

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme de MASTER**

**En : Génie mécanique**

**Spécialité : énergétique**

**Par :MADANI Chaimaa et ABDERRAHIM Chaimaa**

### **Sujet**

**Méthode à viscosité artificielle ajoutée pour la résolution de l'équation de transport à convection dominante.**

Soutenu publiquement, le 22 / 06 / 2022 , devant le jury composé de :

M KORTI Abd illah Nabil	Prof	Université de Tlemcen	Président
M MOSTFAOUI Amina	MAA	Université de Tlemcen	Examineur
M/MEFTAH Kheouane	professeur	Université de Tlemcen	Encadreur

Année universitaire : 2021 /2022

## ***Remerciements***

*Ce travail a été effectué au sein de l'Université université Aboubeker belkaid Tlemcen.*

### ***MADANI Chaimaa***

*Je voudrais en tout premier lieu mes parents qui sont eux je ne serré pas là ou j'en suis, tous ce qu'ils ont fait pour moi ,Je remercié chaleureusement **Mr MEFTAH Khouane** Professeur au département de Génie Mécanique, qui a suivi et encadré ce travail avec intérêt*

*Je remercie vivement les membres de mon jury d'avoir accepté de juger ce travail. Et très particulièrement je remercie ma binôme **ABDERRAHIM Chaimaa** pour la patience dont elle fait preuve.*

### ***ABDERRAHIM Chaimaa***

*Je remercie en premier lieu **ALLAH** de m'avoir donné cette volonté, patience et ce courage de toujours atteindre les objectifs que je me suis fixé. Pour une patience sans limites et un dévouement personnel sans égal , j'exprime mes vifs remerciements à mon encadreur .J'adresse aussi mes remerciements à mes jurys et ma binome **MADANI Chaimaa**.*

## Dédicace

- **MADANI Chaimaa**

*Je dédie ce travail à :*

*A celle qui a inséré le goût de la vie et le sens de la responsabilité....merci MERE.*

*A celui qui a été toujours la source d'inscription et de courage .....merci PERE.*

*A mes frères et mes soeures.*

- **ABDERRAHIM Chaimaa**

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage.*

*A ma très chère mère, qui ma donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.*

*A mon très cher père, pour ces encouragements et son soutien, et surtout pour son sacrifice*

*afin que rien n'entravé le déroulement de mes études.*

*Je tiens à exprimé mes vifs dédicaces à mon professeur Mr MEFTAH qu'il m'a aidé tout au long de mon cursus universitaire.*

---

## *Table de matière*

---

N°	Titre	Page
	Dédicace - Remerciement	2-3
	Table des Matières	4
	Liste des Figures & Tableaux	6
	Notations & Abréviations	7
	Résumé en trois langues	8-9
	<b>Introduction et problématique</b>	10
	<b>Chapitre 0 :Lois de conservations</b>	11
I.1)	Introduction	11
I.2)	Notation	11
I.3)	Théorème de transport	12
I.4)	Lois de conservation	13
	a.conservation de la masse	13
	b. conservation de la quantité de mouvement	14
	c.conservation de l'énergie	16
	d . équation de convection-diffusion	17
	<b>Chapitre I : Méthodes des éléments finis</b>	18
I.1)	Introduction	18
I.2)	Méthode de Galarkine	23
I.3)	Calculs de la forme intégrale élémentaire	24
I.4)	Algorithme d'assemblage	28
I.5)	Différentes étapes de la méthodes des éléments finis	30
	Résolutions	31
	<b>Chapitre II:La méthode de la convection dominante et la méthode de la viscosité artificielle ajoutée (DAA)</b>	32
II.1)	Convection dominante	33
II.2)	Solution par la méthode des différences finies centrées	34

II.3)	Méthode de petrov –Galerkine	36
	a.méthode de SUPG	37
	b. méthodeGLS	38
	Méthode de la diffusion artificielle ajoutée(DAA)	39
	<b>Chapitre III : Validation</b>	
III.1)	Programme numérique en langage matlab	43
III.2)	Exemple(les trois méthodes Galerkin; DAA; SUPG)	45-65
	<b>Conclusion générale</b>	66
	<b>Références et Bibliographiques</b>	67

---

*Table des figures*

---

Figure 1: Volume de controle	14
Figure 2 : Volume de nœuds matériel	15
Figure 3 : Maillage du discrétisation du domaine spacial	23
Figure 4 :Élément linéaire à deux nœuds	24
Figure 5 : Influence du nombres de Peclet sur la solution numérique	39
Figure 6 : Solution donnée par la méthode DAA	43
Figure 7 : Discrétisation du domaine en deux éléments L2	47
Figure 8 : Maillage du domaine en quatre éléments L2	51
Figure 9 : Solutions numériques obtenues par les trois méthodes	58

---

## *Notations & Abréviations*

---

### Symboles :

$\int$  : Intégrale  
 $[]$  : Matrice  
 $[]^T$  : Matrice transposée  
 $\langle \rangle$  : Vecteur ligne  
 $\{ \}$  : Vecteur colonne  
 $\{ \}^T$  : Transposé d'un vecteur  
 $\Sigma$  : Somme  
 $\prod$  : Produit  
 $\partial$  : Dérivée partielle

### Abréviations :

MEF : Méthode des éléments finis

#### **Majuscules romaines**

$F$  : Vecteur de sollicitations  
 $N$  : nombre des nœuds  
 $S$  : Surface  
 $L^e$  : éléments finis  
 $\phi(x)$  : fonction test  
 $N(x)$  : polynômes d'interpolation de Lagrange  
 $K_e$  : Matrice de rigidité élémentaire  
 $K_g$  : Matrice de rigidité globale  
 $F_e$  : Vecteur élémentaire des sollicitations  
 $P_e$  : Nombre de Peclet

#### **Minuscules romaines :**

$h_e$  : taille de l'élément  
 $\tilde{k}$  : viscosité artificielle ajoutée  
 $f$  : fonction  
 $c_i$  : variables nodales  
 $x_i$  : coordonnées nodales

## ملخص

تمت كتابة جميع قوانين الحفظ (الكتلة والزخم والطاقة) في شكل معادلة الحمل الحراري ، ومن هنا تأتي أهمية حل هذا النوع من المعادلات. الحلول العددية التقريبية بطريقة العناصر المحدودة من نوع Galerkin ملوثة بالذبذبات غير المادية في حالة الحمل الحراري السائد. لمعالجة عدم الاستقرار العددي ، يتمثل عملنا في تطوير وتنفيذ طريقة خارج المركز لنوع العنصر المحدود بناءً على إضافة لزوجة اصطناعية. تم اختبار النموذج المطور ووجد أنه مستقر ودقيق

---

### Abstract

---

All the conservation laws (mass, momentum and energy) are written in the form of the convection-diffusion equation, hence the importance of solving this type of equation. The numerical solutions approximated by the finite element method of the Galerkin type are polluted by non-physical oscillations in the case of dominant convection. To remedy these numerical instabilities, our work consists in developing and implementing an off-centre method of the finite element type based on the addition of an artificial viscosity. The developed model has been tested and found to be stable and accurate.



---

## *Résumé*

---

Toutes les lois de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) s'écrivent sous la forme de l'équation de convection-diffusion, d'où l'importance de résolution de ce type d'équation. Les solutions numériques approchées par la méthode des éléments finis de type Galerkin sont polluées par des oscillations non physiques dans le cas de convection dominante. Pour y remédier à ces instabilités numériques, notre travail consiste à développer et à mettre en œuvre une méthode décentrée de type éléments finis basée sur l'ajout d'une viscosité artificielle. Le modèle développé a été testé, il s'est avéré stable et précis.

**Mots clés : la viscosité artificielle ajoutée , élément finis , langage matlab**

---

## *Introduction et problématique :*

---

La simulation numérique, qui est en relation directe avec la physique, les mathématiques et l'informatique, est devenue aujourd'hui un moyen de recherche courant qui s'est largement diffusé dans l'industrie grâce à l'évolution et aux performances des moyens de calculs. Ainsi la simulation numérique s'est affirmée comme un moyen de conception efficace et indispensable, elle permet :

- De simuler des phénomènes physiques complexes,
- D'étudier les itérations de plusieurs disciplines,
- D'améliorer les modèles théoriques en passant des fluides parfaits aux fluides réels,
- De raccourcir la durée de mise au point du prototype final,
- De réduire le coût de conception.

Parmi les méthodes numériques employées dans le domaine de la modélisation des fluides, citons la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. Chacune a ses mérites et ses défauts.

Introduite vers les années quarante, la méthode des éléments finis s'est désormais imposée comme une des méthodes les plus puissantes conçues à ce jour, parmi les particularités de base qui ont conduit à son succès, on peut citer :

- La possibilité de choisir une variété de formulations vibrationnelles associées au problème mathématique,
- La possibilité de travailler sur des maillages non structurés, ce qui facilite la modélisation des géométries complexes,
- Une bonne précision à coût raisonnable,
- Le traitement naturel des conditions aux limites de type différentiel,

Au début des années soixante dix, l'évidence du succès de la méthode des éléments finis de type Galerkin était garanti. Cependant, les chercheurs ont exprimé une certaine appréhension quant à son utilisation dans la simulation numérique des problèmes de mécanique des fluides. En effet, on pensait que le succès de cette méthode serait directement exploitable pour la modélisation pour ce type de problèmes. En fait, ceci se révéla une vue trop optimiste, particulièrement en ce qui concerne la modélisation des phénomènes de

transport à convection dominante.

La présence des termes de convection dans les équations de Navier-Stokes, fait apparaitre une importante difficulté. En pratique, les solutions numériques approchées par la méthode des éléments finis de type Galerkin sont souvent polluées par des oscillations non physiques, ceci a amené au développement de nouvelles méthodes d'éléments finis (méthode SUPG, GLS, DAA, ...)

---

*CHAPITRE 0*

*LOIS DE CONSERVATION*

---

---

## CHAPITRE 0

### LOIS DE CONSERVATION

---

#### 0.3 Introduction

Les lois de conservation sont au nombre de trois (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie). Ces lois peuvent être établies de différentes manières parmi-elles la notion du volume de contrôle.

Un volume de contrôle est un volume imaginaire limité par une surface fermée appelée surface de contrôle. Le volume de contrôle peut être fixe ou mobile, il peut suivre, se déplacer à la vitesse du fluide, comme il peut avoir un mouvement arbitraire.

On appelle volume de contrôle matériel, un volume de contrôle qui se déplace avec le fluide et la vitesse en un point de la surface est égale à la vitesse locale du fluide. On désigne par  $V_m(t)$  le volume de contrôle et par  $A_m(t)$  la surface de contrôle.

#### 0.2 Notation

- Dans cette étude, un vecteur ou une matrice est désigné en gras.
- Pour toute fonction scalaire  $\varphi$ , on désigne par :

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

- Pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  de composantes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  on désigne par :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Pour tout tenseur  $\boldsymbol{\tau}$ , on désigne par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Pour tout tenseur  $\boldsymbol{\tau}$ , on désigne par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans cette étude, on désigne par  $\mathbf{x}(x, y, z)$  le vecteur des coordonnées et par  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  le vecteur vitesse du fluide.

### 0.3 Théorème de transport

Soit un volume de contrôle  $V_a(t)$  limité par une surface de contrôle  $A_a(t)$  (figure 1) :

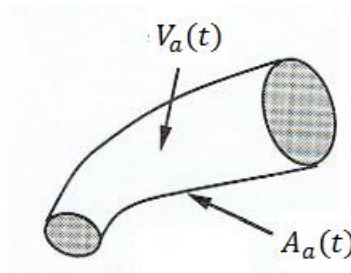


Figure 1 : Volume de contrôle

et soit  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  une fonction définie dans le volume de contrôle  $V_a(t)$ . Le théorème de transport est l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \Phi dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} \Phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad 0.1$$

où  $\mathbf{w}$  désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure.

#### Corollaires

(0) Si le volume de contrôle est fixe alors  $\mathbf{w} = 0$  et par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \Phi dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \quad 0.2$$

(2) Dans le cas d'un volume de contrôle matériel (figure 2), la vitesse de la surface de contrôle  $\mathbf{w}$  est égale à la surface de fluide  $\mathbf{u}$ . On a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad 0.3$$

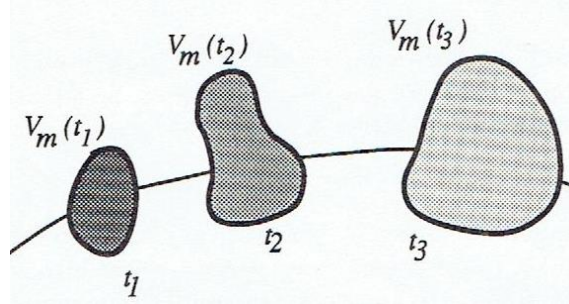


Figure 2 : Volume de contrôle matériel

(3) D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m(t)} \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \Phi \mathbf{u} dV \quad 0.4$$

et le théorème de transport devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi \mathbf{u} \right) dV \quad 0.5$$

En prenant  $\Phi = \rho\varphi$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho\varphi dV = \int_{V_m(t)} \left( \frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\varphi \mathbf{u} \right) dV$$

Ou après développement :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho\varphi dV = \int_{V_m(t)} \left\{ \varphi \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) + \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \right) \right\} dV$$

Le premier terme à droite est nul (voir équation (0.8)), d'où l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho\varphi dV = \int_{V_m(t)} \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \right) dV \quad 0.6$$

#### 0.4 Lois de conservation

##### Conservation de la masse

Considérons un volume de contrôle  $V_m(t)$ . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{V_m} \rho dV \quad 0.7$$

où  $\rho$  est la densité locale. Si le volume de contrôle ne contient ni source, ni puit, la masse contenue dans  $V_m(t)$  est constante et par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = 0$$

En appliquant le théorème de transport (équation (0.5)) :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = \int_{V_m(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) dV = 0$$

Comme  $V_m$  est arbitraire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad 0.8a$$

L'équation (0.8) est appelée loi de conservation de la masse ou équation de continuité.

L'équation précédente peut être aussi être mise sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho - f = 0 \quad 0.8b$$

avec

$$f = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible,  $\rho$  est constante et l'équation (0.8a) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad 0.9$$

### Conservation de la quantité de mouvement

Considérons un volume de contrôle  $V_m(t)$ . La quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV$$

Le principe fondamental de la dynamique stipule que la variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad 0.10$$

Les forces extérieures sont de deux types :

- (1) les forces de volumes qui sont principalement des forces de gravité, que l'on peut exprimer par :



$$\int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV$$

(2) les forces de surface qui agissent sur la surface  $A_m(t)$  que l'on peut exprimer par :

$$\int_{A_m} \mathbf{t} dA$$

où  $\mathbf{t}$  représente le vecteur contrainte, égal à :

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$$

où  $p$  est la pression du fluide,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des forces visqueuses et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface  $A_m(t)$ , l'équation (0.10) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV + \int_{A_m} (-p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA \quad 0.11$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m} (-p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) dA = \int_{V_m} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV \quad 0.12$$

D'après l'équation (0.6) :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) dV \quad 0.13$$

En substituant les équations (0.12) et (0.13) dans l'équation (0.11), on obtient :

$$\int_{V_m(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} dV + \int_{V_m} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV$$

ou :

$$\int_{V_m(t)} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0$$

Comme  $V_m$  est arbitraire, l'équation précédente est équivalente à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{g} = 0 \quad 0.14$$

En projetant l'équation (0.14) sur les axes d'un repère cartésien et sachant que :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 0.15$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide, l'équation (0.14) devient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_i - \nu \nabla^2 u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i = 0 \quad 0.16a$$

qui peut être mise sous la forme ;

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_i - \nu \nabla^2 u_i - f = 0 \quad 0.16b$$

avec

$$f = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique du fluide.

### Conservation de l'énergie

Considérons un volume de contrôle  $V_m(t)$ , l'énergie contenue dans ce volume est la somme des énergies interne et cinétique :

$$\int_{V_m} \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV = \dot{W} + \dot{Q} \quad 0.17$$

$\dot{W}$  représente la puissance développée par les forces extérieures (les forces de volume et les forces de surface) :

$$\dot{W} = \int_{V_m} \rho \mathbf{u} \mathbf{g} dV + \int_{A_m} (-p \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) \mathbf{n} dA$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m} (-p \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) \mathbf{n} dA = \int_{V_m} \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \boldsymbol{\tau}) dV$$

d'où :

$$\dot{W} = \int_{V_m} (\rho \mathbf{u} \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \boldsymbol{\tau})) dV \quad 0.18$$

En désignant par  $\mathbf{q}$  le flux local de chaleur par conduction à travers la surface de contrôle  $A_m$ , la quantité totale de chaleur passant par la surface  $A_m$  est :

$$\dot{Q} = \int_{A_m} -\mathbf{q} \mathbf{n} dA$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\dot{Q} = - \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{q} \, dV \quad 0.19$$

D'après l'équation (0.6), on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) dV \quad 0.20$$

En substituant les équations (0.20), (0.19) et (0.18) dans l'équation (0.17), on obtient :

$$\int_{V_m(t)} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) dV = \int_{V_m} (\rho \mathbf{u} \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} ) dV$$

Puisque le volume de contrôle  $V_m(t)$  est arbitraire, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \mathbf{u} \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-p \mathbf{u} + \mathbf{u} \boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad 0.21a$$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique et sachant que :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T ; \quad e = c_v T$$

où  $T$  est la température,  $\lambda$  la conductivité et  $c_v$  la chaleur spécifique à volume constant,

l'équation (0.21a) devient (Candel, 1990) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T - k \nabla^2 T - f = 0 \quad 0.21b$$

avec

$$f = \frac{1}{\rho c_v} \left( \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - T \frac{\partial p}{\partial T} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad k = \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

### 0.5 Equation de convection-diffusion

En examinant les trois lois de conservation (équations (0.8b), (0.16b) et (0.21b)), on constate qu'elles s'écrivent toutes sous la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{terme temporel}} + \underbrace{\mathbf{u} \nabla c}_{\text{termes de convection}} - \underbrace{k \nabla^2 c}_{\text{termes de diffusion}} - \underbrace{f}_{\text{terme source}} = 0 \quad 0.22$$

où  $c(t, \mathbf{x})$  est une variable scalaire représentant soit une masse volumique, soit une vitesse, soit une température ou autre.  $\mathbf{u}$ ,  $k$  et  $f$  sont des fonctions quelconques qui dépendent de l'espace  $\mathbf{x}$  et de la fonction inconnue  $c$ .

L'équation (0.22) est appelée équation de convection-diffusion. Sa résolution fera l'objet de ce travail car maîtriser sa résolution permet de résoudre toutes les lois de conservation.

---

*CHAPITRE 1*

*METHODE DES ELEMENTS FINIS*

---

---

## CHAPITRE 1

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

---

#### I.1 Introduction

Un problème unidimensionnel stationnaire de convection-diffusion est représenté par l'équation :

$$\underbrace{u(c, x) \frac{dc}{dx}}_{\text{termes de convection}} - \underbrace{\frac{d}{dx} \left( k(c, x) \frac{dc}{dx} \right)}_{\text{termes de diffusion}} - \underbrace{f(c, x)}_{\text{terme source}} = 0 \quad \text{où } x \in [0, L] \quad 1.1$$

où  $c(x)$  est une variable scalaire représentant soit une température, soit une concentration, soit une vitesse, etc.  $u(c, x)$ ,  $k(c, x)$  et  $f(c, x)$  sont des fonctions quelconques qui dépendent de l'espace  $x$  et de la fonction inconnue  $c$ .

**Remarque :** Dans certains problèmes, l'équation de convection-diffusion se présente sous la forme :

$$\frac{dg(c, x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k(c, x) \frac{dc}{dx} \right) - f(c, x) = 0 \quad 1.2$$

Alors et sachant que :

$$\frac{dg(c, x)}{dx} = \frac{\partial g}{\partial c} \frac{dc}{dx} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad 1.3$$

L'équation (1.2) s'écrit :

1.4

$$\frac{\partial g}{\partial c} \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{dc}{dx} \right) - \left( f - \frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

qui est de la forme que l'équation (1.1) avec :

$$u(c, x) = \frac{\partial g}{\partial c} ; f(c, x) = f - \frac{\partial g}{\partial x} \quad 1.5$$

$u(c, x)$  peut être interprétée comme étant la vitesse du fluide et  $k(c, x)$ , le coefficient de diffusion (toujours positif), appelé aussi viscosité. L'équation (1.1) peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(c) - f = 0 \quad 1.6$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{L} = u \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{d}{dx} \right) \quad 1.7$$

La solution de l'équation (1.1) est unique que si l'on impose des conditions aux limites appropriées. Sur la frontière définie par les points  $x = 0$  et  $x = L$ , on peut imposer soit  $c(x)$  (condition aux limites dite de type de Dirichlet), soit  $k \frac{dc}{dx}$  (condition aux limites dite de type flux ou Neumann). Les conditions aux limites peuvent être mises sous la forme :

$$c = \bar{c} \quad \text{sur } S_1 \quad 1.7a$$

$$k \frac{dc}{dx} = q \quad \text{sur } S_2 \quad 1.7b$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont les points frontières :

$$S_1 \cup S_2 = \{x = 0, x = L\}$$

Si  $S_2 = 0$ , alors  $S_1 = \{x = 0, x = L\}$ , ce qui revient à imposer des conditions de Dirichlet sur les deux points frontières, de même  $S_1 = 0$ , revient à imposer des conditions de Neumann sur les deux points de la frontière.

**Remarque :** On ne peut pas imposer au même point et à la fois une condition aux limites de Dirichlet et une autre de Neumann.

### Forme intégrale

La méthode des éléments finis ne résout pas l'équation (1.1) mais plutôt sa forme intégrale notée  $W$  dite forme variationnelle et qui est donnée par l'expression suivante :

$$W = \int_L \phi(x) \left( u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{dc}{dx} \right) - f \right) dx = 0 \quad 1.8$$

où  $\phi(x)$  est une fonction de pondération arbitraire, appelée fonction test vérifiant la condition suivante :

$$\phi(x) = 0 \quad \text{sur } S_1 \quad 1.9$$

La fonction test  $\phi(x)$  est nulle sur les points frontières concernés par une condition aux limites

de type Dirichlet.

Une intégration par parties du terme de diffusion conduit à :

$$W = \int_L \left( \phi u \frac{dc}{dx} + k \frac{d\phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \phi f \right) dx + W^c = 0 \quad 1.10$$

avec :

$$W^c = - \left( \phi k \frac{dc}{dx} \right)_0^L \quad 1.11$$

**Remarque :** L'équation (1.8) est dite forme forte et l'équation (1.10) est dite forme faible.

L'intégration par parties du terme de diffusion a deux avantages :

- Permet de réduire l'ordre de la dérivée de la fonction  $c(x)$  et pouvoir ainsi choisir des fonctions d'interpolation linéaires (équation (1.19))
- Prendre en compte d'une façon exacte les conditions aux limites de type Neumann (équation (1.49)).

### Maillage

Le maillage ou discrétisation spatiale consiste à découper (ou **discrétiser**) le domaine spatial  $L$  en sous-domaines  $L^e$  (figure 1.1) :

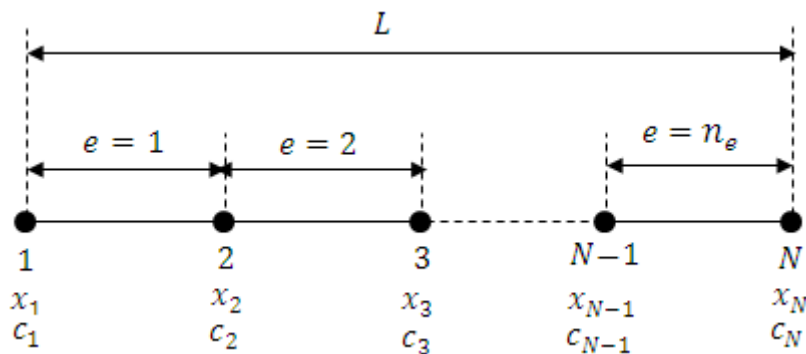


Figure 1.1 : Maillage ou discrétisation du domaine spatial

### Définitions

- Les sous domaines  $L^e$  sont appelés des **éléments finis**, ils sont numérotés de 1 à  $n_e$ .
- Les points du maillage sont appelés les **nœuds**, ils sont numérotés de 1 à  $N$ .
- Les coordonnées  $x_i$  sont appelés les **coordonnées nodales**.
- Les variables  $c_i$  sont appelés les **variables nodales**.

Dans notre cas, le sous-domaine  $L^e$  est un segment à 2 nœuds appelé élément L2. On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  ses coordonnées nodales, par  $c_1$  et  $c_2$  ses variables nodales, par  $nel$  le nombre de

ses nœuds qui est égal à 2 et par  $h_e$  sa taille,  $h_e = x_2 - x_1$  (figure 1.2) :

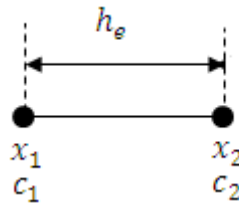


Figure 1.2 : Élément linéaire à deux nœuds (L2)

L'opération du maillage consiste à déterminer le vecteur  $\mathbf{x}$  de dimension  $N$  contenant les coordonnées de l'ensemble des nœuds et la matrice **connec** de dimension  $(n_e, nnel)$  contenant les connectivités de tous les éléments. On entend par connectivités d'un élément  $e$ , les numéros des nœuds qui lui y sont attachés, par exemple les connectivités de l'élément n°1 (figure 1.1), sont les nœuds 1 et 2, ainsi d'après la figure 1.1, on a :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix}, \mathbf{connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \dots & \dots \\ N-1 & N \end{bmatrix} \quad 1.12$$

On désigne par le mot table, un vecteur ou une matrice. Ainsi le vecteur  $\mathbf{x}$  est appelé la table globale des coordonnées nodales et la matrice **connec** est appelée la table globale des connectivités. On désigne par **loce**( $e$ ) les connectivités de l'élément n° $e$ , ce vecteur **loce** est extrait de la table **connec**, ainsi pour l'élément n°1, **loce**( $e = 1$ ) est tout simplement la première ligne de la table **connec**, **loce**(1) =  $\langle 1 \ 2 \rangle$ . Pour un élément n° $e$ , **loce**( $e$ ) est la  $e^{\text{ième}}$  ligne de la table **connec** :

$$\mathbf{loce}(e) = \mathbf{connec}(e, :) = \langle e \ e + 1 \rangle \quad 1.13$$

Le maillage peut être régulier (uniforme) ou non. Un maillage régulier signifie que tous les éléments ont la même taille  $h_e$  avec  $h_e = L/n_e$ , donc si le domaine de calcul est l'intervalle  $[a, b]$ , le vecteur des coordonnées  $\mathbf{x}$  s'écrit :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 = a \\ x_2 = a + h_e \\ \vdots \\ x_N = a + (N-1)h_e \end{Bmatrix} \text{ soit } \mathbf{x}_i = a + (i-1)h_e \text{ avec } i = 1, \dots, N \quad 1.14$$

Suite à la discrétisation du domaine, il en résulte :

$$L = \sum_{e=1}^{n_e} L_e \quad 1.15$$

et par conséquent l'équation (1.10) s'écrit :

$$1.16$$



$$W = W^c + \sum_{e=1}^{n_e} W^e$$

où  $W^e$  est la forme intégrale élémentaire, calculée sur le sous-domaine  $L_e$  :

$$W^e = \int_{L^e} \left( \phi u \frac{dc}{dx} + k \frac{d\phi}{dx} \frac{dc}{dx} - \phi f \right) dx \quad 1.17$$

Donc, le calcul de  $W$  passe d'abord par le calcul de  $W^e$ , et pour pouvoir calculer  $W^e$ , il faut se donner des expressions pour les fonction  $c(x)$  et  $\phi(x)$ .

### Choix de la fonction $c(x)$

**Règle :** Pour la méthode des éléments finis standard, on suppose qu'à l'intérieur d'un élément  $L^e$ , la fonction  $c(x)$  dépend uniquement des variables nodales de cet élément, soit :

$$c(x) = N_1(x)c_1 + N_2(x)c_2 \quad 1.18$$

Les fonctions  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  sont appelées les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme. Dans le cas général, ces fonctions peuvent être quelconques, c'est-à-dire polynomiales, trigonométriques ou autre mais le choix d'une forme polynomiale est le plus souvent utilisé, et dans ce cas, les fonctions  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  sont les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{h_e} \quad 1.19$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{h_e}$$

Une autre façon d'obtenir  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  est de poser :

$$c(x) = ax + b \quad 1.20$$

avec :

$$\begin{cases} c(x_1) = c_1 = ax_1 + b \\ c(x_2) = c_2 = ax_2 + b \end{cases} \quad 1.21$$

ce qui donne :

$$a = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = c_1 - ax_1 \quad 1.22$$

En substituant les valeurs de  $a$  et  $b$  dans l'équation (1.20), on obtient :

$$c(x) = \underbrace{\left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right)}_{N_1(x)} c_1 + \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)}_{N_2(x)} c_2 \quad 1.23$$

**Remarque :** la fonction  $c(x)$  est linéaire par élément, cette approximation est dite de type  $C^0$ .

### Propriétés des fonctions d'interpolation

Si  $c(x)$  est constante ( $c(x) = \bar{c}$ ) alors l'équation (1.18) s'écrit :

$$\bar{c} = N_1(x)\bar{c} + N_2(x)\bar{c} \quad 1.24$$

ce qui donne :

$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \quad 1.25$$

Les fonctions d'interpolation vérifient toujours la relation :

$$\sum_{i=1}^{nnel} N_i = 1 \quad 1.26$$

où  $nnel$  représente le nombre de nœuds de l'élément.

Sachant que  $c(x_i) = c_i$ , l'équation (1.18) écrite aux nœuds de l'élément, donne :

$$\begin{aligned} c(x_1) &= N_1(x_1)c_1 + N_2(x_1)c_2 = c_1 \\ c(x_2) &= N_1(x_2)c_1 + N_2(x_2)c_2 = c_2 \end{aligned} \quad 1.27$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= 1 \text{ et } N_2(x_1) = 0 \\ N_1(x_2) &= 0 \text{ et } N_2(x_2) = 1 \end{aligned} \quad 1.28$$

Les fonctions d'interpolation vérifient toujours la relation :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1.29$$

### Choix de la fonction test $\phi(x)$

L'un des points forts de la méthode des éléments finis est le fait d'avoir une multitude de choix pour la fonction test  $\phi(x)$ , chaque choix correspond à un type de formulation (Galerkine, Galekine-discontinue, Pétrov-Galerkine...).

## 1.2 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin correspond à la version standard de la méthode des éléments finis, elle consiste à choisir la fonction  $\phi(x)$  de la même forme que la fonction  $c(x)$ , c'est-à-dire :

$$\phi(x) = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \quad 1.30$$

où les fonctions  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  sont données par l'équation (1.19), ce sont les mêmes fonctions d'interpolation utilisées pour l'approximation de la fonction  $c(x)$  et  $\phi_1, \phi_2$  sont les valeurs de  $\phi(x)$  aux nœuds de l'élément.

### Calcul de la forme intégrale élémentaire

On réécrit les équations (1.18) et (1.30) sous la forme matricielle suivante :

$$\phi(x) = \mathbf{\Phi}_e \mathbf{N} \quad 1.31a$$

$$c(x) = \mathbf{N}^t \mathbf{c}_e \quad 1.31b$$

avec :

$$\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad 1.32$$

$$\boldsymbol{\Phi}_e = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \quad 1.32$$

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}^t = \langle N_1, N_2 \rangle \quad 1.33$$

$\mathbf{c}_e$  est nommé le vecteur élémentaire des variables nodales.  $\boldsymbol{\Phi}_e$  est le vecteur élémentaire des variables nodales virtuelles.  $\mathbf{N}$  est le vecteur de fonctions de forme et  $\mathbf{N}^t$  le vecteur transposé.

D'après les équations (1.31) on a :

$$\frac{d\phi}{dx} = \boldsymbol{\Phi}_e \frac{d\mathbf{N}}{dx} \quad 1.34a$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} \mathbf{c}_e \quad 1.34b$$

D'après l'équation (1.19), on a :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 1.35$$

En substituant les équations (1.31) et (1.34) dans l'équation (1.17), on obtient:

$$W^e = \int_{L^e} \left( \boldsymbol{\Phi}_e^t \mathbf{N} u \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} \mathbf{c}_e + k \boldsymbol{\Phi}_e \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} \mathbf{c}_e - \boldsymbol{\Phi}_e^t \mathbf{N} f \right) dx \quad 1.36$$

Pour éviter de faire recours à l'intégration numérique et faciliter ainsi les calculs, on considère les paramètres physiques  $u$ ,  $k$  et  $f$  constants par élément, ainsi l'équation (1.36) devient :

$$W^e = \boldsymbol{\Phi}_e \left[ \left( \bar{u}_e \int_{L^e} \mathbf{N} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} dx + \bar{k}_e \int_{L^e} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} dx \right) \mathbf{c}_e - \bar{f}_e \int_{L^e} \mathbf{N} dx \right]$$

où  $\bar{u}_e$ ,  $\bar{k}_e$  et  $\bar{f}_e$  sont les valeurs moyennes par élément. En posant :

$$\mathbf{V} = \int_{L^e} \mathbf{N} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} x_2 - x \\ x - x_1 \end{Bmatrix} dx = \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 1.37$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_{L^e} \mathbf{N} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} dx = \mathbf{V} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} = \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \langle -1 \quad 1 \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 1.38$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_{L^e} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} dx = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} h_e = \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \langle -1 \quad 1 \rangle h_e = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 1.39$$

l'équation (1.36) s'écrit :

$$W^e = \boldsymbol{\Phi}_e (\bar{u}_e \mathbf{K}_1 \mathbf{c}_e + \bar{k}_e \mathbf{K}_2 \mathbf{c}_e - \bar{f}_e \mathbf{V})$$

soit :

$$W^e = \boldsymbol{\Phi}_e \mathbf{R}_e \quad 1.40$$

avec :

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{F}_e \quad 1.41$$

$$\mathbf{K}_e = \bar{u}_e \mathbf{K}_1 + \bar{k}_e \mathbf{K}_2 \quad 1.42$$

$$\mathbf{F}_e = \bar{f}_e \mathbf{V} \quad 1.43$$

$\mathbf{R}_e$  est appelé le vecteur résidu élémentaire,  $\mathbf{K}_e$  est appelée la matrice de rigidité élémentaire et  $\mathbf{F}_e$ , le vecteur élémentaire des sollicitations.

**Remarque :** Selon le profil de la fonction  $f(x)$ , il est préférable parfois de la considérer linéaire par élément, c'est-à-dire :

$$f = N_1(x)f_1 + N_2(x)f_2 = \mathbf{N}^t \mathbf{f}_e \text{ avec } \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad 1.44$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les valeurs de  $f$  aux nœuds de l'élément et  $N_1, N_2$ , les fonctions de forme données par l'équation (1.19). En substituant l'équation précédente dans l'équation (1.36), on obtient :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_3 \mathbf{f}_e \quad 1.45$$

avec :

$$\mathbf{K}_3 = \int_{L_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^t dx dy = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 1.46$$

**Prise en compte des conditions aux limites de type Neumann** (s'il y en a)

Revenons au terme de frontière  $W^c$  donné par l'équation (1.11) :

$$W^c = - \left( \phi k \frac{dc}{dx} \right)_0^L \quad 1.47$$

$$W^c = \left( \phi k \frac{dc}{dx} \right)_{in=1} - \left( \phi k \frac{dc}{dx} \right)_{in=N} \quad 1.48$$

On rappelle que si en un nœud frontière  $in$  ( $in = 1$  et/ou  $in = N$ ), la condition aux limites est de type Dirichlet (c'est-à-dire on impose  $c$ ) alors la fonction test  $\phi$  est nulle en ce nœud et par conséquent  $(\phi k dc/dx)_{in} = 0$ . Cependant si la condition aux limites est du type Neumann, on a d'après l'équation (1.7b) :

$$W^c = -(\phi q)_0^L \quad 1.48$$

$$W^c = \phi_1 q_1 - \phi_N q_2 = \langle \phi_1 \quad \phi_N \rangle \mathbf{R}_c \quad 1.49$$

avec :

$$\mathbf{R}_c = \begin{Bmatrix} q_1 \\ -q_2 \end{Bmatrix} \quad 1.50$$

et  $q_1$  et  $q_2$  sont respectivement les valeurs de  $q$  aux nœuds 1 et  $N$ . Dans la majeure des cas, le

flux  $q$  se présente sous la forme :

$$q(c) = \beta c + \alpha \quad 1.51$$

Dans le cas linéaire, les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont constants.

En substituant l'équation (1.51) dans (1.50), on obtient :

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{K}_c \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_N \end{Bmatrix} - \mathbf{F}_c \quad 1.52$$

avec :

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} \quad 1.53$$

$$\mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad 1.54$$

### Assemblage

L'étape d'assemblage est une étape importante de la méthode des éléments finis, elle consiste à calculer la forme intégrale globale  $W$  (équation (1.16)) à partir des formes élémentaires  $W^e$  (équation (1.40)) et du terme de frontière  $W^c$  (équation (1.49)) puis en déduire les tables globales  $(\mathbf{R}_g, \mathbf{K}_g, \mathbf{F}_g)$ .

Revenons à l'équation (1.40) :

$$W^e = \boldsymbol{\phi}_e \mathbf{R}_e$$

On rappelle que les connectivités d'un élément  $n^{\circ}e$  ( $1 \leq e \leq n_e$ ), c'est-à-dire les nœuds qui lui sont attachés sont données par le vecteur  $\mathbf{loce}(e)$  (équation (1.13)).

On rappelle aussi que  $\boldsymbol{\phi}_e$  est le vecteur qui contient les valeurs de  $\phi$  aux nœuds de l'élément, soit :

$$\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_e \quad \phi_{e+1} \rangle \quad 1.55$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (1.40), on obtient :

$$W^e = \langle \phi_e \quad \phi_{e+1} \rangle \mathbf{R}_e \quad 1.56$$

qui peut être écrite sous une forme étendue :

$$W^e = \langle \phi_1 \quad \dots \quad \phi_e \quad \dots \quad \phi_N \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_N = \boldsymbol{\phi}_g \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.57$$

où  $\boldsymbol{\phi}_g$  est le vecteur qui contient les valeurs de  $\phi$  de l'ensemble des nœuds du maillage :

$$\boldsymbol{\phi}_g = \langle \phi_1 \quad \dots \quad \phi_e \quad \dots \quad \phi_N \rangle \quad 1.58$$

$\boldsymbol{\phi}_g$  est nommé vecteur global des variables nodales virtuelles.

De même, l'équation (1.49) peut s'écrire :

$$W^c = \boldsymbol{\phi}_g \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_c(2) \end{Bmatrix}_N \quad 1.59$$

En substituant les équations (1.57) et (1.59) dans l'équation (1.16), on obtient :

$$W = \boldsymbol{\phi}_g \mathbf{R}_g \quad 1.60$$

avec :

$$\mathbf{R}_g = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_c(2) \end{Bmatrix}_N + \sum_{e=1}^{n_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_N \quad 1.61$$

$\mathbf{R}_g$  est nommé le vecteur résidu global. D'après les équations (1.52) et (1.41) on a :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{R}_c(2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c(1,1) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{K}_c(2,2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{F}_c(2) \end{Bmatrix} \quad 1.62$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_e(1,1) & \mathbf{K}_e(1,2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_e(2,1) & \mathbf{K}_e(2,2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N,N} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.63$$

En injectant les équations précédentes dans l'équation (1.61), on obtient :

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{K}_g \mathbf{c}_g - \mathbf{F}_g \quad 1.64$$

avec :

$$\mathbf{c}_g = \langle c_1, c_2, c_3, \dots, c_N \rangle^t \quad 1.65$$

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c(1,1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{K}_c(2,2) \end{bmatrix}_{N,N} + \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_e(1,1) & \mathbf{K}_e(1,2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_e(2,1) & \mathbf{K}_e(2,2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N,N}}_{\text{Table } \mathbf{K}_e \text{ étendue}} \quad 1.66$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c(1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{F}_c(2) \end{Bmatrix}_N + \sum_{e=1}^{n_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{F}_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_N \quad 1.67$$

Table  $\mathbf{F}_e$  étendue

$\mathbf{K}_g$  est appelée la matrice de rigidité globale,  $\mathbf{F}_g$  est le vecteur global des sollicitations et  $\mathbf{c}_g$  le vecteur global des variables nodales. Pour effectuer l'opération d'assemblage, on applique l'algorithme ci-dessous :

### Algorithme d'assemblage

- Initialiser à zéro les tables suivantes :

$$\mathbf{K}_g(1:N, 1:N) = 0 ; \mathbf{F}_g(1:N) = 0 \quad 1.68$$

Boucle sur les éléments

- Extraire les connectivités de l'élément **loce** (équation (1.13)).
- Calculer les tables élémentaires  $\mathbf{K}_e, \mathbf{F}_e$  (équations (1.42) et (1.43)).
- Effectuer les opérations suivantes :

$$\mathbf{K}_g(\mathbf{loce}, \mathbf{loce}) = \mathbf{K}_g(\mathbf{loce}, \mathbf{loce}) + \mathbf{K}_e \quad 1.69$$

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{loce}) = \mathbf{F}_g(\mathbf{loce}) + \mathbf{F}_e \quad 1.70$$

Fin de la boucle sur les éléments.

- Ajouter les termes de frontière comme suit :

$$\mathbf{K}_g(1,1) = \mathbf{K}_g(1,1) + \mathbf{K}_c(1,1) \quad 1.71a$$

$$\mathbf{F}_g(1) = \mathbf{F}_g(1) + \mathbf{F}_c(1) \quad 1.71b$$

$$\mathbf{K}_g(N, N) = \mathbf{K}_g(N, N) + \mathbf{K}_c(2,2) \quad 1.72a$$

$$\mathbf{F}_g(N) = \mathbf{F}_g(N) + \mathbf{F}_c(2) \quad 1.72b$$

Fin de l'algorithme d'assemblage

**Remarque :** Les équations (1.71) et (1.72) ne sont appliquées que si la condition aux limites est du type Neumann, c'est-à-dire, que si on applique au nœud 1 une condition de Dirichlet, alors les équations (1.71) n'auront pas lieu, de même que pour les équations (1.72) si une condition de Dirichlet est appliquée au nœud  $N$ .

Dans l'équation (1.60),  $\boldsymbol{\phi}_g$  est non nul car la fonction test  $\phi$  est quelconque et par conséquent c'est le vecteur  $\mathbf{R}_g$  qui doit être nul, il en résulte d'après l'équation (1.64) que :

$$\mathbf{K}_g \mathbf{c}_g = \mathbf{F}_g \quad 1.73$$

La résolution du système (1.73) permet de calculer le vecteur inconnu  $\mathbf{c}_g$  qui représente les valeurs de la fonction  $c$  aux nœuds du maillage, mais la résolution de ce système nécessite d'abord la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet.

### Prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet et Résolution

Pour introduire les conditions aux limites de Dirichlet, on a choisi la méthode du "terme unité sur la diagonale" (Dhatt, 1984) dont le principe consiste à modifier pour chaque nœud  $in$  de la frontière  $S_1$  où on a imposé une valeur  $c_{in}$ , le vecteur  $\mathbf{F}_g$  puis la matrice  $\mathbf{K}_g$  comme suit :

$$\mathbf{F}_g(j) = \mathbf{F}_g(j) - \mathbf{K}_g(j, in)c_{in} \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } N \text{ et } \mathbf{F}_g(in) = c_{in} \quad 1.74$$

$$\mathbf{K}_g(j, in) = \mathbf{K}_g(in, j) = 0; \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } N \text{ et } \mathbf{K}_g(in, in) = 1 \quad 1.75$$

### Différentes étapes de la méthode des éléments finis

On peut résumer la formulation précédente dans les étapes suivantes :

#### 1- Maillage

Le maillage consiste à calculer les tables  $\mathbf{x}$  et **connec** (équation (1.12)).

#### 2- Calcul élémentaire



Le calcul élémentaire consiste à calculer pour chaque élément les tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  (équations (1.42) et (1.43) ou (1.45)).

### 3- Assemblage

L'assemblage permet de calculer les tables globales  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  (équations (1.67)).

- 4- Prise en compte des conditions aux limites de type Neumann (équations (1.71) et (1.72)).
- 5- Prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet (équations (1.74) et (1.75)).
- 6- Résolution du système (1.73) et détermination de  $\mathbf{c}_g$ .

### Résolution

Pour résoudre le système (1.73), on distingue deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :**  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  ne dépendent pas de l'inconnu  $\mathbf{c}_g$ , dans ce cas le problème est dit linéaire et la résolution du système est directe.

**2<sup>ème</sup> cas :**  $\mathbf{K}_g$  et/ou  $\mathbf{F}_g$  dépendent de  $\mathbf{c}_g$ , on parle alors d'un problème non linéaire et la résolution du système nécessite l'utilisation d'une méthode de linéarisation telle que la méthode de Newton-Raphson par exemple.

**Remarque :** La méthode des éléments finis permet de calculer uniquement les valeurs de la fonction  $c$  aux nœuds de l'élément, représentées par le vecteur  $\mathbf{c}_e$ . Si on souhaite calculer une valeur  $c(x)$  pour laquelle  $x$  n'est pas une coordonnée nodale, on doit d'abord identifier l'élément  $e$  dans lequel se situe la valeur  $x$  puis extraire les coordonnées nodales  $\mathbf{x}_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  et les variables nodales  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$  de l'élément  $e$ . La valeur  $c(x)$  sera ensuite calculée grâce à l'équation (1.18) (voir exemples au paragraphe 1.6).

Nous nous limitons dans notre étude au problème linéaire. Le problème est linéaire si les paramètres  $u, k$  sont indépendants de  $c$  et si  $f, q$  sont des fonctions linéaires de  $c$ , soit :

$$u = u(x), \quad k = k(x) \quad 1.76a$$

$$f = A(x)c + B(x) \quad 1.76b$$

$$q = \beta c + \alpha \quad 1.76c$$

où  $A(x)$  et  $B(x)$  sont des fonctions quelconques de l'espace  $x$  et  $\alpha, \beta$  sont des constantes. En substituant l'équation (1.31b) dans l'équation (1.76b), l'équation (1.36) devient :

$$W^e = \int_{L^e} \left( \Phi_e^t \mathbf{N} u \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} \mathbf{c}_e + k \Phi_e \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}^t}{dx} \mathbf{c}_e - \Phi_e^t \mathbf{N} (A \mathbf{N}^t \mathbf{c}_e + B) \right) dx \quad 1.77$$

soit :

$$W_e = \Phi_e (\mathbf{K}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{F}_e) \quad 1.78$$

avec :

$$\mathbf{K}_e = \bar{u}_e \mathbf{K}_1 + \bar{k}_e \mathbf{K}_2 - \bar{A}_e \mathbf{K}_3 \quad 1.79$$

$$\mathbf{F}_e = \bar{B}_e \mathbf{V} \quad 1.80$$

où  $\bar{A}_e$  et  $\bar{B}_e$  sont les valeurs moyennes par élément.

**Remarque :** Pour toute fonction  $s(x)$ , sa valeur moyenne élémentaire  $\bar{s}_e$  est égale à :

$$\bar{s}_e = \frac{1}{h_e} \int_{L^e} s(x) dx \cong s(\bar{x}_e) \quad \text{avec} \quad \bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad 1.81$$

Dans certains cas, la fonction  $s(x)$  est connue uniquement aux nœuds de l'élément, dans ce cas la moyenne se calcule comme suit :

$$\bar{s}_e = \frac{1}{2} (s_1 + s_2) \quad 1.82$$

Dans de nombreux problèmes, les fonctions  $u, k, A$  et  $B$  proviennent d'un calcul numérique et sont eux-mêmes des valeurs nodales, on utilise dans ce cas l'équation (1.82) pour calculer leurs valeurs moyennes.

**Remarque :** Selon le profil de la fonction  $B(x)$ , il est préférable parfois de la considérer linéaire par élément, c'est-à-dire :

$$B = N_1(x)B_1 + N_2(x)B_2 = \mathbf{N}^t \mathbf{B}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad 1.83$$

L'équation (1.80) devient :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_3 \mathbf{B}_e \quad 1.84$$

Le terme frontière a été déjà traité (équations (1.47)-(1.54)).

---

*CHAPITRE 2*

*CAS DE CONVECTION DOMINANTE*

---

---

## CHAPITRE 2

### CAS DE CONVECTION DOMINANTE

---

#### 2.1 Introduction

Considérons le cas simple de l'équation linéaire de convection-diffusion sous la forme unidimensionnelle stationnaire :

$$u \frac{dc}{dx} - k \frac{d^2c}{dx^2} = 0 \quad x \in [0, L] \quad 2.1$$

où  $u$  et  $k$  sont supposés constants et positifs.

On désigne par le nombre adimensionnel  $P_e$  défini comme suit :

$$P_e = \frac{u h_e}{2 k} \quad 2.2$$

le nombre de Peclet local. Ce nombre permet de mesurer l'influence de la convection par rapport à la diffusion, ainsi :

- si  $P_e > 1$ , la convection est dominante
- si  $P_e < 1$ , la diffusion est dominante

Dans l'équation (2.2),  $h_e$  désigne la longueur de l'élément.

#### Solution par Méthode de Galerkin

Pour un maillage uniforme de longueur d'élément  $h$ , la matrice de rigidité élémentaire  $\mathbf{K}_e$  donnée par l'équation (1.42) peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K}_e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 - P_e & P_e - 1 \\ -1 - P_e & 1 + P_e \end{bmatrix}$$

On obtient après assemblage :

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & -(1 + P_e) & 2 & P_e - 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -(1 + P_e) & 2 & P_e - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -(1 + P_e) & 2 & P_e - 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_G \\ c_P \\ c_D \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

où  $G, P$  et  $D$  sont trois points consécutifs du maillage. Pour tout nœud intérieur  $P$ , on a selon l'équation précédente :

$$-(1 + P_e)c_G + 2c_P + (P_e - 1)c_D = 0 \quad 2.3$$

### Solution par la méthode des différences finies centrées

La discrétisation de l'équation (2.1) par la méthode des différences finies centrées s'écrit :

$$u \frac{c_D - c_G}{2h} - k \frac{c_D - 2c_P + c_G}{h^2} = 0$$

ou :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_G + 2\frac{k}{h^2}c_P + \left(-\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_D &= 0 \\ -\frac{k}{h^2}\left\{\left(1 + \frac{hu}{2k}\right)c_G - 2c_P + \left(1 - \frac{hu}{2k}\right)c_D\right\} &= 0 \end{aligned}$$

soit :

$$(1 + P_e)c_G - 2c_P + (1 - P_e)c_D = 0$$

qui est identique à l'équation (2.3).

Donc, la solution obtenue par la méthode de Galerkin est équivalente à celle obtenue par la méthode des différences finies centrées.

En cherchant une solution à l'équation (2.3) sous la forme  $c(x) = e^{ax}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + P_e)e^{a(x_P-h)} - 2e^{ax_P} + (1 - P_e)e^{a(x_P+h)} &= 0 \\ e^{ax_P}\{(1 + P_e)e^{-ah} - 2 + (1 - P_e)e^{ah}\} &= 0 \end{aligned}$$

En posant  $\lambda = e^{ah}$  et en multipliant l'équation précédente par  $\lambda$ , on obtient :

$$(1 - P_e)\lambda^2 - 2\lambda + (1 + P_e) = 0$$

et dont les solutions sont égales à :

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{1 + P_e}{1 - P_e}$$

Sachant que :

$$e^{ax} = e^{ahx/h} = \lambda^{x/h}$$

la solution au point  $P$  d'abscisse  $x_P$  est :

$$c_P = A\lambda_1^{x_P/h} + B\lambda_2^{x_P/h} = A + B\left(\frac{1 + P_e}{1 - P_e}\right)^{x_P/h}$$

Pour un domaine  $[0, L]$  et un maillage uniforme, on a  $x_P = (P - 1)h$ , d'où :

$$c_P = A + B\left(\frac{1 + P_e}{1 - P_e}\right)^{P-1}$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont calculées grâce aux conditions aux limites.

Par définition,  $\lambda$  doit être positif, or  $\lambda_2$  ne l'est que si :

$$P_e \in [-1,1] \quad 2.4$$

**Conclusion** : La méthode de Galerkin est stable si  $|P_e| \leq 1$ .

### Exemple

La solution exacte du problème régi par l'équation (2.1) et les conditions aux limites de type Dirichlet est égale à :

$$c(x) = (c_L - c_0) \left( \frac{e^{\frac{ux}{k}} - 1}{e^{\frac{uL}{k}} - 1} \right) + c_0 \quad 2.5$$

où  $c_0$  et  $c_L$  représentent respectivement les valeurs de  $c$  en  $x = 0$  et  $x = L$ .

La solution exacte a été comparée avec la solution numérique obtenue par la méthode de Galerkin pour différentes valeurs du nombre de Peclet et avec les données suivantes :  $c_0 = 1, c_L = 0, u = 1$  et  $L = 1$ . La longueur  $L$  a été discrétisée en 10 éléments, soit  $h_e = 0.1$ . Quatre valeurs du coefficient de diffusion  $k$  ont été considérées :  $k = 0.1, k = 0.05, k = 0.04$  et  $k = 0.01$ , ce qui correspond à quatre valeurs du nombre de Peclet :  $P_e = 0.5, P_e = 1, P_e = 1.25$  et  $P_e = 5$ . La figure 2.4 montre que la solution numérique obtenue par la méthode de Galerkin présente des instabilités numériques dès que le nombre de Peclet devient supérieur à 1. Ces oscillations non-physiques s'amplifient au fur et à mesure que le nombre de Peclet augmente et tendent vers l'infini dans le cas d'une convection pure ( $P_e = \infty$ ).

**Conclusion** : La méthode des éléments finis de type Galerkin ne convient pas aux problèmes à convection dominante ( $P_e > 1$ ). La raison est que l'approximation de l'équation (2.1) par la méthode de Galerkin introduit une diffusion numérique négative, siège potentiel d'oscillations non-physiques. Ce type de discrétisation conduit à la résolution d'une équation modifiée à diffusion réduite.

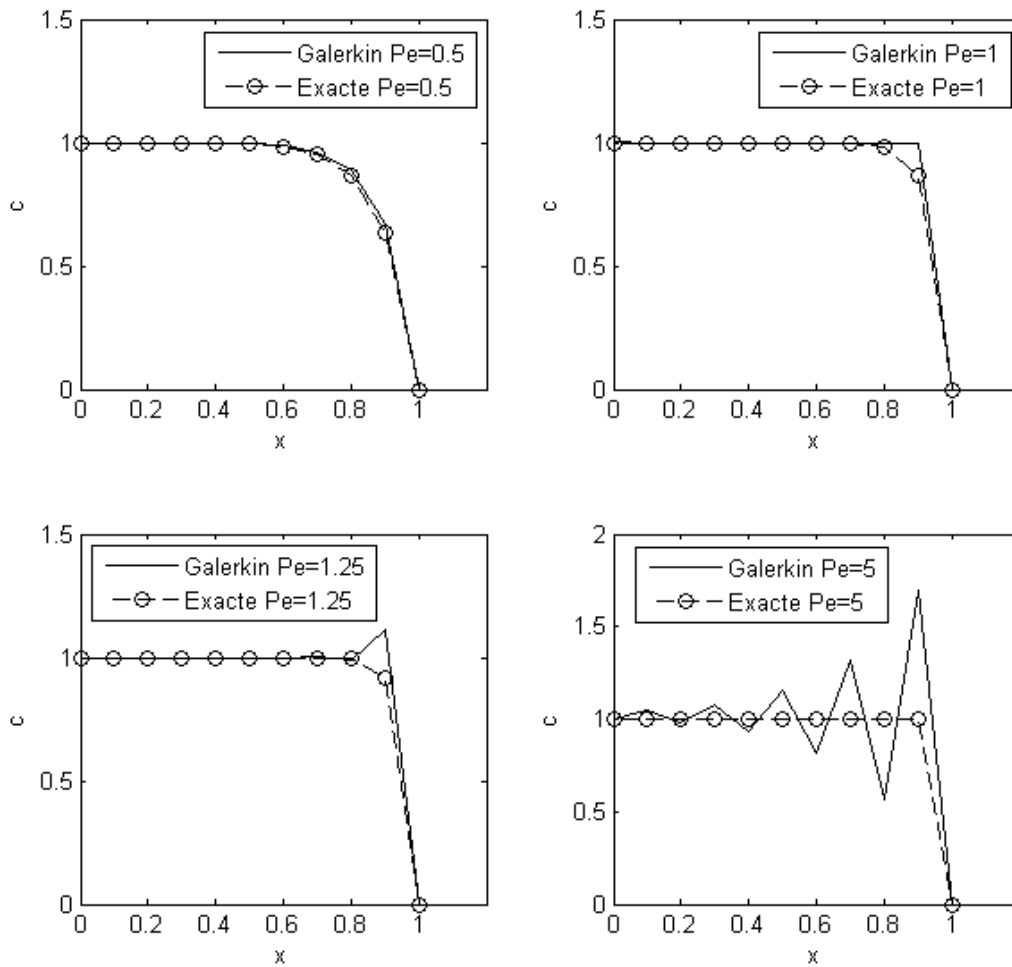


Figure 2.4 : Influence du nombre de Peclet sur la solution numérique

## 2.2 Méthode de Petrov-Galerkine

Pour remédier aux problèmes des oscillations générées par la méthode de Galerkin, Hughes et al (Brooks, 1980) ont eu l'idée de changer la fonction test. Ils ont pris une fonction test  $\phi^*$  de la forme:

$$\phi^* = \phi(x) + \tau \mathcal{L}_{stab}(\phi) \quad 2.6$$

où  $\phi(x)$  est la fonction test de Galerkin (équation (1.30)) et  $\mathcal{L}_{stab}$  est un opérateur différentiel de stabilisation qui diffère selon les méthodes suivantes :

a- **Méthode SUPG** (Streamline Upwind Petrov-Galerkine method):

Pour la méthode SUPG,  $\mathcal{L}_{stab}$  correspond à la partie advective de l'opérateur  $\mathcal{L}$  donné par l'équation (1.7):

$$\mathcal{L}_{stab} = u \frac{d}{dx} \quad 2.7$$

ainsi la fonction test s'écrit :

$$\phi^* = \phi + \tau u \frac{d\phi}{dx} \quad 2.8$$

b- **Méthode GLS** (Galerkine Least-Squares method) :

Pour la méthode GLS, on prend  $\mathcal{L}_{stab} = \mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}_{stab} = u \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{d}{dx} \right) \quad 2.9$$

et la fonction test s'écrit :

$$\phi^* = \phi + \tau \left( u \frac{d\phi}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{d\phi}{dx} \right) \right) \quad 2.10$$

Le terme  $\tau$  présent dans l'équation (2.6) est un paramètre de stabilisation, il dépend des paramètres physiques du problème ( $u$  et  $k$ ) et du paramètre du maillage  $h_e$ .

Comme les fonctions d'interpolation sont linéaires, les méthodes SUPG et GLS sont identiques dans notre cas.

### 2.3 Méthode de la diffusion artificielle ajoutée (DAA)

L'apparition des instabilités numériques dans le cas de la convection dominante est due au fait que l'équation discrétisée à l'aide de la méthode de Galerkine revient à résoudre un problème sous diffusé de la forme :

$$u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( (k - k^*) \frac{dc}{dx} \right) = 0 \quad 2.11$$

où  $k^*$  est une diffusion parasite qui augmente avec le nombre de Peclet et devient supérieure à la diffusion physique  $k$  et par conséquent la diffusion totale  $(k - k^*)$  devient négative provoquant ainsi des instabilités numériques, d'où l'idée de rajouter à l'équation d'origine (1.1) une diffusion artificielle  $\tilde{k}$  pour contre balancer cette diffusion parasite  $k^*$  engendrée par la formulation de Galerkine, ceci est le principe de la méthode DAA. Pour déterminer la valeur optimale de  $\tilde{k}$ , considérons l'exemple suivant :



$$\begin{cases} u \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( k \frac{dc}{dx} \right) = 0, & x \in [0, L] \\ c(0) = 0, & c(L) = \bar{c} \end{cases} \quad 2.12$$

En supposant  $u$  et  $k$  constants et en prenant un maillage à deux éléments égaux de longueurs  $h_e = L/2$ , la solution exacte au centre du domaine est, selon l'équation (2.5), égale à :

$$c_2 = \bar{c} \left( \frac{e^{\frac{u h_e}{k}} - 1}{e^{\frac{u L}{k}} - 1} \right) = \bar{c} \left( \frac{e^{2P_e} - 1}{e^{4P_e} - 1} \right) = \frac{\bar{c}}{e^{2P_e} + 1} \quad \text{avec } P_e = \frac{u h_e}{2k} \quad 2.13$$

Par ailleurs, la solution au centre du domaine calculée par la méthode de Galerkin est :

$$c_2 = \frac{\bar{c}}{2} (1 - P_e) \quad 2.14$$

D'après l'équation précédente  $c_2$  devient négative pour  $P_e > 1$ , ce résultat est non physique car d'après l'équation (2.13),  $c_2$  est positive  $\forall P_e$ , d'où l'idée est de rajouter à la diffusion physique  $k$ , une diffusion artificielle  $\tilde{k}$  de la telle sorte que la solution de Galerkin soit identique à la solution exacte :

$$\frac{\bar{c}}{2} \left( 1 - \frac{u h_e}{2(k + \tilde{k})} \right) = \frac{\bar{c}}{e^{2P_e} + 1}$$

soit :

$$\frac{u h_e}{2(k + \tilde{k})} = 1 - \frac{2}{e^{2P_e} + 1} = \frac{e^{2P_e} - 1}{e^{2P_e} + 1} = th(P_e)$$

En inversant l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{2(k + \tilde{k})}{u h_e} = coth(P_e)$$

$$\frac{2\tilde{k}}{u h_e} = coth(P_e) - \frac{1}{P_e}$$

Soit :

$$\tilde{k} = \frac{u h_e}{2} \left( coth(P_e) - \frac{1}{P_e} \right)$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\tilde{k} = \frac{u h_e}{2} \zeta(P_e) \quad 2.15$$

avec :

$$\zeta(P_e) = coth(P_e) - \frac{1}{P_e} \quad 2.16$$

La méthode DAA est une méthode de Galerkin mais avec un coefficient de diffusion égal à  $k + \tilde{k}$ , la table  $\mathbf{F}_e$  reste identique à celle de Galerkin, par contre la table  $\mathbf{K}_e$  est égale à :

$$\mathbf{K}_e = \bar{u}_e \mathbf{K}_1 + \bar{\varepsilon}_e \mathbf{K}_2 \quad 2.17$$

avec:

$$\bar{\varepsilon}_e = \bar{k}_e + \frac{\bar{u}_e h_e}{2} \zeta(P_e) \quad 2.18$$

Le précédent exemple a été traité par la méthode DAA, la solution numérique concorde parfaitement avec la solution exacte quelle que soit la valeur du nombre de Peclet, et même dans le cas extrême d'une convection pure ( $P_e = \infty$ ) (figure 2.5).

Cette pratique d'ajouter une diffusion artificielle  $\tilde{k}$  est beaucoup utilisée pour stabiliser la solution numérique, malheureusement la valeur de cette diffusion, donnée par l'équation (2.15) est valable uniquement pour le cas unidimensionnel linéaire, dans le cas non linéaire ou dans le cas multidimensionnel, on ajuste manuellement ce coefficient.

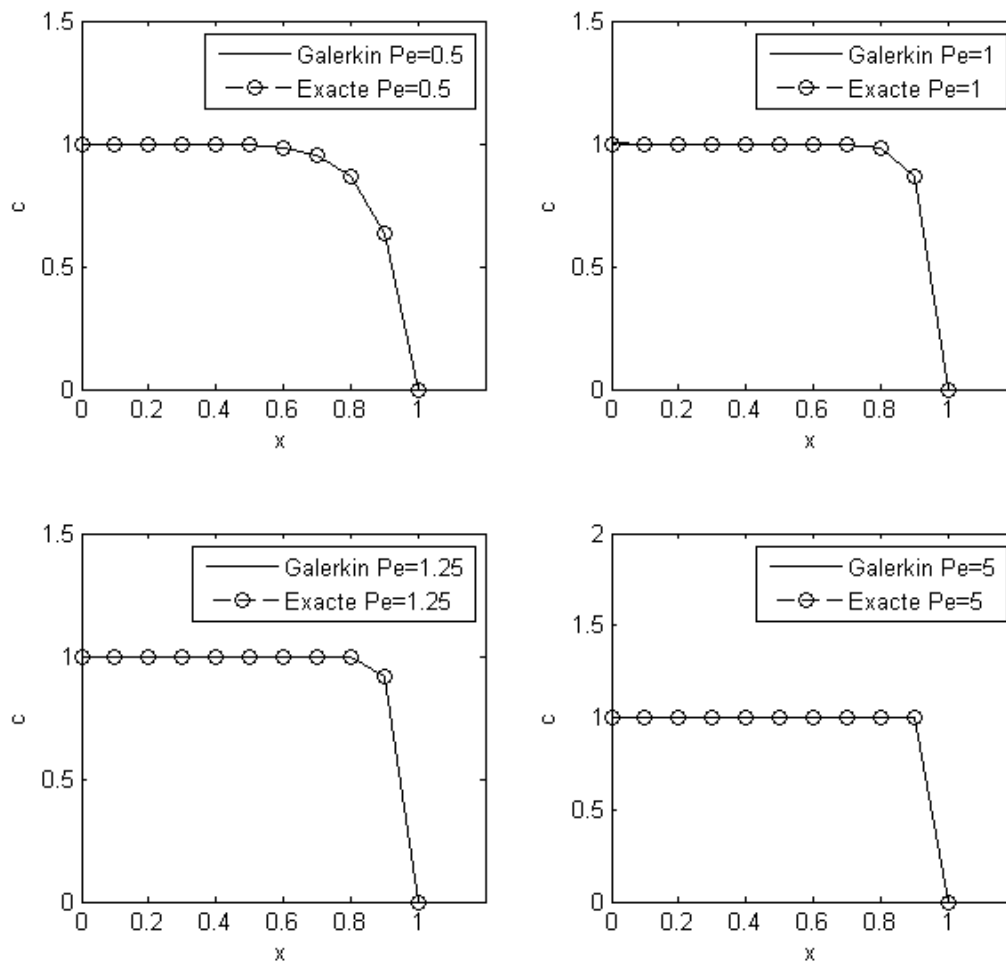


Figure 2.5 : Solution donnée par la méthode DAA

---

*CHAPITRE 03*

*EXEMPLES*

---

---

## CHAPITRE 03

### EXEMPLES

---

#### 3.1 Composantes d'un code de calcul Eléments Finis

Un code de calcul Eléments Finis se compose de trois parties :

- **Maillage ou prétraitement**

Cette opération consiste à découper le domaine de calcul  $D$  en sous domaines  $D_e$ . Dans le cas 1D, le domaine  $D$  est une longueur  $L$  et  $D_e$  est soit un élément linéaire à 2 nœuds (L2), soit un élément quadratique à trois nœuds ou autre mais l'élément L2 reste l'élément préféré en mécanique des fluides. L'opération du maillage est cruciale pour la précision du calcul, le maillage doit être raffiné ( $h_e$  faible) dans les zones de forte variation de la solution, mais comme on ignore la solution au départ, on procède d'abord à un premier calcul sur un maillage initial quelconque, on localise les zones de forte variation de la solution et on refait le calcul avec un maillage plus raffiné en ces zones. Dans le cas 1D ou 2D (domaine quadrilatère), le programme informatique qui fait le maillage est très simple. Cependant, pour les formes géométriques complexes (2D ou 3D), l'opération du maillage s'avère complexe. Un spécialiste de la méthode des éléments finis n'est pas censé être un spécialiste du maillage car c'est une spécialité à part. Fort heureusement qu'on puisse trouver sur le web des mailleurs (logiciel qui fait le maillage) gratuits. Les inputs du maillage sont la géométrie, le type de l'élément et la taille  $h_e$ . Les outputs du maillage sont les coordonnées de chaque nœud et les connectivités de chaque élément.

- **Solveur**

Le solveur est la partie principale d'un code éléments finis, c'est la partie qui fait le calcul :

- Lecture des données (maillage, paramètres physiques, conditions aux limites et initiales,...)
- Calcul élémentaire :  $\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_{te}, \mathbf{F}_e, \mathbf{R}_e$
- Assemblage :  $\mathbf{K}_g, \mathbf{K}_{tg}, \mathbf{F}_g, \mathbf{R}_g$
- Prise en compte des conditions aux limites

- Résolution du système

### • Post-traitement

La partie post-traitement est la partie qui traite les résultats (tracé des courbes, isosurfaces, isolignes,...).

### Algorithme

#### Maillage

- Lecture des données (Longueur  $L$ , Conditions aux limites,...)
- Choix du nombre d'éléments  $n_e$
- Calcul de la table des coordonnées  $\mathbf{x}$
- Calcul de la table des connectivités **connec**

#### Solveur

- Initialisation à zéro de  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$
  - **Boucle sur les éléments**
    - Extraire la table de localisation **loce**
    - Extraire les coordonnées élémentaires  $\mathbf{x}_e$  ( $\mathbf{x}_e$  peut servir éventuellement au calcul des paramètres physiques  $\bar{u}_e, \bar{k}_e, \bar{A}_e, \bar{B}_e$  ou  $\mathbf{B}_e$ .)
- $$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce})$$
- Introduire les paramètres élémentaires  $\bar{u}_e, \bar{k}_e, \bar{A}_e, \bar{B}_e$  ou  $\mathbf{B}_e$
  - Calculer  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$
  - Assemblage
  - **Fin de la boucle sur les éléments**
  - Prise en compte des conditions aux limites de Neumann
  - Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet
  - Résolution du système linéaire obtenu.

#### Post-traitement

- Tracer les courbes, comparer...

### 3.2 Exemples

Résoudre le problème ci-dessous avec les trois méthodes citées précédemment dans les deux cas suivants :

- a- un maillage à 2 éléments
- b- un maillage à 4 éléments. En déduire  $c(x = 2.75)$ .

$$\begin{cases} \cosh(x) \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( e^{-x} \frac{dc}{dx} \right) - (\cos x)c - \sin x = 0 & x \in [0, 4] \\ c(x = 0) = 1 \text{ et } c(x = 4) = 0 \end{cases}$$

Faire un programme matlab et tracer les solutions numériques en utilisant un maillage à 10 éléments.

### a- Maillage à 2 éléments

La figure 3.1 résume toutes les informations liées au maillage, numéros des nœuds, coordonnées nodales, numéros des éléments et leurs connectivités. Le nombre total des nœuds est  $N = 3$ , le nombre total des éléments est  $n_e = 2$ , la taille de l'élément est  $h_e = 2$ .

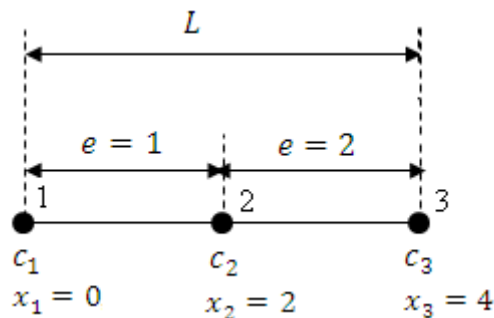


Figure 3.1 : Discrétisation du domaine en deux éléments L2

Les tables des coordonnées et connectivités globales sont données par les deux tableaux suivants :

N° nœud	Coordonnée x
1	0.
2	2.
3	4.

N° élément	connectivités
1	1 2
2	2 3

D'après la figure 3.1, on a :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2. \\ 4. \end{Bmatrix}, \mathbf{connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

L'inconnu du problème est le vecteur global des variables nodales  $\mathbf{c}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$ .

## 1- Méthode de Galerkin

### Calcul élémentaire

Le calcul élémentaire consiste à calculer  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  pour chaque élément du maillage.

Elément 1 ( $e = 1$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(1) = \mathbf{connec}(1, :) = (1 \ 2)$
- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 1.5431$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.3679$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = 0.5403$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = 0.8415$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  : équations (1.79) et (1.80)

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 \\ -1.1356 & 0.5953 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \end{Bmatrix}$$

- Forme intégrale élémentaire : équation (1.40)

$$W^{e=1} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \left( \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 \\ -1.1356 & 0.5953 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \end{Bmatrix} \right)$$

- Extension de la forme intégrale élémentaire



$$W^{e=1} = \underbrace{\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle}_{\Phi_g} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & 0.5953 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{K}_{e=1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}_g} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{F}_{e=1}} \right)$$

Elément 2 ( $e = 2$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(2) = \mathbf{connec}(2, :) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\Phi_e = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_2 + x_3}{2} = 3$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 10.0677$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.0498$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = -0.99$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = 0.1411$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  : équations (1.79) et (1.80)

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} -4.3489 & 5.3389 \\ -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.1411 \\ 0.1411 \end{Bmatrix}$$

- Forme intégrale élémentaire : équation (1.40)

$$W^{e=2} = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle \left( \begin{bmatrix} -4.3489 & 5.3389 \\ -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.1411 \\ 0.1411 \end{Bmatrix} \right)$$

- Extension de la forme intégrale élémentaire

$$W^{e=2} = \underbrace{\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle}_{\Phi_g} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.3489 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{K}_{e=2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{c}_g} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1411 \\ 0.1411 \end{Bmatrix}}_{\text{extension de } \mathbf{F}_{e=2}} \right)$$

### Assemblage

L'assemblage consiste à additionner les formes intégrales élémentaires et en déduire  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$ .

En additionnant les deux formes élémentaires ( $W^{e=1}$ ) et ( $W^{e=2}$ ), on obtient :

$$W = \Phi_{\mathbf{g}} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & 0.5953 - 4.3489 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}} \mathbf{c}_{\mathbf{g}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.8415 + 0.1411 \\ 0.1411 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\mathbf{g}}} \right)$$

d'où :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} -0.9478 & 0.4075 & 0 \\ -1.1356 & -3.7537 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.9826 \\ 0.1411 \end{pmatrix}$$

### Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

Des conditions de Dirichlet sont appliquées aux deux nœuds frontières,  $in = 1$  avec  $c_1 = 1$ ,  $in = 3$  avec  $c_3 = 0$ .

En appliquant les équations (1.74) et (1.75) avec  $in = 1$  et  $c_1 = 1$ , on obtient :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 0.8415 \\ 0.9826 \\ 0.1411 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.9478 \\ -1.1356 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}}(1) = c_1 \quad \text{soit} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0.1411 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}} = \mathbf{K}_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 5.3389 \\ 0 & -4.7287 & 5.7187 \end{bmatrix}$$

En appliquant les équations (1.74) et (1.75) avec  $in = 3$  et  $c_3 = 0$ , on obtient :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0.1411 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5.3389 \\ 5.7187 \end{pmatrix} c_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}}(3) = c_0 \quad \text{soit} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Résolution (équation (1.81))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7537 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.1182 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution du système précédent donne :

$$\mathbf{c}_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5643 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Méthode DAA

Ce que diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul de la table  $\mathbf{K}_e$ , calculée à partir de l'équation (2.17) :

Elément 1 :

$$P_e = \frac{u h_e}{2 k} = 4.1945, \quad \bar{\varepsilon}_e = 1.5438$$

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.3599 & -0.1805 \\ -1.7235 & 1.1832 \end{bmatrix}$$

Elément 2 :

$$P_e = 202.2144, \quad \bar{\varepsilon}_e = 10.0677$$

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} 0.6600 & 0.3300 \\ -9.7377 & 10.7277 \end{bmatrix}$$

Après assemblage et prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8432 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.7061 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soit après résolution :

$$\mathbf{c}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.4681 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### b- Maillage à 4 éléments

La figure 3.2 résume toutes les informations liées au maillage. Le nombre total des nœuds est  $N = 5$ , le nombre total des éléments est  $n_e = 4$ , la taille de l'élément est  $h_e = 1$ .

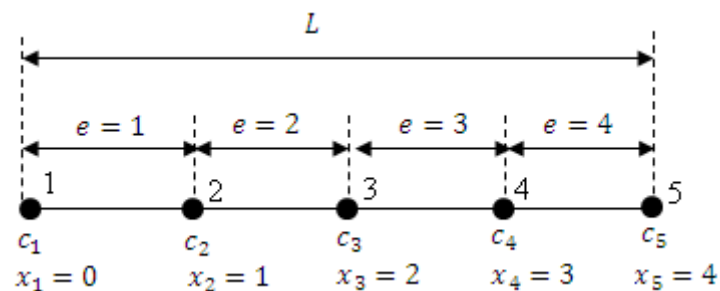


Figure 3.2 : Maillage du domaine en quatre éléments L2

Les tables des coordonnées et connectivités globales sont données par les deux tableaux suivants :

N° nœud	Coordonnée x
1	0.
2	1.
3	2.
4	3.
5	4.

N° élément	connectivités
1	1 2
2	2 3
3	3 4
4	4 5

Les tables globales des coordonnées et connectivités sont égales à :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \mathbf{connec} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

L'inconnu du problème du problème est le vecteur  $\mathbf{c}_g = \langle c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \rangle^t$

### 1- Méthode de Galerkin

Pour éviter de faire l'extension de chaque matrice élémentaire et gagner ainsi en espace de stockage, on applique l'algorithme d'assemblage pour le traitement du 2<sup>ème</sup> cas.

- Initialiser à zéro  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

#### Boucle sur les éléments

Elément 1 ( $e = 1$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(1) = \mathbf{connec}(1, :)=\langle 1 \ 2 \rangle$

- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\Phi_e = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.5$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 1.1276$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.6065$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = 0.8776$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = 0.4794$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 \\ -1.3166 & 0.8778 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 \end{Bmatrix}$$

- Assembler  $\mathbf{K}_e$  dans  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_e$  dans  $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (1.69) et (1.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 ( $e = 2$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(2) = \mathbf{connec}(2, :) = \langle 2 \quad 3 \rangle$
- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\Phi_e = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.5$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 2.3524$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.2231$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = 0.0707$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = 0.9975$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} -0.9767 & 0.9413 \\ -1.4111 & 1.3758 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4987 \\ 0.4987 \end{Bmatrix}$$

- Assembler  $\mathbf{K}_e$  dans  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_e$  dans  $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (1.69) et (1.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 3 ( $e = 3$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(3) = \mathbf{connec}(3, :) = \langle 3 \quad 4 \rangle$
- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_3, \phi_4 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2.5$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 6.1323$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.0821$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = -0.8011$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = 0.5985$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{K}_{e=3} = \begin{bmatrix} -2.7170 & 3.1176 \\ -3.0147 & 3.4153 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.4987 \\ 0.4987 \end{Bmatrix}$$

- Assembler  $\mathbf{K}_e$  dans  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_e$  dans  $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (1.69) et (1.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 - 2.7170 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & 3.4153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 + 0.2992 \\ 0.2992 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elément 4 ( $e = 4$ ) :

- Table élémentaire des connectivités :  $\mathbf{loce}(4) = \mathbf{connec}(4, :) = \langle 4 \ 5 \rangle$
- Table élémentaire des variables nodales :  $\mathbf{c}_e = \begin{Bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix}$
- Table élémentaire des variables nodales virtuelles :  $\boldsymbol{\phi}_e = \langle \phi_4, \phi_5 \rangle$
- Table élémentaire des coordonnées :  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\mathbf{loce}) = \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$
- Valeurs moyennes

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = 3.5$$

$$\bar{u}_e = \cosh(\bar{x}_e) = 16.5728$$

$$\bar{k}_e = e^{-\bar{x}_e} = 0.0302$$

$$\bar{A}_e = \cos \bar{x}_e = -0.9365$$

$$\bar{B}_e = \sin \bar{x}_e = -0.3508$$

- Tables élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{K}_{e=4} = \begin{bmatrix} -7.9441 & 8.4123 \\ -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{e=4} = \begin{Bmatrix} -0.1754 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

- Assembler  $\mathbf{K}_e$  dans  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_e$  dans  $\mathbf{F}_g$

En appliquant les équations (1.69) et (1.70), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & 0.8778 - 0.9767 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & 1.3758 - 2.7170 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & 3.4153 - 7.9441 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.2397 \\ 0.2397 + 0.4987 \\ 0.4987 + 0.2992 \\ 0.2992 - 0.1754 \\ -0.1754 \end{pmatrix}$$

Fin de la boucle sur les éléments

On réécrit  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{pmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

En appliquant les équations (1.74) et (1.75) avec,  $in = 1$  et  $c_1 = 1$ , puis avec,  $in = 5$  et  $c_5 = 0$ , on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution (équation (1.73))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\mathbf{c}_g = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -4.7136 \\ 1.6883 \\ -1.1512 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Méthode DAA

Ce qui diffère par rapport à la méthode de Galerkin, est uniquement le calcul de la table  $\mathbf{K}_e$ .

D'après l'équation (2.17) :



Elément 1 :

$$P_e = 0.9296, \quad \bar{\varepsilon}_e = 0.7719$$

$$\mathbf{K}_{e=1} = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 \\ -1.4820 & 1.0432 \end{bmatrix}$$

Elément 2 :

$$P_e = 5.2714, \quad \bar{\varepsilon}_e = 1.1763$$

$$\mathbf{K}_{e=2} = \begin{bmatrix} -0.0235 & -0.0119 \\ -2.3643 & 2.3289 \end{bmatrix}$$

Elément 3 :

$$P_e = 37.3533, \quad \bar{\varepsilon}_e = 3.0661$$

$$\mathbf{K}_{e=3} = \begin{bmatrix} 0.2670 & 0.1335 \\ -5.9988 & 6.3993 \end{bmatrix}$$

Elément 4 :

$$P_e = 274.4083, \quad \bar{\varepsilon}_e = 8.2864$$

$$\mathbf{K}_{e=4} = \begin{bmatrix} 0.3122 & 0.1561 \\ -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}$$

Après assemblage, on obtient les tables globales :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4820 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0.1561 \\ 0 & 0 & 0 & -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

Après la prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.2205 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après résolution :

$$\mathbf{c}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.2033 \\ 2.2114 \\ 1.9950 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Discussion :** La figure 3.3 trace les solutions des trois méthodes pour un maillage à 10 éléments ( $n_e = 10$ ), la solution de Galekine est erronée, ce résultat était attendu car on est dans un cas

de convection dominante, cependant, les méthodes DAA et SUPG donnent des résultats très proches, les deux solutions deviennent identiques en raffinant d'avantage le maillage.

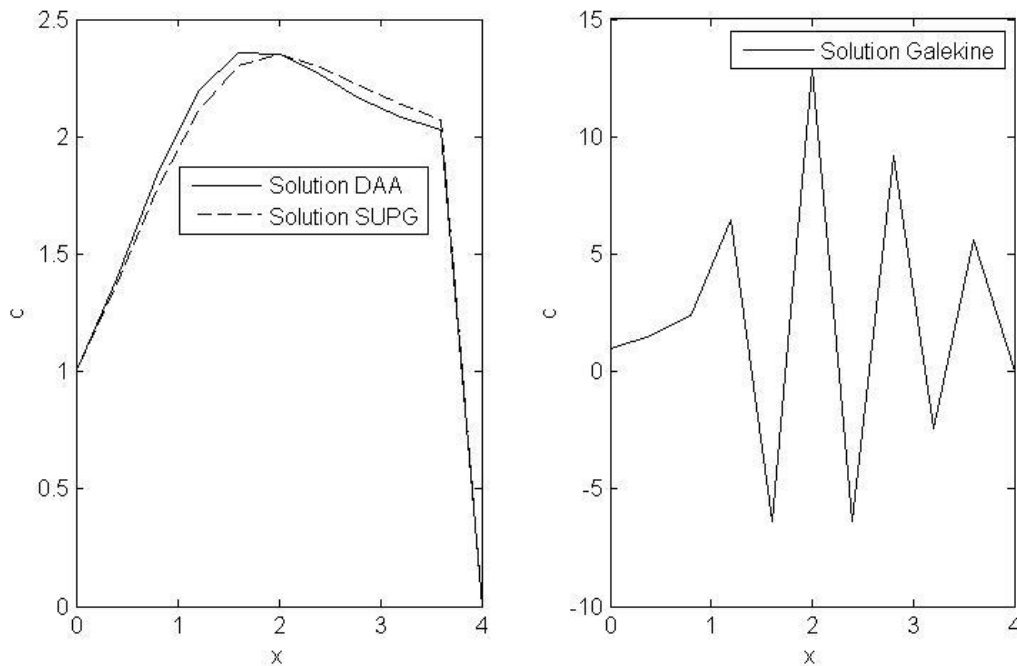


Figure 3.3 : Solutions numériques obtenues par les trois méthodes

### Programme numérique en langage matlab

La résolution d'un problème mathématique par la méthode des éléments finis passe nécessairement par l'établissement d'un programme numérique en choisissant un langage de programmation (Fortran, C, C++,... ou matlab). Pour des raisons de simplicité, on a choisi le langage matlab. On donne ci-dessous un programme matlab incluant les trois méthodes et permettant de résoudre l'exemple en question. On a essayé de donner un programme le plus simple possible, devant chaque ligne du programme, on a donné l'équation qui lui correspond dans la formulation mathématique.

```
%=====
%
%   Problème linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet
%   Méthode Galerkin
%   Méthode DAA
%   Méthode SUPG
%
%=====
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerkin), 2(DA), 3(SUPG)
imeth=3;
%
L=4;   % L = longueur totale du domaine
ne=10; % ne = nombre des éléments
```

```

he=L/ne; % he = taille de l'élément
N=ne+1; % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites
c0=1; cl=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.(1.14)
for in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.(1.12)
for ie=1:ne
    convec(ie,1)=ie;
    convec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.(1.13)
    loce=convec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément
    xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm); Bem=sin(xm);
    % Calculer les matrices K1, K2, K3
    K1=0.5*[-1 1;-1 1]; % Eq. (1.38)
    K2=[1 -1;-1 1]/he; % Eq. (1.39)
    K3=[2 1;1 2]*he/6; % Eq. (1.46)
    V=0.5*he*[1;1]; % Eq. (1.37)
    U=[-1;1];
    % Calculer Ke et Fe
    if imeth==1
        Ke=uem*K1+kem*K2-Aem*K3; % Eq. (1.79)
        Fe=Bem*V; % Eq. (1.80)
    elseif imeth==2
        Pe=0.5*uem*he/kem; % Eq. (1.117)
        zeta=coth(Pe)-1/Pe; % Eq. (1.124)
        epe=kem+0.5*uem*he*zeta; % Eq. (1.126)
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*K3; % Eq. (2.17)
        Fe=Bem*V; % Eq. (1.80)
    elseif imeth==3
        Pe=0.5*uem*he/kem;
        zeta=coth(Pe)-1/Pe;
        we=0.5*he*zeta;
        epe=kem+we*uem;
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*(K3+we*K1');
        Fe=Bem*(V+we*U);
    end
    % Assemblage
    Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke; % Eq.(1.69)
    Fg(loce)=Fg(loce)+Fe; % Eq.(1.70)
end
% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire les conditions aux limites de Dirichlet
Fg=Fg-Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.(1.74)
Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.(1.75)
Fg=Fg-Kg(:,N)*cl; Fg(N)=cl; % Eq.(1.74)
Kg(:,N)=0; Kg(N,:)=0; Kg(N,N)=1; % Eq.(1.75)

```

```
% Résolution du système (1.73)
```

```
cg=Kg\Fg
```

```
% Tracé du graphe
```

```
plot(x,cg,'-k')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('c')
```

```
legend('Solution Galekine')
```

```
%-----Fin du programme-----
```

Dans notre étude, on a présenté deux formules pour calculer  $F_e$ . Dans cet exemple, on a utilisé l'équation (1.80) et pour calculer  $F_e$ , on donne ci-dessous les solutions numériques du 2<sup>ème</sup> cas en utilisant l'équation (1.84).

**1- Méthode de Galerkin** : équation (1.84)

$$F_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.1402 \\ 0.2805 \end{Bmatrix}, F_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4320 \\ 0.4433 \end{Bmatrix}, F_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.3266 \\ 0.1986 \end{Bmatrix}, F_{e=4} = \begin{Bmatrix} -0.0791 \\ -0.2287 \end{Bmatrix}$$

La solution obtenue est :

$$c_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -4.6429 \\ 1.6682 \\ -1.1369 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**2- Méthode DAA** : identique à celle de Galerkin

$$F_{e=1} = \begin{Bmatrix} 0.1402 \\ 0.2805 \end{Bmatrix}, F_{e=2} = \begin{Bmatrix} 0.4320 \\ 0.4433 \end{Bmatrix}, F_{e=3} = \begin{Bmatrix} 0.3266 \\ 0.1986 \end{Bmatrix}, F_{e=4} = \begin{Bmatrix} -0.0791 \\ -0.2287 \end{Bmatrix}$$

La solution obtenue est :

$$c_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.1775 \\ 2.1787 \\ 1.9651 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On donne ci-après le programme matlab utilisant la 2<sup>ème</sup> formule pour calculer  $F_e$

```
%=====
%
%   Problème linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet
%   Méthode Galerkin
%   Méthode DAA
%   Méthode SUPG
%
%=====
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerkin), 2(DA), 3(SUPG)
```

```

imeth=3;
%
L=4;    % L = longueur totale du domaine
ne=10;  % ne = nombre des éléments
he=L/ne; % he = taille de l'élément
N=ne+1; % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites
c0=1; c1=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.(1.14)
for in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.(1.12)
for ie=1:ne
    convec(ie,1)=ie;
    convec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.(1.13)
    loce=convec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément
    xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm);
    % Calculer les valeurs nodales de B(x)
    Be=sin(xe');
    % Calculer les matrices K1, K2, K3
    K1=0.5*[-1 1;-1 1];    % Eq. (1.38)
    K2=[1 -1;-1 1]/he;    % Eq. (1.39)
    K3=[2 1;1 2]*he/6;    % Eq. (1.46)
    % Calculer Ke et Fe
    if imeth==1
        Ke=uem*K1+kem*K2-Aem*K3; % Eq. (1.79)
        Fe=K3*Be; % Eq. (1.84)
    elseif imeth==2
        Pe=0.5*uem*he/kem;
        zeta=coth(Pe)-1/Pe;
        epe=kem+0.5*uem*he*zeta;
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*K3; % Eq. (2.17)
        Fe=K3*Be; % Eq. (1.84)
    elseif imeth==3
        Pe=0.5*uem*he/kem;
        zeta=coth(Pe)-1/Pe;
        we=0.5*he*zeta;
        epe=kem+we*uem;
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*(K3+we*K1');
        Fe=(K3+we*K1')*Be;
    end
    % Assemblage
    Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke; % Eq.(1.69)
    Fg(loce)=Fg(loce)+Fe; % Eq.(1.70)
end
% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire les conditions aux limites de Dirichlet

```

```
Fg=Fg-Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.(1.74)
Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.(1.75)
Fg=Fg-Kg(:,N)*cl; Fg(N)=cl; % Eq.(1.74)
Kg(:,N)=0; Kg(N,:)=0; Kg(N,N)=1; % Eq.(1.75)
```

```
% Résolution du système (1.73)
```

```
cg=Kg\Fg
```

```
% Tracé du graphe
```

```
plot(x,cg,'-k')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('c')
```

```
legend('Solution Galekine')
```

## Exemple 2

On reprend l'exemple précédent et on change les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \cosh(x) \frac{dc}{dx} - \frac{d}{dx} \left( e^{-x} \frac{dc}{dx} \right) - (\cos x)c - \sin x = 0 & x \in [0, 4] \\ c(x=0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( k \frac{dc}{dx} \right)_{x=4} = 2c - 35 \end{cases}$$

Résoudre le problème ci-dessus en utilisant les trois méthodes avec un maillage à 4 éléments.

Faire un programme matlab et tracer la solution.

### 1. Méthode de Galerkin

On reprend les tables  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  déjà calculées :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 8.6288 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Neumann :

En identifiant le flux imposé  $(kdc/dx)_{x=4} = 2c - 35$  avec l'équation (1.51), on a  $\beta = 2$  et  $\alpha = -35$ . Cependant, ce flux est imposé uniquement au nœud  $in = N$  et par conséquent les tables  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{F}_c$  définies par les équations (1.53) et (1.54) sont égales à :

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ -35 \end{Bmatrix}$$

En appliquant les équations (1.72), on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.2498 & -0.1890 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3166 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet

En appliquant les équations (1.74) et (1.75) avec  $in = 1$  et  $c_1 = 1$ , on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Résolution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0988 & 0.9413 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4111 & -1.3413 & 3.1176 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0147 & -4.5288 & 8.4123 \\ 0 & 0 & 0 & -8.1605 & 6.6288 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0551 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -35.1754 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\mathbf{c}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 17.1724 \\ 3.9864 \\ 9.7438 \\ 6.6890 \end{Bmatrix}$$

**Remarque :** La prise en compte des conditions aux limites de Neumann est la même pour toutes les méthodes.

## 2. Méthode DAA

On refait la même procédure mais avec les tables  $\mathbf{K}_g$  et  $\mathbf{F}_g$  calculées par méthode DAA :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} -0.0844 & -0.3544 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4820 & 1.0197 & -0.0119 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3643 & 2.5959 & 0.1335 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9988 & 6.7115 & 0.1561 \\ 0 & 0 & 0 & -16.4167 & 16.8850 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{Bmatrix} 0.2397 \\ 0.7385 \\ 0.7980 \\ 0.1238 \\ -0.1754 \end{Bmatrix}$$

On obtient après la résolution :

$$\mathbf{c}_g = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.2033 \\ 2.2112 \\ 1.9986 \\ -0.1589 \end{Bmatrix}$$

```
%=====
%
% Problème linéaire avec des conditions aux limites mixtes
% Méthode Galerkin
% Méthode DAA
```

```

%      Méthode SUPG
%
%=====
%clear all
% Choix de la méthode: imeth = 1(Galerkine), 2(DA), 3(SUPG)
imeth=3;
%
L=4;    % L = longueur totale du domaine
ne=10;  % ne = nombre des éléments
he=L/ne; % he = taille de l'élément
N=ne+1; % N = nombre total des nœuds
% Introduire les valeurs limites
c0=1; c1=0;
% Calculer les coordonnées des nœuds Eq.(1.14)
for in=1:N
    x(in)=he*(in-1);
end
% Calculer les connectivités des éléments Eq.(1.12)
for ie=1:ne
    connec(ie,1)=ie;
    connec(ie,2)=ie+1;
end
% Initialiser à zéro Kg et Fg
Kg=zeros(N,N); Fg=zeros(N,1);
% Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément Eq.(1.13)
    loce=connec(e,:);
    % Extraire les coordonnées nodales de l'élément
    xe=x(loce);
    % Calculer la valeur moyenne de xe
    xm=mean(xe);
    % Calculer les paramètres physiques élémentaires moyennes
    uem=cosh(xm); kem=exp(-xm); Aem=cos(xm); Bem=sin(xm);
    % Calculer les matrices K1, K2, K3
    K1=0.5*[-1 1;-1 1]; % Eq. (1.38)
    K2=[1 -1;-1 1]/he; % Eq. (1.39)
    K3=[2 1;1 2]*he/6; % Eq. (1.46)
    V=0.5*he*[1;1]; % Eq. (1.37)
    U=[-1;1]; % Eq. (1.150)
    % Calculer Ke et Fe
    if imeth==1
        Ke=uem*K1+kem*K2-Aem*K3; % Eq. (1.79)
        Fe=Bem*V; % Eq. (1.80)
    elseif imeth==2
        Pe=0.5*uem*he/kem;
        zeta=coth(Pe)-1/Pe;
        epe=kem+0.5*uem*he*zeta;
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*K3; % Eq. (2.17)
        Fe=Bem*V; % Eq. (1.80)
    elseif imeth==3
        Pe=0.5*uem*he/kem;
        zeta=coth(Pe)-1/Pe;
        we=0.5*he*zeta;
        epe=kem+we*uem;
        Ke=uem*K1+epe*K2-Aem*(K3+we*K1');
        Fe=Bem*(V+we*U);
    end
    % Assemblage
    Kg(loce,loce)=Kg(loce,loce)+Ke; % Eq.(1.69)

```



```

Fg(loce)=Fg(loce)+Fe;      % Eq.(1.70)
end
% Fin de la boucle sur les éléments

% Introduire la condition aux limites de Neumann au nœud in=N
Kc=[0 0;0 -2]; Fc=[0;-35]; % Eqs.(1.53) et (1.54)
Kg(N,N)=Kg(N,N)+Kc(2,2); % Eq. (1.72a)
Fg(N)=Fg(N)+Fc(2)        % Eq. (1.72b)
% Introduire la condition aux limites de Dirichlet au nœud in=1
Fg=Fg-Kg(:,1)*c0; Fg(1)=c0; % Eq.(1.74)
Kg(:,1)=0; Kg(1,:)=0; Kg(1,1)=1; % Eq.(1.75)
% Résolution du système (1.73)
cg=Kg\Fg
% Tracé du graphe
plot(x,cg,'-k')
xlabel('x')
ylabel('c')
legend('Solution Galekine')
%-----Fin du programme-----

```

## *Conclusion Générale*

La méthode de Galerkin, version standard de la méthode des éléments finis, est défailante quant à la résolution numérique de l'équation de transport à convection dominante. En effet, des oscillations parasites et non physiques apparaissent dès que le nombre de Peclet devient supérieur à 1. Dans notre étude, nous avons développé une méthode alternative à celle de Galerkin. Notre approche est basée sur l'ajout d'une viscosité artificielle permettant de stabiliser la solution numérique. Dans notre travail, nous avons pu quantifier avec exactitude cette viscosité artificielle, le modèle développé a été programmé dans un environnement matlab et a été validé avec succès.

### Références

- L. Babuska, Error bound for finite element method, Num meth vol 16 1971
- M. Boulercha, Ecoulement eulériens par éléments finis avec raffinement du maillage, PhD thesis, Université Laval, Québec, 1993.
- A. N. Brooks et T. J. Hughes, Streamline upwind Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows, Proc. Third Internat. Conf. on Finite Element Methods in Fluid Flow, Banff, Canad, 1980.
- S. Candel, Mécanique des fluides, Bordas, Paris, 1990
- G. Dhatt et G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S. A. Editeur, 1984.
- T. J. Hughes, G. Scovazzi, T. Tezduyar, Stabilized methods for compressible flows, March 24, 2008.
- P.D. Lax et B. Wendroff, Systems of conservations laws, Communication on pure and applied Mathematics, Vol.13, pp. 217-237, 1960.
- K. Meftah et G. Dhatt, Schémas centrés et décentrés en convection-diffusion, Congrès Magrébin Gardaia, Mars 1996
- K. Meftah, Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France 1998.
- K. Meftah, A finite element model based on triangular mesh for convection-dominated stationary flows, European Journal of Computational Mechanics 2015.
- E. Onate et M. Manzan, Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain
- R. M. Smith et A. G. Hutton, The numerical treatment of advection: a performance comparison of current methods, Numer. Heat Transfer, 5, 439-461, 1982
- A. Soulaïmani, N. Elkadrie et A. Rebaine, Une méthode d'éléments finis pour la dynamique des gaz. 3ème école d'été de Porquerolles, France 1996.