB  25.1.3 r4e34d435fbd WIN-VS8


EXECUTION TIME       =        0.000 SECONDS
```

```
      4 MB  25.1.3 r4e34d435fbd WIN-VS8
```

**فهرس نتائج الحل:**

```
GAMS 25.1.3  r4e34d435fbd Released Oct 30, 2018 WIN-VS8 x86
32bit/MS Windows 10/14/21 22:42:21 Page 5
تـولـيـد الأعمدة
Solution Report     SOLVE m Using LP From line 78


               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   m                    OBJECTIVE  z
     TYPE    LP                   DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX                FROM LINE  78

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE          1268000.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.000      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        42    2000000000

IBM ILOG CPLEX   25.1.3 r4e34d435fbd Released Oct 30, 2018 VS8 x86
32bit/MS Wi
Cplex 12.6.3.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
LP status(1): optimal
Cplex Time: 0.00sec (det. 0.17 ticks)
Optimal solution found.
Objective :     1268000.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU obj             .         .         .        1.000

---- EQU supplyc

               LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

ORAN.Labtop   120.000   120.000   120.000   450.000
ORAN.telphn   550.000   550.000   550.000   350.000
ORAN.Tablet   190.000   190.000   190.000   600.000
ALGR.Labtop   200.000   200.000   200.000   500.000
ALGR.telphn   650.000   650.000   650.000   350.000
ALGR.Tablet   230.000   230.000   230.000   600.000
HMSD.Labtop   180.000   180.000   180.000   850.000
HMSD.telphn   600.000   600.000   600.000   700.000
HMSD.Tablet   320.000   320.000   320.000   900.000

---- EQU demandc

              LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

ZN1.Labtop    70.000    70.000    70.000   450.000
ZN1.telphn   250.000   250.000   250.000   450.000
```

```
ZN1.Tablet   100.000   100.000   100.000   300.000
ZN2.Labtop    60.000    60.000    60.000   200.000
ZN2.telphn   180.000   180.000   180.000   200.000
ZN2.Tablet   100.000   100.000   100.000      .
ZN3.Labtop    75.000    75.000    75.000  -150.000
ZN3.telphn   280.000   280.000   280.000  -150.000
ZN3.Tablet    40.000    40.000    40.000  -350.000
ZN4.Labtop    75.000    75.000    75.000   -50.000
ZN4.telphn   220.000   220.000   220.000      .
ZN4.Tablet   150.000   150.000   150.000  -250.000
ZN5.Labtop    50.000    50.000    50.000  -150.000
ZN5.telphn   270.000   270.000   270.000  -100.000
ZN5.Tablet   120.000   120.000   120.000  -250.000
ZN6.Labtop    70.000    70.000    70.000      .
ZN6.telphn   250.000   250.000   250.000    50.000
ZN6.Tablet    80.000    80.000    80.000  -100.000
ZN7.Labtop   100.000   100.000   100.000   900.000
ZN7.telphn   350.000   350.000   350.000   950.000
ZN7.Tablet   150.000   150.000   150.000   800.000

---- EQU limitc

            LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

ORAN.ZN1     -INF    290.000   290.000  -650.000
ORAN.ZN2     -INF    290.000   290.000  -450.000
ORAN.ZN3     -INF    260.000   290.000      .
ORAN.ZN4     -INF       .      290.000      .
ORAN.ZN5     -INF       .      290.000      .
ORAN.ZN6     -INF       .      290.000      .
ORAN.ZN7     -INF     20.000   290.000      .
ALGR.ZN1     -INF    130.000   290.000      .
ALGR.ZN2     -INF     50.000   290.000      .
ALGR.ZN3     -INF    135.000   290.000      .
ALGR.ZN4     -INF    155.000   290.000      .
ALGR.ZN5     -INF    210.000   290.000      .
ALGR.ZN6     -INF    110.000   290.000      .
ALGR.ZN7     -INF    290.000   290.000  -600.000
HMSD.ZN1     -INF       .      290.000      .
HMSD.ZN2     -INF       .      290.000      .
HMSD.ZN3     -INF       .      290.000      .
HMSD.ZN4     -INF    290.000   290.000  -300.000
HMSD.ZN5     -INF    230.000   290.000      .
HMSD.ZN6     -INF    290.000   290.000  -150.000
HMSD.ZN7     -INF    290.000   290.000 -1350.000

---- VAR x  shipments

                   LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

ORAN.ZN1.Labtop      .         .        +INF       EPS
ORAN.ZN1.telphn      .      200.000     +INF       .
ORAN.ZN1.Tablet      .       90.000     +INF       .
ORAN.ZN2.Labtop      .       60.000     +INF       .
ORAN.ZN2.telphn      .      130.000     +INF       .
ORAN.ZN2.Tablet      .      100.000     +INF       .
ORAN.ZN3.Labtop      .       60.000     +INF       .
ORAN.ZN3.telphn      .      200.000     +INF       .
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ORAN.ZN3.Tablet | . | . | +INF | EPS |
| ORAN.ZN4.Labtop | . | . | +INF | 150.000 |
| ORAN.ZN4.telphn | . | . | +INF | 100.000 |
| ORAN.ZN4.Tablet | . | . | +INF | 150.000 |
| ORAN.ZN5.Labtop | . | . | +INF | 800.000 |
| ORAN.ZN5.telphn | . | . | +INF | 700.000 |
| ORAN.ZN5.Tablet | . | . | +INF | 800.000 |
| ORAN.ZN6.Labtop | . | . | +INF | 850.000 |
| ORAN.ZN6.telphn | . | . | +INF | 700.000 |
| ORAN.ZN6.Tablet | . | . | +INF | 750.000 |
| ORAN.ZN7.Labtop | . | . | +INF | 300.000 |
| ORAN.ZN7.telphn | . | 20.000 | +INF | . |
| ORAN.ZN7.Tablet | . | . | +INF | 150.000 |
| ALGR.ZN1.Labtop | . | 70.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN1.telphn | . | 50.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN1.Tablet | . | 10.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN2.Labtop | . | . | +INF | 50.000 |
| ALGR.ZN2.telphn | . | 50.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN2.Tablet | . | . | +INF | 150.000 |
| ALGR.ZN3.Labtop | . | 15.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN3.telphn | . | 80.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN3.Tablet | . | 40.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN4.Labtop | . | 5.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN4.telphn | . | . | +INF | EPS |
| ALGR.ZN4.Tablet | . | 150.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN5.Labtop | . | 40.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN5.telphn | . | 140.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN5.Tablet | . | 30.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN6.Labtop | . | 70.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN6.telphn | . | 40.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN6.Tablet | . | . | +INF | EPS |
| ALGR.ZN7.Labtop | . | . | +INF | 150.000 |
| ALGR.ZN7.telphn | . | 290.000 | +INF | . |
| ALGR.ZN7.Tablet | . | . | +INF | 50.000 |
| HMSD.ZN1.Labtop | . | . | +INF | 450.000 |
| HMSD.ZN1.telphn | . | . | +INF | 300.000 |
| HMSD.ZN1.Tablet | . | . | +INF | 400.000 |
| HMSD.ZN2.Labtop | . | . | +INF | 500.000 |
| HMSD.ZN2.telphn | . | . | +INF | 350.000 |
| HMSD.ZN2.Tablet | . | . | +INF | 500.000 |
| HMSD.ZN3.Labtop | . | . | +INF | 650.000 |
| HMSD.ZN3.telphn | . | . | +INF | 500.000 |
| HMSD.ZN3.Tablet | . | . | +INF | 550.000 |
| HMSD.ZN4.Labtop | . | 70.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN4.telphn | . | 220.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN4.Tablet | . | . | +INF | 100.000 |
| HMSD.ZN5.Labtop | . | 10.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN5.telphn | . | 130.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN5.Tablet | . | 90.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN6.Labtop | . | . | +INF | EPS |
| HMSD.ZN6.telphn | . | 210.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN6.Tablet | . | 80.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN7.Labtop | . | 100.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN7.telphn | . | 40.000 | +INF | . |
| HMSD.ZN7.Tablet | . | 150.000 | +INF | . |
| | LOWER | LEVEL | UPPER | MARGINAL |

```
---- VAR z                -INF  1.2680E+6     +INF       .

  z  objective variable


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

**المرحلة الأولية (اقتراح الحل الابتدائي الممكن):**

```
----     183 -----------------------------------------------
------------------
             المرحلة الأولية
             -----------------------------------------------
------------------
----     215 PARAMETER proposal

                Labtop       telphn       Tablet
             proposal1    proposal2    proposal3

ORAN.ZN1         70.00       250.00       100.00
ORAN.ZN2         50.00       180.00        90.00
ORAN.ZN3                     120.00
ALGR.ZN2         10.00                     10.00
ALGR.ZN3         75.00       160.00        40.00
ALGR.ZN5         50.00       270.00       120.00
ALGR.ZN6         65.00       220.00        60.00
HMSD.ZN4         75.00       220.00       150.00
HMSD.ZN6          5.00        30.00        20.00
HMSD.ZN7        100.00       350.00       150.00
```

**تكرار خطوات توليد الأعمدة:**

كما في طريقة السمبلكس يتم في كل خطوة اقتراح (توليد) عمود جديد لإضافته الى النموذج الرئيسي المقيد، والتحقق ما إذا كان الحل الأمثل محقق للتوقف، أو تكرار الخطوات عدة مرات حتى تحقق شرط الأمثلية والوصول الى الحل الأمثل.

**الخطوة 1:**

```
----     235 -------------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration             =        1.000
            -------------------------------------------------------------
----------
----     288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                 =        1.000
```

```
----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                                  20.000
ALGR                              25.000      75.000      50.000      50.000
HMSD      70.000      60.000      50.000

   +         ZN7

ORAN     100.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                                 200.000
ALGR                             110.000     220.000     270.000      50.000
HMSD     250.000     180.000     170.000

   +         ZN7

ORAN     350.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                                  40.000
ALGR                                          70.000     120.000      40.000
HMSD     100.000     100.000      40.000      80.000

   +         ZN7

ORAN     150.000
```

**الخطوة 2:**

```
----    235 -------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration            =        2.000
            -------------------------------------------------------
----------
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                      50.000
ALGR                              25.000      75.000                  70.000
HMSD      70.000      60.000      50.000

   +         ZN7
```

```
ORAN      70.000
ALGR      30.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                  =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                     270.000
ALGR                               110.000     220.000                 250.000
HMSD     250.000     180.000     170.000

   +         ZN7

ORAN     280.000
ALGR      70.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                  =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                                                     120.000
ALGR                                            70.000                  80.000
HMSD     100.000     100.000      40.000      80.000

   +         ZN7

ORAN      70.000
ALGR      80.000
```

**الخطوة 3:**

```
----    235 -----------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration              =        3.000
            -------------------------------------------------------
----------
----    246 2 الانتقال الى المرحلة
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                  =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN      70.000      50.000
ALGR                  10.000      75.000      75.000
HMSD                                                      50.000      70.000

   +         ZN7

ALGR      40.000
HMSD      60.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                  =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L
```

```
            ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN     250.000     180.000                             120.000
ALGR                             280.000     220.000
HMSD                                                     150.000     250.000

   +        ZN7

ALGR     150.000
HMSD     200.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

            ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN     100.000      90.000
ALGR                  10.000      40.000     150.000
HMSD                                                     120.000      80.000

   +        ZN7

ALGR      30.000
HMSD     120.000
```

**الخطوة 4:**

```
----    235 -----------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration                =        4.000
            -------------------------------------------------------
----------
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

            ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN      45.000                  75.000
ALGR      25.000      60.000                              15.000
HMSD                                          75.000      35.000      70.000

   +        ZN7

ALGR     100.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

            ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN     250.000      20.000     280.000
ALGR                 160.000                             140.000
HMSD                                         220.000     130.000     250.000

   +        ZN7

ALGR     350.000
```

```
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN     100.000      90.000
ALGR                  10.000                              70.000
HMSD                              40.000     150.000      50.000      80.000

   +         ZN7

ALGR     150.000
```

**الخطوة 5:**

```
----    235 -------------------------------------------------------
----------
             PARAMETER iteration             =        5.000
             -------------------------------------------------------
----------
----    288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                 =        1.000


----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                  60.000      60.000
ALGR      70.000                  15.000                  50.000
HMSD                                          75.000                  70.000

   +         ZN7

ALGR      65.000
HMSD      35.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                 180.000     280.000      90.000
ALGR     250.000                                          50.000
HMSD                                         130.000     220.000     250.000

   +         ZN7

ALGR     350.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                 100.000      40.000      50.000
ALGR     100.000
```

```
HMSD                                        100.000      120.000       80.000

   +         ZN7

ALGR     130.000
HMSD      20.000
```

**الخطوة 6**:

```
----     235 -------------------------------------------------------
----------
               PARAMETER iteration            =         6.000
               -------------------------------------------------------
----------
----     288 اقتراح جديد
               PARAMETER count                =         1.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                  20.000
ALGR      70.000      40.000      75.000                  15.000
HMSD                                          75.000      35.000      70.000

   +         ZN7

ORAN     100.000

----     288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                =         2.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN      20.000     180.000
ALGR     230.000                 280.000                 140.000
HMSD                                         220.000     130.000     250.000

   +         ZN7

ORAN     350.000

----     288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                =         3.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                  40.000
ALGR     100.000      60.000      40.000                  30.000
HMSD                                         150.000      90.000      80.000

   +         ZN7

ORAN     150.000
```

**الخطوة 7**:

```
----     235 -------------------------------------------------------
----------
             PARAMETER iteration            =        7.000
             -------------------------------------------------------
----------
----     288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                =        1.000

----     288 VARIABLE xsub.L

                 ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN          60.000      60.000
ALGR          10.000                  75.000                  50.000
HMSD                                              75.000                  70.000

   +         ZN7

ALGR          65.000
HMSD          35.000

----     288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                =        2.000

----     288 VARIABLE xsub.L

                 ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN         250.000     180.000     120.000
ALGR                                 160.000                 140.000
HMSD                                             220.000     130.000     250.000

   +         ZN7

ALGR         350.000

----     288 اقتراح جديد
             PARAMETER count                =        3.000

----     288 VARIABLE xsub.L

                 ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN          90.000     100.000
ALGR          10.000                  40.000                  30.000
HMSD                                             150.000      90.000      80.000

   +         ZN7

ALGR         150.000
```

**الخطوة 8**:

```
----     235 -------------------------------------------------------
----------
             PARAMETER iteration            =        8.000
             -------------------------------------------------------
----------
```

```
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

               ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                    60.000      60.000
ALGR        70.000                  15.000      65.000      50.000
HMSD                                            10.000                  70.000

   +           ZN7

HMSD       100.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

               ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                   180.000     280.000
ALGR       250.000                                         270.000
HMSD                                           220.000                 250.000

   +           ZN7

ORAN        90.000
ALGR       130.000
HMSD       130.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

               ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN        50.000     100.000      40.000
ALGR        50.000                              60.000     120.000
HMSD                                            90.000                  80.000

   +           ZN7

HMSD       150.000
```

**الخطوة 9**:

```
----    235 -------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration                =        9.000
            -------------------------------------------------------
----------
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                    =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

               ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                    60.000      60.000
```

```
ALGR      70.000                 15.000                   45.000     70.000
HMSD                                            75.000     5.000

   +         ZN7

HMSD     100.000

----     288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =         2.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN                 180.000     280.000
ALGR     250.000                                                     250.000
HMSD                                     220.000     270.000

   +         ZN7

ORAN      90.000
ALGR     150.000
HMSD     110.000

----     288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =         3.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN      50.000     100.000      40.000
ALGR      50.000                         100.000                  80.000
HMSD                                      50.000     120.000

   +         ZN7

HMSD     150.000
```

**الخطوة 10:**

```
----     235 ------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration               =        10.000
            ------------------------------------------------------
----------
----     288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                   =         1.000

----     288 VARIABLE xsub.L

             ZN1         ZN2         ZN3         ZN4         ZN5         ZN6

ORAN      90.000     180.000     280.000
ALGR     160.000                         220.000      20.000     250.000
HMSD                                                 250.000

   +         ZN7

HMSD     350.000

----     288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =         2.000
```

```
----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1          ZN2          ZN3          ZN4          ZN5          ZN6

ORAN      50.000      100.000       40.000
ALGR      50.000                                150.000                    30.000
HMSD                                                        120.000        50.000

   +         ZN7

HMSD     150.000
```

**الخطوة 11:**

```
----    235 ----------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration            =       11.000
            ----------------------------------------------------------
----------
----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        1.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1          ZN2          ZN3          ZN4          ZN5          ZN6

ORAN      60.000       60.000
ALGR      10.000                    75.000                    50.000       65.000
HMSD                                             75.000                     5.000

   +         ZN7

HMSD     100.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        2.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1          ZN2          ZN3          ZN4          ZN5          ZN6

ORAN     250.000       80.000
ALGR                  100.000      280.000                   270.000
HMSD                                            220.000                   250.000

   +         ZN7

ORAN     220.000
HMSD     130.000

----    288 اقتراح جديد
            PARAMETER count                =        3.000

----    288 VARIABLE xsub.L

             ZN1          ZN2          ZN3          ZN4          ZN5          ZN6

ORAN      90.000      100.000
ALGR      10.000                    40.000      150.000       30.000
HMSD                                                          90.000       80.000
```

```
   +          ZN7

HMSD      150.000
```

**الخطوة 12:**

تمثل الخطوة 8 أخر مرحلة في الحل باعتبار الحل المتحصل من خلالها يمثل الحل الأمثل، وهذا بعد التأكد من تحقق شرط الأمثلية.

```
----    235 -------------------------------------------------------
----------
            PARAMETER iteration           =       12.000
            -------------------------------------------------------
----------
----     313  PARAMETER xsol

                Labtop       telphn       Tablet

ORAN.ZN1                    239.578       50.422
ORAN.ZN2        60.000      130.000      100.000
ORAN.ZN3        60.000      160.422       39.578
ORAN.ZN7                     20.000
ALGR.ZN1        70.000       10.422       49.578
ALGR.ZN2                     50.000
ALGR.ZN3        15.000      119.578        0.422
ALGR.ZN4         5.000                   150.000
ALGR.ZN5        45.385      164.299        0.317
ALGR.ZN6        64.615       15.701       29.683
ALGR.ZN7                    290.000
HMSD.ZN4        70.000      220.000
HMSD.ZN5         4.615      105.701      119.683
HMSD.ZN6         5.385      234.299       50.317
HMSD.ZN7       100.000       40.000      150.000

----     317  PARAMETER totalcost            =  1268000.000

EXECUTION TIME       =       14.976 SECONDS
      3 MB  25.1.3 r4e34d435fbd WIN-VS8


USER: GAMS Development Corporation, USA
G871201/0000CA-ANY
```

### 5.4 مناقشة النتائج:

من خلال نتائج الحل الأمثل نلاحظ أن قيمة دالة الهدف للتكلفة الدنيا تساوي 1268000.00 دج والتي تعتبر مقبولة تطبيقيا باعتبار أن التكاليف في الجولات السابقة التي لم تستخدم فيها طرق الأمثلية كانت بقيمة أكبر. مما يؤكد الفائدة المتوقعة من استخدام هذه التقنيات المتقدمة لحل نماذج الشبكات المعقدة.

نلاحظ أن الحل الأمثل يوفر قيم تدفقات جميع السلع بالنسبة لكل المسارات كما يلي:

الجدول 8: نتائج الحل الأمثل لتدفقات المسارات

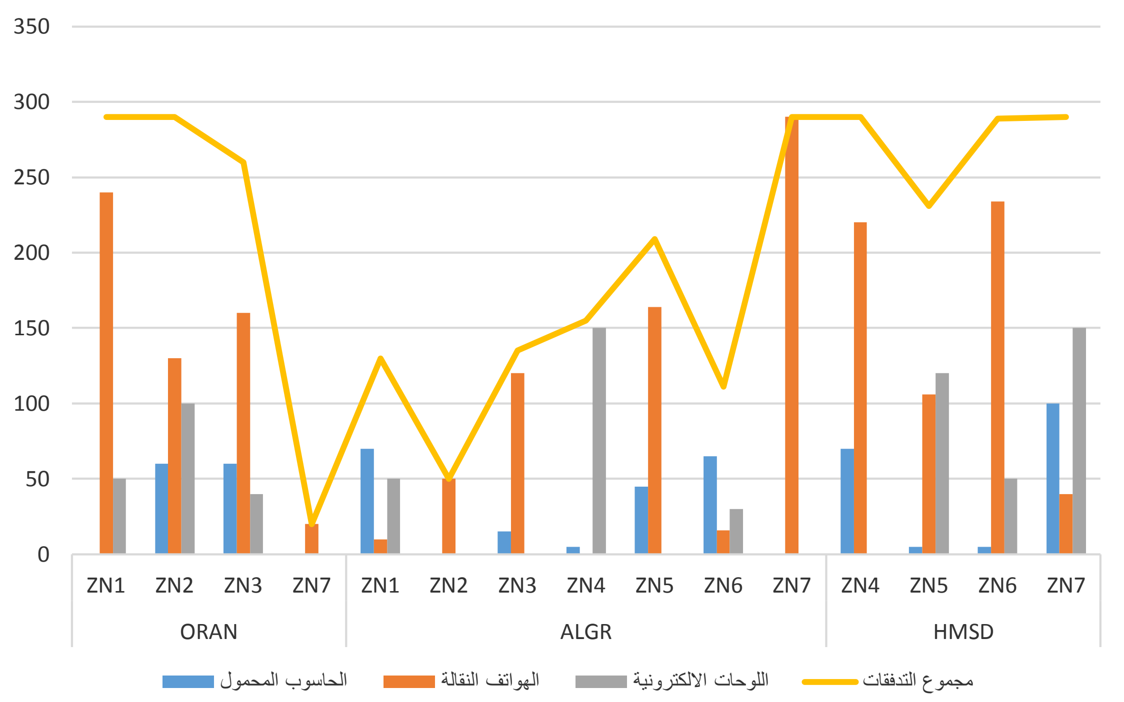
| المصدر | المصب | الحاسوب المحمول | الهواتف النقالة | اللوحات الالكترونية | مجموع التدفقات |
|---|---|---|---|---|---|
| ORAN | ZN1 | | 240 | 50 | **290** |
| ORAN | ZN2 | 60 | 130 | 100 | **290** |
| ORAN | ZN3 | 60 | 160 | 40 | **260** |
| ORAN | ZN7 | | 20 | | **20** |
| ALGR | ZN1 | 70 | 10 | 50 | **130** |
| ALGR | ZN2 | | 50 | | **50** |
| ALGR | ZN3 | 15 | 120 | | **135** |
| ALGR | ZN4 | 5 | | 150 | **155** |
| ALGR | ZN5 | 45 | 164 | | **209** |
| ALGR | ZN6 | 65 | 16 | 30 | **111** |
| ALGR | ZN7 | | 290 | | **290** |
| HMSD | ZN4 | 70 | 220 | | **290** |
| HMSD | ZN5 | 5 | 106 | 120 | **231** |
| HMSD | ZN6 | 5 | 234 | 50 | **289** |
| HMSD | ZN7 | 100 | 40 | 150 | **290** |
| | | **500** | **1800** | **740** | **المجموع** |

المصدر: من مخرجات برنامج GAMS

(تم تقريب القيم الى أعداد طبيعية) من خلال الجدول يتبين أن كل المسارات المقترحة في الحل الأمثل تحتوي على تدفقات متعددة السلع، باستثناء المسار المظلل في اللون الرمادي، الرابط بين ولاية وهران والوادي نلاحظ احتواءه على تدفق ضعيف جدا يقدر ب: 20 هاتف محمول. حيث نفسر ضعف التدفق خلال هذا المسار لبعد المسافة بين الولايتين ما يؤدي الى ارتفاع تكلفة النقل خلال ذلك المسار. أما ظهور هذا

المسار في الحل الأمثل رغم ارتفاع تكلفته، راجع الى نفاذ كمية العرض في المصادر القريبة من المنطقة 7 ما يفرض على الشركة تلبية تلك الكمية رغم قلتها، لضمان تسليم كامل الكمية في الطلبيات، فنلاحظ تساوي الكمية الاجمالية للعرض والطلب في الحل الأمثل. من بين 15 مسارا مقترحا يوجد 7 مسارات ذات تدفقات بثلاث سلع بينما يوجد 5 مسارات ذات تدفقين بسلعتين. وهناك 3 مسارات تحمل تدفقا واحدا فقط.

الشكل 46: كميات السلع المنقولة بالنسبة لكل مسار




المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على برنامج إكسيل

يوضح الشكل السابق كمية تدفق مختلف السلع بالنسبة لمسارات الشبكة المختلفة، مع تمثيل منحنى يوضح مجموع التدفقات الكلية في كل مسار، لنلاحظ أن المنحنى يزيد عند المسارات تربط بين الولايات القريبة من حيث المسافة، بينما يتناقص أو ينعدم المنحنى عند المسارات التي تربط الولايات بمسافات بعيدة. وهذا راجع الى ارتفاع تكلفة هذه المسارات بسبب بعد المسافة مما ينتج عنه تكاليف إضافية، من حيث أجرة السائق واستهلاك الوقود والصيانة المتكررة. حيث يتم قبول الحل الأمثل المقترح الناتج عن برنامج Gams من طرف الشركة باعتباره يستعمل مسارات مقبولة نظريا لأنها القريبة والأقل تكلفة.

**خلاصة الفصل:**

من خلال هذا الفصل حاولنا تطبيق طريقة توليد الأعمدة على الإشكالية الميدانية عن طريق صياغة برنامج خطي يلاءم إشكالية شبكة نقل السلع المتعددة، والتي تنتج عددا كبيرا من المتغيرات نتيجة التدفقات المتعددة وتعدد المسارات، وباعتبار أن الطرق التقليدية يستعصي عليها حل مثل هذه النماذج الكبيرة، تمكنا من الحصول على نتائج جد مرضية، من خلال تطبيق الخوارزمية على برنامج الحاسوب GAMS الذي أثبت بدوره كفاءة جد عالية في التنفيذ، وسهولة برمجة الخوارزمية لتوفره على الشيفرات اللازمة لتطبيق العمل. باعتباره يسهل العمليات الحسابية في مراحل الحل لدرجة كبيرة. مع قصر فترة التنفيذ في البرنامج.

# الخاتمة العامة

- النتائج
- الاستنتاجات
- التوصيات

**النتائج:**

من خلال هذه الدراسة التي تناولت استخدام تقنيات توليد الأعمدة في نمذجة مشاكل جولات المركبات، تبعا للإشكالية التي اقترحت حول: **كيف يمكن صياغة نموذج لشبكات النقل بتدفقات متعددة السلع وتحديد التدفقات لإيجاد الكميات المثلى المنقولة وبأقل تكلفة اجمالية ممكنه ؟**، وللإجابة على هذه الإشكالية والتحقق من صحة الفرضية التي انطلقنا منها، ومن أجل تحقيق أهداف الدراسة والإلمام بمختلف جوانبها قسمنا هذا البحث إلى جانبين، جانب نظري والأخر تطبيقي، بحيث كل جانب يتضمن فصلين، الفصل الأول تطرقنا فيه إلى مفاهيم نظرية حول نظرية الشبكات ومختلف مشاكل التدفقات المتعلقة بها الى جانب طرق حلها العديدة، أما الفصل الثاني فتطرقنا من خلاله إلى مختلف الدراسات السابقة التي تناولت تقريبا نفس إشكالية الدراسة لكن بتفاصيل مختلفة، أما الفصل الثالث فحاولنا من خلاله شرح الإشكالية الميدانية للدراسة مع شرح مختلف الصياغات الممكنة للنماذج إضافة الى وضع منهجية توضح الأداة أو التقنية الكمية المستخدمة في الحل التي تمثلت في تقنية توليد الأعمدة. هذه التقنيات قد أثبتت أهميتها في ترشيد القرارات المتعلقة بتسيير وظيفة النقل، كتدنية التكاليف الإجمالية للنقل، والبحث عن أقصر مسار في شبكة النقل، مع البحث عن أعظم تدفق للسلع في مسارات الشبكة.... الخ. ما يؤكد هذه الأهمية هو مساهمة مختلف الأبحاث والدراسات النظرية في تطبيق مجموعة مختلفة من الصياغات أو المتغيرات.

في الفصل الرابع والأخير قمنا بتطبيق التقنية المقترحة لمحاولة إثبات فعالية وأهمية استخدام هذه الطرق في الميدان العملي، حيث اعتمدنا على دراسة حالة لشركة الخدمات العامة والأشغال العمومية بحاسي مسعود، وتطرقنا إلى مشكلة توصيل أهم السلع المنقولة من طرف الشركة) منتجات الكترونية (من ثلاث مراكز للعرض إلى سبعة مراكز للطلب منتشرة عبر عدة ولايات.

نتيجة لذلك تأكدنا بأن تقنيات التجزئة وتوليد الأعمدة تعد من بين الطرق والأساليب المهمة في اتخاذ القرار لحل مشاكل الشبكات، حيث تعتبر طرق رياضية تميل إلى المرونة والواقعية في حل النماذج المعقدة والتي تأخذ في الاعتبار تدفقات متعددة السلع مع كثرة المسارات والقيود. لهذا فان اللجوء إلى استخدام التقنيات الكمية المتقدمة في حل مشاكل النقل من شأنه وضع حلول فعالة في المسائل ذات التدفقات المتعددة. باعتبار أن القرارات القائمة على استخدام الأساليب الكمية والنماذج الرياضية في اختيار البديل الأفضل لحل مشاكل النقل في الشركة تكون قرارات مجدية وأكثر مردودية.

**الاستنتاجات:**

بعد التطرق الى أغلب المفاهيم النظرية حول نظرية الشبكات بما في ذلك مشاكل التدفقات المتعددة السلع. إضافة الى تطبيق طريقة توليد الأعمدة وتجزئة dantzig-Wolf ومن خلال تطبيق الطريقة على نموذج شبكة متكونة من عدة مسارات تربط بين عدة ولايات وطنية ولها تدفقات متعددة تحتوي على عدة سلع. تأكدت الأهمية البالغة لهذه الطريقة. في حل نماذج ذات متغيرات كبيرة وتدفقات متعددة. والتي تعجز الطرق التقليدية على حلها. باعتبار أن النتائج التي تم الحصول عليها أثبتت الكفاءة العالية للطريقة المقترحة، حيث وجدت الحل الأمثل لجميع تدفقات المسارات لعدة سلع، مع تحقيق تكلفة دنيا أقل من الحالات السابقة التي لم تستخدم فيها التقنيات الكمية، ما يوفر على الشركة تكلفة اضافية. لكن علينا معرفة أن التقنيات المقترحة تعتبر أساليب رياضية يمكن الاستفادة منها في نمذجة وتسيير عملية نقل وتوزيع السلع من مواقع العرض إلى محطات الطلب وهذا من أجل تحقيق أهداف الشركة، ورغم ذلك لا يمكن اعتبار هذه النماذج بالوسيلة المثلى وإنما هي أساليب علمية يمكن الاعتماد عليها لمساعدة وتوجيه القرارات الخاصة بحل مشاكل النقل في المؤسسات. حيث تبقى كل هذه الطرق والتقنيات مساعدة في عملية اتخاذ القرار الأمثل مما يوفر للمسير عدة خيارات مع استعمال خبرته وتجربته في توجيه الحلول المقترحة.

**التوصيات:**

يعتبر موضوع الدراسة قاعدة خصبة للكثير من الباحثين المتخصصين، حيث يمكن تطبيقه ميدانيا في كل المجالات، لا سيما النقل، التوزيع، تدفق الأنترنت، مسائل التخصيص، وأخرى لا تعد ولا تحصى. لذلك ندعو الباحثين في التقدم وتطوير العمل لما يحمله من أهمية بالغة في الواقع، واحتوائه على عدد كبير من الطرق والتقنيات المعتمدة في الحل، التي أصبحت تمثل ضرورة لا يمكن الاستغناء عنها في الدول المتقدمة. لكن للأسف نلاحظ نقص كبير في تطبيق الأساليب الكمية المساعدة على اتخاذ القرار في تخطيط وتسير وظيفة النقل على المستوى الوطني، وهذا راجع إلى ضعف كفاءة المسؤولين في هذا المجال والاعتماد على الأساليب التقليدية فقط. لذلك يجب تطوير العلاقة العلمية بين الجامعة ومختلف القطاعات من أجل ضرورة اهتمام المؤسسات الجزائرية بوظيفة النقل والاستغناء عن تسييرها باستخدام التجربة الشخصية والخبرة لمتخذ القرار. وذلك بالاعتماد على كفاءات بشرية مختصة في مجال الصياغة الرياضية باستخدام مختلف التقنيات الكمية. مع مشاركة المسؤولين في المؤسسات لإقناعهم بأهمية استخدام التقنيات الكمية في ترشيد القرارات. والبحث عن حل إشكاليات جديدة في ميادين كثيرة، وبطرق مختلفة.

# قائمة المراجع:


A. A. Assad. (1978). Multicommodity network flows—A survey - Networks, 8(1):37-91.

A. Colorni,, M. Dorigo,, & V. Maniezzo. (1998). Distributed Optimization by AntColonies. *Proceedings of the 1rst European Conference on Artificial life.* Elsevier Publishing.

A.H.Land, & A.G.Doig. (1960). *An automatic method for solving discrete programming problems.* 14: Econometrica,.

A.Schrijver. (1986). *Theory of linear and integer programming.* 15: Wiley and Sons.

Ahuja, R. K. (1993). Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA.

Alaeddine, E. A. (2008). *Application d'un modèle de simulation et d'analyse de sensibilité à l'évaluation d'un projet de numérisation.* MONTRÉAL: UNIVERSITÉ DU QUÉBEC.

Alvelos, F. P. (2005). *Branch-and-Price and Multicommodity Flows.* Universidade do Minho.

Archetti, C. F. (2008). The capacitated team orienteering and profitable tour problems- Journal of the Operational Research Society.

Baeck T, Fogel D.B, & Michalewicz Z. (1997). *Handbook of Evolutionary Computation.* 18: Institute of Physics Publishing and Oxford University Press.

Balakrishnan R, R. K. (2012). *A Textbook of Graph Theory.* Springer.

Balakrishnan, A. M. (1989). *A dual-ascent procedure for large-scale uncapacitated network design. .* Operations Research 37(5):716-740.

Balakrishnan, A. M. (1997). *Network design. .* Annotated bibliographies in combinatorial optimization, 311-334.

Baptiste, P. a. (2005). *Gestion de production et ressources humaines: méthodes de planification dans les systèmes productifs.* Presses inter Polytechnique p 182.

Barnhart, C. e. (1996). *Network design for express freight service.* Operations Research, 12(6):852-863.

Barnhart, C. J. (2000). *RailRoad Blocking: A Network Design Application. .* Operations Research, 48(4):603-614.

Barnhart, C. K. (2002). *Network design for express shipment delivery. .* Computational Optimization and Applications 21(3):239-262.

Boimond, J.-L. (2012). *Simulation systèmes de production réseaux de pétri.* Angers: Université d’Angers.

Bouhmala, N. (2018). *A Multilevel Genetic Algorithm for the Maximum Satisfaction Problem.* IntechOpen.

Bouysso, D. (2006). *Preference Modelling and Multiple Criteria Decision Aid.* Paris: Université Paris-Dauphine.

Bruno Bachelet. (s.d.). *Recherche Operationnelle*. Récupéré sur nawouak: www.nawouak.net.

C. Ribeiro and F. Soumis. (1994). *A column generation approach to the multiple-depot vehicle scheduling problem", .* Operations Research, vol. 42, no. 1, 41–53, .

Caire, G. A. (2002). *Dictionnaire d'économie, 2eme éd.* Paris: Dalloz.

Caire, G. A. (2002). *Dictionnaire d'économie, 2eme éd.* Paris: Dalloz.

CATHERINE MANCEL. (2004). *MODÉLISATION ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'OPTIMISATION COMBINATOIRE, ISSUS D'APPLICATIONS SPATIALES.* Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, , p49.

Chou, M. S. (2003). *Inventory-routing problem in sea freight: Direct versus transshipment model. .*

Crainic, T. G. (1997). *Planning models for freight transportation.* European Journal of Operational Research, 97(3): p 409-438.

Crainic, T. G. (2000). *Service network design in freight transportation.* European Journal of Operational Research, 122(2):272-288.

D. Villeneuve, J. D. (2005.). *On compact formulations for integer programs solved by column generation.* Annals of Operations Research, vol.139, no. 1, 375–388.

David R. Morrisona, S. H. (2016). *Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning.* Elsevier .

Delevacq, A., Delisle, P., & Krajecki, M. (2013). *Parallel Ant Colony Optimization on Graphics Processing Units.* semantic scholar.

Dodge, Y. (2008). *Premiers pas en simulation.* France: Springer-Verlag.

Douiri, s., Elbernoussi, S., & Lakhbab, H. (s.d.). *Cours des Méthodes de Résolution Exactes Heuristiques et Métaheuristiques.* Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.

Duplat, C.-A. (2004 ). *Analyser ET maîtriser la situation financière de son entreprise.* Vuibert .

Duran Toksari, M. (2016). *A hybrid algorithm of Ant Colony Optimization (ACO) and Iterated Local Search (ILS) for estimating electricity domestic consumption: Case of Turkey.* International Journal of Electrical Power & Energy Systems.

Even, S. I. (1976). SIAM Journal on Computing, 5:691.

F. Glover, & M. Laguna. (1997). Tabu Search. *Kluwer Academic Publishers*.

F.Glover,, G.A.Kochenberger,, & B.Alidaee. (1998). Adaptive memory tabu search for binary quadratic programs. *Management Science*.

Farvolden, J. M. (1994). *Subgradient methods for the service network design problem. .* Transportation Science, 28(3):256.

Fayad, N. b.-G. (2003). *Méthodes de Monte Carlo appliquées à la Finance.* e-theque .

Feillet, D. D. (2005). Transportation Science, 39(2):188-205.

Feremans, C. L. (2003). *Generalized network design problems. .* European Journal of Operational Research, 148(1):1-13.

Finke, G. (2008). *Operations Research and Networks.* Wiley p 159-165.

Fortin, A. (1998 ). *ETAT DES FLUX DE TRESORERIE.* Presses de l'Université du Québec.

François-Eric Racicot, R. T. (2006 ). *Finance computationnelle et gestion des risques : Ingénierie financière avec applications Excel (Visual Basic) et Matlab.* Presses de l'Université du Québec.

G. Desaulniers, J. D. (1997). *Daily aircraft routing and scheduling",.* Management Science, vol. 43, no. 6, 841–855, .

G. Desaulniers, J. D. (1998). *A unified framework for deterministic time constrained vehicle routing and crew scheduling problems.* in T. G. Crainic and G. Laporte (eds.), Fleet Management and Logistics, ,Kluwer, Norwell, MA, 57–93, .

G.B. Dantzig and P. Wolfe. (1960). *Decomposition principle for linear programs.* Operations Research. vol. 8, 101–111,.

Gardès, N. (2006). *Cours de Gestion financière, Chapitre 2 : La décision d'investissement.* Bordeaux : Université de Bordeaux .

Gendron, B. C. (1998). *Multicommodity capacitated network design. .* Telecommunications Network Planning, 1-19.

Hacure A., J. M. (2001). *Risk Analysis in Investment Appraisal Based in Monte Carlo Simulation Technique.* the European Physical Journal B, No. 20.

Hacure A., J. M. (2001). *Risk Analysis in Investment Appraisal Based in Monte Carlo Simulation Technique.* the European Physical Journal B.

Hassid, O. (2008 ). *La gestion des risques - 2 édition.* Paris: Dunod.

Henri-Pierre Maders, J.-L. M. (2009 ). *Piloter les risques d'un projet.* Groupe Eyrolles.

I. Irnich and G. Desaulniers. (2005). *Shortest path problems with resource constraints.* Kluwer Academic Publishers, 33–67, .

Irnich, S. (2002).

J. Desrosiers, Y. D. (1983). *The multiple vehicle dial-a-ride problem .* Computer-Aided Transit Scheduling Lecture Notes in Economics and Mathematical System, vol. 308, 15–27, .

J.C. Laurent, G. D. (1995). *A column generation method for optimal load management via control of electric water heaters.* IEEE PowerElectric Systems, vol. 10, no. 3, 1389–1400,.

J.H.Holland. (1975). Adaptation in natural and artificial systems. *University of Michigan press*.

J.Kennedy, & R.Eberhart. (1995). Particle swarm optimization, . *proceedings of ieee international conference on neural networks.*

Jaillet, P. S. (1996). *Airline network design and hub location problems. .* Location Science, 4(3):195-212.

Jedrzejewski, F. ( 2005). *Introduction aux méthodes numériques .* Paris: Springer-Verlag France, .

Jeong, I.-J., & Leon, V. J. (2002). *Decision-making and cooperative interaction via coupling agents in organizationally distributed systems.* IIE Transactions V34.

Jungnickel, D. (2013). *Graphs, Networks and Algorithms 4th ed.* Springer.

Kalvelagen, E. (2009). *Dantzig-Wolfe Decomposition With GAMS.* Computer Science.

Kim, D. (1997). *Large Scaie Transportation Service Network Design: Models, Algorithms and Applications. .* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology.

Laporte, G. (1992). *The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms.* European Journal of Operational Research, 59(3):345-358.

Laurencelle, L. (2006 ). *Hasard, nombre aléatoire ET méthode Monte Carlo. .* Presses de l'Université du Québec.

LIANG, Z. (2011). *COLUMN GENERATION AND NETWORK MODELING.* New Brunswick, New Jersey.

LK. Ho and E. Loute. (1981). *Computational experience with advanced implementation of decomposition Algorithms for linear programming.* Mathematical Programming 27: 282-290.

M. Christiansen and B. Nygreen. (2005). *"Robust inventory ship routing by column generation.* Kluwer Academic Publishers, 197–224, .

M. Desrochers and F. Soumis. (1989). *A column generation approach to the urban transit crew scheduling problem", .* Transportation Science, vol. 23, no. 1, 1–13, .

M. Gamache, F. S. (1998). *A column generation approach for large scale aircrew rostering problems", .* Operations Research 47(2), 247-263.

M. S. Bazaraa, J. J. (2010). *LINEAR PROGRAMMING and Network Flows.* WILEY.

M.E. Lübbecke and J. Desrosiers. (2005,). *"Selected topics in column generation.* Operations Research, vol. 53, no. 6, 1007–1023.

Magnanti et Wong. (1984). *Network design and transportation planning: models and algorithms.* Transportation science, 18(1):1-55.

Magnanti, T. L. (1995). *Modeling and solving the two-facility capacitated network loading problem.* Operations Research, 43(1):142-157.

Maquin, D. (2008). *Eléments de Théorie des Graphes et Programmation Linéaire.* INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE.

Mehdi Lamiri. (2007). *Planification des blocs opératoires avec prise en compte des aléas.* Saint-Étienne: thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de.

Melyon, G. (2007 ). *Gestion financière 4em édition.* BREAL .

Minoux, M. (1989). *Network synthesis and optimum network design problems Models, solution methods and applications. .* Networks, 19(3):313-360.

Monmege, B. (2020). *Introduction `a l'informatique Graphes.* Laboratoire d'informatique et systèmes (LIS) à l'université d'Aix-Marseille (AMU).

N.Metropolis, M.N.Rosenbluth,, & H.A.Teller. (1953). Equation of state calculation by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics,*.

Obreque, C., Donoso, M., Gutiérrez, G., & Marianov, V. (2010). *A branch and cut algorithm for the hierarchical network design problem.* European Journal of Operational Research.

Okap, A. M. (2008 ). *Application d'un modele de simulation et d'analyse de sensibilite a l'evaluation d'un projet.* UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL.

Olivier, M. (2010). *Méthodes Monte Carlo/ petite introduction*. Récupéré sur cours: https://www.youtube.com/watch?v=Re-osEgL3OY

Optimization, N. (2010). *Multicommodity Flows 2.* MITOpenCourseWare.

Papavasiliou, A. (2018). *Dantzig Wolfe Decomposition - Operations Research.* Université catholique de Louvain.

Pereira, F., da-Cunha, P., & Alvelos. (2005). *Branch-and-Price and Multicommodity Flows,.* Universidade do Minho Escola de Engenharia) ; p22-23.

POPIOLEK, N. (2006). *Guide du choix de l'investissement, .* Paris: éd. D'organisation.

Prescott-Gagnon, E. (2011). *MÉTHODES HYBRIDES BASÉES SUR LA GÉNÉRATION DE COLONNES POUR DES PROBLÈMES DE TOURNÉES DE VÉHICULES.* UNIVERSITE DE MONTREAL.

Ravindra K. Ahuja, , Thomas L. Magnanti,, & James B. Or. (1993). *Network Flows Theory, Algorithms, and Applications.* Prentice Hall , .

Rustichini, A. (1998). Dynamic Programming Solution of Incentive Constrained Problems. *Journal of Economic Theory,*, 16.

S. BenIsmail. (2012). *Introduction à l optimisation combinatoire.* Majeure Informatique - TELECOM Bretagne.

S. Gélinas and F. Soumis. (2005). *Dantzig-Wolfe decomposition for job shop scheduling.* Kluwer Academic Publishers, 271–301, .

Salimifard, K., & Bigharaz, S. (2020). *The multicommodity network flow problem state of the art classifcation, applications, and solution methods.* Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2020.

SCHRENK, S. (2010). *Contributions à la conception de réseau de service en transport .* (These présentée et soutenue publiquement), p89.

schrenk, S. (2010). *Contributions à la conception de réseau de service en transport.* UNIVERSITE DE GRENOBLE.

Schrenk, S. (2010). *Contributions à la conception de réseau de service en transport - .* UNIVERSITE DE GRENOBLE p72 + p 87-98.

SIGNORET, J.-P. (2008). *Analyse des risques des systèmes dynamiques : réseaux de Petri - Principes*. Récupéré sur techniques-ingenieur: http://www.techniques-ingenieur.fr/

SOUAR.H. (2016). *Résolution du problème de multi-flot compatible à coût minimal par l'approche génération de colonnes.* Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf.

Soumis, F. (2013). *Génération de Colonnes journée de la recherche 2013.* Cahiers du GERAD.

Sundarraj, J. K. (1989). *DECOMP an Implementation of Dantzig-Wolfe Decomposition .* Springer.

Swamy, K.-L. D. (2016). *Search and Optimization by Metaheuristics.* springer.

T. G. Crainic, & Semet, F. (2005). *Recherche opérationnelle et transport de marchandises.* Optimisation combinatoire: applications.

Taverdet-Popiolek, N. (2006 ). *Guide du choix d'investissement .* Editions d'Organisation Groupe Eyrolles.

Thauvron, A. (2003 ). *Les choix d'investissement.* e-theque .

Thisse, J.-F. (2011). *théorie des jeux : une introduction.* Stockholm, Sweden: Research Institute of Industrial Economics.

Toth, P. e. (2002). *The Vehicle Routing Problem. SIAM monographs on discrete mathematics and applications. .* Society for Industrial and Applied Mathematics.

Wang, D. Z. (2008). Transportation Research Part B, 42(9):798-822.

Wang, K., Li, X., Gao, L., Li, P., & Gupta, S. (2021). *A genetic simulated annealing algorithm for parallel partial disassembly line balancing problem.* Applied Soft Computing.

Wieberneit, N. (2008). *Service network design for freight transportation a review.* OR Spectrum, 30:77-112.

WOLF., F. B. (2009). *Evaluation de projets d'investissement pétrolier en utilisant la simulation de Monte Carlo.* Dunkerque, France.: Instiut des Mers du Nord, Université du Littoral.

Y. Dumas, J. Desrosiers, & J. Soumis. (1986). A dynamic programming solution of the large-scale single vehicle dial-ride problem with time windows. *American Journal of Mathematical and Management Science*, 17.

Y. Dumas, J. D. (1991). *The pickup and delivery problem with time windows", .* European Journal of Operations Research, vol. 54, no. 1, 7–22, .

Yan, S. C.-C.-H. (2005). Transportation Research Part E, 42(5):409-430.

Assad, Arjang A. (1978). Multicommodity network flows—a survey. Networks, 8(1), 37-91.

Balakrishnan, Rangaswami, & Ranganathan, Kanna. (2012). A textbook of graph theory: Springer Science & Business Media.

Bazaraa, Mokhtar S, Jarvis, John J, & Sherali, Hanis D. (2008). Linear programming and network flows: John Wiley & Sons.

Conejo, Antonio J, Castillo, Enrique, Minguez, Roberto, & Garcia-Bertrand, Raquel. (2006). Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications: Springer Science & Business Media.

Dai, Weibin, Sun, Xiaoqian, & Wandelt, Sebastian. (2016). Finding feasible solutions for multi-commodity flow problems. Paper presented at the 2016 35th Chinese Control Conference (CCC).

Desaulniers, Guy, Desrosiers, Jacques, & Solomon, Marius M. (2006). Column generation (Vol. 5): Springer Science & Business Media.

Fournier, Jean-Claude. (2013). Graphs theory and applications: with exercises and problems: John Wiley & Sons.

Gabrel, Virginie, Knippel, Arnaud, & Minoux, Michel. (1999). Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. Operations Research Letters, 25(1), 15-23.

Ho, James K, & Sundarraj, Rangaraja P. (1989). DECOMP: an implementation of Dantzig-Wolfe decomposition for linear programming (Vol. 338): Springer.

Kennington, Jeff L. (1978). A survey of linear cost multicommodity network flows. Operations research, 26(2), 209-236.

Lopez, Pierre. (2003). Cours de graphes. In: Rapport technique, LAAS-CNRS.

Lucas, Michael W. (2010). Network flow analysis: No Starch Press.

MINOUX, M. GONDRAN; M. (2009). Graphes et algorithmes (4e éd.). In Lavoisier (Ed.).

Salimifard, Khodakaram, & Bigharaz, Sara. (2020). The multicommodity network flow problem: state of the art classification, applications, and solution methods. Operational Research, 1-47.

Todinov, Michael T. (2013). Flow Networks: Analysis and optimization of repairable flow networks, networks with disturbed flows, static flow networks and reliability networks: Newnes.

Wang, I-Lin. (2018). Multicommodity network flows: A survey, part II: Solution methods. International Journal of Operations Research, 15(4), 155-173.

Alvelos, Filipe, & de Carvalho, JM Valério. (2007). An extended model and a column generation algorithm for the planar multicommodity flow problem. Networks: An International Journal, 50(1), 3-16.

Alvelos, Filipe Pereira. (2005). Branch-and-price and multicommodity flows.

Babonneau, Frédéric. (2006). Solving the multicommodity flow problem with the analytic center cutting plane method. University of Geneva,

Barnhart, Cynthia, Hane, Christopher A, Johnson, Ellis L, & Sigismondi, Gabriele. (1994). A column generation and partitioning approach for multi-commodity flow problems. Telecommunication Systems, 3(3), 239-258.

Barnhart, Cynthia, Hane, Christopher A, & Vance, Pamela H. (2000). Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. Operations Research, 48(2), 318-326.

Benhamiche, Amal, Mahjoub, A Ridha, Perrot, Nancy, & Uchoa, Eduardo. (2017). Column generation based algorithms for the capacitated multi-layer network design with unsplittable demands. Pesquisa Operacional, 37, 545-570.

Borndörfer, Ralf, Grötschel, Martin, & Pfetsch, Marc E. (2007). A column-generation approach to line planning in public transport. Transportation Science, 41(1), 123-132.

Chung, William, & Fuller, J David. (2010). Subproblem approximation in Dantzig-Wolfe decomposition of variational inequality models with an application to a multicommodity economic equilibrium model. Operations Research, 58(5), 1318-1327.

Ciappina, Jussara Rodrigues, Yamakami, Akebo, & Silva, Ricardo Coelho. (2012). Decomposition's Dantzig–Wolfe applied to fuzzy multicommodity flow problems. Computers & operations research, 39(12), 3394-3407.

Dai, Liyun, Zhao, Hengjun, & Liu, Zhiming. (2019). Solving Splitted Multi-Commodity Flow Problem by Efficient Linear Programming Algorithm. arXiv preprint arXiv:1903.07469.

Dai, Weibin, Sun, Xiaoqian, & Wandelt, Sebastian. (2016). Finding feasible solutions for multi-commodity flow problems. Paper presented at the 2016 35th Chinese Control Conference (CCC).

Gabrel, Virginie, Knippel, Arnaud, & Minoux, Michel. (1999). Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. Operations Research Letters, 25(1), 15-23.

Gendron, Bernard, Crainic, Teodor Gabriel, & Frangioni, Antonio. (1999). Multicommodity capacitated network design. In Telecommunications network planning (pp. 1-19): Springer.

Grande, Enrico, Nicosia, Gaia, Pacifici, Andrea, & Roselli, Vincenzo. (2018). An exact algorithm for a multicommodity min-cost flow over time problem. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 64, 125-134.

Holmberg, Kaj, & Yuan, Di. (2003). A multicommodity network-flow problem with side constraints on paths solved by column generation. INFORMS Journal on Computing, 15(1), 42-57.

Karsten, Christian Vad, Pisinger, David, Ropke, Stefan, & Brouer, Berit Dangaard. (2015). The time constrained multi-commodity network flow problem and its application to liner shipping network design. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 76, 122-138.

Kawarabayashi, Ken-ichi, & Kobayashi, Yusuke. (2013). All-or-nothing multicommodity flow problem with bounded fractionality in planar graphs. Paper presented at the 2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.

Larsson, Torbjörn, Patriksson, Michael, & Rydergren, Clas. (2003). Inverse nonlinear multicommodity flow optimization by column generation. Optimization Methods and Software, 18(5), 601-613.

Larsson, Torbjörn, Patriksson, Michael, & Rydergren, Clas. (2004). A column generation procedure for the side constrained traffic equilibrium problem. Transportation Research Part B: Methodological, 38(1), 17-38.

Liang, Zhe. (2011). Column generation and network modeling in large-scale logistics networks: Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick.

Lindstrom, Joe. (2004). Multi-commodity Network Flow-Methods and Applications. Paper presented at the Proc. Information Resources Management Association International Conference (IRMA04), Business Process Management Tools and Technologies Track, New Orleans, Louisiana, May 2004.

Machado, Catia MS, Mayerle, Sergio F, & Trevisan, Vilmar. (2010). A linear model for compound multicommodity network flow problems. Computers & operations research, 37(6), 1075-1086.

Maurras, Jean-François, & Vaxès, Yann. (1997). Multicommodity network flow with jump constraints. Discrete Mathematics, 165, 481-486.

McMasters, Alan W, & Mustin, Thomas M. (1970). Optimal interdiction of a supply network. Naval Research Logistics Quarterly, 17(3), 261-268.

Moradi, Siamak, Raith, Andrea, & Ehrgott, Matthias. (2015). A bi-objective column generation algorithm for the multi-commodity minimum cost flow problem. European Journal of Operational Research, 244(2), 369-378.

Touati, Nora. (2008). Amélioration des performances du schéma de la génération de colonnes: Application aux problemes de tournées de véhicules. Paris 13,

Wang, I-Lin. (2018). Multicommodity network flows: A survey, part II: Solution methods. International Journal of Operations Research, 15(4), 155-173.

Weibin, DAI, Zhang, Jun, & Xiaoqian, SUN. (2017). On solving multi-commodity flow problems: An experimental evaluation. Chinese Journal of Aeronautics, 30(4), 1481-1492.

Wollmer, Richard D. (1969). The Dantzig-Wolfe decomposition principle and minimum cost multicommodity network flows. Retrieved from

Yaghini, Masoud, Rahbar, Mohadeseh, & Karimi, Mohammad. (2013). A hybrid simulated annealing and column generation approach for capacitated multicommodity network design. Journal of the Operational Research Society, 64(7), 1010-1020.

Souar Hamid (2016) "Résolution du problème de multi-flot compatible à coût minimal par l'approche génération de colonnes "Université des Sciences et de la Technologie d'Oran

Bauguion, Pierre-Olivier. (2014). Décomposition de multi-flots et localisation de caches dans les réseaux. Evry, Institut national des télécommunications,

Ben-Ameur, Walid, Bauguion, Pierre, & Gourdin, Eric. Une modélisation arborescente performante pour les problèmes de multi-flots.

Ben Amor, Hatem. (1997). Résolution du problème de découpe unidimensionnelle par une méthode de génération de colonnes: École Polytechnique de Montréal.

Bentz, Cédric. (2006). Résolution exacte et approchée de problèmes de multiflot entier et de multicoupe: algorithmes et complexité. Thèse de docteur en informatique, Conservatoire Nationale des Arts et …, Gauvin, Charles. (2012). Un algorithme de génération de colonnes pour le problème de tournées de véhicule avec demandes stochastiques. École Polytechnique de Montréal,

Létocart, Lucas, Costa, Marie-Christine, & Roupin, Frédéric. (2003). Multicoupes minimales et multiflots maximaux en nombres entiers dans les anneaux. Paper presented at the 5ème congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision.

Marcus, Karina. (1996). Multiflots, métriques et graphes h-parfaits: les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire. Université Joseph-Fourier-Grenoble I,

Minoux, M. (1975). Résolution des problèmes de multiflots en nombres entiers dans les grands réseaux. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, 9(V3), 21-40.

Quilliot, Alain, Bendali, Fatiha, & Mailfert, Jean. (2005). Flots entiers et multiflots fractionnaires couplés par une contrainte de capacité. RAIRO-Operations Research, 39(3), 185-224.

Rezig, Wafa. (1995). Problèmes de multiflots: état de l'art et approche par décomposition décentralisée du biflot entier de coût minimum. Université Joseph-Fourier-Grenoble I,

Schrenk, Susann. (2010). Contributions à la conception de réseau de service en transport. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG,

Thierry MAUTOR et Edith NAUDIN (2000) "Décomposition de Dantzig-Wolfe et Génération de colonnes Applications au Problème de tournées de véhicules avec des contraintes de ressource"

A. Huart, F. Semet. Optimisation de la planification de tournées de cars. Paper presented at the Université de Valenciennes   Ecole Centrale de Lille.

Abdelghany, A., & Abdelghany, K. (2012). Modeling Applications in the Airline Industry: Ashgate Publishing Limited.

Afsar, H Murat. Résolution du problème de tournées sur arc avec fenêtres de temps souples.

ALFANDARI, Laurent, Plateau, Agnès, & Schepler, Xavier. (2014). Un algorithme de branch-and-price-and-cut pour la planification durable de rotations agricoles. Paper presented at the ROADEF - 15ème congrès annuel de la Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision, Bordeaux, France. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00946289

Altay, Can, & Delic, Hakan. (2014). Distributed energy management of microgrids with Dantzig-Wolfe decomposition. Paper presented at the Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe), 2014 IEEE PES.

Alvelos, Filipe, & de Carvalho, JM. (2007). An extended model and a column generation algorithm for the planar multicommodity flow problem. Networks, 50(1), 3-16.

Andréasson, N., Evgrafov, A., & Patriksson, M. (2007). An Introduction to Continuous Optimization: Professional Publishing Svc.

Andrei, Neculai. (2013). Nonlinear Optimization Applications Using the GAMS Technology. New York: Springer.

Appelgren, Leif H. (1969). A column generation algorithm for a ship scheduling problem. Transportation Science, 3(1), 53-68.

Archetti, Claudia, Bianchessi, Nicola, & Speranza, Maria Grazia. (2011). A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. Networks, 58(4), 241-254.

Archetti, Claudia, Bouchard, Mathieu, & Desaulniers, Guy. (2011). Enhanced branch and price and cut for vehicle routing with split deliveries and time windows. Transportation Science, 45(3), 285-298.

Assad, Arjang A. (1978). Multicommodity network flows—a survey. Networks, 8(1), 37-91.

Avilap1q, Thais, Corberánp1q, Angel, Planap2q, Isaac, & Sanchisp3q, José M. (2015). A branch-and-cut algorithm for the Profitable Windy Rural Postman Problem.

Azi, Nabila. (2011). Méthodes exactes et heuristiques pour le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps et réutilisation de véhicules.

Baptiste, Pierre. (2005). Gestion de production et ressources humaines: méthodes de planification dans les systèmes productifs: Presses inter Polytechnique.

Barnhart, Cynthia, Hane, Christopher A, & Vance, Pamela H. (2000). Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. Operations Research, 48(2), 318-326.

Bauguion, Pierre-Olivier. (2014). Multi flow decomposition methods and network cache location. Institut National des Télécommunications, Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01161608

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., & Sherali, H.D. (2011). Linear Programming and Network Flows: Wiley.

Belov, Gleb, Letchford, Adam N, & Uchoa, Eduardo. (2005). A node-flow model for the 1D stock cutting: robust branch-cut-and-price. University of Dresden, Lancaster University and Universidade Federal Fluminense.

Ben-Ameur, Walid, Bauguion, Pierre, & Gourdin, Eric. Une modélisation arborescente performante pour les problèmes de multi-flots.

Ben-Ameur, Walid, & Neto, José. (2007). Acceleration of cutting-plane and column generation algorithms: Applications to network design. Networks, 49(1), 3-17.

Benavent, Enrique, Corberán, Ángel, Desaulniers, Guy, Lessard, François, Plana, Isaac, & Sanchis, José M. (2014). A branch-price-and-cut algorithm for the min-max k-vehicle windy rural postman problem. Networks, 63(1), 34-45.

Bentz, Cédric. (2006). Résolution exacte et approchée de problèmes de multiflot entier et de multicoupe: algorithmes et complexité. Université Paris Dauphine,

Berge, Claude. (1970). Graphes et hypergraphes. Paris: Dunod.

Bienstock, Daniel, Chopra, Sunil, Günlük, Oktay, & Tsai, Chih-Yang. (1998). Minimum cost capacity installation for multicommodity network flows. Mathematical Programming, 81(2), 177-199.

Birge, John R, & Rosa, Charles H. (1996). Parallel decomposition of large-scale stochastic nonlinear programs. Annals of Operations Research, 64(1), 39-65.

Borndörfer, Ralf, Grötschel, Martin, & Pfetsch, Marc E. (2007). A column-generation approach to line planning in public transport. Transportation Science, 41(1), 123-132.

Bouzgarrou, Mohamed Ekbal. (1998). Parallélisation de la méthode du" Branch and Cut" pour résoudre le problème du voyageur de commerce. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG,

Bretto, Alain, Faisant, Alain, & Hennecart, François. (2012). Éléments de théorie des graphes: Springer Science & Business Media.

Cappanera, Paola, & Gallo, Giorgio. (2004). A multicommodity flow approach to the crew rostering problem. Operations Research, 52(4), 583-596.

Castro, Jordi, & Nabona, Narcis. (1996). An implementation of linear and nonlinear multicommodity network flows. European Journal of Operational Research, 92(1), 37-53.

Chen, Zhi-Long, & Powell, Warren B. (1999). A column generation based decomposition algorithm for a parallel machine just-in-time scheduling problem. European Journal of Operational Research, 116(1), 220-232.

Chronopoulos, Anthony Theodore, & Wang, Gang. (1997). Parallel solution of a traffic flow simulation problem. Parallel computing, 22(14), 1965-1983.

Ciappina, Jussara R, Yamakami, Akebo, & Silva, Ricardo C. (2012). An adaptation of Dantzig-Wolfe decomposition applied to fuzzy multicommodity flow problems. Paper presented at the Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2012 IEEE International Conference on.

Conejo, Antonio J, Castillo, Enrique, Minguez, Roberto, & Garcia-Bertrand, Raquel. (2006). Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications: Springer Science & Business Media.

Consiglio, Andrea, Nielsen, Søren S., & Zenios, Stavros Andrea. (2009). Practical financial optimization a library of GAMS models. Chichester, U.K.: Wiley.

Cordeau, Jean-François, & décisions, Groupe d'études et de recherche en analyse des. (2000). The VRP with time windows: Montréal: Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions.

Cremeans, JE, Smith, RA, & Tyndall, GR. (1970). Optimal multicommodity network flows with resource allocation. Naval Research Logistics Quarterly, 17(3), 269-279.

Cruz, Frederico RB, Mateus, Geraldo Robson, & Smith, J MacGregor. (2003). A branch-and-bound algorithm to solve a multi-level network optimization problem. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 2(1), 37-56.

Dai, Yang, Sekitani, Kazuyuki, & Yamamoto, Yoshitsugu. (1992). A variable dimension algorithm with the Dantzig-Wolfe decomposition for structured stationary point problems. Zeitschrift für Operations Research, 36(1), 23-53.

Danna, Emilie, & Le Pape, Claude. (2005). Branch-and-price heuristics: A case study on the vehicle routing problem with time windows. In Column generation (pp. 99-129): Springer.

Dantzig, George B, & Thapa, Mukund N. (2006). Linear programming 1: introduction: Springer Science & Business Media.

Dantzig, George B., & Thapa, Mukund Narain. (2003). Linear programming. 2, 2. New York: Springer.

Dantzig, George Bernard, & Infanger, Gerd. (2011). Stochastic programming : the state of the art ; in honor of George B. Dantzig. New York, NY: Springer.

De la Poix de Fréminville, Pierre. (2012). Partitionnement d'une zone géographique en territoires homogénes et contigus. École Polytechnique de Montréal,

Deleplanque, Samuel. (2014). Modélisation et résolution de problèmes difficiles de transport à la demande et de Lot-Sizing.

Desaulniers, G., Desrosiers, J., & Solomon, M.M. (2006). Column Generation: Springer US.

Desaulniers, Guy. (2007). Managing large fixed costs in vehicle routing and crew scheduling problems solved by column generation. Comput Oper Res, 34(4), 1221-1239.

Desrosiers, Jacques, Pelletier, Paul, & Soumis, François. (1983). Plus court chemin avec contraintes d'horaires. Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, 17(4), 357-377.

Dodge, Y. (2006). Optimisation appliquée: Springer.

Dück, Viktor, Wesselmann, Franz, & Suhl, Leena. (2011). Implementing a branch and price and cut method for the airline crew pairing optimization problem. Public Transport, 3(1), 43-64.

El-Hajj, Racha, Moukrim, Aziz, Chebaro, Bilal, & Kobeissi, Mohamed. (2015). Algorithme exact basé sur la génération de colonnes pour la résolution du probleme de tournées sélectives avec fenêtres de temps. Paper presented at the ROADEF2015.

El Filali, Souhaïla. (2014). Méthode de génération de colonnes pour les problèmes de conception de réseaux avec coûts d'ajout de capacité.

Elaoud, Sèmya. (2007). théorie des graphes. Paper presented at the l'Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax.

Farvolden, Judith M, Powell, Warren B, & Lustig, Irvin J. (1993). A primal partitioning solution for the arc-chain formulation of a multicommodity network flow problem. Operations Research, 41(4), 669-693.

Faye, Alain. Génération de colonnes, Théorie des graphes Paper presented at the ENSIIE-Master MPRO.

Faye, Mathieu Trampont–Christian Destré –Alain. Une methode de generation de colonnes basee sur un algorithme central de plans coupants

Paper presented at the Orange Labs / CEDRIC.

FEILLET-, D. (2009). Branch and Price and Cut pour des problèmes de transport de biens ou de personnes. Paper presented at the ECOLE DES MINES DE SAINT-ETIENNE.

Feillet, Dominique. (2008). Résolution de problèmes de tournée par Branch and Price. In: Ecole de jeunes chercheurs. Avignon.

Feillet, Dominique. (2010). A tutorial on column generation and branch-and-price for vehicle routing problems. 4or, 8(4), 407-424.

Ferland, Jacques A. (2012 ). Méthodes de décomposition. Stanford University. http://www.iro.umontreal.ca/~ferland

Ferris, Michael C., Mangasarian, Olvi L., & Wright, Stephen J. (2007). Linear programming with MATLAB. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics : Mathematical Programming Society.

Fortz, Bernard. méthode de branch and bound. Paper presented at the Université Libre de Bruxelles. http://homepages.ulb.ac.be/~bfortz/

Fortz, Bernard. (2012-2013). INFO-F-524 : Optimisation continue. http://homepages.ulb.ac.be/˜bfortz/INFO-F-524.html

Fortz, Bernard. ( 2013-2014). INFO-F-524 : Troisième partie Génération de colonnes. Paper presented at the Continuous Optimization. http://homepages.ulb.ac.be/~bfortz/

Fouilhoux, Pierre. (2013). Programmation mathématique Discrète et Modèles Linéaires.

Fouilhoux, Pierre, Michel, Sophie, & Questel, Aurélien. Générer des colonnes par un algorithme de branch-and-cut: application au problème de couverture par des anneaux-étoiles multi-dépôts.

Gabrel, Virginie, Knippel, Arnaud, & Minoux, Michel. (1999). Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. Operations Research Letters, 25(1), 15-23.

Garaix, Thierry. (2007). Étude et résolution exacte de problèmes de transport à la demande avec qualité de service. Université d'Avignon,

Gass, Saul I. (2013). Encyclopedia of operations research and management science. 1, 1 Multicommodity Network Flows. New York [u.a.]: Springer.

Gauthier, Jean Bertrand. (2011). Une méthode de génération de colonnes pour les problèmes linéaires dégénérés.

Gauvin, Charles. (2012). Un algorithme de génération de colonnes pour le problème de tournées de véhicule avec demandes stochastiques. École Polytechnique de Montréal,

GDCHDIPEF, BCDEF. (2012). N¡ d'Ordre: DU 1718 EDSPIC: 366. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II,

Gendron, Bernard, Crainic, Teodor Gabriel, & Frangioni, Antonio. (1999). Multicommodity capacitated network design: Springer.

GERAD, François Soumis. (2013). GÉN. DE COL. + AGRÉGATION Succès en planification. Paper presented at the LA R.O. à MONTRÉAL. www.polymtl.ca/recherche/doc/Soumis.pdf

Golden, Bruce L. (1975). A minimum-cost multicommodity network flow problem concerning imports and exports. Networks, 5(4), 331-356.

Gondran, Michel, & Minoux, Michel. (1984). Graphs and algorithms. Chichester [West Sussex]; New York: Wiley.

GONDRAN Michel, MINOUX Michellavoisier. (2009). Graphes et algorithmes (4e éd.).

Gonzales, Christophe. Cours 4 : m´ethode r ´ evis ´ee du simplexe. Paper presented at the LIP6 – Universit ´e Paris 6, France.

Groiez, Mounira. (2013). Étude et séparation des inégalités valides pour des problèmes de partitionnement et de couverture. École Polytechnique de Montréal,

Holmberg, Kaj, & Jönsten, K. (1995). A simple modification of Dantzig-Wolfe decomposition. Optimization, 34(2), 129-145.

Hsu, Lih-Hsing, & Lin, Cheng-Kuan. (2009). Graph theory and interconnection networks. Boca Raton: CRC Press.

Huart, Vincent. (2013). Résolution de tournées de véhicules dépendantes du temps avec fenêtre de temps (TDVRPTW) par génération de colonnes.

industriel, École polytechnique de Montréal. Département de mathématiques et de génie, & Ben-Ameur, Hatem. (1997). Résolution du problème de découpe unidimensionnelle par une méthode de génération de colonnes.

Jackson, Peter L, & Lynch, David F. (1987). Revised Dantzig-Wolfe decomposition for staircase-structured linear programs. Mathematical Programming, 39(2), 157-179.

Joncour, Cédric. (2011). Problèmes de placement 2D et application à l'ordonnancement: modélisation par la théorie des graphes et approches de programmation mathématique. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I,

Joncour, Cédric. (2013a). diapo-optimisation-combinatoire 3 partie Génération de colonnes. Paper presented at the UNIVERSITÉ DU HAVRE - UFR DES SCIENCES ET TECHNIQUES.

Joncour, Cédric. (2013b). diapo-theorie-graphes notions de base, problèmes dans les graphes, caractérisation de graphes Paper presented at the UNIVERSITÉ DU HAVRE - UFR DES SCIENCES ET TECHNIQUES.

Jones, Kim L, Lustig, Irvin J, Farvolden, Judith M, & Powell, Warren B. (1993). Multicommodity network flows: The impact of formulation on decomposition. Mathematical Programming, 62(1-3), 95-117.

Jungnickel, D. (2013). Graphs, networks, and algorithms.

Kallrath, J. (2004). Modeling Languages in Mathematical Optimization: Springer.

Kalvelagen, Erwin. (2003a). Column generation with GAMS. GAMS Development Corp., Washington DC.

Kalvelagen, Erwin. (2003b). Dantzig-Wolfe Decomposition with GAMS.

Kammarti, R, Hammadi, S, Borne, P, & Ksouri, M. Une Nouvelle Approche Evolutionniste Hybride Pour Le Problème de Chargement et Déchargement Avec Fenêtres De Temps.

Kennington, Jeff L. (1978). A survey of linear cost multicommodity network flows. Operations Research, 26(2), 209-236.

Kim, K.H., & Günther, H.O. (2007). Container Terminals and Cargo Systems: Design, Operations Management, and Logistics Control Issues: Springer Berlin Heidelberg.

Korte, Bernhard, Vygen, Jens, Fonlupt, Jean, & Skoda, Alexandre. (2010). Optimisation combinatoire: Springer Paris.

LABELLE, JACQUES. (1981). théorie des graphes.

Lalande, Jean-François. (2004). Conception de réseaux de télécommunications.

LAMAMRI, Abdelkader, HADDADENE, Hacène AIT, & NAGIH, Anass. (2013). Une Approche pour l'accélération de la génération de colonnes appliquées au problème de rotations d'équipages.

Larsson, Torbjörn, Patriksson, Michael, & Rydergren, Clas. (2004). A column generation procedure for the side constrained traffic equilibrium problem. Transportation Research Part B: Methodological, 38(1), 17-38.

Lasdon, L.S. (2013). Optimization Theory for Large Systems: Dover Publications.

Lee, C.Y., & Meng, Q. (2014). Handbook of Ocean Container Transport Logistics: Making Global Supply Chains Effective: Springer International Publishing.

Lee, Jang G, Vogt, William G, & Mickle, Marlin H. (1979). Optimal decomposition of large-scale networks. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, 9(7), 369-375.

Lequy, Quentin. (2011). Affectation d'activités et de tâches à des quarts de travail fixés. École Polytechnique de Montréal,

Létocart, Lucas. (2002). Problèmes de multicoupes minimales et de multiflots maximaux en nombres entiers. ANRT,

Létocart, Lucas. (2014). RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE (MULTI-)FLOTS et GÉNÉRATION DE COLONNES HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES. UNIVERSITÉ PARIS 13.

Létocart, Lucas, Nagih, A, & Touati-Moungla, N. (2012). Dantzig-Wolfe and Lagrangian decompositions in integer linear programming. International Journal of Mathematics in Operational Research, 4(3), 247-262.

Lim, Churlzu, & Smith, J Cole. (2007). Algorithms for discrete and continuous multicommodity flow network interdiction problems. IIE Transactions, 39(1), 15-26.

Lin, Dung-Ying, Karoonsoontawong, Ampol, & Waller, S Travis. (2011). A Dantzig-Wolfe decomposition based heuristic scheme for bi-level dynamic network design problem. Networks and Spatial Economics, 11(1), 101-126.

Liu, Bolian, & Lai, Hong-Jian. (2000). Matrices in combinatorics and graph theory. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

López, Julio C, Granada, Mauricio, & Mantovani, JRS. (2010). Multi-area decentralized optimal VAr planning using the Dantzig-Wolfe decomposition principle. Paper presented at the

Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America (T&D-LA), 2010 IEEE/PES.

Lübbecke, Marco E, & Desrosiers, Jacques. (2005). Selected topics in column generation. Operations Research, 53(6), 1007-1023.

Lyu, Jung, Luh, Hsing, & Lee, Ming-Chang. (2002). Performance analysis of a parallel Dantzig-Wolfe decomposition algorithm for linear programming. Computers & Mathematics with Applications, 44(10), 1431-1437.

Macambira, Elder M, Maculan, Nelson, & de Souza, Cid C. (2006). A column generation approach for SONET ring assignment. Networks, 47(3), 157-171.

Machado, Catia MS, Mayerle, Sergio F, & Trevisan, Vilmar. (2010). A linear model for compound multicommodity network flow problems. Comput Oper Res, 37(6), 1075-1086.

Mancel, Catherine. (2004). modélisation et résolution de problèmes d'optimisation combinatoire issus d'applications spatiales. INSA de Toulouse,

Marcus, Karina. (1996). Multiflots, métriques et graphes h-parfaits: les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire. Université Joseph-Fourier-Grenoble I,

Martin, Richard Kipp. (2012). Large scale linear and integer optimization: a unified approach: Springer Science & Business Media.

Mathis, Philippe. (2010). Graphs and networks : multilevel modeling. London; Hoboken, N.J.: J. Wiley & Sons.

Maurras, Jean-François, & Vaxès, Yann. (1997). Multicommodity network flow with jump constraints. Discrete Mathematics, 165, 481-486.

McNamara, Paul, & McLoone, Sean. (2013). Hierarchical Demand Response using Dantzig-Wolfe decomposition. Paper presented at the Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT EUROPE), 2013 4th IEEE/PES.

Mekki, Borne Pierre Ksouri. (2010). Optimisation heuristique pour la résolution du m-PDPTW statique et dynamique. Ecole Centrale de Lille,

Merle, J.-P. Vial F. Babonneau et O. du. (2004). RESOLUTION DE PROBLEMES DE MULTIFLOTS LINEAIRES PAR RELAXATION LAGRANGIENNE PARTIELLE. Paper presented at the (HEC-Gen`eve),.

Mesquita, Marta, & Paixão, José. (1999). Exact algorithms for the multi-depot vehicle scheduling problem based on multicommodity network flow type formulations pp 221-243. In Computer-aided transit scheduling (pp. 221-243): Springer.

Metrane, Abdelmoutalib, Soumis, François, & Elhallaoui, Issmail. (2010). Column generation decomposition with the degenerate constraints in the subproblem. European Journal of Operational Research, 207(1), 37-44.

Michel, Sophie, & Vanderbeck, F. (2006). Optimisation des tournées de véhicules combinées à la gestion de stock. Université Bordeaux, 1.

Minoux, M. (1975). Résolution des problèmes de multiflots en nombres entiers dans les grands réseaux. Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, 9(3), 21-40.

Minoux, Michel. (1975). Multiflots Dynamiques de Cout Actualisé Minimal. Paper presented at the Annales Des Télécommunications.

Minoux, Michel. (1976). Multiflots de coût minimal avec fonctions de coût concaves. Annals of Telecommunications, 31(3), 77-92.

Molle, Christelle, Peix, Fabrice, & Rivano, Hervé. (2008). Génération de colonnes pour le routage et l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés.

Morabito, Reinaldo, de Souza, Mauricio C, & Vazquez, Mariana. (2014). Approximate decomposition methods for the analysis of multicommodity flow routing in generalized queuing networks. European Journal of Operational Research, 232(3), 618-629.

Müller, Didier. Introduction à la théorie des graphes Solutions des exercices. http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/

Munari, Pedro, González-Brevis, Pablo, & Gondzio, Jacek. (2011). A note on the primal-dual column generation method for combinatorial optimization. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 37, 309-314.

MURAT AFSAR, Hasan, JOZEFOWIEZ, Nicolas, & LOPEZ, Pierre. (2011). A BRANCH-AND-PRICE ALGORITHM FOR THE WINDY RURAL POSTMAN PROBLEM. RAIRO. Recherche opérationnelle, 45(4), 320-331.

NAGIH, Anass. (2007). génération de colonnes application `a la planification en transport. Paper presented at the Universit´e Paul Verlaine - Metz.

Nesetril, Jaroslav, & Ossona de Mendez, Patrice. (2012). Sparsity graphs, structures, and algorithms. Retrieved from http://site.ebrary.com/id/10650374

Olivera, Alfredo, Amoza, Franco Robledo, & Testuri, Carlos E. (2010). A GRASP algorithm for a capacitated, fixed charge, multicommodity network flow problem with uncertain demand and survivability constraints. International Transactions in Operational Research, 17(6), 765-776.

Oppen, Johan, Løkketangen, Arne, & Desrosiers, Jacques. (2010). Solving a rich vehicle routing and inventory problem using column generation. Comput Oper Res, 37(7), 1308-1317.

Orlowski, Sebastian, & Pióro, Michał. (2012). Complexity of column generation in network design with path-based survivability mechanisms. Networks, 59(1), 132-147.

P., Ho James K. K. Sundarraj R. (1989). DECOMP an implementation of Dantzig-Wolfe decomposition for linear programming. New York: Springer-Verlag.

Palmgren, Myrna. (2005). Optimal truck scheduling : mathematical modeling and solution by the column generation principle. Linköpings universitet, Linköping. Available from http://worldcat.org /z-wcorg/ database.

Pardalos, P. M., & Resende, Mauricio G. C. (2006). Handbook of optimization in telecommunications - Multicommodity Network Flows. Retrieved from http://public.eblib.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=418111

Patriksson, M. (2015). The Traffic Assignment Problem: Models and Methods: Dover Publications.

Pérez López, César. (2014). MATLAB optimization techniques.

Pesneau, Pierre, Pessoa, Arthur, Sadykov, Ruslan, Uchoa, Eduardo, & Vanderbeck, François. Stabilisation des procédures de génération de colonnes: étude numérique comparative.

Pesneau, Pierre, Sadykov, Ruslan, & Vanderbeck, François. (2012). Feasibility pump heuristics for column generation approaches. In Experimental Algorithms (pp. 332-343): Springer.

Pinar, Mustafa C, & Zenios, Stavros A. (1993). A COMPARATIVE STUDY OF PARALLEL DECOMPOSITIONS FOR MULTICOMMODITY FLOW PROBLEMS∗. Parallel Algorithms and Applications, 1(4), 255-271.

Plateau, Agnès, Alfandari, Laurent, & Schepler, Xavier. (2013). Un algorithme de Branch-and-Price pour le problème de planification durable de rotations culturales. ROADEF 2011, 13? me congr? s de la Soci? t? Fran? aise de Recherche Op? rationnelle et d'Aide? la Decision, 70-71.

Powell, Warren B, & Carvalho, Tassio A. (1997). Dynamic control of multicommodity fleet management problems. European Journal of Operational Research, 98(3), 522-541.

Pozrikidis, C. (2014). An introduction to grids, graphs, and networks.

Prescott-Gagnon, Eric. (2011). Méthodes hybrides basées sur la génération de colonnes pour des problèmes de tournées de véhicules avec fenêtres de temps. École Polytechnique de Montréal,

Puchinger, Jakob, Stuckey, Peter J, Wallace, Mark G, & Brand, Sebastian. (2011). Dantzig-Wolfe decomposition and branch-and-price solving in G12. Constraints, 16(1), 77-99.

Questel, Aurélien, Chrétienne, Philippe, & Université Pierre et Marie, Curie. (2013). Conception de réseaux en anneaux-étoiles et programmation mathématique. [s.n.], [S.l.]. Available from http://worldcat.org /z-wcorg/ database.

Quilliot, Alain, Bendali, Fatiha, & Mailfert, Jean. (2005). Flots entiers et multiflots fractionnaires couplés par une contrainte de capacité. RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle, 39(3), 185-224.

Ravindran, A.R. (2008). Operations Research Methodologies: CRC Press.

Rezig, Wafa. (1995). Multicommodity flow problems: A primal-dual decomposition approach. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346082

Richard, Olivier. (2007). Régulation court terme du trafic aérien et optimisation combinatoire Application de la méthode de génération de colonnes. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG,

Richard, Olivier, Constans, Sophie, & Fondacci, Rémy. (2011). Computing 4D near-optimal trajectories for dynamic air traffic flow management with column generation and branch-and-price. Transportation Planning and Technology, 34(5), 389-411.

Rios, Joseph, & Ross, Kevin. (2010). Massively parallel dantzig-wolfe decomposition applied to traffic flow scheduling. Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication, 7(1), 32-45.

Rivano, Hervé. (2014). Modélisation et optimisation du partage de ressources dans les réseaux radio multi-sauts. INSA Lyon,

Ropke, Stefan, & Cordeau, Jean-François. (2009). Branch and cut and price for the pickup and delivery problem with time windows. Transportation Science, 43(3), 267-286.

Rosenthal, Richard E. (2015). GAMS A user's guide. Norderstedt: GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA.

ROUPIN, Marie-Christine COSTA Avec Lucas LETOCART - Frédéric. (2015). MULTICOUPES ET MULTIFLOTS ENTIERS. Marie-Christine COSTA.

Savelsbergh, Martin WP. (2001). Branch and price: Integer programming wish column generationBranch and Price: Integer Programming with Column Generation. In Encyclopedia of Optimization (pp. 218-221): Springer.

Schrenk, Susann. (2010). Contributions à la conception de réseau de service en transport. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG,

Sidi Mohamed Douiri, Souad Elbernoussi, Halima Lakhbab. Méthodes de Résolution; Exactes, Heuristiques et Métaheuristiques - C2SI. Paper presented at the Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.

Singh, Kavinesh J, Philpott, Andy B, & Wood, R Kevin. (2009). Dantzig-Wolfe decomposition for solving multistage stochastic capacity-planning problems. Operations Research, 57(5), 1271-1286.

Tadonki, Olivier Briant Claude Lemar´echal Claude. (2004). Approche décomposition de Dantzig-Wolfe. Paper presented at the Universit ´e Bordeaux 1 INRIA - Rhones-Aples Universit ´e de Gen`eve. http://www.math.u-bordeaux.fr/MAB/ODW/

Tang, Lixin, Wang, Gongshu, Liu, Jiyin, & Liu, Jingyi. (2011). A combination of Lagrangian relaxation and column generation for order batching in steelmaking and continuous-casting production. Naval Research Logistics (NRL), 58(4), 370-388.

Taş, D, Gendreau, Michel, Dellaert, N, Van Woensel, Tom, & de Kok, AG. (2014). Vehicle routing with soft time windows and stochastic travel times: A column generation and branch-and-price solution approach. European Journal of Operational Research, 236(3), 789-799.

Teghem, Jacques. (2012). Recherche Opérationnelle Tome 1 Méthodes d'Optimisation Ellipses.

Teghem, Jacques. (2013). REcherche Opérationnelle. Tome 2: Gestion de production. Modèles aléatoires. Aide multicritère.

Thai, M.T., & Pardalos, P.M. (2012). Handbook of Optimization in Complex Networks: Theory and Applications: Springer New York.

Thulasiraman, K., & Swamy, M. N. S. (1992). Graphs : theory and algorithms. New York: Wiley.

Touati, Nora. (2008). Amélioration des performances du schéma de la génération de colonnes: Application aux problemes de tournées de véhicules. Paris 13,

Touati, Nora, Létocart, Lucas, & Nagih, Anass. (2006). Sur l'accélération de la convergence de la génération de colonnes. Published in HAL hal-00145748,(29 pages).

Truffot, Jérôme, Bachelet, Bruno, & Mahey, Philippe. (2004). Modélisation des problèmes de routage dans les réseaux GMPLS.

Truffot, Jérôme, Duhamel, Christophe, & Mahey, Philippe. (2005). Branch & price pour le problème du multiflot k-séparable de coût minimal.

Vanderbeck, François. (2000). On Dantzig-Wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm. Operations Research, 48(1), 111-128.

Vanderbeck, François, & Wolsey, Laurence A. (1996). An exact algorithm for IP column generation. Operations Research Letters, 19(4), 151-159.

Vanderbeck, Sophie Michel François. (2007). Problème de tournées de véhicules combinées à la gestion des stocks. Paper presented at the JFRO,.

Villeneuve, Daniel. (1999). Logiciel de génération de colonnes.

Villeneuve, Daniel, Desrosiers, Jacques, Lübbecke, Marco E, & Soumis, François. (2005). On compact formulations for integer programs solved by column generation. Annals of Operations Research, 139(1), 375-388.

Walker, Warren E. (1969). A method for obtaining the optimal dual solution to a linear program using the Dantzig-Wolfe decomposition. Operations Research, 368-370.

Wei, Peng, & Sun, Dengfeng. (2011). Total unimodularity and degeneracy-aware dantzig-wolfe decomposition for large-capacity cell transmission model. Paper presented at the Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on.

Weigel, Henry S, & Cremeans, John E. (1972). The multicommodity network flow model revised to include vehicle per time period and node constraints. Naval Research Logistics Quarterly, 19(1), 77-89.

Westerlund, Andreas, Göthe-Lundgren, Maud, & Larsson, Torbjörn. (2006). A stabilized column generation scheme for the traveling salesman subtour problem. Discrete Applied Mathematics, 154(15), 2212-2238. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2005.04.012

Wollmer, Richard D. (1970). Multicommodity supply and transportation networks with resource constraints: The generalized multicommodity flow problem (Vol. 6143): Rand Corporation.

Wong, SC. (1998). Multi-commodity traffic assignment by continuum approximation of network flow with variable demand. Transportation Research Part B: Methodological, 32(8), 567-581.

Xie, L. (2014). Decision Support for Crew Rostering in Public Transit: Web-Based Optimization System for Cyclic and Non-Cyclic Rostering: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Xu, Junming. (2003). Theory and application of graphs. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Ziarati, Koorush. (1998). Affectation des locomotives aux trains: Ecole Polytechnique.

البلخي, للدكتور زيد تميم. (1991). كتاب مقدمة في بحوث العمليات. كلية العلوم , جامعة الملك سعود .

الشاوي Maged Abdel Efla Boukhaaa, ماجد عبد افلة بخايا Raed Mohi-Shawi --- رائد محي. (2005). تحديد الطريقة المثلى من بين طريقتي السمبلكس المعدلة والمضاعفات المبرمجة Al-Mustansyriah University الجامعة المستنصرية .

العشاري, عمر محمد ناصر حسين. (2011). استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة النقل المتعددة المراحل. جامعة بغداد/ كلية الادارة والاقتصاد .

إلياس, بن سبع. (2010/2009). إستعمال الأساليب الكمية في إدارة النقل دراسة حالة شركة نفطال الماجستير .

حوى, ختام. (2008). طرائق تحليل LU لحل مسائل البرمجة الخطية

Proposed LU-Decomposition - Based Algorithms for Sparse Linear Programming Problems.

عبدان, وحيد. (2009/2008). حل مسائل السمبلكس بطريقة المصفوفات. (ماجستير إدارة أعمال ,(

محمد, سماء طليع عزيز نعم عبد المنعم عبد المجيد لمياء جاسم. (2011 GAON) .(تصميم خوارزمية جينية لإيجاد المسار الحرج الأمثل لشبكة أعمال المشاريع. 2012( مجلة الرافدين لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد ( 9) العدد( 1 .

**الملخص:**

تطرقت الدراسة الى إشكالية حل نماذج الشبكات التي تواجهنا في جميع المجالات، لذلك يتم محاولة تصميم شبكة نقل على المستوى الوطني لثلاث سلع، بهدف تحقيق تدفقات متعددة في أغلب المسارات. حيث تتمتع كل سلعة بتكلفة نقل مختلفة بالنسبة لكل مسار. ولكل مسار سعة قصوى للنقل، هذا يعتمد على طاقة استيعاب المركبة الناقلة الموجهة في المسار. بينما تهدف الدراسة الى تدنية التكاليف الاجمالية للنقل، من خلال تحديد كميات ونوع السلع الواجب نقلها في كل مسار. ولتحقيق الهدف المرجو نعتمد عل أساليب حديثة في بحوث العمليات والبرمجة الخطية، بحيث يتم الاعتماد على طريقة توليد الأعمدة وتجزئة Dantzig-Wolfe باستخدام خوارزمية برنامج GAMS، مكنت الدراسة من تحقيق نتائج جيدة من خلال حل اشكالية النماذج المعقدة في وقت قصير، وبأقل تكلفة.

**الكلمات المفتاحية:** النقل، نظرية الشبكات، التدفقات متعددة السلع، السمبلكس المراجعة، توليد الأعمدة، تجزئة D-W.

## Résumé :

L'étude a abordé une problématique de résolution des modèles de réseau auxquels nous sommes confrontés dans plusieurs domaines, une tentative est faite pour concevoir un réseau de transport au niveau national avec trois produits, afin de réaliser des flux multiples dans la plupart des chemins. Chaque produit a un coût de transport différent pour chaque itinéraire. Chaque voie a une capacité de transport maximale, qui dépend de la capacité de charge du véhicule de transport. L'étude vise à réduire les coûts totaux de transport, en déterminant les quantités et le type de produit à transporter dans chaque itinéraire. Pour atteindre l'objectif souhaité, nous nous appuyons sur des méthodes modernes de programmation linéaire, telle que la méthode génération de colonnes et la décomposition de Dantzig-Wolfe à l'aide de l'algorithme GAMS, ce qui a permis à l'étude d'obtenir de meilleurs résultats en résolvant un problème complexe, durant un court délai.

**Mots-clés :** Transport, Théorie des graphes, Flots multi-produits, Simplexe révisé, Génération de colonnes, Décomposition de Dantzig-Wolfe.

## Abstract:

The study addressed a problem of solving network models that we face in all fields; therefore, an attempt was made to design a nationwide transmission network for three commodities, for achieving multiple flows in most of the paths. Each commodity has a different transportation cost for each path. Each path has a maximum transmission capacity; this depends on the carrying capacity of the guiding transport vehicle in the path. While the study aims to reduce the total costs of transportation, by specifying the quantities and type of goods to be transported in each path. To achieve the desired objective we depend on modern methods of operations research and linear programming, relying on the method of column generation and Dantzig-Wolfe Decomposition using the GAMS algorithm. The study enabled the achievement of good results by solving the problem of complex models in a short time.

**Keywords:** Transport, Graph theory, Multi-commodity flow, Revised simplex, Column generation, Dantzig-Wolfe Decomposition.