

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Génie mécanique

Spécialité : Construction mécanique

Par : Bousmaha Karima

Sujet

Analyse dynamique d'une plaque de Mindlin par la méthode des éléments finis

Soutenu publiquement, le 20 /06 /2022 , devant le jury composé de :

M.MEFTAH Khouane

M..HOUMAT Abderrahim

M.BELKAID Mohammed

Professeur

Professeur

MAA

UABB Tlemcen

UABB Tlemcen

UABB Tlemcen

Président

Encadreur

Examineur

Année universitaire : 2021 /2022



Je dédie ce travail :

A mes chers parents,

A mon grand père, mon oncle que dieu l'accueille dans son vaste paradis,

A ma petite sœur : Fatima Zohra,

A ma famille,

A toutes mes amies : Assia, Rokia, Naima, Aya, Imen,

A tous mes collègues de promo construction mécanique,

Et à tous ceux qui m'ont apporté leur aide,

Remerciements

*Tout d'abord, je tiens à présenter toute ma gratitude à **le bon dieu** le tout puissant de m'avoir donnée la force, le courage et la volonté de mener à bien ce modeste travail.*

*Je tiens mes remerciements, et vive gratitude à mon directeur de mémoire le professeur **Abdrerrahim Houmat**, de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir consacré beaucoup de son temps à la réalisation de ce mémoire. De plus, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses compétences, sa confiance, ses conseils et ses encouragements.*

*Je tiens à remercier les membres du jury, particulièrement monsieur **Meftah Khouane** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et monsieur **Belkaid Mohamed** qui a accepté d'examiner mon mémoire.*

*Je remercie très chaleureusement **mes chers parents** pour leurs sacrifices, encouragements et aides durant mon cursus d'étude.*

*Enfin mes remerciements vont aussi à tous **mes collègues** pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de ce mémoire.*

Résumé

L'utilisation des plaques comme éléments structuraux est commune dans les domaines d'ingénierie : mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale...etc. Pour une conception adéquate de ces structures, il est indispensable d'étudier leur comportement.

Dans ce travail, l'analyse dynamique des plaques est étudiée en se basant sur la théorie de *Reissner-Mindlin* qui présente un outil fiable en offrant plus de précision du fait qu'elle prend en considération l'effet de cisaillement transversal et l'inertie de rotation .

La version *h* de la méthode des éléments finis est présentée. Elle est utilisée pour la détermination de la réponse dynamique d'une plaque isotrope. Deux programmes en Fortran77 sont élaborés, un programme pour le calcul de la réponse dynamique par élément finis en utilisant la méthode de superposition des modes et l'autre en utilisant la méthode analytique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée.

La méthode est validée par des études de convergence et de comparaison avec la solution analytique.

Une étude paramétrique est ensuite menée pour examiner l'influence de certains paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement dynamique d'une plaque rectangulaire isotrope.

Mots clés

Théorie des plaques de Mindlin, méthode des éléments finis, réponse dynamique, élément quadrilatéral isoparamétrique à huit nœuds.

Abstract

The use of plates as structural elements is common in the fields of engineering: mechanical, aeronautical, aerospace, civil, naval.. etc. For an adequate design of these structures, it is essential to study their behaviour.

In this work, the dynamic analysis of the plates is studied based on the Reissner-Mindlin theory, which presents a reliable tool offering more accuracy as it takes into consideration the transverse shear effect and the rotational inertia.

The h version of the finite element method is presented. It is used for the determination of the dynamic response of an isotropic plate. Two programs in Fortran77 are developed, one program for the calculation of the dynamic response by finite element using the mode superposition method and the other using the analytical method for a simply supported rectangular plate.

The method is validated by convergence studies and comparison with the analytical solution.

A parametric study is then carried out to examine the influence of certain mechanical and geometrical parameters on the dynamic behaviour of an isotropic rectangular plate.

Keywords

Mindlin plate theory, finite element method, dynamic response, isoparametric quadrilateral element with eight nodes.

ملخص

يعد استخدام الألواح شائعاً في جميع المجالات: الميكانيكية، الملاحة الجوية، الفضائية، المدنية، البحرية... وما إلى ذلك. في مواجهة هذا الاستخدام الواسع والمهم، من الضروري معرفة سلوكهم.

في هذا العمل، تمت دراسة التحليل الديناميكي للألواح بناءً على نظرية ريسنر-مايندلين التي تعد أداة موثوقة لأنها تقوم بتقديم دقة عالية لأنها تأخذ في عين الاعتبار تأثير القص المستعرض والعطالة.

يتم تقديم نسخة **h** من طريقة العناصر المنتهية. يتم استخدامها لتحديد الإجابة الديناميكية للوحة متجانسة الخواص. تم تطوير برنامجين حسابيين في فورتران 77 أحدهما لحساب الإجابة الديناميكية باستخدام طريقة العناصر المنتهية باستخدام طريقة تراكب الانمات والآخر باستخدام الطريقة التحليلية لدراسة لوحة مستطيلة متجانسة مدعومة ببساطة.

تم التحقق من صحة الطريقة عن طريق دراسة التقارب والمقارنة مع الحل التحليلي. ثم يتم إجراء دراسة بارامترية لفحص تأثير بعض العوامل الميكانيكية والهندسية على السلوك الديناميكي للوحة مستطيلة متجانسة الخواص.

الكلمات المفتاحية :

نظرية مايندلين للألواح، طريقة العناصر المنتهية، استجابة ديناميكية، عنصر رباعي متساوي الأضلاع ذو ثماني عقد.

Sommaire

<i>Sommaire</i>	<i>i</i>
<i>Liste des figures</i>	<i>vi</i>
<i>Liste des tableaux</i>	<i>ix</i>
<i>Liste des symboles</i>	<i>xi</i>
 <i>Chapitre 1 Introduction générale</i>	
1.1. Problématique.....	1
1.2. Revue de la littérature	1
1.2.1. Développement de la théorie des plaques	1
1.2.2. Un bref historique de la méthode des éléments finis	2
1.3. But et structure de mémoire	3
 <i>Chapitre 2 Dynamique forcée d'une plaque de Mindlin</i>	
2.1. Introduction	5
2.2. Définition d'une plaque.....	5
2.3. Théorie des plaques minces.....	6
2.3.1. Hypothèses	6
2.3.2. Equations des efforts et moments.....	6
2.4. Théorie des plaques épaisses.....	8
2.4.1. Hypothèses	8
2.4.2. Champs de déplacement.....	8
2.4.3. Relations déformations-déplacements.....	10
2.4.4. Relations contraintes-déformations.....	10
2.4.5. Relations efforts-courbures	11
2.5. Energie cinétique.....	12
2.6. Energie déformation	12
2.7. Equation du mouvement.....	13
 <i>Chapitre 3 Formulation par la méthode des éléments finis</i>	
3.1. Introduction	14
3.2. Choix de l'élément	14
3.3. Fonctions de forme.....	14
3.3.1. Détermination des Fonctions de forme	15

3.4. Transformation des coordonnées	18
3.5. Matrice masse élémentaire	19
3.6. Matrice de rigidité élémentaire	19
3.7. Intégration numérique	20
3.8. Réponse dynamique	21
3.8.1. Définition	21
3.8.2. Méthode d'analyse dynamique.....	21
3.8.3. Solution aux équations d'équilibre dynamique	22
3.8.4. Charges impulsives	25

Chapitre 4 Programmation

4.1. Introduction	27
4.2. Logiciels et matériel utilisés.....	27
4.3. Organigramme du programme	27
4.3.1. Description des Sous-programmes	29
4.3.1.1.Sous-programme DONNEES.....	29
4.3.1.2.Sous-programme FONCTG	30
4.3.1.3.Sous-programme JAC	30
4.3.1.4.Sous-programme STIFFB	30
4.3.1.5.Sous-programme STIFFS.....	30
4.3.1.6.Sous-programme MASS	30
4.3.1.7.Sous-programme JACOBI	30
4.3.1.8.Sous-programme SORT	31
4.3.1.9.Sous-programme DRESP	31
4.3.1.10.Sous-programme LOADF	31
4.3.1.11.Sous-programme AFFICHE.....	31

Chapitre 5 Résultats et interprétations

5.1. Introduction	32
5.2. Convergence et comparaison des résultats.....	32
5.2.1. La solution exacte	32
5.2.2. La solution par la méthode des éléments finis	33
5.3. Etude paramétrique	35
5.3.1. Effet de l'amortissement	35
5.3.2. Effet de l'épaisseur.....	35

5.3.3. Effet des conditions aux limites	36
5.3.4. Effet de la longueur	37
5.3.5. Effet de module de Young	38
5.3.6. Effet de type de chargement.....	37
Chapitre 6 Conclusion générale	
Références bibliographique	41

Liste des figures

Chapitre 2

<i>Figure 2.1</i> : Plaque rectangulaire	5
<i>Figure 2.2</i> : Efforts agissants sur un élément de plaque.....	7
<i>Figure 2.3</i> : Moments agissants sur un élément de plaque.....	7
<i>Figure 2.4</i> : Déplacements et rotations.....	9
<i>Figure 2.5</i> : Géométrie au bord d'une plaque de Mindlin avant et après déformation	9
<i>Figure 2.6</i> : Les contraintes dans une plaque	11

Chapitre 3

<i>Figure 3.1</i> : Transformation des coordonnées globales(X, Y) aux coordonnées locales (ξ, η)	18
<i>Figure 3.2</i> : Interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale.....	24
<i>Figure 3.3</i> : Chargement à étape.....	25
<i>Figure 3.4</i> : Chargement à rampe	26

Chapitre 4

<i>Figure 4.1</i> : Organigramme principal.....	28
---	----

Chapitre 5

<i>Figure 5.1</i> : Plaque rectangulaire simplement appuyée	33
<i>Figure 5.2</i> : Convergence et comparaison de la flèche centrale w d'une plaque carrée	34
<i>Figure 5.3</i> : Effet de l'amortissement sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope	35
<i>Figure 5.4</i> : Effet de l'épaisseur sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope.....	36
<i>Figure 5.5</i> : Effet des conditions aux limites sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope	37
<i>Figure 5.6</i> : Effet de la longueur sur la réponse dynamique d'une plaque isotrope.....	37
<i>Figure 5.7</i> : Effet du module de Young sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope	38
<i>Figure 5.8</i> : Effet de type de chargement sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope	39

Liste des tableaux

Chapitre 1

Tableau 1.1 : publications et périodes d'évolution de la méthode des éléments finis. 2

Chapitre 3

Tableau 3.1 : Constantes d'intégration numérique..... 20

Chapitre 5

Tableau 5.1 : Caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque isotrope..... 33

Liste des symboles

x, y, z	Coordonnées cartésiennes.
a, b	Dimensions de la plaque.
ξ, η	Coordonnées locales.
h	Epaisseur de la plaque.
t	Temps.
u	Déplacement longitudinal dans la direction x.
v	Déplacement longitudinal dans la direction y.
w	Déplacement transversal dans la direction z.
θ_x	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x.
θ_y	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y.
$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yx}$	Efforts normaux par unité de longueur.
$M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, M_{yx}$	Moments de flexion par unité de longueur.
T_{xx}, T_{yy}	Efforts tranchants par unité de longueur.
$\{\sigma\}$	Vecteur de contrainte.
$\{\varepsilon\}$	Vecteur de déformation.
$\{\chi\}$	Vecteur de courbure.
ρ	Densité de masse.
E	Module de Young.
$G=E/2(1+\nu)$	Module de cisaillement.
$D=EH^3/12(1-\nu^2)$	Rigidité de flexion.
ν	Coefficient de poisson.
k	Facteur de correction du cisaillement transversal.
T	Energie cinétique.
V	Energie de déformation.
$\{q\}$	Vecteur généralisé des déplacements.
$[M_e]$	Matrice masse élémentaire.
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire.
$[C]$	Matrice amortissement élémentaire.
n	Nombre des points de la quadrature de Gauss.
ξ_i, η_j	Abscisses des points de la quadrature de Gauss.
w_i, w_j	Poids de la quadrature de Gauss.
ω_d	Pulsation amortie.
ω	Pulsation propre.
$[J]$	Matrice Jacobienne.
c	Coefficient d'amortissement.
r	Numéro du mode.
ξ	Taux d'amortissement.
$[\Phi]$	Matrice modale normalisée.
p	Réponse à l'excitation.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1.Problématique

L'analyse dynamique des structures complexes est une tâche difficile. Elle exige que les ingénieurs aient des connaissances pour identifier les paramètres et les propriétés qui auront un impact significatif sur le comportement dynamique structurel. Pour l'estimation du comportement d'une plaque sous l'effet d'une charge dynamique une analyse du comportement dynamique est présentée. Une méthode numérique basée sur la méthode de superposition des modes. Cette méthode n'est pas influencée par l'intervalle de temps choisi [1]. Les propriétés d'orthogonalité des modes propres de vibration permettent une importante simplification des équations générales du mouvement lorsque celles-ci sont linéaires. Cette simplification consiste à transformer les équations du mouvement exprimées dans le système des coordonnées en des équations de mouvement exprimées dans un ensemble de coordonnées dites normales. Cette transformation permet de découpler toutes les équations [2]. Le but de cette recherche est l'analyse dynamique des plaques isotropes en utilisant un élément fini isoparamétrique quadrilatéral à huit nœuds. Pour une étude comparative, un modèle analytique simplifié est utilisé.

1.2.Revue de la littérature

1.2.1.Théorie des plaques

L'étude des vibrations libres des plaques remonte aux années 1800. Chladni (1802), un physicien allemand qui a complètement étudié la vibration d'une plaque carrée avec des bords libérés et a observé le comportement vibratoire de la plaque. Rayleigh (1877) a présenté sa méthode bien connue pour des solutions générales avec des fréquences propres vibrationnelles plusieurs ouvrages. Ritz a amélioré la procédure de Rayleigh en 1909, en supposant un nouvel ensemble de fonctions de test d'autorisation. Cette méthode s'appelle méthode Rayleigh-Ritz où méthode Ritz. C'est la méthode d'approximation la plus couramment utilisée dans l'analyse des vibrations structurelles. Depuis, de nombreuses recherches ont été menées sur la

vibration des plaques de différentes formes géométriques avec différentes conditions aux limites et chargements ([3], [4], [5]). La plupart de ces travaux utilisent la théorie des plaques minces dans laquelle la déformation de cisaillement est négligée ([6], [7], [8], [9], [10]). Cependant, cet effet de cisaillement est important dans les plaques plus épaisses ([11], [12]). Quand l'effet du cisaillement est ignoré, l'erreur de la solution de vibration de la plaque est élevée. Les recherches sur l'intégration de l'effet du cisaillement ont donné plusieurs théories. Dans les théories d'ordre supérieur les champs de déplacements sont développables suivant les puissances de coordonnées d'épaisseur. Lors de l'analyse de la vibration de plaques isotropes épaisses, la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin est généralement plus suffisante. Bien que théoriquement, La répartition des contraintes de cisaillement est supposée constante dans toute l'épaisseur. Cette théorie donne des solutions assez précises. La théorie inclut un facteur de correction du cisaillement k . Les valeurs de ce facteur généralement utilisés sont $k = \frac{5}{6}$ et $k = \frac{\pi^2}{12}$. Malgré cela, il existe une étude qui a montré que le facteur de correction du cisaillement k peut être exprimé en fonction du coefficient de Poisson [13].

1.2.2. Un bref historique de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis fut utilisée pour la première fois en 1960 par Ray Clough dans une étude sur les problèmes d'élasticité plane [14]. Le tableau (1.1) montre l'évolution chronologique de la méthode :

Tableau 1.1 : publications et périodes d'évolution de la méthode des éléments finis.

1940	Hrenikoff : Division d'un problème d'élasticité au domaine continue, en certain nombre d'éléments.
1943	Courant : Méthodes variationnelles
1956	Turner, Clough ,Martin,Toop : Rigidité - Méthode Directe.
1960	Clough : Finite Element, problèmes plans. Le terme Elément finis utilisé pour la 1 ^{ère} fois.
1970	Applications sur gros ordinateurs.
1980	Applications sur micro-ordinateurs.
1990	Possibilité d'analyse de gros systèmes de structures

1.3. But et structure de mémoire

Le but de cette recherche est l'analyse dynamique des plaques isotropes épaisses par la méthode des éléments finis.

Pour les études comparatives, un modèle d'élément finis est proposé, dont les résultats sont vérifiés par une méthode analytique.

Ce travail est divisé en cinq chapitres :

Le premier chapitre présente une introduction générale comprenant une définition du problème suivie par les travaux de recherches précédents. Ce chapitre est terminé par le but et le plan de travail de la thèse.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des deux théories des plaques (mince de Kirchhoff et épaisse de Mindlin) et leur hypothèses. Dans ce chapitre nous déterminons les déplacements, les déformations et les expressions des énergies cinétiques et de déformations de la plaque isotrope basées sur la théorie des plaques de Mindlin, ainsi que l'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque.

Dans **le troisième chapitre**, nous formulons le problème par la version classique de la méthode des éléments finis où nous déterminons les fonctions de formes de l'élément quadrilatère isoparamétrique à huit nœuds, incluant les effets de cisaillement transversal dans le but d'obtenir les matrices de rigidité et de masse des plaques épaisses. Le chapitre est clôturé par la réponse dynamique d'une plaque soumise à différents chargements dynamiques.

Le quatrième chapitre décrit le programme de calcul élaboré avec ses différentes étapes en utilisant le langage de programmation FORTRAN. Ainsi, nous présentons l'organigramme, le dictionnaire des paramètres et la description des sous-programmes utilisés dans le programme principal.

Le cinquième chapitre est réservé aux différents résultats obtenus par la méthode des éléments finis. En premier lieu, des exemples de comparaison, de convergence et de validation avec une méthode analytique pour les modèles des plaques isotropes sont présentés. Ensuite, étude paramétrique est faite en prenant en considération l'effet d'amortissement, l'effet d'épaisseur, l'effet des conditions aux limites et

l'effet du type de chargement. Cela mène à une discussion approfondie des effets de ces paramètres sur la réponse dynamique d'une plaque.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale recensant les principales avancées du travail effectué et exposé brièvement les futures perspectives.

Chapitre 2

Dynamique forcée d'une plaque de Mindlin

2.1.Introduction

En mécanique des milieux continus, les théories des plaques sont des descriptions mathématiques de la mécanique pour le calcul des déformations et des contraintes dans les plaques planes. Une plaque est définie comme un élément structural plan dont l'épaisseur est faible par rapport à ses autres dimensions. Cette propriété est utilisée pour réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. De nombreuses théories des plaques ont été développées. Les plus largement utilisées sont les théories classiques de Love-Kirchoff et de Reissner-Mindlin, qui seront présentées dans les pages suivantes.

2.2.Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur est petite en comparaison avec les deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne. Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur h (Figure 2.1).

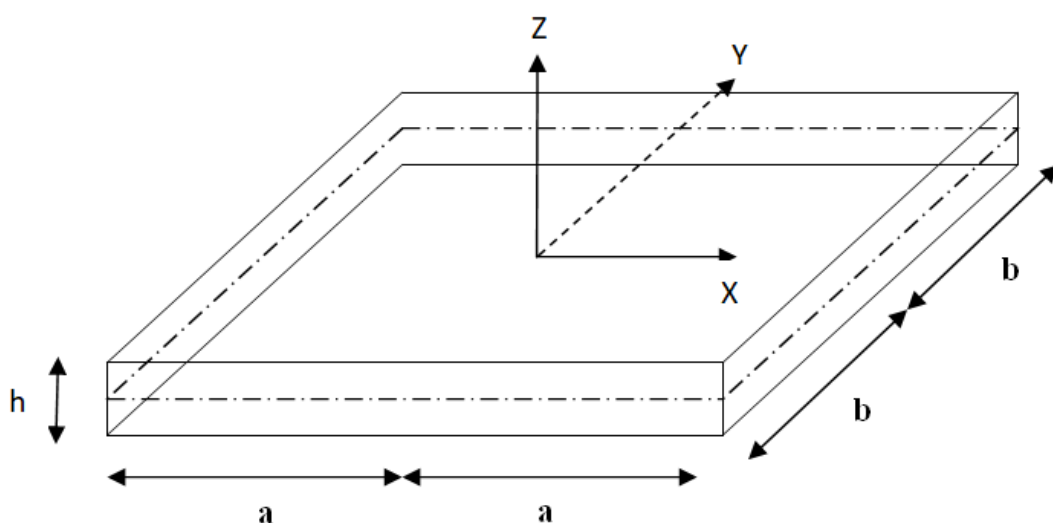


Figure 2.1 : Plaque rectangulaire

2.3. Théorie des plaques minces

La théorie des plaques minces a été développée en 1888 par Love [16] à partir des hypothèses proposées par Kirchoff [17]. Bien que cette théorie ne soit pas liée à l'objectif principal de la thèse, elle mérite d'être mentionnée à des fins de comparaison.

Une plaque peut être considérée comme mince, si le rapport de l'épaisseur sur la plus grande dimension est typiquement inférieur à 1/20 [18].

2.3.1. Hypothèses [19]

La théorie classique des plaques s'applique aux plaques minces, et utilise les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas de déformations dans le plan moyen de la plaque. Ce plan reste neutre pendant la flexion.
- Les lignes droites normales à la surface moyenne restent normales à la surface moyenne après déformation.
- La déflexion du plan moyen est faible par rapport à l'épaisseur de la plaque.
- Les contraintes normales agissant sur les plans qui sont parallèles aux faces peuvent être négligées.

En utilisant ces quatre hypothèses, toutes les composantes des contraintes peuvent être exprimées en termes de la déflexion w , qui est une fonction des coordonnées x et y . La fonction de déflexion doit satisfaire une équation différentielle partielle linéaire, qui, avec les conditions aux limites, définit totalement w . Après avoir obtenu la déflexion, nous pouvons calculer les contraintes en tout point de la plaque.

2.3.2. Equations des efforts et moments

Les relations entre les moments et les efforts sont les suivantes :

$$N_{xx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{xx} dz \quad N_{yy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{yy} dz \quad (2.1)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz \quad N_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yx} dz \quad (2.2)$$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{xx} z dz \quad M_{yy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{yy} z dz \quad (2.3)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} z dz \quad M_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (2.4)$$

$$T_{xx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xz} dz \quad T_{yy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.5)$$

Les efforts et les moments agissants sur un élément d'une plaque sont représentés dans les figures (2.2) et (2.3) :

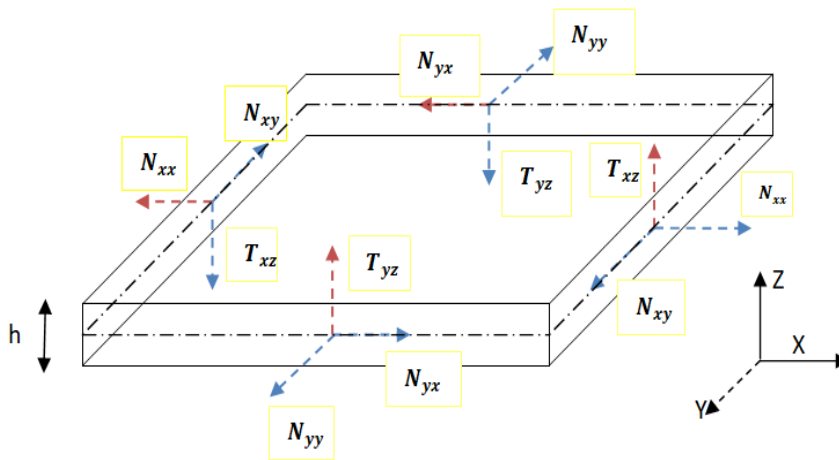


Figure 2.2 : Efforts agissants sur un élément de plaque

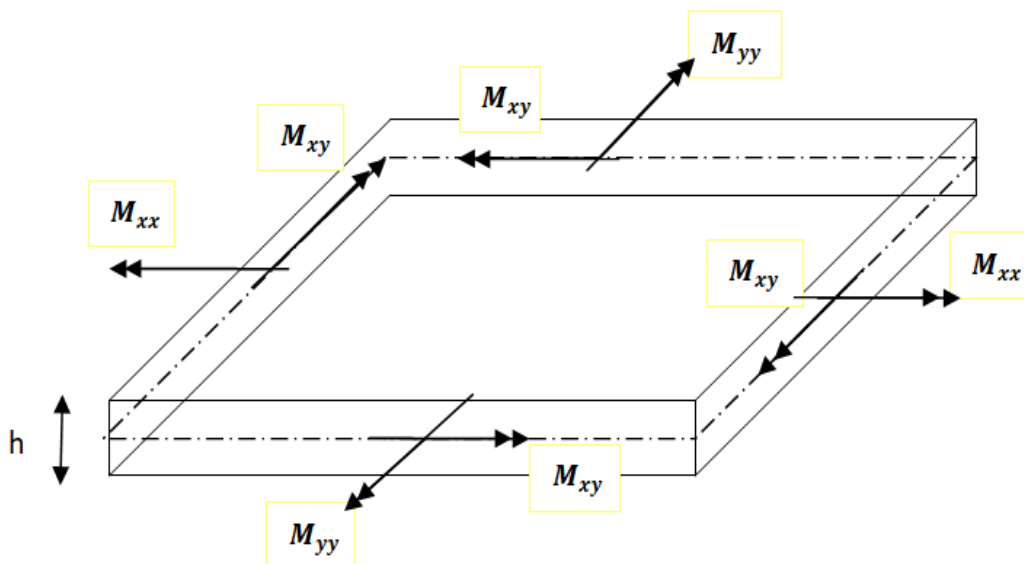


Figure 2.3 : Moments agissants sur un élément de plaque

2.4. Théorie des plaques épaisses

Deux théories similaires, mais non identiques, ont été proposées par Eric [20] en 1945 et Raymond Mindlin [21] en 1951. Toutes deux sont destinées au calcul des plaques épaisses, où la normale à la surface moyenne reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne après déformation.

La principale différence réside dans le fait que la théorie de Reissner n'invoque pas la condition de contrainte plane et l'épaisseur de la plaque peut changer au cours de la déformation. La théorie de Mindlin - Reissner obéit aux hypothèses de Mindlin. Elle est donc plus correctement appelée théorie des plaques de Mindlin. Cette théorie est également appelée la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre des plaques, car elle implique une variation linéaire du déplacement à travers l'épaisseur. La théorie de Mindlin tient si le rapport de l'épaisseur sur la plus grande dimension est supérieur à 1/20.

2.4.1. Hypothèses

La théorie de Mindlin repose sur les hypothèses suivantes :

- ❖ La contrainte normale σ_{zz} est négligeable par rapports à σ_{xx} et σ_{yy} .
- ❖ La déformation en cisaillement transverse est nulle ($\varepsilon_{zz}=0$).
- ❖ Les points situés sur la normale au plan moyen de la plaque ne sont pas forcément sur cette même normale après déformation.
- ❖ L'effet de l'inertie de rotation est aussi inclus.

2.4.2. Champs de déplacement

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.6)$$

u, v, w, θ_x et θ_y sont les déplacements généralisées du système où :

- u, v sont les déplacements longitudinaux, w est le déplacement transversal, et θ_x, θ_y sont les rotations autour de x et y respectivement.

Les déplacements et rotations exprimée dans la figure (2.4).

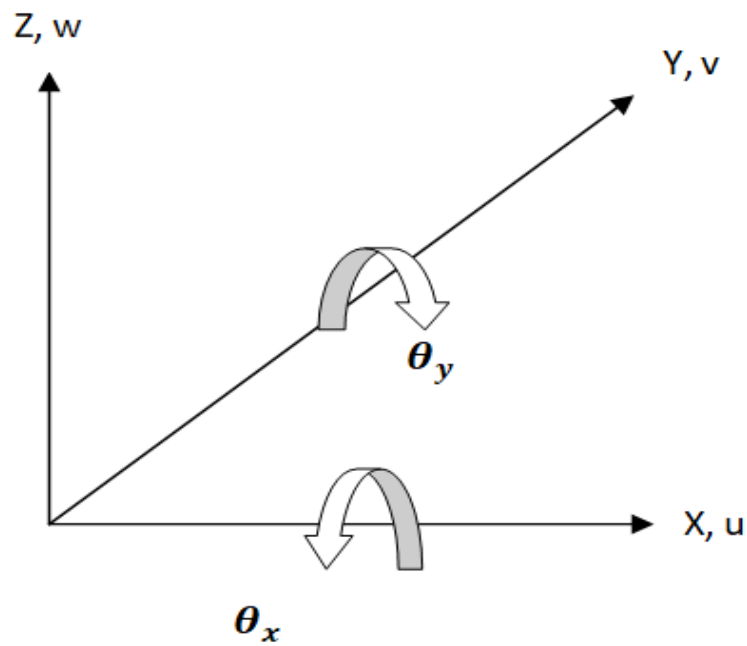


Figure 2.4 : Déplacements et rotations

La géométrie d'une plaque de Mindlin avant et après déformation est représentée dans la figure (2.5).

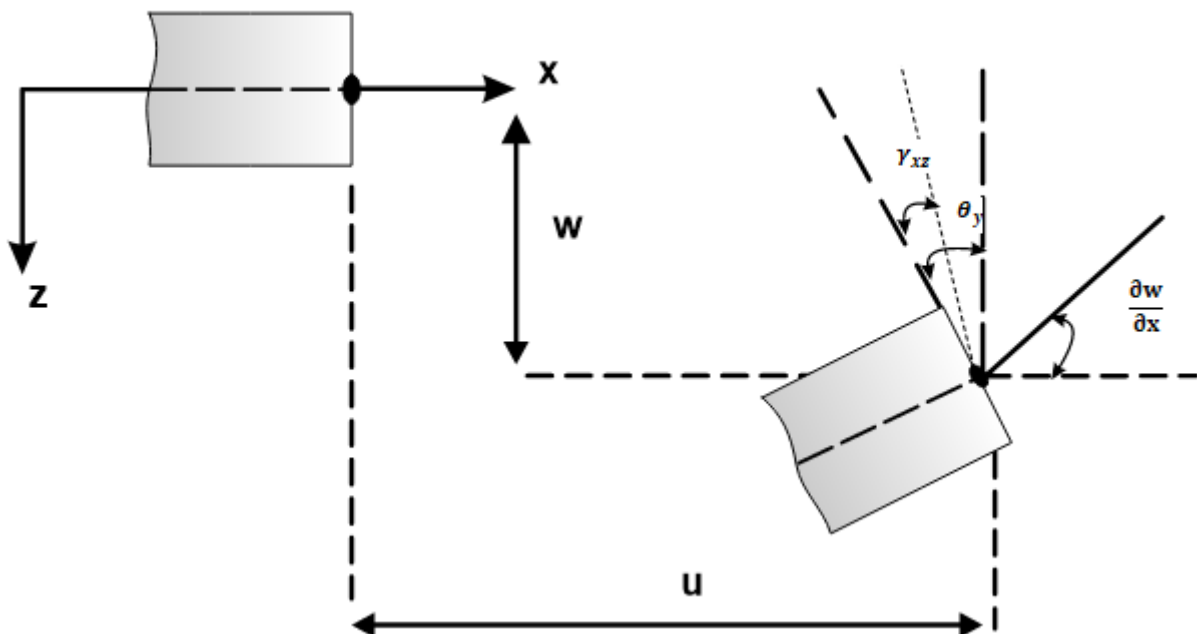


Figure 2.5 : Géométrie au bord d'une plaque de Mindlin avant et après déformation

2.4.3. Relations déformations-déplacements

Le vecteur déformation en flexion [22] s'exprime comme suit:

$$\{\varepsilon\} = -z \{\chi\} \quad (2.7)$$

Où

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Et

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-\partial\theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Le vecteur de déformation en cisaillement transversal $\{\gamma\}$ s'exprime comme suit :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

2.4.4. Relations contraintes-déformations

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope sont données par les équations suivantes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} \frac{-Ez}{1-\nu^2} (\chi_{xx} + \nu \chi_{yy}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx} \frac{-Ez}{1-\nu^2} (\chi_{yy} + \nu \chi_{xx}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (2.13)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = Gz\chi_{xy} \quad (2.14)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.15)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (2.16)$$

Les contraintes sont représentées dans la figure (2.6)

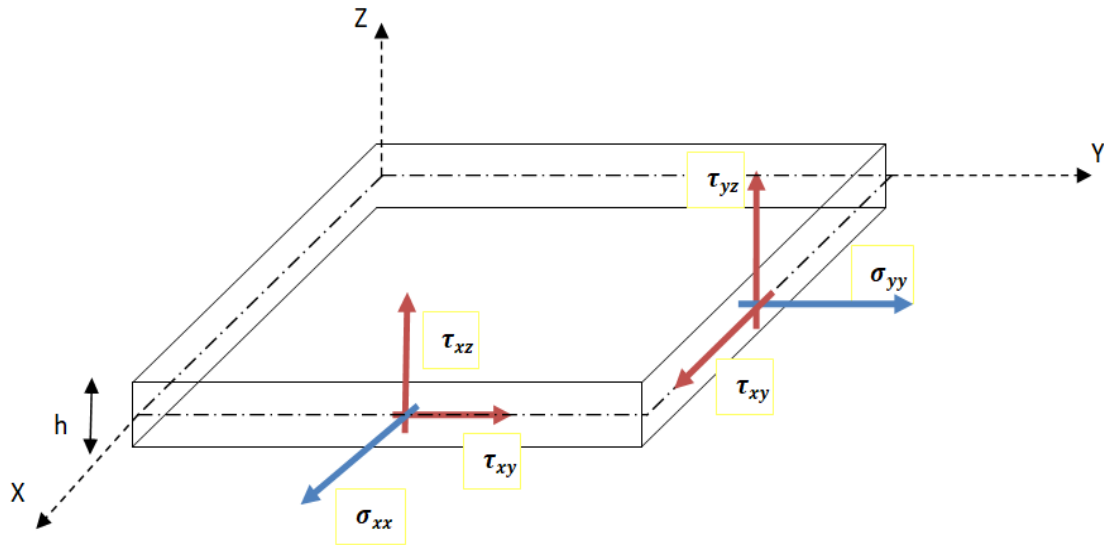


Figure 2.6 : Les contraintes dans une plaque

2.4.5. Relations efforts-courbures

Les relations entre les efforts et les courbures sont obtenues par l'intégration des équations (2.17)

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ T_{xx} \\ T_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{xx} \, z \, dz \\ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{yy} \, z \, dz \\ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} \, z \, dz \\ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xz} \, dz \\ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yz} \, dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) \\ D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) \\ D\frac{1-\nu}{2}\chi_{xy} \\ kGH\chi_{xz} \\ kGH\chi_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Où M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} sont les moments de flexion par unité de longueur, T_{xx}, T_{yy} sont les efforts dus au cisaillement transversal par unité de longueur, k est le facteur de correction du cisaillement transversal et h est l'épaisseur de la plaque, D est la rigidité de flexion donnée par :

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.18)$$

2.5. Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique [22] donnée par l'équation (2.19) :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV \quad (2.19)$$

Où $\{\dot{U}\}$ est le vecteur des vitesses généralisées :

$$\{\dot{U}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

En remplaçant l'équation (2.20) dans (2.19), on trouve :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2.21)$$

La substitution de l'équation (2.6) dans l'équation ci-dessus donne :

$$T = \int_A \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA \quad (2.22)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_A (\{d\}^T [I] \{d\}) dA \quad (2.23)$$

Où

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.6. Energie déformation

L'expression de l'énergie de déformation d'une plaque [22] est donnée par l'équation :

$$V = \frac{1}{2} \int_{Ae} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dA dz + \frac{1}{2} \int_{Ae} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\}^T \{\gamma\} dA dz \quad (2.26)$$

Où

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G [c_s] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

En substituant l'équation (2.27) dans (2.26) nous trouvons:

$$V = \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [D_m] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_{A_e} k h \{\gamma\}^T [D_c] \{\gamma\} dA \quad (2.28)$$

Où

$$[D_m] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$[D_c] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.7. Equation du mouvement

En utilisant la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation donnée par :

$$L = T - V \quad (2.31)$$

La fonction précédente permet d'obtenir les équations de mouvement de la plaque par la formule de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \{q\}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \{q\}} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Pour les petits mouvements des corps élastiques les énergies cinétique et de déformation nous pouvons écrire :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (2.33)$$

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (2.34)$$

Où $[M]$ est la matrice masse, $[K]$ la matrice rigidité et $\{q\}$ le vecteur généralisée des déplacements.

A partir des équations précédentes nous pouvons écrire l'équation du mouvement suivante :

$$[M] \ddot{X} + [K] X = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

La solution d'équation (2.33) est une fonction sinusoïdale :

$$X = A e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

En substituant l'équation (2.34) dans (2.32) nous trouvons :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X\} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Formulation par la méthode des éléments finis

3.1.Introduction

L'utilisation des méthodes numériques d'approximation est nécessaire pour l'étude des structures complexes qui n'ont pas de solution analytique. La méthode des éléments finis est l'une de ces méthodes.

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous-domaines appelés éléments finis.
- Construction de l'approximation nodale par éléments finis.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Application des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations résultant.

3.2.Choix de l'élément

Le choix de l'élément fini est fonction de la précision voulue, de la nature du problème et aussi du temps disponible. Dans notre cas, nous avons choisi l'élément quadrilatéral à huit nœuds qui est appelé élément quadratique.

3.3.Fonctions de forme

Dans notre cas, chaque nœud à trois degrés de liberté deux rotations et un déplacement qui s'écrivent sous forme de polynômes :

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \quad (3.1)$$

$$v = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2 \quad (3.2)$$

$$w = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 \quad (3.3)$$

Où ξ, η sont les coordonnées locales de l'élément.

3.3.1. Détermination des Fonctions de forme

En considérant les équations (3.1), (3.2) et (3.3) on peut écrire que :

$$u = P(\xi, \eta) \{A\} \tag{3.4}$$

Où

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Et

$$P(\xi, \eta) = [1 \ \xi \ \eta \ \xi \eta \ \xi^2 \ \eta^2 \ \xi^2 \eta \ \xi \eta^2] \tag{3.6}$$

En remplaçant les coordonnées locales des nœuds dans les fonctions de déplacement, nous pouvons construire la matrice suivante :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

En calculant la matrice inverse de B, nous trouvons :

$$[H]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Les fonctions de forme sont déterminées comme suit :

$$[N] = P(\xi, \eta)[H]^{-1} \tag{3.9}$$

Où

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Où

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1) \quad (3.11)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) \quad (3.12)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1) \quad (3.13)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1) \quad (3.14)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \quad (3.15)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \quad (3.16)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \quad (3.17)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \quad (3.18)$$

A partir de (3.4), nous pouvons écrire :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i \quad (3.19)$$

De même façon nous pouvons écrire :

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i \quad (3.20)$$

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (3.21)$$

Les équations (3.19), (3.20) et (3.21) peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Pour un élément de plaque épaisse quadrilatéral à huit nœuds, la déflexion et les rotations peuvent être additionnés comme suit :

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (3.23)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi} \quad (3.24)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi} \quad (3.25)$$

L'élément construit est un élément conforme, ce qui signifie que w, θ_x et θ_y sont continus sur les bords entre les éléments. En réécrivant les équations (3.23), (3.24) et (3.25) en une seule équation matricielle nous obtenons:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = [N] \{d_e\} \quad (3.26)$$

Où

$$[N] = \left[\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \right] \quad (3.27)$$

Et

$$\{d_e\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

3.4. Transformation des coordonnées

Pour la transformation des coordonnées globales aux coordonnées locales présentées dans la figure (3.1). On a besoin d'une matrice de transformation appelée matrice Jacobienne où Jacobien [23]. Elle est définie dans l'équation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

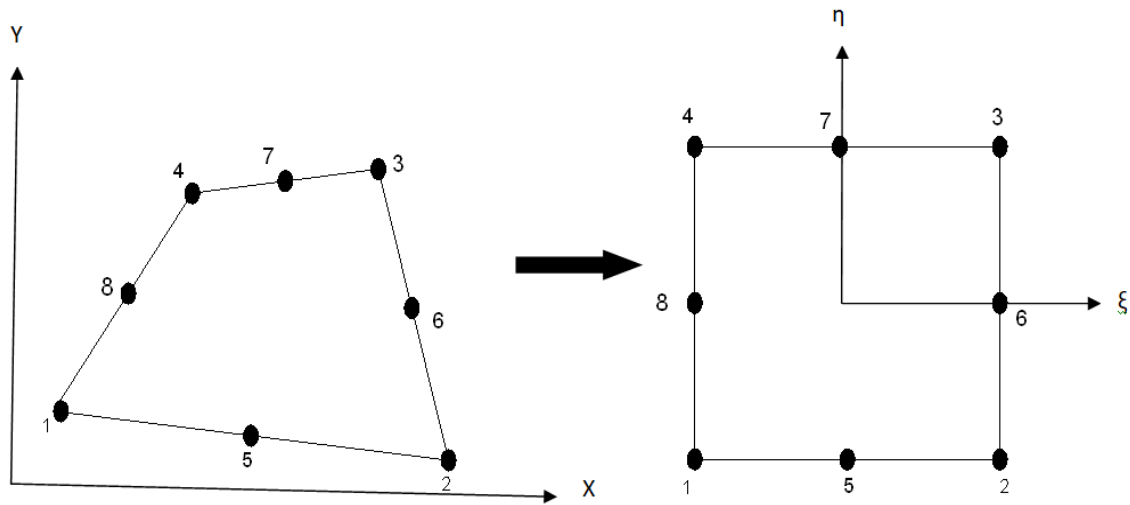


Figure 3.1: Transformation des coordonnées globales(X, Y) aux coordonnées locales (ξ, η)

Où

$$J_{11} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad (3.30)$$

$$J_{12} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad (3.31)$$

$$J_{21} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (3.32)$$

$$J_{22} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (3.33)$$

L'équation (3.29) donne:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left(J_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.35)$$

Où $|J|$ est le déterminant de Jacobien $[J]$.

Le volume d'un élément différentiel infinitésimal est :

$$dV = dA dz \quad (3.36)$$

Où

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (3.37)$$

3.5. Matrice masse élémentaire

A partir de l'énergie cinétique donnée par l'équation (2.23), la matrice masse élémentaire [22] peut s'écrire :

$$[M_e] = \int_{A_e} [N]^T [I] [N] dA \quad (3.38)$$

En remplaçant l'équation (3.37) dans (3.38), la matrice masse élémentaire devient :

$$[M_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [I] [N] |J| d\xi d\eta \quad (3.39)$$

3.6. Matrice de rigidité élémentaire

A partir de l'énergie déformation [22] donnée par l'équation (2.28), nous pouvons écrire la matrice rigidité élémentaire comme suit :

$$[K_e] = \underbrace{\int_{A_e} \frac{h^3}{12} [B^I]^T [D_m] [B^I] dA}_{\substack{\text{Matrice de rigidité} \\ \text{due à la flexion}}} + \underbrace{\int_{A_e} k h [B^0]^T [D_c] [B^0] dA}_{\substack{\text{Matrice de rigidité} \\ \text{due au cisaillement}}} \quad (3.40)$$

Où

$$[B]^I = [[B]_1^I \quad [B]_2^I \quad \dots \quad [B]_j^I \quad \dots \quad [B]_8^I] \quad \text{et} \quad [B]_j^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & -\frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$[B]^0 = [[B]_1^0 \quad [B]_1^0 \quad \dots [B]_j^0 \quad \dots [B]_8^0] \quad \text{et} \quad [B]_j^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & N_j \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & -N_j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

En remplaçant l'équation (3.37) dans (3.40), la matrice de rigidité élémentaire devient :

$$[K_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{h^3}{12} [B^l]^T [D_m] [B^l] |J| d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k h [B^0]^T [D_c] [B^0] |J| d\xi d\eta \quad (3.43)$$

3.7.Intégration numérique

Les matrices élémentaires de masse et de rigidité obtenues précédemment contiennent des intégrales doubles. Donc dans certains cas où le calcul explicite de ces intégrales est impossible, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques. La méthode la plus populaire est la quadrature de Gauss [24].

En analyse numérique, la règle de quadrature est une approximation de l'intégrale définie d'une fonction, généralement exprimée sous la forme d'une somme pondérée des valeurs de la fonction à des points spécifiques du domaine d'intégration. La règle de quadrature de Gauss, du nom de Karl Friedrich Gauss, est une règle de quadrature qui donne des résultats exacts pour les polynômes de degré $2n-1$ où par un choix approprié des points x_i et des poids w_i pour $i = 1, \dots, n$. Le domaine d'intégration d'une telle règle est généralement pris comme

$[-1, 1]$.

L'équation fondamentale de la quadrature de Gauss pour un élément quadrilatéral est donnée par :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) |J| w_i w_j \quad (3.44)$$

w_i, w_j sont les poids de la quadrature de Gauss, ξ_i, η_j sont les abscisses des points de la quadrature de Gauss.

Dans notre étude, nous utilisons trois points d'intégrations.

Tableau 3.1 : Constantes d'intégration numérique

n	ξ_i	w_i / w_j
1	-0.7745966692414834	0.5555555555555556
2	0.0	0.8888888888888888
3	0.7745966692414834	0.5555555555555556

3.8. Réponse dynamique

3.8.1. Définition

Lorsqu'une structure est soumise à un chargement qui varie avec le temps, une analyse dynamique doit être menée.

3.8.2. Méthode d'analyse dynamique

La majorité des analyses dynamiques [25] résoudra l'équation (3.47), qui donne La réponse temporelle de chaque point nodal dans la structure par inclusion des forces d'inertie et des forces d'amortissement dans l'équation. Les forces d'inertie sont le produit de la masse par l'accélération et les forces d'amortissement sont le produit de l'amortissement par la vitesse. L'équation générale de mouvement est :

$$[K]q + [C] \frac{dq}{dt} + [M] \frac{d^2q}{dt^2} = p \quad (3.45)$$

Où

- ✓ [M] est la matrice masse et [K] la matrice de rigidité données par les équations (3.39) et (3.45).
- ✓ [C] est la matrice élémentaire d'amortissement donnée par :

$$[C] = \int_V c [N]^T [N] dV \quad (3.46)$$

La procédure de l'estimation des grandeurs des coefficients de la matrice d'amortissement peut être expliquée en considérant la propriété orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice d'amortissement :

$$[\Phi]^t [C] [\Phi] = \mathit{diag}(2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_r\omega_r, \dots, 2\xi_n\omega_n) \quad (3.47)$$

Où ω_r , ξ_r sont respectivement la fréquence propre et le taux d'amortissement associés au mode r et $[\Phi]$ est la matrice modale normalisée.

L'équation (3.49) donne :

$$[C] = [\Phi]^{-t} \mathit{diag}(2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_r\omega_r, \dots, 2\xi_n\omega_n) [\Phi]^{-1} \quad (3.48)$$

L'inversion de la matrice modale $[\Phi]$ nécessite beaucoup de calcul. Au lieu de cela, il est utile d'utiliser la propriété d'orthogonalité des modes par rapport à la matrice masse

$$[\Phi]^t [M] [\Phi] = [I] \quad (3.49)$$

Où $[I]$ est la matrice diagonale unitaire.

En remplaçant l'équation (3.51) dans l'équation (3.50) nous trouvons:

$$[C] = [M] [\Phi] \mathit{diag}(2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_r\omega_r, \dots, 2\xi_n\omega_n) [\Phi]^t [M] \quad (3.50)$$

L'équation (3.52) devient :

$$[C] = [M] \left[\sum_{r=1}^n 2\xi_r\omega_r [\Phi_r] [\Phi_r]^t \right] [M] \quad (3.51)$$

Dans l'équation (3.53), la contribution à la matrice d'amortissement pour chaque mode est proportionnelle au taux d'amortissement modal. Les valeurs des taux d'amortissement modal dans les structures typiques varient entre 0,01 à 0,2.

3.8.3.Solution aux équations d'équilibre dynamique

L'équation (3.50) est un ensemble de n équations couplées. La réponse à l'excitation p et les conditions initiales est recherchée.

$$q(0) = q_0 \quad , \quad \frac{dq}{dt}(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 \quad (3.52)$$

Dans cette section, nous décrivons la méthode de superposition des modes, par laquelle un tel ensemble d'équations couplées peut être transformé en un ensemble d'équations découplées grâce à l'utilisation des modes. La première étape d'une solution de superposition des modes consiste à obtenir les fréquences naturelles et les modes.

$$[[K] - \omega^2[M]] [\Phi] = 0 \quad (3.53)$$

Donnant (ω_r^2, Φ_r) avec $r= 1,2,\dots, n$.

Les modes sont supposés avoir été normalisés pour donner :

$$[\Phi_r]^T [M] [\Phi_r] = 1 \quad , \quad [\Phi_r]^T [K] [\Phi_r] = \omega_r^2 \quad , \quad [\Phi_r]^T [C] [\Phi_r] = 2\xi_r\omega_r \quad (3.54)$$

Les modes sont collectés pour former la matrice modale $[\Phi]$, c'est-à-dire :

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_r \quad \dots \quad \Phi_n] \quad (3.55)$$

L'étape clé de la procédure de superposition des modes consiste à introduire la transformation des coordonnées :

$$\{q\} = [\Phi] \{\eta\} = \sum_{r=1}^n [\Phi_r] \{\eta_r\} \quad (3.56)$$

Où $\{\eta_r\}$ sont appelées coordonnées normales.

Substitution de l'équation (3.58) dans l'équation (3.47) et multiplication de l'équation résultante par $[\Phi_r]^t$ donne les équations d'équilibre dynamique en coordonnées normales, à savoir :

$$\frac{d^2 \eta_r}{dt^2} + 2\xi_r \omega_r \frac{d\eta_r}{dt} + \omega_r^2 \eta_r = \gamma_r \quad (3.57)$$

$$\text{Où} \quad \gamma_r = [\Phi_r]^T p \quad (3.58)$$

La réponse totale peut être obtenue comme une superposition de la réponse due aux conditions initiales et de la réponse due à l'excitation.

A partir des équations (3.54) et (3.58) :

$$q_0 = [\Phi] \eta(0) \quad , \quad \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = [\Phi] \frac{d\eta}{dt}(0) \quad (3.59)$$

En multipliant les équations précédentes par $[\Phi]^t [M]$, nous trouvons:

$$\eta_r(0) = [\Phi_r]^t [M] q_0 \quad , \quad \frac{d\eta_r}{dt}(0) = [\Phi_r]^t [M] \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 \quad (3.60)$$

La réponse totale du mode r peut être exprimée comme une superposition de la réponse due à l'excitation modale et de la réponse due aux conditions initiales modales. La technique décrite ici pour la solution numérique de l'équation (3.59) est simple et peut donner d'excellents résultats. La procédure implique une interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale et de la solution exacte .Figure (3.2) montre l'interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale.

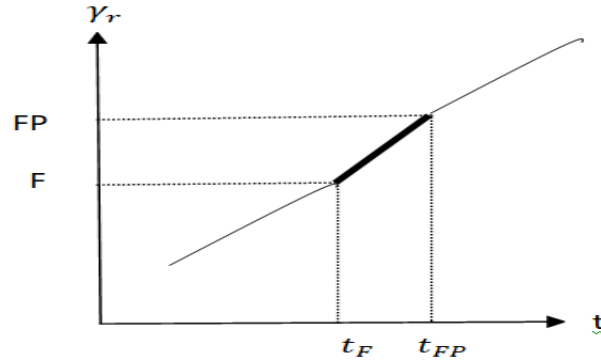


Figure 3.2 : Interpolation linéaire de la fonction d'excitation modale

La fonction d'excitation interpolée est exprimée par :

$$y_r = A + B(t - t_F) \quad (3.61)$$

Où les constantes A et B sont données par

$$A = F \quad , \quad B = \frac{FP - F}{t_{FP} - t_F} \quad (3.62)$$

La réponse due à l'excitation modale peut être exprimée comme

$$\eta_{pr} = C_{1r} + C_{2r}(t - t_F) \quad (3.63)$$

Où C_{1r} et C_{2r} sont des constantes données par

$$C_{1r} = \frac{F - 2\xi_r \omega_r C_{2r}}{\omega_r^2} \quad , \quad C_{2r} = \frac{FP - F}{\omega_r^2 (t_{FP} - t_F)} \quad (3.64)$$

La réponse due aux conditions initiales peut être exprimée sous la forme

$$\eta_{cr} = e^{-\xi_r \omega_r (t - t_F)} [D_{1r} \cos \omega_{dr} (t - t_F) + D_{2r} \sin \omega_{dr} (t - t_F)] \quad (3.65)$$

Où D_{1r} et D_{2r} sont des constantes exprimées comme suit

$$D_{1r} = \eta_r(t_F) - C_{1r} \quad , \quad D_{2r} = \frac{\frac{d\eta_r}{dt}(t_F) - C_{2r} + \xi_r \omega_r D_{1r}}{\omega_{dr}} \quad (3.66)$$

Et

$$\eta_r = \eta_{cr} + \eta_{pr} \quad (3.67)$$

Où

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (3.68)$$

3.8.4.Charges impulsives

Afin de déterminer l'effet des charges impulsives sur les structures [26], il est nécessaire d'obtenir le spectre de réponse de la plaque correspondant à chaque cas de charge. Les charges considérées dans cette étude sont comme suit :

- ✓ Chargement à étape (Figure 3.3).
- ✓ Chargement à rampe (Figure 3.4).

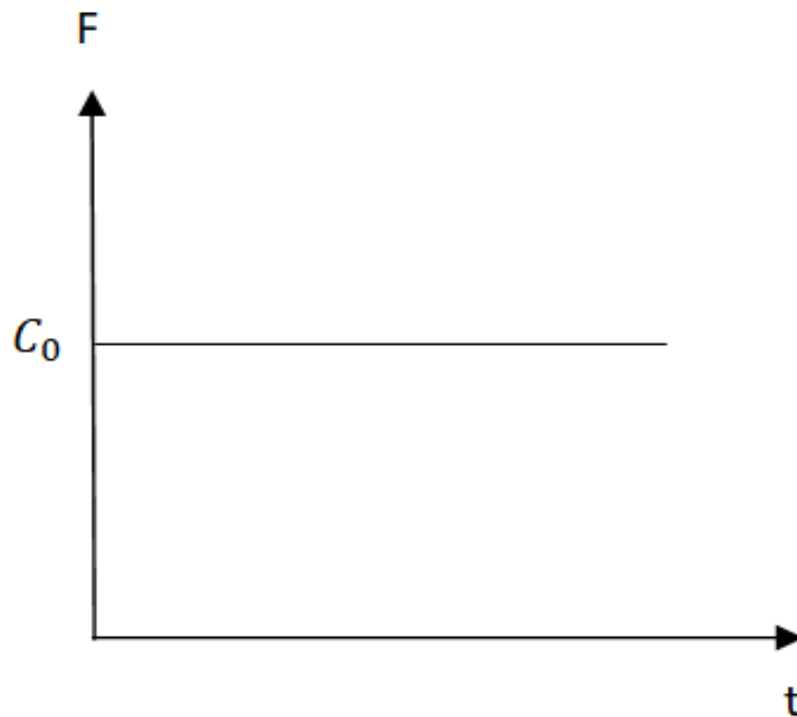


Figure 3.3 : Chargement à étape

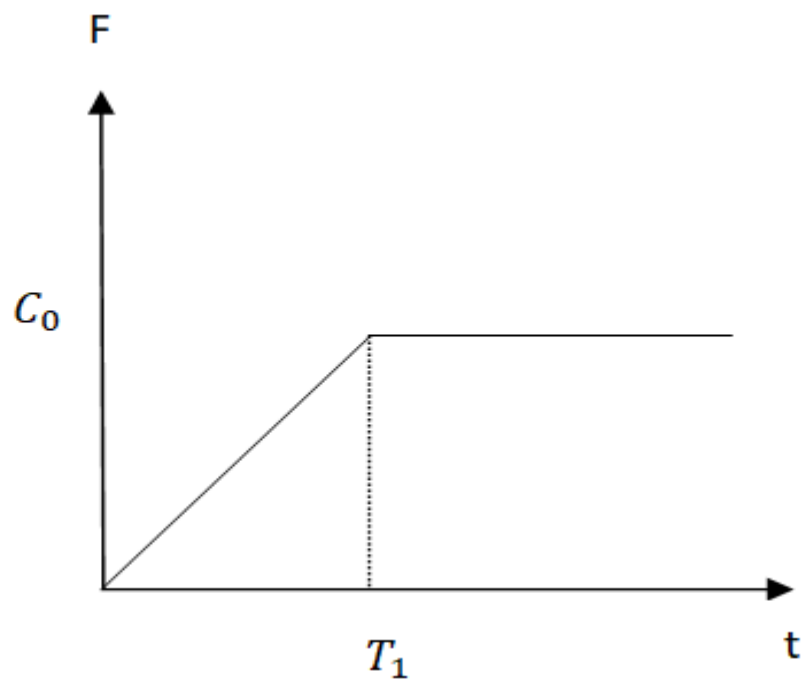


Figure 3.4 : Chargement à rampe

Chapitre 4

Programmation

4.1.Introduction

Au chapitre précédent, la formulation théorique concernant la méthode des éléments finis a été développée. Le code de calcul est basé sur la méthode des éléments finis pour les plaques sous l'effet dynamique des charges impulsives, en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal.

Comme cas particulier, les formes des charges prises en compte (Figures 3.3, 3.4) sont transitoires .L'élément finis plaque a trois degrés de liberté primaires (w, θ_x, θ_y) par nœud.

Pour le calcul numérique, un programme en Fortran77 est établi, ce programme permet de déterminer la matrice masse et de rigidité globales, la réponse dynamique et la flèche centrale de la plaque isotrope.

4.2.Logiciels et matériel utilisés

La programmation a été réalisée avec FORTRAN (le nom est un mélange dérivé de The IBM Mathematical Formula Translating System), qui est un langage de calcul impératif à usage général, spécialement optimisé pour les calculs numériques et les calculs scientifiques. Il a été développé par IBM dans les années 1950 en Californie aux États-Unis. FORTRAN a de nombreuses versions.

Dans cette étude nous utilisons le FORTRAN77.C'est un langage scientifique très adapté à la méthode des éléments finis.

L'exécution du programme a été effectuée sur un PC avec un processeur Core i3 (1.90 Ghz) et 4.00 Go de RAM.

4.3.Organigramme du programme

La figure (4.1) montre les différentes étapes du programme élaboré.

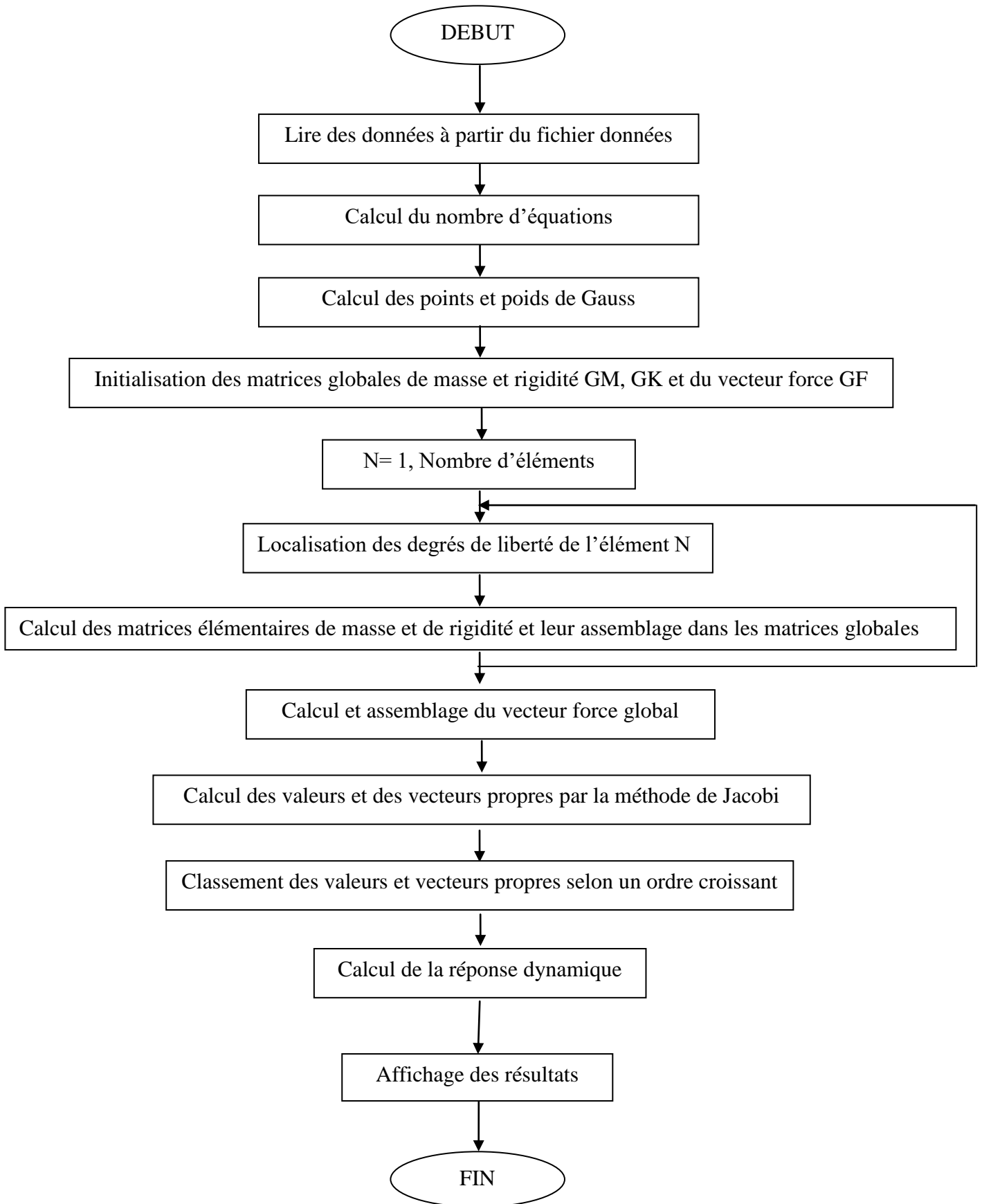


Figure 4.1 : Organigramme principal

4.3.1. Description des Sous-programmes

- ✓ Sous-programme *DONNEES*
- ✓ Sous-programme *FONCTG*
- ✓ Sous-programme *JAC*
- ✓ Sous-programme *STIFFB*
- ✓ Sous-programme *STIFFS*
- ✓ Sous-programme *MASS*
- ✓ Sous programme *JACOBI*
- ✓ Sous-programme *SORT*
- ✓ Sous-programme *DRESP*
- ✓ Sous-programme *LOADF*
- ✓ Sous-programme *AFFICHE*

4.3.1.1. Sous-programme DONNEES

Le sous-programme *DONNEES* permet de lire les différentes données qui caractérisent la géométrie et les propriétés mécaniques de la plaque. La lecture se fait à partir du fichier *PROG.DAT* selon l'ordre suivant :

- ✓ *NE* : Nombre d'éléments.
- ✓ *NN* : Nombre de nœuds.
- ✓ *NNR* : Nombre de nœud restreints.
- ✓ *NND* : Nombre de nœuds ou les déplacements sont calculés.
- ✓ *NNC* : Nombre de nœuds chargés.
- ✓ *ILOAD* : Type de chargement (1 : chargement à rampe, 2 : chargement à étape)
- ✓ *H* : Epaisseur de la plaque.
- ✓ *E* : Module de Young.
- ✓ *PR* : Coefficient de poisson.
- ✓ *RO* : Masse volumique.
- ✓ *SC* : Coefficient de cisaillement transversal.
- ✓ *C₀* : Valeur de la charge appliquée.
- ✓ *DR* : Taux d'amortissement.
- ✓ *T₁* : Temps utilisé dans le chargement à rampe.
- ✓ *DT* : Incrément du temps.

4.3.1.2.Sous-programme FONCTG

Ce sous-programme calcule les fonctions de forme et leurs dérivées.

4.3.1.3.Sous-programme JAC

Ce sous-programme permet de calculer le déterminant et les éléments de la matrice jacobienne utilisés pour le calcul des matrices de masse et rigidité élémentaires.

4.3.1.4.Sous-programme STIFFB

Ce sous-programme permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire due à la flexion.

4.3.1.5.Sous-programme STIFFS

Ce sous-programme permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire due au cisaillement.

4.3.1.6.Sous-programme MASS

Ce sous-programme permet de calculer la matrice masse élémentaire.

- ✓ Dans les trois derniers sous-programmes la méthode numérique d'intégration de GAUSS est utilisée.

4.3.1.7.Sous-programme JACOBI

Pour décrire le comportement d'une structure, il faut nécessairement connaître les fréquences et les modes et les vecteurs associés de cette structure. Il existe plusieurs méthodes numériques pour le calcul des fréquences et modes. Dans ce travail, nous utilisons la méthode de Jacobi.

- ✓ Principe de la méthode [27]

La méthode de JACOBI, due au mathématicien allemand Karl Jacobi, est une méthode itérative de résolution du problème généralisée aux valeurs propres $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$.

Pour notre problème, cette méthode est utilisée pour résoudre l'équation :

$$[K] - \lambda.[M] = \{X\} \quad (4.4.1)$$

Comme condition principale pour appliquer cette méthode, il faut que les matrices rigidité [K] et de masse [M] soient symétriques et définies positives.

Les matrices [K] et [M] sont transformées en matrices diagonales à l'aide des transformations successives.

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\
 [K^2] &= [T]_1^T [K]_1 [T]_1 & [M^2] &= [T]_1^T [M]_1 [T]_1 \\
 [K^3] &= [T]_2^T [K]_2 [T]_2 & [M^3] &= [T]_2^T [M]_2 [T]_2 \\
 \dots & & \dots & \\
 \dots & & \dots & \\
 [K^{k+1}] &= [T]_k^T [K]_k [T]_k & [M^{k+1}] &= [T]_k^T [M]_k [T]_k \\
 [K^{k \rightarrow \infty}] &= [K^d] & [M^{k \rightarrow \infty}] &= [M^d]
 \end{aligned}
 \tag{4.4.2}$$

A l'aide des transformations, les matrices tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$; $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini (∞). Les valeurs et vecteurs propres peuvent être déduits comme suit :

$$[\lambda] = [K^d][M^d]^{-1} \Leftrightarrow [\lambda]_i = [K]_{ii}^d / [M]_{ii}^d \tag{4.3}$$

$$[X][T^1][T^2][T^3] \dots [T^K][T^{k+1}] \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{\sqrt{[M]_{ii}^d}} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

4.3.1.8.Sous-programme SORT

Le sous-programme SORT permet de classer les valeurs propres et vecteurs propres par ordre croissant.

4.3.1.9.Sous-programme DRESP

Ce sous-programme permet de calculer la réponse dynamique en un intervalle de temps choisi.

4.3.1.10.Sous-programme LOADF

Ce sous-programme calcule les types de chargement appliqué sur notre structure.

4.3.1.11.Sous-programme AFFICHE

Ce sous-programme permet d'afficher la réponse calculée au nœud choisi.

Chapitre 5

Résultats et interprétations

5.1.Introduction

Dans le but de valider les résultats du modèle proposé, la comparaison est très importante. Comme nous avons vu la méthode des éléments finis est une méthode approximative, pour cela il est nécessaire de comparer les résultats obtenus avec d'autres méthodes. Dans notre étude, nous avons utilisé la méthode analytique qui donne des résultats exacts. De plus, dans le but d'obtenir une bonne précision nous avons utilisé la théorie des plaques de Mindlin qui inclut les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation.

5.2.Convergence et comparaison des résultats

Pour valider les résultats, la convergence et la comparaison des résultats sont réalisées. Pour cela, cette étude faite pour des plaques rectangulaires simplement appuyées en considérant les modèles isotropes. La comparaison est faite entre les résultats qui sont donnés par la méthode des éléments finis et les résultats trouvés par la méthode analytique expliquée dans le paragraphe suivant.

5.2.1.Solution analytique [28]

La solution analytique de la flèche centrale d'une plaque carrée soumise à une charge dynamique centrale (Figure 5.1) est donnée par l'équation :

$$w(a, a, t) = \frac{192 C_0 a^2 (1 - \nu^2)}{\pi^4 E h^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1 - \cos(\omega_{i,j} t)}{(i^2 + j^2)^2} \quad (5.1)$$

Où

$$\omega_{i,j} = \frac{\pi^2 (i^2 + j^2) h}{4 a^2} \sqrt{\frac{E}{12(1 - \nu^2)\rho}} \quad (5.2)$$

- ✓ La solution analytique est basée sur la théorie classique des plaques.
- ✓ Les caractéristiques physiques et géométriques utilisées sont résumées dans le tableau 5.1.

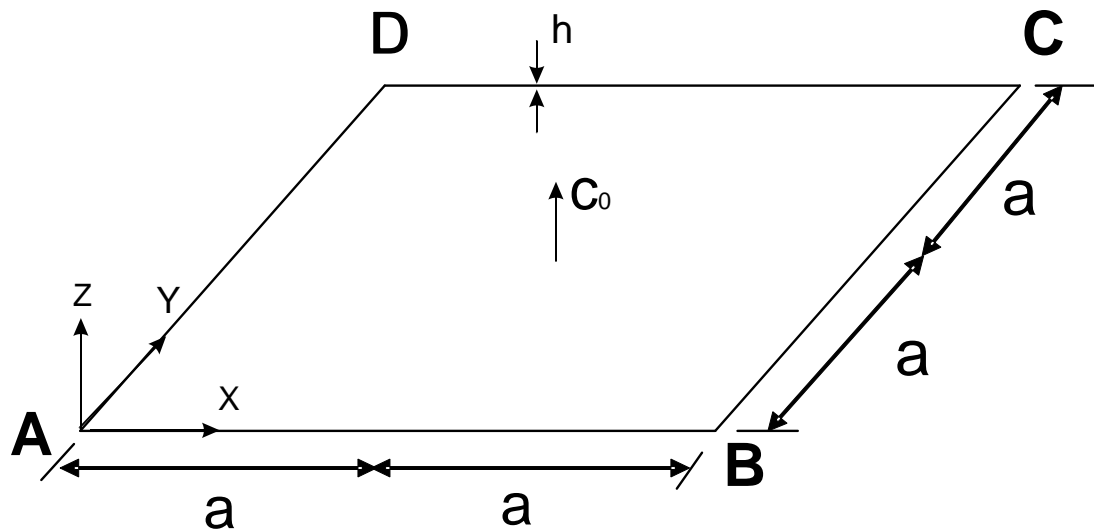


Figure 5.1 : Plaque rectangulaire simplement appuyée

Tableau 5.1 : Caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque isotrope.

Dimensions			Caractéristiques mécaniques			Chargement
a	b	H	E	ν	ρ	C_0
[cm]	[cm]	[cm]	[N/cm ²]		[Kg/cm ³]	[N]
100	100	2	6800000	0.32	0.00266	1000

- ✓ La charge appliquée est une charge à étape (Figure 3.3).
- ✓ La plaque est simplement appuyée.
- ✓ Les conditions aux limites sont :
 - $w=\theta_y=0$ Le long de : AB et CD.
 - $w=\theta_x=0$ Le long de : BC et AD.

5.2.2.Solution par la méthode des éléments finis

Dans cette partie, une étude de convergence et de comparaison est faite .La plaque étudiée est discrétisée en différents maillages (2×2, 3×3, 4×4, 5×5 et 6×6).Les résultats obtenus par les différents maillages sont comparées avec la solution analytique pour chaque instant du temps.

Les paramètres géométriques et mécaniques sont les mêmes donnés dans le tableau 5.1.

Nous avons considéré deux temps différents ($t=0, 25, 0,75s$).

Les résultats obtenus sont présentés dans la figure (5.2).

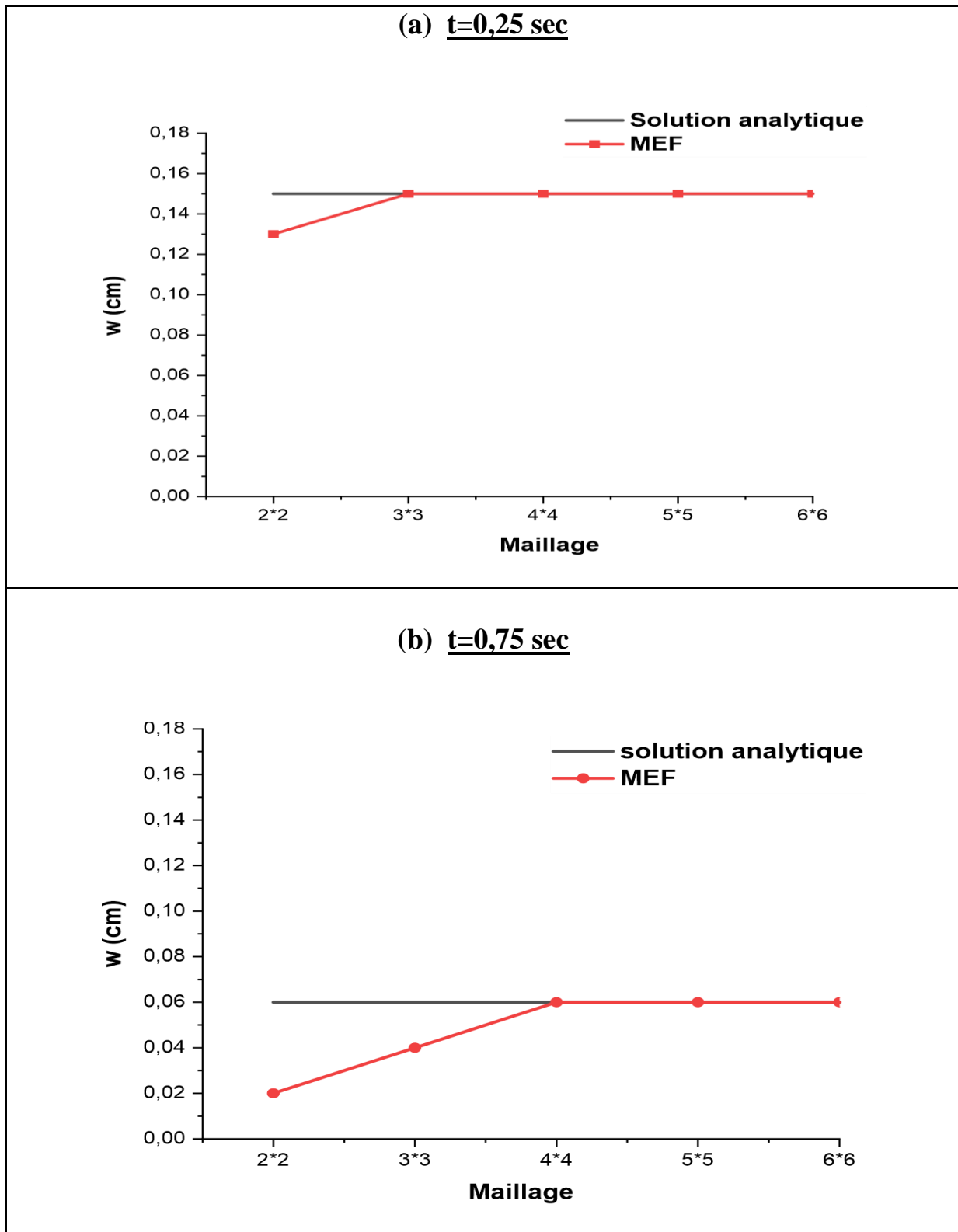


Figure 5.2 : Convergence et comparaison de la flèche centrale w d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée

Nous pouvons observer que la convergence est rapide vers les valeurs de la solution analytique en augmentant le nombre d'éléments car lorsque le maillage de la plaque devient de plus en plus fin, la précision des résultats augmente.

D'autre part, la solution analytique est basée sur la théorie des plaques minces (de Kirchhoff) pour cela il existe des petites différences entre les valeurs déterminées par la méthode des méthodes finis et les valeurs analytiques.

5.3. Etude paramétrique

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis en utilisant un maillage de 6×6 sont présentés. Les calculs faits correspondent à un pas de 0,25s et une durée totale de chargement $t=4$ s.

5.3.1. Effet de l'amortissement

La figure (5.3) montre la variation de la flèche centrale en fonction du temps en considérant des taux d'amortissement différents. Nous remarquons que la flèche est importante lorsque le taux d'amortissement est faible. En effet, l'amplitude augmente au fur et à mesure que le taux d'amortissement diminue.

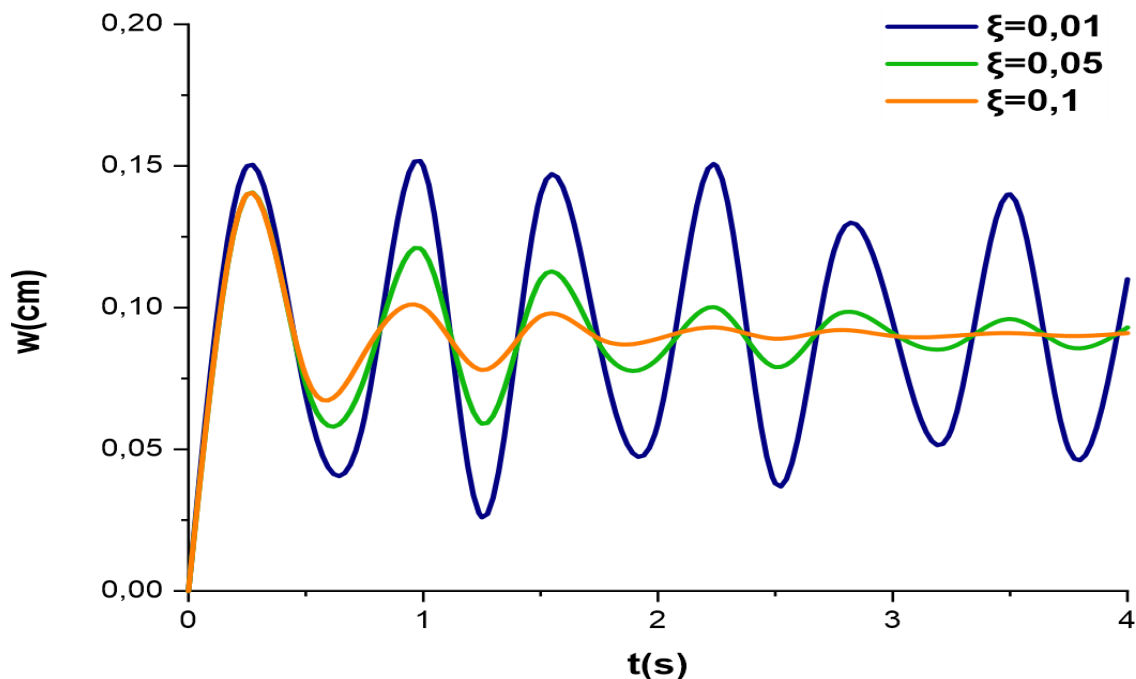


Figure 5.3 : Effet de l'amortissement sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope

Comme nous le savons, l'amortissement permet d'amortir les vibrations mécaniques, ce rôle explique bien le comportement dynamique de la plaque

étudiée. Pour cela, la relation entre la flèche et le taux d'amortissement est inversement proportionnelle.

5.3.2. Effet de l'épaisseur

La figure (5.4) montre la variation de la flèche centrale en fonction du temps en considérant des épaisseurs différentes. Nous remarquons que la relation entre la flèche et l'épaisseur considérée est inversement proportionnelle. Autrement dit, la rigidité de la plaque augmente lorsque l'épaisseur augmente. Donc, lorsque la rigidité de la plaque augmente la flèche diminue.

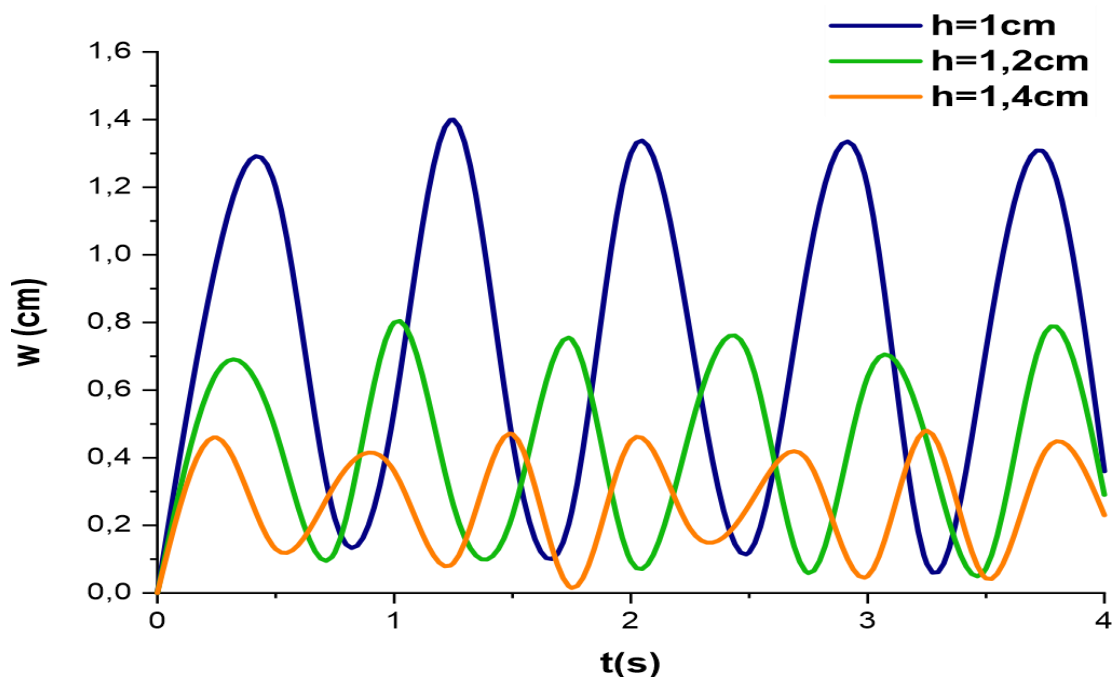


Figure 5.4 : Effet de l'épaisseur sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope

5.3.3. Effet des conditions aux limites

La figure (5.5) montre la variation de la flèche centrale en fonction du temps avec des conditions aux limites différentes en supposant deux types de plaques :

(a) : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sur deux côtés opposés et libres sur les deux autres.

(b) : Plaque carrée isotrope encastree sur deux côtés opposés et libres sur les deux autres.

Nous remarquons que dans le cas de la plaque (b), la flèche est faible par comparaison avec celle de la plaque (a) à cause de l'élimination des degrés de

liberté. Une plaque encastree a un nombre de degré de liberté moins d'une plaque simplement appuyée.

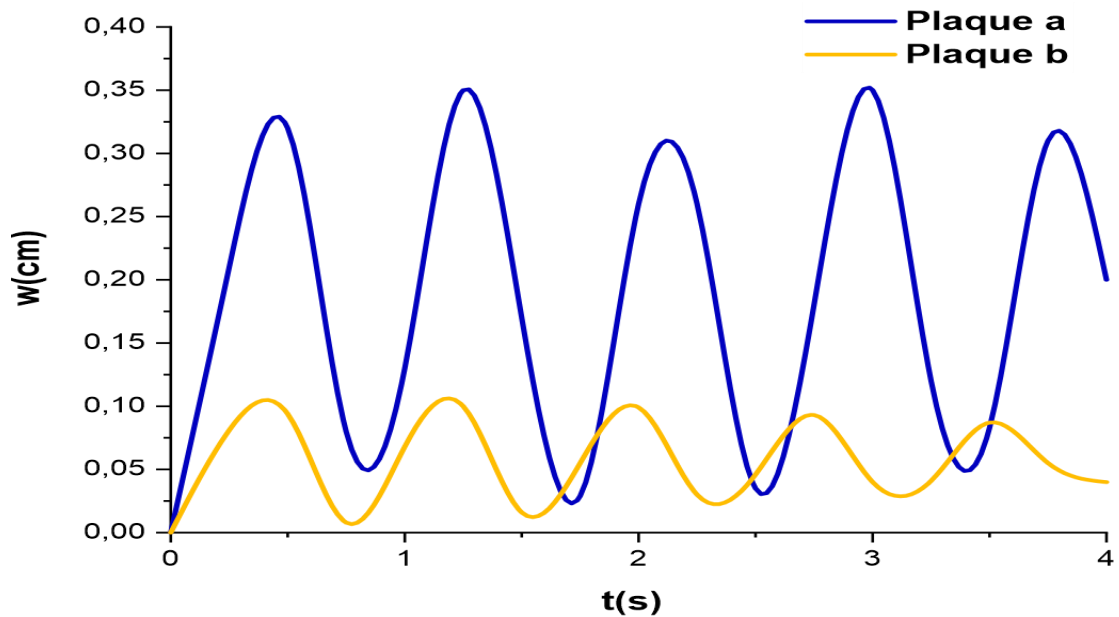


Figure 5.5 : Effet des conditions aux limites sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope

5.3.4. Effet de la longueur

La figure (5.6) montre la variation de la flèche centrale en fonction du temps en variant la longueur a de la plaque étudiée. Nous remarquons que lorsque la longueur augmente la flèche augmente aussi. Le changement de la longueur de la plaque a une grande influence sur la flèche centrale.

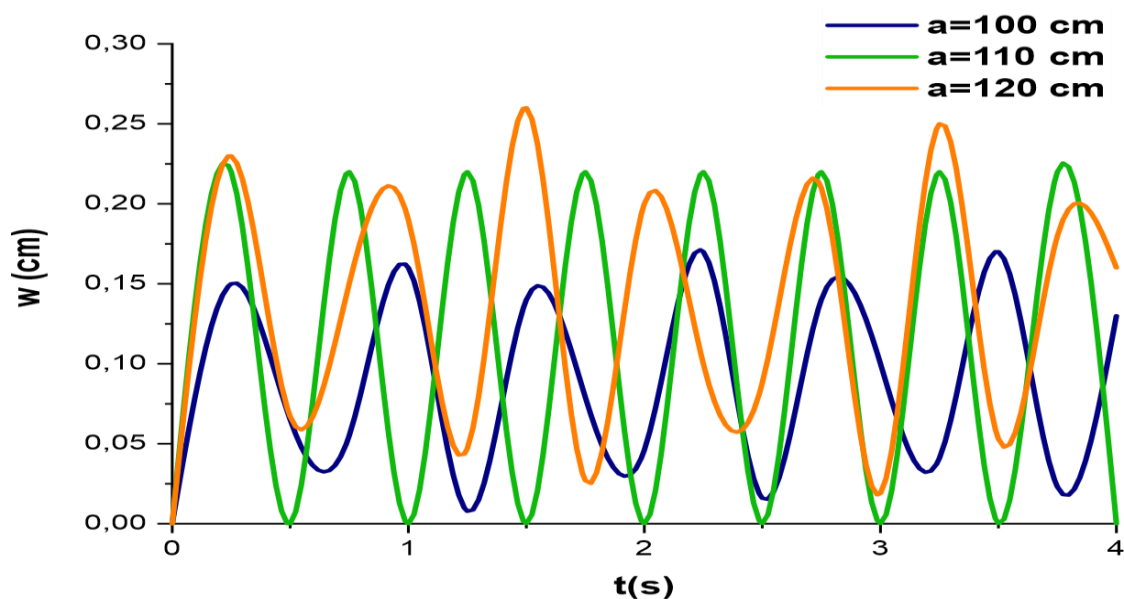


Figure 5.6 : Effet de la longueur sur la réponse dynamique d'une plaque isotrope

5.3.5.Effet de module de Young

Comme la montre la figure (5.7), la variation de la flèche centrale avec le temps est inversement proportionnelle du module de Young. Autrement dit, quand ce dernier augmente la flèche diminue. Les propriétés du matériau ont la même influence que l'épaisseur. La rigidité de la plaque augmente lorsque le module de Young augmente ce qui explique cette relation.

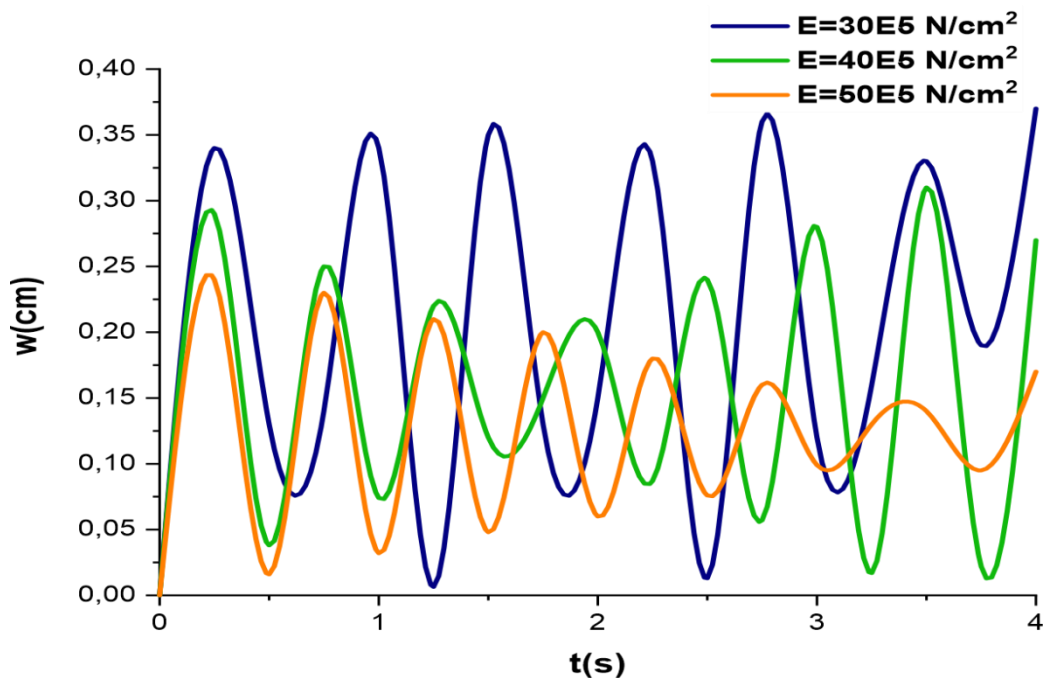


Figure 5.7 : Effet du module de Young sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope

5.3.6.Effet de type de chargement

La figure (5.8) montre la variation de la flèche centrale en fonction du temps avec deux types de chargement différents pour deux types de plaques :

(a) : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement à étape.

(b) : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous un chargement à rampe.

Nous remarquons que dans le cas de la plaque (a) la variation de la flèche centrale est importante par comparaison avec celle de la plaque (b). Un chargement constant a une grande influence sur la réponse dynamique d'une plaque. La charge appliquée prend toujours une valeur initiale qui est constante du temps, contrairement au chargement à rampe qui est divisé en deux intervalles. Le premier varie linéairement avec le temps et le deuxième présente une valeur constante.

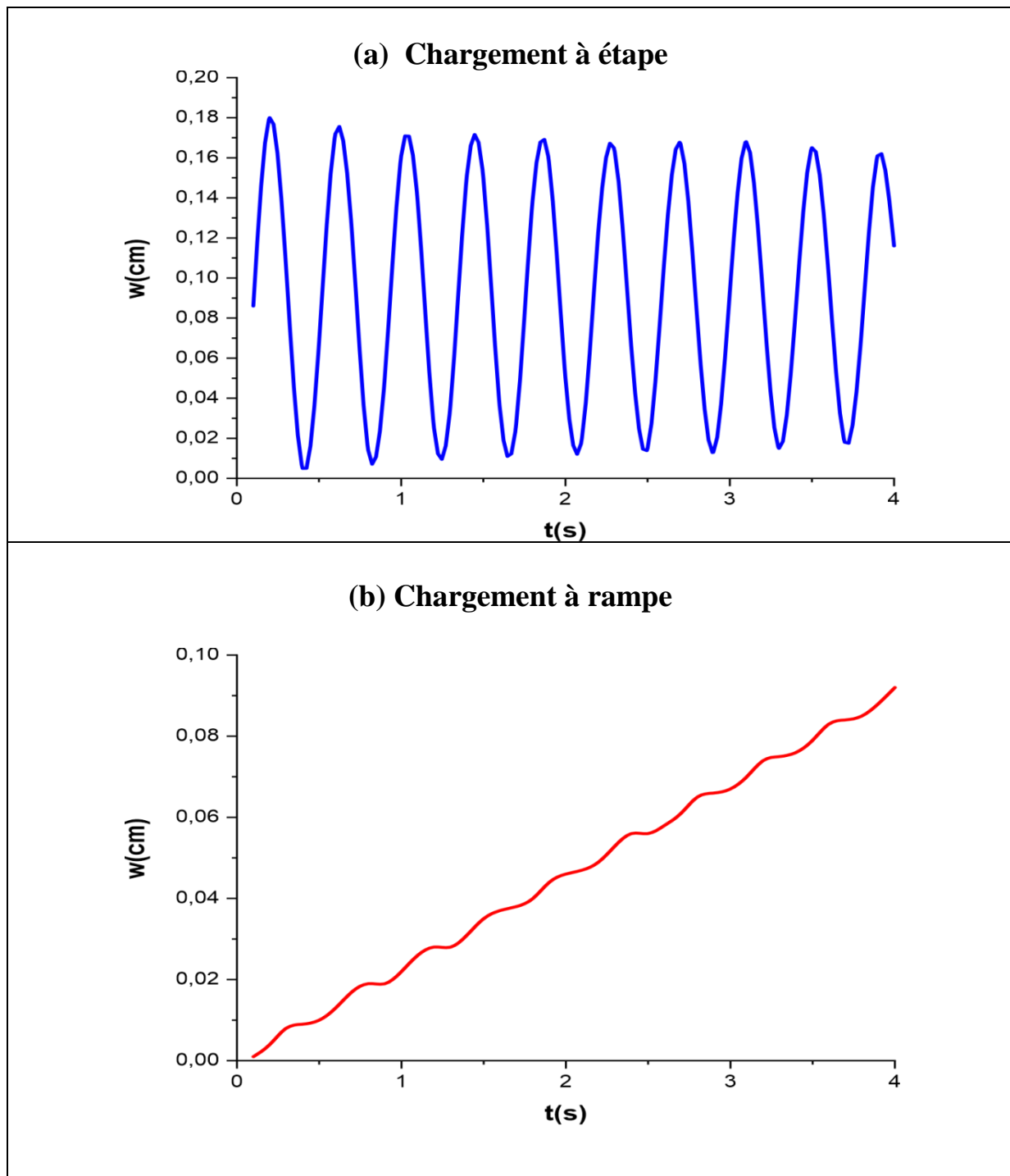


Figure 5.8 : Effet du type de chargement sur la réponse dynamique d'une plaque carrée isotrope

Chapitre 6

Conclusion générale

L'étude du comportement dynamique des plaques est très importante pour leur comportement. Nous pouvons comprendre leur comportement en utilisant des modèles d'éléments finis.

Les résultats de cette étude nous ramène à tirer les conclusions importantes suivantes :

- La théorie des plaques de Reissner-Mindlin est évidente pour la modélisation des plaques isotropes modérément épaisse et l'étude de leur comportement dynamique.
- La convergence monotone et uniforme est vérifiée en augmentant le nombre d'éléments. La convergence est assurée par l'élément quadrilatéral isoparamétrique à huit nœuds utilisés avec les résultats donnés par la solution analytique.
- Les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque ont un effet important sur sa réponse dynamique. La variation de l'amortissement, l'épaisseur, et le module de Young ont un effet inversement proportionnel à la variation de la flèche maximale centrale.
- La géométrie de la plaque joue un rôle important sur son comportement dynamique, le passage d'une plaque carrée à une plaque rectangulaire influe directement sur la flèche. L'augmentation de la longueur cause une augmentation de la flèche.
- Une plaque encastree est plus rigide qu'une plaque simplement appuyée.
- Une plaque soumise à un chargement à rampe est plus rigide qu'une plaque soumise à un chargement à étape.

Les futures perspectives

Les perspectives des études qui peuvent être menées dans le futur sont :

- ✓ Analyse dynamique des plaques anisotropes, à gradient fonctionnel, et composites.
- ✓ Analyse dynamique des plaques avec des formes géométriques arbitraires.
- ✓ Considération des autres types de charges : charges triangulaires, charges triangulaires avec pic...etc.

Références bibliographiques

- [1] **Paultre P.** Dynamique des structures application aux ouvrages de génie civil, Hermes Science, 2005.
- [2] **Lattari Kamel**, mémoire de Magister, Analyse par éléments finis de la réponse dynamique des plaques minces en utilisant les méthodes de superposition modales et d'intégration implicite de Wilson- θ , Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2013.
- [3] **Timoshenko, S.P., and Gere, J.M.,** (1961). Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill.
- [4] **Dickinson, S.M., and Di, Blasio, A.,** (1986). On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method for the study of the exural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates. Journal of Sound and Vibration 108, 51–62.
- [5] **Mizusawa, T., and Leonard J.W.,** (1990). Vibration and buckling of plates with mixed boundary conditions. Engineering Structures 12, 285–290.
- [6] **Leissa, A.W.,** (1969). Vibration of Plates. NASA SP -169 Washington, D.C.: Office of Technology Utilization.
- [7] **Leissa, A.W.,** (1977). Recent research in plate vibrations: classical theory. The Shock and Vibration Digest 9(10), 13–24.
- [8] **Leissa, A.W.,** (1977). Recent research in plate vibrations: complicating effects. The Shock and Vibration Digest 9(11), 21–35.
- [9] **Leissa, A.W.,** (1981). Plate vibration research, 1976–1980: classical theory. The Shock and Vibration Digest 13(9), 11–22. Leissa, A.W., (1981). Plate vibration research, 1976–1980: complicating effects. The Shock and Vibration Digest 13(10), 19–36.
- [10] **Leissa, A.W.,** (1987). Recent research in plate vibrations, 1981–1985, Part II: complicating effects. The Shock and Vibration Digest 19(3), 10–24.

- [11] **Mindlin, R.D.**, (1951). Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 18, 31–38.
- [12] **Srinivas, S., and Rao, A.K.**, (1970). Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. International Journal of Solids and Structures 6, 1463–1481.
- [13] **Nanni, J.**, (1971). Das eulersche knickproblem unter berucksichtigung der querkrafte. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik 22, 156–185.
- [14] **Dhatt G.& Touzout G.** Une présentation de la méthode des éléments finis. Deuxième Edition, Maloine S. A., Paris 1984.
- [15] **Rao S.S.** The finite Element in Engineering. Second Edition Oxford : Pergamon Press Edition, 1989.
- [16] **Augustus Edward Hough Love** (17 April 1863 – 5 June 1940).
- [17] **Gustav Kirchoff** (12 March 1824 – 17 October 1887).
- [18] **K.M.Liew.C.M.Wang.Y.Xiang.** Vibration of Mindlin plate-programming the p-version Ritz method ,
- [19] **Dr. Imre Bojtár** COMPUTER PROGRAM FOR THE CALCULATION OF MINDLIN PLATES, BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS.
- [20] **Raymond David Mindlin** (17 Septembre 1906-22 Novembre 1987).
- [21] **Eric Reissner** (5 Janvier 1913- 1^{er} Novembre 1996).
- [22] **Houmat A.** FEM for Plates and Shells (Finite Element Method) Part 1.
- [23] **Houmat A.** Cours « méthode des éléments finis ».
- [24] **Houmat A.** Cours « Gaussian quadrature ».
- [25] **Houmat A.** Cours « Réponse dynamique ».

[26] **GOUDJIL FAYÇAL**, Mémoire de Magister, Analyse de la réponse dynamique des plaques orthotropes par la méthode des éléments, Université Mentouri Constantine 2004.

[27] **Duong, V.A., (2008)**, thèse de doctorat, Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites. École nationale des ponts et chaussées, France.

[28] **Houmat A.** Cours « dynamique des structures ».

[29] **Michel Cazenave**, Méthode des éléments finis, Approche pratique en mécanique des structures, 2e Edition.

[30] **Eugenio Oñate**, Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics, Vol. 2 Beams, Plates and Shells.