

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية

الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –  
Faculté de TECHNOLOGIE



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : Construction Mécanique

**Par** : Assia Meziane

### **Sujet**

**ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE DE TIMOSHENKO PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Soutenu publiquement, le 20 / 06 / 2022, devant le jury composé de :

Mr. Khouane MEFTAH  
Mr. Abderrahim HOUMAT  
Mr. Mohamed BELKAID

Professeur Université de Tlemcen  
Professeur Université de Tlemcen  
MAA Université de Tlemcen

Président  
Encadrant  
Examinateur

Année universitaire : 2021 /2022

## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à :*

*Mes chers parents qui tiennent une place immense dans mon cœur.*

*Papa tu es une vraie école de la vie. Maman, une femme aussi adorable qui m'a toujours poussé à aller de l'avant avec ses prières.*

*A mes chers grands parents,*

*A mes beaux-parents,*

*A mon mari Abderrahmane,*

*Je ne serai jamais assez reconnaissante envers eux.*

*A mes chères sœurs Meriem, Fadela, Nïaama et Zineb et mon cher frère Abdellah,*

*Source de joie et d'amour.*

*A mes beaux-frères Yasser et Anes, mes chères neveux Wissal et Sirine qui m'ont accompagné de leur amour.*

*A mes belles-sœurs qui m'ont toujours soutenue.*

*A mes amies de toujours Rokïa, Karïma, Naima, Aya et Imen.*

*A toute la promo construction mécanique.*

*A toute ma famille et mes amis qui me donnent l'envie d'aller avant.*

*A. Meziane*

## ***Remerciements***

Je remercie Dieu le tout puissant pour ses bénédictions. Grace à lui, j'ai pu terminer mon travail.

Je tien en premier lieu à remercier mon encadrant ***Mr ABDERRAHIM HOUMAT*** d'avoir accepté l'encadrement de ce projet de fin d'étude, je vous remercie très sincèrement pour votre temps, votre précieux conseils et surtout votre patience.

Je voudrais exprimer ma gratitude au ***Mr KHOUANE MEFTAH et Mr MOHAMED BELKAID*** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie bien évidemment mes parents pour leurs sacrifices, aide, soutiens et encouragements durant mon cursus d'étude.

Je remercie sincèrement mon mari et mon beau père pour leurs aides et leurs soutiens. Mon amie ***KARIMA BOUSMAHA***, j'ai de la chance de travaillé avec elle, je lui serai toujours reconnaissante pour son aide précieuse.

## ***Résumé***

L'étude présentée dans ce manuscrit a pour objectif d'expliquer et de montrer l'utilité de la théorie des poutres en ce qui concerne la détermination des solutions analytiques de modèles mécaniques simples. Le problème du comportement dynamique des structures soumises à des charges mobiles présente un défi majeur dans différents domaines.

L'analyse dynamique des poutres basée sur la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement, dans le but de calculer la flèche centrale, l'étude de l'influence des paramètres physique et géométrique et condition aux limites.

La version-H de la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de Timoshenko est utilisée pour l'obtention de la flèche. Les résultats obtenus sont comparés avec une méthode analytique pour assurer la convergence de l'élément quadratique utilisé.

Deux programmes sont élaborés le premier pour calculer le déplacement de la poutre par la méthode des éléments finis et le deuxième par une méthode analytique.

Après la validation du programme, une étude paramétrique a été présentée.

**Mots clés :** Poutre de Timoshenko, réponse dynamique, méthode des éléments finis, éléments quadratiques à trois nœuds.

## ***Abstract***

The objective of the study presented in this manuscript is to explain and show the usefulness of beam theory in determining analytical solutions of simple mechanical models. The problem of dynamic behaviour of structures subjected to moving loads presents a major challenge in different fields.

The dynamic analysis of beams based on Timoshenko's theory which takes into account the shear effect, for the purpose of calculating the central deflection, the study of the influence of physical and geometrical parameters and boundary conditions.

The H-version of the finite element method based on the Timoshenko beam theory is used to obtain the deflection. The results obtained are compared with an analytical method to ensure the convergence of the quadratique element used.

Two programs are developed, one to calculate the beam displacement by the finite element method and the other by an analytical method.

After validation of the program, a parametric study was presented.

***Keywords:*** Timoshenko beam, dynamic rethinking, finite element method, three-node quadrilateral elements.

## الملخص

الهدف من الدراسة المقدمة في هذه المذكرة هو شرح وإظهار دور نظرية الروافد الميكانيكية في تحديد الحلول التحليلية للنماذج الميكانيكية البسيطة. تمثل مشكلة السلوك الديناميكي للهياكل المعرضة لأحمال متحركة تحديًا كبيرًا في مختلف المجالات.

التحليل الديناميكي للروافد الميكانيكية على أساس نظرية تيموشينكو التي تأخذ في الاعتبار تأثير القص، لغرض حساب أقصى انحراف مركزي، ودراسة تأثير المعلمات الفيزيائية والهندسية وحالة الحدود. يتم استخدام نسخة H من طريقة العناصر المحدودة المستندة إلى نظرية الحزمة الخاصة بتيموشينكو للحصول على الانحراف. تم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بطريقة تحليلية للتأكد من تقارب العنصر الرباعي متساوي الأضلاع المستخدم.

تم تطوير برنامجين، الأول لحساب إزاحة الحزمة بطريقة العناصر المحدودة والثاني بطريقة تحليلية.

بعد التحقق من صحة البرنامج، تم تقديم دراسة حدية.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية تيموشينكو، إعادة التفكير الديناميكي، طريقة العناصر المحدودة، العنصر الرباعي ثلاثي العقد.

## Table des matières

<i>Dédicaces</i> .....	<b>I</b>
<i>Remerciements</i> .....	<b>II</b>
<i>Résumé</i> .....	<b>III</b>
<i>Abstract</i> .....	<b>IV</b>
<i>الملخص</i> .....	<b>V</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>VI</b>
<i>Liste des figures</i> .....	<b>VIII</b>
<i>Liste des Tableaux</i> .....	<b>IX</b>
<i>Liste des symboles</i> .....	<b>X</b>
<b>Chapitre 1 Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre 2 Dynamique forcée d'une poutre de Timoshenko</b> .....	<b>3</b>
<b>2.1. Introduction</b> .....	<b>3</b>
<b>2.2. Définition d'une poutre</b> .....	<b>3</b>
<b>2.3. Théorie de Bernoulli Euler</b> .....	<b>3</b>
<b>2.3.1. Historique</b> .....	<b>3</b>
<b>2.3.2. Définition</b> .....	<b>4</b>
<b>2.3.3. Hypothèses</b> .....	<b>4</b>
<b>2.3.4. Champ des déplacements</b> .....	<b>4</b>
<b>2.3.5. Relation contrainte-déformation</b> .....	<b>4</b>
<b>2.3.6. Les efforts résultants</b> .....	<b>5</b>
<b>2.4. Poutre de Timoshenko</b> .....	<b>5</b>
<b>2.4.1. Définition</b> .....	<b>5</b>
<b>2.4.2. Champs de déformations et de contraintes</b> .....	<b>6</b>
<b>2.5. Les énergies</b> .....	<b>6</b>
<b>2.5.1. Energie de déformation</b> .....	<b>6</b>
<b>2.5.2. Energie cinétique</b> .....	<b>7</b>
<b>2.6. Equation du mouvement</b> .....	<b>7</b>
<b>Chapitre 3 Formulation par la méthode des éléments finis</b> .....	<b>9</b>
<b>3.1. Introduction</b> .....	<b>9</b>
<b>3.2. Définition de la méthode des éléments finis</b> .....	<b>9</b>
<b>3.3. Avantages de la méthode des éléments finis</b> .....	<b>9</b>
<b>3.4. Choix de l'élément</b> .....	<b>9</b>
<b>3.5. Fonction de forme</b> .....	<b>10</b>
<b>3.6. Transformation des coordonnées</b> .....	<b>10</b>
<b>3.7. Matrice masse</b> .....	<b>11</b>

3.8. Matrice de rigidité .....	11
3.9. Réponse dynamique .....	12
3.9.1. Solution aux équations d'équilibre dynamique .....	13
3.10. Charges impulsives.....	16
3.11. Intégration numérique .....	16
3.11.1. Point et poids d'intégration .....	17
Chapitre 4 Programmation .....	18
4.1. Introduction .....	18
4.2. Description du programme développé.....	18
4.3. Mise en œuvre du programme méthode des éléments finis .....	18
4.3.1. Organigramme du programme .....	18
4.4. Description des sous-programmes .....	20
4.4.1. Sous-programme DONNEES .....	20
4.4.2. Sous-programme FONCTG .....	20
4.4.3. Sous-programme JAC.....	20
4.4.4. Sous-programme STIFFB.....	20
4.4.5. Sous-programme STIFFS .....	20
4.4.6. Sous-programme MASS .....	20
4.4.7. Sous-programme JACOBI .....	21
4.4.8. Sous-programme SORT.....	21
4.4.9. Sous-programme DRESP .....	21
4.4.10. Sous-programme FORCE.....	21
4.4.11. Sous-programme AFFICHE.....	21
Chapitre 5 Résultats et interprétations .....	22
5.1. Introduction .....	22
5.2. Convergence et comparaison des résultats.....	22
5.2.1. Méthode analytique (solution exacte) .....	22
5.2.2. Solution par la méthode des éléments finis .....	22
5.3. Etude paramétriques.....	24
5.3.1. Effet d'amortissement .....	24
5.3.2. Effet de la hauteur .....	24
5.3.3. Effet des conditions aux limites .....	25
5.3.4. Effet de la longueur .....	26
5.3.5. Effet de module de Young.....	27
Chapitre 6 Conclusion.....	28
<i>Références Bibliographiques</i> .....	29



*Liste des figures*

**Figure 2.1. Poutre rectangulaire ..... 3**

**Figure 2.2. Rotation de la section transversale. .... 6**

**Figure 3.1. Élément à trois nœuds ..... 10**

**Figure 3.2. Interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale. .... 15**

**Figure 3.3. Chargement à étape ..... 16**

**Figure 4.1. Organigramme du programme principal. .... 19**

**Figure 5.1. Convergence et comparaison de la flèche maximale centrale  $w$  d'une poutre isotrope simplement appuyée. .... 23**

**Figure 5.2. Effet d'amortissement sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope. .... 24**

**Figure 5.3. Effet de l'épaisseur sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope. .... 25**

**Figure 5.4. L'effet des conditions aux limites sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope. .... 25**

**Figure 5.5. L'effet de la longueur sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope. .... 26**

**Figure 5.6. L'effet de module de Young sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope. .... 27**

***Liste des Tableaux***

**Tableau 3.1. Point et poids d'intégration. .... 17**  
**Tableau 5.1. Caractéristiques physiques et géométriques d'une poutre isotrope..... 22**

## Liste des symboles

$x, y, z$	Coordonnée cartésienne
$u$	Déplacement latérale suivant la direction $x$ .
$w$	Déplacement latérale suivant la direction $z$ .
$\theta$	Angle de rotation
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$E$	Module de Young
$N$	Effort normal
$M_y$	Moment fléchissant
$I_y$	Moment d'inertie
$\gamma$	La déformation de cisaillement transversal.
$G$	Module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de poisson
$V_e$	Energie de déformation.
$T$	Energie cinétique
$\rho$	Masse volumique
$t$	Temps
$\omega$	Pulsation propre
$\xi$	Coordonnées locales.
$L$	La longueur de la poutre
$b$	La largeur de la poutre
$h$	La hauteur de la poutre
$[M]$	Matrice masse
$[K]$	Matrice de rigidité
$c$	Coefficient d'amortissement.
$r$	Numéro du mode.
$\xi$	Taux d'amortissement.
$[\Phi]$	Matrice modale normalisée.
$P$	Réponse à l'excitation.

# Chapitre 1

## Introduction

### Problématique

Les poutres sont des éléments structurels très utilisées dans le domaine de l'ingénierie [1].

Les matériaux isotropes sont des matériaux dont ces propriétés mécanique et thermique sont identiques dans toutes les directions [2].

La problématique du comportement dynamique des structures soumises à des charges en mouvement a toujours fait l'objet d'une attention particulière dans les domaines du génie mécanique, du génie civil, de l'aéronautique, etc. [3] Pour assurer la sécurité, les performances et la fiabilité d'une structure, une analyse est nécessaire pour déterminer sa réponse aux dynamiques [4].

La théorie de Timoshenko est bien connue pour les vibrations de flexion des poutres. Cette théorie prend en compte les effets de deux facteurs principaux, à savoir l'inertie rotative et la déformation de cisaillement [5]. La théorie qui prend en compte l'effet de la seule inertie rotative a été développée pour la première fois par Rayleigh. Timoshenko [6], [7] a étendu cette théorie pour inclure la déformation de cisaillement. Des solutions exactes basées sur la théorie de Timoshenko sont disponibles pour les poutres dont les extrémités sont simplement soutenues [8] et avec d'autres conditions aux limites [9]. Des comparaisons de la théorie de Timoshenko avec la théorie de l'élasticité, ainsi que des suggestions utiles de coefficients de cisaillement qui donnent une bonne correspondance avec les solutions d'élasticité, sont disponibles pour les poutres de section circulaire [10] et pour les poutres de section rectangulaire.

L'analyse des structures par la méthode des éléments finis est un sujet d'actualité qui fait l'objet de nombreuses recherches dans différents secteurs. En utilisant la méthode classique des éléments finis, la vibration libre de la structure est représentée par un problème linéaire aux valeurs propres [11].

Nous utilisons une fonction de forme polynomiale, qui se traduit par une matrice de masse et une matrice de rigidité, il est nécessaire d'utiliser beaucoup d'éléments pour une évaluation précise des fréquences élevées, pour chaque poutre. La précision dépend ainsi de la finesse du maillage [12]–[14].

### Etat de l'art

Pour résoudre des problèmes de poutre ayant des supports rigides et des masses ponctuelles, une technique a été proposée par Amabili et al [15]. Cette technique consiste à solutionner des problèmes plus simples avec des supports élastiques à la phase des supports rigides et sans masses ponctuelles. Le problème est résolu grâce à la méthode de Rayleigh-Ritz.

Pour les vibrations transverses Han, BENAROYA et al ont comparé les théories des poutres d'Euler-Bernoulli, de Rayleigh-Ritz, de la poutre de cisaillement, et de Timoshenko [16].

Ces théories ont été redéveloppées et formulées grâce au principe d'HAMILTON pour des vibration libres et forcées pour des conditions aux limites variées.

L'avantage de la théorie de Timoshenko par rapport à celle d'Euler-Bernoulli est qu'elle prend en compte l'inertie de rotation, et le cisaillement transversal.

La théorie des poutres de Timoshenko est décrite par deux équations qui possèdent deux degrés de liberté, soit le déplacement transverse et l'angle de rotation de la section [17]

Pour résoudre les équations de poutre de Timoshenko il existe plusieurs méthodes numériques dans notre travail on a utilisé la Méthode des Eléments Finis.

La méthode des éléments finis reste évidemment la plus adoptée aujourd'hui. L'utilisation de modèle élément finis permet en effet de résoudre la grande majorité des problèmes mécaniques tels que la statique et la dynamique des structures [18].

## **Plan de travail**

Le premier chapitre présente une introduction générale de notre travail. Le deuxième chapitre présente d'une manière générale la théorie d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko (leurs définitions, hypothèses champ de déplacement relation contrainte-déformation) les énergies cinétiques et de déformation et l'équation du mouvement. Le troisième chapitre est consacré à la modélisation d'une poutre de Timoshenko par la méthode des éléments finis. Nous avons commencé avec une définition de la MEF. Nous avons ensuite présenté les avantages de cette méthode. Après, nous avons formulé les matrices masses et le vecteur force. Nous terminons ce chapitre par la formulation de réponse dynamique. Le quatrième chapitre est consacré aux différentes méthodes utilisées par le code de calcul élaboré. Le cinquième chapitre présente les différents résultats obtenus, une comparaison avec solution analytique, et une étude sur l'effet du changement des paramètres physiques et géométriques sur la réponse dynamique sont menés. Une conclusion générale est enfin présentée.

## Chapitre 2

### Dynamique forcée d'une poutre de Timoshenko

#### 2.1. Introduction

En général, les poutres sont des éléments structuraux utilisés pour supporter des charges verticales, des forces et des moments.

#### 2.2. Définition d'une poutre

Les poutres sont des éléments dont la longueur est plus grande par rapport aux dimensions de la section transversale. Les poutres peuvent supporter des charges, des forces et des moments [15].

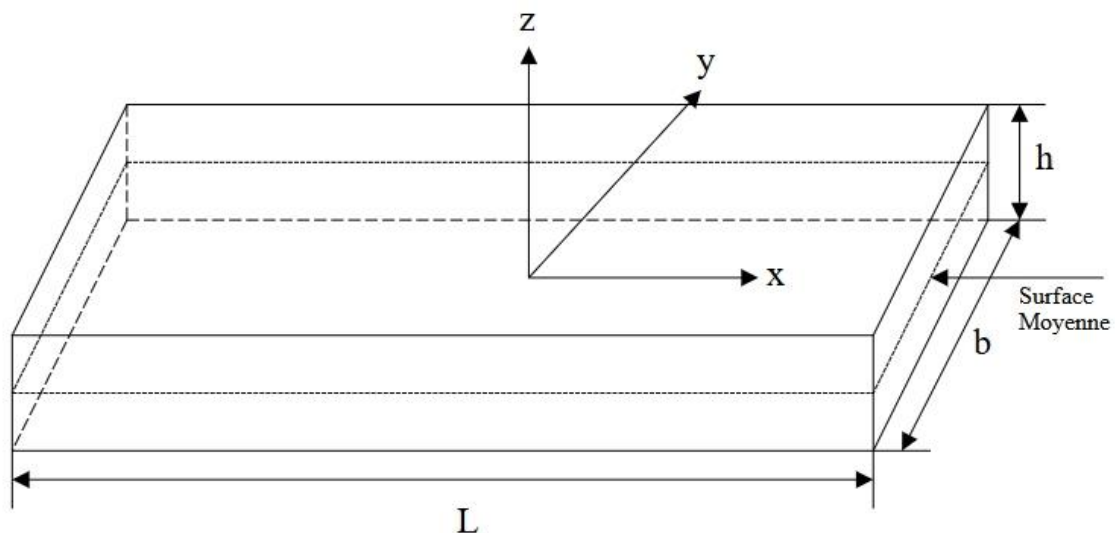


Figure 2.1. Poutre rectangulaire

#### 2.3. Théorie de Bernoulli Euler

##### 2.3.1. Historique

Leonhard Euler et Daniel Bernoulli ont proposé cette théorie pour la première fois en 1750. Les gens pensaient de la science et de l'ingénierie différemment de ce qu'ils le font aujourd'hui. Les théories mathématiques telles que la théorie des faisceaux d'Euler-Bernoulli ne sont pas fiables pour une application pratique en ingénierie. Les ponts et les bâtiments ont continué à être conçus selon la même méthode jusqu'à la fin du XIXe siècle. C'est alors que la tour Eiffel et la grande roue qui ont démontré la validité de la théorie à plus grande échelle [19].

### 2.3.2. Définition

La théorie des poutres d'Euler Bernoulli (connue aussi sous le nom de théorie des poutres d'ingénierie ou théorie classique des poutres) est une méthode simple pour calculer la déflexion d'une poutre due à une charge appliquée. Cela fonctionne pour des petites déflexions [20].

### 2.3.3. Hypothèses

La théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur les hypothèses suivantes [16].

- 1- La poutre est isotrope et élastique.
- 2- La poutre est longue et mince avec une section transversale constante le long de l'axe.
- 3- La déformation de la poutre est donnée par la flexion et les déplacements latéraux.
- 4- La déformation de cisaillement et l'inertie de rotation sont négligeables.
- 5- La section perpendiculaire d'une poutre reste plane après déformation.
- 6- La section reste normale à l'axe déformé de la poutre.

### 2.3.4. Champ des déplacements

Ce champ de déplacements est donné par :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = -z\theta_y(x, t) \\ w(x, z, t) = w(x, t) \end{cases} \quad 2.1$$

Où

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} \quad 2.2$$

$u$  Déplacement longitudinal.

$\theta$  Angle de rotation.

### 2.3.5. Relation contrainte-déformation

À partir du champ de déformation d'un solide 3D on trouve :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad 2.3$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad 2.4$$

La poutre est dans un état de contrainte axiale pure  $\varepsilon_x$ . La contrainte axiale  $\sigma_x$  est liée à  $\varepsilon_x$  par la loi de Hooke [21] comme suit :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -z E \frac{d^2 w}{dx^2} \quad 2.5$$

$E$  est le Module de Young.

### 2.3.6. Les efforts résultants

\*Effort normal :

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = -E \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \int_A y dA = 0 \quad 2.6$$

\*Moment fléchissant :

$$M_y = \int_A -y \sigma_{xx} dA = E \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \int_A z^2 dA = EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = EI_z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \quad 2.7$$

Où

- $A$  est l'aire de la section droite.
- $I_y = \int_A z^2 dA$  est le moment quadratique de la section par rapport à  $y$ .

## 2.4. Poutre de Timoshenko

### 2.4.1. Définition

La théorie de poutres de Timoshenko a été développée par Stephen Timoshenko au début du 20ème siècle. Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko tient compte de l'effet de cisaillement, ce qui la rend approprié pour décrire le comportement d'une poutre épaisse. L'hypothèse de Timoshenko revient à supposer que la section déformée reste plane. Mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne.

La rotation de la section transversale est déduite de la Figure 2.2 comme suit [22], [23] :

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} + \gamma_{xz} \quad 2.8$$

Où

- $\frac{dw}{dx}$ : est la pente de l'axe de la poutre.
- $\gamma_{xz}$  La déformation de cisaillement transversal.



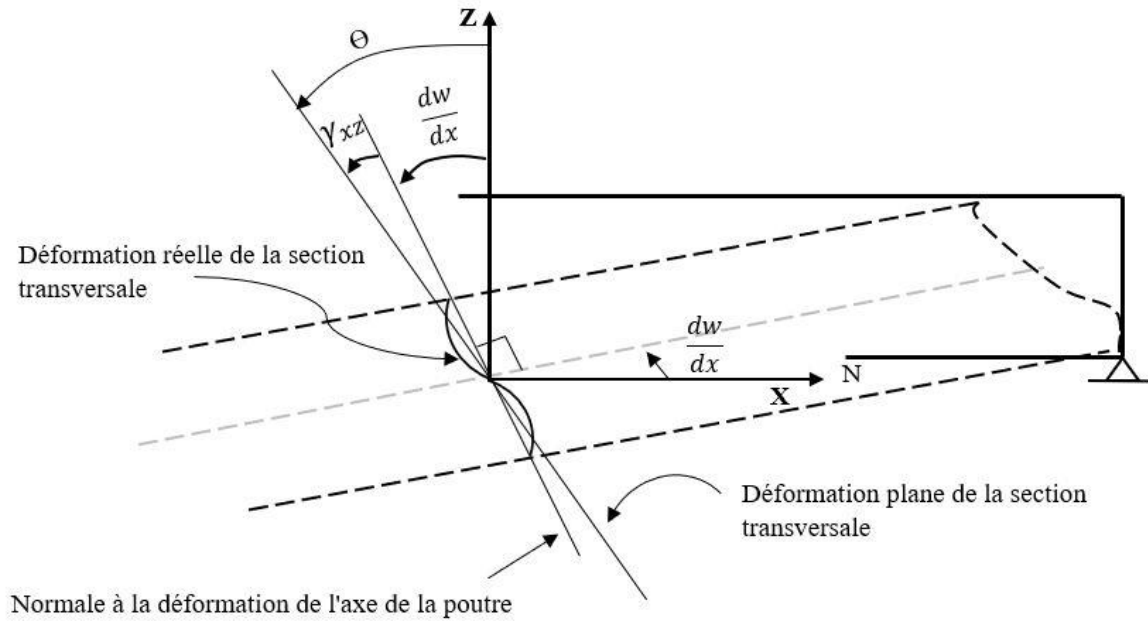


Figure 2.2. Rotation de la section transversale.

### 2.4.2. Champs de déformations et de contraintes

Le champ de déformation est obtenu par la combinaison des équations (2.1), (2.3) et (2.8) pour donner les déformations non nulles suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta_y}{dx} \quad 2.9$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta_y \quad 2.10$$

Par conséquent, la théorie de Timoshenko introduit une déformation de cisaillement transversale  $\gamma_{xz}$ .

Les contraintes axiales et de cisaillement  $\sigma_x$  et  $\tau_{xz}$  en un point de la section transversale de la poutre sont liées aux déformations correspondantes par la formule suivante :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -z E \frac{d\theta}{dx} \quad 2.11$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left( \frac{dw}{dx} - \theta_y \right) \quad 2.12$$

Où  $G$  est le module de cisaillement ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ) et  $\nu$  est le coefficient de Poisson [23].

## 2.5. Les énergies

### 2.5.1. Energie de déformation

L'énergie de déformation  $V_d$  est donnée par l'équation suivante [5] :

$$V_f = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma_{xx}\} \{\varepsilon_{xx}\} dV \quad 2.13$$

$$V_C = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma_{xz}\} \{\varepsilon_{xz}\} dV \quad 2.14$$

$$V_d = \frac{1}{2} \left[ EI_y \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d\theta_y}{dx} dx + kGA \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \theta - \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] \quad 2.15$$

### 2.5.2. Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{U}\}^T \cdot \{\dot{U}\} dV \quad 2.16$$

$$\dot{U} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad 2.17$$

En remplaçant l'équation (2.152.17) dans (2.16), on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV \quad 2.18$$

En remplaçant l'équation (2.1) dans l'équation ci-dessus, on trouve :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_A (A\dot{w}^2 + I_y \dot{\theta}^2) dA \quad 2.19$$

$$T = \frac{1}{2} \int_A (\{d\}^T [I] \{d\}) dA \quad 2.20$$

Où

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad 2.21$$

Avec

$$[I] = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I_y \end{bmatrix} \quad 2.22$$

### 2.6. Equation du mouvement

L'équation du mouvement libre s'écrit en fonction des dérivées de l'équation de Lagrange.

Soit  $L$  la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie de déformation (2.15) et l'énergie cinétique (2.16)

$$L = T - V \quad 2.23$$

La dérivée de cette fonction par rapport aux vecteurs des coordonnées généralisées  $q$  et vitesse généralisés  $\dot{q}$  donne les équations du mouvement vibratoire libre de la poutre :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}_i\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{q_i\}} + \frac{\partial u}{\partial \{q_i\}} = 0 \quad 2.24$$

L'équation du mouvement vibratoire libre de la poutre possède la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = 0 \quad 2.25$$

Où  $[M]$  est la matrice masse et  $[K]$  est la matrice de rigidité [23].

## Chapitre 3

### Formulation par la méthode des éléments finis

#### 3.1. Introduction

La méthode des éléments finis est la méthode de simulation informatique la plus couramment utilisée par les ingénieurs. Il s'agit essentiellement d'une technique numérique, les équations gouvernantes (système d'équation différentielles) sont représentées sous forme matricielle, ce qui convient très bien à la résolution automatique par ordinateur.

#### 3.2. Définition de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée en analyse numérique pour la solution des équations aux dérivées partielles. Par exemple elles peuvent représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques.

Brièvement, la méthode des éléments finis est basée sur l'idée de discrétiser un objet compliqué en un petit nombre de pièces pour qu'elles soient manipulées facilement.

En génie mécanique la méthode des éléments finis s'utilise pour résoudre les :

- Problèmes d'équilibre tel que : problème de concentration de contrainte, analyse de contrainte de pistons, de matériaux composites, etc.
- Problèmes de valeurs propres : fréquences propres de vibrations et stabilité des machines.
- Problèmes de propagation : problèmes de fissures et de fractures sous charges dynamiques [18].

#### 3.3. Avantages de la méthode des éléments finis

- La puissance de la méthode des éléments finis réside principalement dans sa flexibilité.
- Elle peut être applicable à plusieurs problèmes mécaniques ou bien physiques.
- La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.
- Elle est programmable.

#### 3.4. Choix de l'élément

Le choix de l'élément fini est basé sur la précision requise, la nature du problème et le

temps disponible. Nous choisirons les éléments les plus appropriés parmi les séries disponibles. Dans notre cas nous avons choisi l'élément quadratique à trois nœuds.

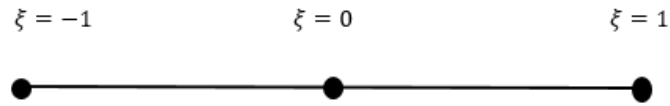


Figure 3.1. Élément à trois nœuds

### 3.5. Fonction de forme

On considère l'élément de poutre de Timoshenko à trois nœuds :

$$W(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3 \quad 3.1$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_{31}(\xi)\theta_3 \quad 3.2$$

Où

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad a_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad 3.3$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad 3.4$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad 3.5$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad 3.6$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad 3.7$$

### 3.6. Transformation des coordonnées

Pour transformer les coordonnées physiques aux coordonnées locales on utilise le déterminant du Jacobien.

On a :

$$J = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} x_i \quad 3.8$$

La transformation des coordonnées s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad 3.9$$

$$dV = dA \cdot dx \quad 3.10$$

Où

$$dx = J d\xi \quad 3.11$$

### 3.7. Matrice masse

On utilise l'équation (2.20) on obtient :

$$[M_e] = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N^T] [I] [N] dx \quad 3.12$$

On remplace l'équation (3.11) dans (3.12) on trouve :

$$[M_e] = \int_{-1}^1 [N^T] [I] [N] J d\xi \quad 3.13$$

### 3.8. Matrice de rigidité

A partir de l'équation (2.15) on a :

$$V_d = \frac{1}{2} \left[ EI_y \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d\theta_y}{dx} dx + kGA \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \theta - \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] \quad 3.14$$

$$[K_e] = [K_f] + [K_c] \quad 3.15$$

Où

$$[K_f] = \int_{-1}^1 EI_y \{B\}^t J d\xi \quad 3.16$$

$$[K_c] = \int_{-1}^1 kGA \{B_o\} \{B_o\}^t J d\xi \quad 3.17$$

$$[K_e] = \int_{-1}^1 EIy\{B_I\}\{B_I\}^t J d\xi + \int_{-1}^1 kGA\{B_O\}\{B_O\}^t J d\xi \quad 3.18$$

Avec :

$$\{B\}^I = \left\{ 0 \quad -\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad 0 \quad -\frac{\partial N_2}{\partial x} \quad 0 \quad -\frac{\partial N_3}{\partial x} \right\} \quad 3.19$$

$$\{B\}^O = \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad N_1 \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad N_2 \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad N_3 \right\} \quad 3.20$$

### 3.9. Réponse dynamique

Par le principe des déplacements virtuels les équations d'équilibre dynamique pour un point dans un élément fini peuvent être écrites sous la forme suivante [24]:

$$\int_V \delta \varepsilon^T dV = - \int_V \delta U^T \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dV - \int_V \delta U^T c \frac{\partial U}{\partial t} dV + \delta q^T p \quad 3.21$$

Où (c) est le paramètre de propriété d'amortissement. La seconde intégrale du côté droit de l'équation (3.20) représente les forces d'amortissement visqueux.

Supposons que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N \frac{dq}{dt} \quad 3.22$$

En substituant l'équation (3.21) et d'autres relations précédentes dans l'équation (3.20) donne :

$$\begin{aligned} \delta q^T [(\int_V \{B\}^T \{D\} \{B\} dV) q + (\int_V c \{N\}^T \{N\} dV) \frac{dq}{dt} \\ + (\int_V \{N\}^T \{N\} dV) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - p] = 0 \end{aligned} \quad 3.23$$

Puisque  $\delta q^T$  est arbitraire alors

$$\begin{aligned} [(\int_V \{B\}^T \{D\} \{B\} dV) q + (\int_V c \{N\}^T \{N\} dV) \frac{dq}{dt} \\ + (\int_V \{N\}^T \{N\} dV) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - p] = 0 \end{aligned} \quad 3.24$$

On peut écrire l'équation (3.24) sous la forme suivante :

$$[K]q + [C] \frac{dq}{dt} + [M] \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = p \quad 3.25$$

Ou la matrice d'amortissement pour l'élément est :

$$[C] = \int_V c \{N\}^T \{N\} dV \quad 3.26$$

Les grandeurs des coefficients de la matrice d'amortissement sont difficiles à estimer. Pour cela une méthode est disponible pour l'évaluation d'une matrice d'amortissement associée à un ensemble donné de taux d'amortissement modaux. La procédure peut être expliquée en considérant la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice d'amortissement.

$$[\Phi]^t [C] [\Phi] = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, \xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_r \omega_r, \dots, 2\xi_n \omega_n) \quad 3.27$$

L'équation (3.27) donne :

$$[C] = [\Phi]^{-T} \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, \xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_r \omega_r, \dots, 2\xi_n \omega_n) [\Phi]^{-1} \quad 3.28$$

L'inversion de la matrice modale  $[\Phi]$  nécessite beaucoup de calcul. Au lieu de cela, il est utile de tirer parti de la propriété d'orthogonalité des modes par rapport à la matrice masse.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad 3.29$$

En remplaçant l'équation (3.29) dans l'équation (3.28) on trouve :

$$[C] = [M] [\Phi] \text{diag}((2\xi_1 \omega_1, \xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_r \omega_r, \dots, 2\xi_n \omega_n) [\Phi]^{-t} [M] \quad 3.30$$

L'équation (3.30) devient :

$$[C] = [M] \left[ \sum_{r=1}^n 2\xi_r \omega_r \Phi_r \Phi_r^t \right] [M] \quad 3.31$$

Dans l'équation (2.34), la contribution de la matrice d'amortissement pour chaque mode est proportionnelle au taux d'amortissement modal. Les valeurs des taux d'amortissement modal dans les structures typiques varient entre 0,01 à 0,2.

### 3.9.1. Solution aux équations d'équilibre dynamique

L'équation (3.25) est un ensemble de  $n$  équations couplées. La réponse à l'excitation  $p$  et les conditions initiales est recherchée.

$$q(0) = q_0 \quad , \quad \frac{dq}{dt}(0) = \left( \frac{dq}{dt} \right)_0 \quad 3.32$$

Dans cette section, nous décrivons la méthode de superposition des modes, par laquelle un tel



ensemble d'équations couplées peut être transformé en un ensemble d'équations découplées grâce à l'utilisation des modes. La première étape d'une solution de superposition des modes consiste à obtenir les fréquences naturelles et les modes.

$$[[K] - \omega^2[M]][\Phi] = 0 \quad 3.33$$

Donnant  $(\omega_r^2, \Phi_r)$  avec  $r = 1, 2, \dots, n$ .

Les modes sont supposés avoir été normalisés pour donner :

$$[\Phi_r]^t [M] [\Phi_r] = 1 \quad , \quad [\Phi_r]^t [K] [\Phi_r] = \omega_r^2 \quad , \quad [\Phi_r]^t [C] [\Phi_r] = 2\xi_r \omega_r \quad 3.34$$

Les modes sont collectés pour former la matrice modale, c'est-à-dire :

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_r \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_r \quad \dots \quad \Phi_n] \quad 3.35$$

L'étape clé de la procédure de superposition des modes consiste à introduire la transformation des coordonnées :

$$q = \Phi \eta = \sum_{r=1}^n \Phi_r \eta_r \quad 3.36$$

La substitution de l'équation (3.36) dans l'équation (3.27) et multiplication de l'équation résultante nous donne les équations d'équilibre dynamique en coordonnées normales, à savoir :

$$\frac{d^2\eta_r}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{d\eta_r}{dt} + \omega_r^2 \eta_r = \gamma_r \quad 3.37$$

Où :

$$\gamma_r = [\Phi_r]^t p \quad 3.38$$

La réponse totale peut être obtenue comme une superposition de la réponse due aux conditions initiales et de la réponse due à l'excitation.

A partir des équations (3.32) et (3.36) :

$$q_0 = \Phi \eta(0) \quad , \quad \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = \Phi \frac{d\eta}{dt}(0) \quad 3.39$$

En multipliant les équations précédentes par  $\Phi_r^t M$  on trouve que :

$$\eta_r(0) = \Phi_r^t M q_0 \quad , \quad \frac{d\eta_r}{dt}(0) = \Phi_r^t M \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 \quad 3.40$$

La réponse totale du mode r peut être exprimée comme une superposition de la réponse due à l'excitation modale et de la réponse due aux conditions initiales modales. La technique décrite ici pour la solution numérique de l'équation (3.37) est simple et peut donner d'excellents

résultats. La procédure implique une interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale et de la solution exacte. La Figure 3.2 montre l'interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale.

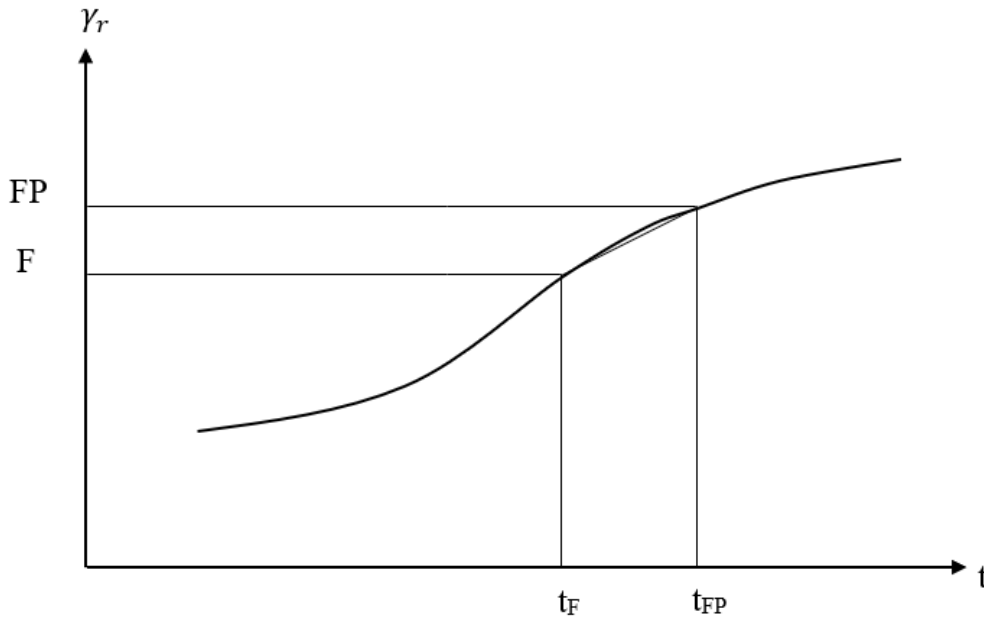


Figure 3.2. Interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale.

La fonction d'excitation interpolée est exprimée par :

$$\gamma_r = A + B(t - t_F) \quad 3.41$$

Où les constantes  $A$  et  $B$  sont données par :

$$A = F \quad , \quad B = \frac{FP - F}{t_{FP} - t_F} \quad 3.42$$

La réponse due à l'excitation modale peut être exprimée comme :

$$\eta_{pr} = c_{1r} + c_{2r}(t - t_F) \quad 3.43$$

Où  $c_{1r}$  et  $c_{2r}$  sont des constantes données par :

$$c_{1r} = \frac{F - 2\xi_r \omega_r C_{2r}}{\omega_r^2}, \quad c_{2r} = \frac{FP - F}{\omega_r^2(t_{FP} - t_F)} \quad 3.44$$

La réponse due aux conditions initiales peut être exprimée sous la forme :

$$\eta_{cr} = e^{-\xi_r \omega_r(t-t_F)} [D_{1r} \cos \omega_{dr}(t - t_F) + D_{2r} \sin \omega_{dr}(t - t_F)] \quad 3.45$$

Où  $D_{1r}$  et  $D_{2r}$  sont des constantes exprimées comme suit :

$$D_{1r} = \eta_r(t_F) - c_{1r}, \quad D_{2r} = \frac{\frac{d\eta_r}{dt}(t_F) - c_{2r} + \xi_r \omega_r D_{1r}}{\omega_{dr}} \quad 3.46$$

Avec

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad 3.47$$

$$\frac{d\eta_r}{dt} = c_{2r} + e^{-\xi_r \omega_r (t-t_F)} [(-\xi_r \omega_r D_{1r} + \omega_{dr} D_{2r}) \cos \omega_{dr} (t - t_F) \quad 3.48$$

$$(\xi_r \omega_r D_{2r} \omega_{dr} D_{1r}) \sin \omega_{dr} (t - t_F)]$$

### 3.10. Charges impulsives

La charges considérées dans cette étude est:

- ✓ Chargement à étape. (Figure 3.3)

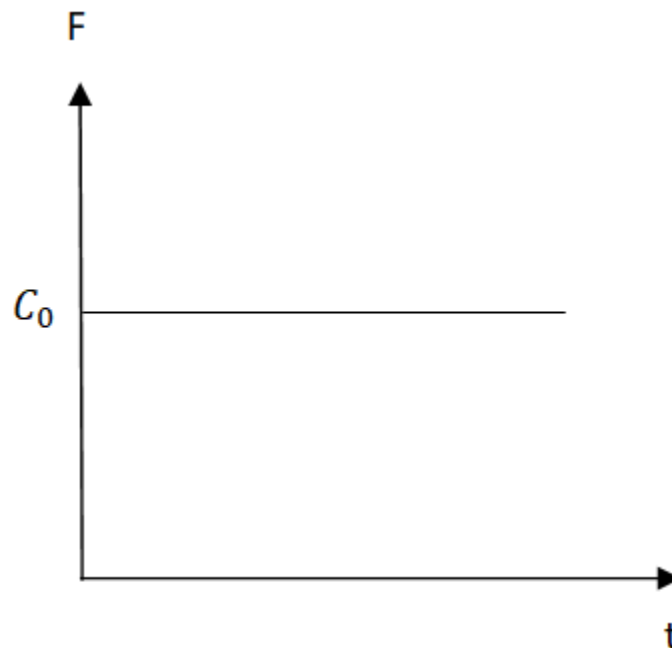


Figure 3.3. Chargement à étape

### 3.11. Intégration numérique

L'intégration des fonctions très complexe nécessite l'utilisation des méthodes numérique, puisque la méthode analytique est très difficile. La quadrature de Gauss-Legendre permet d'intégrer la fonction  $f(x)$  Sur le domaine  $[-1, 1]$  en évaluant  $f$  en quelques points seulement. Le principe est simple : Trouvons les points  $x_i$  et les poids  $w_i$  tels que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad 3.49$$

Soit exacte lorsque  $f$  est un polynôme d'ordre le plus élevé possible. En théorie, on sait que l'ordre le plus élevé possible est  $2N - 1$ . Si on veut calculer exactement l'intégrale d'un polynôme d'ordre  $n$ , il faut alors prendre  $\frac{n+1}{2}$  points et poids de Gauss [20].

### 3.11.1. Point et poids d'intégration

Tableau 3.1. Point et poids d'intégration.

N	$X_i$	$w_i$
1	-0.774596669241483	0.5555555555555553
2	0.0000000000000000	0.8888888888888889
3	.774596669241483	0.5555555555555553

## Chapitre 4

### Programmation

#### 4.1. Introduction

Le code de calcul utilisé est fait pour déterminer la flèche centrale en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de Timoshenko sous l'effet des charges impulsives, ce chapitre contient les logiciels utilisés, l'organigramme du programme principal et les sous-programmes.

#### 4.2. Description du programme développé

Dans notre travail nous utilisons Fortran77 comme un langage de programmation, le langage de programmation fortran a été créé en 1954 par JOHN BACKUS d'IBM FORTRAN (Mathematical formula translation system). En 1977 fortran 77 a été développé.

L'exécution du programme a été réalisée à l'aide d'un PC de processeur Intel®, Core™, i7 3610QM, CPU@ (2.3 GHz-2.3 GHz) et une RAM de 8 Go.

#### 4.3. Mise en œuvre du programme méthode des éléments finis

##### 4.3.1. Organigramme du programme

Notre programme est réalisé pour l'étude d'une analyse dynamique d'une poutre de Timoshenko. Les étapes du programme principal sont illustrées dans l'organigramme de la Figure 4.1. Ce programme contient les sous-programmes suivants :

Sous-programme DONNEES

Sous-programme FONCTG

Sous-programme JAC

Sous-programme STIFFB

Sous-programme STIFFS

Sous-programme MASS

Sous-programme JACOBI

Sous-programme SORT

Sous-programme DRESP

Sous-programme FORCE

Sous-programme AFFICHE

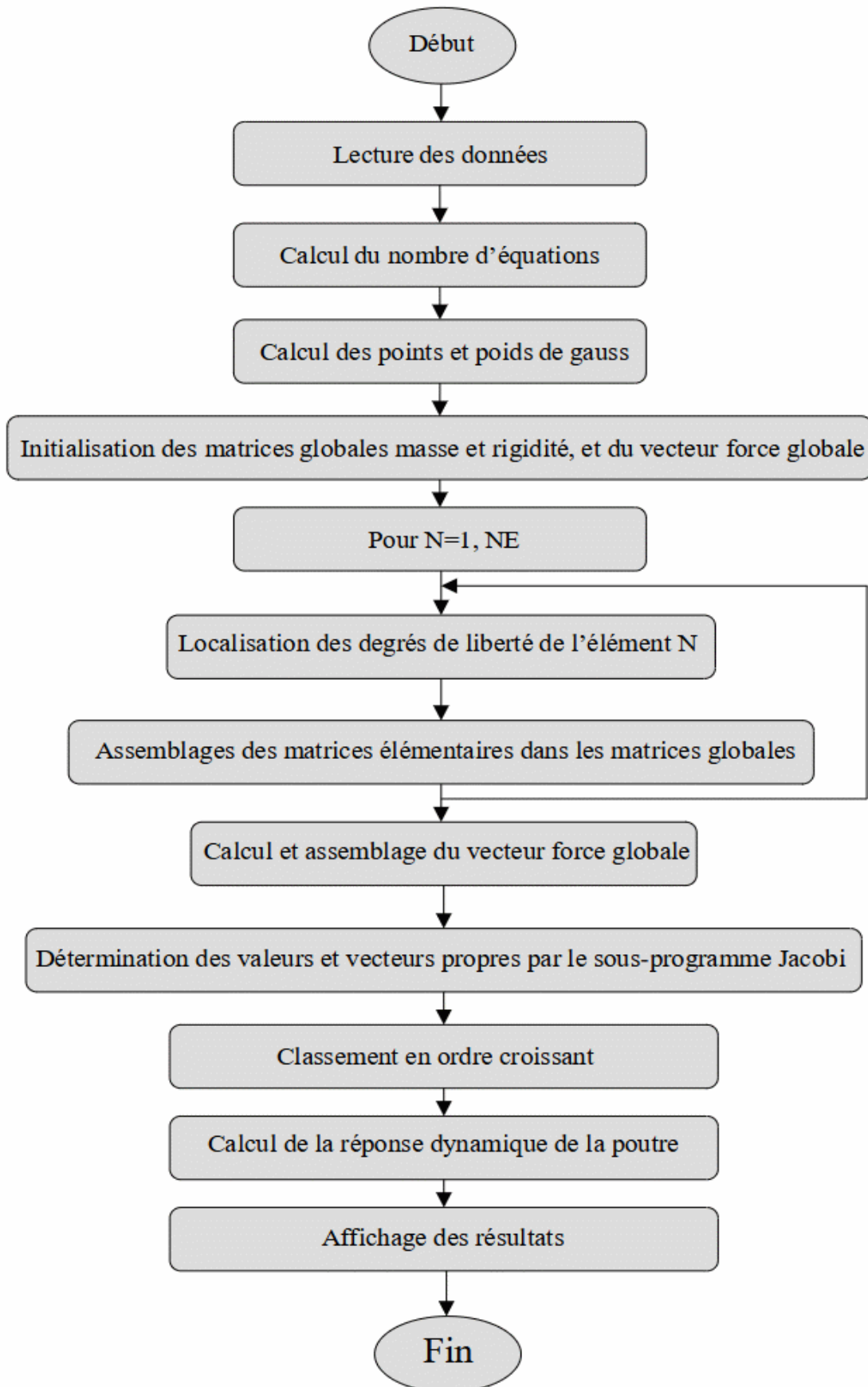


Figure 4.1. Organigramme du programme principal.

## 4.4. Description des sous-programmes

### 4.4.1. Sous-programme DONNEES

Le sous-programme DONNEES permet de lire les données d'entrée. Les données sont importées dans le programme à partir d'un fichier d'entrée nommé PROG.DAT. Ces données sont :

- NE : nombre d'éléments.
- NN : nombre de nœuds.
- NNR : nombre de nœuds restreints.
- NND : nombre de nœuds ou les déplacements sont calculés.
- NNC : nombre de nœuds chargés.
- ILOAD : type de chargement.
- A : section transversale de la poutre.
- DIY : moment d'inertie.
- E : module de Young.
- PR : coefficient de Poisson.
- RO : Densité volumique.
- SC : Coefficient de cisaillement transversal.
- C\_0 : valeur de la charge appliquée.
- DR : taux d'amortissement.
- T\_1 : temps (cas de chargement à rampe)
- DT : incrément du temps.

### 4.4.2. Sous-programme FONCTG

Ce programme donne les fonctions de forme et leurs dérivées.

### 4.4.3. Sous-programme JAC

Ce programme permet de calculer le Jacobien utilisés pour le calcul des matrices masse et rigidité élémentaires.

### 4.4.4. Sous-programme STIFFB

Ce programme permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire due à la flexion.

### 4.4.5. Sous-programme STIFFS

Ce programme permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire due au cisaillement.

### 4.4.6. Sous-programme MASS

Ce programme permet de calculer la matrice masse élémentaire.

**4.4.7. Sous-programme JACOBI**

Il permet de calculer les valeurs et vecteurs propres.

**4.4.8. Sous-programme SORT**

Il permet de classer les valeurs et vecteurs propres associés par ordre croissant.

**4.4.9. Sous-programme DRESP**

Il permet de calculer la réponse dynamique totale qui due au chargement vari avec le temps appliqué sur la structure.

**4.4.10. Sous-programme FORCE**

Il calcul la force en fonction du temps.

**4.4.11. Sous-programme AFFICHE**

Il affiche le déplacement transversal calculé aux nœuds considérés.



## Chapitre 5

### Résultats et interprétations

#### 5.1. Introduction

Pour valider notre travail il faut comparer notre résultat avec une méthode analytique.

#### 5.2. Convergence et comparaison des résultats

Notre comparaison est faite pour une poutre simplement appuyée isotrope.

##### 5.2.1. Méthode analytique (solution exacte)

La solution analytique de la flèche centrale donnée pour une poutre simplement appuyée (Figure 5.1) est donnée par la formule suivante [4]:

$$w(a, t) = \frac{16c_0 a^3}{\Pi^4 E I_y} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{1 - \cos w_i t}{i^4} \quad 5.1$$

$$w_i = \frac{\Pi^2 i^2}{4a^2} \sqrt{\frac{E I_y}{\rho A}} \quad 5.2$$

Le Tableau 5.1 montre les caractéristiques physiques et géométriques utilisées.

Tableau 5.1. Caractéristiques physiques et géométriques d'une poutre isotrope.

Caractéristiques géométriques		Caractéristiques physiques			Chargement
a	S	$I_y$	E	P	$C_0$
[cm]	[ $cm^2$ ]	[ $cm^4$ ]	[ $N/cm^2$ ]	[ $kg/cm^2$ ]	[N]
25	0.36	$423 \times 10^{-4}$	$207 \times 10^{-5}$	$783 \times 10^{-5}$	100

##### 5.2.2. Solution par la méthode des éléments finis

Pour cette étude nous allons diviser la poutre en plusieurs éléments (6, 8, 10 et 12). Pour chaque instant du temps nous allons comparer les résultats obtenus par la MEF avec la solution exacte en utilisant les mêmes paramètres physiques et géométriques (Tableau 5.1).

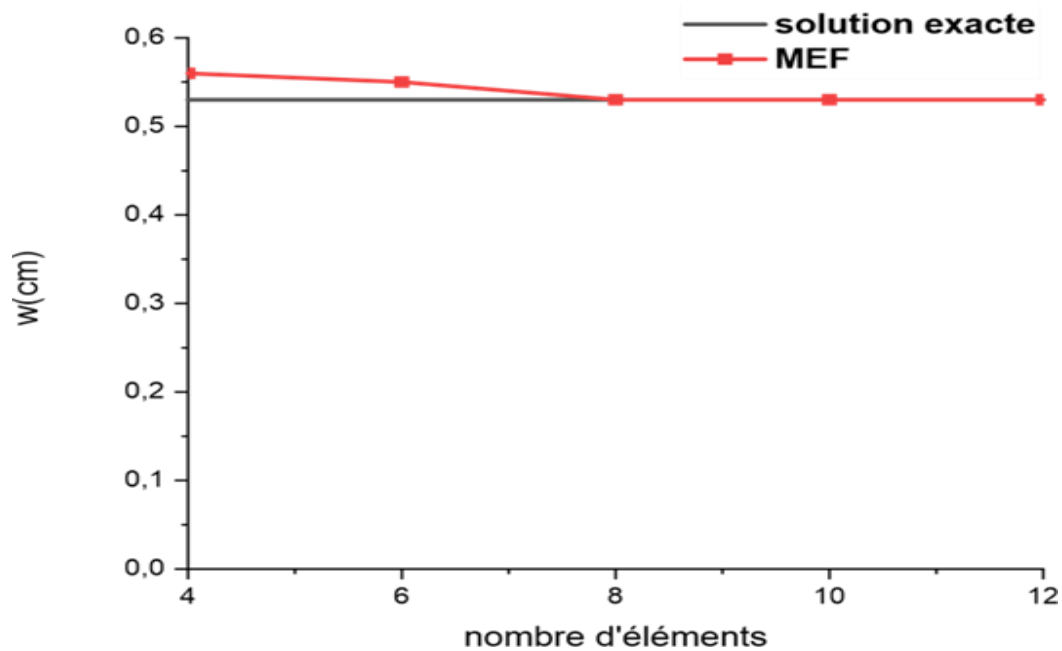
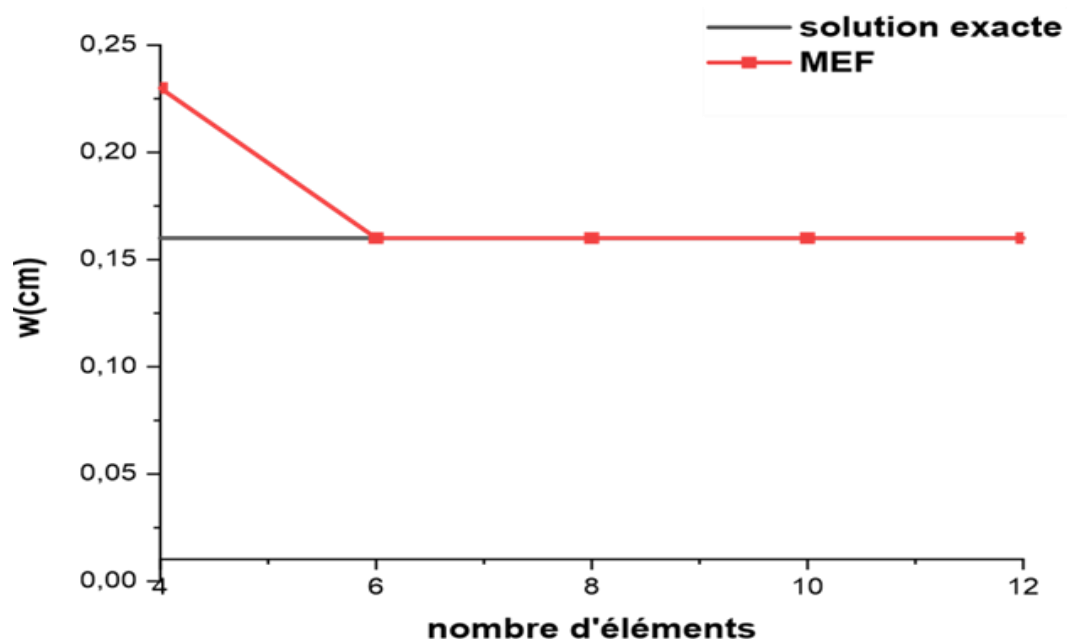
(a)  $t = 0.5s$ (b)  $t = 0.7s$ 

Figure 5.1. Convergence et comparaison de la flèche maximale centrale  $w$  d'une poutre isotrope simplement appuyée.

Nous remarquons que la solution du MEF converge vers la solution exacte, en augmentant le nombre d'éléments. Donc plus le maillage est nombreux, plus la différence entre la solution exacte et la méthode des éléments finis diminue.

Les différences qui existent dans certains temps entre les valeurs de la MEF et la solution exacte reviennent aux deux théories utilisées : l'une de Timoshenko concernant la MEF, et l'autre d'Euler-Bernoulli concernant la solution exacte.

### 5.3. Etude paramétriques

Les résultats obtenus par un maillage de 12 éléments de la poutre sont utilisés dans notre travail, durant une période de 2s avec un pas de 0.1s.

#### 5.3.1. Effet d'amortissement

La variation de la flèche centrale en fonction du temps est montrée sur la Figure 5.2

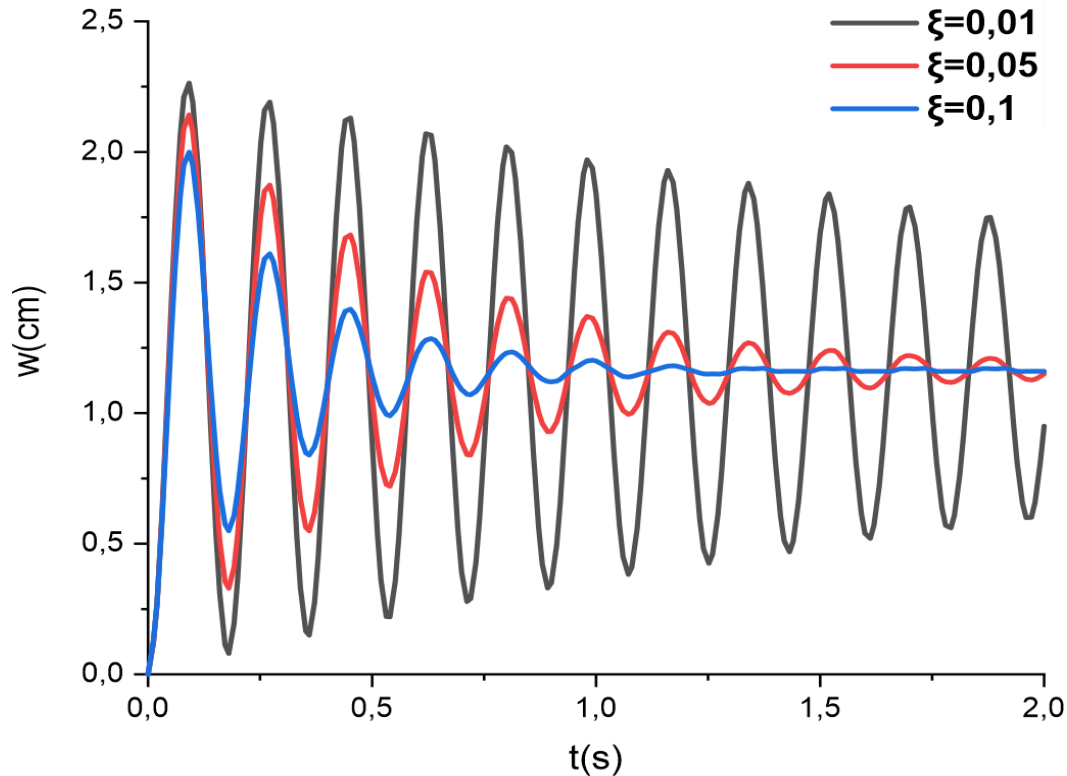


Figure 5.2. Effet d'amortissement sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope.

Nous remarquons une relation inverse entre la flèche centrale et l'amortissement, lorsqu'on augmente le taux d'amortissement la flèche diminue.

#### 5.3.2. Effet de la hauteur

La Figure 5.3 présente la variation de la flèche centrale en fonction du temps en changeant la hauteur de la poutre.

Nous remarquons que le changement de la flèche centrale influencé par le changement de la hauteur. La flèche diminue quand La profondeur augmente, cela revient à la rigidité de la poutre, on sait très bien que la poutre soit plus rigide quand elle est épaisse.

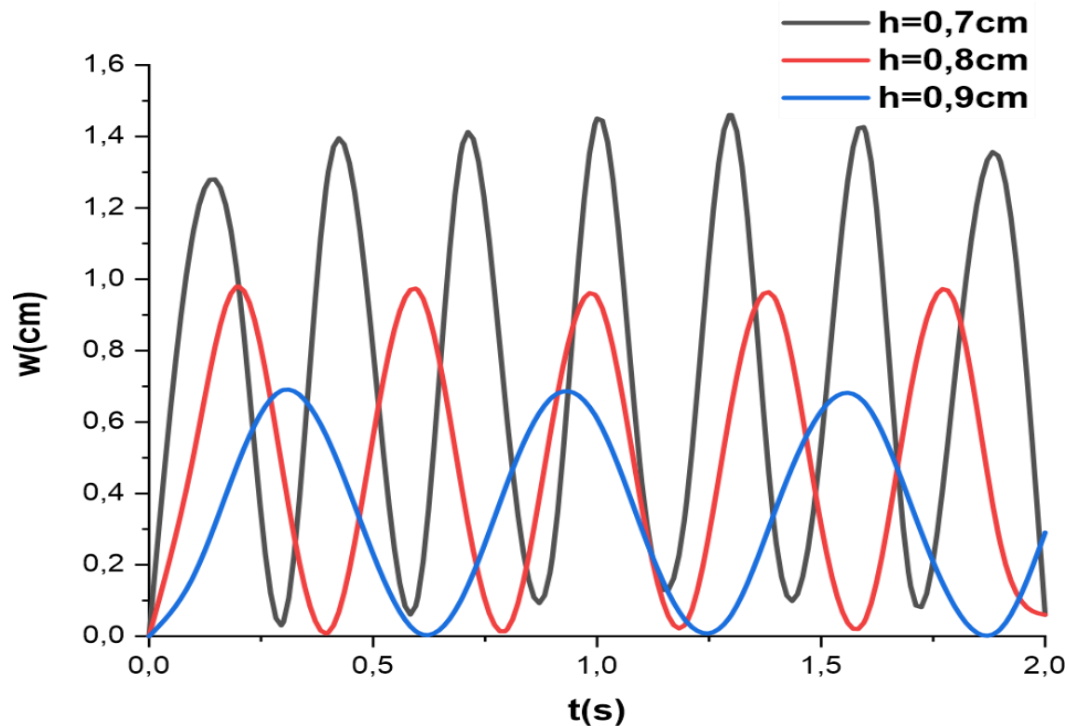


Figure 5.3. Effet de l'épaisseur sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope.

### 5.3.3. Effet des conditions aux limites

Nous étudions dans cette partie l'effet des conditions aux limites, nous prenons une poutre simplement appuyée et une autre encastree.

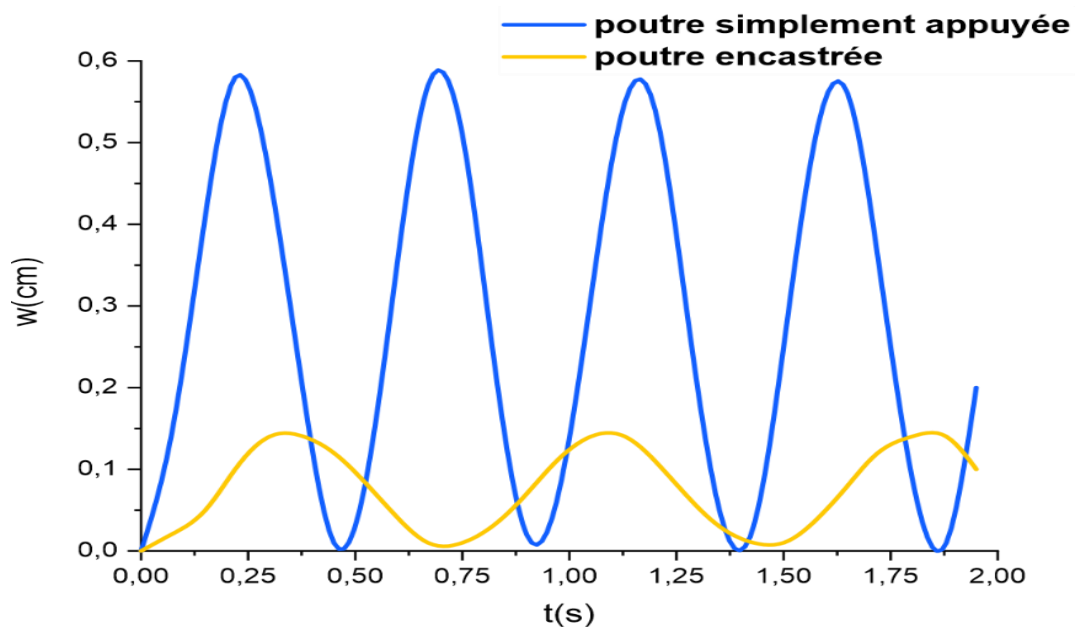


Figure 5.4. L'effet des conditions aux limites sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope.

Nous remarquons que la variation de la flèche dans le cas d'une poutre simplement appuyée, est plus importante que celle d'une poutre encastree.

Une poutre appuyée a un nombre de degrés de liberté plus qu'une poutre encastree, donc c'est

le nombre de degrés de liberté qui influe sur la flèche. À cause de l'élimination des degrés de liberté (la poutre encastree) la flèche devient plus faible.

#### 5.3.4. Effet de la longueur

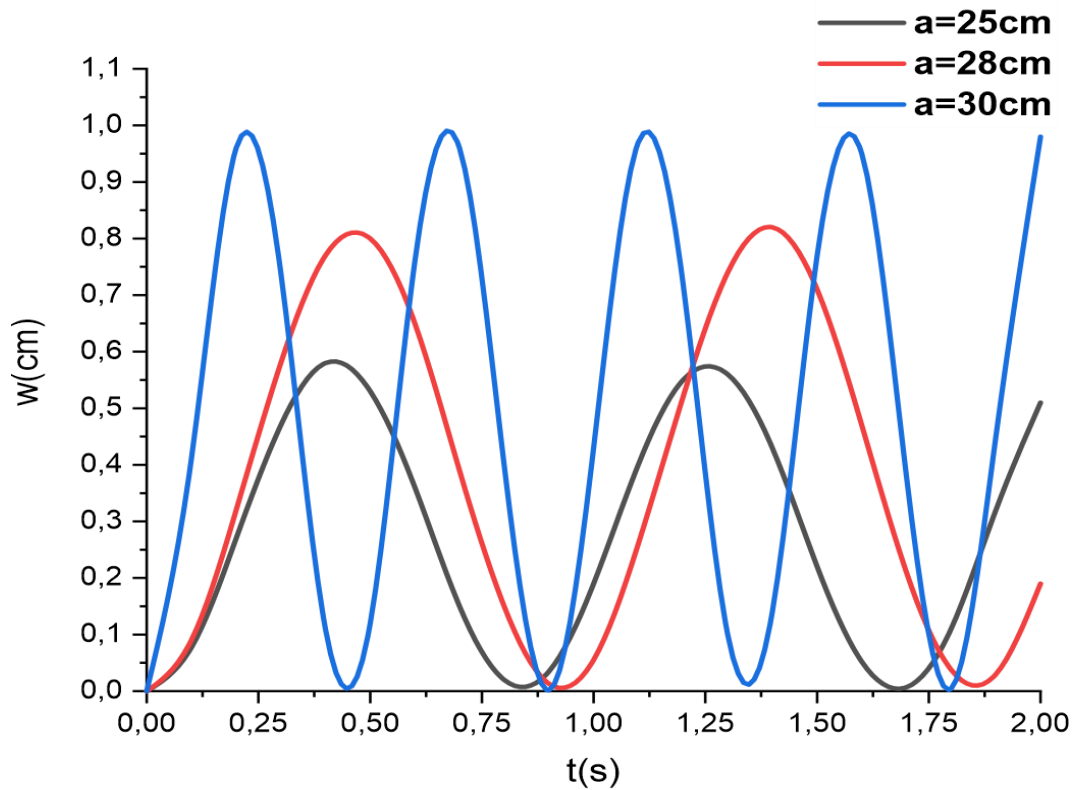


Figure 5.5. L'effet de la longueur sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope.

Nous remarquons une relation directe entre la longueur et la flèche : à chaque fois que la longueur de la poutre augmente la flèche augmente aussi. Lorsque la longueur augmente la poutre soit plus flexible donc la flèche augmente.

### 5.3.5. Effet de module de Young

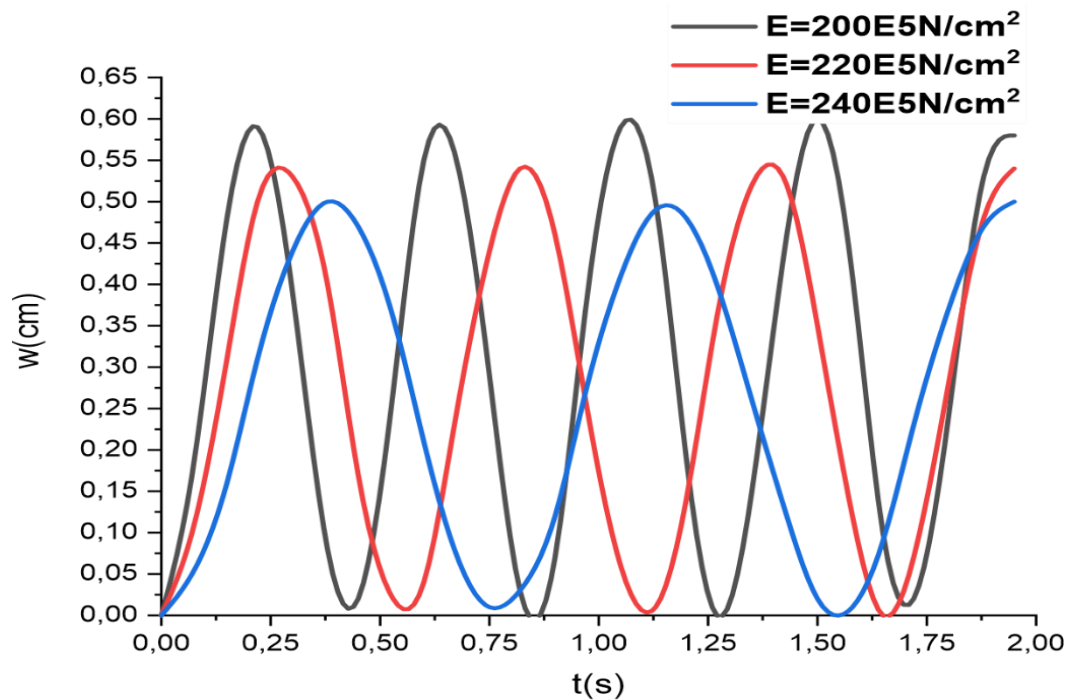


Figure 5.6. L'effet de module de Young sur la réponse dynamique d'une poutre isotrope.

La Figure 5.6 montre que la variation de la flèche avec le temps est inversement proportionnelle avec le module de Young. En augmentant le module de Young, la poutre devient plus rigide et donc la flèche devient plus petite.

## Chapitre 6

### Conclusion

Beaucoup de structures dans plusieurs domaines sont soumises à des charges dynamiques. Pour assurer la sécurité, la performance, et la fiabilité de ces structures, nous devons étudier leur réponse au chargement dynamique.

Dans notre travail nous avons étudié la dynamique d'une poutre de Timoshenko en utilisant la méthode des éléments finis pour déterminer la flèche centrale maximale, Nous avons également fait une étude sur l'influence des paramètres physiques et géométriques et les conditions aux limites sur le comportement dynamique de la poutre.

Cette étude nous a permis de faire les conclusions suivantes :

- La théorie de la poutre de Timoshenko est fiable pour la modélisation des poutres isotropes.
- La convergence de la MEF est rapide vers la solution exacte.
- Les paramètres physiques et géométriques et les conditions aux limites, influent sur le comportement dynamique de la poutre à cause du changement de la rigidité.

#### Perspectives

Des possibilités de poursuite de ce travail sont :

- Analyse dynamique non linéaire d'une poutre.
- Analyse dynamique d'une poutre composite et à gradient fonctionnel.

---

**Références Bibliographiques**

- [1] Hashemi, S. M., & Richard, M. J. (2000). A Dynamic Finite Element (DFE) method for free vibrations of bending-torsion coupled beams. *Aerospace Science and Technology*, 4(1), 41-55.
- [2] Czarnecki, S. (2015). Isotropic material design. *Computational Methods in Science and Technology*, 21(2), 49-64.
- [3] Henchi, K., Dhatt, G., Talbot, M., & Fafard, M. (1997). Comportement dynamique des poutres continues sollicitées par des charges mobiles : Approches semi-analytiques et éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 6(2), 165-195.
- [4] Houmat A. Cours, “Dynamique des structures”.
- [5] Houmat, A. (1995). Vibrations of Timoshenko beams by variable order finite elements. *Journal of sound and vibration*, 187(5), 841-849.
- [6] Timoshenko, S. P. (1921). LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746.
- [7] Timoshenko, S. P. (1922). X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253), 125-131.
- [8] Díaz-de-Anda, A., Flores, J., Gutiérrez, L., Méndez-Sánchez, R. A., Monsivais, G., & Morales, A. (2012). Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 331(26), 5732-5744.
- [9] Zhong, H., & Guo, Q. (2003). Nonlinear vibration analysis of Timoshenko beams using the differential quadrature method. *Nonlinear Dynamics*, 32(3), 223-234.
- [10] Hutchinson, J. R. (1981). Transverse vibrations of beams, exact versus approximate solutions, 48(4), 923-928.
- [11] Sharpe, R. D., & Bentley, R. J. (1977). Dynamics of structures by Ray W. Clough and Joseph Penzien. McGraw-Hill 1975. 634 pp. illus. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 10(2), 109-110.
- [12] Wittrick, W., & Williams, F. (1971). A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 24(3), 263-284.
- [13] Friberg, P. O. (1983). Coupled vibrations of beams—an exact dynamic element stiffness
-



- 
- matrix. *International Journal for numerical methods in engineering*, 19(4), 479-493.
- [14] Banerjee, J. R. (1989). Coupled bending–torsional dynamic stiffness matrix for beam elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 28(6), 1283-1298.
- [15] Amabili, M., & Garziera, R. (1999). A technique for the systematic choice of admissible functions in the Rayleigh–Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 224(3), 519-539.
- [16] Han, S. M., Benaroya, H., & Wei, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*, 225(5), 935-988.
- [17] Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact* (Doctoral dissertation, École Polytechnique de Montréal).
- [18] Geronymos, S. (2014). *Modélisation vibratoire en flexion de poutres composites multicouches à section creuse suite à un impact* (Doctoral dissertation, École Polytechnique de Montréal).
- [19] Bauchau, O. A., & Craig, J. I. (2009). Euler-Bernoulli beam theory. In *Structural analysis* (pp. 173-221). Springer, Dordrecht.
- [20] Ma, J., Rokhlin, V., & Wandzura, S. (1996). Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(3), 971-996.
- [21] Timoshenko, S. "Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems (1955)." 120-122.
- [22] Oñate, E. (2013). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells*. Springer Science & Business Media.
- [23] Kada Abdelhak, cours, “Méthode des éléments finis.”
- [24] Houmat A. Cours, “Réponse dynamique”.

## Résumé

L'étude présentée dans ce manuscrit a pour objectif d'expliquer et de montrer l'utilité de la théorie des poutres en ce qui concerne la détermination des solutions analytiques de modèles mécaniques simples. Le problème du comportement dynamique des structures soumises à des charges mobiles présente un défi majeur dans différents domaines.

L'analyse dynamique des poutres basée sur la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement, dans le but de calculer la flèche centrale, l'étude de l'influence des paramètres physique et géométrique et condition aux limites.

La version-H de la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de Timoshenko est utilisée pour l'obtention de la flèche. Les résultats obtenus sont comparés avec une méthode analytique pour assurer la convergence de l'élément quadratique utilisé.

Deux programmes sont élaborés le premier pour calculer le déplacement de la poutre par la méthode des éléments finis et le deuxième par une méthode analytique.

Après la validation du programme, une étude paramétrique a été présentée.

**Mots clés :** Poutre de Timoshenko, réponse dynamique, méthode des éléments finis, éléments quadratiques à trois nœuds.

## Abstract

The objective of the study presented in this manuscript is to explain and show the usefulness of beam theory in determining analytical solutions of simple mechanical models. The problem of dynamic behaviour of structures subjected to moving loads presents a major challenge in different fields.

The dynamic analysis of beams based on Timoshenko's theory which takes into account the shear effect, for the purpose of calculating the central deflection, the study of the influence of physical and geometrical parameters and boundary conditions.

The H-version of the finite element method based on the Timoshenko beam theory is used to obtain the deflection. The results obtained are compared with an analytical method to ensure the convergence of the quadratique element used.

Two programs are developed, one to calculate the beam displacement by the finite element method and the other by an analytical method.

After validation of the program, a parametric study was presented.

**Keywords:** Timoshenko beam, dynamic rethinking, finite element method, three-node quadrilateral elements.

## المخلص

الهدف من الدراسة المقدمة في هذه المذكرة هو شرح وإظهار دور نظرية الروافد الميكانيكية في تحديد الحلول التحليلية للنماذج الميكانيكية البسيطة. تمثل مشكلة السلوك الديناميكي للهياكل المعرضة لأحمال متحركة تحديًا كبيرًا في مختلف المجالات.

التحليل الديناميكي للروافد الميكانيكية على أساس نظرية تيموشينكو التي تأخذ في الاعتبار تأثير القص، لغرض حساب أقصى انحراف مركزي، ودراسة تأثير المعلمات الفيزيائية والهندسية وحالة الحدود.

يتم استخدام نسخة H من طريقة العناصر المحدودة المستندة إلى نظرية الحزمة الخاصة بتيموشينكو للحصول على الانحراف. تم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بطريقة تحليلية للتأكد من تقارب العنصر الرباعي متساوي الأضلاع المستخدم.

تم تطوير برنامجين، الأول لحساب إزاحة الحزمة بطريقة العناصر المحدودة والثاني بطريقة تحليلية.

بعد التحقق من صحة البرنامج، تم تقديم دراسة حديثة.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية تيموشينكو، إعادة التفكير الديناميكي، طريقة العناصر المحدودة، العنصر الرباعي ثلاثي العقد.