REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
NISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à

FACULTÉ DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention de grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité:
Géométrie Différentielle

Par

M. KADI FATIMA ZOHRA

Sur le thème

Variétés de contacts complexes

Soutenue publiquement le 23/06/2021 devant le jury composé de :

M. MESSIRDI Miloud	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M. BELKHALFA Mohamed	Professeur	Université de Mascara	Directeur de thèse
M. BENALILI Mohamed	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
M. DJAA Mustapha	Professeur	Centre universitaire Relizane	Examinateur
M. MALIKI Youcef	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examinateur
M. SOUICI-BENHAMADI Zoubida	Maître de Conférences A	Université de Annaba	Examinateur
M.WADE Aissa	Professeur	Université de Pennsylvanie USA	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse M^{r} BELKHELFA Mohamed pour sa générosité et son aide inconditionnelle sans oublier sa patience pendant toutes ces années.

J'adresse mes sincères remerciements au professeur M^{r} MESSIRDI Miloud d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également M^{r} BENALILI Mohamed, M^{r} MALIKI Youssef, M^{me} SOUICI-BENHAMADI Zoubida et M^{me} WADE Aissa pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'examiner cette thèse.

Je remercie en particulier M^{r} DJAA Mustapha pour avoir accepté de juger ce travail et pour son précieux aide durant les années de mon magister à l'université de Saïda, je lui suis très reconnaissante.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre tout au long de ma démarche.

Merci beaucoup.

Table des matières

Introduction

Une variété complexe (M, J), de dimension complexe $2n+1$ est dite variété complexe de contact s'il existe un recouvrement ouvert $\{\mathcal{O}_i\}$ de M tel que

1. Sur chaque $\mathcal{O}_i$, il existe une 1-forme holomorphe θ_i telle que, en tout point,

$$\theta_i \wedge (d\theta_i)^n \neq 0,$$

2. Si $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$, alors il existe une fonction holomorphe λ_{ij} non nulle sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ telle que $\theta_i = \lambda_{ij}\theta_j$ *sur* $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

La théorie des variétés complexes de contact est presque aussi ancienne que la théorie moderne de la géométrie de contact réelle. Elle a commencé avec les articles de S. Kobayashi [35] et W. M. Boothby [11, 12], mais elle n'a pas reçu autant d'attention que la théorie de la géométrie de contact réelle. En 1965, dans [48], J. A. Wolf a étudié les variétés complexes de contact homogènes et leur relation avec les quaternions symétriques. Récemment, B. Foreman a défini des structures métriques de contact complexes et il a montré l'existence de telles structures dans sa thèse [24], ainsi il a donné des exemples intéressants des variétés complexes de contact avec des formes de contact globales [25]. Dans [32, 33, 34], S. Ishihara et M. Konishi ont développé la théorie Riemannienne des variétés complexes de contact. Cependant, leur notion de normalité telle qu'elle apparaît dans [33] semble trop forte puisqu'elle oblige la structure d'être de Kähler et n'inclut pas certains exemples naturels comme le groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$. Cela a conduit B. Korkmaz à définir une version plus faible de la normalité dans [39], incluant ces exemples ainsi que les espaces projectifs complexes de dimension impaire $\mathbb{C}P^{2n+1}$ et c'est la notion de normalité que nous utilisons ici.

En 2003, B. Korkmaz a poursuivi son étude de la courbure des variétés complexes métriques de contact et des déformations $\mathcal{H}$-homothétiques, en particulier, elle a développé une théorie des espaces complexes de (κ, μ)-contact, qui sont des espaces analogues à celle du cas réel [40].

Dans cette thèse nous nous intéressons aux propriétés symétriques des variétés complexes de contact, à savoir, la Ricci-symétrie, la Ricci-semi-symétrie et la Ricci-pseudo-symétrie. Les variétés complexes de contact normales et les variétés complexes de (κ, μ)-contact localement symétriques sont étudiées par D. Blair et A. Mihai [8, 9].

D'après Schouten, la courbure d'une variété Riemannienne M peut être définie comme la mesure de second ordre pour le changement de direction après le transport parallèle d'un vecteur autour d'une courbe fermée infinitésimale. Les espaces dont les directions sont préservées après un transport parallèle autour de chaque courbe fermée sont localement plats, c'est-à-dire qu'elle a $R = 0$. Les variétés non plates les plus simples sont les espaces à courbure constante. Comme généralisation des espaces à courbure constante, Cartan [15] a introduit les espaces localement symétriques, caractérisés par la condition $\nabla R = 0$, c'est-à-dire par un tenseur de courbure parallèle. La condition d'intégrabilité de $\nabla R = 0$ est $R.R = 0$ et donc chaque espace symétrique satisfait $R.R = 0$, mais l'inverse n'est pas vrai et les espaces pour lesquels $R.R = 0$, en tout, point ont été appelés semi-symétriques par Szabó [44]. Les espaces les plus simples pour lesquels le tenseur $R.R$ de type courbure $(0, 6)$ n'est pas identique à zéro sont les espaces pseudo-symétriques au sens de R. Deszcz, qui se caractérisent par la condition $R.R = LQ(g, R)$, où L est une fonction réelle sur M et $Q(g, R)$ est le tenseur Tachibana de M. Alors ces espaces pseudo-symétriques sont des généralisations des espaces à courbure constante. Dans [28], S. Haesen, L. Verstraelen ont donné une interprétation géométrique du tenseur $R.R$ en montrant que ce $(0, 6)$- tenseur mesure le changement de deuxième ordre de la courbure sectionnelle après le transport parallèle d'un plan autour de chaque parallélogramme infinitésimal dans M. De même, R. Deszcz [18] a introduit la notion de la Ricci-pseudo-symétrie. Dans [10], B. Jahanaraa

et coauteurs ont donné une interprétation géométrique du tenseur $R.\rho$.
L'objectif est d'étudier la pseudo-symétrie au sens de R. Deszcz des variétés complexes de contact. Le travail est constitué de cinq chapitres :
Dans le premier chapitre nous avons tenu à rappeler les définitions et théorèmes fondamentaux concernant les variétés différentiables et en particulier les variétés Riemanniennes. Le second chapitre est consacré à la pseudo-symétrie au sens de R. Deszcz et sa interprétation géométrique. Dans le troisième chapitre, on donne un aperçu sur les différentes structures : la structure complexe, la structure presque complexe, la structure Hermitienne et la structure de Kähler. Le quatrième chapitre est consacré à la structure complexe de contact, la normalité, la courbure GH-sectionnelle, les variétés complexes de contact à courbure constante et les variétés complexes de (κ, μ)-contact. Dans le dernier chapitre nous présentons les résultats obtenus après l'étude des propriétés symétriques des variétés complexes de contact normales et les variétés complexes de (κ, μ)-contact.

Chapitre 1

Variété Riemannienne

Dans ce chapitre on rappelle les définitions et les propriétés générales des variétés différentiables et en particulier les variétés Riemanniennes que nous utiliserons dans la suite. Les références utilisées [23, 26, 36, 49]

1.1 Variété différentiable

Une variété différentiable M de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection d'homéomorphismes

$$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$$

appelées cartes avec $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M et les V_i des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour chaque j et i le changement de cartes

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \to \varphi_j(U_j \cap U_i)$$

soit un difféomorphisme de classe C^∞. L'ensemble $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est dit atlas différentiable. Deux atlas différentiables $\{(U_i, \varphi_i)\}$ et $\{(U'_j, \varphi'_j)\}$ sont équivalents si, pour tout $U_i \cap U'_j \neq \emptyset$, les applications $\varphi_i \circ \varphi'^{-1}_j : \varphi'_j(U_i \cap U'_j) \to \varphi_i(U_i \cap U'_j)$ sont des difféomorphismes.

Au voisinage d'un point p de M, une carte (U, φ) sera notée $(U, x^1, \ldots, x^n)$.

Application différentiable

Les variétés différentiables sont supposées paracompacts.

Définition 1.1.1. Soient $(M^m,\mathcal{U}_M), (N^n,\mathcal{U}_N)$ deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application $f : M \to N$ est dite différentiable de classe C^k (resp. C^∞) en $x \in M$ s'il existe une carte (U, φ) de $\mathcal{U}_M$ qui contient x et une carte (V, ϕ) de $\mathcal{U}_N$ qui contient $f(x)$ telles que l'application

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V)$$

soit de classe C^k (resp. C^∞) en $\varphi(x)$.
Si f est différentiable en tout point de M on dit alors que f est différentiable sur M.

1.1.1 L'espace tangent

Définition 1.1.2. Soient M^n une variété différentiable de dimension n et x un point de M. Une courbe passant par x est une application γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient 0 dans M tel que $\gamma(0) = x$. L'ensemble des courbes passant par un point x de M est noté $\mathcal{K}_x$

On définit sur $\mathcal{K}_x$ une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par :

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_x; \quad \gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U, \varphi) \in \mathcal{U}_M; \quad (x \in U) \quad et \quad \frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(0),$$

$\mathcal{R}$ est indépendante du choix de la carte. L'ensemble quotient $(\mathcal{K}_x)/\mathcal{R} = T_xM$ est appelé *espace tangent* à M en x. Un élément $\dot{\gamma}(0)$ de T_xM est dit *vecteur tangent* à M en x.

Remarque 1.1.1.

1. Un vecteur tangent agit comme dérivation sur le germe des fonctions $C^\infty(M)$ sur M.
2. L'espace tangent T_xM en x admet une structure d'espace vectoriel réel de dimension n. Pour une carte locale $\{U, x^1, \ldots, x^n\}$ en x, on note par $(\frac{\partial}{\partial x^1}\mid_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\mid_x)$ la base de T_xM.

3. L'ensemble $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$ est appelé le fibré tangent à M. TM admet la structure d'une variété différentiable de dimension $2n$. Un élément de TM est un couple (x, X_x) où X_x est un vecteur tangent à M en x.
4. En tout point x de M, T_xM est un espace vectoriel, on note T_x^*M son dual. T_x^*M est appelé l'espace cotangent à M en x. Localement, on note par $\{dx^1 |_x, \ldots, dx^n |_x\}$ la base duale de la base précédente.
5. L'ensemble $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ est appelé le fibré cotangent, ce dernier admet la structure d'une variété différentiable de dimension $2n$. Un élément de T^*M est un couple (x, ω_x) où ω_x est une forme linéaire sur T_xM.
6. La projection canonique $\pi : TM \to M$ (resp. $\overline{\pi} : T^*M \to M$) est donnée par $\pi(x, X_x) = x$ (resp. $\overline{\pi}(x, \omega_x) = x$).

1.1.2 Champ de vecteurs et forme différentielle

Définition 1.1.3. Soit M une variété différentiable de dimension n. Une section sur M est une application $X : M \to TM$ (resp. $\omega : M \to T^*M$) telle que $\pi \circ X = id_M$ (resp. $\overline{\pi} \circ \omega = id_M$). Un champ de vecteurs X (resp. une forme différentielle ω) sur M est une section de classe C^∞. L'ensemble des champs de vecteurs (resp. des formes différentielles) sur M est noté $\Gamma(TM)$ ou $\mathfrak{X}(M)$ (resp. $\Omega^1(M)$).

Crochet de Lie

Définition 1.1.4. Soient M une variété différentiable de dimension n et X, Y deux champs de vecteurs sur M. Le crochet de Lie de X, Y est le champ de vecteurs $[X, Y]$ donné par :

$$\begin{array}{rccc} [X,Y]: & C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ & f & \to & X(Y(f)) - Y(X(f)). \end{array}$$

Propriétés 1.1.1. *Le crochet de Lie sur une variété différentiable M admet les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, $[X, Y] = -[Y, X]$.*

2. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[fX, gY] = f.g[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

3. Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \quad \textit{(identité de Jacobi).}$$

1.2 Tenseur sur une variété différentiable

Définition 1.2.1. Soit x un point de M, on définit l'espace vectoriel réel

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{pfois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{qfois}$$

de dimension n^{p+q}. Au voisinage de x, dans un système de coordonnées (x^i), la base de $T_x^{(p,q)}M$ est donnée par $\{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}_{|x} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}_{|x} \otimes dx^{j_1}_{|x} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}_{|x}\}_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_q \leq n}}$.

Un élément de $T_x^{(p,q)}M$ est dit tenseur de type (p,q), alors un tenseur T de type (p,q) s'écrit sous la forme

$$T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}_{|x} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}_{|x} \otimes dx^{j_1}_{|x} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}_{|x} \quad \text{où} \quad T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.1.

- L'ensemble $\mathbf{T}(x) = \bigoplus_{p,q} T_x^{(p,q)}M$ muni du produit tensoriel admet la structure d'une algèbre appelé algèbre tensorielle.
- On considère la variété différentiable

$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)}M$$

$T^{(p,q)}M$ est dit fibré des tenseurs de type (p,q). Une section de classe C^∞ de ce fibré est appelé champ de tenseurs de type (p,q). L'ensemble des champs de tenseurs de type (p,q) est noté $\mathfrak{T}^{(p,q)}(M)$.

- On note par $\mathfrak{T}(M) = \bigoplus_{p,q} \mathfrak{T}^{(p,q)}(M)$ l'algèbre tensorielle des champs de tenseurs.

1.2.1 Connexion linéaire

Définition 1.2.2. Soit M une variété différentiable de dimension n. Une connexion linéaire (ou dérivée covariante des champs de vecteurs) est une application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

telle que,

1. Pour tous $X_1, X_2, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$;

$$\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y.$$

2. Pour tous $X, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$;

$$\nabla_X (fY_1 + Y_2) = f\nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 + X(f)Y_1.$$

Au voisinage de x, dans un système de coordonnées (x^i), on a pour tous i, j,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{où} \quad \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M),$$

les Γ_{ij}^k sont appelés *les symboles de Christoffel*.
Si $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, relativement à une carte $(U, x^1, \dots, x^n)$, alors

$$\nabla_X Y = X^i \left[\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{(Convention d'Einstein).}$$

Une connexion linéaire est dite :

1. Symétrique si $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.
2. Plate si $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Extension de la définition de la dérivée covariante

Soit M une variété différentiable de dimension n et X un champ de vecteurs sur M. ∇_X peut se prolonger à une application linéaire de l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}(M)$ sur M telle que (voir [49])

1. ∇_X est une dérivation sur l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}(M)$.
2. ∇_X preserve le type de tenseur.
3. ∇_X commute avec les contractions des tenseurs.

En tout champ de tenseurs T de type (k,l) on lui associé un champ de tenseurs (∇T) de type $(k,l+1)$ tel que (voir [36])

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1,\ldots,X_k) = \nabla_X T(X_1,\ldots,X_k) - T(\nabla_X X_1,\ldots,X_k)\\ - \ldots - T(X_1,\ldots,\nabla_X X_k)\end{aligned}$$

pour tous $X, X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.2.3. Un champ de tenseurs T est dit parallèle si $\nabla T = 0$.

1.3 Métrique Riemannienne

Définition 1.3.1. Soit M une variété différentiable de dimension n. Une métrique Riemannienne sur M est un champ de tenseurs de type $(0,2)$ tel que pour tout point x de M l'application

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

soit une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.
Une variété différentiable M munie d'une métrique Riemannienne g est dite variété Riemannienne.

Remarque 1.3.1. Toute variété Différentiable admet une métrique Riemannienne.

1.3.1 Connexion de Levi-Civita

Théorème 1.3.1. *Sur toute variété Riemannienne (M,g) il existe une unique connexion ∇ telle que*

1. ∇ est symétrique.

2. *∇ est compatible avec la métrique ($\nabla g = 0$), c'est à dire,*

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \qquad Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Définition 1.3.2. La connexion ∇ obtenue s'appelle la connexion de Levi-Civita ou la connexion Riemannienne.

Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l})$$

où $(g_{ij})_{ij}$ est la matrice de la métrique Riemannienne et $(g^{kl})_{kl}$ est la matrice inverse de la matrice $(g_{ij})_{ij}$.

1.3.2 La dérivée covariante

Définition 1.3.3. Soient M une variété différentiable de dimension n et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe de classe C^∞. On appelle champ de vecteurs le long de γ une section

$$\begin{array}{rccc} X: & I \subset \mathbb{R} & \to & M \\ & t & \to & X_{\gamma(t)} \end{array}.$$

Soit $t \in I$, relativement à une carte locale (U, φ) au voisinage de $\gamma(t)$, on a $X(t) = X^i(t)\partial_{i|_{\gamma(t)}}$.

On noté Γ_γ l'ensemble des champs de vecteurs le long de γ.

Pour tous $X, Y \in \Gamma_\gamma$ et $f, h \in C^\infty(I)$, $fX + hY$ est un nouveau champ de vecteurs le long de γ.

Si ∇ est une connexion linéaire sur M et $\gamma : I \to M$ est une courbe de classe C^∞ alors pour tous $X \in \Gamma_\gamma$, $\nabla_{\dot\gamma(t)} X \in \Gamma_\gamma$.

Définition 1.3.4. Le champ de vecteurs $\nabla_{\dot\gamma(t)} X$ est appelé la dérivée covariante de X le long de γ. On le note par $\nabla_t X$ ou $\dfrac{D}{dt}X$.

Soit $t \in I$, relativement à une carte locale (U, φ) au voisinage de $\gamma(t)$, si $X(t) = X^i(t)\partial_{i|_{\gamma(t)}}$ et $\varphi \circ \gamma(t) = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ alors la dérivée covariante de X le long de γ au point t est donnée par :

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{X^j(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i(t)}{dt} X^j(t) \right] \partial_{k|_{\gamma(t)}}$$

Lemme 1.3.2. *La dérivée covariante ∇_t vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\nabla_t(X_1 + X_2) = \nabla_t X_1 + \nabla_t X_2$.
2. $\nabla_t(fX) = \dfrac{df}{dt} X + f\nabla_t X$
   De plus, si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique Riemannienne g alors
3. $\dfrac{d}{dt} g(X_1, X_2) = g(\nabla_t X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_t X_2)$.

Définition 1.3.5. Un champ de vecteurs X le long de γ est dit parallèle si $\nabla_t X \equiv 0$.

Proposition 1.3.3. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe de classe C^∞ dans M. Si $t_0 \in I$ et $v \in T_{\gamma(t_0)}(M)$ localement il existe un unique champ de vecteurs parallèle $X \in \Gamma_\gamma$ tel que $X(t_0) = v$.*

1.3.3 Tenseur de torsion

Définition 1.3.6. Soit M une variété différentiable de dimension n et soit ∇ une connexion linéaire sur M. La torsion de ∇ est le champ de tenseurs de type $(1, 2)$ donné par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Remarque 1.3.2.

1. La connexion ∇ est symétrique si et seulement si elle est sans torsion c'est à dire $T = 0$.
2. Toute connexion ∇ localement plate est sans torsion.
3. La connexion de Levi-Civita est sans torsion.

1.3.4 La courbure Riemannienne

Définition 1.3.7. Soit M une variété différentiable de dimension n et soit ∇ une connexion linéaire sur M. Le champ de tenseur R de type $(1,3)$ défini par

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

est dit tenseur de courbure associé à la connexion ∇.

Propriétés 1.3.1. *Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^{\infty}(M)$ on a*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.
2. $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$.

Si ∇ est la connexion de Levi-Civita sur (M,g) alors R est dite *courbure de Riemann.*

Une courbure de Riemann peut être considéré comme le champ de tenseurs de type $(0,4)$ donné par

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) \qquad \forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM).$$

Propriétés 1.3.2. *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Pour tous $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$, le tenseur de courbure de Riemann vérifie les propriétés suivantes*

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$,
2. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$,
3. *L'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

4. *L'identité de Bianchi différentielle*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

1.3.5 Courbure sectionnelle

Définition 1.3.8. Soient x un point d'une variété Riemannienne (M^n, g) $(n \geq 2)$ et P le 2-plan engendré par les vecteurs X et Y de T_xM. On appelle courbure sectionnelle de P en x le scalaire

$$K_x(P) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

Cette définition est indépendante du choix de la base.

La courbure sectionnelle détermine la courbure de la variété.

Définition 1.3.9. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. On dit que M est une variété à courbure constante si en tout point x de M la courbure sectionnelle est constante sur chaque 2-plan section de T_xM.

Théorème 1.3.4. ***(Schur)*** *Soit (M, g) une variété Riemannienne connexe de dimension $n (n \geq 3)$. Si pour chaque 2-plan P de T_xM la courbure sectionnelle $K(P)$ ne dépend que du point x alors M est une variété à courbure constante.*

Si la variété (M, g) est à courbure constante $(= k)$ alors sa courbure Riemannienne est donnée par

$$R(X,Y,Z,W) = k\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right].$$

1.3.6 Courbure de Ricci

Définition 1.3.10. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. La courbure de Ricci est un tenseur de type $(0,2)$ défini par

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X, Y, e_i).$$

Le tenseur de Ricci ou l'opérateur de Ricci est le tenseur de type $(1,1)$ défini par

$$QX = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, où $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ est une base orthonormée locale sur M.

Remarque 1.3.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n.

1. La courbure de Ricci ρ est symétrique.
2. L'opérateur de Ricci Q est symétrique (auto-adjoint).

Courbure scalaire

Définition 1.3.11. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. On appelle courbure scalaire de M la fonction définie par

$$s = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i).$$

où $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ est une base orthonormée locale sur M.

Propriétés 1.3.3. *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne à courbure constante k, alors pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

1. $QX = k(n-1)X,$
2. $\rho(X, Y) = k(n-1)g(X, Y),$
3. $s = kn(n-1).$

Chapitre 2

La pseudo-symétrie et la Ricci-pseudo-symétrie

Dans ce chapitre on donne la définition de la pseudo-symétrie et la Ricci-pseudo-symétrie au sens de R. Deszcz et leurs interprétations géométriques. Les références souvent utilisées [10, 17, 18, 19, 20, 21, 28, 29].

2.1 La pseudo-symétrie

Soient (M, g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g. Soit K un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ alors d'après S. Kobayashi, K. Nomizu [36], en tout point x de M, K_x est un endomorphisme linéaire de l'espace tangent T_xM qui se prolonge à une dérivation sur l'algèbre tensorielle $\mathbf{T}(x)$ tel que $\forall T \in \mathfrak{T}(M)$

$$(K.T)_x = K_x.T_x.$$

Ainsi que K est une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$ admet les propriétés suivantes :

1. Pour tout champ de tenseurs T de type $(0, k)$, $K.T$ est un champ de tenseurs de type $(0, k+2)$ donné par :

$$(K.T)\,(X_1,\ldots,X_k) = -T\,(KX_1,\ldots,X_k) - \ldots - T(X_1,\ldots,KX_k)$$

pour tous $X_1,\ldots,X_k \in \mathfrak{X}\,(M)$

2. Pour toute fonction f, $K.f = 0$.
3. K commute avec les contractions.

Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M. $R\,(X,Y)$ et $X \wedge Y$ sont les champs de tenseurs de type $(1,1)$ donnés par

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{2.1.1}$$

et

$$(X \wedge_g Y)\,Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{2.1.2}$$

alors d'après ce qui précède, ils déterminent des dérivations sur l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}\,(M)$ de M.
À la courbure Riemannienne R de type $(0,4)$ on lui associé le champ de tenseurs $R.R$ et le champ de tenseurs de Riemann-Tachibana $Q\,(g,R)$ de type $(0,6)$ donnés

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= (R(X,Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &= -R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\ &- R(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= ((X \wedge_g Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &= -R((X \wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,(X \wedge_g Y)X_2,X_3,X_4)\\ &- R((X_1,X_2,(X \wedge_g Y)X_3,X_4) - R((X_1,X_2,X_3,(X \wedge_g Y)X_4)\end{aligned}$$

pour tous $X,Y,X_1,X_2,X_3,X_4 \in \mathfrak{X}(M)$.

Définition 2.1.1. [44] Soit (M,g) une variété Riemannienne. M est dite semi-symétrique si $R.R = 0$.

Évidemment, les espaces localement symétriques $(\nabla R = 0)$ sont semi-symétriques.

Définition 2.1.2. [19] Soit (M, g) une variété Riemannienne. M est dite pseudo-symétrique si $R.R$ et $Q\,(g, R)$ sont linéairement dépendants, c'est à dire ; s'il existe une fonction L_R sur M telle que la relation

$$R.R = L_R Q(g, R) \tag{2.1.3}$$

soit vérifiée sur $U_R = \{x \in M / R_x - \frac{s}{n(n-1)} G_x \neq 0\}$, où s est la courbure scalaire et G est le champ de tenseurs de type $(0, 4)$ défini par

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(X_1, X_4)g(X_2, X_3) - g(X_1, X_3)g(X_2, X_4).$$

Remarque 2.1.1.

1- Si L_R est constante on dit que la pseudo-symétrie est de type constant et on dit qu'elle est propre si $L_R \neq 0$. Les espaces d'Atri de dimension 3 et les variétés de Sasaki à courbure constante sont des modèles d'espaces pseudo-symétriques de type constant [2, 3].

2- Toute variété semi-symétrique est pseudo-symétrique dont la fonction L_R est nulle, l'inverse n'est pas toujours vrai. Les espaces $\mathbb{R}^3(-3)$ et $\mathbb{H}_3(-3)$ sont des espaces proprement pseudo symétriques [2, 3].

2.2 La Ricci-pseudo-symétrie

Définition 2.2.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne. M est dite Ricci-semi-symétrique si le tenseur de courbure de Ricci ρ vérifie la relation suivante

$$R.\rho = 0 \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.2. [18] Soit (M, g) une variété Riemannienne. M est dite Ricci-pseudo-symétrique si $R.\rho$ et $Q\,(g, \rho)$ sont linéairement dépendants, c'est à dire ; s'il existe une fonction L_ρ sur M telle que la relation

$$R.\rho = L_\rho Q\,(g, \rho) \tag{2.2.2}$$

soit vérifiée sur $\mathcal{U}_\rho = \{x \in M / \rho - \frac{s}{n} g \neq 0 \quad en\ x\}$.

Remarque 2.2.1.

1. Toute variété Ricci-semi-symétrique est Ricci-pseudo-symétrique, l'inverse n'est pas toujours vrai. Dans [18], R. Deszcz a donné des exemples des variétés proprement Ricci-pseudo-symétriques. Le produit tordu d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par une variété d'Einstein M de dimension≥ 3 est une variété Ricci-pseudo-symétrique non Ricci-semi-symétrique.
2. Toute variété pseudo-symétrique est Ricci-pseudo-symétrique, l'inverse n'est pas toujours vrai. Dans le cas des variétés conformément plates, la notion de la pseudo-symétrie et la Ricci-pseudo-symétrie coïncident. Sur ces espaces, l'étude de la pseudo-symétrie revient à l'étude des propriétés de la courbure de Ricci[16].

2.3 Interprétations géométriques

Le parallélogramme de Levi-Civita

Soient (M, g) une variété (semi-)Riemannienne et p un point de M. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tangents à M en p. On considère la géodésique α passant par p tangent à $\vec{u}$ et soit q un point sur α à une distance infinitésimale A de p. On note par $\vec{\overline{v}}$ le vecteur obtenu par le transport parallèle de $\vec{v}$ le long de α de p à q. On considère la géodésique β_p (resp. β_q) passant par p (resp. q) et tangente à $\vec{v}$ (resp. $\vec{\overline{v}}$). Soit $\overline{p}$ (resp. $\overline{q}$) un point sur β_p (resp. β_q) d'une distance infinitésimale B de p (resp. q).
Le parallélogramme de sommet p, dont les côtés sont tangents aux $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est complété par une géodésique $\overline{\alpha}$ passant par $\overline{p}$ et $\overline{q}$. Soit A' la distance géodésique entre $\overline{p}$ et $\overline{q}$ (Figure 2.1). Levi-Civita a montré, à une première approximation, que la courbure sectionnelle du plan $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ s'exprime par

$$K(p, \pi) = \frac{A^2 - A'^2}{(ABsin\psi)^2} \tag{2.3.1}$$

avec ψ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

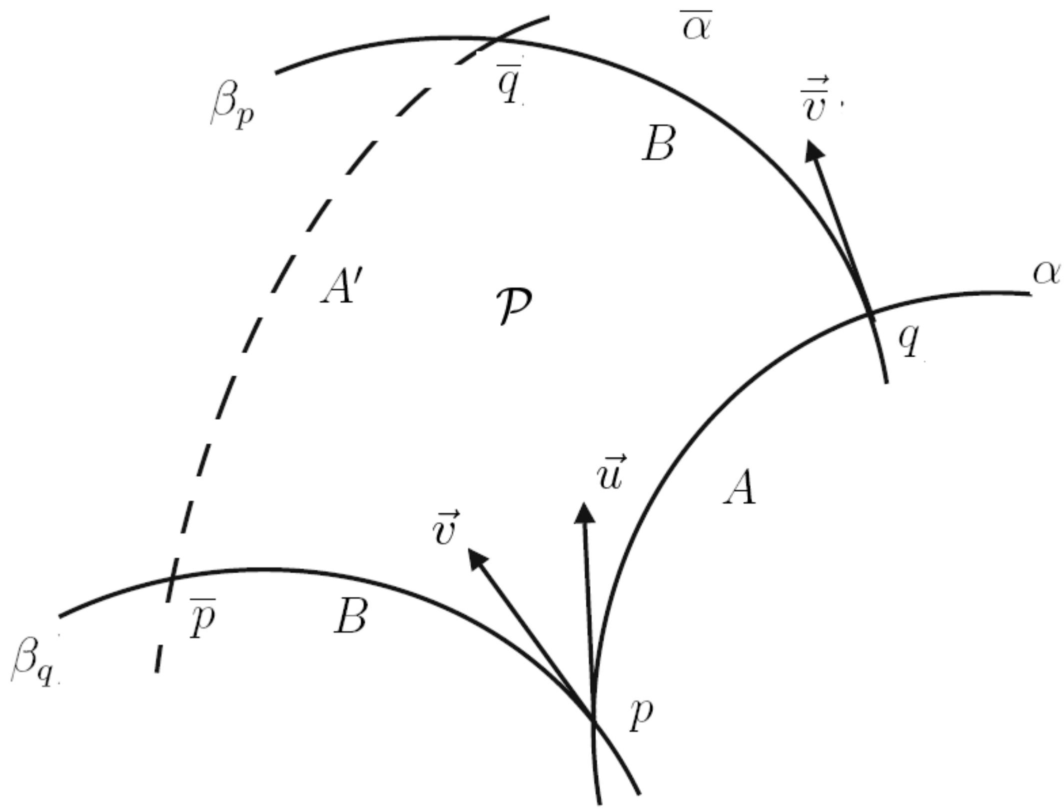

FIGURE 2.1 – Le parallélogramme de Levi-Civita

Interprétation géométrique de l'opérateur de Riemann R

Soient p un point d'une variété Riemannienne (M^n, g) et $(x^k)_{1\leq k\leq n}$ un système de coordonnées locales au voisinage de p. On pose $x = x^h$ et $y = x^l$, en gardant toutes les autres coordonnées autour de $p = (x^1, \ldots, x^{h-1}, x, x^{h+1}, \ldots, x^{k-1}, y, x^{k+1}, \ldots, x^n)$ fixes. On note par $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$) le vecteur $\frac{\partial}{\partial x^l}(p)$ (resp. $\frac{\partial}{\partial x^l}(p)$). Par une variation arbitraire infinitésimal Δx et Δy de x et y respectivement, on construit un parallélogramme $\mathcal{P}$, de sommet p avec des côtés de longueurs Δx et Δy tangents à $\vec{x}$ et $\vec{y}$ respectivement.

Soit z un vecteur tangent à M en p. Le transport parallèle de z autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$, de sommet p avec des côtés de longueurs Δx et Δy tangents à $\vec{x}$ et $\vec{y}$, donne le vecteur (Figure 2.2)

$$\vec{z}^{\star} = \vec{z} + [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y),$$

alors l'opérateur de courbure R mesure, en second ordre, le changement du vecteur z après se transporté parallèlement autour de $\mathcal{P}$ [28].

Proposition 2.3.1. *[29](**Schouten**) L'opérateur de Riemann R d'une variété Riemannienne (M, g) en un point p, mesure le changement de direction après le transport parallèle autour d'un parallélogramme infinitésimal de sommet p.*

Théorème 2.3.2. *[29] Les variétés Riemanniennes localement plates ($R \equiv 0$), sont précisément les variétés Riemanniennes pour lesquels toutes les directions sont invariantes sous leurs transports parallèles entièrement autour de toutes les parallélogrammes infinitésimals.*

2.3.1 Interprétation géométrique de $R.R$

Soit $\overline{\pi}$ le 2-plan de T_pM engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ($\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$). On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de T_pM linéairement indépendants. Le transport parallèle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

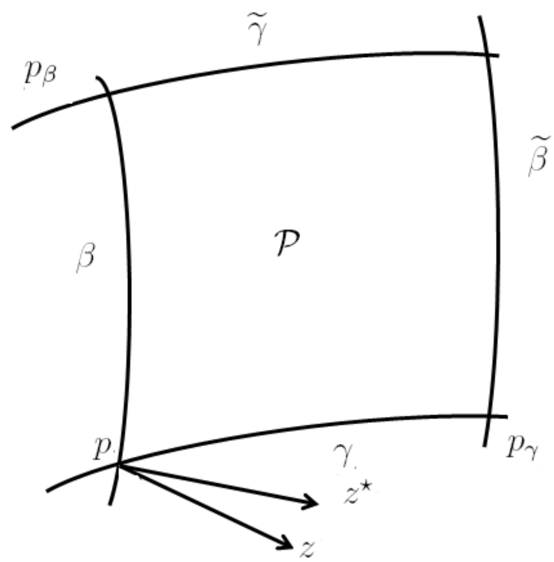

FIGURE 2.2 – Le transport parallèle de z autour de $\mathcal{P}$

autour de $\mathcal{P}$ donne les vecteurs

$$\vec{u}^\star = \vec{u} + [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{u}]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y),$$

$$\vec{v}^\star = \vec{v} + [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{v}]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

alors

$$R(\vec{u}^\star, \vec{v}^\star, \vec{v}^\star, \vec{u}^\star) = R(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}) - [(R.R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthonormés alors, à une approximation de second ordre, on obtient

$$K(p, \pi^\star) = K(p, \pi) + [(R.R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta x \Delta y,$$

où π (resp. $\pi^\star$) est le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}^\star$ et $\vec{v}^\star$)[28].

Théorème 2.3.3. *[28] Soient p un point d'une variété Riemannienne M, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v} \in T_pM$ et $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Soit $\pi^\star = \vec{u}^\star \wedge \vec{v}^\star$ le plan obtenu par le transport parallèle du plan π autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$, de sommet p avec des côtés de*

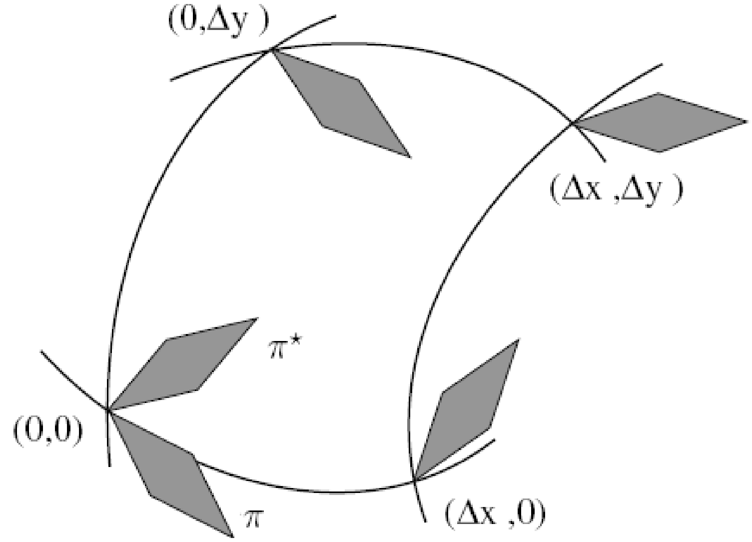

FIGURE 2.3 – L'interprétation géométrique de $R.R$

longueurs Δx et Δy tangents aux x et y respectivement. Alors, à une approximation de seconde ordre,

$$\delta_{\mathcal{P}} K(p, \pi) = (R.R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y}) \Delta x \Delta y, \tag{2.3.2}$$

c'est dire, en tout point p de M, le tenseur $R.R$ de type $(0, 6)$ mesure le changement de la courbure sectionnelle de tout plan π après son transport parallèle autour de tout parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p (Figure 2.3).

Corollaire 2.3.4. *[28]Une variété Riemannienne M est semi-symétrique si et seulement si, en tout point p de M, la fonction $K(p, \pi)$ de la courbure sectionnelle est invariante, en second ordre, sous le transport parallèle de tout plan π autour tout parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p.*

Lemme 2.3.5. *[28] Le tenseur $R.R$ vérifie les propriétés algébrique suivantes :*

1.

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= -(R.R)(X_2, X_1, X_3, X_4; X, Y)\\ &= (R.R)(X_1, X_2, X_4, X_3; X, Y)\\ &= (R.R)(X_3, X_4, X_1, X_2; X, Y).\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

2.

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &+ (R.R)(X_1, X_3, X_4, X_2; X, Y)\\ &+ (R.R)(X_1, X_4, X_2, X_3; X, Y) = 0.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

3.

$$(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -(R.R)(X_2, X_1, X_3, X_4; Y, X). \tag{2.3.5}$$

4.

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &+ (R.R)(X_3, X_4, X, Y; X_1, X_2)\\ &+ (R.R)(X, Y, X_1, X_2; X_3, X_4) = 0.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

2.3.2 Interprétation géométrique de $Q(g, R)$

Soient (M, g) une variété Riemannienne, p un point de M et $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs orthonormés de T_pM. Puisque les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in T_pM$ sont orthonormés, alors on peut choisir des vecteurs $\{\vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ de telle façon que $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ soit une base orthonormée de T_pM. Dans cette base le vecteur $\vec{z}$ de T_pM s'écrit sous la forme

$$\vec{z} = g(\vec{z}, \vec{x})\vec{x} + g(\vec{z}, \vec{y})\vec{y} + \sum_{i=3}^{n} g(\vec{z}, \vec{e}_i)\vec{e}_i.$$

Par une rotation d'angle ε de $(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{z}$ sur le plan $\vec{x} \wedge \vec{y}$, en fixant la projection de z sur le plan de dimension $(n-2)$ engendré par $\{\vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$, on obtient le vecteur

$$\vec{\tilde{z}} = \vec{z} + \varepsilon(\vec{x} \wedge_g \vec{y})z + O(\varepsilon^2),$$

alors le vecteur $(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{z}$ mesure le changement, du premier ordre, du vecteur $\vec{z}$ après une telle rotation infinitésimale de $\vec{z}$ dans le plan $\vec{x} \wedge \vec{y}$ en p.

Soient $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ deux vecteurs obtenus par une rotation infinitésimale d'angle ε de la projection des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur le plan $\vec{x} \wedge \vec{y}$, on a

$$\vec{\widetilde{u}} = u + \varepsilon(\vec{x} \wedge_g \vec{y})u + O(\varepsilon^2), \qquad \vec{\widetilde{v}} = \vec{v} + \varepsilon(\vec{x} \wedge_g \vec{y})v + O(\varepsilon^2),$$

la relation entre la courbure sectionnelle du plan $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et celle du plan $\vec{\widetilde{\pi}} = \vec{\widetilde{u}} \wedge \vec{\widetilde{v}}$, est donnée par l'équation suivante

$$K(p, \widetilde{\pi}) = K(p, \pi) + \varepsilon Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) + O(\varepsilon^2).$$

Alors $Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})$ mesure le changement de la courbure sectionnelle $K(p, \pi)$ sous une rotation infinitésimale en p, sans quitter ce point [28]

2.3.3 La courbure sectionnelle double

Définition 2.3.1. [28] Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n $(n \geq 3)$ à courbure non constante. On note par $\mathcal{U}_R$ l'ensemble des point pour lesquels le tenseur de Tachibana-Riemann soit différent de zéro, c'est à dire ; $\mathcal{U}_R = \{x \in M / Q(g, R)_x \neq 0\}$. Alors, en p de $\mathcal{U}_R$, le plan $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v} \subset T_pM$ est dit dépendant de la courbure par rapport à un plan $\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y} \subset T_pM$ si $Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \neq 0$.

La définition est indépendante du choix des bases de π et $\overline{\pi}$.

Définition 2.3.2. [28]Soit $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ le plan tangent en un point p de $\mathcal{U}_R$ dépendant de la courbure par rapport au $\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$. Alors, on définit la courbure sectionnelle double comme le scalaire

$$L(p, \pi, \overline{\pi}) = \frac{(R.R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})}{Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})}$$

La définition est indépendante du choix des bases de π et $\overline{\pi}$.

On considère, en un point p de M, les deux plans $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$. Soit $\vec{u}^{\star}, \vec{v}^{\star}$ les vecteurs obtenus par le transport parallèle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ dont les côtés sont tangents à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On construit deux parallélogrammes à partir des vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{u}^\star, \vec{v}^\star\}$ respectivement, dont les côtés sont égaux à A et B. En général, les longueurs des géodésiques de fermeture A' et $A'^\star$ sont différents. Plus précisément, en utilisant les expressions (2.3.1) et (2.3.2), en second ordre par rapport aux côtés Δx et Δy du parallélogramme, on trouve

$$L(p, \pi, \overline{\pi}) = \frac{A'^2 - A'^{\star 2}}{(ABsin\psi)^2 Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}$$

Le scalaire $L(p, \pi, \overline{\pi})$ mesure la différence de longueur entre les géodésiques de fermeture de deux parallélogrammes qui sont liés au transport parallèle de leurs vecteurs générateurs autour d'un parallélogramme infinitésimal et au plan tangent $\overline{\pi}$ en p.

Définition 2.3.3. [28] Une variété Riemannienne (M^n, g) $(n \geq 3)$ est pseudo-symétrique au sens de R. Deszcz si et seulement si en tout point p de $\mathcal{U}$ toutes les courbures sectionnelles doubles $L(p, \pi, \overline{\pi})$ sont égaux, c'est à dire ; pour tous plans π et $\overline{\pi}$ dépendants de la courbure $L(p, \pi, \overline{\pi}) = L_R(p)$ pour une fonction $L_R : M \to \mathbb{R}$.

2.3.4 Interprétation géométrique de $R.\rho$

Soient (M, g) une variété Riemannienne, p un point de M et $\vec{z}$ un vecteur tangent à M en p. Le transport parallèle de $\vec{z}$ autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p et avec des côtés de longueurs Δx et Δy tangents aux vecteurs x et y respectivement en p, détermine un nouveau vecteur $z^\star$ tel que

$$\vec{z}^\star = \vec{z} + [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

Soit $p \in M$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base orthonormée de T_pM. La courbure de Ricci $\rho(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$, dans la direction de $\vec{e}_1$, est (voir [10])

$$\rho(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \sum_{j=1}^{n} K(p, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j)$$

où $K(p, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j)$ est la courbure sectionnelle du plan section $\pi = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j$ de M en p. Maintenant, on considère un vecteur $\vec{v}$ en un point p de M et un parallélogramme $\mathcal{P}$, de sommet p avec des côtés de longueurs Δx et Δy tangents aux vecteurs linéairement indépendants $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en p. Alors, par le transport parallèle de $\vec{v}$ autour de $\mathcal{P}$ on obtient le vecteur

$$\vec{v}^{\star} = \vec{v} + [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{v}]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

et dans ce cas la courbure de Ricci dans la direction de $v^{\star}$ est donnée par

$$\rho(\vec{v}^{\star}, \vec{v}^{\star}) = \rho(\vec{v}, \vec{v}) - [(R.\rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

Théorème 2.3.6. *[10] Soient (M, g) une variété Riemannienne et p point de M. Soit $\vec{v}^{\star}$ le vecteur obtenu par le transport parallèle d'un vecteur $\vec{v}$ de T_pM autour d'un parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$, de sommet p avec des côtés de longueurs Δx et Δy tangents aux vecteurs x et y respectivement en p. Alors d'une approximation de second ordre*

$$\delta_p \rho(\vec{v}, \vec{v}) = -(R.\rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})\Delta x \Delta y,$$

c'est à dire, en tout point p de M, le tenseur $R.\rho$ de type $(0, 4)$ mesure le changement de la courbure de Ricci d'un vecteur $\vec{v}$ sous le transport parallèle autour de chaque parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p.

Corollaire 2.3.7. *[10] Une variété Riemannienne (M, g) est Ricci-semi-symétrique si et seulement si, en tout point p de M, la fonction de la courbure de Ricci est invariante sous le transport parallèle de tout vecteur $\vec{v}$ autour de tout parallélogramme infinitésimal $\mathcal{P}$ de sommet p.*

Lemme 2.3.8. *[10] Une variété Riemannienne (M, g) est d'Einstein si et seulement si $Q(g, \rho) = 0$.*

Définition 2.3.4. [10] Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension n ($n \geq 3$) et $\mathcal{U}$ l'ensemble des points pour lesquels le tenseur de Ricci-Tachibana soit différent de zéro, c'est à dire ; $\mathcal{U} = \{x \in M \ / \ Q(g, \rho) \neq 0\}$. Alors, en $p \in \mathcal{U}$, une direction d engendré par le vecteur $\vec{v} \in T_pM$ est dite dépendante de la courbure du plan $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y} \subset T_pM$ si

$$Q(g, \rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \neq 0.$$

La définition est indépendante du choix de la base $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ de π et du vecteur $\vec{v}$ qui détermine la direction d.

Définition 2.3.5. [10] Soient $p \in \mathcal{U}$ et d une direction engendré par $\vec{v}$ dépendante de la courbure de $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y}$. On définit la courbure de Ricci-Deszcz $L_\rho(p, \vec{v}, \pi)$ du vecteur $\vec{v}$ par

$$L_\rho(p, \vec{v}, \pi) = \frac{(R.\rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}{Q(g, \rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}.$$

Cette définition est indépendante du choix de la base de π.

2.3.5 Les propriétés de la courbure de Ricci-Deszcz

En $p \in M$, on considère une base orthonormée $\{v = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de T_pM et on construit, pour tout plan $\vec{v} \wedge \vec{e}_j$, le parallélogramme de Levi-Civita dont les côtés sont égaux $A = B = \varepsilon$. Soit ε'_j la longueur de la géodésique de fermeture de ce parallélogramme. La courbure de Ricci $\rho(\vec{v}, \vec{v})$ peut être, en première approximation, s'exprime comme suit (voir [10])

$$\rho(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{j=2}^{n} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_j'^2}{\varepsilon^4}$$

Soient $\{v, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de T_pM et $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y}$ le plan engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$, le transport parallèle de $\{\vec{v}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ autour du plan infinitésimal construit par $\vec{x}$ et $\vec{y}$. De plus, on construit les $2(n-1)$ parallélogrammes dont les cotés sont égaux $(= \varepsilon)$, pour les plans $\vec{v} \wedge \vec{e}_j$ et $\vec{v}^\star \wedge \vec{e}_j^\star, j = 2, \ldots, n$. Dans le cas général, les géodésiques de fermeture les parallélogrammes ont des langueurs ε_j' et $\varepsilon_j'^\star$ différentes. Plus précisément, on obtient, en second ordre, par rapport aux côtés Δx et Δy [10]

$$L_\rho(p, \vec{v}, \pi) = \frac{\sum_{j=2}^{n} (\varepsilon_j^{\star\prime 2} - \varepsilon_j'^2)}{\varepsilon^4 Q(g, \rho)(\vec{v}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y})}$$

Alors le scalaire $L_\rho(p, v, \pi)$ mesure la différence de la somme des longueurs des géodésiques de fermeture des $2(n-1)$ parallélogrammes construits construits à partir de v

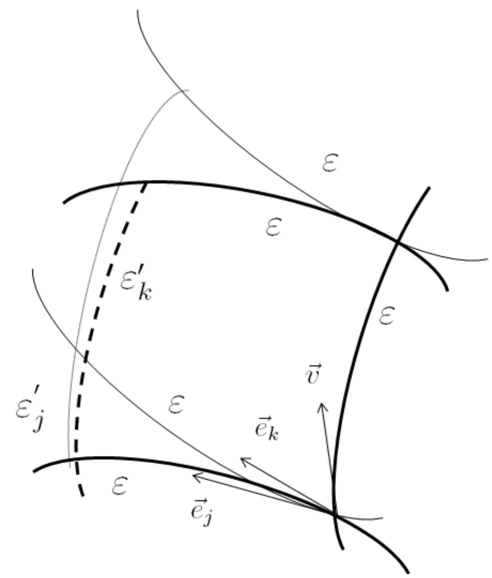

FIGURE 2.4 – Interprétation géométrique de la courbure de Ricci $\rho(\vec{v}, \vec{v})$

qu'ils sont liés par le transport parallèle de leurs bases génératrices en p autour d'un parallélogramme et du plan $\pi = \vec{x} \wedge \vec{y}$ en p (Figure 2.5).

Théorème 2.3.9. *[10] En tout point $p \in \mathcal{U} \subset M$, le tenseur $R.\rho$ est complètement déterminé par la courbure de Ricci-Deszcz L_ρ.*

Théorème 2.3.10. *[10] Une variété Riemannienne (M^n, g) $(n \geq 3)$ est Ricci-pseudo-symétrique au sens de R. Deszcz si et seulement si, en tout point p de $\mathcal{U}$ les courbures de Ricci-Deszcz sont égaux, c'est à dire ; pour toutes les directions d dépendantes de la courbure de $\overline{\pi}$, $L_\rho(p, d, \overline{\pi}) = L_\rho(p)$.*

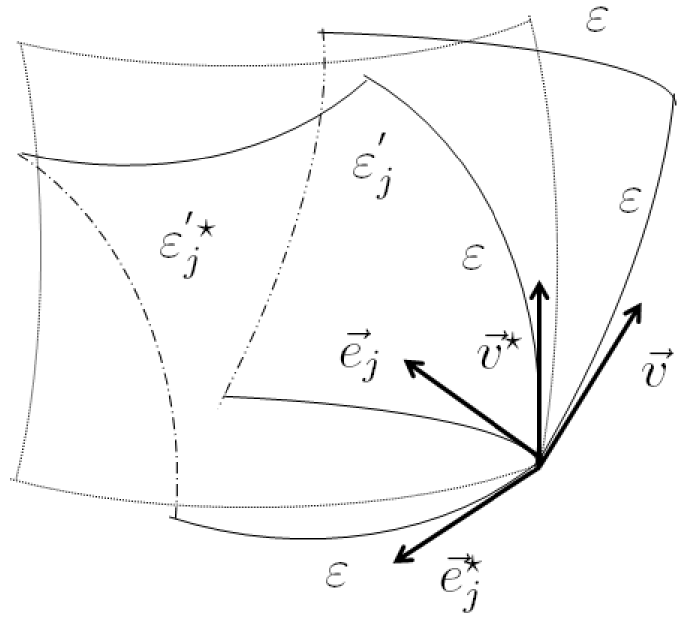

FIGURE 2.5 – Interprétation géométrique de la courbure de Ricci-Deszcz

Chapitre 3

Variétés Complexes

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions et propriétés concernant les structures presque complexes. Les références utilisées [6, 31, 37, 49].

3.1 Fonctions holomorphes

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : U \to C$ est dite holomorphe si pour tout point $z_o \in U$ il existe une boule $B_\varepsilon(z_0) \subset U$ de rayon $\varepsilon > 0$ autour de z_0 telle que f peut être écrit sur $B_\varepsilon(z_0)$ comme une série de puissance convergente, c'est-à-dire (voir [31])

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in B_\varepsilon(z_0).$$

La définition équivalente plus utilise de l'holomorphicité est les équations de Cauchy-Riemann. On note par x respectivement y la partie réelle et la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, f peut être considéré comme une fonction complexe $f(x, y)$ de deux variables réelles x et y. En outre, f peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $u(x, y)$ et $v(x, y)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f. Alors f est holomorphe si et seulement si u et v sont continument différenciables et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1.1}$$

On utilise les opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}). \tag{3.1.2}$$

Alors, les équations de Cauchy-Riemann (3.1.1) peuvent être récrites comme $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Considérons une application différenciable $f : U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. En un point $z \in U$, sa différentielle $df(z)$ est une application $\mathbb{R}$- linéaire entre les espaces tangents $df(z) : T_z\mathbb{R}^2 \to T_{f(z)}\mathbb{R}^2$. La différentielle $df(z)$ est donnée par le Jacobien réel

$$J_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Après avoir prolongé $df(z)$ à une application $\mathbb{C}$-linéaire $df(z) : T_z\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C} \to T_{f(z)}\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}$, on choisit une base différente $\{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})\}$ alors le Jacobien complexe est donné par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} & \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}.$$

Si f est holomorphe, alors $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$ et donc $df(z)$ est donné par la matrice diagonale suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}.$$

Une fonction holomorphe $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ est dite biholomorphe si f est bijective et son inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi holomorphe.
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. f est dite holomorphe si les équations de Cauchy-Riemann (3.1.1) sont vérifiées pour toutes les coordonnées $z_j = x_j + iy_j$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.3}$$

Posons

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$$

alors la formule (3.1.3) peut être réécrite comme

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Une fonction $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$ est dite *holomorphe* si toutes les fonctions de coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ sont holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}^n$. Une fonction holomorphe $f : U \to V$ est dite *biholomorphe* si elle est bijective et son inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi holomorphe (voir [31]).

Définition 3.1.1. [31] Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et $f : U \to \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe. Le Jacobien complexe de f en un point z de U est la matrice

$$J(f)(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Un point z de U est dit *régulier* si $J(f)(z)$ est surjective.

Théorème 3.1.1. *(D'inversion locale généralisée)[31] Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{C}^n$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application holomorphe $f : U \to U'$ soit biholomorphe local est que*

$$det(J(f)(z)) \neq 0,$$

pour tout point z de U.

3.2 Structure complexe sur un espace vectoriel

Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n. Le complexifié de V est défini par $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$. Ainsi $V^{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V alors $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ est une base de $V^{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'espace vectoriel réel V est inclus dans $V^{\mathbb{C}}$ par l'application $v \to v \otimes 1$, de plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V$, on a $\overline{v \otimes \lambda} = v \otimes \overline{\lambda}$.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Une structure complexe sur V est un endomorphisme J sur V vérifie $J^2 = -Id$. Si J est une structure complexe sur V alors on peut définir sur V une structure de $\mathbb{C}$-module, en définissant une loi extérieure comme suit : si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ est un scalaire complexe alors le produit d'un vecteur $v \in V$ par λ est donné par (voir [37, 49])

$$\lambda v = \lambda_1 v + \lambda_2 J v.$$

Réciproquement, si V est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension complexe n alors on peut définir une structure complexe J sur V par

$$JX = iX, \quad \forall X \in V.$$

L'endomorphisme $-J$ définit une structure complexe sur V dite la structure conjuguée et l'espace $(V, -J)$ est souvent noté $\overline{V}$.

Remarque 3.2.1.

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Si V admet une structure complexe alors la dimension de V est paire. En particulier, un espace vectoriel réel de dimension paire admet toujours une structure complexe.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Si J est une structure complexe sur V alors J sera prolonger sur $V^{\mathbb{C}}$ par $J(v \otimes \alpha) = Jv \otimes \alpha$, dans ce cas $V^{\mathbb{C}}$ se décompose en somme directe de deux sous espaces propres associés aux i et $-i$ (voir [37, 49]) :

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{Z \in V^{\mathbb{C}} / JZ = iZ\} = \{X - iJX / X \in V\}, \\ V^{0,1} &= \{Z \in V^{\mathbb{C}} / JZ = -iZ\} = \{X + iJX / X \in V\}, \end{aligned}$$

on remarque que $\overline{V}^{1,0} = V^{0,1}$. Tout vecteur Z de $V^{\mathbb{C}}$ peut être écrit sous la forme

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ).$$

D'autre part, J induit une structure complexe, notée J, sur l'espace dual V^*, alors l'espace $V^{*\mathbb{C}} = V^* \otimes \mathbb{C}$ se décompose en somme directe de deux sous espaces propres :

$$\begin{aligned} V_{1,0} &= \{\lambda \in V^{*\mathbb{C}} / J\lambda = i\lambda\} = \{\xi + iJ\xi / \xi \in V\}, \\ V_{0,1} &= \{\lambda \in V^{*\mathbb{C}} / J\lambda = -i\lambda\} = \{\xi - iJ\xi / \xi \in V\}. \end{aligned}$$

On note par $\bigwedge^* V^{\mathbb{C}}$ l'algèbre extérieure de $V^{\mathbb{C}}$ on a

$$\bigwedge^* V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V^{\mathbb{C}}, \quad et \quad \bigwedge^* V^{\mathbb{C}} = \bigwedge^* V \otimes \mathbb{C}$$

où $\bigwedge^* V$ est l'algèbre extérieure de V.

Définition 3.2.1. [31] Soit V un espace vectoriel réel munie d'une structure complexe J. On définit $\bigwedge^{p,q} V$ par

$$\bigwedge^{p,q} V := \bigwedge^{p} V^{1,0} \oplus_{\mathbb{C}} \bigwedge^{q} V^{0,1}$$

où le produit extérieure de $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$ est le produit extérieure d'espaces vectoriels complexes. Un élément α de $\bigwedge^{p,q} V$ est dit de degré (p, q).

Proposition 3.2.1. *[31] Soit V un espace vectoriel réel munie d'une structure complexe J. On a*

1. *$\bigwedge^{p,q} V$ est un sous espace de $\bigwedge^{p+q} V^{\mathbb{C}}$.*
2. *$\bigwedge^k V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V$.*
3. *La conjugaison complexe sur $\bigwedge^* V^{\mathbb{C}}$ définit une application ($\mathbb{C}$-antilinéaire) isomorphisme $\bigwedge^{p,q} V$ et $\bigwedge^{q,p} V$, c'est à dire $\overline{\bigwedge^{p,q}} = \bigwedge^{q,p}$.*

En utilisant la décomposition 2 du proposition 3.2.1, on définit la projection naturelle

$$\Pi^k : \bigwedge^* V^{\mathbb{C}} \to \bigwedge^k V^{\mathbb{C}} \qquad et \qquad \Pi^{p,q} : \bigwedge^* V^{\mathbb{C}} \to \bigwedge^{p,q} V.$$

De plus, $J : \bigwedge^* V^{\mathbb{C}} \to \bigwedge^* V^{\mathbb{C}}$ est un opérateur linéaire, qui agit sur $\bigwedge^{p,q} V$ par multiplication par i^{p-q}, c'est à dire :

$$J = \sum_{p,q} i^{p-q}.\Pi^{p,q}.$$

J est l'extension multiplicative de la structure complexe J sur $V^{\mathbb{C}}$. On note, aussi les opérateurs sur l'espace duale $\bigwedge^* V^*$, par Π^k, $\Pi^{p,q}$ et J respectivement. Pour tous $v_1, \ldots, v_k \in V$ et $\alpha \in \bigwedge^* V^*$, on a

$$J(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(J(v_1), \ldots, J(v_k)).$$

3.3 Formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, U peut être considéré comme une variété différentiable réelle de dimension $2n$. Pour tout point x de U, l'espace tangent T_xM est un espace vectoriel réel de dimension $2n$, la base canonique de T_xM est

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \dots, \frac{\partial}{\partial y_n},$$

où $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^n$. En tout point x de U, l'espace tangent admet une structure complexe naturelle définie par

$$J: \ T_xM \ \rightarrow \ T_xM \quad \text{tel que} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La base duale de $(T_xU)^*$ est notée par $dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n$. La structure presque complexe J induit une structure complexe sur $(T_xU)^*$, donnée par

$$J(dx_i) = -dy_i, \qquad J(dy_i) = dx_i$$

Proposition 3.3.1. *[31] Le complexifié du fibré tangent $T_{\mathbb{C}}U := TU \otimes \mathbb{C}$ se décompose sous forme d'une somme directe des fibrés vectoriels complexes*

$$T_{\mathbb{C}}U = T^{1,0}U \oplus T^{0,1}U,$$

telle que l'extension linéaire de J satisfait

$$J_{|T^{1,0}U} = i.id \qquad et \qquad J_{|T^{0,1}U} = -i.id.$$

Le complexifié du fibré cotangent $T^*_{\mathbb{C}}U := T^*U \otimes \mathbb{C}$ admet une décomposition analogue à celle de $T_{\mathbb{C}}U$, c'est à dire,

$$T^*_{\mathbb{C}}U = (T^*U)^{1,0} \oplus (T^*U)^{0,1},$$

Proposition 3.3.2. *[31] Soit $f : U \to V$ une application holomorphe entre un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et un ouvert V de $\mathbb{C}^m$. L'extension $\mathbb{C}$-linéaire de la différentielle $df : T_xU \to T_{f(x)}V$ respecte la décomposition précédente, c'est à dire, $df(T^{1,0}_xU) \subset T^{1,0}_{f(x)}V$ et $df(T^{0,1}_xU) \subset T^{0,1}_{f(x)}V$.*

La décomposition du fibré des k-formes sera faite à l'aide aux résultats précédents. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Au dessus de U, on définit les fibrés vectoriels complexes $\bigwedge^{p,q} U$ par

$$\bigwedge^{p,q} U : \bigwedge^{p}((T^*U)^{1,0}) \otimes \bigwedge^{q}((T^*U)^{0,1}),$$

on note par $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U)$ et $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ les espaces des sections $\bigwedge^k_{\mathbb{C}} U := \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}U$ et $\bigwedge^{p,q} U$ respectivement.

Définition 3.3.1. [31] Soit $d : \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{A}^{k+1}_{\mathbb{C}}(U)$ l'extension linéaire complexe de la différentiable extérieure usuelle. Alors

$$\partial : \mathcal{A}^{p,q}(U) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(U), \qquad \overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(U) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(U)$$

sont définies par $\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d$ et $\overline{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d$.
Localement, pour toute application f, on a

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i$$

Ainsi, f est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$. De plus, les expressions explicites des opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sont données par

$$\partial(f dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

et

$$\overline{\partial}(f dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_l} d\overline{z}_l \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Lemme 3.3.3. *[31] Pour les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ on a :*

1. *$d = \partial + \overline{\partial}$.*
2. *$\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ et $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$.*
3. *∂ et $\overline{\partial}$ vérifient les relations de Leibniz, c'est à dire,*

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \partial(\beta)$$

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \overline{\partial}(\beta)$$

pour tous $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ et $\beta \in \mathcal{A}^{r,s}(U)$.

3.4 Variété complexe

Une variété complexe M de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection d'homéomorphismes

$$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}^n$$

appelées cartes, où les U_i sont des ouverts de M recouvrant M et les V_i des ouverts de $\mathbb{C}^n$ tels que pour chaque j et i le changement de cartes

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \to \varphi_j(U_j \cap U_i)$$

est holomorphe. L'ensemble $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est dit atlas holomorphe. Deux atlas holomorphes $\{(U_i, \varphi_i)\}$ et $\{(U'_j, \varphi'_j)\}$ sont équivalents si, pour tout $U_i \cap U'_j \neq \emptyset$, les applications $\varphi_i \circ \varphi_j'^{-1} : \varphi'_j(U_i \cap U'_j) \to \varphi_i(U_i \cap U'_j)$ sont holomorphes [22, 31].

Exemple 3.4.1. *[22, 31]*

1. *L'espace $\mathbb{C}^n$ est une variété complexe.*
2. *Tout ouvert de $\mathbb{C}^n$ est une variété complexe.*
3. *L'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ est une variété complexe de dimension n. La structure est définie comme suit :*
   On définit, sur l'ensemble $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par :

   $$\forall z, z' \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}; \quad z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*; \quad z = \lambda z',$$

   l'espace projectif est l'espace quotient $\mathbb{C}^{n+1}/\mathcal{R}$, c'est dire $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}/\mathcal{R}$. Tout point de $\mathbb{C}P^n$ est de la forme $[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ pour $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, cette notation est dite les coordonnées homogènes *pour $\mathbb{C}P^n$.*
   Pour $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on pose $U_k = \{[z_1, \ldots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n / z_k \neq 0\}$ et on définit l'application φ_k par :

   $$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & U_k & \to & \varphi_k(U_K) \subset \mathbb{C}^n \\ & [z_1, \ldots, z_{n+1}] & \to & (\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_k}), \end{array}$$

les applications de transitions sont données par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k \circ (\varphi_l)^{-1} : & \varphi_l(U_k \cap U_l) & \rightarrow & \varphi_k(U_k \cap U_l) \\ & (\frac{z_1}{z_l}, \ldots, \frac{z_{l-1}}{z_l}, \frac{z_{l+1}}{z_l}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_l}) & \rightarrow & (\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_k}). \end{array}$$

Alors $\mathcal{U} = \{(U_k, \varphi_k)\}_{1 \leq k \leq n+1}$ *est un atlas holomorphe de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{C}P^n$*.*

Soit M une variété complexe. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est *holomorphe* (ou morphisme), si pour toute carte $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{U}$, l'application $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. L'ensemble des fonctions holomorphes sur M est notée $\mathcal{F}(M)$.

Définition 3.4.1. [31] Soient M, N deux variétés complexes et $\mathcal{U}_M$,$\mathcal{U}_N$ des atlas holomorphes sur M et N respectivement. Une application continue $f : M \rightarrow N$ est holomorphe, si pour toute carte $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{U}_M$ et $(U'_j, \varphi'_j) \in \mathcal{U}_N$, l'application

$$\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(f^{-1}(U'_j) \cap U_i) \rightarrow \varphi'_j(U'_j)$$

est holomorphe.
Deux variétés complexes M et N sont dits isomorphe (ou biholomorphe) s'il existe un homéomorphisme holomorphe entre elles.

Espace tangent holomorphe

Soit M une variété complexe. Soient f et g deux fonctions holomorphes définies sur un ouvert de M. On dit que f et g sont équivalentes en un point p de M s'il existe un voisinage U de p tel que $f_{|_U} = g_{|_U}$. Une classe d'équivalence des fonctions holomorphes en p est dite germe de fonctions holomorphes en p, noté $\mathfrak{F}_p(M)$.

Soit p un point d'une variété complexe M. Un vecteur tangent holomorphe à M en p est une dérivation linéaire complexe sur l'algebre $\mathfrak{F}_p(M)$ des germes des fonctions holomorphes à p, c'est à dire ; un vecteur tangent holomorphe en p est une application linéaire complexe $X : \mathfrak{F}_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tous $f, g \in \mathfrak{F}_p(M)$;

$$X(f.g) = X.(f)g + f.X(g).$$

L'ensemble des vecteurs tangents holomorphes en p est dit *espace tangent holomorphe à M en p*, noté $\mathcal{T}_pM$. Avec le respect des opérations

$$(X+Y)f := X(f)+Y(f), \quad (\lambda X)(f) = \lambda(Xf) \quad \forall f \in \mathfrak{F}_p(M), \forall\lambda \in \mathbb{C}$$

l'espace tangent holomorphe $\mathcal{T}_pM$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel [43].

- Si M est une variété complexe de dimension n alors pour tout $p \in M$, l'espace tangent holomorphe $\mathcal{T}_pM$ est un espace vectoriel complexe de dimension n [43].
- Le fibré tangent holomorphe à M est
$$\mathcal{T}M = \bigcup_{p\in M} \mathcal{T}_pM,$$
le fibré tangent holomorphe à M est une variété complexe [43].
- L'application π de $\mathcal{T}M$ dans M définie par $\pi(p, X_p) = p$, est surjective, c'est la projection de $\mathcal{T}M$ sur M [43].
- Le fibré vectoriel sous-jacent à $\mathcal{T}M$ de la variété complexe M est isomorphe au fibré tangent réel TM de la variété réelle M [43].

3.5 Structure presque complexe

Une structure presque complexe sur une variété différentiable réelle M est un champ de tenseur J tel que en tout point x de M, J est un endomorphisme de T_xM vérifié $J^2 = -Id$. Une variété avec une structure presque complexe est dite *variété presque complexe*. Une variété M muni d'une structure presque complexe J est notée (M, J).

Toute variété presque complexe est de dimension paire et de plus elle est orientée [37].

Exemple 3.5.1. *Toute variété complexe admit une structure presque complexe naturelle définie comme suit (voir [49] page 170). Par exemple l'espace complexe $\mathbb{C}^n$ admit une structure presque complexe naturelle définie comme suit :*
On considère l'espace complexe $\mathbb{C}^n$ des n-uplets $(z^1, \ldots, z^n)$ avec

$$z^j = x^j + iy^j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

On définit une structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ dans le système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ par

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}\ , \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}\ , \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Remarque 3.5.1. Pas toutes les variétés reélles de dimension paire admettent une structure presque complexe. L'exemple le plus simple est la sphère de dimension 4 (voir [31]).

Soit T un champ de tenseurs de type $(1,1)$. La torsion de Nijenhuis de T est le champ de tenseurs de type $(1,2)$ donné par :

$$\begin{aligned} N_T(X,Y) &= [T,T](X,Y) \\ &= T^2[X,Y] + [TX,TY] - T[TX,Y] - T[X,TY] \end{aligned}$$

Pour une structure presque complexe J la torsion de Nijenhuis est donné par :

$$N_J(X,Y) = -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \tag{3.5.1}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 3.5.1. *[37] Soit (M,J) une variété presque complexe. J est une structure complexe sur M si et seulement si J est sans torsion ($N_J = 0$).*

Le théorème de Newlander-Nirenberg montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une carte holomorphe autour de chaque point de M est $N_J = 0$ [22]. Si $N_J = 0$ alors M admet une atlas holomorphe.

Structure Hermitienne et structure Kählérienne

Soit (M,J) une variété presque complexe. Une métrique Riemannienne g sur M est dite Hermitienne si elle vérifie

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \quad ; \quad \forall X,Y \in \Gamma(M) \tag{3.5.2}$$

La variété (M, g, J) est dite *presque Hermitienne*. Si M est une variété complexe alors g est dite métrique *Hermitienne*. Toute variété presque complexe admet une métrique Hermitienne [49].

Définition 3.5.1. [6] Soient (M, J, g) une variété presque Hermitienne et X, Y deux champs de vecteurs sur M. La 2-forme fondamentale de M est donnée par

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY)$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M.

Théorème 3.5.2. *[49] Si (M, J, g) est une variété presque Hermitienne et ∇ la connexion de Levi-Civita associée a la métrique g. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\nabla J = 0$
2. $\nabla \Phi = 0$
3. *La stucture presque de contact est sans torsion et la 2-forme fondamentale est fermée c'est à dire ; $d\Phi = 0$ et $N_J = 0$.*

Définition 3.5.2. [49] Une métrique Kählérienne est une métrique Hermitienne telle que la 2- forme fondamentale Φ est fermée.
Une variété presque complexe (resp. complexe) munie d'une métrique Kählérienne est dite variété presque Kählérienne (resp. Kählérienne).

D'apès le théorème 3.5.2, Une variété presque Hermitienne (M, J, g) est Kählérienne si et seulement si $\nabla J = 0$.

Exemple 3.5.2. *Soit M une variété complexe de dimension 1. Alors toute métrique Hermitienne sur M est une métrique Kählèrienne, puisque toute 2-forme et, en particulier, la 2-forme fondamentale sur une variété de dimension réelle 2 est fermée (voir [37]).*

Théorème 3.5.3. *[37] La courbure Riemannienne R et la courbure de Ricci ρ d'une variété Kählèrienne possedent les propriétés suivantes :*

1. *$R(X,Y)J = JR(X,Y)$ et $R(JX,JY) = R(X,Y)$ pour tous champs de vecteurs X et Y sur M ;*
2. *$\rho(JX,JY) = \rho(X,Y)$ et $\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$(trace de $JR(X,JY)$) pour tous champs de vecteurs X et Y sur M.*

3.5.1 Variété Kählèrienne à courbure constante

Courbure sectionnelle holomorphe

Soient (M,J) une variété Kählèrienne et x un point de M. La courbure sectionnelle $K(P)$ de chaque 2-plan P de T_xM invariant par J est dite *courbure sectionnelle holomorphe.* Alors la courbure sectionnelle holomorphe $K(P)$ est donnée par

$$K(P) = g(R(X,JX)JX,X),$$

pour tout vecteur unitair X de T_xM. Si pour tout point x de M la courbure sectionnelle holomorphe $K(P)$ est constante pour chaque 2-plan $P \in T_xM$ invariant par J alors on dit que M est une variété *à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

Théorème 3.5.4. *[37] Soit M une variété Kählèrienne connexe de dimension complexe $n \geq 2$. Si la courbure sectionnelle holomorphe $K(P)$ où P est un 2-plan de T_xM invariant par J, ne dépend que de x, alors M est une variété à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

Théorème 3.5.5. *[37, 49]Une variété Kählèrienne M est à courbure sectionnelle holomorphe constante c si et seulement si*

$$R(X,Y)Z = -\frac{c}{4}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)X - g(JX,Z)Y + 2g(X,JY)JZ]$$

On donnera quelques exemples de variétés Kählèriennes

Exemple 3.5.3. *[37] L'espace complexe $\mathbb{C}^n$ avec la métrique*

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} dz^k d\overline{z}^k,$$

où $(z^1, \dots, z^n)$ est le système de coordonnées naturel sur $\mathbb{C}^n$ est une variété complète de Kähler et plate, le 2-forme fondamentale est donnée par

$$\Phi = i\sum_{k=1}^{n} dz^k d\bar{z}^k.$$

Exemple 3.5.4. *[37] Soit $\mathbb{C}P^n$ l'espace projectif complexe de dimension n (voir Exemple 3.4.1) avec le système de coordonnée homogène $[z_0, \dots, z_n]$, soit U_j un ouvert de $\mathbb{C}P^n$ définit par $z_j \neq 0$ pour chaque j. On pose*

$$t_j^k = \frac{z_k}{z_j}, \quad j, k = 0, \dots, n,$$

sur chaque U_j, on prend $t_j^0, \dots, \widehat{t_j^j}, \dots, t_j^n$ (où $\widehat{t_j^j}$ signifie que t_j^j est supprimé) en tant que système de coordonnées locales et on considère la fonction $f_j = \sum_k^n t_j^k \bar{t}_j^k$ alors

$$f_j = f_k t_j^k \bar{t}_j^k \quad sur\ U_j \cap U_k.$$

Comme t_j^k est une fonction holomorphe sur $U_j \cap U_k$ il en resulte que

$$\partial\overline{\partial} log f_j = \partial\partial log f_k \quad sur U_j \cap U_k.$$

En posant

$$\Phi = -4i\partial\overline{\partial} log f_j \quad sur U_j,$$

on obtient une globale $(1,1)$ forme Φ sur $\mathbb{C}P^n$. On pose

$$g(X, Y) = \Phi(JX, Y),$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, g est une métrique Kählèrienne avec la 2-forme fondamentale Φ. Sur U_0 on a

$$ds^2 = 4\frac{(1 + \sum_\alpha t^\alpha \bar{t}^\alpha)(\sum_\alpha dt^\alpha d\bar{t}^\alpha) - (\sum_\alpha \bar{t}^\alpha dt^\alpha)(\sum_\alpha t^\alpha d\bar{t}^\alpha)}{(1 + \sum_\alpha t^\alpha \bar{t}^\alpha)^2},$$

avec $t^\alpha = t_0^\alpha$ pour $\alpha = 1, \dots, n$. Cette métrique Kählèrienne sur $\mathbb{C}P^n$ est dite métrique de Fubini-Study. Muni de la métrique de Fubini-Study, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}^n$ est une variété Kählèrienne à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à 4.

Chapitre 4

Variété complexe de contact

Ce chapitre est consacré aux variétés complexes de contact. Les références utilisées [6, 24, 25, 33, 34, 38, 39, 40].

4.1 Variété complexe de contact

Définition 4.1.1. [6] Soient M une variété complexe de $dim_{\mathbb{C}} M = 2n+1$ et $\mathcal{U} = \{\mathcal{O}_j\}$ un recouvrement d'ouverts de M. M est dite variété complexe de contact si

1. pour tout j, il existe 1-forme θ_j holomorphe définie sur $\mathcal{O}_j$ vérifié $\theta_j \wedge (d\theta_j)^n \neq 0$ en tout point,
   et
2. si $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k \neq \emptyset$ alors il existe une fonction holomorphe non nulle λ_{jk} sur $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k$ telle que
$$\theta_j = \lambda_{jk}\theta_k \ sur \ \mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k.$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_j = \{X \in T\mathcal{O}_j | \theta_j(X) = 0\}$ définissent un sous fibré holomorphe non intégrable $\mathcal{H}$ de dimension complexe $2n$ appelé *le sous fibré complexe de contact* ou *le sous fibré horizontal.* Le quotient $L = TM/\mathcal{H}$ est un fibré complexe en droites.[6] Si $(M, \{\theta_j\})$ est une variété complexe de contact, les fonctions de transition λ_{jk} définissent un fibré holomorphe en droites sur M. En utilisant les sections locales de ce fibré, on définit des 1-formes à valeur complexe $\{\pi_j\}$ de sorte que chaque π_j est un multiple de θ_j par une fonction complexe non nulle et sur $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k \neq \emptyset$,

$$\pi_j = h_{jk}\pi_k, \qquad h_{jk} : \mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k \to S^1.$$

Les h_{jk} sont alors les fonctions de transition d'un fibré en cercles P sur M et sur $\mathcal{O}_j$ (voir [34]),

$$\pi_j \wedge (d\pi_j)^n \wedge \widetilde{\pi}_j \wedge (d\widetilde{\pi}_j)^n \neq 0.$$

En écrivant $\pi_j = u_j - iv_j$, on a $v_j = u_j \circ J$, puisque θ_j est holomorphe. De plus, u_j et v_j se transforment naturellement par rapport à S^1, à savoir, si $h_{jk} = a + ib$, alors

$$u_k = au_j - bv_j, \qquad v_k = bu_j + av_j, \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

L'ensemble $\{\pi_j\}$ est appelé une structure de contact complexe normalisée par rapport à $\{\theta_j\}$ (voir [24]).
Localement, on définit une section U de TM, c'est à dire une section de $T\mathcal{O}$, par $du(U, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{H}$, $u(U) = 1$ et $v(U) = 0$. Ces sections locales définissent alors un sous fibré global $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V}\big|_{\mathcal{O}}$ est engendré par $\{U, JU\}$. On a $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, et on note l'application de projection sur $\mathcal{H}$ par

$$p : TM \to \mathcal{H}.$$

Le sous ensemble $\mathcal{V}$ est appelé sous *fibré vertical* ou *sous fibré caractéristique*. On suppose dans ce thèse que $\mathcal{V}$ est intégrable. Notons que dans [6], D. Blair a donné un exemple d'une structure complexe de contact pour laquelle $\mathcal{V}$ est non intégrable.

Définition 4.1.2. [25] Une variété complexe de contact avec une forme complexe de contact globale est appelée *variété complexe de contact strict* .

4.2 Structure complexe presque de contact sur une variété complexe de contact

Dans ce qui suit, M est une variété complexe de dimension complexe $2n+1 (\geq 3)$.

Définition 4.2.1. ([6, 24, 39]) Soit (M, J) une variété complexe avec une métrique Hermitienne g et un recouvrement ouvert $\{\mathcal{O}_j\}$. M est dite variété complexe métrique presque de contact si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. sur chaque $\mathcal{O}_j$, il existe une 1-forme u_j et $v_j = u_j \circ J$ avec un champ de vecteurs dual orthogonal U_j et $V_j = -JU_j$ et un champ de tenseurs G_j de type (1,1) et $H_j = G_j J$ tels que

$$G_j^2 = H_j^2 = -I + u_j \otimes U_j + v_j \otimes V_j,$$
$$g(G_j X, Y) = -g(X, G_j Y), \quad g(U_j, X) = u_j(X), \quad u_j(U_j) = 1$$
$$G_j J = -J G_j, \quad G_j U_j = 0.$$

2. Sur $\mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k \neq \emptyset$;

$$u_j = a u_k - b v_k, \qquad v_j = b u_k + a v_k,$$
$$G_j = a G_k - b H_k, \qquad H_j = b G_k + a H_k$$

pour des fonctions a, b définies sur l'intersection avec $a^2 + b^2 = 1$.

En conséquence de cette définition, sur une variété complexe métrique presque de contact M, les identités suivantes se vérifient

$$H_j G_j = -G_j H_j = J + u_j \otimes V_j - v_j \otimes U_j,$$
$$J H_j = -H_j J = G_j, \quad g(H_j X, Y) = -g(X, H_j Y),$$
$$G_j V_j = H_j U_j = H_j V_j = 0,$$
$$u_j G_j = v_j G_j = u_j H_j = v_j H_j = 0,$$
$$J V_j = U_j, \quad g(U_j, V_j) = 0.$$

La structure métrique presque de contact sur M est notée (u, v, U, V, G, H, g).

Ishihara et Konishi [34] prouvent qu'une variété complexe de contact admet une structure complexe métrique de contact pour laquelle la forme de contact local θ est de la forme $u - iv$ à un multiple par une fonction complexe non nulle, les champs tenseurs locaux G et H sont liés à du et dv par

$$du(X,Y) = g(X,GY) + (\sigma \wedge v)(X,Y), \tag{4.2.1}$$

$$dv(X,Y) = g(X,HY) - (\sigma \wedge u)(X,Y), \tag{4.2.2}$$

pour une 1-forme σ. Lorsque $\mathcal{V}$ est intégrable, σ est donnée par $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$ (voir [6]).

On supposera que le sous fibré $\mathcal{V}$ est intégrable et $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$. Dorénavant, on travaillera avec une variété complexe métrique de contact M munie de la structure (u, v, U, V, G, H, g) et la structure complexe J.

On définit les 2-formes $\hat{G}$ et $\hat{H}$ sur M par

$$\hat{G}(X,Y) = g(X,GY), \quad \hat{H}(X,Y) = g(X,HY).$$

Alors, pour des champs de vecteurs horizontaux X, Y,

$$\hat{G}(X,Y) = du(X,Y), \qquad \hat{H}(X,Y) = dv(X,Y).$$

En général, on a

$$\hat{G} = du - \sigma \wedge v,$$

$$\hat{H} = dv + \sigma \wedge u.$$

Dans le cas d'une structure complexe de contact strict, u et v peuvent être pris globalement de sorte que $\theta = u - iv$ et $\sigma = 0$ (voir [6, 25, 39])

Opérateur h

Pour une structure complexe métrique de contact, on définit les champs de tenseurs locals par

$$h_U = \frac{1}{2} sym(\pounds_U G) \circ p, \quad h_V = \frac{1}{2} sym(\pounds_U H) \circ p$$

où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie, $p : TM \to \mathcal{H}$ est la projection et sym désigne la partie symétrique. On a

$$h_U G = -G h_U, \quad h_V H = -H h_V,$$
$$h_U(U) = h_U(V) = h_V(U) = h_V(V) = 0,$$

et

$$\nabla_X U = -GX - G h_U X + \sigma(X) V,$$
$$\nabla_X V = -HX - H h_V X - \sigma(X) U,$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g (voir [6, 24]).
On définit deux tenseurs symétriques, l_U et l_V sur M comme suit :

$$l_U X = R(X, U)U, \qquad l_V X = R(X, V)V,$$

ces opérateurs satisfont (voir [40]) :

$$l_U U = l_V V = 0, \tag{4.2.3}$$
$$G l_U G - l_U = 2(G^2 + h_U^2 + \Omega(U, V) v \otimes V), \tag{4.2.4}$$
$$H l_V H - l_V = 2(H^2 + h_V^2 + \Omega(U, V) u \otimes U), \tag{4.2.5}$$
$$\nabla_U h_U = G - G h_U^2 - G l_U, \qquad \nabla_V h_V = H - H h_V^2 - H l_V. \tag{4.2.6}$$

4.3 Structure complexe de contact normale

S. Ishihara et M. Konishi [33] ont défini trois tenseurs S, T et W de type $(1,2)$ sur la variété complexe presque de contact par :

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= [G,G](X,Y) + 2v(Y)HX - 2v(X)HY + 2g(X,GY)U \\ &\quad - 2g(X,HY)V - \sigma(GX)HY + \sigma(GY)HX + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \\ T(X,Y) &= [H,H](X,Y) + 2u(Y)GX - 2u(X)GY + 2g(X,HY)V \\ &\quad - 2g(X,GY)U + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX - \sigma(X)HGY + \sigma(Y)HGX \\ W(X,Y) &= [G,H](X,Y) + \frac{1}{2}(\sigma(GX)GY - \sigma(HX)HY \\ &\quad - \sigma(GY)GX + \sigma(HY)HX) - u(Y)HX - V(Y)GX \\ &\quad + u(X)HY + v(X)GY + 2g(X,GY)V + 2g(X,HY)U \end{aligned}$$

avec $[G,G]$ (resp. $[H,H]$) est la torsion de Nijenhuis de G (resp. H)

$$[G,G](X,Y) = (\nabla_{GX}G)Y - (\nabla_{GY}G)X - G(\nabla_X G)Y + G(\nabla_Y G)X,$$

et

$$\begin{aligned} [G,H](X,Y) = \frac{1}{2}([GX,HY] + [HX,GY] - G[HX,Y] \\ - H[GX,Y] - G[X,HY] - H[X,GY]). \end{aligned}$$

Si $S = T = W = 0$ alors la structure est *dite normale au sens de S. Ishihara et M. Konishi* [33, 24] ou $\mathbb{K}$-*normale* [25]. B. Korkmaz [39] a généralisé le notion de normalité, et on adapte sa définition dans cette thèse.

Définition 4.3.1. [39] Une variété complexe métrique de contact M est normale si

1. $S(X,Y) = T(X,Y) = 0$ pour tous X, Y de $\mathcal{H}$, et
2. $S(U,X) = T(V,X) = 0$ pour tout X.

Proposition 4.3.1. *[24, 39] Si M est normale alors $h_U = h_V = 0$.*

Démonstration. Puisque M est normale alors pour tout champ de vecteurs X sur M

$$\begin{aligned} 0 = S(GX,U) &= [G,G](GX,U) - \sigma(U)HX \\ &= (\nabla_{G^2X}G)U - G(\nabla_G XG)U + G(\nabla_U G)X - \sigma(U)HX \\ &= -G(\nabla_{G^2X}U) + G^2(\nabla_{GX}U) + \sigma(U)HX - \sigma(U)HX \\ &= G(\nabla_X U) - \nabla_{GX}U + v(\nabla_G XU)V + \sigma(U)HX - \sigma(U)HX \\ &= -G^2X - G^2h_U X + G^2X + Gh_U GX = 2h_U X. \end{aligned}$$

En utilisant $T(HX,V) = 0$ et de la même façon on montre que $h_V = 0$. □

Proposition 4.3.2. *[39] Soit M une variété complexe métrique de contact. M est normale si et seulement si*

$$\begin{aligned} (I)\quad g((\nabla_X G)Y,Z) &= \sigma(X)g(HY,Z) + v(X)\Omega(GZ,GY) - 2v(X)g(HGY,Z) \\ &\quad - u(Y)g(X,Z) - v(Y)g(JX,Z) + u(Z)g(X,Y) - v(Z)g(X,JY), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (II)\quad g((\nabla_X H)Y,Z) &= -\sigma(X)g(GY,Z) + u(X)\Omega(HZ,HY) - 2u(X)g(HGY,Z) \\ &\quad + u(Y)g(JX,Z) - v(Y)g(X,Z) + u(Z)g(X,JY) + v(Z)g(X,Y), \end{aligned}$$

avec $\Omega = d\sigma$.

De plus, si la structure complexe métrique de contact est normale alors on a

$$\begin{aligned} (III)\quad g((\nabla_X J)Y,Z) &= u(X)(\Omega(Z,GY) - 2g(HY,Z)) \\ &\quad + v(X)(\Omega(Z,HY) + 2g(GY,Z)). \end{aligned}$$

Propriétés de la courbure

Sur une variété complexe métrique de contact normale (M,u,v,U,V,G,H,g), on a

$$R(U,V)V = -2\Omega(U,V)U,$$

d'où

$$R(U,V,V,U) = -2\Omega(U,V). \tag{4.3.1}$$

Pour deux champs de vecteurs horizontaux X et Y, on a (voir [39, 40])

$$\begin{aligned}
R(X,U)U &= X, \qquad R(X,V)V = X, && (4.3.2)\\
R(X,Y)U &= 2(g(X,JY)+2d\sigma(X,Y))V, && (4.3.3)\\
R(X,Y)V &= -2(g(X,JY)+2d\sigma(X,Y))U, && (4.3.4)\\
R(X,U)V &= \sigma(U)GX+(\nabla_U H)X-JX, && (4.3.5)\\
R(X,V)U &= -\sigma(V)HX+(\nabla_U G)X+JX. && (4.3.6)\\
R(X,U)Y &= -g(X,Y)U+g(X,JY)V+d\sigma(HY,HX)V && (4.3.7)\\
R(X,V)Y &= -g(X,Y)V+g(JX,Y)U+d\sigma(HX,HY)U. && (4.3.8)
\end{aligned}$$

4.4 La courbure GH-sectionnelle

Définition 4.4.1. [39] Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de contact normale. Pour un champ de vecteurs horizontal X, le 2-plan engendré par X et $Y=aGX+bHX$ avec $a^2+b^2=1$ est dit *GH-section* ou *$\mathcal{H}$-section holomorphe.*
La courbure *GH-sectionnelle* $\mathcal{GH}_{a,b}(X)$ est la courbure du plan GH-section :

$$\mathcal{GH}_{a,b}(X)=K(X,aGX+bHX)$$

où $K(X,Y)$ est la courbure sectionnelle du plan engendré par X et Y.

Lemme 4.4.1. *[39] $\mathcal{GH}_{a,b}(X)$ est indépendante du choix de a et b si et seulement si $K(X,GX)=K(X,HX)$ et $g(R(X,GX)HX,X)=0$.*

Démonstration. On peut écrire la courbure GH-sectionnelle comme suit

$$\mathcal{GH}_{a,b}(X)=a^2K(X,GX)+b^2K(X,HX)+\frac{2ab}{g(X,X)^2}g(R(X,GX)HX,X).$$

Si $\mathcal{GH}_{a,b}(X)$ est indépendante du choix du a et b alors :

Pour $a=1$ et $b=0$, on a $\mathcal{GH}_{a,b}(X)=K(X,GX)$.

Pour $a=0$ et $b=1$, on a $\mathcal{GH}_{a,b}(X)=K(X,HX)$.

Alors $K(X,GX) = K(X,HX)$ et $g(R(X,GX)HX,X) = 0$.
Réciproquement, si $K(X,GX) = K(X,HX) = K$ et $g(R(X,GX)HX,X) = 0$, alors $\mathcal{GH}_{a,b}(X) = K$ donc $\mathcal{GH}_{a,b}(X)$ est indépendante du choix du a et b. $\square$

Dans la suite, $\mathcal{GH}_{a,b}(X)$ est indépendante du choix de a et b, et on la note $\mathcal{GH}(X)$.

Proposition 4.4.2. *[39] Pour un champ de vecteurs X horizontal, on a*

$$K(X,JX) = \frac{1}{2}(\mathcal{GH}(X+GX) + \mathcal{GH}(X-GX)) + 3.$$

4.5 Variété complexe de contact normale à courbure constante

Proposition 4.5.1. *[39] Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de contact normale de dimension supérieure ou égale à 5. Si la courbure GH-sectionnelle est indépendante du choix de GH-section en tout point, alors elle est constante sur M. Dans ce cas la courbure Riemannienne est donnée par*

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z = {} & \frac{c+3}{4}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(Z,JY)JX - g(Z,JX)JY + 2g(X,JY)JZ] \\
& + \frac{c-1}{4}[(u(X)u(Z) + v(X)v(Z))Y - (u(Y)u(Z) + v(Y)v(Z))X \\
& + 2u \wedge_g v(Z,Y)JX - 2u \wedge_g v(Z,X)JY + 4u \wedge_g v(X,Y)JZ + g(Z,GY)GX \\
& - g(Z,GX)GY + 2g(X,GY)GZ + g(Z,HY)HX - g(Z,HX)HY + 2g(X,HY)HZ \\
& + (u(Y)g(X,Z) - u(X)g(Y,Z) + v(X)g(JY,Z) - v(Y)g(JX,Z) + 2v(Z)g(X,JY))U \\
& + (v(Y)g(X,Z) - v(X)g(Y,Z) - u(X)g(JY,Z) + u(Y)g(JX,Z) - 2u(Z)g(X,JY))V] \\
& - \frac{4}{3}(d\sigma(U,V) + c + 1)[(v(X)u \wedge_g v(Z,Y) - v(Y)u \wedge_g v(Z,X) + 2v(Z)u \wedge_g v(X,Y))U \\
& - (u(X)u \wedge_g v(Z,Y) - u(Y)u \wedge_g v(Z,X) + 2u(Z)u \wedge v(X,Y))V].
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

De plus la courbure de Ricci ρ est donnée par

$$\rho = ((n+2)c + 3n + 2)g - ((n+2)c - n + 2 + 2\Omega(U,V))(u \otimes u + v \otimes v). \tag{4.5.2}$$

Définition 4.5.1. [39] Une variété complexe de contact normale M avec une courbure GH-sectionnelle constante est dite *à courbure constante.*

Une variété complexe $\mathbb{K}$-normale est une variété de Kähler-Einstein[33].

Exemples des variétés complexes de contact normales

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$

L'espace projectif complexe de dimension impaire $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ avec la métrique de Fubini-Study de courbure holomorphe constante (=4) admet une structure complexe métrique de contact par la fibration de Hopf

$$\pi : \mathbb{S}^{4n+3} \to \mathbb{C}P^{2n+1}.$$

Munie de cette structure, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ est une variété complexe de contact normale à courbure constante avec $c = 1$ [39]. De plus, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ est un espace d'Einstein est sa courbure de Ricci est donnée par

$$\rho = (4n + 4)g.$$

Le groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$

Le groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$ est un sous groupe fermé de $GL(3, \mathbb{C})$ donné par ([1])

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}^3$$

Si la translation à gauche par $B \in H_{\mathbb{C}}$ est notée L_B alors

$$L_B^* dz_1 = dz_1, L_B^* dz_2 = dz_2, L_B^*(dz_3 - z_2 dz_1) = dz_3 - z_2 dz_1.$$

Les champs de vecteurs invariants à gauche $\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}$ sont les duals des 1-formes dz_1, dz_2 et $dz_3 - z_2dz_1$.
Relativement à un système de coordonnée $(z_1, z_2, z_3, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3)$ la métrique

$$g = \frac{1}{8}\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1+|z_2|^2 & 0 & -z_2 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -\overline{z}_2 & 0 & 1 \\ \hline 1+|z_2|^2 & 0 & -\overline{z}_2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ -z_2 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

est Hermitienne et invariante à gauche mais cette métrique n'est pas de Kähler. La 1-forme $\theta = \frac{1}{2}(dz_3 - z_2dz_1) = u - iv$ est une structure complexe de contact sur $H_{\mathbb{C}}$. De plus, les tenseurs G, H et leurs dérivées covariantes sont données par

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & z_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & \overline{z}_2 & 0 & & & \end{array}\right), \quad H = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & -i & 0 \\ & 0 & & i & 0 & 0 \\ & & & 0 & -iz_2 & 0 \\ \hline 0 & i & 0 & & & \\ -i & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & i\overline{z}_2 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$$(\nabla_X G)Y = g(X,Y)U - u(Y)X - g(X,JY)V - v(Y)JX + 2v(X)GHY,$$
$$(\nabla_X H)Y = g(X,Y)V - v(Y)X + g(X,JY)U + u(Y)JX - 2u(X)GHY.$$

et

$$g(\nabla_X U, V) = \sigma(X) = 0, \quad \nabla_X U = -GX, \quad \nabla_X V = -HX.$$

Muni de cette structure, le groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe de contact normale à courbure constante avec une courbure GH-sectionnelle (=-3) et une courbure holomorphe 0. De plus, sa courbure de Ricci est

$$\rho = -4g + (4n+4)(u \otimes u + v \otimes v).$$

Théorème 4.5.2. *[39] Soit M une variété complexe métrique de contact. M admet une courbure GH-sectionnelle constante ($= c$) si et seulement si, pour un vecteur horizontal X, la courbure sectionnelle holomorphe du plan engendré par X et JX est $c + 3$.*

Proposition 4.5.3. *[39] Soit M une variété complexe métrique de contact. Si M admet une courbure sectionnelle holomorphe constante ($= c$) alors $c = 4$ et la variété M est de Kähler.*

Théorème 4.5.4. *[39] Soit M une variété complexe métrique de contact normale à courbure GH-sectionnelle constante égale 1 et $\Omega(U, V) = -2$. Alors M admet une courbure sectionnelle holomorphe constante égale à 4 et elle est de Kähler. Si de plus M est complète et simplement connexe, alors M est isométrique à $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ avec la métrique de Fubini-Study à courbure holomorphe constante 4.*

4.6 Déformation $\mathcal{H}$-homothétique

B. Korkmaz [39] a introduit la notion de la déformation $\mathcal{H}$-homothétique d'une structure complexe métrique de contact. Soit α une constante positive et considérer les tenseurs de la structure locale (G, H, U, V, u, v, g). On définit de nouveaux tenseurs de structure par

$$\widetilde{u} = \alpha u, \quad \widetilde{v} = \alpha v, \quad \widetilde{U} = \frac{1}{\alpha}U, \quad \widetilde{V} = \frac{1}{\alpha}V, \quad \widetilde{G} = G, \quad \widetilde{H} = H,$$
$$\widetilde{g} = \alpha g + \alpha(\alpha - 1)(u \otimes u + v \otimes v).$$

Définition 4.6.1. [39] Ce changement de structure est appelé la *déformation $\mathcal{H}$-homothétique*.

Si la structure donnée est normale, la nouvelle structure l'est aussi. Dans [39], B. Korkmaz a calculé la courbure et a montré que si sur une variété complexe métrique de contact normale, la structure d'origine a une courbure GH-sectionnelle constante

c alors la nouvelle structure a une courbure GH-sectionnelle constante $\widetilde{c} = \dfrac{c+3}{\alpha} - 3$, en particulier, elle a prouvé les résultats suivants :

Théorème 4.6.1. *[39] En outre de sa structure standard, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ possède également une structure complexe métrique de contact normale avec une courbure GH-sectionnelle constante $\frac{4}{\alpha} - 3$ et $\Omega(U, V) = -\frac{2}{\alpha^2}$ pour tout α supérieur à 0.*

Théorème 4.6.2. *[39] Une variété complexe métrique de contact normale munie d'une métrique $\widetilde{g}$ à courbure GH-sectionnelle constante $\widetilde{c} > -3$ est $\mathcal{H}$-homothétique à une variété complexe métrique de contact normale munie d'une métrique g à courbure GH-sectionnelle constante $c = 1$. De plus, si $\Omega(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = -\frac{(\widetilde{c}+3)^2}{8}$ alors la métrique g est de Kähler à courbure holomorphe constante 4.*

Remarque 4.6.1. La courbure GH-sectionnelle du groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$ est invariante sous la déformation $\mathcal{H}$-homothétique.

4.7 Variété complexe de (κ, μ)-contact

Définition 4.7.1. [40] Une variété complexe de (κ, μ)-contact est une variété complexe métrique de contact (M, u, v, U, V, G, H, g) avec $h_U = h_V =: h$ dont le tenseur de courbure et la 2-forme Ω satisfont :

$$\begin{aligned}
R(X,Y)U &= \kappa[u(Y)X - u(X)Y] + \mu[u(Y)hX - u(X)hY] \\
&+ (\kappa - \mu)[v(Y)JX - v(X)JY] \\
&+ 2[(\kappa - \mu)g(JX, Y) + (4\kappa - 3\mu)u \wedge v(X, Y)]V, \qquad (4.7.1) \\
R(X,Y)V &= \kappa[v(Y)X - v(X)Y] + \mu[v(Y)hX - v(X)hY] \\
&- (\kappa - \mu)[u(Y)JX - u(X)JY] \\
&- 2[(\kappa - \mu)g(JX, Y) + (4\kappa - 3\mu)u \wedge v(X, Y)]U, \qquad (4.7.2) \\
\Omega(X,Y) &= (2 - \mu)g(JX, Y) + 2g(JhX, Y) + 2(2 - \mu)u \wedge v(X, Y),
\end{aligned}$$

pour des constantes κ et μ.

Théorème 4.7.1. *[40] Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact. Alors $\kappa \leq 1$. Si $\kappa = 1$, alors M est normale et $h = 0$. Si $\kappa < 1$, alors M admet trois distributions $[0], [\lambda], [-\lambda]$ orthogonales et intégrables définis par les espaces propres de h, où $\lambda = \sqrt{1-\kappa}$. De plus, on a*

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = (\kappa - \mu)\,[&g(X_\lambda, GZ_{-\lambda})GY_\lambda - g(Y_\lambda, GZ_{-\lambda})GX_\lambda \\ &+ g(X_\lambda, HZ_{-\lambda})HY_\lambda - g(Y_\lambda, HZ_{-\lambda})HX_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda = (\kappa - \mu)[&g(X_{-\lambda}, GZ_\lambda)GY_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, GZ_\lambda)GX_{-\lambda} \\ &+ g(X_{-\lambda}, HZ_\lambda)HY_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, HZ_\lambda)HX_{-\lambda}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = &-\kappa[g(X_\lambda, GZ_{-\lambda})GY_{-\lambda} + g(X_\lambda, HZ_{-\lambda})HY_{-\lambda}] \\ &- \mu[g(X_\lambda, GY_{-\lambda})GZ_{-\lambda} + g(X_\lambda, HY_{-\lambda})HZ_{-\lambda}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda = &\kappa[g(Y_{-\lambda}, GZ_\lambda)GX_\lambda + g(Y_{-\lambda}, HZ_\lambda)HX_\lambda] \\ &- \mu[g(X_\lambda, GY_{-\lambda})GZ_\lambda + g(X_\lambda, HY_{-\lambda})HZ_\lambda], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda = (2 - \mu + 2\lambda)[&g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(Y_\lambda, JZ_\lambda)JX_\lambda \\ &- g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda + g(X_\lambda, JZ_\lambda)JY_\lambda - 2g(JX_\lambda, Y_\lambda)JZ_\lambda], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} = (2 - \mu - 2\lambda)[&g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(Y_{-\lambda}, JZ_{-\lambda})JX_{-\lambda} \\ &- g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda} + g(X_{-\lambda}, JZ_{-\lambda})JY_{-\lambda} - 2g(JX_{-\lambda}, Y_{-\lambda})JZ_{-\lambda}], \end{aligned}$$

avec $X_\lambda, Y_\lambda Z_\lambda \in [\lambda]$ et $X_{-\lambda}, Y_{-\lambda}Z_{-\lambda} \in [-\lambda]$.

Théorème 4.7.2. *[40] Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact avec $(\kappa < 1)$. Alors, pour tous vecteurs unitaires horizontaux X, Y*

1. *la courbure U-sectionnelle et la courbure V-sectionnelle sont données par*

$$K(X, U) = K(X, V) = \kappa + \mu g(hX, X) = \begin{cases} \kappa + \lambda\mu, & si\ X \in [\lambda], \\ \kappa - \lambda\mu, & si\ X \in [-\lambda] \end{cases}$$

2. *la courbure sectionnelle du plan section engendré par X et Y est donnée par*

$$K(X,Y)=\begin{cases}(2-\mu+2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & si\ X,Y\in[\lambda],\\ -(\kappa+\mu)(g(X,GY)^2+g(X,HY)^2), & si\ X\in[\lambda],Y\in[-\lambda],\\ (2-\mu-2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & si\ X,Y\in[-\lambda].\end{cases}$$

Lemme 4.7.3. *[40] Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact de $dim_{\mathbb{C}}M=2n+1$. Alors*

1. $R(GX,U)U-GR(X,U)U=2\mu hGX, \quad R(HX,V)V-HR(X,V)V=2\mu hHX,$
2. $h^2=(\kappa-1)G^2, \kappa<1$ *et* $\kappa=1$ *si et seulement si M est normale,*
3. $R(U,X)Y=\kappa(g(X,Y)U-u(Y)X)+\mu(g(hX,Y)U-u(Y)hX)+(\kappa-\mu)(g(X,JY)V+v(Y)JX+2v(X)JY)+(4\kappa-3\mu)v(X)(u(Y)V-v(Y)U),$
   $R(V,X)Y=\kappa(g(X,Y)V-v(Y)X)+\mu(g(hX,Y)V-v(Y)hX)-(\kappa-\mu)(g(X,JY)U+u(Y)JX+2u(X)JY)-(4\kappa-3\mu)u(X)(u(Y)V-v(Y)U),$
4. $QU=4n\kappa U$, $QV=4n\kappa V$ *où Q est l'opérateur de Ricci,*
5. $(\nabla_X G)Y=-u(Y)(X+hX)-v(Y)J(X+hX)+\sigma(X)HY-\mu v(X)JY+(g(X+hX,Y)+\mu v(X)v(Y))U+(g(J(X+hX),Y)-\mu v(X)u(Y))V,$
   $(\nabla_X H)Y=u(Y)J(X+hX)-v(Y)(X+hX)-\sigma(X)GY+\mu u(X)JY-(g(J(X+hX),Y)+\mu u(X)v(Y))U+(g(X+hX,Y)+\mu u(X)u(Y))V,$
   $(\nabla_X J)Y=-\mu u(X)HY+\mu v(X)GY,$
6. $(\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X=(\kappa-1)(u(Y)GX-u(X)GY)+(\mu-1)(u(Y)GhX-u(X)GhY)+(\kappa-1)(v(Y)HX-v(X)HY)+(\mu-1)(v(Y)HhXv(X)HhY)+2(\kappa-1)(g(GY,Z)U+g(HY,Z)V.$

De (3) on a (voir [40])

$$l_U X=R(X,U)U=\kappa(X-u(X)U-v(X)V)+\mu hX.$$

Si X est un champ de vecteurs horizontal alors

$$l_U X=\begin{cases}\kappa+\lambda\mu \text{ si } X\in[\lambda]\\ \kappa-\lambda\mu \text{ si } X\in[\lambda]\end{cases}$$

Lemme 4.7.4. *[40] Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact. Alors pour tous champs de vecteurs X et Y sur M on a*

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= u(Y)(hGX + (\kappa-1)GX) + v(Y)(hHX + (\kappa-1))HX) \\ &+ \mu h(u(X)GY + v(X)HY) + (g(X, hGY) - (\kappa-1)g(X, GY))U \\ &+ (g(X, hHY) - (\kappa-1)(g(X, HY))V.\end{aligned} \tag{4.7.3}$$

En conséquence de ce lemme, la dérivée covariante de h le long de U, V est donnée par (voir [40])

$$\nabla_U h = \mu hG, \qquad \nabla_V h = \mu hH. \tag{4.7.4}$$

Lemme 4.7.5. *[40] Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact. Alors pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M on a*

$$\begin{aligned}R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z = \kappa\{&g(Y, GhZ)GX - g(X, GhZ)GY + g(Y, GZ)GhX \\ &- g(X, GZ)GhY + g(Y, HhZ)HX - g(X, HhZ)HY + g(Y, HZ)HhX \\ &- g(X, HZ)HhY\} - \mu\{2g(X, GY)GhZ + 2g(X, HY)HhZ\}.\end{aligned}$$

L'espace $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$

Soient $[t_0, \ldots, t_n]$ le système de coordonnées homogène sur $\mathbb{C}P^n$ et $U_i = \{[t_0, \ldots, t_n] \in \mathbb{C}P^n / t_i \neq 0\}$. On pose $w_j = \frac{t_j}{t_i}, j = 1, \ldots, n \; et \; i \neq j$. Soit $\mathcal{O}_i = \mathbb{C}^{n+1} \times U_i$ et $(z_0, \ldots, z_n)$ le système de coordonnées sur $\mathbb{C}^{n+1}$. On définit une 1-forme holomorphe θ_i sur $\mathcal{O}_i$ par

$$\theta_i = \frac{1}{t_i} \sum_{k=0}^{n} t_k dz^k$$

alors on a $\theta_i \wedge_g (d\theta_i)^n \neq 0$ sur $\mathcal{O}_i$ et $\theta_j = \dfrac{t_i}{t_j}\theta_i$ sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$. Ainsi $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une structure complexe de contact sur $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.

On considère $\mathcal{O}_0$ avec $\theta_0 = dz_0 + \sum_{k=0}^{n} w_k dz_k$.
La métrique sur $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$ est donnée par la matrice

$$g = \frac{1}{8}\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & I_{n+1} & 0 \\ & & 0 & g_1 \\ \hline I_{n+1} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & {}^t g_1 & & \end{array}\right)$$

avec $\frac{1}{8}g_1$ est la métrique sur $\mathbb{C}P^n(16)$ et

$$g_{1ij} = \frac{(1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2)\delta_{ij} - \overline{w}_i w_j}{8(1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2)^2}.$$

Soit $f_0 = 1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$. On définit les 1-formes réelles u_0 et v_0 par

$$u_0 = \frac{1}{4\sqrt{f_0}}(dz_0 + d\overline{z}_0 + \sum_{k=1}^{n}(w_k dz_k + \overline{w}_k d\overline{z}_k)),$$

$$v_0 = \frac{i}{4\sqrt{f_0}}(dz_0 - d\overline{z}_0 + \sum_{k=1}^{n}(w_k dz_k - \overline{w}_k d\overline{z}_k)),$$

les champs de vecteurs U_0 et V_0 sont donnés par

$$U_0 = \frac{2}{\sqrt{f_0}}(\frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_0} + \sum_{k=1}^{n}(w_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \overline{w}_k d\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k})),$$

$$V_0 = \frac{-2i}{\sqrt{f_0}}(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_0} + \sum_{k=1}^{n}(w_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \overline{w}_k d\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k})).$$

Alors $\theta_0 = 2\sqrt{f_0}(u_0 - iv_0)$, $du_0(U_0, X) = 0$ pour tout X de $\mathcal{H}$, $u_0(U_0) = 1$, $v_0(U_0) = 0$ et $g(X, U_0) = u_0(X)$ pour tout X.
Soit

$$G_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & G_1 \\ & & G_2 & 0 \\ \hline 0 & \overline{G}_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ \overline{G}_2 & 0 & & \end{array}\right)$$

avec

$$G_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ |w_1|^2 - f_0 & \overline{w}_1 w_2 & \dots & \overline{w}_1 w_n \\ w_1\overline{w}_2 & |w_2|^2 - f_0 & \dots & \overline{w}_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1\overline{w}_n & w_2\overline{w}_n & \dots & |w_n|^2 - f_0 \end{pmatrix} \quad et \quad G_2 = f_0^2 \left(\begin{array}{c|c} -w_1 & \\ -w_2 & \\ \vdots & I_n \\ -w_n & \end{array}\right).$$

On a $G_0 = -Id + u_0 \otimes U_0 + v_0 \otimes V_0$, $G_0 J = -JG_0 = H_0$, $G_0 U_0 = 0$, $g(X, G_0 Y) = du_0(X,Y)$ et $g(X, H_0 Y) = dv_0(X,Y)$ pour tous X et Y de $\mathcal{H}$.
Sur $\mathcal{O}_1$ on pose $f_1 = 1 + |w_0|^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} |w_k|^2$. On a $\frac{f_0}{f_1} = \frac{|t_1|^2}{|t_0|^2}$. Sur $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1$ on pose $a - ib = \frac{t_0}{t_1}\sqrt{\frac{f_0}{f_1}}$ alors $a^2 + b^2 = 1$ et

$$u_1 = au_0 - bv_0, \qquad G_1 = aG_0 - bH_0,$$
$$v_1 = bu_0 + av_0, \qquad H_1 = bG_0 + aH_0,$$

où (u_1, v_1, G_1, H_1) sont les tenseurs de structure sur $\mathcal{O}_1$. Donc $(u_k, v_k, U_k, V_k, G_k, H_k)$ avec le recouvrement ouvert $\{\mathcal{O}_k\}_{1\leq k\leq n}$ est une structure complexe métrique de contact sur $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$. La connexion de Levi-Civita de g est donnée par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial w_k}} \frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{-2\overline{w}_k}{f} \frac{\partial}{\partial w_k},$$
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial w_k}} \frac{\partial}{\partial w_j} = \frac{-1}{f} (\overline{w}_j \frac{\partial}{\partial w_k} + \overline{w}_k \frac{\partial}{\partial w_j})$$

d'où les dérivées covariantes de U et V sont données par

$$\begin{aligned}
\nabla_X U = &-f^{\frac{3}{2}}[\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)(\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}_0})\\
&+\sum_{j=1}^{n}((\overline{w}_j\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)-2f\bar{b}_j)\frac{\partial}{\partial z_j}\\
&+(w_j\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)-2fb_j)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j})]\\
\nabla_X V = &\, if^{\frac{3}{2}}[\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)(\frac{\partial}{\partial z_0}-\frac{\partial}{\partial \overline{z}_0})\\
&+\sum_{j=1}^{n}((\overline{w}_j\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)-2f\bar{b}_j)\frac{\partial}{\partial z_j}\\
&-(w_j\sum_{k=1}^{n}(b_k\overline{w}_k+\bar{b}_k w_k)-2fb_j)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j})]
\end{aligned}$$

avec $X=\sum_{k=0}^{n}(a_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\overline{a}_k\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k})+\sum_{k=1}^{n}(b_k\frac{\partial}{\partial w_k}+\bar{b}_k\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k})$.
Finalement la 1-forme σ est l'opérateur symétrique $h=h_U=h_V$ sont donnés par

$$\sigma=\frac{i}{4f}\sum_{k=1}^{n}(w_k d\overline{w}_k-\overline{w}_k dw_k),$$

$$\begin{aligned}
hX = &\frac{1}{f}[(\sum_{k=1}^{n}a_k w_k-a_0\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2)\frac{\partial}{\partial z_0}+(\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k\overline{w}_k-\overline{a}_0\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_0}\\
&+(\sum_{j=1}^{n}((a_0\overline{w}_j-a_jf+\overline{w}_j\sum_{k=1}^{n}a_k w_k)\frac{\partial}{\partial z_j}+(\overline{a}_0 w_j-\overline{a}_j f+w_j\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k\overline{w}_k)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j})]\\
&+\sum_{j=1}^{n}(b_j\frac{\partial}{\partial w_j}+\bar{b}_j\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}).
\end{aligned}$$

Par un calcul simple on trouve que la courbure Riemannienne vérifiée $R(X,Y)\mathcal{V}=0$ pour tous X et Y (voir [38]).

Déformation $\mathcal{H}$-homothétique d'une variété complexe de (κ,μ)-contact

Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact. En appliquant une déformation $\mathcal{H}$-homothétique à (u,v,U,V,G,H,g), alors le tenseur $\widetilde{h}$ est le tenseur de courbure $\widetilde{R}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h} &= \frac{1}{\alpha} h, \\
\alpha\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{U} &= R(X,Y)U + (1-\alpha)[(\nabla_X G)Y - (\nabla_Y G)X - u(Y)(X+hX) \\
&\quad + u(X)(Y+hY) + v(Y)J(X+hX) - v(X)J(Y+hY) \\
&\quad + \sigma(Y)HX - \sigma(X)HY - 2g(Jh(X+hX),Y)\widetilde{V}] \\
&\quad + (1-\alpha)^2(u(Y)X - u(X)Y - v(Y)JX + v(X)JY + 2g(JhX,Y)\widetilde{V}), \\
\alpha\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{V} &= R(X,Y)V + (1-\alpha)[(\nabla_X H)Y - (\nabla_Y H)X - v(Y)(X+hX) \\
&\quad + v(X)(Y+hY) - u(Y)J(X+hX) + u(X)J(Y+hY) \\
&\quad - \sigma(Y)GX + \sigma(X)GY + 2g(Jh(X+hX),Y)\widetilde{U}] \\
&\quad + (1-\alpha)^2(v(Y)X - v(X)Y + u(Y)JX - u(X)JY - 2g(JhX,Y)\widetilde{U}).
\end{aligned}
$$

La structure obtenue est aussi une structure complexe de $(\overline{\kappa},\overline{\mu})$-contact avec

$$
\overline{\kappa} = \frac{\kappa + \alpha^2 - 1}{\alpha^2}, \qquad \overline{\mu} = \frac{\mu + 2\alpha - 2}{\alpha},
$$

on définit l'invariant de Boeckx

$$
I_M = \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\sqrt{1-\kappa}},
$$

pour $\kappa \leq 1$, I_M est invariant sous les déformations $\mathcal{H}$-homothétiques.
Le groupe complexe de Heisenberg $H_{\mathbb{C}}$ a une structure complexe métrique de contact normale, avec cette structure, $H_{\mathbb{C}}$ est un espace complexe de $(1,2)$-contact. Cela on donne le cas où I_M n'est pas défini. D'autre part, $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$ a $I_M = 1$ (voir [40]).

Théorème 4.7.6. *[38] Soit M une variété complexe métrique de contact avec $h_U = h_V$. Si $R(X,Y)\mathcal{V} = 0$, alors M est localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.*

Chapitre 5

Les propriétés symétriques des variétés complexes de contact

Dans le cas réel, M. Okumura [42] a prouvé qu'une variété de Sasaki est localement symétrique si et seulement si elle est localement isométrique à $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$ et elle est Ricci-symétrique si et seulement elle est d'Einstein, d'autre part, T. Takahashi a montré qu'elle est semi-symétrique si elle est localement isométrique à $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$ [46]. M. Belkhelfa, R. Deszcz et L. Verstraelen [2] ont prouvé que toute variété de Sasaki à courbure constante est pseudo-symétrique.
Dans le cas complexe, une variété complexe de contact normale est localement symétrique si et seulement si elle est localement isométrique à $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ avec la métrique de Fubini-Study c'est le résultat de D. Blair et A. Mihai [9].
Ce chapitre contient deux parties. Dans la première partie, on étudie les propriétés semi-symétriques, pseudo-symétriques, Ricci-symétriques, Ricci-semi-symétriques et Ricci-pseudo-symétriques des variétés complexes de contact normales. On prouve qu'une variété complexe de contact normale est semi-symétrique si et seulement si elle est d'Einstein et on montre qu'une variété complexe de contact normale à courbure constante est proprement Ricci-pseudo-symétrique ($L_\rho \neq 0$) si et seulement si sa courbure GH-sectionnelle est égale à -1. Finalement, on montre que les variétés

complexes de contact normales à courbure constante ne sont pas proprement pseudo-symétriques.
Dans la deuxième partie, on étudie les propriétés Ricci-symétriques, Ricci-semi-symétriques et Ricci-pseudo-symétriques des variétés complexes de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. En premier lieu, on montre que les variétés complexes de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$ ne sont pas d'Einstein. On prouve que toutes les variétés complexes de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$ sont Ricci-symétriques, Ricci-semi-symétriques si et seulement si elles sont localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$. En outre, elles sont Ricci-pseudo-symétriques si et seulement si elles sont localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$, en d'autre terme, les variétés complexes de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$ ne sont pas proprement Ricci-pseudo-symétriques. Finalement, on prouve que l'espace $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$ est semi-symétrique.

5.1 Variété complexe de contact normale Ricci-semi-symétrique

Lemme 5.1.1. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe métrique de contact normale de dimension complexe $2n + 1$. Alors $QU = (4n - 2d\sigma(U, V))U$ et $QV = 4n - 2d\sigma(U, V)V$, où Q est l'opérateur de Ricci.*

Démonstration. Choisissons une base locale orthonormée $\{X_i, GX_i, HX_i, JX_i, U, V/ 1 \leq i \leq n\}$. On calcule l'opérateur de Ricci dans la direction de U, on trouve

$$\begin{aligned} QU = \sum_{i=1}^{n} [&R(U, X_i)X_i + R(U, GX_i)GX_i + R(U, HX_i)HX_i \\ &+ R(U, JX_i)JX_i] + R(U, V)V. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (4.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} QU &= \sum_{i=1}^{n} [g(X_i, X_i) + g(GX_i, GX_i) + g(HX_i, HX_i) \\ &\quad + g(JX_i, JX_i)]U - 2d\sigma(U, V)U \\ &= (4n - 2d\sigma(U, V))U \end{aligned}$$

De la même façon, on calcule l'opérateur de Ricci dans la direction de V, par la formule (4.3.8), on obtient

$$QV = (4n - 2d\sigma(U,V))V.$$

$\square$

Théorème 5.1.2. *Une variété complexe de contact normale M est Ricci-semi-symétrique si et seulement si elle est d'Einstein.*

Démonstration. Il est clair que toute variété d'Einstein est Ricci-symétrique alors elle est Ricci-semi-symétrique.

Réciproquement, si M est Ricci-semi-symétrique alors pour tous champs de vecteurs X, Y, Z et W sur M le courbure de Ricci vérifie la relation suivante

$$\begin{aligned} (R(X,Y).\rho)(Z,W) &= -\rho(R(X,Y)Z,W) - \rho(Z,R(X,Y)W) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

En utilisant la formule (4.5.2), le lemme 5.1.1 et en remplaçant Y et Z par U dans (5.1.1), pour un champ de vecteurs horizontal X on obtient

$$\begin{aligned} \rho(R(X,U)U,W) + \rho(U,R(X,U)W) &= \rho(X,W) - (4n - 2d\sigma(U,V))g(X,W) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\rho(X,W) = (4n - d\sigma(U,V))g(X,W), \text{ pour } X \in \mathcal{H}.$$

D'autre part, par un choix arbitraire d'un champ de vecteurs $X = X_0 + u(X)U + v(X)V$ sur M on a

$$\begin{aligned} \rho(X,W) &= \rho(X_0,W) + (4n - d\sigma(U,V))(u(X)u(W) + v(X)v(W)) \\ &= (4n - d\sigma(U,V))[g(X_0,W) + u(X)u(W) + v(X)v(W)] \\ &= (4n - d\sigma(U,V))g(X,W). \end{aligned}$$

Alors M est une variété d'Einstein. $\square$

Corollaire 5.1.3. *Une variété complexe de contact normale M est Ricci-symétrique* ($\nabla\rho = 0$) *si et seulement si elle est d'Einstein.*

5.2 Les propriétés symétriques des variétés complexes de contact normales à courbure constante

Proposition 5.2.1. *Soit* (M, u, v, U, V, G, H, g) *une variété complexe de contact normale à courbure constante. Alors on a :*

1. $(U \wedge_g V).\rho = 0,$
2. $(X \wedge_g Y).\rho = 0, \ \forall X, Y \in \mathcal{H}.$
3. $(X \wedge_g U).\rho(Z, W) = \beta[g(X, Z)u(W) + g(X, W)u(Z)], \quad \forall X \in \mathcal{H}.$
4. $(X \wedge_g V).\rho(Z, W) = \beta[g(X, Z)v(W) + g(X, W)v(Z)], \quad \forall X \in \mathcal{H}.$

avec $\beta = -((n+2)c - n + 2 + 2d\sigma(U, V))$

Démonstration. Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z et W sur M, on a

$$\begin{aligned}
((X \wedge_g Y).\rho)(Z, W) &= -\rho((X \wedge_g Y)Z, W) - \rho(Z, (X \wedge_g Y)W) \\
&= g(X, Z)\rho(Y, W) - g(Y, Z)\rho(X, W) \\
&+ g(X, W)\rho(Y, Z) - g(Y, W)\rho(X, Z) \\
&= \beta[g(X, Z)(u(Y)u(W) + v(Y)v(W)) \qquad (5.2.1)\\
&- g(Y, Z)(u(X)u(W) + v(X)v(W)) \\
&+ g(X, W)(u(Y)u(Z) + v(Y)v(Z)) \\
&- g(Y, W)(u(X)u(Z) + v(X)v(Z))]
\end{aligned}$$

1. Si $X = U$ et $Y = V$ alors la formule (5.2.1) devient

$$\begin{aligned}
(U \wedge_g V).\rho(Z, W) &= \beta[u(Z)v(W) - v(Z)u(W) + u(W)v(Z) - v(W)u(Z)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Soient X et Y des champs de vecteurs horizontaux ($X, Y \in \mathcal{H}$). Alors

$$\begin{aligned}
(X \wedge_g Y).\rho(Z, W) &= \beta[g(X, Z)(u(Y)u(W) + v(Y)v(W)) \\
&- g(Y, Z)(u(X)u(W) + v(X)v(W)) \\
&+ g(X, W)(u(Y)u(Z) + v(Y)v(Z)) \\
&- g(Y, W)(u(X)u(Z) + v(X)v(Z))] = 0.
\end{aligned}$$

3. Pour un champ de vecteurs horizontal $X \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}(X \wedge_g U).\rho(Z,W) &= \beta[g(X,Z)(u(U)u(W)+v(U)v(W)) \\ &- u(Z)(u(X)u(W)+v(X)v(W)) \\ &+ g(X,W)(u(U)u(Z)+v(U)v(Z)) \\ &- u(W)(u(X)u(Z)+v(X)v(Z))] \\ &= \beta[g(X,Z)u(W)+g(X,W)u(Z)]\end{aligned}$$

4. Soit X un champ de vecteurs horizontal ($X \in \mathcal{H}$). Alors

$$(X \wedge_g V).\rho(Z,W) = \beta[g(X,Z)v(W)+g(X,W)v(Z)]$$

avec $\beta = -((n+2)c - n + 2 + 2d\sigma(U,V))$

□

Lemme 5.2.2. *Sur une variété complexe de contact normale à courbure constante M on a $J.R = 0$.*

Démonstration. Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z et W sur M on a

$$(J.R)(X,Y,Z,W) = -R(JX,Y,Z,W) - R(X,JY,Z,W) - R(X,Y,JZ,W) - R(X,Y,Z,JW),$$

par l'utilisation de la formule (4.5.1), on obtient $J.R = 0$. □

Théorème 5.2.3. *Une variété complexe de contact normale à courbure constante est proprement Ricci-pseudo-symétrique ($L_\rho \neq 0$) si et seulement si $c = -1$, dans ce cas la fonction L_ρ est égale à 1.*

Démonstration. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M, en remplaçant Z par

U dans la formule (4.5.1), on obtient

$$\begin{aligned}R(X,Y)U &= \frac{c+3}{4}(u(Y)X - u(X)Y + v(Y)JX - v(X)JY - 2g(X,JY)V)\\ &+ \frac{c-1}{4}(-u(Y)X + u(X)Y + v(Y)JX - v(X)JY - 2g(X,JY)V\\ &- 4u \wedge_g v(X,Y)V) + 4(d\sigma(U,V) + c + 1)u \wedge_g v(X,Y)V\\ &= (X \wedge_g Y + \frac{c+1}{2}(JX \wedge_g JY))U + [(4d\sigma(U,V) + 3c + 5)u \wedge_g v(X,Y)\\ &-(c+1)g(X,JY)]V.\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

et si on remplace Z par V dans la formule (4.5.1), on trouve

$$\begin{aligned}R(X,Y)V = (X \wedge_g Y + \frac{c+1}{2}(JX \wedge_g JY)V - [(4d\sigma(U,V) + 3c + 5)u \wedge_g v(X,Y)\\ - (c+1)g(X,JY)]U.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

on calcule $R(X,Y).\rho(Z,W)$ en utilisant les formules (5.2.2), (5.2.3) et (4.5.2) alors

$$\begin{aligned}R(X,Y).\rho(Z,W) &= -\rho(R(X,Y)Z,W) - \rho(Z,R(X,Y)W)\\ &= \beta[R(X,Y,U,Z)u(W) + R(X,Y,V,Z)v(W)\\ &+ R(X,Y,U,W)u(Z) + R(X,Y,V,W)v(Z)]\\ &= (X \wedge_g Y + \frac{c+1}{2}(JX \wedge_g JY)).\rho(Z,W).\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Supposons que M est proprement Ricci-pseudo-symétrique ($\beta \neq 0$), alors il existe sur M une fonction L_ρ non nulle telle que

$$R(X,Y).\rho(Z,W) = L_\rho(X \wedge_g Y).\rho(Z,W). \tag{5.2.5}$$

À l'aide des formules (5.2.4) et (5.2.5), on trouve

$$(L_\rho - 1)(X \wedge_g Y).\rho(Z,W) = \frac{c+1}{2}(JY \wedge_g JX).\rho(Z,W). \tag{5.2.6}$$

En utilisant la proposition 5.2.1 et en remplaçant Y et W by U et Z par X où X est un champ de vecteurs unitaire horizontal, on obtient

$$(X \wedge_g U).\rho(X,U) = \beta \neq 0, \quad (JX \wedge_g V).\rho(X,U) = 0. \tag{5.2.7}$$

Maintenant, on utilise les deux dernières formules (5.2.6) et (5.2.7), on obtient

$$\beta(L_\rho - 1) = 0 \Rightarrow L_\rho = 1.$$

pour $L_\rho = 1$, la formule (5.2.6) donne

$$(c+1)(JX \wedge_g JY).\rho(Z, W) = 0. \tag{5.2.8}$$

En utilisant une autre fois la proposition 5.2.1 et pour $Y = W = V$, $Z = JX$ où X est un champ de vecteurs unitaire horizontal, on a

$$(JX \wedge_g V).\rho(JX, V) = \beta. \tag{5.2.9}$$

On utilise les dernières équations, on obtient

$$\beta(c+1) = 0 \Rightarrow c = -1.$$

□

Exemple 5.2.1. *L'espace projectif complexe de dimension impaire $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ admet une structure complexe de contact normale avec une courbure GH-sectionnelle constante ($c = 1$). On note cette structure par (G, H, U, V, u, v). On peut toujours définie une nouvelle structure, en utilisant la déformation $\mathcal{H}$-homothétique. Soit α un constant positive, la nouvelle structure est aussi complexe de contact normale d'une courbure GH-sectionnelle constante ($\widetilde{c} = \frac{4}{\alpha} - 3$ de plus $\Omega(U, V) = -(\frac{2}{\alpha^2})$).*
Si on prend $\alpha = 2$ on obtient une structure complexe de contact normale à courbure GH-sectionnelle constante ($\widetilde{c} = -1$). Alors, muni de cette nouvelle structure, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ est proprement Ricci-pseudo-symétrique.

Lemme 5.2.4. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de contact normale à courbure constante. Pour tout champ de vecteurs Z sur M on a :*

1. $R(U, V)Z = [-(c + 1 + 2d\sigma(U, V))(U \wedge_g V) + (c+1)J]Z,$
2. $R(X, U)Z = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX)Z,$

3. $R(X,Y)Z = [\frac{c+3}{4}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY + 2g(X,JY)J) + \frac{c-1}{4}(GX \wedge_g GH + HX \wedge_g HY + 2g(X,GY)G + 2g(X,HY)H)]Z$

où X, Y sont des champs de vecteurs horizontaux.

Démonstration. On utilise la formule (4.5.1), en remplaçons Y par U et pour un champ de vecteurs X orthogonal à U ($u(X) = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} R(X,U)Z = u(Z)X - g(X,Z)U &+ \frac{c+1}{2}(g(Z,JX)V - v(Z)JX + 2v(X)JZ) \\ &- (\frac{3c+5}{2} + 2d\sigma(U,V))(v(X)u(Z)V - v(X)v(Z)U) \\ &= (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2}(V \wedge_g JX - 2v(X)J) - v(X)(\frac{3c+5}{2} \\ &+ 2d\sigma(U,V))(V \wedge_g U)).Z. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

1. En remplaçant X par V dans la formule (5.2.10), on obtient

$$\begin{aligned} R(V,U)Z &= (V \wedge_g U + \frac{c+1}{2}(V \wedge_g U - 2J)) - (\frac{3c+5}{2} + 2d\sigma(U,V))((V \wedge_g U))Z \\ &= -[(c+1+2d\sigma(U,V))(V \wedge_g U) + (c+1)J]Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(U,V)Z = -R(V,U)Z &= [(c+1+2d\sigma(U,V))(V \wedge_g U) + (c+1)J]Z \\ &= [-(c+1+2d\sigma(U,V))(U \wedge_g V) + (c+1)J]Z. \end{aligned}$$

2. Soit X un champ de vecteurs horizontal, alors la formule (5.2.10) devient :

$$R(X,U)Z = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2}V \wedge_g JX)Z.$$

Finalement, pour deux champs de vecteurs horizontaux X et Y la formule (4.5.1) devient :

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(Z,JY)JX \\
&- g(Z,JX)JY + 2g(X,JY)JZ) \\
&+ \frac{c-1}{4}(g(Z,GY)GX - g(Z,GX)GY + 2g(X,GY)GZ \\
&+ g(Z,HY)HX - g(Z,HX)HY + 2g(X,HY)HZ \\
&+ 2v(Z)g(X,JY)U - 2u(Z)g(X,JY)V) \\
&= [\frac{c+3}{4}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY + 2g(X,JY)J) \\
&+ \frac{c-1}{4}(GX \wedge_g GY + HX \wedge_g HY \\
&+ 2g(X,GY)G + 2g(X,HY)H + 2g(X,JY)(U \wedge_g V))]Z.
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.5. *Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de contact normale à courbure constante. Pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 et X_4 sur M, on a :*

1. $R.R(X_1,X_2,X_3,X_4;U,V) = 0$,
2. $R.R(X_1,X_2,X_3,X_4;X,U) = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX).R(X_1,X_2,X_3,X_4)$,
3. $R.R(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = [\frac{c+3}{4}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY) + \frac{c-1}{4}(GX \wedge_g GY + HX \wedge_g HY + 2g(X,GY)G + 2g(X,HY)H].R(X_1,X_2,X_3,X_4)$

où X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux.

Démonstration. 1. Pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 et X_4 sur M, on a

$$\begin{aligned}
R(U,X_2,X_3,X_4) &= g(X_2,X_3)u(X_4) - u(X_3)g(X_2,X_4) + \frac{c+1}{2}(v(X_3)g(JX_2,X_4) \\
&- g(X_3,JX_2)v(X_4) + 2v(X_2)g(JX_3,X_4)) \\
&- (2d\sigma(U,V) + \frac{3c+5}{2})v(X_2)(v(X_3)u(X_4) \\
&- u(X_3)v(X_4)).
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

$$
\begin{aligned}
R(V, X_2, X_3, X_4) = {} & g(X_2, X_3)v(X_4) - v(X_3)g(X_2, X_4) + \frac{c+1}{2}(g(JX_2, X_3)u(X_4) \\
& - u(X_3)g(JX_2, X_4) + 2u(X_2)g(JX_3, X_4)) \\
& - (\frac{3c+5}{2} + 2d\sigma(U, V))u(X_2)(v(X_3)u(X_4) \\
& - u(X_3)v(X_4)).
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

En utilisant les formules (5.2.11) et (5.2.12) on calcule $(U \wedge_g V).R$, pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 et X_4 sur M, on a

$$
\begin{aligned}
(U \wedge_g V).R(X_1, X_2, X_3, X_4) = {} & u(X_1)R(V, X_2, X_3, X_4) - v(X_1)R(U, X_2, X_3, X_4) \\
& + u(X_2)R(X_1, V, X_3, X_4) - v(X_2)R(X_1, U, X_3, X_4) \\
& + u(X_3)R(X_1, X_2, V, X_4) - v(X_3)R(X_1, X_2, U, X_4) \\
& + u(X_4)R(X_1, X_2, X_3, V) - v(X_4)R(X_1, X_2, X_3, U) \\
= {} & 0.
\end{aligned}
$$

2. En utilisant (2) du lemme 5.2.4 on a, pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, X_3, X_4 sur M et pour un champ de vecteurs horizontal X :

$$R.R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, U) = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

3. Finalement, en utilisant (3) du lemme 5.2.4 le lemme 5.2.2, on obtient

$$
\begin{aligned}
R.R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = {} & [\frac{c+3}{4}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY) + \frac{c-1}{4}(GX \wedge_g GY + HX \wedge_g HY \\
& + 2g(X, GY)G + 2g(X, HY)H].R(X_1, X_2, X_3, X_4),
\end{aligned}
$$

où X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux.

□

Théorème 5.2.6. *Une variété complexe de contact normale à courbure constante est semi-symétrique si et seulement si il est localement isométrique à* $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$.

Démonstration. Il est clair que si M est localement isométrique à $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$ alors il est semi-symétrique. Dans [8], D. Blair et A. Mihai ont prouvé qu'une variété complexe de contact est localement symétrique ($\nabla R = 0$) si et seulement si elle est localement isométrique à $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$.
Maintenant, supposons que M est semi-symétrique $R.R = 0$. Par l'utilisation de (2) de la proposition 5.2.5, on obtient

$$R(X,U).R(X_1,X_2,X_3,X_4) = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX).R(X_1,X_2,X_3,X_4) = 0 \tag{5.2.13}$$

ce qui implique

$$(X \wedge_g U).R(X_1,X_2,X_3,X_4) = \frac{c+1}{2}(JX \wedge_g V).R(X_1,X_2,X_3,X_4) \tag{5.2.14}$$

Pour $X_1 = X, X_2 = X_3 = GX, X_4 = U$ où X est un champ de vecteurs unitaire horizontal on a

$$(X \wedge_g U).R(X,GX,GX,U) = 1 - c,$$
$$(JX \wedge_g V).R(X,GX,GX,U) = 0.$$

Par l'utilisation de la formule (5.2.14) on obtient $c = 1$.
Maintenant, on suppose que $c = 1$. En utilisant la formule (4.5.1) alors le tenseur de courbure de Riemann R est donné par

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(Z,JY)JX - g(Z,JX)JY + 2g(X,JY)JZ) \\ &\quad - 4(d\sigma(U,V) + 2)u \wedge_g v(X,Y)(v(Z)U - u(Z)V). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Pour un champ de vecteurs unitaire horizontal X, on a

$$R(X,U).R(X,V,V,U) = 4(d\sigma(U,V) + 2) = 0 \Rightarrow d\sigma(U,V) = -2.$$

Alors la variété complexe de contact M est localement isométrique à $\mathbb{C}P^{2n+1}(4)$. □

Théorème 5.2.7. *Les variétés complexes de contact normales à courbure constante ne sont pas proprement pseudo-symétriques.*

Démonstration. Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de contact normale à courbure constante. M est proprement pseudo-symétrique si $R.R = L_R Q(g.R)$ avec $L_R \neq 0$.

Par l'utilisation de 2 du lemme 5.2.4, pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, X_3, X_4 sur M et pour un champ de vecteurs horizontal X, on a

$$R.R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, U) = (X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4). \quad (5.2.16)$$

Supposons que M est proprement pseudo-symétrique alors il existe sur M une fonction L_R non nulle telle que

$$R.R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, U) = L_R Q(g, R).R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, U). \quad (5.2.17)$$

Par les formules (5.2.16) et (5.2.11), on trouve

$$(X \wedge_g U + \frac{c+1}{2} V \wedge_g JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4) = L_R (X \wedge_g U).R(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

ce qui implique

$$(L_R - 1)(X \wedge_g U).R(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{c+1}{2}(V \wedge_g JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4). \quad (5.2.18)$$

Pour $X_1 = X, X_2 = X_3 = GX, X_4 = U$ où X est un champ de vecteurs horizontal, on a

$$(X \wedge_g U).R(X, GX, GX, U) = R(U, GX, GX, U) - R(X, GX, GX, X) = 1 - c,$$

et

$$(JX \wedge_g V).R(X, GX, GX, U) = 0$$

$$(L_R - 1)(X \wedge_g U).R(X, GX, GX, U) = \frac{c+1}{2}(V \wedge_g JX).R(X, GX, GX, U)$$

$$\Rightarrow (L_R - 1)(1 - c) = 0$$

ce qui implique

$$\begin{cases} L_R = 1, or \\ c = 1. \end{cases}$$

Supposons que $c = 1$ et soit $X_1 = X, X_2 = X_3 = JX, X_4 = U$ où X est un champ de vecteurs unitaire. On a

$$\begin{aligned}(X \wedge_g U).R(X, JX, JX, U) &= R(U, JX, JX, U) - R(X, JX, JX, X)\\ &= -(c+2) = -3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(V \wedge_g JX).R(X, JX, JX, U) &= -R(X, V, JX, U) - R(X, JX, V, U)\\ &= R(U, JX, X, V) + R(U, V, X, JX) \qquad (5.2.19)\\ &= 3\frac{c+1}{2} = 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(L_R - 1)(X \wedge_g U).R(X, JX, JX, U) &= \frac{c+1}{2}(V \wedge_g JX).R(X, JX, JX, U)\\ &\Rightarrow -3(L_R - 1) = 3 \Rightarrow L_R = 0 \ \ (\mathit{contradiction}).\end{aligned}$$

Alors $L_R = 1$ en utilisant les formules (5.2.18) et (5.2.19) on obtient $c = -1$. D'autre part on a

$$\begin{aligned}R(X, Y).R(X_1, X_2, X_3, X_4) = [&\frac{c+3}{4}(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY + 2g(X, JY)J)\\ &+ \frac{c-1}{4}(GX \wedge_g GY + HX \wedge_g HY + 2g(X, GY)G\\ &+ 2g(X, HY)H)].R(X_1, X_2, X_3, X_4).\end{aligned} \qquad (5.2.20)$$

Maintenant, on suppose que M est proprement pseudo-symétrique avec $L_R = 1$ et $c = -1$. Alors la formule (5.2.20) devient

$$\begin{aligned}R(X, Y).R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= \frac{1}{2}[(X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY) - (GX \wedge_g GY + HX \wedge_g HY\\ &\quad + 2g(X, GY)G + 2g(X, HY)H)].R(X_1, X_2, X_3, X_4)\\ &= (X \wedge_g Y).R(X_1, X_2, X_3, X_4),\end{aligned}$$

pour $Y = JX$, on obtient

$$\begin{aligned}R(X, JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= [(X \wedge_g JX) - (GX \wedge_g HX)].R(X_1, X_2, X_3, X_4)\\ &= (X \wedge_g JX).R(X_1, X_2, X_3, X_4)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$((GX \wedge_g HY)).R(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

mais pour $X_1 = GX, X_2 = X_3 = JX$ et $X_4 = X$, où X est un champ de vecteurs horizontal unitaire, on obtient

$$\begin{aligned} R(GX, JX, JX, X; GX, X) &= R(X, JX, JX, X) - R(GX, JX, JX, GX) \\ &= 3 \neq 0. \end{aligned}$$

d'ou la contradiction, alors M ne peut pas être pseudo-symétrique. □

5.2.1 Les propriétés symétriques des variétés complexes de (κ, μ)-contact

Lemme 5.2.8. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. Pour tous vecteurs unitaires X et Y sur M on a*

$$K(X, Y) = K(JX, JY).$$

Démonstration. Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. Soient X et Y deux vecteurs unitaires sur M :

1. Si $X = U$ et $Y = V$, sachant que $JU = -V$ et $JV = U$ alors on a

$$0 = K(U, V) = R(U, V, U, V) = R(V, U, V, U) = R(JU, JV, JU, JV) = K(JU, JV)$$

2. Si X est un vecteur horizontal unitaire alors d'après le théorème 4.7.2, la courbure U-sectionnelle et la courbure V-sectionnelle sont données par

$$K(X, U) = K(X, V) = \kappa + \mu g(hX, X) = \begin{cases} \kappa + \lambda\mu, & \text{si } X \in [\lambda], \\ \kappa - \lambda\mu, & \text{si } X \in [-\lambda] \end{cases}, \quad (5.2.21)$$

sachant que si $X \in [\lambda]$ alors $JX \in [\lambda]$ et si $X \in [-\lambda]$ alors $JX \in [-\lambda]$ car J

commute avec h alors la formule (5.2.21) donne

$$\begin{aligned} K(JX,JU) &= K(JX,JV) \\ &= K(JX,V) = K(JX,U)) = \kappa + \mu g(hJX,JX) = \kappa + \mu \underbrace{g(JhX,JX)}_{=g(hX,Y)} \\ &= \kappa + \mu g(hX,X) = \begin{cases} \kappa + \lambda\mu, & \text{si } X \in [\lambda], \\ \kappa - \lambda\mu, & \text{si } X \in [-\lambda] \end{cases} = K(X,U) = K(X,V). \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

3. Si X et Y sont deux vecteurs unitaires horizontaux alors d'après le théorème 4.7.2 la courbure sectionnelle du plan section engendré par X et Y est donnée par

$$K(X,Y) = \begin{cases} (2-\mu+2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [\lambda], \\ -(\kappa+\mu)(g(X,GY)^2 + g(X,HY)^2), & \text{si } X \in [\lambda], Y \in [-\lambda], \\ (2-\mu-2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [-\lambda]. \end{cases}, \tag{5.2.23}$$

replaçons X par JX et Y par JY dans la formule (5.2.23) alors comme J et anti-commute avec G et H

$$\begin{aligned} K(JX,JY) &= \begin{cases} (2-\mu+2\lambda)(1+3\underbrace{g(JX,J^2Y)}_{=g(X,JY)}{}^2), & \text{si } X,Y \in [\lambda], \\ -(\kappa+\mu)(g(JX,GJY)^2 + g(JX,HJY)^2), & \text{si } X \in [\lambda], Y \in [-\lambda], \\ (2-\mu-2\lambda)(1+3\underbrace{g(JX,J^2Y)}_{=g(X,JY)}{}^2), & \text{si } X,Y \in [-\lambda]. \end{cases} \\ &= \begin{cases} (2-\mu+2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [\lambda], \\ -(\kappa+\mu)((-\underbrace{g(JX,JGY)}_{=g(X,GY)})^2 + (-\underbrace{g(JX,JHY)}_{=g(X,HY)})^2), & \text{si } X \in [\lambda], Y \in [-\lambda], \\ (2-\mu-2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [-\lambda]. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(JX,JY) &= \begin{cases} (2-\mu+2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [\lambda], \\ -(\kappa+\mu)(g(X,GY)^2 + g(X,HY)^2), & \text{si } X \in [\lambda], Y \in [-\lambda], \\ (2-\mu-2\lambda)(1+3g(X,JY)^2), & \text{si } X,Y \in [-\lambda]. \end{cases} \\ &= K(X,Y) \end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.9. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. Soit $\{e_i, Je_i, Ge_i, He_i, U, V\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée avec $e_i, Je_i \in [\lambda]$ et $Ge_i, He_i \in [-\lambda]$. On a*

1. $K(e_i, e_j) = K(e_i, Je_j) = 2 - \mu + 2\lambda$ *pour* $i \neq j$,
2. $K(e_i, Je_i) = 4(2 - \mu + 2\lambda)$,
3. $K(e_i, Ge_j) = K(e_i, He_j) = K(Je_i, Ge_j) = K(Je_i, He_j) = 0$ *pour* $i \neq j$,
4. $K(e_i, Ge_i) = K(e_i, He_i) = K(Je_i, Ge_i) = K(Je_i, He_i) = -(\kappa + \mu)$,
5. $K(e_i, U) = K(Je_i, U) = K(e_i, V) = K(Je_i, V) = \kappa + \lambda\mu$,
6. $K(Ge_i, U) = K(He_i, U) = K(Ge_i, V) = K(He_i, V) = \kappa - \lambda\mu$.

Démonstration. Soit $B = \{e_i, Je_i, Ge_i, He_i, U, V\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée avec $e_i, Je_i \in [\lambda]$ et $Ge_i, He_i \in [-\lambda]$.

1. Soit $e_i, e_j \in B$ tels que $i \neq j$. Puisque $e_i, e_j \in [\lambda]$ d'après le théorème 4.7.2 alors
$$K(e_i, e_j) = (2 - \mu + 2\lambda)(1 + \underbrace{3g(e_i, Je_j)^2}_{=0})$$
$$= (2 - \mu + 2\lambda)$$
de même pour e_i, Je_j $(i \neq j)$, puisque $e_i, Je_j \in [\lambda]$ alors
$$K(e_i, Je_j) = (2 - \mu + 2\lambda)(1 + 3g(e_i, J^2 e_j)^2)$$
$$= (2 - \mu + 2\lambda)(1 + \underbrace{3g(e_i, e_j)^2}_{=0}),$$
$$= (2 - \mu + 2\lambda)$$
2. Calculons $K(e_i, Je_i)$,
$$K(e_i, Je_i) = (2 - \mu + 2\lambda)(1 + 3g(e_i, \underbrace{J^2 e_i}_{=-e_i})^2)$$
$$= (2 - \mu + 2\lambda)(1 + 3(-\underbrace{g(e_i, e_i)}_{=1})^2)$$
$$= 4(2 - \mu + 2\lambda)$$

3. Calculons $K(e_i, Ge_j)$ pour $i \neq j$, comme $e_i \in [\lambda]$ et $Ge_j \in [-\lambda]$ alors d'après le théorème 4.7.2

$$\begin{aligned} K(e_i, Ge_j) &= -(\kappa+\mu)(g(e_i, \underbrace{G^2 e_j}_{=-e_j})^2 + g(e_i, \underbrace{HGe_j}_{=Je_j})^2) \\ &= -(\kappa+\mu)(\underbrace{g(e_i, e_j)}_{=0}{}^2 + \underbrace{g(e_i, Je_j)^2}_{=0}) \qquad (5.2.24) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après le lemme 5.2.8

$$K(e_i, Ge_j) = K(Je_i, \underbrace{GJ}_{=H} e_j) = K(Je_i, He_j)$$

de même pour $K(e_i, He_j)$,

$$\begin{aligned} K(e_i, He_j) &= -(\kappa+\mu)(g(e_i, \underbrace{GHe_j}_{=-Je_j})^2 + g(e_i, \underbrace{H^2 e_j}_{=-e_j})^2) \\ &= -(\kappa+\mu)(\underbrace{g(e_i, Je_j)}_{=0}{}^2 + \underbrace{g(e_i, e_j)^2}_{=0}) \qquad (5.2.25) \\ &= 0, \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 5.2.8 on trouve

$$K(Je_i, \underbrace{HJ}_{=-G} e_j) = K(Je_i, Ge_j)$$

calculons $K(e_i, Ge_i)$, on a $e_i \in [\lambda], Ge_i \in [-\lambda]$,

$$\begin{aligned} K(e_i, Ge_i) &= -(\kappa+\mu)(g(e_i, \underbrace{G^2 e_i}_{=-e_i})^2 + g(e_i, \underbrace{HGe_i}_{=Je_i})^2) \\ &= -(\kappa+\mu)(\underbrace{g(e_i, e_i)}_{=1}{}^2 + \underbrace{g(e_i, Je_i)^2}_{=0}) \qquad (5.2.26) \\ &= -(\kappa+\mu), \end{aligned}$$

par le lemme 5.2.8

$$K(e_i, Ge_i) = K(Je_i, \underbrace{GJ}_{=H} e_i) = K(Je_i, He_i),$$

de même pour $K(e_i, He_i)$, pour $e_i \in [\lambda]$ et $He_i \in [-\lambda]$,

$$\begin{aligned}
K(e_i, He_i) &= -(\kappa+\mu)(g(e_i, \underbrace{GHe_i}_{=-Je_i})^2 + g(e_i, \underbrace{H^2e_i}_{=-e_i})^2) \\
&= -(\kappa+\mu)(\underbrace{g(e_i, Je_i)}_{=0}{}^2 + \underbrace{g(e_i, e_i)^2}_{=1}) \qquad (5.2.27) \\
&= -(\kappa+\mu),
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 5.2.8, on trouve

$$K(e_i, He_i) = K(Je_i, \underbrace{HJ}_{=-G}e_i) = K(Je_i, Ge_i)$$

4. Calculons $K(e_i, U)$. On utilise le théorème 4.7.2, puisque $e_i \in [\lambda]$ alors

$$\begin{aligned}
K(e_i, U) = K(e_i, V) &= \kappa + \mu \underbrace{g(he_i, e_i)}_{=\lambda} \qquad (5.2.28) \\
&= \kappa + \lambda\mu,
\end{aligned}$$

d'après le lemme 5.2.8

$$K(e_i, U) = K(Je_i, JU) = K(Je_i, V),$$

et d'après le théorème 4.7.2 on a

$$K(Je_i, V) = K(Je_i, U),$$

pour $K(Ge_i, U)$ et comme $Ge_i \in [-\lambda]$, en utilisant le théorème 4.7.2, on obtient

$$\begin{aligned}
K(Ge_i, U) &= \kappa + \mu \underbrace{g(hGe_i, Ge_i)}_{=-\lambda} \qquad (5.2.29) \\
&= \kappa - \lambda\mu = K(Ge_i, V),
\end{aligned}$$

et d'après le lemme 5.2.8

$$K(Ge_i, U) = K(\underbrace{GJ}_{=H}e_i, JU) = K(He_i, V),$$

et par le théorème 4.7.2

$$K(He_i, V) = K(He_i, U).$$

□

Proposition 5.2.10. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. L'opérateur de Ricci Q est donné par*

$$\begin{aligned} Q &= (4n+4-(2n+4)\mu)I + (4n\kappa + (2n+4)\mu \\ &- (4n+4))(u \otimes U + v \otimes V) + (4n+4+2\mu)h, \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

et la courbure de Ricci ρ est donnée par

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) = (4n+4-(2n+4)\mu)g(X,Y) + (4n\kappa + (2n+4)\mu \\ - (4n+4))(u(X)u(Y) + v(X)v(Y)) + (4n+4+2\mu)g(hX,Y), \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M. De plus M a une courbure scalaire constante $s = 8n(\kappa - (n+2)\mu + 2n + 2)$.

Démonstration. Soit $\{e_i, Je_i, Ge_i, He_i, U, V\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée avec $e_i, Je_i \in [\lambda]$ et $Ge_i, He_i \in [-\lambda]$. On a pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \rho(e_j, e_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} [K(e_j, e_i) + K(e_j, Je_i) + K(e_j, Ge_i) + K(e_j, He_i)] \\ + K(e_j, U) + K(e_j, V) + K(e_j, Je_j) + K(e_j, Ge_j) + K(e_j, He_j)] \end{aligned}$$

Utilisons le lemme 5.2.9, on trouve

$$\begin{aligned} \rho(e_j, e_j) &= 2(n-1)(2-\mu+2\lambda) + 2(\kappa + \lambda\mu) + 4(2-\mu+2\lambda) - 2(\kappa+\mu) \\ &= 4n + 4 - (2n+4)\mu + (4n+4+2\mu)\lambda \end{aligned}$$

du lemme 5.2.8

$$\rho(e_j, e_j) = \rho(Je_j, Je_j).$$

Calculons $\rho(Ge_j, Ge_j)$

$$\begin{aligned} \rho(Ge_j, Ge_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} & [K(Ge_j, e_i) + K(Ge_j, Je_i) + K(Ge_j, Ge_i) \\ & + K(Ge_j, He_i)] + K(Ge_j, U) + K(Ge_j, V) \\ & + K(Ge_j, e_j) + K(Ge_j, Je_j) + K(Ge_j, He_j), \end{aligned}$$

de même, on utilise le lemme 5.2.9, on trouve

$$\begin{aligned}\rho(Ge_j, Ge_j) &= 2(n-1)(2-\mu-2\lambda)+4(2-\mu-2\lambda)+2(\kappa-\lambda\mu)-2(\kappa+\mu)\\ &= 4n+4-(2n+4)\mu-(4n+4+2\mu)\lambda\end{aligned}$$

du lemme 5.2.8

$$\rho(Ge_j, Ge_j) = \rho(He_j, He_j).$$

Soit X un champ de vecteurs sur M, alors X s'écrit dans la base $\{e_i, Je_i, Ge_i, He_i, U, V\}_{1\leq i\leq n}$ sous la forme

$$X = X^i e_i + X^{n+i}Je_i + X^{2n+i}Ge_i + X^{3n+i}He_i + u(X)U + v(X)V,$$

calculons QX

$$\begin{aligned}QX = &\sum_{i=1}^{n}(X^i\rho(e_i,e_i)e_i + X^{n+i}\rho(Je_i,Je_i)Je_i + X^{2n+i}\rho(Ge_i,Ge_i)Ge_i\\ &+ X^{3n+i}\rho(He_i,He_i)He_i + u(X)\rho(U,U)U + v(X)\rho(V,V)V\\ &= \sum_{i=1}^{n}[(4n+4-(2n+4)\mu+(4n+4+2\mu)\lambda)X^ie_i + (4n+4-(2n+4)\mu+(4n+4+2\mu)\lambda)X^{n+i}Je_i\\ &+ (4n+4-(2n+4)\mu-(4n+4+2\mu)\lambda)X^{2n+i}Ge_i + (4n+4-(2n+4)\mu\\ &- (4n+4+2\mu)\lambda)X^{3n+i}He_i + 4n\kappa(u(X)U+v(X)V)\\ &= \sum_{n=1}^{n}(4n+4-(2n+4)\mu)(X^ie_i + X^{n+i}Je_i + X^{2n+i}Ge_i + X^{3n+i}He_i + u(X)U + v(X)V\\ &- (u(X)U+v(X)V)) + \sum_{n=1}^{n}[(4n+4+2\mu)(X^i\lambda e_i + X^i\lambda Je_i - X^i\lambda Ge_i - X^i\lambda He_i)]\\ &= (4n+4-(2n+4)\mu)X - (4n+4-(2n+4)\mu)(u(X)U+v(X)V) + 4n\kappa(u(X)U+v(X)V)\\ &+ \sum_{i=1}^{n}[(4n+4+2\mu)(X^i\lambda e_i + X^{n+i}\lambda Je_i - X^{2n+i}\lambda Ge_i - X^{3n+i}\lambda He_i)].\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

Puisque $he_i = \lambda e_i$, $hJe_i = \lambda Je_i$, $hGe_i = -\lambda Ge_i$, $hHe_i = -\lambda He_i$ et $hU = hV = 0$ alors l'équation (5.2.32) peut être s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}QX = &(4n+4-(2n+4)\mu)X + (4n\kappa-(4n+4)\\ &+ (2n+4)\mu)(u(X)U+v(X)V) + (4n+4+2\mu)hX,\end{aligned}$$

d'où la courbure de Ricci est donnée par

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) = g(QX,Y) &= (4n+4-(2n+4)\mu)g(X,Y) + (4n\kappa - (4n+4) \\ &+ (2n+4)\mu)(u(X)u(Y)+v(X)v(Y)) + (4n+4+2\mu)g(hX,Y).\end{aligned}$$

Par ailleurs, la courbure scalaire s est donnée par

$$\begin{aligned}s &= \sum_{i=1}^{4n+2}\rho(e_i,e_i) = 4n(4n+4-(2n+4)\mu) + 8n\kappa \\ &= 8n(2n+2-(n+2)\mu+\kappa).\end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, l'opérateur de Ricci Q sera écrit sous la forme suivante

$$Q = \alpha I + \beta(u\otimes U + v\otimes V) + \gamma h,$$

avec

$$\begin{aligned}&\alpha = 4n+4-(2n+4)\mu); \quad \beta = 4n\kappa + (2n+4)\mu - (4n+4); \\ &\gamma = 4n+4+2\mu.\end{aligned}$$

Proposition 5.2.11. *Les variétés complexes de (κ,μ)-contact $(\kappa<1)$ ne sont pas d'Einstein.*

Démonstration. Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact $(\kappa<1)$. D'après la formule (5.2.30), si M est une variété d'Einstein alors il existe une constante τ telle que

$$\rho(X,Y) = \tau g(X,Y)$$

D'une part, si $X=U$, alors

$$\rho(U,U) = 4n\kappa = \tau$$

D'autre part, pour un champ de vecteurs unitaire X on trouve

$$4n+4-(2n+4)\mu + \lambda(4n+4+2\mu) = 4n\kappa, \quad si\ X\in[\lambda] \tag{5.2.33}$$

$$4n+4-(2n+4)\mu - \lambda(4n+4+2\mu) = 4n\kappa, \quad si\ X\in[-\lambda]. \tag{5.2.34}$$

En utilisant les formules (5.2.33) et (5.2.34) on obtient

$$\begin{cases} 2n+2-(n+2)\mu = 2n\kappa, \\ \lambda(4n+4+2\mu) = 0. \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \lambda = 0 & M \text{ est normale (impossible)}; \textit{ou} \\ \begin{cases} \mu = -2(n+1) \\ \kappa = \frac{(n+3)(n+1)}{n} > 1 \quad (\textit{impossible}). \end{cases} & \end{cases}.$$

□

Lemme 5.2.12. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$. La dérivée covariante de la courbure de Ricci ρ est donnée par*

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\rho)(X,Y) = -\beta[&(g(X,GZ)+g(X,GhZ))u(Y)+(g(Y,GZ) \\ &+g(Y,GhZ))u(X))+(g(X,HZ)+g(X,HhZ))v(Y) \\ &+(g(Y,HZ)+g(Y,HhZ))v(X)]+\gamma g((\nabla_Z h)X,Y),\end{aligned} \tag{5.2.35}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M.

Démonstration. Soient X, Y et Z trois champs de vecteurs sur M, on a

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\rho)(X,Y) &= \nabla_Z\rho(X,Y) - \rho(\nabla_Z X, Y) - \rho(X, \nabla_Z Y) \\ &= \nabla_Z[\alpha g(X,Y) + \beta(u(X)u(Y)+v(X)v(Y)) + \gamma g(hX,Y)] \\ &- \alpha[g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z Y)] - \beta[u(\nabla_Z X)u(Y)+v(\nabla_Z X)v(Y)+u(X)u(\nabla_Z Y) \\ &+ v(X)v(\nabla_Z Y)] - \gamma[g(h\nabla_Z X,Y)+g(hX,\nabla_Z Y)] \\ &= \alpha[\underbrace{\nabla_Z g(X,Y) - g(\nabla_Z X,Y) - g(X,\nabla_Z Y)}_{0}] + \beta[u(Y)(\nabla_Z u(X) - u(\nabla_Z X)) \\ &+ u(X)(\nabla_Z u(Y) - u(\nabla_Z Y)) + v(Y)(\nabla_Z v(X) - v(\nabla_Z X)) + v(X)(\nabla_Z v(Y) - v(\nabla_Z Y)) \\ &+ \gamma[\nabla_Z g(hX,Y) - g(h\nabla_Z X,Y) - g(hX,\nabla_Z Y)].\end{aligned} \tag{5.2.36}$$

Sachant que $\nabla_X U = -GX - GhX + \sigma(X)V$ et $\nabla_X V = -HX - HhX - \sigma(X)U$ on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla_Z u(X) - u(\nabla_Z X) &= \nabla_Z g(X,U) - g(\nabla_Z X, U) \\
&= g(X, \nabla_Z U) = -g(X, GZ) - g(X, GhZ) + \sigma(Z)v(X), \\
\nabla_Z v(X) - v(\nabla_Z X) &= \nabla_Z g(X,V) - g(\nabla_Z X, V) \\
&= g(X, \nabla_Z V) = -g(X, HZ) - g(X, HhZ) - \sigma(Z)u(X),
\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

de même

$$\begin{aligned}
\nabla_Z u(Y) - u(\nabla_Z Y) &= \nabla_Z g(Y,U) - g(\nabla_Z Y, U) \\
&= g(Y, \nabla_Z U) = -g(Y, GZ) - g(Y, GhZ) + \sigma(Z)v(Y), \\
\nabla_Z v(Y) - v(\nabla_Z Y) &= \nabla_Z g(Y,V) - g(\nabla_Z Y, V) \\
&= g(Y, \nabla_Z V) = -g(Y, HZ) - g(Y, HhZ) - \sigma(Z)u(Y),
\end{aligned} \tag{5.2.38}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\nabla_Z g(hX,Y) - g(h\nabla_Z X, Y) - g(hX, \nabla_Z Y) &= g(\nabla_Z hX, Y) + g(hX, \nabla_Z Y) \\
&- g(h\nabla_Z X, Y) - g(hX, \nabla_Z Y) = g((\nabla_Z h)X, Y),
\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

en utilisant les formules (5.2.37), (5.2.38) et (5.2.39) alors la formule (5.2.36) donne

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \rho)(X,Y) &= \beta[(-g(X,GZ) - g(X,GhZ) + \sigma(Z)v(X))u(Y) + (-g(Y,GZ) - g(Y,GhZ) \\
&+ \sigma(Z)v(Y))u(X) + (-g(X,HZ) - g(X,HhZ) - \sigma(Z)u(X))v(Y) \\
&+ (-g(Y,HZ) - g(Y,HhZ) - \sigma(Z)u(Y))v(X) + \gamma(g((\nabla_Z h)X,Y) \\
&= -\beta[(g(X,GZ) + g(X,GhZ))u(Y) + (g(Y,GZ) + g(Y,GhZ))u(X)) \\
&+ (g(X,HZ) + g(X,HhZ))v(Y) + (g(Y,HZ) + g(Y,HhZ))v(X)] + \gamma g((\nabla_Z h)X,Y).
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 5.2.13. *Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact $(\kappa < 1)$. M est Ricci-symétrique si et seulement si M est localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.*

Démonstration. Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact $(\kappa<1)$. Supposons que M est Ricci-symétrique $(\nabla\rho=0)$ alors pour tous champs de vecteurs X,Y et Z sur M on a

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\rho)(X,Y) = &-\beta[(g(X,GZ)+g(X,GhZ))u(Y)+(g(Y,GZ)\\ &+g(Y,GhZ))u(X))+(g(X,HZ)+g(X,HhZ))v(Y)\\ &+(g(Y,HZ)+g(Y,HhZ))v(X)]+\gamma g((\nabla_Z h)X,Y)=0.\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

On a trois cas à étudier

Premier cas : On remplace Z par U et Y par GX dans l'équation (5.2.35) et sachons que $\nabla_U h=\mu hG$, on obtient

$$\begin{aligned}0=(\nabla_U\rho)(X,GX) &= \gamma(g((\nabla_U h)X,GX)=\gamma\mu g(hGX,GX)\\ &= \begin{cases} -\lambda\gamma\mu & \text{pour un champ de vecteurs unitaire } X\in[\lambda] \\ \lambda\gamma\mu & \text{pour un champ de vecteurs unitaire } X\in[-\lambda] \end{cases}.\end{aligned}$$

Second cas : Soit Z un champ de vecteurs unitaire de $[\lambda]$.

On remplace X par GZ $(GZ\in[-\lambda])$ et Y par U dans l'équation (5.2.35), sachant que $uG=vG=0$ on obtient

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\rho)(GZ,U) = &-\beta[(\underbrace{g(GZ,GZ)}_{=1}+\underbrace{g(GZ,GhZ)}_{=\lambda})\underbrace{u(U)}_{=1}+(g(U,GZ)\\ &+g(U,GhZ))\underbrace{u(GZ))}_{=0}+(g(GZ,HZ)+g(GZ,HhZ))\underbrace{v(U)}_{=0}\\ &+(g(U,HZ)+g(U,HhZ))\underbrace{v(GZ)}_{=0}]+\gamma g((\nabla_Z h)GZ,U)\\ = &-\beta(1+\lambda)+\gamma g((\nabla_Z h)GZ,U),\end{aligned}$$

calculons $(\nabla_Z h)GZ$

$$\begin{aligned}(\nabla_Z h)GZ &= \underbrace{u(GZ)}_{=0}(hGZ+(\kappa-1)GZ)+\underbrace{v(GZ)}_{=0}(hHZ+(\kappa-1))HZ)\\ &+\mu h(\underbrace{u(Z)G^2Z+v(Z)HGZ}_{=0})+(\underbrace{g(Z,hG^2Z)}_{=-\lambda}-(\kappa-1)\underbrace{g(Z,G^2Z)}_{=-1})U\\ &+(\underbrace{g(Z,hHGZ)}_{=0}-(\kappa-1)(\underbrace{g(Z,HGZ)}_{=0})V\\ &=(\kappa-\lambda-1)U,\end{aligned}$$

d'où

$$0=(\nabla_Z\rho)(GZ,U)=\gamma(g((\nabla_Z h)GZ,U)=-\beta(1+\lambda)+\gamma(\kappa-\lambda-1).$$

Troisième cas : Soit Z un champ de vecteurs unitaire de $[-\lambda]$.

On remplace X par GZ ($GZ\in[\lambda]$) et Y par U dans l'équation (5.2.35), sachant que $uG=vG=0$ on obtient

$$\begin{aligned}(\nabla_Z\rho)(GZ,U) &= -\beta[(\underbrace{g(GZ,GZ)}_{=1}+\underbrace{g(GZ,GhZ)}_{=-\lambda})\underbrace{u(U)}_{=1}+(g(U,GZ)\\ &+g(U,GhZ))u(GZ))+(g(GZ,HZ)+g(GZ,HhZ))\underbrace{v(U)}_{=0}\\ &+(g(U,HZ)+g(U,HhZ))\underbrace{v(GZ)}_{=0}]+\gamma g((\nabla_Z h)GZ,U)\\ &=\beta(\lambda-1)+\gamma g((\nabla_Z h)GZ,U),\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

calculons $(\nabla_Z h)GZ$

$$\begin{aligned}(\nabla_Z h)GZ &= \underbrace{u(GZ)}_{=0}(hGZ+(\kappa-1)GZ)+\underbrace{v(GZ)}_{=0}(hHZ+(\kappa-1))HZ)\\ &+\mu h(\underbrace{u(Z)G^2Z+v(Z)HGZ}_{=0})+(\underbrace{g(Z,hG^2Z)}_{=\lambda}-(\kappa-1)\underbrace{g(Z,G^2Z)}_{=-1})U\\ &+(\underbrace{g(Z,hHGZ)}_{=0}-(\kappa-1)(\underbrace{g(Z,HGZ)}_{=0})V\\ &=(\lambda+\kappa-1)U\end{aligned}$$

d'où

$$0 = (\nabla_Z \rho)(GZ, U) = \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda + \kappa - 1).$$

alors les trois cas nous donnent le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda\gamma\mu & = & 0 & \\ \beta(1+\lambda) + \gamma(\lambda - \kappa + 1) & = & 0 & (\star) \\ \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda + \kappa - 1) & = & 0 & (\star\star) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} & \lambda\gamma\mu & = 0 \cdots (1) \\ (\star) + (\star\star): & \lambda(\beta + \gamma) & = 0 \cdots (2) \\ (\star) - (\star\star): & \beta + (1-\kappa)\gamma & = 0 \cdots (3) \end{array}\right.$$

puisque $\kappa < 1$ c'est à dire que $\lambda \neq 0$ alors l'équation (1) admet deux solutions $\gamma = 0$ ou $\mu = 0$

- Supposons que $\gamma = 0$ alors l'équation (2) implique que $\beta = 0$ (variété d'Einstein ce qui est impossible).
- Supposons que $\mu = 0$. On substitue μ par sa valeur dans γ on trouve

$$\gamma = 4n + 4 + 2 \times 0 = 4n + 4 \neq 0,$$

d'autre part, sachant que $\kappa \neq 1$ ($\lambda \neq 0$) les équations (2) et (3) nous donnent

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta + \gamma & = & 0 \\ \beta + (1-\kappa)\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -\gamma \\ -\gamma + (1-\kappa)\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -\gamma \\ \kappa\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \kappa = 0$ localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.

$\square$

Lemme 5.2.14. *Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact ($\kappa < 1$). Pour tout champ de vecteurs X sur M, on a*

1. $J.\rho = 0$.
2. $(U \wedge_g V).\rho = 0$.
3. $R(U, V).\rho = 0$.
4. $R(U, X).\rho = [\kappa(U \wedge_g X) + \mu(U \wedge_g hX) + (\kappa - \mu)((JX \wedge_g V))].\rho$.

5. $R(V,X).\rho = [\kappa(V \wedge_g X) + \mu(V \wedge_g hX) + (\kappa-\mu)(U \wedge_g JX)].\rho.$

Démonstration. Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact $(\kappa<1)$.

1. Calculons $J.\rho$.

   J est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ alors J agit comme dérivation sur l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}(M)$ sur M (voir [36]). D'où J agit comme une dérivation sur ρ tel que pour tous champs de vecteurs X et Y sur M on a

$$J.\rho(X,Y) = -\rho(JX,Y) - \rho(X,JY),$$

   en utilisant la formule (5.2.31), on obtient

$$\begin{aligned} J.\rho(X,Y) &= -\rho(JX,Y) - \rho(X,JY) \\ &= -\alpha g(JX,Y) - \beta[\underbrace{u(JX)}_{=v(X)}u(Y) + \underbrace{v(JX)}_{=-u(X)}v(Y)] - \gamma\underbrace{g(hJX,Y)}_{=g(JhX,Y)} \\ &- \alpha\underbrace{g(X,JY)}_{=-g(JX,Y)} - \beta[u(X)\underbrace{u(JY)}_{=v(Y)} + v(X)\underbrace{v(JY)}_{=-u(Y)}] - \gamma\underbrace{g(hX,JY)}_{=-g(JhX,Y)} \\ &= -\alpha[g(JX,Y) - g(JX,Y)] - \beta[v(X)u(Y) - u(X)v(Y) \\ &+ u(X)v(Y) - v(X)u(Y)] - \gamma g(JhX - JhX, Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Calculons $(U \wedge_g V).\rho$. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. On a

$$(U \wedge_g V).\rho(X,Y) = -\rho((U \wedge_g V).X, Y) - \rho(X, (U \wedge_g V).Y),$$

   on utilise la formule (5.2.31), sachant que $QU = 4n\kappa U$ et $QV = 4n\kappa V$ on obtient

$$\begin{aligned} (U \wedge_g V).\rho(X,Y) &= -\rho((U \wedge_g V).X, Y) - \rho(X, (U \wedge_g V).Y) \\ &= u(X)\underbrace{\rho(V,Y)}_{=4n\kappa v(Y)} - v(X)\underbrace{\rho(U,Y)}_{=4n\kappa u(Y)} + u(Y)\underbrace{\rho(V,X)}_{=4n\kappa v(X)} - v(Y)\underbrace{\rho(U,X)}_{=4n\kappa u(X)} \\ &= 4n\kappa(u(X)v(Y) - v(X)u(Y) + u(Y)v(X) - v(Y)u(X)) = 0. \end{aligned}$$

3. De l'équation 3 du lemme 4.7.3

$$\begin{aligned}
R(U,V)X &= \kappa(\underbrace{g(V,X)}_{=v(X)}U - u(X)V) + \mu(\underbrace{g(hV,X)}_{=0}U - u(X)\underbrace{hV}_{=0}) \\
&\quad + (\kappa-\mu)(\underbrace{g(V,JX)}_{=-u(X)}V + v(X)\underbrace{JV}_{=U} + 2\underbrace{v(V)}_{=1}JX) \\
&\quad + (4\kappa - 3\mu)\underbrace{v(V)}_{=1}(u(X)V - v(X)U) \\
&= 2(\kappa-\mu)(u(X)V - v(X)U + JX),
\end{aligned} \tag{5.2.42}$$

la formule (5.2.42) s'écrit sous la forme suivante

$$R(U,V)X = 2(\kappa-\mu)((V \wedge_g U) + J).X.$$

En utilisant 1 et 2 on obtient

$$R(U,V).\rho = 2(\kappa-\mu)((V \wedge_g U) + J).\rho = 0.$$

4. Soient X et Y deux champs de vecteurs, d'après l'équation 3 du lemme 4.7.3

$$\begin{aligned}
R(U,X)Y &= \kappa(\underbrace{g(X,Y)U - u(Y)X}_{=(U\wedge_g X)Y}) + \mu(\underbrace{g(hX,Y)U - u(Y)hX}_{=(U\wedge_g hX)Y}) \\
&\quad + (\kappa-\mu)(\underbrace{g(X,JY)V + v(Y)JX}_{=(JX\wedge_g V)Y} + 2v(X)JY) + (4\kappa-3\mu)v(X)(\underbrace{u(Y)V - v(Y)U}_{=(V\wedge_g U)Y}) \\
&= [\kappa(U \wedge_g X) + \mu(U \wedge_g hX) + (\kappa-\mu)((JX \wedge_g V) + 2v(X)J) \\
&\quad + (4\kappa-3\mu)v(X)(V \wedge_g U)]Y.
\end{aligned}$$

En utilisant 1 et 2, on obtient

$$R(U,X).\rho = [\kappa(U \wedge_g X) + \mu(U \wedge_g hX) + (\kappa-\mu)((JX \wedge_g V))].\rho(Z,W).$$

5. Soient X et Y des champs de vecteurs sur M, d'après l'équation 3 du lemme 4.7.3,

$$\begin{aligned}R(V,X)Y &= \kappa(\underbrace{g(X,Y)V - v(Y)X}_{=(V\wedge_g X)Y}) + \mu(\underbrace{g(hX,Y)V - v(Y)hX}_{=(V\wedge_g hX)Y}) \\ &\quad - (\kappa-\mu)(\underbrace{g(X,JY)U + u(Y)JX}_{=(JX\wedge_g U)Y} + 2u(X)JY) \\ &\quad - (4\kappa - 3\mu)u(X)(\underbrace{u(Y)V - v(Y)U}_{=(V\wedge_g U)Y}) \\ &= [\kappa(V\wedge_g X) + \mu(V\wedge_g hX) + (\kappa-\mu)(U\wedge_g JX) \\ &\quad - 2u(X)J - (4\kappa-3\mu)u(X)(V\wedge_g U)]Y.\end{aligned}$$

En utilisant 1 et 2 on obtient

$$R(V,X).\rho = [\kappa(V\wedge_g X) + \mu(V\wedge_g hX) + (\kappa-\mu)(U\wedge_g JX)].\rho.$$

□

Théorème 5.2.15. *Soit (M,u,v,U,V,G,H,g) une variété complexe de (κ,μ)-contact $(\kappa<1)$. M est Ricci-semi-symétrique si et seulement si M est localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n(16)$.*

Démonstration. Soient X, Y, Z et W des champs de vecteurs sur M, par l'équation (5.2.31), on obtient

$$\begin{aligned}R(X,Y).\rho(Z,W) &= -\rho(R(X,Y)Z,W) - \rho(Z,R(X,Y)W) \\ &= -\alpha[\underbrace{g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W)}_{=0}] - \beta[\underbrace{u(R(X,Y)Z)}_{=-g(R(X,Y)U,Z)}u(W) \\ &\quad + u(Z)\underbrace{u(R(X,Y)W)}_{=-g(R(X,Y)U,W)} + \underbrace{v(R(X,Y)Z)}_{=-g(R(X,Y)V,Z)}v(W) + v(Z)\underbrace{v(R(X,Y)W)}_{=-g(R(X,Y)V,W)}] \\ &\quad - \gamma g(hR(X,Y)Z,W) + \underbrace{g(hZ,R(X,Y)W)}_{=-g(R(X,Y)hZ,W)} \\ &= \beta[g(R(X,Y)U,Z)u(W) + g(R(X,Y)U,W)u(Z) + g(R(X,Y)V,Z)v(W) \\ &\quad + g(R(X,Y)V,W)v(Z)] + \gamma g(R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z,W).\end{aligned} \tag{5.2.43}$$

On suppose que M est Ricci-semi-symétrique ($(R.\rho = 0)$), on a deux cas à étudier :

Premier cas : On utilise le lemme 4.7.3, le lemme 4.7.5 et l'équation (5.2.31). Soient X, Y, Z et W des champs de vecteurs horizontaux sur M ($u(Z) = u(W) = v(Z) = v(W) = 0$), alors de l'équation (5.2.43) on obtient

$$\begin{aligned} R(X,Y).\rho(Z,W) &= \gamma g(R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z, W) \\ &= \gamma[\kappa(g(Y,GhZ)g(GX,W) - g(X,GhZ)g(GY,W) \\ &+ g(Y,GZ)g(GhX,W) - g(X,GZ)g(GhY,W) \\ &+ g(Y,HhZ)g(HX,W) - g(X,HhZ)g(HY,W) \\ &+ g(Y,HZ)g(HhX,W) - g(X,HZ)g(HhY,W)) \\ &- \mu(2g(X,GY)g(GhZ,W) + 2g(X,HY)g(HhZ,W))]. \end{aligned}$$

Pour un champ de vecteurs unitaire $X \in [\lambda]$ et pour $Z = X, Y = W = GX$ on trouve

$$\begin{aligned} R(X,GX).\rho(X,GX) = \gamma[\kappa(&\underbrace{g(GX,GhX)}_{=\lambda}\underbrace{g(GX,GX)}_{=1} - \underbrace{g(X,GhX)}_{=0}\underbrace{g(G^2X,GX)}_{=0} \\ &+ \underbrace{g(GX,GX)}_{=1}\underbrace{g(GhX,GX)}_{=\lambda} - \underbrace{g(GhGX,GX)}_{=0} \\ &+ \underbrace{g(GX,HhX)}_{=0}\underbrace{g(HX,GX)}_{=0} - \underbrace{g(X,HhX)}_{=0}\underbrace{g(HGX,GX)}_{=0} \\ &+ \underbrace{g(GX,HX)}_{=0}\underbrace{g(HhX,GX)}_{=0} - \underbrace{g(X,HX)}_{=0}\underbrace{g(HhGX,GX)}_{=0}) \\ &- \mu(2\underbrace{g(X,G^2X)}_{=-1}\underbrace{g(GhX,GX)}_{=\lambda} + 2\underbrace{g(X,HGX)}_{=0}\underbrace{g(HhX,GX)}_{=0})]. \\ R(X,Y).\rho(Z,W) &= 2\gamma\lambda(\kappa+\mu) = 0. \end{aligned}$$

Second cas : Soit X un champ de vecteurs horizontal unitaire, on remplace Y et Z par U et X par W dans l'équation (5.2.43), sachant que $R(X,U)U =$

$\kappa X + \mu hX$ et $u(X) = v(X) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} R(X,U).\rho(U,X) &= \beta g(R(X,U)U,X) - \gamma g(hR(X,U)U,X) \\ &= \beta g(\kappa X + \mu hX, X) - \gamma g(\kappa hX + \mu h^2 X, X) \\ &= \begin{cases} (\beta - \lambda\gamma)(\kappa + \lambda\mu) & si X \in [\lambda] \\ (\beta + \lambda\gamma)(\kappa - \lambda\mu) & si X \in [-\lambda] \end{cases}. \end{aligned}$$

Les deux cas précédents nous donnent le système suivant

$$\begin{cases} (\beta - \lambda\gamma)(\kappa + \lambda\mu) = 0 \cdots (1) \\ (\beta + \lambda\gamma)(\kappa - \lambda\mu) = 0 \cdots (2) \\ \gamma\lambda(\kappa + \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) : & \kappa\beta - \lambda^2\mu\gamma = 0 \cdots (1') \\ (1) - (2) : & \lambda(\mu\beta + \kappa\gamma) = 0 \cdots (2') \\ & \gamma\lambda(\kappa + \mu) = 0 \cdots (3) \end{cases}$$

puisque $\kappa < 1$ ($\lambda \neq 0$), l'équation (3) admet deux solutions $\gamma = 0$ ou $\kappa = -\mu$.

- Supposons que $\gamma = 0$. Sachant que $\gamma = 4n + 4 + 2\mu$ ce qui implique que $\mu \neq 0$ d'autre part les équations $(1')$ et $(2')$ nous donnent

$$\begin{cases} \kappa\beta = 0 \\ \mu\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 \text{ M est d'Einstein ce qui est impossible.}$$

- Supposons que $\mu = -\kappa$. Alors les équations $(1')$ et $(2')$ nous donnent

$$\begin{cases} \mu(\beta - \gamma) = 0 \\ \mu(\beta + \lambda^2\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \ \ ou \ \ \mu = 0 \\ \mu(1 + \lambda^2)\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \ \ ou \ \ \mu = 0 \\ \mu = 0 \ \ ou \ \ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa = \mu = 0, & M \text{ est localement isométrique à } \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16); \\ \beta = \gamma = 0, & M \text{ est une variété d'Einstein(ce qui est impossible).} \end{cases}$$

On conclut que M est Ricci-semi-symétrique si et seulement si $\kappa = \mu = 0$ c'est à dire si et seulement si M est localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.

□

5.2.2 Variété complexe (κ, μ)-contact Ricci-pseudo-symétrique

Théorème 5.2.16. *Une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$ est Ricci-pseudo-symétrique si et seulement si elle est localement isométrique à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.*

Démonstration. Soit (M, u, v, U, V, G, H, g) une variété complexe de (κ, μ)-contact $(\kappa < 1)$ et soient X, Y, Z et W des champs de vecteurs sur M. D'une part, par l'équation (5.2.43) on a

$$\begin{aligned} R(X,Y).\rho(Z,W) = \beta[&g(R(X,Y)U,Z)u(W) + g(R(X,Y)U,W)u(Z) \\ &+ g(R(X,Y)V,Z)v(W) + g(R(X,Y)V,W)v(Z)] \\ &+ \gamma g(R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z,W), \end{aligned} \tag{5.2.44}$$

et d'autre part, par l'équation (5.2.31)

$$\begin{aligned} (X \wedge_g Y).\rho(Z,W) &= -\rho((X \wedge_g Y)Z,W) - \rho(Z,(X \wedge_g Y)W) \\ &= -\beta[u((X \wedge_g Y)Z)u(W) + v((X \wedge_g Y)Z)v(W) + u(Z)u((X \wedge_g Y)W) \\ &+ v(Z)v((X \wedge_g Y)W)] - \gamma[g(h(X \wedge_g Y)Z,W) + g(hZ,(X \wedge_g Y)W)] \\ &= \beta[g((X \wedge_g Y)U,Z)u(W) + g((X \wedge_g Y)U,W)u(Z) \\ &+ g((X \wedge_g Y)V,Z)v(W) + g((X \wedge_g Y)V,W)v(Z)] \\ &+ \gamma g((X \wedge_g Y)hZ - h(X \wedge_g Y)Z,W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X \wedge_g Y).\rho(Z,W) = \beta[&(g(X,Z)u(Y) - g(Y,Z)u(X))u(W) + (g(X,W)u(Y) \\ &- g(Y,W)u(X))u(Z) + (g(X,Z)v(Y) - g(Y,Z)v(X))v(W) \\ &+ (g(X,W)v(Y) - g(Y,W)v(X))v(Z)] + \gamma[g(Y,hZ)g(X,W) \\ &- g(X,hZ)g(Y,W) + g(X,Z)g(hY,W) - g(Y,Z)g(hX,W)]. \end{aligned} \tag{5.2.45}$$

On suppose que M est Ricci-pseudo-symétrique alors il existe une fonction L_ρ sur M telle que

$$R(X,Y).\rho(Z,W) = L_\rho (X \wedge_g Y).\rho(Z,W). \tag{5.2.46}$$

Pour trouver L_ρ, on suppose que $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$. On remplace Y et Z par U dans les équations (5.2.45) et (5.2.43), alors on obtient

$$\begin{aligned}
(X\wedge_g U).\rho(U,W) &= -\rho((X\wedge_g U)U,W)-\rho((X\wedge_g U)W,U)\\
&= -[u(U)\rho(X,W)-u(X)\rho(U,W)]-[u(W)\rho(X,U)-g(X,W)\rho(U,U)]\\
&= -\rho(X,W)+4n\kappa u(X)u(W)-4n\kappa u(W)u(X)+4n\kappa g(X,W)\\
&= 4n\kappa g(X,W)-\rho(X,W), \qquad (5.2.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,U).\rho(U,W) &= -\rho(R(X,U)U,W)-\rho(R(X,U)W,U)\\
&= -\rho(\kappa(X-u(X)U-v(X)V)+\mu hX,W)+4n\kappa g(R(X,U)U,W)\\
&= -\kappa\rho(X,W)+4n\kappa^2u(X)u(W)+4n\kappa^2v(X)v(W)-\mu\rho(hX,W)\\
&+ 4n\kappa^2(g(X,W)-u(X)u(W)-v(X)v(W))+4n\kappa\mu g(hX,W)\\
&= -\kappa\rho(X,W)-\mu\rho(hX,W)+4n\kappa(\kappa g(X,W)+\mu g(hX,W))\\
&= \kappa(4n\kappa g(X,W)-\rho(X,W))+\mu(4n\kappa g(hX,W)-\rho(hX,W))\\
&= \begin{cases} (\kappa+\lambda\mu)(X\wedge_g U)\rho(U,W), & X\in[\lambda]\,;\\ (\kappa-\lambda\mu)(X\wedge_g U)\rho(U,W), & X\in[-\lambda]. \end{cases}, \qquad (5.2.48)
\end{aligned}$$

des équations (5.2.46) et (5.2.48) on a

$$\begin{cases} L_\rho = & \kappa+\lambda\mu\\ L_\rho = & \kappa-\lambda\mu \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} L_\rho &= \kappa\\ \lambda\mu &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_\rho &= \kappa\\ \mu &= 0 \quad (car\ \lambda\neq 0) \end{cases}$$

Supposons que $\mu=0$. Sachant que $uJ=v, vJ=-u$ et $V=-JU, U=JV$, alors les formules (4.7.1) et (4.7.2) nous donnent

$$\begin{aligned}
R(X,Y)U &= \kappa[\underbrace{u(Y)X-u(X)Y}_{=X\wedge_g Y}]+\kappa[\underbrace{v(Y)JX-v(X)JY}_{=JX\wedge_g JY}]\\
&+2[\kappa g(JX,Y)+4\kappa u\wedge v(X,Y)]\underbrace{V}_{=-JU}\\
&=\kappa[X\wedge_g Y+JX\wedge_g JY-2(g(JX,Y)+4u\wedge v(X,Y))J]U
\end{aligned}$$

$$R(X,Y)V = \kappa[\underbrace{v(Y)X - v(X)Y}_{X\wedge_g Y}] - \kappa[\underbrace{u(Y)JX - u(X)JY}_{JY\wedge_g JX}]$$
$$- 2[\kappa g(JX,Y) + 4\kappa u \wedge v(X,Y)]\underbrace{U}_{=JV}$$
$$= \kappa[X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY - 2(g(JX,Y) + 4u \wedge v(X,Y))J]V$$

et

$$\begin{aligned}(X \wedge_g Y).\rho(Z,W) &= \beta[(g(X,Z)u(Y) - g(Y,Z)u(X))u(W) + (g(X,W)u(Y)\\ &- g(Y,W)u(X))u(Z) + (g(X,Z)v(Y) - g(Y,Z)v(X))v(W)\\ &+ (g(X,W)v(Y) - g(Y,W)v(X))v(Z)]\\ &+ \gamma[g(Y,hZ)g(X,W) - g(X,hZ)g(Y,W) + g(X,Z)g(hY,W)\\ &- g(Y,Z)g(hX,W)]. \qquad (5.2.49)\end{aligned}$$

en utilise les équations (5.2.44) et (5.2.49) alors

$$\begin{aligned}R(X,Y).\rho(Z,W) &= \kappa\beta[(g((X \wedge_g Y)U,Z) + g((JX \wedge_g JY)U,Z))u(W)\\ &+ (g((X \wedge_g Y)U,W) + g((JX \wedge_g JY)U,W))u(Z)\\ &+ (g((X \wedge_g Y)V,Z) + g((JX \wedge_g JY)V,Z))v(W)\\ &+ (g((X \wedge_g Y)V,W) + g((JX \wedge_g JY)V,W))v(Z)]\\ &+ \gamma g(R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z,W). \qquad (5.2.50)\end{aligned}$$

Sachant que $(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$, on obtient

$$\begin{aligned}R(X,Y).\rho(Z,W) &= \kappa\beta[(u(Y)g(X,Z) - g(Y,Z)u(X))u(W) + (u(Y)g(X,W) - g(Y,W)u(X))u(Z)\\ &+ (v(Y)g(X,Z) - g(Y,Z)v(X))v(W) + (v(Y)g(X,W) - g(Y,W)v(X))v(Z)]\\ &+ \kappa\beta[(v(Y)g(JX,Z) - g(JY,Z)v(X))u(W) + (v(Y)g(JX,W)\\ &- g(JY,W)v(X))u(Z) - (u(Y)g(JX,Z) - g(JY,Z)u(X))v(W)\\ &- (u(Y)g(JX,W) - g(JY,W)u(X))v(Z)] + \gamma g(R(X,Y)hZ - hR(X,Y)Z,W).\end{aligned} \qquad (5.2.51)$$

Soit X un champ de vecteurs unitaire horizontal, on remplace Y par U, Z par V et

W par JX dans les équations (5.2.49) et (5.2.50), on obtient

$$R(X,U).\rho(V,JX) \quad = \quad \begin{cases} \kappa(\beta-\gamma\lambda) & si\ X\in[\lambda] \\ \kappa(\beta+\gamma\lambda) & si\ X\in[-\lambda] \end{cases} . \tag{5.2.52}$$

et

$$(X\wedge_g U).\rho(V,JX) \quad = \quad 0. \tag{5.2.53}$$

De (5.2.52) et (5.2.53) on trouve

$$\begin{cases} \kappa\beta-\kappa\gamma\lambda=0 \\ \kappa\beta+\kappa\gamma\lambda=0 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \beta=\gamma=0 & \text{variété d'Einstein (impossible);} \\ \kappa=0 & M \text{ est localement isométrique à } \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n(16). \end{cases}$$

□

Corollaire 5.2.17. *Les variétés complexes de (κ,μ)-contact ($\kappa<1$) ne sont pas proprement Ricci-pseudo-symétriques.*

Théorème 5.2.18. *L'espace $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n(16)$ est localement symétrique.*

Démonstration. Pour l'espace $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n(16)$, $\kappa=\mu=0$ ce qui implique que $\lambda=\pm1$ alors d'après la formule 5 du lemme 4.7.3 $\nabla J=0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita de g, sachons que son tenseur de courbure est nul sauf pour $X,Y,Z\in[1]$, du théorème 4.7.1 on obtient

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= 4[g(Y,Z)X-g(Y,JZ)JX-g(X,Z)Y \\ &\quad +g(X,JZ)JY-2g(JX,Y)JZ] \\ &= 4(X\wedge_g Y+JX\wedge_g JY+2g(X,JY)J)Z, \end{aligned}$$

Calculons ∇R. Soit $X,Y,Z\in[1]$, on a

$$
\begin{aligned}
(\nabla R)(X,Y)Z &= \nabla R(X,Y)Z - R(\nabla X,Y)Z - R(X,\nabla Y)Z - R(X,Y)\nabla Z \\
&= 4[\nabla(g(Y,Z)X - g(Y,JZ)JX - g(X,Z)Y + g(X,JZ)JY - 2g(JX,Y)JZ) \\
&- (g(Y,Z)\nabla X - g(Y,JZ)\underbrace{J\nabla X}_{=\nabla JX} - g(\nabla X,Z)Y + g(\nabla X,JZ)JY - 2g(\underbrace{J\nabla X}_{=\nabla JX},Y)JZ) \\
&- (g(\nabla Y,Z)X - g(\nabla Y,JZ)JX - g(X,Z)\nabla Y + g(X,JZ)\underbrace{J\nabla Y}_{=\nabla JY} - 2g(JX,\nabla Y)JZ) \\
&- (g(Y,\nabla Z)X - g(Y,\underbrace{J\nabla Z}_{=\nabla JZ})JX - g(X,\nabla Z)Y + g(X,\underbrace{J\nabla Z}_{=\nabla JZ})JY - 2g(JX,Y)\underbrace{J\nabla Z}_{=\nabla JZ})] \\
&= 4[\nabla g(Y,Z)X + g(Y,Z)\nabla X - \nabla g(Y,JZ)JX - g(Y,JZ)\nabla JX - \nabla g(X,Z)Y \\
&- g(X,Z)\nabla Y + \nabla g(X,JZ)JY + g(X,JZ)\nabla JY - 2\nabla g(JX,Y)JZ \\
&- 2g(JX,Y)\nabla JZ - g(Y,Z)\nabla X + g(Y,JZ)\nabla JX + g(\nabla X,Z)Y - g(\nabla X,JZ)JY \\
&+ 2g(\nabla JX,Y)JZ - g(\nabla Y,Z)X + g(\nabla Y,JZ)JX + g(X,Z)\nabla Y - g(X,JZ)\nabla JY \\
&+ 2g(JX,\nabla Y)JZ) - g(Y,\nabla Z)X + g(Y,\nabla JZ)JX + g(X,\nabla Z)Y - g(X,\nabla JZ)JY \\
&+ 2g(JX,Y)\nabla JZ] = 0
\end{aligned}
$$

□

Remarque 5.2.1. Puisque les variétés pseudo-symétriques sont Ricci-pseudo-symétriques et comme les seuls espaces complexes de (κ,μ)-contact Ricci-pseudo-symétriques sont localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n$, qui est un espace localement symétrique alors on peut conclure que :

- Les seuls espaces complexes de (κ,μ)-contact pseudo-symétriques sont les espaces localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n$. D'où
- Les espaces complexes de (κ,μ)-contact semi-symétriques sont les espaces localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n$. D'où
- Les espaces complexes de (κ,μ)-contact localement symétriques sont les espaces localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n$.

En d'autres termes, il n'existe pas des espaces complexes de (κ,μ)-contact qui sont proprement pseudo-symétriques.

Perspectives

On a étudié les propriétés symétriques des variétés complexes de contact. Nos résultats étaient satisfaisants. Nos perspectives sont d'étudier les propriétés symétriques extrinsèques, à savoir, le parallèl, le-semi-parallèl et le pseudo-prallél des sous variétés d'une variété complexe de contact.

Bibliographie

[1] C. Baikoussis, D. E. Blair and F. Gouli-Andreou, Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **26** (1998), 179-194.

[2] M. Belkhelfa, R. Deszcz and L. Verstraelen, Symmetry properties of Sasakian space forms, Soochow J. Math. 31(4), (2005), 611-616.

[3] M. Belkhelfa, R. Deszcz, L. Verstraelen, Symmetry properties of 3-dimensional D'Atri spaces, Kyungpook Math. J. 46, No. 3, (2006), 367-376.

[4] M. Belkhelfa, F. Z. Kadi, Symmetry properties of complex contact space form, Asian-European Journal of Mathematics (2019).

[5] M. Belkhelfa, F. Z. Kadi, The study of Ricci-semi-symmetry of normal complex contact manifold, M. H. Shahid et al. (eds.), Differential Geometry, Algebra, and Analysis, Springer Prodceedings in Mathematics and Statistics 327, `http:\\doi.org/10.1007/978-981-15-5455-1_2` (2020).

[6] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact Manifolds and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematic (BirkhäuserBoston), (2002).

[7] D. E. Blair, V. Martín-Molina, Bochner and conformal flatness on normal complex contact metric manifolds, Ann Glob Anal Geom (2011) 39 :249-258.

[8] D. E. Blair, A. Mihai, Symmetry in complex contact geometry, Rocky Mountain Journal Mathematics **v** 42, no 2, (2012), 451-465.

[9] D. E. Blair, A. Mihai, Homogeneity and local symmetry of complex $(\kappa, \mu)-$spaces, Israel J. Math. **187** (2012), 451-464.

[10] J. Bilkis, S. Haesen, Z. Sentük, L. Verstraelan, On the parallel transport of the Ricci curvatures, Journal of Geometry and Physics 57 (2007) 1771-1777.

[11] W. M. Boothby, Homogeneous complex contact manifolds, Proc. Sympos. Pure Math III, Amer. Math. Soc., Providence, 1961, 144-154.

[12] W. M. Boothby, A note on homogeneous complex contact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1962), 276-280.

[13] W. M. Boothby and H. C. Wang, On contact manifolds, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 721-734.

[14] E. Cartan, La géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars (1925).

[15] E. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemannian, Bull. Soc. Math. France, 54 (1926), 214-264.

[16] J. Deprez, R. Deszcz and L. Verstraelen, Examples of pseudo-symmetric conformally flat warped products, Chinese journal of mathematics, 17 N 1 (1989).

[17] R. Deszcz and W. Grycak, On some class of warped product manifolds, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 15 (1987), 311-322.

[18] R. Deszcz, On Ricci-pseudo-symmetric warped products, Demonstratio Mathematica. Vol XXII No 4 (1989).

[19] R. Deszcz, On pseudo symmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg., Ser. A, 44(1992), 1-34.

[20] R. Deszcz, On pseudo symmetric manifold, Dept. Math, Agricultural Uni. Wroclaw, Ser.A, Theory and Methods Preprint, **34** (1995).

[21] R. Deszcz, On the equivalence of Ricci-semisymmetry and semisymmetry, Dept. Math., Agricultural Univ. Wroclaw, Ser. A, Theory and Methods, Report, No. 64, (1998).

[22] D. D. Joyce, Compact manifolds with spicial holonomy, Oxford University Press 2000.

[23] M. P. Do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser Boston, 1993.

[24] B. Foreman, Variational problems on complex contact manifolds with applications to twister space theory, Thesis, Michigan State University(1996).

[25] B. Foreman, Complex contact manifolds and hyperkähler geometry, Kodai Math. J. 23 (2000), 12-26.

[26] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer- Verlag, Berlin, 1987.

[27] F. Gherib, F. Z. Kadi and M. Belkhelfa, Symmetry properties of generalized Sasakan space forms Dedicated to the memory of Prof. Dr. Radu Rosca, Brasov, June 21-26, 2007.

[28] S. Haesen, L. Verstraelen, Properties of scalar curvature invariant depending on two planes, manuscripta math, 122 (2007), 59-72.

[29] S. Haesen, L. Verstraelen, Natural intrinsic geometrical symmetries, SIGMA 5 (2009), 086, 15 p.

[30] S. Helgason, Differential geometry, Lie group and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[31] D. Huybrechts, Complex Geometry : an introduction, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[32] S. Ishihara, M. Konishi, Real contact 3-structure and complex contact structure, Southeast Asian Bull. Math. 3 (1979), 151-161.

[33] S. Ishihara, M. Konishi, Complex almost contact manifolds, Kodai Math. J. 3, (1980) 385-396.

[34] S. Ishihara, M. Konishi, Complex almost contact structures in a complex contact manifold, KodaiMath. J. 5, (1982) 30-37.

[35] S. Kobayashi, Remarks on complex contact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc 10 (1959), 164-167.

[36] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, Vol. I, Interscience Publishers, 1963.

[37] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, Vol. II, Interscience Publishers, 1969.

[38] B. Korkmaz, A Curvature property of complex contact manifolds, Kyungpook Math. J. 38 (1998) 473-488.

[39] B. Korkmaz, Normality of complex contact manifolds, Rocky Mountain J. Math. 30,(2000) 1343-1380.

[40] B. Korkmaz, A nullity condition for complex contact metric manifolds, Journal of Geometry 77 (2003) 108-128.

[41] J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verhan. Konink. Akad. Wet. Amsterdam 12 (1918), no. 6, 1-95.

[42] M. Okumura, Some remarks on space with a certain contact structure, Tohoku Math. J., 14(1962), 135-145.

[43] W. A. Poor, Differential geometric structures, Dover publications, INC (2007).

[44] Z. I. Szabó, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X,Y).R = 0, I. The local version. J. Diff. Geom., 17 (1982), 531-582.

[45] Z. I. Szabó, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X,Y).R = 0, II. The global version, Geom. Dedicata 19 (1985) 65-108.

[46] T. Takahashi, Sasakian $\phi-$symmetric spaces, Tohoku Math. J., 29(1977), 91-113.

[47] L. Verstraelen, Comments on pseudo-symmetry in sense of Deszcz, in : Geometry and Topology of Submanifolds, World Sci. Publication. 6(1994), 199-209.

[48] J. A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech. 14 (1965), 1033 1047.

[49] K. Yano and M. Kon, Structure on manifolds, In Pure Mathimatics,Vol. 3, World Scientific, P.O.Box 128,Farrer Road, Singapore 9128, (1984).

ملخص. كان هدفنا دراسة الخواص التناظرية للمنوعات المركبة التلامسية. بدأنا بدراسة الخواص التناظرية للمنوعات المركبة التلامسية العمودية ، وهي ريتشي التناظر، و ريتشي شبه التناظر و ريتشي التناظر الزائف. النتائج التي تم الحصول عليها:

1. إن المنوعة المركبة التلامسية العمودية هي ريتشي شبه متناظرة إذا وفقط إذا كانت منوعة لآينشتاين
2. إن المنوعة المركبة التلامسية ثابتة الإنحناء مع انحناء GH -مقطعي ثابت c هي ريتشي متناظرة تناظر زائف بشكل صحيح ($L_\rho \neq 0$) إذا وفقط إذا كان $c = -1$.
3. عدم وجود منوعة مركبة تلامسية ثابتة الإنحناء متناظرة تناظر زائف بشكل صحيح ($L_R \neq 0$)

بالإضافة إلى ذلك، تمت دراسة الخواص التناظرية للمنوعات المركبة (μ, κ) - تلامسية ($\kappa < 1$) . وقد ثبت أن:

1. المنوعة المركبة (μ, κ) - تلامسية ($\kappa < 1$) ليست لآينشتاين.
2. المنوعة المركبة (μ, κ) - تلامسية ($\kappa < 1$) هي ريتشي متناظرة، و ريتشي شبه متناظرة إذا وفقط إذا كانت متساوية القياس محليًا ل $C^{n+1} \times C P^n (16)$.
3. المنوعة المركبة (μ, κ) - تلامسية ($\kappa < 1$) ليست ريتشي متناظرة تناظر زائف ($L_\rho \neq 0$) بشكل صحيح .
4. الفضاء $C^{n+1} \times C P^n (16)$ متناظرمحليا.

Résumé. Notre objectif était d'étudier les propriétés symétriques des variétés complexes de contact. On a commencé par étudier les propriétés symétriques des variétés complexes de contact normales, à savoir, la Ricci-symétrie, la Ricci-semi-symétrie et la Ricci-pseudo-symétrie. Les résultats obtenus :

1. Une variété complexe de contact normale est Ricci-semi-symétrique si et seulement si elle est d'Einstein.
2. Une variété complexe de contact à courbure constante M avec une courbure GH-sectionnelle constante c est proprement Ricci-pseudo-symétrique ($L_\rho \neq 0$) si et seulement si $c = -1$.
3. L'inexistence d'une variété complexe de contact à courbure constante M proprement pseudo-symétrique ($L_R \neq 0$).

En outre, on a étudié les propriétés symétriques des variétés complexes de (κ, μ)-contact et on a prouvé que

1. Les variétés complexes de (κ, μ)-contact ($\kappa < 1$) ne sont pas d'Einstein.
2. Les variétés complexes de (κ, μ)-contact ($\kappa < 1$) sont Ricci-symétriques, Ricci-semi-symétriques si et seulement si elles sont localement isométriques à $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.
3. Les variétés complexes de (κ, μ)-contact ($\kappa < 1$) ne sont pas proprement Ricci-pseudo-symétriques
4. L'espace $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$ est localement symétrique.

Abstract. Our objective was to study the symmetry properties of complex contact manifolds. We started by studying the symmetry properties of normal complex contact manifolds, namely, Ricci-symmetry, Ricci-semi-symmetry and Ricci-pseudo-symmetry. The results obtained :

1. A normal complex contact manifold is Ricci-semi-symmetric if and only if it is an Einstein manifold.
2. A complex contact space form with constant GH-sectional curvature c is est properly Ricci-pseudo-symmetric ($L_\rho \neq 0$) if and only if $c = -1$.
3. The non-existence of properly pseudo-symmetric ($L_R \neq 0$) complex contact space form.

In addition, the symmetry properties of complex (κ, μ)-spaces have been studied and it has been shown that

1. The complex (κ, μ)-spaces ($\kappa < 1$) are not Einstein.
2. The complex (κ, μ)-spaces ($\kappa < 1$) are Ricci-symmetric, Ricci-semi-symmetric if and only if they are locally isometric to $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$.
3. The complex (κ, μ)-spaces ($\kappa < 1$) are not properly Ricci-pseudo-symmetric.
4. The space $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n(16)$ is locally symmetric.