

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان
Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –
Faculté de TECHNOLOGIE



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT 3^{ème} Cycle

En : Génie mécanique

Spécialité : Dynamique et structure

Par : Bekhadda Ahmed

Sujet

**Contribution à L'étude Vibratoire et de Flambement d'une Poutre
Fonctionnellement Graduée**

Soutenue publiquement, le : 18 / 05 / 2022 , devant le jury composé de :

M. MEFTAH Khouane	Professeur	Président	UAB- Tlemcen
M. CHEIKH Abed El Madjid	Professeur	Directeur de thèse	UAB- Tlemcen
M. BENSaid Ismail	MCA	Co- Directeur de thèse	UAB- Tlemcen
M. BENGUEDIAB Mohamed	Professeur	Examineur 1	Univ- Sidi Bel Abbes
M. BENACHOUR Mustapha	Professeur	Examineur 2	UAB- Tlemcen
M. HADJOUI Abdelhamid	Professeur	Invité	UAB- Tlemcen

Remerciements

En premier, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné santé, courage, et patience pour terminer ce modeste travail.

J'adresse mes remerciements les plus sincères au directeur de ma thèse Pr. CHEIKH Abed El Madjid pour sa supervision constante et ses recommandations utiles et constructives sur ce sujet, pour ses conseils qui m'ont toujours incitées à mieux faire, ainsi que ses encouragements et surtout sa disponibilité tout au long de la réalisation de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de ma thèse Dr. BENS Aid Ismail pour ses orientations, conseils, ainsi que pour la coopération et les discussions que nous avons eues sur mon sujet de recherche et les suggestions qu'il m'a données qui m'ont beaucoup aidé à améliorer ce travail.

Je remercie les membres de jury : Pr. MEFTAH Khouane, Pr. BENGUED IAB Mohamed, Pr. BENACHOUR Mustapha et Pr. HADJOU I Abdelhamid qui m'ont fait l'honneur de juger mon présent travail.

Plus largement, je tiens à remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mon cursus universitaire et tous ceux qui ont partagé ces années d'étude avec moi, qui m'ont apporté leurs expériences, leurs conseils ou leurs contributions.

ملخص

الهدف من هذه الاطروحة هو دراسة الالتواء الثابت والاهتزاز الحر للمواد المتدرجة وظيفيا. تم اقتراح منهجيتين نظريتين للتعامل مع هذا النوع من المشاكل: منهجية نظرية مكررة لتشوّه القص من الدرجة الأعلى ومنهجية نظرية جديدة للحزمة المكررة لإجهاد القص من الدرجة الأولى. النماذج المقترحة قادرة على التقاط كل من تأثيرات البنية المجهرية وإجهاد القص دون استخدام عوامل تصحيح القص. لحساب الأجزاء النظرية في هذا البحث، يفترض أن التركيبات المادية للحزم المتدرجة وظيفيا تختلف بسلاسة واستمرارية في جميع أنحاء السماكة وفقا لتوزيع قانون الطاقة.

لكل منهجية نظرية مقترحة، قمنا بدراسة بارامترية لإظهار تأثير العوامل المختلفة مثل مؤشر القدرة، المعاملات الهندسية للحزمة، نسبة المعامل والحمل المحوري على الخصائص الديناميكية والتواء.

تم التحقق من النتائج التي تم الحصول عليها ومقارنتها مع نظريات واثبات اتفاق جيد معها.

الكلمات الإستدلالية:

المواد المتدرجة وظيفيا، الاهتزاز الحر، التواء، القص من الدرجة العالية.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier le flambement statique et la vibration libre de poutres céramo-métalliques à gradient continu. Deux approches théoriques sont proposées pour traiter ce type de problème: une approche théorique raffinée de déformation par cisaillement d'ordre supérieur et une nouvelle approche théorique de poutre raffinée de déformation par cisaillement de premier ordre. Les modèles proposés sont capables d'appréhender à la fois les impacts de la microstructure et de la déformation par cisaillement sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement.

Pour chaque approche théorique proposée, une étude paramétrique est fournie afin de montrer l'influence de différents paramètres tels que l'indice de puissance, les paramètres géométriques de la poutre, le rapport de module et la charge axiale sur les caractéristiques dynamiques et de flambage des poutres FG. Les résultats obtenus sont vérifiés et comparés à ceux d'autres théories existantes dans la littérature et ont révélés un bon accord.

Mots clés : Matériaux à Gradient Fonctionnel, Poutre Fonctionnellement Graduée, Flambement, Vibration, Théorie Raffinée d'Ordre Elevé RHDST, Théorie Raffinée du Premier Ordre NRFDST, Effet de la Charge axiale sur la Fréquence.

Abstract

Functionally graded materials (FGMs) are a broad research area and attract considerable attention today in the materials science and engineering society. FGMs have multifunctional characteristics on one part by gradual changing composition or structure and are very suitable for engineering applications requiring conflicting properties in one component. These materials have found uses in several hi-tech industrial applications such as defense industries, aerospace, aircrafts, automobile, and further engineering structures. Therefore, it is important to investigate the behaviors of these engineering structures such as FG beams and plates when they are subjected to thermal and dynamic loads for appropriate design.

The purpose of this thesis is to study the static buckling and free vibration of continuously graded ceramic-metal beams. Two theoretical approaches are proposed for dealing with this kind of problems: a refined higher-order shear deformation and a novel refined first-order shear deformation beam theory. The proposed models are able to catch both the microstructural and shear deformation impacts without employing any shear correction factors, due to the realistic distribution of transverse shear stresses.

To compute theoretical parts in this research, the material compositions of the functionally graded beams are assumed to vary smoothly and continuously throughout the thickness according to the power law distribution.

For each proposed theoretical approach, a parametric study is provided in order to exhibit the influence of different parameters such as the power-law index, beam geometrical parameters, modulus ratio and axial load on the dynamic and buckling characteristics of FG beams. The obtained results are checked and compared with those of other theories that exist in the literature and have revealed a good agreement

Keywords: Functionally Graded Materials FGM; Functionally Graded Beams; Free Vibration; Buckling; Refined High Shear Deformation Theory RHSDT; Refined First Shear Deformation Theory RFSDT; Effect of Critical Load on Frequency.

Table des matières

Remerciements.....	ii
ملخص.....	iii
Résumé.....	iv
Abstract.....	v
Table des matières.....	vi
Notations & Abréviations.....	ix
Liste des tableaux.....	xi
Liste des figures.....	xii
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGMs.....	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Historique des matériaux à gradient fonctionnel.....	4
1.3 Concept des matériaux FGMs.....	7
1.4 Domaines d'applications des FGMs.....	10
1.4.1 Domaine spatial.....	10
1.4.2 Domaine de l'industrie d'automobile.....	12
1.4.3 Domaine biomédical.....	12
1.4.4 Domaine de la défense.....	15
1.5 Lois régissant la variation des propriétés des plaques en FGMs.....	15
1.5.1 La loi exponentielle E-FGM.....	16
1.5.2 La loi de puissance P-FGM.....	17
1.5.3 La loi sigmoïde S-FGM.....	18
1.6 Conclusion.....	20
Chapitre 2 Revues de recherche sur les structures FGMs.....	21
2.1 Introduction.....	21
2.2 Théorie des poutres et des plaques FGMs.....	21

2.2.1	La théorie des poutres d'Euler et Bernoulli CBT	22
2.2.2	La théorie classique des plaques minces de Love Kirchhoff CPT	25
2.2.3	La théorie des poutres du premier ordre FSDT	26
2.2.4	La théorie d'ordre supérieur HSDT	27
2.2.5	La théorie raffinée	29
2.3	Travaux de recherche sur les FGMs.....	31
2.3.1	Travaux de recherche sur la vibration libre des structures FGMs.....	31
2.3.1	Travaux de recherche sur le flambement des structures FGMs	33
2.4	Conclusion.....	33
Chapitre 3 Etude d'analyse vibratoire d'une poutre FG par la théorie RHSDT.....		35
3.1	Introduction	35
3.2	Formulation du problème	36
3.2.1	L'approche théorique de déformation en cisaillement d'ordre supérieur raffinée RHSDT	37
3.3	Solution analytique de la vibration libre et du flambement de la poutre FG	42
3.4	Résultats et discussion.....	44
3.4.1	Etude comparative.....	45
3.4.2	Etude paramétrique	50
3.5	Conclusion.....	57
Chapitre 4 Analyse des vibrations et du flambement des poutres à gradient continu par l'approche théorique RNFSDT		58
4.1	Introduction	58
4.2	Formulation du problème	59
4.2.1	L'approche théorique de poutre de cisaillement-déformation raffinée du premier ordre	60
4.3	Solution analytique de la vibration libre et du flambement de la poutre FG	65
4.4	Résultats et discussion.....	66
4.4.1	Etude comparative.....	66
4.4.2	Etude paramétrique	69
4.5	Conclusion.....	76

Conclusions générales	77
Références bibliographiques.....	79
Liste des publications	89

Notations & Abréviations

FGM	Matériaux fonctionnellement gradués
E	Module de Young
n	Rapport du module de Young
ν	Coefficient de Poisson
V	Fraction volumique
ρ	Masse volumique
ω	Fréquence adimensionnelle
l	Longueur
b	Largeur
h	Epaisseur
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
u, v, w	Déplacement dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Composants du champ de déplacement sur le plan moyen
φ_x et φ_y	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	La fonction de cisaillement transverse
$g(z)$	La dérivée de la fonction de gauchissement ($f(z)$)
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de la masse
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformation dans les directions x, y, z
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Déformation de déformation
$\{q\}$	Vecteur de déplacement généralisé
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de la céramique

Q	La charge transversale appliquée
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	variation du l'énergie potentielle
δK	variation de l'énergie cinétique
∂	Dérivée partielle
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice
λ	Coefficient de porosité
ξ	Facteur de la distribution de la porosité.
I_1, J_1, K_1	Des inerties de masse
N_{cr}	La charge de flambement
p	L'indice de puissance
w	Le déplacement transversal
w_b	La composante de flexion
w_s	La composante de cisaillement
k_s	Le facteur de correction de cisaillement
\bar{N}	La charge de flambage

Liste des tableaux

Tableau 2.1 Quelques fonctions des théories HSDT pour des plaques FGMs.	29
Tableau 3.1 Comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles de poutres FG simplement appuyées.	46
Tableau 3.2 Validation des charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple. ..	47
Tableau 3.3 Variation de la charge critique de flambement des poutres S-S en fonction de l'indice de puissance et rapport L/h	48
Tableau 3.4 Effets du rapport du module de Young sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des poutres FG en appui simple.	48
Tableau 3.5 Effets du rapport du module de Young sur les charges critiques de flambement des poutres FG.	49
Tableau 3.6 Effets de la charge axiale sur la fréquence non-dimensionnelle.	50
Tableau 4.1 Comparaison des trois premières fréquences naturelles non dimensionnelles des poutres FG en appui simple.	67
Tableau 4.2 Validation des charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple. ..	68
Tableau 4.3 Les trois premières charges critiques de flambement non dimensionnelles des poutres FG en appui simple.	69
Tableau 4.4 Impacts du rapport du module de Young sur les fréquences non dimensionnelles dimension des poutres S-S FG avec diverses valeurs de l'indice de loi de puissance.	71
Tableau 4.5 Impacts du rapport du module de Young sur les charges de flambement sans dimension des poutres S-S FG avec diverses valeurs de l'indice de loi de puissance.	74
Tableau 4.6 Effet de la force axiale sur les fréquences propres sans dimension des poutres FG simplement appuyées.	75

Liste des figures

Figure 1.1 Quelques exemples des FGMs dans la nature.....	4
Figure 1.2 Vue d'ensemble d'historique de la recherche et du développement des FGMs.	7
Figure 1.3 Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM.....	8
Figure 1.4 Système de coordonnées d'une plaque en FGM.....	9
Figure 1.5 Domaines d'applications des FGMs.	10
Figure 1.6 Applications des FGMs dans le secteur spatial.....	11
Figure 1.7 Pièces FGMs dans les applications automobiles.	13
Figure 1.8 Utilisation des FGM dans les implants dentaires.....	14
Figure 1.9 Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur.....	16
Figure 1.10 Variation de la fraction de puissance P-FGM.....	18
Figure 1.11 Variation de la fraction de sigmoïde S-FGM.....	19
Figure 2.1 Modèle de poutre Euler Bernoulli soumise à une charge transversale.	23
Figure 3.1 Poutre fonctionnellement graduée.....	36
Figure 3.2 La variation de la fréquence non-dimensionnelle ω en fonction du rapport géométrique (L/h) et pour différentes valeurs de l'indice de puissance.....	51
Figure 3.3 Les trois premiers modes de la poutre FG avec différents indices de loi de puissance.	52
Figure 3.4 La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport n et de l'indice de loi de puissance p pour ($L/h=4$).	53
Figure 3.5 La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport n et de l'indice de loi de puissance p pour ($L/h=16$).	54
Figure 3.6 La variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle en fonction de l'indice p et du rapport L/h pour une poutre FG en appui simple (S-S).	55
Figure 3.7 La variation de la charge de flambage non dimensionnelle avec différents rapports n et l'indice de puissance p pour ($L/h=4$).	55
Figure 3.8 La variation de la charge de flambage non dimensionnelle avec différents rapports de n et l'indice de puissance p pour ($L/h=16$).	56

Figure 4.1 Influence de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence non dimensionnelle ω de la poutre FG avec différents rapports longueur/épaisseur L/h70

Figure 4.2 Influence des rapports géométrique L/h sur la fréquence non dimensionnelle ω d'une poutre FG avec différents indices de loi de puissance p70

Figure 4.3 Impacts du rapport du module de Young sur les fréquences non dimensionnelles de la poutre S-S FG en fonction de l'indice de puissance ($L/h = 5$).71

Figure 4.4 Variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} en fonction de l'indice de loi de puissance p pour différentes valeurs des rapports d'élancement L/h72

Figure 4.5 Variation de la charge critique de flambement sans dimension \bar{N} en fonction des rapports d'élancement L/h pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p73

Figure 4.6 Impacts du rapport du module de Young sur les charges de flambage sans dimension d'une poutre S-S FG en fonction de l'indice de puissance ($L/h = 5$).74

Introduction générale

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection qui ne peuvent se concrétiser sans les progrès réalisés dans le domaine de la science des matériaux. Il est évident la recherche de nouveaux matériaux performant plus légers, servent dans des environnements thermiques et très résistants aux différents types de chargement à partir de la création d'une nouvelle classe de matériaux composites appelé Matériaux Fonctionnellement Gradués. En effet, l'idée de la conception de ces matériaux n'est pas récente, mais elle est apparue depuis plus de trois décennies en particulier, au Japon par des scientifiques au milieu des années 80 en tant que matériaux résistant à des températures très élevées pour des applications aérospatiales.

Les matériaux fonctionnellement gradués sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ces matériaux possèdent de nombreux avantages qui les rendent appropriés dans des spécifiques applications industrielles. Il s'agit notamment d'une réduction potentielle des contraintes transversales dans le plan et à travers l'épaisseur, une amélioration propriétés thermiques, haute ténacité, etc...

Les FGMs ont trouvés des utilisations dans plusieurs applications industrielles de haute technologie à savoir les industries de la défense, l'aérospatiale, les avions, l'automobile, les industries de la construction navale, et d'autres structures d'ingénierie. Par conséquent, il est important d'étudier le comportement de ces structures d'ingénierie telles que les poutres et les

plaques FG lorsqu'elles sont soumises à des charges thermiques et dynamiques pour une conception appropriée.

Le principal objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude de la vibration et du flambement des poutres fonctionnellement graduées en intégrant une nouvelle approche théorique simple de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse du flambement et de la vibration libre des poutres FG.

Pour ce faire, cette thèse comprend quatre chapitres pour décrire l'ensemble de la procédure de développement et d'investigation, qui sont détaillés comme suit :

- Le premier chapitre présente une description détaillée sur les matériaux à gradient fonctionnel, leurs applications potentielles, ainsi que leur concept.
- Le deuxième chapitre présente une revue de la littérature qui se base principalement sur les sujets utiles et pertinents pour cette recherche, tels que l'analyse du flambage et des vibrations des matériaux à gradient fonctionnel (poutres et plaques). Certaines théories développées pour traiter ces problèmes sont également présentées.
- Les résultats analytiques du flambement et de la réponse en vibration libre des poutres à gradient fonctionnel sont donnés dans le troisième chapitre en utilisant une approche théorique raffinée de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Une discussion approfondie sur le comportement des poutres à gradient fonctionnel, basée sur les résultats obtenus est également inclus dans ce chapitre ainsi qu'une étude paramétrique sont présentés.
- Le chapitre quatre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de poutres fonctionnellement gradués (FGM) basé sur une nouvelle approche théorique de la déformation de cisaillement raffinée du premier ordre pour l'analyse du comportement au flambement et les réponses aux vibrations libres.
- Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel

FGMs

1.1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation ont permis de produire des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs), dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent (Tarlochan et al., 2012). Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. Contrairement aux composites conventionnels, les FGMs présentent un grade continu de composition entre leurs éléments terminaux respectifs. Les matériaux FGMs tirent donc parti des propriétés de deux matériaux différents au sein d'un même corps. La composition graduelle élimine de nombreux problèmes associés à la présence d'interfaces discrètes dans les composites conventionnels, tels qu'une mauvaise intégrité mécanique, des pertes de transport dues à une faible adhérence interfaciale, et peut également éliminer les problèmes associés à l'inadéquation de l'expansion thermique, qui est un problème important pour de nombreux composites conventionnels à haute température (Suresh & Mortensen, 1998).

Cette nouvelle génération des matériaux FGMs possède de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al., 1999).

1.2 Historique des matériaux à gradient fonctionnel

En 1972, l'idée générale des matériaux (FGMs) a été initialement proposée pour les composites et les matériaux polymères (Knight et al., 2003) afin d'imiter la structure et le comportement des matériaux naturels (figure (1.1)) tels que les os (Mahamood & Akinlabi, 2017), les dents (Scheid et al., 2020) et les bambous (Mannan et al., 2017), etc.

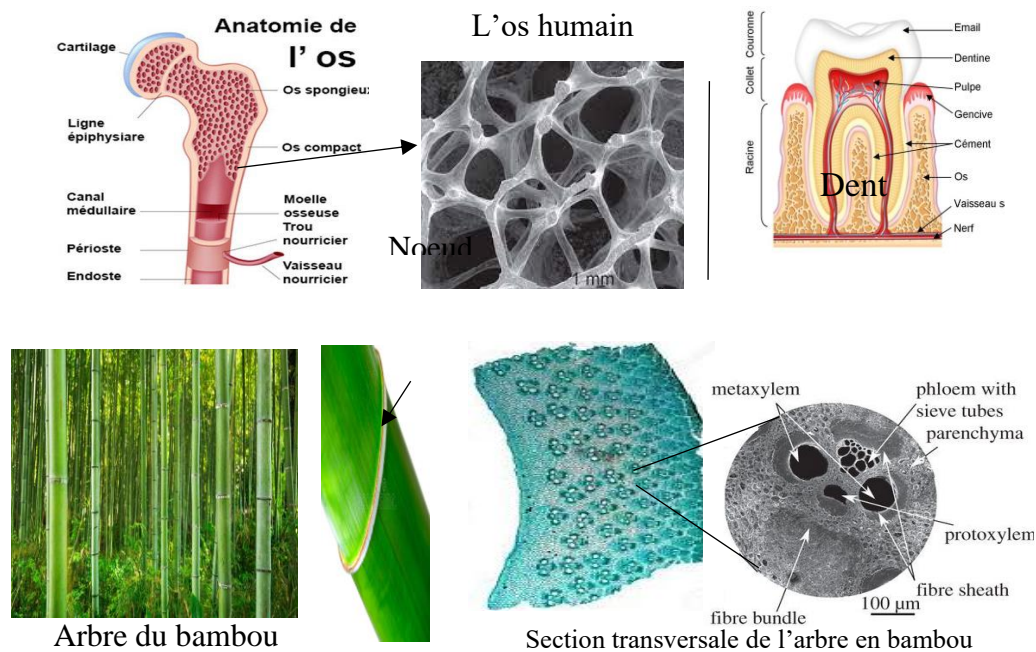


Figure 1.1 Quelques exemples des FGMs dans la nature.

Le concept de FGM a été appliqué pour la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai (Japon) par M. Niino et ses collègues en 1984 lors de la conception d'une navette spatiale (Niino et al., 1987). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. L'objectif était de fabriquer le corps à partir d'un matériau présentant une résistance thermique et des propriétés mécaniques améliorées en changeant progressivement de composition afin de résister à une différence de température importante de 1000 °C (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de

matériaux composites a été utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Nguyen et al., 2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt de ce projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises (Japonais) ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997). Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C, qui sont comme données suivant:

- ❖ Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- ❖ Ténacité du matériau côté basse température ;
- ❖ Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée est traduite alors à l'élaboration d'une transition douce, donc graduelle entre métal pur (côté basse température) et céramique pure (côté haute température) appelée matériau à gradient fonctionnel.

À la fin de la première phase (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure :

1. Le système SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition C.V.D)
2. Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
3. Le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,

4. Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

En 1990 la première conférence internationale sur les FGM a eu lieu à Sendai-city au Japon.

L'objectif principal de la seconde phase (1990-1991) était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles qui sont réalisées dans la première phase. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique (Okamura, 1991).

En 1992, la deuxième conférence internationale sur les FGM a eu lieu à San Francisco USA. Dans cette année, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire (Kieback et al., 2003). À partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

En 1994 a eu lieu le troisième symposium international sur les FGM à Lausanne dans la Suisse.

En 1995 a eu lieu la conférence « engineering foundation » dans USA.

Le quatrième symposium international sur les FGM a eu lieu en 1996 à Tokyo dans le Japon.

Récemment la 16^{ème} internationale conférence sur les FGM a eu lieu à Hartford dans USA.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Régulièrement, une conférence a lieu tous les deux ans (figure (1.2)).

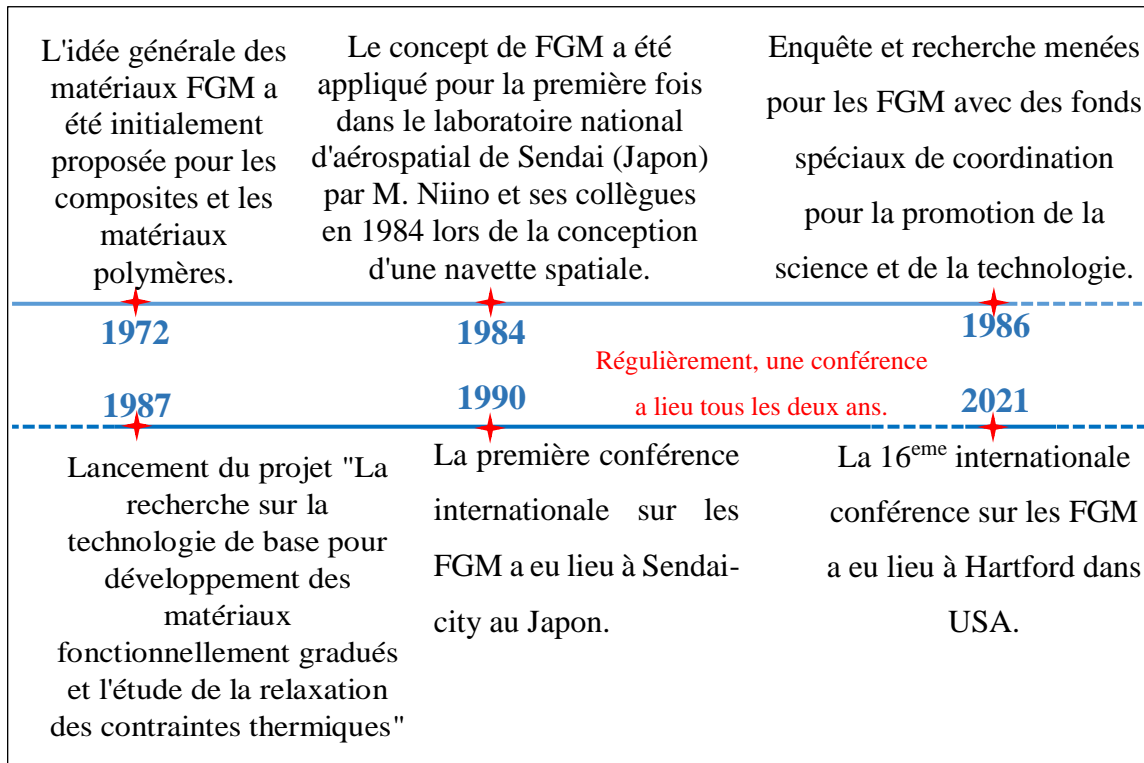


Figure 1.2 Vue d'ensemble d'historique de la recherche et du développement des FGMs.

1.3 Concept des matériaux FGMs

La technologie des matériaux à gradient fonctionnel FGM permet de réaliser des fonctions innovantes et multiples qui ne peuvent être obtenues avec des matériaux homogènes conventionnels (Li et al., 2020). Des profils de composition chimique prédéterminés (la distribution spatiale de leurs composants) ainsi que des transitions prédéterminées dans leur microstructure, sont intentionnellement introduits pour réaliser les fonctions souhaitées. Par conséquent, afin d'utiliser les MGF dans des applications pratiques, il est important de caractériser leurs propriétés.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure (1-3) (Koizumi, 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

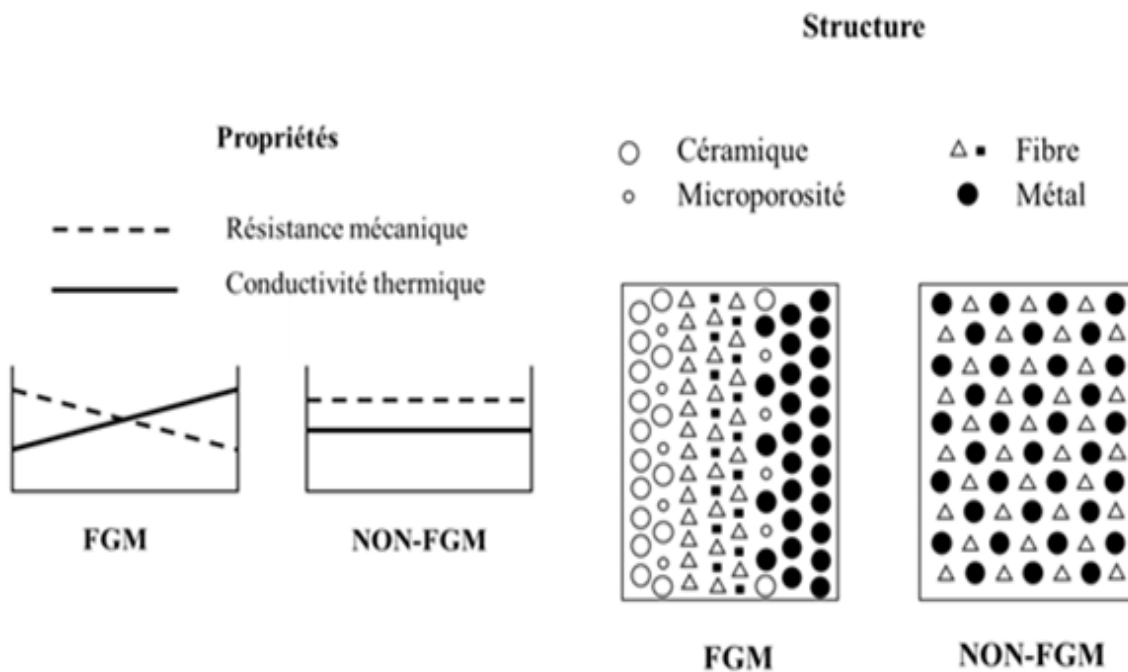


Figure 1.3 Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM

Les matériaux à gradient fonctionnels se distinguent des matériaux composites traditionnels par leurs variations graduelles et continues de leurs propriétés mécaniques et thermiques selon une loi de fonction à travers l'épaisseur (figure (1.3)). Cette dernière permet d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (Provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

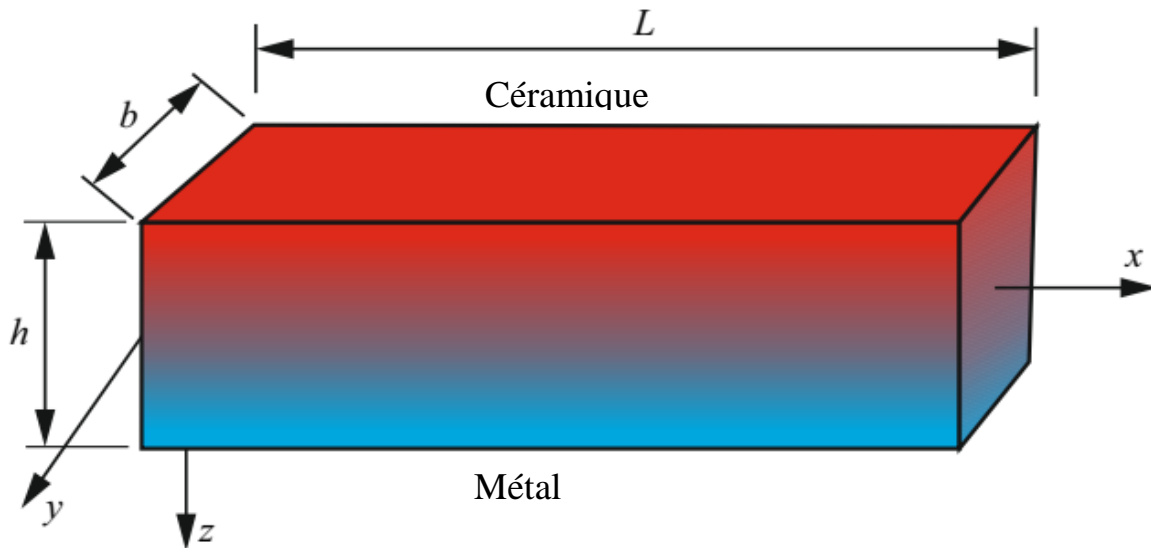


Figure 1.4 Système de coordonnées d'une plaque en FGM.

Ces matériaux sont très souvent composés de céramique et métal permettant ainsi de bénéficier d'une combinaison de leurs avantages respectifs (Sarkar et al., 1997). Nous citons comme exemple le cas pour lequel ces matériaux ont été conçus, où le but était d'utiliser un matériau composite apte à résister une température de 2000 °K sur un côté sans que cette dernière se transmette à l'autre côté. Dans ce cas, un matériau FGM dont la face supérieure est complètement céramique qui varie graduellement à travers l'épaisseur jusqu'à la face inférieure 100 % métal répondra aux exigences des chercheurs. Le choix des deux matériaux est essentiellement dû à leurs caractéristiques complémentaires (figure (1.4)) :

Céramique :

- Résistance thermique ;
- Résistance à l'oxydation ;
- Faible conductivité thermique.
- Faible coefficient de dilatation thermique.

Métal :

- Résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

La transition graduelle entre les deux matériaux permettra d'éliminer les problèmes de l'interface ainsi que de relaxer les contraintes thermiques. En modifiant la microstructure de transition, il est possible d'optimiser la distribution de la déformation, la température et des contraintes.

1.4 Domaines d'applications des FGMs

La plupart des avantages des matériaux FGM dépendent du fait qu'ils peuvent être adaptés aux besoins, ce qui élargit considérablement les outils bien utilisés de la science des matériaux. Certes, les FGM ont initialement proposé pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial, mais au cours des dernières années, les chercheurs ont montré leur application dans un large intervalle des domaines importants (figure (1.5)). Par la suite, on présente quelques applications actuelles des FGM.

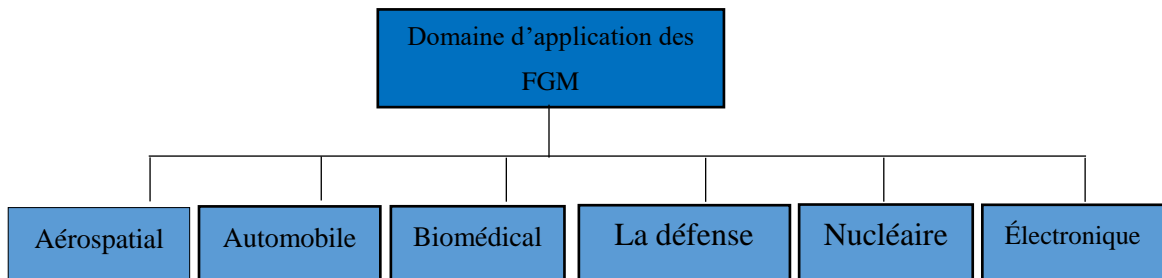


Figure 1.5 Domaines d'applications des FGMs.

1.4.1 Domaine spatial

Le secteur aérospatial est l'un des secteurs qui montre le plus d'intérêt sur les développements des FGMs. Dans ces dernières décennies, la plupart des pièces d'engins spatiaux et d'avions utilisent des FGM à propriétés graduelles, à savoir : un moteur de fusée, la structure de l'engrenage d'un engin spatial, les plaques d'échange thermique et certaines structures, telles que les réflecteurs, les panneaux solaires, les supports de caméra, les roues de turbine, le revêtement des pales (lames) de turbine, les couvercles (couvercles) de nez et le bord avant des missiles et des navettes spatiales (figure (1.6)). Ces composants sont exposés dans

des zones spécifiques à des températures élevées ou à des dégradations extrêmes, et c'est ce que permettent les FGM aux propriétés graduées afin de protéger ces composants.

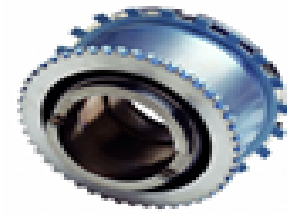
L'alliage FG Al_2O_3/Al , qui présente une excellente résistance à la chaleur et à la corrosion, est utilisé ces dernières années pour produire des pièces de moteur et des tuyères de fusée. Afin d'améliorer la liaison entre les matériaux gradués, Zhao et al. (2012) ont proposé une nouvelle méthode de liaison pour les composites FG W et W-Cu en utilisant la méthode de pressage à chaud pour améliorer les propriétés graduées pour les applications aérospatiales. Dans une autre étude, Kumar et al. (2013) ont conçu et produit des composites polymères-céramiques FG pour étudier l'effet des paramètres du processus sur la microstructure et les propriétés mécaniques pour des applications aérospatiales.



Le télescope spatial Hubble



Navette spatiale Américaine



Roulement d'aéronef



Moteurs d'aviations



Revêtements aérospatiaux



F16 Component

Figure 1.6 Applications des FGMs dans le secteur spatial.

1.4.2 Domaine de l'industrie d'automobile

L'utilisation de matériaux FGM dans l'industrie automobile est très limitée à l'heure actuelle et ne concerne généralement que les parties critiques des voitures, à cause du coût élevé de production. Cependant, le matériau est utilisé dans les parties très importantes de l'automobile (figure (1.7)), où le coût élevé présent justifie son utilisation. Les applications présentes incluent les pochettes de cylindre de moteur pour des pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour les bougies, les chambres de combustion, les puits d'énergie, les amortisseurs, les volants, quelques parties du corps de la voiture, le verre de fenêtre et des freins de voiture de course. Aussi, les matériaux FGM sont utilisés dans des revêtements des corps améliorés pour des voitures et cela inclut les revêtements gradués avec des particules, comme le dioxyde/mica.

Kimberly et al. (2015) ont réussi à fabriquer des composites FG Al_2O_3/Al_2TiO_5 en utilisant la métallurgie des poudres afin d'étudier l'influence de la structure graduelle sur le comportement de la microstructure et les propriétés physiques et thermiques pour les applications automobiles. Les résultats ont montré que les FGM avec une structure graduée amélioraient les propriétés mécaniques et thermiques pour les freins de voiture.

Dans une autre recherche, Ram et al. (2017) ont conçu et produit des composites FG $Al-Mg_2Si$ en utilisant la coulée centrifuge afin d'étudier l'effet des paramètres du processus sur la microstructure et les propriétés mécaniques pour les chemises de blocs-cylindres automobiles. Les résultats ont indiqué une amélioration des propriétés des composites FGM par rapport aux composites conventionnels pour servir l'application requise.

1.4.3 Domaine biomédical

Les FGM permettent d'assurer la biocompatibilité des composants médicaux pour monter en même temps une force de liaison, une résistance à la corrosion et à l'abrasion qui ne peuvent être obtenues avec une structure uniforme Pompe et al. (2003). C'est pourquoi ils sont

maintenant largement utilisés dans les dispositifs prothétiques et les composants des dents artificielles (figure (1.8)).



Figure 1.7 Pièces FGMs dans les applications automobiles.

Ces dernières années, les matériaux FGTi-HA, Ti-Co, Ti-ZrO₂, HA-ZrO₂, Ti-SiO₂ et TiN-HA ont été utilisés pour produire des implants dentaires et des os artificiels afin d'améliorer la biocompatibilité, la résistance à l'usure et la dureté, de manière à accélérer la croissance des os et à prévenir la perte osseuse (Miao et al., 2010).

Thieme et al. (2001) ont fabriqué des composites Ti poreux FG par la méthode de la métallurgie des poudres pour étudier les influences de la protection contre les contraintes sur la microstructure et les propriétés mécaniques des implants orthopédiques. Les résultats indiquent que les composites FG ont amélioré la propriété de compatibilité osseuse, et ils suggèrent donc que ces matériaux sont plus appropriés comme alternative permanente à la culture du squelette.

Outre les implants dentaires et les pièces prothétiques, les MGF à gradient de propriétés sont également utilisés pour réparer les cartilages.



Figure 1.8 Utilisation des FGM dans les implants dentaires.

Dans une autre recherche, Akmal et al. (2015) ont produit les composites FG 316 L-HA par la méthode de frittage sans pression pour étudier l'effet de la taille de l'hydroxyapatite sur la liaison interfaciale et les propriétés mécaniques des bio implants. Ils ont fabriqué deux composites gradués en utilisant de l'HA de taille micro et nanométrique dans la matrice 316 L dans des conditions similaires de paramètres de processus. Leurs résultats ont montré une meilleure densification, une plus grande dureté et une bonne liaison interfaciale pour les composites FG avec HA de taille nanométrique que pour les composites FG avec HA de taille micro, ce qui permet d'utiliser ces composés dans les applications de bio implants. Récemment, Xiao et al. (2020) ont conçu et fabriqué la prothèse mandibulaire FG en utilisant l'impression 3D avec un revêtement métallique afin d'explorer les applications de la prothèse à réseau gradué. Ils ont utilisé le SLA et le PVD pour produire des FG à partir de treillis polymères recouverts de titane (Ti) avec des gradients de porosité. Leurs résultats ont révélé que les treillis recouverts de Ti étaient capables de résister à des contraintes de compression supérieures à 20 % avec une augmentation de la résistance à la compression de 2 à 3 fois, tandis que la porosité des treillis qui correspondent aux régions de la mandibule humaine où les contraintes sont les plus élevées et les plus faibles (68,3 % et 86,3 %, respectivement). Ainsi, les treillis gradués produits dans leur étude peuvent être utilisés pour la conception de prothèses potentielles et d'autres composants biomédicaux.

1.4.4 Domaine de la défense

La tendance générale actuelle dans le domaine de la défense consiste à réduire le poids des véhicules et à empêcher la propagation des fissures grâce à l'utilisation de FGMs, où les structures graduées sont utilisées comme matériaux résistant à la pénétration pour la fabrication de plaques de blindage et de gilets pare-balles, ainsi que pour la fabrication de pièces défensives à savoir: des tiges de guidage, des rouleaux de précision, des arbres, des tubes, des verrous, des logements d'essieux et des percuteurs (Chin et al., 1999 ; Chen et al., 2007).

Huang et al. (2016) ont utilisé le principe des FGM pour fabriquer des armures légères, très résistantes aux chocs et peu coûteuses à partir de composites $Al_2O_3-ZrO_2$ en utilisant la méthode de la métallurgie des poudres. Ils ont effectué une simulation pour analyser les résultats afin de vérifier leurs résultats expérimentaux. De plus, ils ont indiqué que les composites FG Al_2O_3/ZrO_2 avec des propriétés graduelles sont un matériau prometteur pour une utilisation dans les applications de défense en raison de ses propriétés extraordinaires par rapport aux composites conventionnels.

1.5 Lois régissant la variation des propriétés des plaques en FGMs

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) constituent une nouvelle classe émergente de matériaux avancés, très attrayants pour une large gamme d'applications d'ingénierie car ils permettent la conception de différentes performances fonctionnelles au sein d'une pièce. Ils sont des matériaux hétérogènes présentant une variation spatiale contrôlée de leurs caractéristiques chimiques et / ou structurelles dans au moins une direction. Le gradient de propriété dans le matériau est provoqué par une dépendance de position de la composition chimique, de la microstructure ou de l'ordre atomique. Les FGM se distinguent des matériaux composites conventionnels par ce changement continu des caractéristiques. Afin d'analyser les fractions de volume, différentes fonctions de : puissance, exponentielle, sigmoïde sont utilisées par la majorité des chercheurs (Shyang et al., 2006).

1.5.1 La loi exponentielle E-FGM

Nombreux chercheurs utilisent des fonctions exponentielles pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGMs (Jin & Batra, 1996 ; Gu & Asaro, 1997 ; Erdogan & Wu, 1996 ; Erdogan & Chen, 1998).

La fonction exponentielle est donnée par la formule suivante :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+h/2)} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\begin{cases} A = E_2 \\ \beta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où : E_1 et E_2 sont respectivement les propriétés matérielles de la structure E-FGM (modules de Young) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$).

La figure (1.9) montre la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque E-FGM :

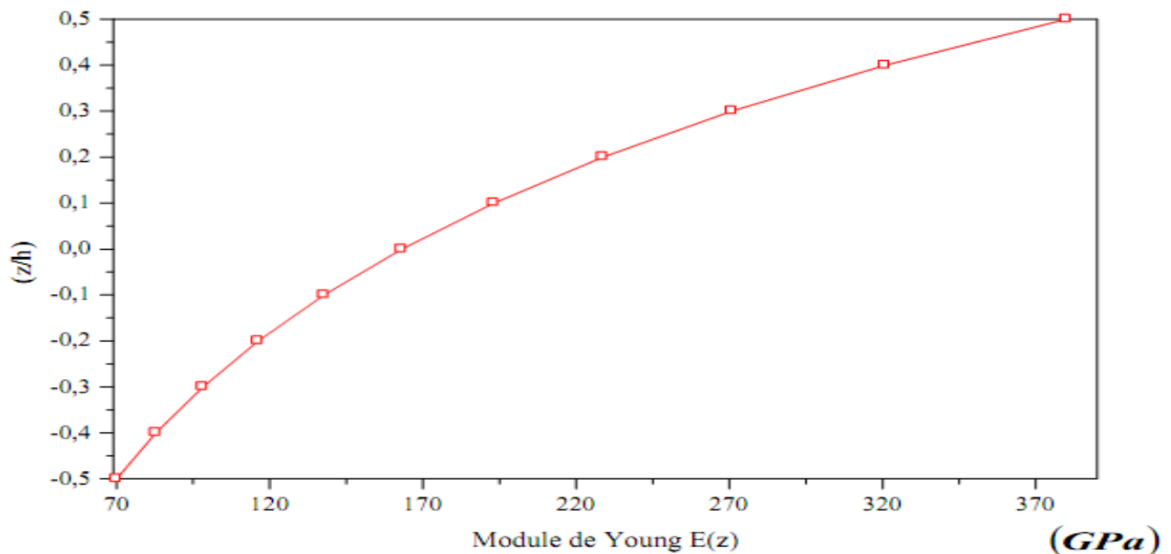


Figure 1.9 Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur

1.5.2 La loi de puissance P-FGM

La fraction volumique d'un matériau P-FGM varient selon l'équation suivante (Bao & Wang, 1995) :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (1.3)$$

Où p est le paramètre du matériau qui reflète le type de distribution des propriétés matérielles à travers l'épaisseur de la structure, c'est-à-dire définir les pourcentages des particules de chaque constituant (céramique et métal) en chaque couche de la structure et la variation (augmentation ou diminution selon le matériau) de ces pourcentages à travers l'épaisseur h de la structure. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Jin & Paulino, 2001; Yung & Munz, 1996):

$$E(Z) = V(Z) \cdot E_1 + [1 - V(Z)] \cdot E_2 \quad (1.4)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la poutre FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (1.10). D'après cette figure, il est clair que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $p < 1$ et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

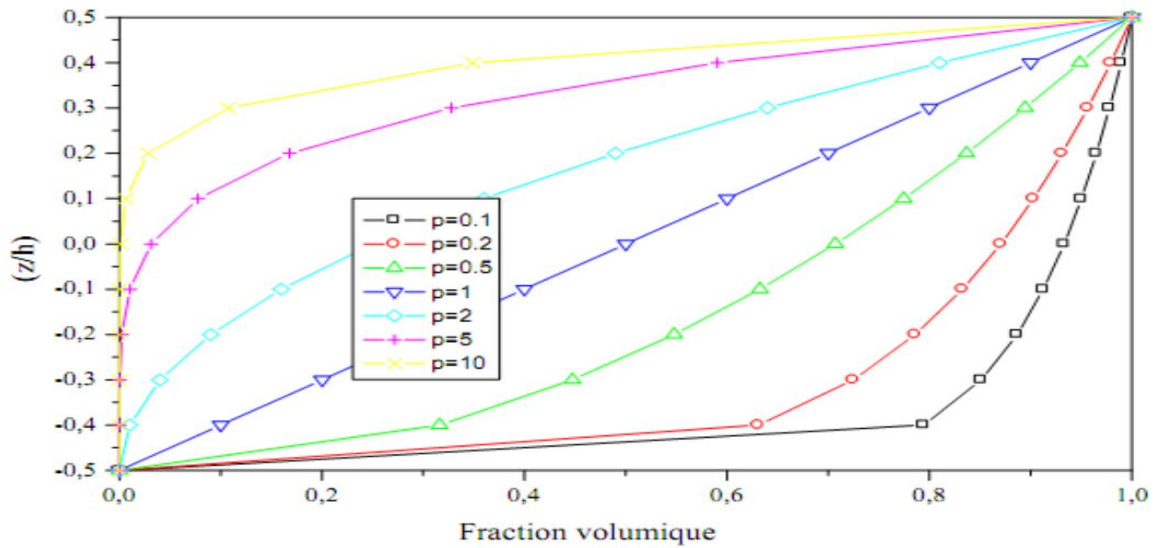


Figure 1.10 Variation de la fraction de puissance P-FGM.

1.5.3 La loi sigmoïde S-FGM

La loi de puissance et la fonction exponentielle sont généralement utilisées pour décrire la gradation des propriétés matérielles des FGM mais dans ces fonctions les concentrations de contraintes apparaissent dans l'une des interfaces dans lesquelles la matière est continue mais évolue rapidement. Pour surmonter ce problème, (Chung & Chi, 2001) ont suggéré une autre loi appelée loi Sigmoïde, qui combine deux fonctions de loi de puissance. Cette loi n'est pas une loi indépendante, elle a deux couches de FGM symétriques avec une distribution de la loi de puissance. (Chi & Chung, 2002) ont également proposé de réduire jusqu'à un certain point l'utilisation de la loi sigmoïde les facteurs d'intensité de contrainte d'un corps fissuré. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies comme suit :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.5)$$

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.6)$$

La fraction volumique d'un matériau S-FGM est calculée par les équations suivantes (Chi & Chung, 2003) :

$$E(z) = V_1(z) \cdot E_1 + [1 - V_1(z)] \cdot E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.7)$$

$$E(z) = V_2(z) \cdot E_1 + [1 - V_2(z)] \cdot E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.8)$$

D'après la figure (1.11) on remarque que la variation de la fraction volumique dans les équations (1.7) et (1.8) représente les distributions sigmoïdes c'est pour ça cette structure FGM est appelée (structure S-FGM).

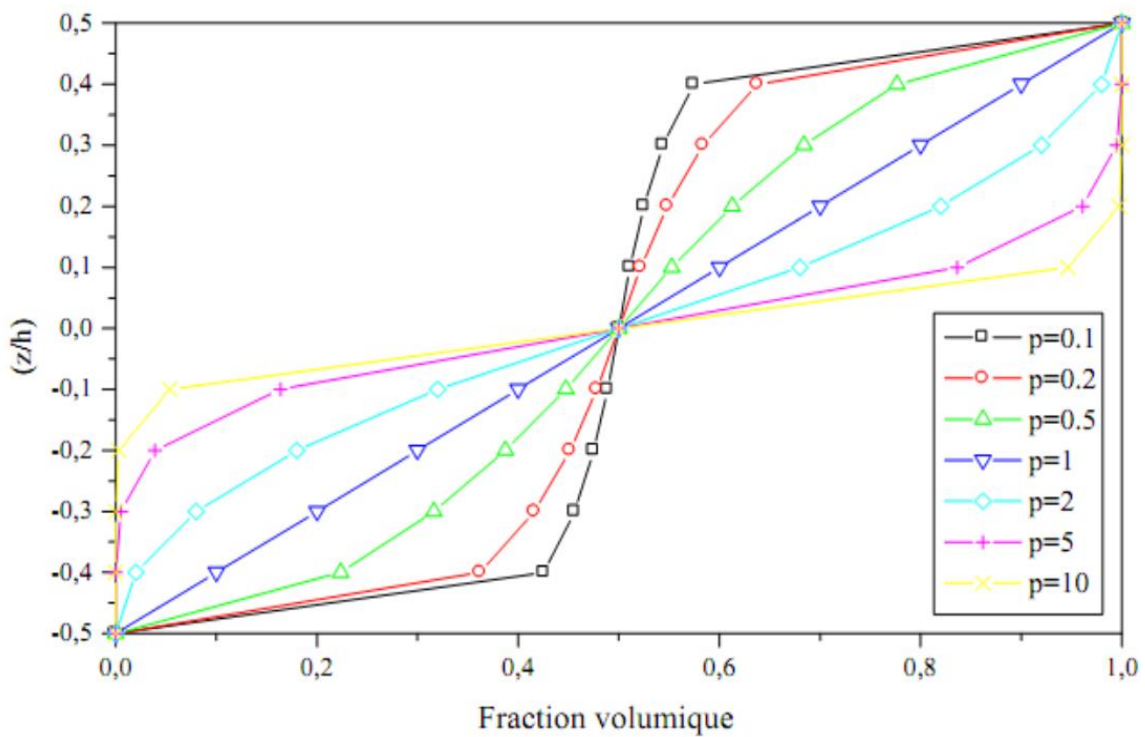


Figure 1.11 Variation de la fraction de sigmoïde S-FGM.

1.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la notion FGM, nous avons défini ces types des matériaux, leurs propriétés, leurs domaines d'application, leurs l'histoire et de leur développement ainsi que les techniques d'élaborations. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application. Enfin nous avons terminé par l'étude des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés du matériau suivant l'épaisseur de la poutre.

Chapitre 2

Revue de recherche sur les structures FGMs

2.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de passer en revue les recherches précédentes sur une catégorie de matériaux composites, à savoir les matériaux à gradient fonctionnel. Cette revue se concentre principalement sur les modèles théoriques qui ont été développés pour analyser les réponses globales des poutres à gradient fonctionnel sous chargement mécanique et thermique. En mettant l'accent sur des travaux antérieurs sur les contraintes résiduelles, et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements.

2.2 Théorie des poutres et des plaques FGMs

Les poutres et les plaques en FGMs sont souvent présentes dans plusieurs structures d'ingénierie qui est due au fait que ces matériaux présentent plusieurs avantages, parmi lesquels on note la haute résistance et la grande rigidité par rapport à leur poids, des caractéristiques supérieures de fatigue ainsi que la capacité de changer des orientations des fibres pour répondre à des exigences de conception.

Comme on a présenté dans le premier chapitre ces matériaux se composent de deux matériaux ou plus, ce qui pose beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales telles que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles et la charge de flambement. Les poutres et les plaques à gradient fonctionnel soumises à des charges statiques et dynamiques dans un environnement thermique doivent être bien conçues afin d'obtenir des structures solides et de minimiser les coûts nécessaires à leur traitement et à

leur fabrication. Donc, Il est important d'étudier et de comprendre le comportement des matériaux à gradient fonctionnel soumis à diverses charges mécaniques, pour une conception appropriée.

En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories pour prédire le bon comportement en flexion des poutres en se basant sur des approches analytiques à savoir : la théorie d'Euler et Bernoulli, la théorie classique des poutres minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-love), théorie classique des poutres semi-épaisses (first-order shear deformation theory (FSDT)), théorie d'ordre supérieur applicable aux poutres épaisses et poutres minces (higher-order shear deformation theory (HSDT)) et la théorie raffinée.

Dans le cadre de notre travail, quelques théories des poutres ainsi que leurs relations constitutives sont décrites ci-dessous.

2.2.1 La théorie des poutres d'Euler et Bernoulli CBT

Dans diverses structures d'ingénierie, il existe un type d'élément structurel dont l'une des dimensions est beaucoup plus grande que les deux autres et qui sert principalement à résister aux charges transversales. Un tel élément structurel est généralement appelé poutre. La classification de la poutre est basée sur le rapport entre la longueur (l) et l'épaisseur (h). La définition d'une poutre mince est une poutre dont l'épaisseur est relativement faible par rapport à sa longueur ; en général, si le rapport longueur/épaisseur de la poutre est supérieur à 20, la poutre est considérée comme une poutre mince. La théorie élastique correspondante décrivant leurs comportements déformables est communément appelée "théorie des poutres". Elle joue un rôle important dans l'analyse structurelle car elle fournit aux ingénieurs un outil simple et efficace pour analyser de nombreuses structures de poutre (Chakraverty & Pradhan, 2016).

Plusieurs théories de poutre ont été développées sur la base de diverses hypothèses, et conduisent à différents niveaux de précision. L'une des plus simples et des plus utiles de ces théories a été décrite pour la première fois par Euler et Bernoulli et est communément appelée théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. La théorie d'Euler-Bernoulli (appelée aussi théorie classique des poutres (CBT)), largement utilisée jusqu'à ces dernières années (Bauchau &

Craig, 2009), a été initialement élaborer par Leonhard Euler et Daniel Bernoulli en 1751 pour traiter le problème de vibration d'une poutre mince supportée par différentes conditions d'extrémité. La théorie peut fournir une précision suffisante lorsqu'elle est appliquée à l'analyse des poutres minces.

2.2.1.1 Hypothèses de la théorie des poutres d'Euler et Bernoulli CBT

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (figure (2.1)) est établie sur les trois hypothèses principales suivantes:

- L'hypothèse fondamentale de cette théorie est que la section transversale de la poutre est infiniment rigide dans son propre plan, c'est-à-dire qu'aucune déformation ne se produit dans le plan de la section transversale. Par conséquent, le champ de déplacement dans le plan peut être représenté simplement par deux translations de corps rigides et une rotation de corps rigide. Cette hypothèse fondamentale ne concerne que les déplacements dans le plan de la section transversale.
- Deux hypothèses supplémentaires traitent des déplacements hors plan de la section qui : Après la déformation, on suppose que la section transversale d'une poutre reste plane et normale à l'axe déformé de la poutre.

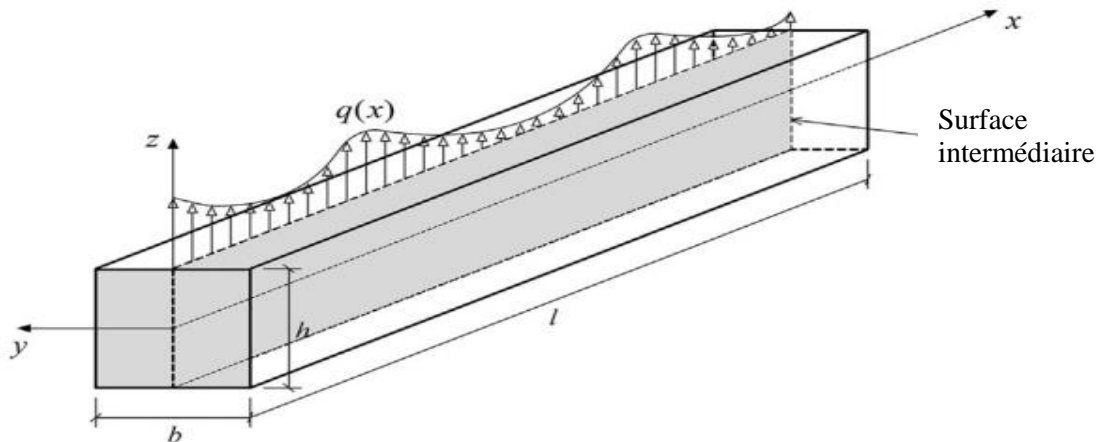


Figure 2.1 Modèle de poutre Euler Bernoulli soumise à une charge transversale.

2.2.1.2 Champ de déplacement de la théorie des poutres d'Euler et Bernoulli

En se basant sur les hypothèses citées précédemment, la forme générale du champ de déplacement correspondant aux a la théorie des poutres d'Euler Bernoulli peut être exprimée comme suit (Wang et al., 2000) :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où u et w sont les déplacements d'un point arbitraire le long les directions x et z et respectivement. $u_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les déplacements du point $(x, 0)$.

2.2.1.3 Limitations de la théorie des poutres d'Euler et Bernoulli CBT

Dans la théorie classique des poutres, les effets de l'inertie rotative et de la déformation en cisaillement n'étaient pas pris en compte. En 1921, Timoshenko a ajouté la déformation en cisaillement pour formuler les équations gouvernantes des poutres (Timoshenko, 1921 ; Timoshenko, 1922). Cette théorie est souvent appelée théorie des poutres de Timoshenko (TBT) ou théorie des poutres à déformation de cisaillement de premier ordre (FSDBT). Comme cette théorie suppose une déformation transversale constante dans le sens de l'épaisseur, un facteur de correction du cisaillement est nécessaire.

La théorie des poutres de Timoshenko est généralement utile et appropriée pour analyser les problèmes de vibration des poutres soumises à diverses charges mécaniques. L'utilisation de cette théorie conduit à une précision beaucoup plus grande dans l'analyse du comportement des poutres que l'utilisation du CBT, en particulier pour les poutres épaisses. Cependant, la théorie de la poutre de Timoshenko est l'une des théories de la poutre qui nécessite des facteurs de correction du cisaillement calculés à partir de la section transversale de la poutre.

2.2.2 La théorie classique des plaques minces de Love Kirchhoff CPT

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée au rapport (L/h).

Les plaques se distinguent selon la grandeur de l'épaisseur h en :

- ❖ pour les plaques épaisses : $4 < \frac{L}{h} < 20$
- ❖ pour les plaques minces : $\frac{L}{h} < 20$

La théorie de Kirchhoff-Love, également connue sous le nom de théorie classique des plaques (CPT) est utilisée pour déterminer les contraintes et les déformations dans les plaques minces soumises à des forces et des moments. Cette théorie est une extension de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et a été développée en 1888 par Love en utilisant des hypothèses proposées par Kirchhoff (Podio, 1989).

2.2.2.1 Hypothèses de la théorie des plaques de Love Kirchhoff CPT

L'hypothèse de love-Kirchhoff néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion et de la membrane (Olivier & Epifanio, 2021).

2.2.2.2 Champ de déplacement de la théorie de Love Kirchhoff CPT

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné comme suit (Steele & Balch, 2009) :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{dw(x)}{dx} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{dw(x)}{dy} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

Etant donné que $u_0(x, y)$ et $w_0(x, y)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque $((x, y, 0))$.

Cas poutre :

Le champ de déplacement dans le cas des poutres pour la théorie CPT est donné comme suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.2.3 Limitations de la théorie de Love Kirchhoff CPT

Puisque ce modèle ne prend pas l'effet de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les plaques et poutres épaisses.

2.2.3 La théorie des poutres du premier ordre FSDT

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été développée par Mindlin en 1951 (Mindlin, 1951). Cette théorie est utilisée lorsque la normale au plan médian de la plaque avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale au plan médian déformé.

2.2.3.1 Hypothèses de la théorie du premier ordre FSDT

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques. La FSDT tient compte de l'effet de la déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire (Reissner, 1945).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses que la théorie classique CPT, mais la plaque est à l'état de normalité détendue.

2.2.3.1 Champ de déplacement de la théorie du premier ordre FSDT

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant (Mindlin, 1951) :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

De telle sorte que $\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$ représentent les rotations autours x , y et z .

2.2.3.2 Limitations de la théorie du premier ordre FSDT

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse vibratoire d'une plaque ou poutre en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation. Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Le facteur de correction du cisaillement est difficile à déterminer car il dépend non seulement des paramètres géométriques mais aussi des conditions de chargement et des conditions aux limites. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction du cisaillement, des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites.

2.2.4 La théorie d'ordre supérieur HSDT

La théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) est nécessaire lorsque la normale au plan médian de la plaque avant la déformation ne reste pas droite après la déformation, ce qui entraîne une variation non linéaire des déplacements u et v sur l'épaisseur de la plaque.

2.2.4.1 Hypothèses de la théorie d'ordre supérieur HSDT

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les hypothèses de la distribution linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur

une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale.

2.2.4.2 Champ de déplacement de la théorie d'ordre supérieur HSDT

Le champ de déplacement total basé sur la théorie HSDT pour le cas d'une plaque peut être écrit comme suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{dw_0(x, y)}{dx} + f(z)\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{dw_0(x, y)}{dy} + f(z)\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.5)$$

Le champ de déplacement basé sur la théorie HSDT pour le cas d'une poutre peut être exprimé comme suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} + f(z)\phi_x \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

Notant que la fonction $f(z)$ est définie en fonction de la théorie appliquée. Plusieurs travaux sur les théories d'ordre élevé ont été développés, on donne dans le tableau ci-dessous quelques contributions dans la théorie d'ordre élevée (notant que dans ces théories, la distribution des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur est parabolique et sont valides pour les poutres épaisses et minces) :

Tableau 2.1 Quelques fonctions des théories HSDT pour des plaques FGMs.

La théorie	La fonction $f(z)$
TSDT (Reddy, 1997)	$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$
ESDPT (Karama et al., 2003)	$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$
SSDT (Touratier, 1991)	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Reissner (Reissner, 1975)	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$
Soldatos (Soldatos & Timarci, 1993)	$f(z) = h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
Nguyen (Nguyen, 2007)	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$
Benachour (Benachour et al., 2011)	$f(z) = z_{ns} + C - \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right)$
Aydogdu (Aydogdu, 2009)	$f(z) = z \alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$

2.2.4.3 Limitations de la théorie d'ordre supérieur HSDT

Cette théorie contient cinq variables.

2.2.5 La théorie raffinée

Une théorie des plaques raffinées (RPT) simple et efficace a été initialement introduite et mise en œuvre par Shimpi et Patel (2006a ; 2006b) afin de traiter les problèmes d'analyse statique et dynamique des plaques orthotropes. La théorie affinée peut être classée parmi les théories de déformation en cisaillement du troisième ordre.

2.2.5.1 Hypothèses de la théorie raffinée

Le développement de la théorie des plaques raffinées est basé sur les hypothèses selon lesquelles la théorie représente les variations paraboliques des déformations de cisaillement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait également aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas de la HSDT. En outre, la théorie peut fournir une grande précision dans l'analyse du comportement des plaques soumises à des charges mécaniques sans utiliser le facteur de correction du cisaillement.

2.2.5.2 Champ de déplacement de la théorie raffinée

Le champ de déplacement de la théorie raffinée est (Shimpi & Patel, 2006b) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = -z \frac{dw_b}{dx} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{dw_s}{dx} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{dw_b}{dx} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{dw_s}{dx} \\ w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.2.5.3 Avantages de la théorie raffinée

En raison des nombreux avantages de l'utilisation de la RPT, cette théorie a récemment suscité un grand intérêt de la part des chercheurs. Kim et al. (Kim et al., 2009a) ont utilisé le RPT pour résoudre le problème de flambement de plaques isotropes et orthotropes sous diverses charges telles que la compression uni-axiale, la compression bi-axiale et la combinaison traction-compression dans différentes directions. Les auteurs ont étendu leur travail en utilisant à nouveau le RPT pour traiter l'analyse des plaques dans différents problèmes.

Le RPT a été appliquée pour résoudre la réponse en flexion et en vibration des plaques composites laminées. Les solutions à forme fermée obtenues par la solution de Navier ont été présentées pour déterminer la déflexion et la fréquence naturelle des plaques simplement supportées (Kim et al., 2009b ; Thai & Kim, 2010). En utilisant la solution de type Levy avec le RPT pour traiter l'analyse de flambement des plaques orthotropes, les charges de flambement des plaques dont deux bords opposés sont simplement appuyés et les deux autres bords soutenus par des conditions limites arbitraires ont été obtenues (Thai & Kim, 2011).

2.3 Travaux de recherche sur les FGMs

Avec l'augmentation de l'application des FGM, de nouvelles méthodes doivent être développées pour les caractériser, pour concevoir et analyser les composants structurels fabriqués avec ces matériaux. Sur cette base, nombreuses approches théoriques ont été développées pour étudier la statique, les vibrations libres et le flambage des poutres de FGM.

2.3.1 Travaux de recherche sur la vibration libre des structures FGMs

Sur la base de la théorie d'Euler-Bernoulli, certains auteurs ont étudié la vibration des poutres FGM par différentes approches analytiques et numériques (Yang & Chen, 2011 ; Huang & Li, 2010 ; Liu & Shu, 2014). En supposant que les propriétés du matériau changent dans la direction de l'épaisseur, Yang et Chen (2011) ont analysé les vibrations et le flambement des poutres FGM avec des fissures de bord verticales. Les effets des paramètres du gradient de matériau et les conditions aux limites sur les fréquences naturelles et les charges de flambement ont été examinés. Huang et Li (2010) ont étudié la vibration libre des poutres à section non uniforme en utilisant une technique d'intégration pour transformer les équations différentielles en équations intégrales de Fredholm Plus récemment, Liu et Shu (2014) ont présenté une solution analytique pour la vibration libre de poutres à des propriétés matérielles changent continuellement à travers l'épaisseur de la poutre conformément à une fonction exponentielle (E-FGM) avec une simple délamination.

A cause des effets de l'inertie rotative et de la déformation en cisaillement qui ne sont pas pris en considération. Autres chercheurs ont traité de la réponse dynamique des poutres FGM

en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT : théorie de Timoshenko). Citant par exemple, Sina et al. (2014) ont utilisé une nouvelle théorie des poutres différente de la théorie traditionnelle de déformation de cisaillement du premier ordre pour analyser la vibration libre des poutres FGM. Li (2008) a analysé par la théorie de déformation au cisaillement les réponses statique et dynamique d'une poutre FG minces en introduisant une nouvelle fonction pour découpler les équations gouvernantes. Li et al. (2014) ont également étudié la vibration libre des poutres FGM basée sur les théories des poutres classique et du premier ordre.

Nguyen et al. (2013) ont étudié, à l'aide d'un nouveau modèle de poutre à déformation de cisaillement du premier ordre la vibration libre des poutres FG chargées axialement dans lesquelles une rigidité transversale améliorée a été introduite sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

Les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été proposées afin d'éviter l'utilisation d'un facteur de correction du cisaillement et d'obtenir une meilleure évaluation de la réponse des poutres FG ont été proposées. Plusieurs études sur la vibration libre des poutres FGM ont été effectuées sur la base de cette théorie. Şimşek (2010) a étudié les déflexions dynamiques et les contraintes d'une poutre FGM simplement appuyée et soumise à une charge mobile en appliquant la théorie d'Euler-Bernoulli, Timoshenko et les théories des poutres à déformation parabolique en cisaillement. Thai et Vo (2012) ont présenté une solution analytique sous forme de séries trigonométriques pour la flexion statique et la vibration libre des poutres FGM supportés simplement en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Bourada et al. (2015) ont développé une nouvelle théorie simple de déformation en cisaillement et normale pour les poutres FG dans laquelle le nombre d'inconnues a été réduit afin d'optimiser le temps de calcul. Bensaid et al. (2017) ont contribué à la déflexion statique et au comportement dynamique des poutres hyperboliques d'ordre supérieur déformables par cisaillement à gradient de composition, dans cette étude les auteurs ont fait une autre supposition dans la cinématique de la poutre pour construire un nouveau modèle de poutre déformable par cisaillement simple et efficace. La théorie de la déformation en cisaillement

hyperbolique à deux inconnues, développée par Zidi et al. (2017) qui permet d'étudier l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres FG. l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres FG. Parallèlement, Bouremana et al. (2013) ont développé une nouvelle théorie de poutre de première déformation en cisaillement basée sur la position de la surface neutre pour les poutres FG.

Récemment, Vo et al. (2017) ont étudié la vibration libre de poutres composites chargées axialement en utilisant une théorie de déformation normale et de cisaillement à quatre inconnues. Plus récemment, Kaci et al. (2018) ont étudié la réponse post-flexion des poutres composites laminées par le modèle de poutre de cisaillement à deux inconnues.

2.3.1 Travaux de recherche sur le flambement des structures FGMs

Meksi et al. (2018) ont proposé une procédure numérique pour l'analyse de flambement des plaques FGM ayant une variation d'épaisseur parabolique-concave. Khalid (2018) a étudié les caractéristiques de flambement des poutres FGM non linéaires à puissance symétrique et sigmoïde en utilisant la méthode des éléments finis. Pour les poutres en appui simple, serrées et non serrées, Li et Batra (2013) ont trouvé des relations entre les charges critiques de flambement des poutres de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli à gradient fonctionnel et celles d'une poutre Euler-Bernoulli homogène. Nguyen (2015) a employé une hypothèse dans la cinématique de la plaque (contient quatre inconnues seulement) pour développer un modèle de plaque de déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur pour l'analyse des matériaux à gradient fonctionnel. Une nouvelle approche (Hao et al., 2014) a été proposée pour résoudre les problèmes statiques, de vibration libre et de flambage d'une poutre FG dont les propriétés du matériau varient continuellement dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance. Récemment, le comportement de flambage statique des poutres en matériau à gradient fonctionnel a été rapporté par la méthode des éléments finis dans (Ziou et al., 2020).

2.4 Conclusion

Un aperçu sur les théories des poutres a été présenté dans ce chapitre à savoir : la théorie classique des poutres (CBT), (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

(FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et la théorie raffinée. Par la suite, on a cité des différents modèles développés dans la littérature sur la base de ces théories des poutres.

Chapitre 3

Etude d'analyse vibratoire d'une poutre FG par la théorie RHSDT

3.1 Introduction

En cherchant dans la littérature et à la connaissance des auteurs, ils existent peu de travaux qui considèrent l'effet couplé entre la vibration et la charge axiale des poutres FG basées sur la nouvelle théorie des poutres raffinées à quatre variables. Par rapport à un modèle de poutre, le nombre de variables inconnues résultant n'est que de quatre dans les cas généraux, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation en cisaillement.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le flambement statique et la vibration libre de poutres céramo-métalliques à gradient continu en utilisant une approche théorique de déformation en cisaillement d'ordre supérieur raffinée RHSDT. Le modèle proposé est capable de saisir à la fois les impacts de la microstructure et de la déformation par cisaillement sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement, en raison de la distribution réaliste des contraintes de cisaillement transversales. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur sous une forme graduelle et sont estimées par un modèle de loi de puissance. Les équations de mouvement et les conditions aux limites correspondantes sont extraites à l'aide du principe de Hamilton, puis résolues par des solutions analytiques pour calculer les charges de flambage critiques et les fréquences naturelles. Pour confirmer la validité de l'approche théorique proposée, les résultats obtenus sont vérifiés et comparés à ceux d'autres théories existantes dans la littérature. Et pour finir, une étude paramétrique est fournie pour montrer l'influence de différents paramètres tels que l'indice de puissance, les paramètres géométriques de la poutre, le rapport de module et la charge axiale sur les caractéristiques dynamiques et de flambage des poutres FG.

3.2 Formulation du problème

Considérons une poutre en FGM d'épaisseur « h », largeur « b » et longueur « L » dans les sens x et z respectivement comme montré dans la figure (3.1). Cette poutre est constituée d'un mélange de deux matériaux distincts (métal et céramique). La surface supérieure est composée entièrement de céramique et la surface inférieure est en métal.

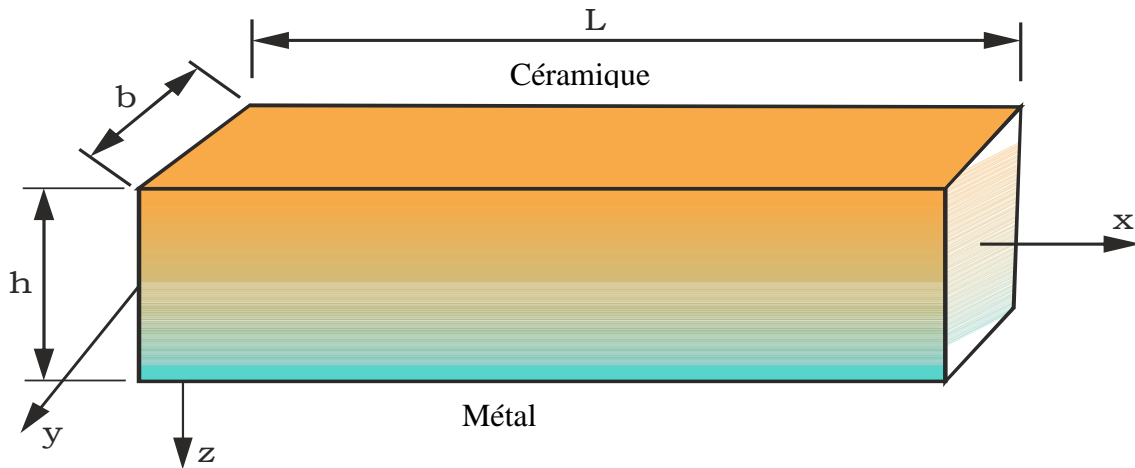


Figure 3.1 Poutre fonctionnellement graduée.

La composition des propriétés matérielles de la poutre est supposée varier de façon continue à travers l'épaisseur de la poutre et elles sont exprimées ci-dessous comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c \quad (3.1)$$

Où $E(z)$ est le module d'Young effectif, E_c et E_m désignent les propriétés correspondantes respectivement aux faces supérieure et inférieure de la poutre FG, respectivement. Le V_c dans l'équation représente la fraction volumique du constituant de la face supérieure et suit une loi de puissance simple telle que :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (3.2)$$

Où p est un paramètre qui détermine le profil de variation du matériau (le mélange de la

céramique et du métal) dans l'épaisseur de la poutre FG.

3.2.1 L'approche théorique de déformation en cisaillement d'ordre supérieur raffinée RHSDT

Pour étudier la vibration libre de poutres FG chargées axialement et simplement, on utilise une approche théorique raffinée de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT). Le modèle de cette approche théorique est capable de saisir à la fois les impacts de la microstructure et de la déformation par cisaillement sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement. Cette approche théorique satisfait aussi la condition de contraintes de cisaillement nulles aux bords des contraintes de cisaillement aux bords de la poutre. Notant que le nombre d'inconnues n'est que de quatre (04) dans la présente approche théorique comparativement à la théorie classique de déformation par cisaillement (Zenkour & Mashat, 2010).

3.2.1.1 Hypothèses de la présente approche théorique

L'approche théorique des poutres RHSDT est établie sur les hypothèses suivantes :

- Le nombre d'inconnues n'est que de quatre (04).
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre, les contraintes générées sont donc infinitésimales ;
- Le champ déplacement transversal (w) a deux composantes, une composante de flexion w_b et une composante de cisaillement (w_s) et celles-ci sont des fonctions des coordonnées x et z uniquement :

$$w = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (3.3)$$

- Le champ de déplacement u dans la direction x consiste en composantes de flexion et de cisaillement

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (3.4)$$

La composante de flexion u_b est supposée être similaire à celle qui est donnée par la théorie classique des poutres, l'expression de u_b est donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3.5)$$

La composante de cisaillement u_s induit avec la composante w_s , une variation parabolique de déformation de cisaillement et par conséquent la contrainte de cisaillement est nulle aux bords de la poutre, l'expression de u_s peut être donnée par :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.6)$$

La fonction $f(z)$ est une fonction de forme déterminant la distribution de la déformation de cisaillement transversal et de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre FG et satisfait les conditions limites sans contrainte sur les faces supérieure et inférieure de la poutre.

$$f(z) = z - \left(\frac{h}{\pi}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{z}{h}\right) \quad (3.7)$$

3.2.1.2 Cinématique

Le champ de déplacement de la présente approche théorique de poutre Rhsdt est donné sous la forme suivante (Senthilnathan et al., 1987 ; Thai & Vo, 2012) :

$$\begin{cases} u_1 = u_0(x, t) - z \frac{dw_b}{dx} - f(z) \frac{dw_s}{dx} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{cases} \quad (3.8)$$

Où u_0 est le déplacement du plan médian de la FG poutre dans la direction x ; w_b et w_s sont les composantes de déplacement de flexion et de cisaillement transversal, respectivement. Il est à noter aussi que ce champ de déplacement vérifie la nullité de la contrainte de cisaillement dans les faces supérieures et inférieures de la poutre.

Les relations déformation-déplacement de l'approche théorique RHSBT sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} = g \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.10)$$

Tel que :

$$f(z) = z - \left(\frac{h}{\pi} \right) \cdot \sin \left(\pi \cdot \frac{z}{h} \right)$$

Et g : la dérivée de fonction de cisaillement $f(z)$.

$$g = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (3.11)$$

3.2.1.3 Relations constitutives

Pour les poutres élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_{xx} \text{ et } \sigma_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (3.12)$$

À partir des caractéristiques du matériau établies par l'équation (3.1) les coefficients de rigidité sont définis comme suit :

$$Q_{11}(z) = E(z) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (3.13)$$

3.2.1.4 Les équations de la stabilité

En appliquant le principe de Hamilton, on peut obtenir les équations du mouvement. Le principe peut être écrit sous une forme analytique comme suit :

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (3.14)$$

L'équation suivante représente la variation de l'énergie de déformation de la poutre qui est exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tel que N , M_b , M_s et Q sont les résultantes des contraintes définies dans les équations suivantes :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (3.16)$$

$$M_b = \int_A z \sigma_x dA \quad (3.17)$$

$$M_s = \int_A f \sigma_x dA \quad (3.18)$$

$$Q = \int_A g \sigma_{xz} dA \quad (3.20)$$

La variation de l'énergie potentielle par les charges transversales appliquées q peut être exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dA + \int_0^L N_0 \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} \frac{\partial \delta (w_b + w_s)}{\partial x} dA \quad (3.21)$$

Sachant que q est la charge transversale.

La variation de l'énergie cinétique peut être déterminée comme suivant :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3 \right) dA dx \\
&= \int_0^L \rho(z) \left[\begin{aligned} &I_0 \left(\dot{u} \delta \dot{u} + \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s \right) \delta \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s \right) \right) - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \dot{u} \right) \\ &+ I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} \right) - J_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \dot{u} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ &+ J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \right] dx \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Où $\rho(z)$ est la densité de masse et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2$ et $K_2)$ sont les inerties de masse définies dans l'équation suivante :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2 \text{ et } K_2) = \int_A \rho(z) (1, z, f, z^2, zf, f^2) dA \quad (3.23)$$

En substituant les expressions de δU , δV et δK fournies par les équations (3.15), (3.21) et (3.22) dans l'équation (3.14), et l'intégration par partie et collections des coefficients δu , δw_b et δw_s . Les équations de mouvement de la poutre FG sont obtenues comme suit :

$$\delta U : \frac{\partial N}{\partial x} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (3.24)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} + q = I_0 \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s \right) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = I_0 \left(\dot{w}_b + \dot{w}_s \right) - J_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (3.26)$$

Les équations ((3.24), (3.25) et (3.26)) peuvent être exprimées en termes de déplacements (u, w_b, w_s) comme suit :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}$$

$$B \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = I_0 \left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s \right) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

$$B_s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = I_0 \left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s \right) + J_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2}$$

Les coefficients dans l'équation (3.27) peuvent être obtenus par l'intégration suivante :

$$(A, B, B_s, D, D_s \text{ et } H_s) = \int_A Q_{11} (1, z, f, z^2, zf, f^2) dA \quad (3.28)$$

$$A_s = \int_A g^2 Q_{55} dA \quad (3.29)$$

3.3 Solution analytique de la vibration libre et du flambement de la poutre FG

Les poutres sont généralement classées par rapport à la condition d'appui, Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte des équations (3.27). Les équations du mouvement admettent les solutions de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les équations du mouvement ci-dessus sont résolues analytiquement pour les problèmes de flambement et de la vibration libre.

La solution est décrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ w_b(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_{bm} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ w_s(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_{sm} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (3.30)$$

Où $\alpha = m\pi/L$, (u_m, w_{bm} et w_{sm}) sont des paramètres arbitraires à déterminer, et ω est la fréquence naturelle.

La charge transversale q est également développée en série de Fourier comme suivant :

$$q_m(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \sin(\alpha x) \quad (3.31)$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge qui peut s'écrire comme suit :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) dx \quad (3.32)$$

Les coefficients Q_m sont donnés ci-dessous pour quelques charges normales :

$$Q_m = \begin{cases} q_0 (m=1) \text{ pour une charge sinusoidale } q_0 \\ \frac{4q_0}{\pi m} (m=1,3,5,\dots) \text{ pour une charge uniforme} \\ \frac{2}{L} Q_0 \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) (m=1,2,3,\dots) \text{ pour une charge ponctuelle } q_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

En substituant les expressions de (u, w_b et w_s) et q (les équations (3.30) et (3.31)) dans les équations de mouvement de l'équation (3.27), nous obtenons ci-dessous les équations des valeurs propres pour toute valeur fixe de m .

L'équation suivante pour le problème de vibration libre est donnée par :

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{q\} = \{0\} \quad (3.34)$$

Sachant que : K est la matrice de rigidité, M est la matrice de masse.

Le problème de flambage statique, la fréquence naturelle doit être nulle, donc la matrice de masse est égale à 0 ($M=0$), l'équation de la charge critique de flambement peut être exprimée comme :

$$[[K] - N_0 [N]] \{q\} = \{0\} \quad (3.35)$$

Ici, les matrices et le vecteur apparaissant dans l'équation (3.35) sont :

$$[K] = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, [M] = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

$$[N] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \text{ et } \{q\} = \begin{pmatrix} u_m \\ w_{bm} \\ w_{sm} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

En faisant le déterminant de la matrice des coefficients des équations au-delà et en mettant ce polynôme à 0, on peut obtenir les fréquences propres ω_m et la charge de flambement N_{cr} .

3.4 Résultats et discussion

Dans cette section, une variété d'exemples numériques est présentée et discutée pour vérifier l'applicabilité de l'approche théorique actuelle dans l'analyse de la vibration libre et des réponses de flambement des poutres FG simplement supportées.

Les caractéristiques de la poutre FG utilisée dans cette étude sont données comme suit (Simsek, 2010):

Céramique (P_c : Alumina, Al_2O_3) : $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 3,960 \text{ Kg/m}^3$

Métal (P_{cm} : Aluminium, Al) : $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2,707 \text{ Kg/m}^3$

Pour des raisons de commodité, les différents paramètres unidimensionnels suivants sont utilisés au cours de cette investigation :

$$\omega = \frac{\omega_0 L^3}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (3.37)$$

$$N_{cr} = N_0 \frac{L^2}{E_m I} \text{ et } N_{cr} = N_0 \frac{12L^2}{E_m h^3} \quad (3.38)$$

Ainsi que le rapport du module de Young n est défini comme suivant :

$$n = \frac{E_c}{E_m}, I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.39)$$

3.4.1 Etude comparative

Afin de démontrer la validité de la présente méthode, les résultats obtenus sont comparées avec ceux déjà existants dans la littérature tels que : le modèle développé par Nguyen et al (Nguyen et al., 2013) qui sont basé sur la théorie de déformation du 1^{er} ordre et les travaux de Simsek (Simsek, 2010), Thai et Vo (Thai & Vo, 2012) qui sont basé sur différentes théories d'ordre supérieur (Hyperbolique, Exponentielles et Sinusoïdales).

Le tableau (3.1) montre la comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles de la poutre FG simplement appuyée calculées par la présente approche théorique avec les fréquences obtenues à partir les méthodes de (Simsek ; Nguyen et al ; Thai & Vo).

D'après le tableau (3.1), on peut clairement remarquer ici que les fréquences fondamentales non-dimensionnelles obtenues dans la présente étude sont approximativement assez proches des résultats fournis dans ces littératures qui sont utilisées pour la comparaison.

Tableau 3.1 Comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles de poutres FG simplement appuyées.

L/h	Mode	Source	p , indice de puissance				
			0	1	2	5	10
5	1	Présent	5.1524	3.9806	3.6223	3.4225	3.3091
		Réf (a)	5.1525	3.9902	3.6344	3.4312	3.3135
		Réf (b)	5.1525	3.9902	3.6344	3.4312	3.3134
		Réf (c)	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	2	Présent	17.8710	13.9109	12.5974	11.7388	11.2710
		Réf (a)	17.8711	14.0030	12.7120	11.8157	11.3073
		Réf (b)	17.8812	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240
	3	Présent	34.1449	26.7934	24.1759	22.2619	21.2311
		Réf (a)	34.1439	27.0525	24.4970	22.4642	21.3219
Réf (b)		34.2097	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561	
20	1	Présent	5.4603	4.2043	3.8358	3.6501	3.5412
		Réf (a)	5.4603	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
		Réf (b)	5.4603	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
		Réf (c)	5.4603	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	2	Présent	21.5731	16.6230	15.1571	14.4004	13.9599
		Réf (a)	21.5732	16.6344	15.1715	14.4110	13.9653
		Réf (b)	21.5732	16.6344	15.1619	14.3746	13.9263
	3	Présent	47.5921	36.7138	33.4462	31.6983	30.6930
		Réf (a)	47.5921	36.7673	33.5135	31.7473	30.7173
		Réf (b)	47.5930	36.7679	33.4689	31.578	30.5369

Source: Réf (a): (Nguyen et al., 2013); Réf (b): (Simsek, 2010); Réf (c): (Thai & Vo, 2012).

De la même manière, une autre étude comparative est conduite pour l'évaluation de la charge critique de flambement en fonction de la variation de quelques paramètres matériels et géométriques entre le présent modèle et les solutions analytiques proposées par (Li & Batra, 2013) qui sont basées sur la théorie classique des poutres et la théorie de déformation du premier ordre

(FSDT). D'une autre part les travaux de (Hao et al., 2014) et (Nguyen et al., 2013) qui sont basés sur la théorie de déformation du premier ordre sont aussi prises en considération pour la comparaison.

Les tableaux (3.2) et (3.3) comparent les résultats numériques obtenus à partir du modèle raffiné présenté concernant les charges de flambement non dimensionnelles N avec certains travaux disponibles dans le même domaine (Li & Batra, 2013 ; Hao et al., 2014 ; Nguyen et al., 2013) à des fins de faire la validation. Les rapports géométriques L/h sont fixés pour deux valeurs 5 et 10, tandis que l'exposant de la loi de puissance (p) prend différentes valeurs $p = (0, 0,5, 1, 2, 5, 10)$.

Tableau 3.2 Validation des charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple.

L/h	Source	p indice de puissance					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Réf (¹)	48.835	31.967	24.687	19.245	16.023	14.427
	Réf (²)	48.833	31.966	24.686	19.244	16.023	14.427
	Présent	48.847	32.002	24.692	19.156	15.925	14.341
10	Réf (¹)	52.309	33.996	26.171	20.416	17.192	15.612
	Réf (²)	52.307	33.996	26.170	20.416	17.194	15.612
	Présent	52.310	34.008	26.171	20.390	17.103	15.526

Source : Réf (¹) : (Li & Batra, 2013) ; Réf (²) : (Hao et al., 2014).

Il est clair, à partir de ces tableaux (3.2) et (3.3), que les résultats présentent une très grande concordance. Les paramètres de charges de flambement obtenus par la présente étude sont très proches des résultats fournis par ces travaux publiés et confirment donc la procédure de solution proposée. De plus, une augmentation de l'exposant de la loi de puissance conduit à une réduction des charges critiques de flambement. De plus, on constate que les poutres FG avec des valeurs plus élevées du rapport (L/h) ont des charges de flambement critiques plus importantes. Donc, une augmentation du rapport (L/h) entraîne une augmentation des charges de flambage.

Tableau 3.3 Variation de la charge critique de flambement des poutres S-S en fonction de l'indice de puissance et rapport L/h .

		p , indice de puissance						
L/h	Source	0	0.2	0.5	1	2	5	10
5	Réf ⁽¹⁾	48.835	40.248	31.998	24.687	19.123	15.697	14.130
	Réf ⁽²⁾	48.835	–	31.967	24.687	19.245	16.024	14.427
	Présent	48.847	40.271	32.012	24.692	19.156	15.725	14.141
10	Réf ⁽¹⁾	52.308	42.935	34.000	26.169	20.382	17.098	15.524
	Réf ⁽²⁾	52.309	–	33.996	26.171	20.416	17.192	15.612
	Présent	52.310	42.951	34.008	26.171	20.390	17.105	15.526

Source : *Ref*⁽¹⁾: (Nguyen et al., 2013); *Ref*⁽²⁾: (Li & Batra, 2013).

Tableau 3.4 Effets du rapport du module de Young sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des poutres FG en appui simple.

		p , indice de puissance					
L/h	Ratio n	0	0.5	1	2	5	10
4	0.25	2.1433	4.0372	4.7908	5.5946	6.6480	7.3384
	0.5	4.2866	5.6987	6.2221	6.7221	7.3485	7.7728
	1	8.5733	8.5733	8.5733	8.5733	8.5733	8.5733
	2	17.1467	13.7798	12.4443	11.4215	10.5283	9.9508
	4	34.2935	23.6922	19.1634	15.7255	13.3245	12.0778
	6	51.4403	33.445	25.4726	19.3101	15.3604	13.6714
16	0.25	2.4442	4.5828	5.3834	6.2431	7.4263	8.2487
	0.5	4.8885	6.5079	7.0636	7.5834	8.2749	8.782
	1	9.777	9.777	9.777	9.777	9.777	9.777
	2	19.554	15.6171	14.1272	13.073	12.199	11.5233
	4	39.1081	26.6754	21.5336	17.8494	15.6286	14.2884
	6	58.6621	37.5418	28.4453	21.7158	18.0344	16.3904

Les fréquences de vibration des poutres FG en appui simple sont présentées dans le tableau (3.4). Ce tableau montre les trois premières fréquences naturelles avec et sans l'influence de la force axiale. La variation des fréquences naturelles due à la force axiale est importante pour toutes les valeurs de l'exposant de la loi de puissance. De plus, il est évident d'après ce tableau que les fréquences fondamentales diminuent lorsque la force axiale passe de

la tension à la compression, ceci est dû au fait que la force de tension impose un effet de raidissement, alors que la force de compression a un effet d'adoucissement sur les fréquences naturelles.

Le tableau (3.5) montre l'effet du rapport du module de Young sur les charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple.

Tableau 3.5 Effets du rapport du module de Young sur les charges critiques de flambement des poutres FG.

L/h	Ratio n	p , indice de puissance				
		0	1	2	5	6
4	0.25	2.2377	4.9785	5.7869	6.8734	7.6110
	0.5	4.4754	6.4868	6.9824	7.6234	8.0790
	1	8.9508	8.9508	8.9508	8.9508	8.9508
	2	17.9017	12.9737	11.9682	11.1088	10.4824
	4	35.8034	19.9143	16.4694	14.2493	12.9363
	6	53.7051	26.4183	20.1751	16.5353	14.8479
16	0.25	2.4056	5.3084	6.1575	7.3220	8.1289
	0.5	4.8113	6.9561	7.4706	8.1522	8.6501
	1	9.6226	9.6226	9.6226	9.6226	9.6226
	2	19.2453	13.9123	12.8693	12.0000	11.3318
	4	38.4907	21.2363	17.5999	15.3897	14.0502
	6	57.7360	28.0710	21.4404	17.7865	16.1324

Pour finir, les effets de la force axiale sur les fréquences naturelles sont explorés. Le tableau (3.6) montre les trois premières fréquences naturelles avec et sans l'influence de la force axiale.

Tableau 3.6 Effets de la charge axiale sur la fréquence non-dimensionnelle.

L/h	p	$N_1 = -0.5N_{cr}$ (Tension)			$N_1 = 0$ (Force axiale est nulle)			$N_1 = 0.5N_{cr}$ (Compression)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
5	0.5	5.4054	14.057	27.1346	4.4103	15.4609	29.8528	3.1117	15.1562	29.7007
	1	4.8903	15.7597	27.2473	3.9902	14.0122	27.1122	2.8155	13.7383	26.9764
	2	4.7035	14.2211	27.2171	3.6260	12.6401	24.3219	2.5582	13.8002	27.0069
	5	4.1676	11.7708	21.8189	3.3996	11.5319	21.6934	2.3967	11.2878	21.5671
	10	4.0233	11.2589	20.6996	3.2046	10.8358	20.5672	2.3133	10.7814	20.414
20	0.5	5.6958	18.684	40.7794	4.6504	18.3939	40.6485	3.288	18.0993	40.5172
	1	5.1497	16.8949	36.8833	4.2046	16.6628	33.4655	2.9727	16.3665	36.6466
	2	4.6978	15.3996	33.5734	3.8358	15.1505	33.4655	2.7123	14.9176	33.3573
	5	4.468	14.6002	31.6719	3.6482	14.3721	31.5685	2.5798	14.1406	31.4648
	10	4.3342	14.1473	30.6333	3.5388	13.9252	30.5329	2.5023	13.6998	30.4298

D'après le tableau (3.6), on constate que la variation des fréquences propres due à la sollicitation axiale est importante pour toutes les valeurs de l'exposant de la loi de puissance. De plus, il est évident d'après ce tableau que les fréquences fondamentales diminuent lorsque la sollicitation axiale passe de la tension à la compression, ceci est dû au fait que la force de tension impose un effet de rigidité, alors que la force de compression a un effet de flexibilité sur les paramètres des fréquences naturelles.

L'étude comparative réalisée a mis en évidence que les résultats de la méthode proposée sont en très grand concordance avec ceux des méthodes analytiques existantes dans la littérature, ce qui confirme l'exactitude de cette approche.

3.4.2 Etude paramétrique

Dans cette section, afin d'analyser les effets des différents paramètres géométrique et matérielle de la poutre sur la vibration libre et flambement, plusieurs résultats sont présentés sur les figures 2D (exemple : figure (3.4)) et 3D (exemple : figure (3.2)).

Figure (3.2) illustre la variation de la fréquence non-dimensionnelle ω en fonction du rapport géométrique (L/h) et pour différentes valeurs de l'indice de puissance.

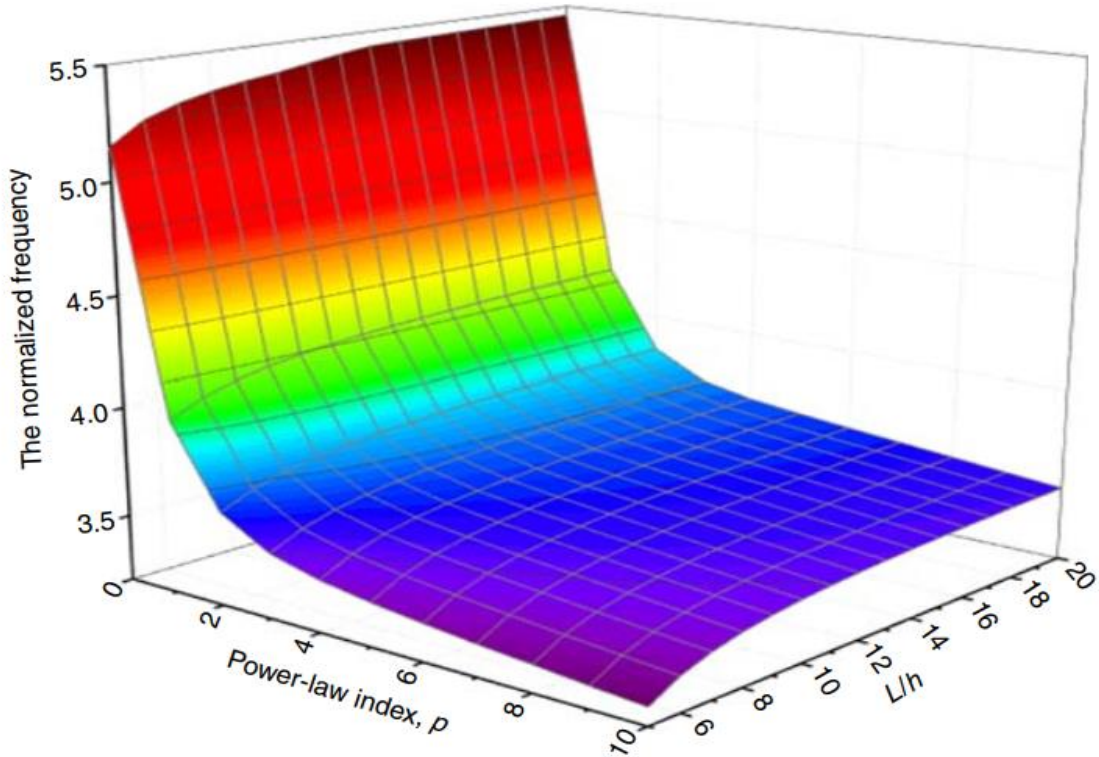


Figure 3.2 La variation de la fréquence non-dimensionnelle ω en fonction du rapport géométrique (L/h) et pour différentes valeurs de l'indice de puissance.

A partir de cette figure (3.2), on constate que la fréquence adimensionnelle ω décroît avec l'augmentation de la valeur de l'indice de puissance p . Cette diminution due à l'augmentation du pourcentage de céramique.

La figure (3.3) trace les formes relatives des trois modes pour les poutres céramo-métalliques homogènes et graduées ($L/h=5$).

Notes: (a) Mode 1, $N_{cr}=48.84$ et $p=0$; (b) Mode 1, $N_{cr}=15.7$ et $p=5$; (c) Mode 2, $N_{cr}=154.65$ et $p=0$; (d) Mode 2, $N_{cr}=47.63$ et $p=5$; (e) Mode 3, $N_{cr}=259$ et $p=0$; (f) Mode 3, $N_{cr}=76.67$ et $p=5$.

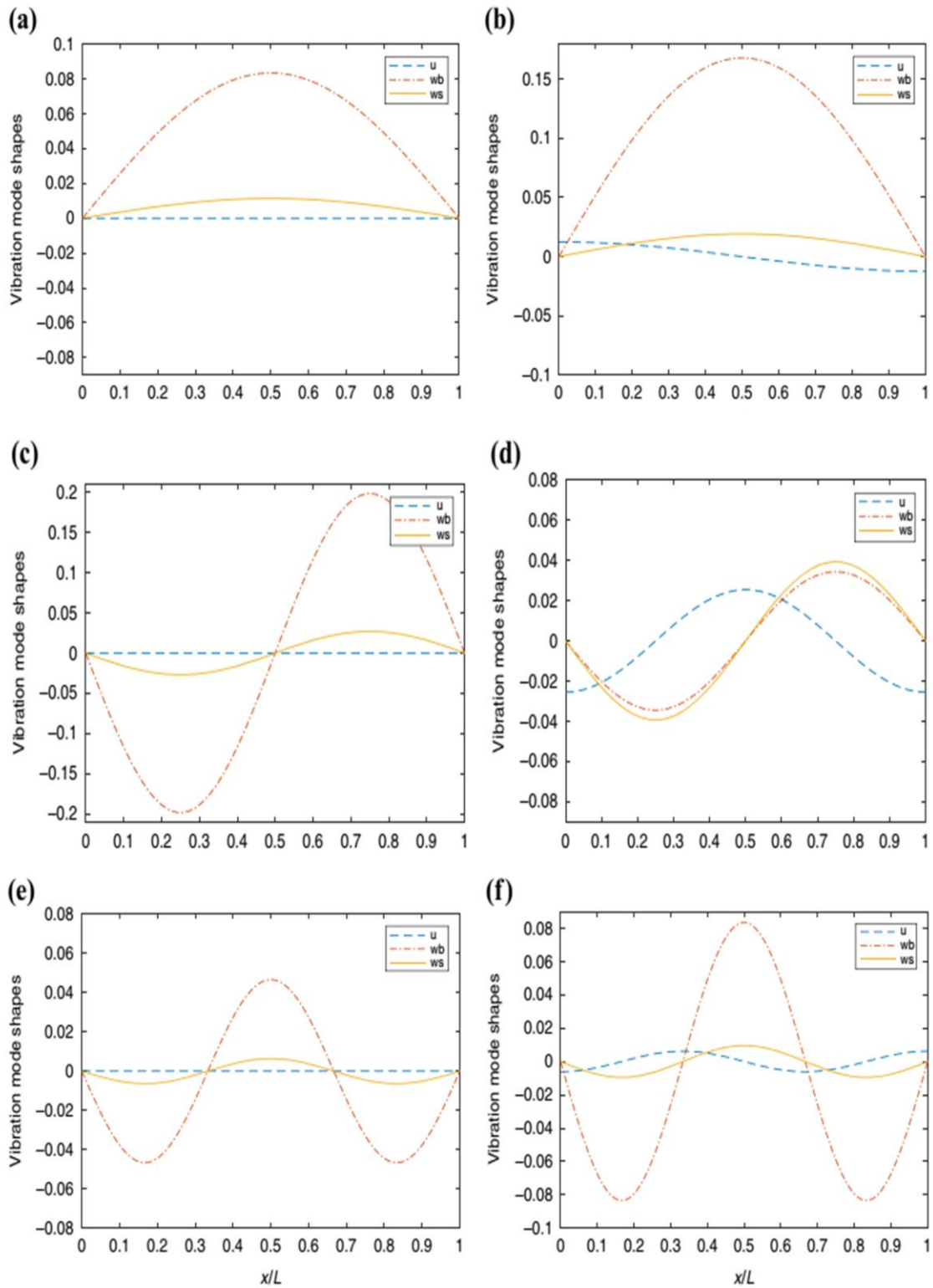


Figure 3.3 Les trois premiers modes de la poutre FG avec différents indices de loi de puissance.

Les résultats figurés (figure (3.3)) des déplacements axiaux et en flexion montrent que pour un matériau homogène, les modes de vibration ne présentent qu'un double mode couplé (composantes de flexion et de cisaillement), alors que pour le matériau FG, la poutre présente un mode supplémentaire (mode axial) par rapport à la poutre homogène, ce qui devient important pour les analyses statiques et vibratoires des poutres FG soumises à une charge axiale. Les formes de mode obtenues sont appelées mode triplement couplé axial-flexion.

Les fréquences de vibration des poutres FG simplement appuyées sont illustrées dans les figures (3.4) et (3.5) qui montrent l'effet du rapport du module d'Young.

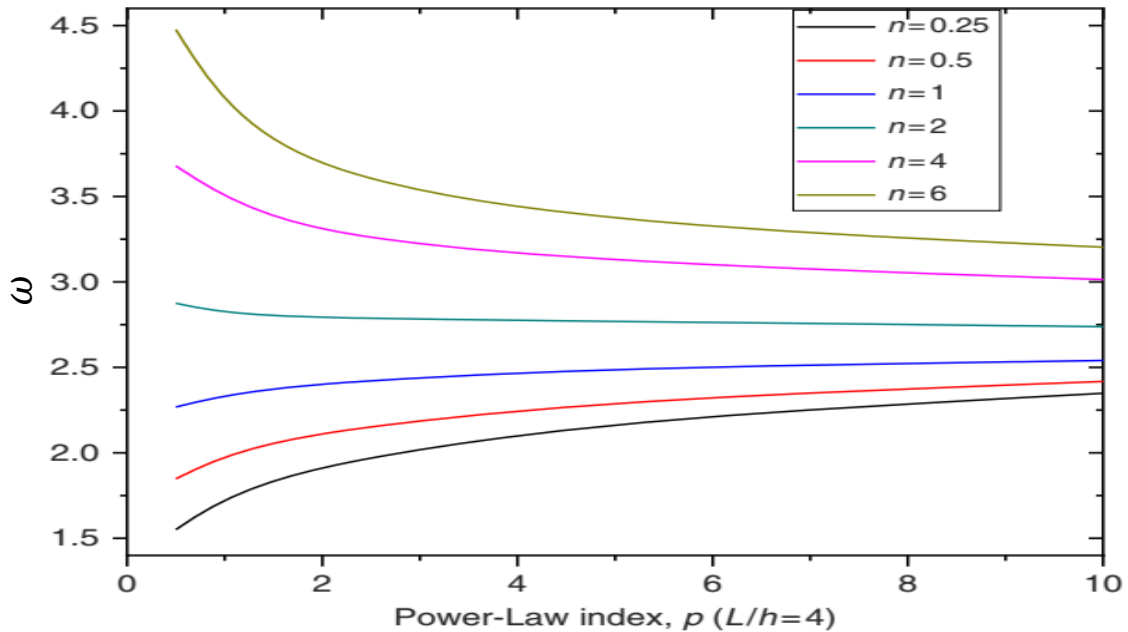


Figure 3.4 La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport n et de l'indice de loi de puissance p pour ($L/h=4$).

D'après ces figures (3.4) et (3.5), on peut voir que pour une valeur fixe de l'indice de loi de puissance, la fréquence naturelle augmente avec l'augmentation de n , et vice versa pour une valeur déterminée de n . De plus, l'augmentation de l'exposant de la loi de puissance provoque des réponses opposées sur la vibration, qui est augmentée lorsque $n < 1$ et diminuée lorsque $n > 1$,

et lorsque $n=1$ la vibration de la poutre FG prend une valeur de poutre isotrope et reste constante.

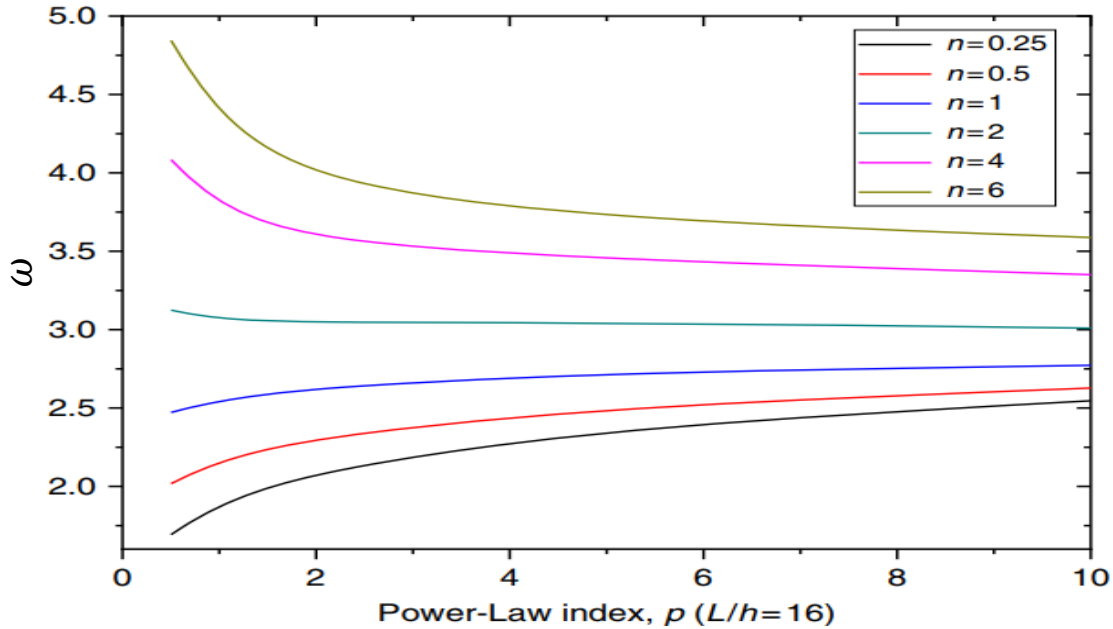


Figure 3.5 La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport n et de l'indice de loi de puissance p pour ($L/h=16$).

L'effet de l'indice de puissance (p) en fonction du rapport géométrique (L/h) sur la charge critique de flambement des poutres FG pour l'approche théorique de déformation en cisaillement raffinée proposée est également illustré à la figure (3.6) par une vue 3D.

On peut voir sur cette figure (3.6) que la charge de flambement critique diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance. Ceci est dû au fait qu'à une valeur plus grande de (p) correspond à une valeur plus faible de la fraction volumique de la phase céramique, rendant ainsi la poutre plus flexible. On observe également que pour une valeur invariable de (p), la charge de flambement augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (L/h), mais cette valeur non dimensionnelle est inversement proportionnelle à une valeur élevée du rapport d'épaisseur.

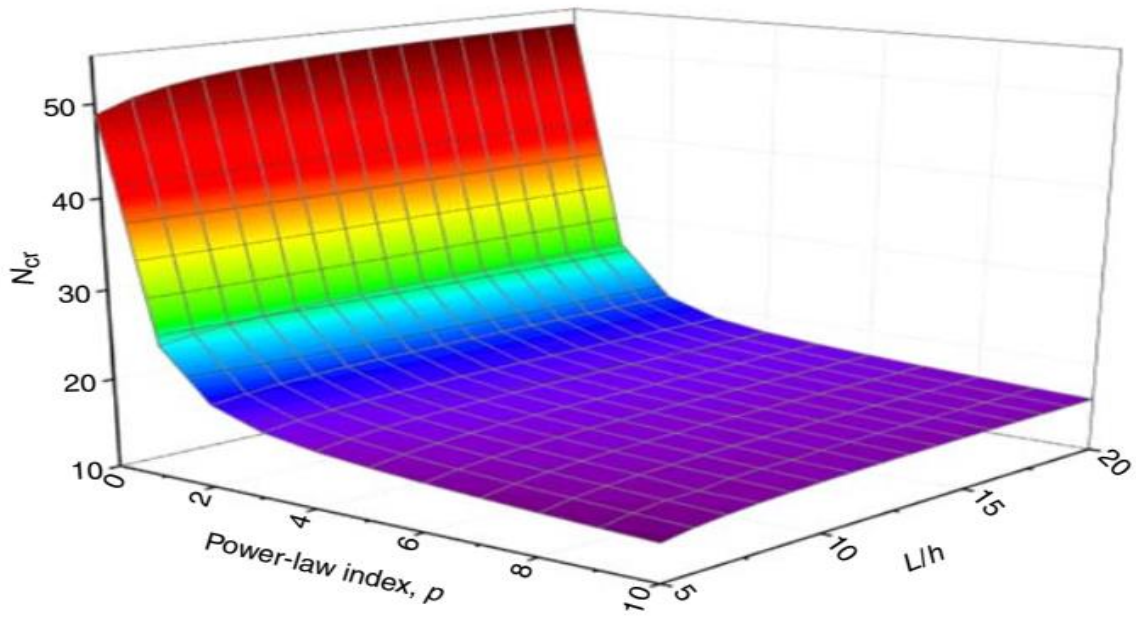


Figure 3.6 La variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle en fonction de l'indice p et du rapport L/h pour une poutre FG en appui simple (S-S).

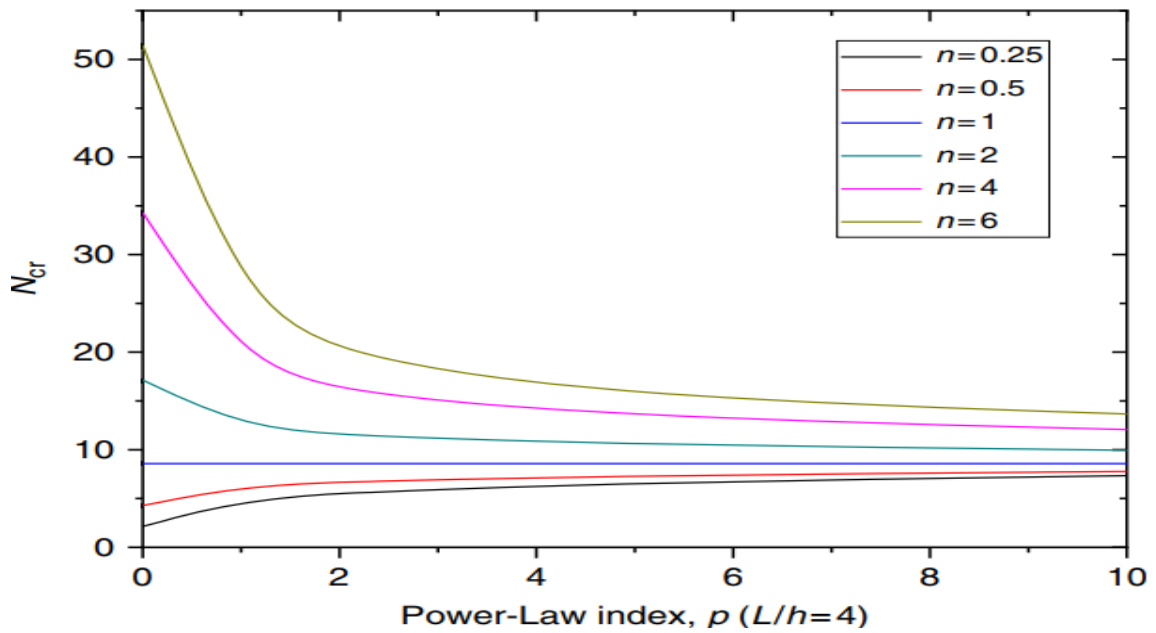


Figure 3.7 La variation de la charge de flambage non dimensionnelle avec différents rapports n et l'indice de puissance p pour ($L/h=4$).

Les figures (3.7) et (3.8) montrent l'effet du rapport du module de Young sur les charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple.

D'après les figures (3.7) et (3.8), On peut observer que les charges critiques augmentent séquentiellement avec l'augmentation de n pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance considérées.

En outre, si nous prenons n égal à l'unité, un comportement similaire à celui de l'analyse vibratoire peut être observé à nouveau pour l'étude du flambement. Il est également apparent qu'avec l'augmentation de l'indice de puissance, la charge de flambage augmente lorsque $n < 1$, et une réduction est observée lorsque $n > 1$. Enfin, comme nous l'avons vu précédemment, lorsque la poutre devient homogène $n=1$, le flambement critique est indépendant de l'indice de loi de puissance et sa valeur reste constante.

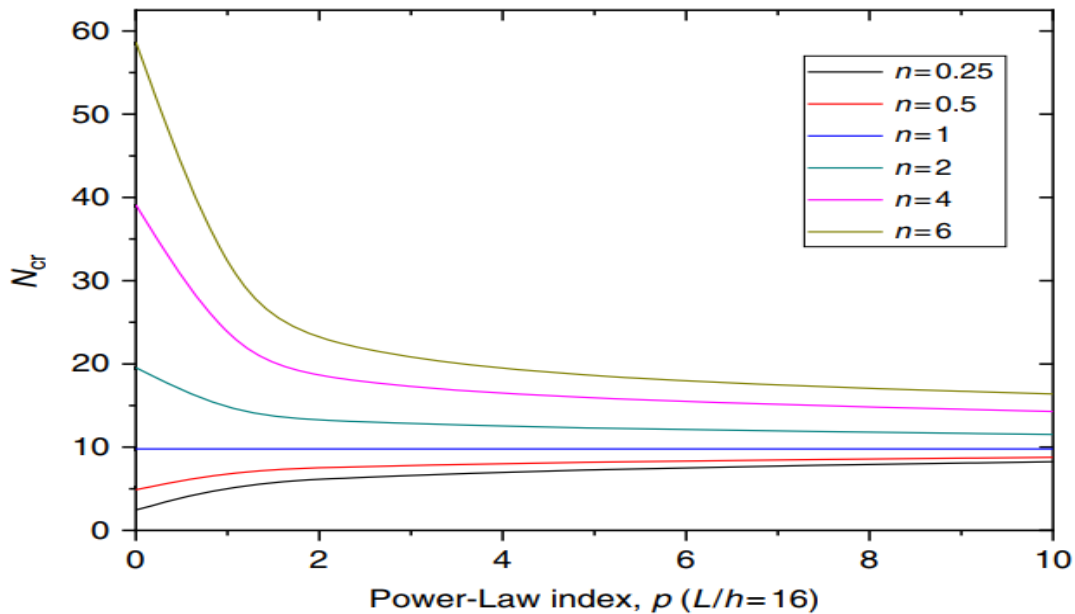


Figure 3.8 La variation de la charge de flambage non dimensionnelle avec différents rapports de n et l'indice de puissance p pour ($L/h=16$).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les vibrations libres et le flambage des poutres en utilisant une approche théorique RHSDT et en supposant que les propriétés matérielles de la poutre sont évaluées de manière continue dans la direction de l'épaisseur selon le modèle de loi de puissance. Il a été démontré que le modèle proposé, basé sur l'approche de la poutre à déformation en cisaillement raffinée, peut offrir des résultats précis en matière de fréquence et de flambage des poutres FG par rapport résultats analytiques qui existent dans la littérature et un bon accord a été révélé. Une étude paramétrique a été réalisée, et les résultats numériques ont montré les influences significatives de plusieurs paramètres tels que la propriété du matériau par l'exposant du gradient, le rapport longueur/épaisseur, le rapport du module de Young et la charge axiale sur les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement des poutres FG. Contrairement aux HSDT classiques, le modèle proposé pour la théorie de la déformation en cisaillement raffinée ne contient que quatre inconnues dans le cas général. En conclusion, on peut dire que le modèle amélioré RHSDT adopté est non seulement précis mais aussi efficace pour prédire les comportements statique et dynamique des poutres FG, ce qui est d'un grand intérêt, surtout dans la conception de divers problèmes d'ingénierie réels en facilitant les calculs d'ingénierie.

Chapitre 4

Analyse des vibrations et du flambement des poutres

à gradient continu par l'approche théorique

RNFSDT

4.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude de la vibration libre et du flambage des poutres FG chargées axialement et simplement supportées, en utilisant une nouvelle approche théorique de poutre de cisaillement-déformation raffinée du premier ordre. Le modèle proposé est capable de saisir à la fois les impacts de la microstructure et de la déformation par cisaillement avec l'utilisation des facteurs de correction du cisaillement, en raison de la distribution réaliste des contraintes de cisaillement transversales. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur dans le sens de l'épaisseur sous une forme graduelle et sont estimées par un modèle de loi de puissance. En utilisant le principe de Hamilton, les équations gouvernantes sont extraites et ensuite résolues dans une procédure analytique. Pour confirmer la validité de l'approche théorique proposée, les résultats obtenus des fréquences naturelles et des charges de flambement des poutres à gradient fonctionnel sont comparés aux solutions existantes avec ceux fournis dans la littérature. L'influence de plusieurs paramètres tels que l'indice de loi de puissance, les paramètres géométriques de la poutre, le rapport de module et la charge axiale sur les comportements dynamiques et de flambement des poutres FG sont tous discutés.

4.2 Formulation du problème

Supposons une poutre à gradient fonctionnel ayant une longueur l et une section transversale rectangulaire uniforme $b \times h$, avec b représentant la largeur et h l'épaisseur, dont les coordonnées sont représentées sur la figure (3.1). La poutre est fabriquée à partir d'un matériau élastique et isotrope dont les propriétés changent de façon graduelle et régulière dans la direction de l'épaisseur z .

La fraction volumique du constituant céramique de la poutre FG est supposée être donnée par :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (4.1)$$

Dans laquelle p est un paramètre qui détermine les propriétés de variation du matériau à travers l'épaisseur et z représente la distance du plan médian de la poutre FG. Lorsque p est fixé à zéro, cela représente une poutre entièrement céramique, tandis que p infini indique une poutre entièrement métallique. Les caractéristiques matérielles d'une poutre à gradient fonctionnel peuvent être acquises au moyen de la règle de mélange de Voigt (Nguyen et al., 2013) comme:

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m \quad (4.2)$$

V_m, P_m, V_c et P_c sont les propriétés des matériaux correspondants et les fractions volumiques du métal et des constituants céramiques liés par :

$$V_c + V_m = 1 \quad (4.3)$$

Par conséquent, le module de Young $E(z)$ et la densité de masse $\rho(z)$ de la poutre FG peuvent être décrits par la distribution de loi de puissance suivante :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m \quad (4.4)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m \quad (4.5)$$

4.2.1 L'approche théorique de poutre de cisaillement-déformation raffinée du premier ordre

Pour étudier la vibration libre de poutres FG chargées axialement et simplement, on utilise une nouvelle approche théorique raffinée de déformation en cisaillement du premier ordre (NRFSDT). Le modèle proposé est capable de saisir à la fois les impacts de la microstructure et de la déformation par cisaillement avec l'utilisation des facteurs de correction du cisaillement, en raison de la distribution réaliste des contraintes de cisaillement transversales.

4.2.1.1 Hypothèses de la présente approche théorique

L'approche théorique des poutres NRFSDT est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le nombre d'inconnues n'est que de quatre (04).
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre, les contraintes générées sont donc infinitésimales ;
- Le déplacement transversal (w) a deux composantes, une composante de flexion w_b et une composante de cisaillement (w_s) et celles-ci sont des fonctions des coordonnées x et z uniquement.

4.2.1.2 Cinématique

Sur la base de la nouvelle approche théorique proposée, le champ de déplacement de la présente approche théorique de poutre peut être écrit sous la forme suivante (Thai et al., 2014 ; Nguyen, 2015) :

$$u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (4.7)$$

Il est mentionné que le champ de déplacement des récentes théories FSDT raffinées ou simplifiées existantes (Thai & Choi, 2013 a ; b) sont obtenues en divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement, dans lesquelles le nombre d'inconnues est réduit dans les équations générales de mouvement. La procédure est illustrée par l'équation suivante, (Bouremana et al., 2013) :

$$w = w(\textit{bending}) + w(\textit{shear}) \quad (4.8)$$

En outre, le paramètre φ de la théorie du faisceau de Timoshenko (TBT) a également été supposé comme suit :

$$\theta_x = -\frac{dw_b}{dx} \quad (4.9)$$

Par conséquent, en ajoutant une autre hypothèse à celles qui existent déjà comme $\theta_x = -\frac{d\phi}{dx}$ et sans fractionnement du déplacement transversal w en deux composantes, le champ de déplacement génère également moins de variables inconnues et les équations gouvernantes du mouvement résultant de cette étude seront complètement différentes par rapport à celles citées ci-dessus.

Dans les équations (4.6 ; 4.7), u et w sont les déplacements dans les directions x , z et u_0 est le déplacement à surface intermédiaire. ϕ est une fonction des coordonnées x et du temps t qui représente le déplacement transversal de cisaillement.

Les déformations non nulles combinées aux déplacements dans les équations (4.6 ; 4.7), il doit y avoir :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x \quad (4.10a)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^s \quad (4.10b)$$

Sachant que :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad k_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.11a)$$

$$\gamma_{xz}^s = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.11b)$$

4.2.1.3 Relations constitutives

En supposant que le matériau de la poutre FG obéit la loi de Hooke, les relations constitutives peuvent être données comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = k_s Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (4.12a)$$

Dans lequel, k_s est un facteur de correction de cisaillement qui est similaire au facteur de correction de cisaillement proposé par Mindlin.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (4.2), les coefficients de rigidité, Q_{ij} , peuvent être donnés comme suit :

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (4.12b)$$

4.2.1.4 Les équations de la stabilité

En appliquant le principe de Hamilton pour obtenir les équations du mouvement.

$$\delta \int_0^T (U + V - K) dt = 0 \quad (4.13)$$

Par lequel δU est la différence de l'énergie de déformation ; δV représente le travail effectué par les forces externes dues à la charge dans le plan ; et la variation de l'énergie cinétique est donnée par δK .

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être déclarée par la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\
&= \int_0^L \left(N_x \frac{d\delta u_0}{dx} - M_x \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} + Q_{xz} \frac{d\delta(w-\phi)}{dx} \right) dx
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Où N_x , M_x et Q_{xz} sont les résultantes de contraintes définies comme suit :

$$(N_x, M_x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma_x dz, \quad Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \tag{4.15}$$

La variation du travail effectué par la charge transversale externe q et le plan interne \bar{N} , qui peut être exprimé comme suit :

$$\delta V = - \int_0^L \left[q \delta w + \bar{N} \frac{dw}{dx} \frac{d(\delta w)}{dx} \right] dx \tag{4.16}$$

Notant que (q et \bar{N}) sont les charges transversales et axiales, respectivement.

Comme ce chapitre est consacré à l'étude de la vibration libre et du flambage des poutres FG, la charge transversale q est omise, en raison de l'absence d'étude sur le comportement en flexion.

La variation de l'énergie cinétique est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] dz dx \\
&= \int_0^L \left[I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \left(\dot{w} \right) \left(\delta \dot{w} \right) \right] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{\phi}}{dx} + \frac{d\dot{\phi}}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) + I_2 \left(\frac{d\dot{\phi}}{dx} \frac{d\delta \dot{\phi}}{dx} \right) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ρ est la densité de masse ; et (I_0, I_1, I_2) sont les inerties de masse exprimées comme suit

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (4.18)$$

En substituant les expressions de δU , δV et δK fournies par les équations (4.14), (4.15) et (4.17) dans l'équation (4.13). Les équations de mouvement de la poutre FG sont obtenues comme suit :

$$\delta u_0: \frac{dN_x}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{\phi}}{dx} \quad (4.19a)$$

$$\delta \phi: \frac{d^2 M_x}{dx^2} - \frac{dQ_{xz}}{dx} = I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d\ddot{\phi}}{dx} \quad (4.19b)$$

$$\delta w: \frac{dQ_{xz}}{dx} - \bar{N} \frac{d^2 w}{dx^2} = I_0 \ddot{w} \quad (4.19c)$$

Les équations (4.19) peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_0 and ϕ) en utilisant les équations (4.6 ; 4.7), (4.10), (4.12) et (4.15) comme suit :

$$A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 \phi}{dx^3} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial x} \quad (4.20a)$$

$$B_{11} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 \phi}{dx^4} - A_{55}^s \frac{d^4}{dx^2} (w - \phi) = I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2 \frac{d\ddot{\phi}}{dx^2} \quad (4.20b)$$

$$A_{55}^s \frac{d^2}{dx^2} (w - \phi) - \bar{N} \frac{d^2 w}{dx^2} = I_0 \ddot{w} \quad (4.20c)$$

Où A_{II} , B_{II} , D_{II} , etc., sont la rigidité de la poutre, définie par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2) dz \quad (4.21a)$$

$$A_{55}^s = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz \quad (4.21b)$$

4.3 Solution analytique de la vibration libre et du flambement de la poutre FG

Dans cette section, en utilisant une solution analytique (méthode de Navier), les équations de mouvement pour la vibration libre et le flambage de la poutre FG ont été résolues. Les fonctions de déplacement sont fournies comme produit de coefficients non inconnus et de fonctions trigonométriques connues pour assurer les conditions aux limites à $x=0$, $x=L$, les fonctions de déplacement suivantes sont estimées être de la forme :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ \phi \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ \psi_m \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_m \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

(U_m, ψ_m, W_m) sont les coefficients de Fourier inconnus qui seront déterminés pour chaque valeur de m , et $\lambda = m\pi / L$.

En substituant les développements de u_0 , ϕ et w des équations (4.22) dans les équations de mouvement Eqs (4.20), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes (4.22a) à (4.22c)

$$\left(-A_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - I_0 \omega_m^2 \right) U_m - \left(B_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 - I_1 \left(\frac{m\pi}{L} \right) \omega_m^2 \right) \psi_m = 0 \quad (4.22a)$$

$$\left(-D_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + A_{55}^s \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - I_2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \omega_m^2 \right) \psi_m + \left(A_{55}^s \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right) W_m = 0 \quad (4.22b)$$

$$\left(A_{55}^s \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right) \psi_m + \left(-A_{55}^s \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \bar{N} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - I_0 \omega_m^2 \right) W_m = 0 \quad (4.22c)$$

En faisant le déterminant de la matrice des coefficients des équations au-delà et en mettant ce polynôme à zéro, on peut obtenir les fréquences propres ω et la charge de flambage \bar{N} .

4.4 Résultats et discussion

Dans cette section, une variété d'exemples numériques est présentée et discutée pour vérifier l'applicabilité de l'approche théorique actuelle dans l'analyse de la vibration libre et des réponses de flambement des poutres FG simplement supportées. Les résultats sont obtenus à partir de la nouvelle approche théorique simple et précise de la poutre du premier ordre.

Dans cette étude, la poutre FG est choisie pour être construite en aluminium et en alumine avec les suivantes propriétés du matériau (Simsek, 2010):

Céramique (P_c : Alumina, Al_2O_3) : $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 3,960 \text{ Kg/m}^3$

Métal (P_{cm} : Aluminium, Al) : $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2,707 \text{ Kg/m}^3$

Pour des raisons de commodité, les différents paramètres unidimensionnels suivants sont utilisés au cours de cette étude :

$$\omega = \frac{\omega_m L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (4.23)$$

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{12L^2}{E_m h^3} \quad (4.24)$$

Ainsi que le rapport du module de Young :

$$n = \frac{E_c}{E_m} \quad (4.25)$$

Dans laquelle $I = bh^3/12$ et le facteur de correction du cisaillement est pris comme $k_s = 5/6$ pour les conditions limites en appui simple, respectivement.

4.4.1 Etude comparative

Pour confirmer la validité du présent modèle, les résultats obtenus sont comparés aux autres travaux existant dans la littérature pour les trois premières fréquences naturelles des poutres FG (Simsek, 2010 ; Thai & Vo, 2012) basées sur différentes théories d'ordre élevé, (Nguyen et al., 2013) basée sur la théorie FSĐT).

4.4.1.1 Validation de l'analyse des vibrations

Le tableau (4.1) montre la comparaison des trois premières fréquences propres non dimensionnelles de la poutre FG simplement appuyée calculées pour $L/h = (5,20)$ respectivement et plusieurs valeurs de l'indice de puissance (p) par la présente technique avec les fréquences obtenues à partir les méthodes de (Simsek ; Nguyen et al ; Thai & Vo).

Tableau 4.1 Comparaison des trois premières fréquences naturelles non dimensionnelles des poutres FG en appui simple.

L/h	Mode	Source	p , indice de puissance				
			0	1	2	5	10
5	1	Présent	5.1524	3.9806	3.6223	3.4225	3.3091
		Réf (a)	5.1525	3.9902	3.6344	3.4312	3.3135
		Réf (b)	5.1525	3.9902	3.6344	3.4312	3.3134
		Réf (c)	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	2	Présent	17.8710	13.9109	12.5974	11.7388	11.2710
		Réf (a)	17.8711	14.0030	12.7120	11.8157	11.3073
		Réf (c)	17.8812	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240
	3	Présent	34.1449	26.7934	24.1759	22.2619	21.2311
		Réf (a)	34.1439	27.0525	24.4970	22.4642	21.3219
Réf (c)		34.2097	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561	
20	1	Présent	5.4603	4.2043	3.8358	3.6501	3.5412
		Réf (a)	5.4603	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
		Réf (b)	5.4603	4.2051	3.8368	3.6509	3.5416
		Réf (c)	5.4603	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	2	Présent	21.5731	16.6230	15.1571	14.4004	13.9599
		Réf (a)	21.5732	16.6344	15.1715	14.4110	13.9653
		Réf (c)	21.5732	16.6344	15.1619	14.3746	13.9263
	3	Présent	47.5921	36.7138	33.4462	31.6983	30.6930
		Réf (a)	47.5921	36.7673	33.5135	31.7473	30.7173
		Réf (c)	47.5930	36.7679	33.4689	31.578	30.5369

Source : Réf (a) : Nguyen et al., (2013) ; Réf (b): Simsek (2010a); Réf (c) Thai & Vo (2012)

Il est observé d'après ce tableau que les résultats correspondent bien à ceux présentés par (Simsek, 2010 ; Thai & Vo, 2012 ; Nguyen et al., 2013) qui démontrent l'efficacité de la présente approche théorique. De plus, il est évident qu'une augmentation des valeurs de l'exposant de la loi de puissance conduit à une réduction de la rigidité de la poutre FG poreuse et par conséquent la fréquence naturelle diminue. Aussi, pour des valeurs plus importantes du rapport longueur-épaisseur, la présente approche théorique fournit des fréquences plus élevées, et vice versa pour des valeurs plus faibles du rapport géométrique L/h .

4.4.1.2 Validation de l'analyse du flambement

Les tableaux (4.2) et (4.3) comparent les résultats numériques obtenus à partir du modèle raffiné présenté concernant les charges de flambement non dimensionnelles (\bar{N}) avec certains travaux disponibles dans le même domaine (Li & Batra, 2013 ; Nguyen et al., 2013) pour la validation. Les rapports géométriques L/h sont fixés pour deux valeurs 5 et 20, en plus de divers indices de gradient et mode de vibration ont été sélectionnés.

Tableau 4.2 Validation des charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple.

L/h	Source	p				
		0	1	2	5	10
5	Présent	48.5903	24.5813	19.1616	15.9417	14.3444
	Réf ^(a)	48.835	24.687	19.245	16.024	14.427
	Réf ^(a)	48.835	24.687	19.245	16.024	14.427
10	Présent	52.2373	26.1406	20.3924	17.1700	15.5879
	Réf ^(a)	52.308	26.171	20.416	17.194	15.612
	Réf ^(a)	52.309	26.171	20.416	17.192	15.612

Source : Réf ^(a) : Nguyen et al., (2013) ; Réf ^(b): Li & Batra (2010a)

On peut constater d'après les tableaux (4.2) et (4.3) que les résultats actuels sont en bon accord avec les résultats publiés cités précédemment. Les paramètres de charges de flambement obtenus dans l'analyse actuelle sont à peu près assez proches des résultats fournis dans ces travaux et confirme ainsi le processus de solution proposé. De même, une augmentation de l'exposant de la loi de puissance conduit à une réduction des charges critiques

de flambement. De plus, il est constaté que les poutres FG avec des valeurs supérieures du rapport géométrique ont des charges de flambement critiques plus importantes. En outre, une augmentation du nombre de modes (mode de vibration) entraîne une augmentation des charges de flambement.

Tableau 4.3 Les trois premières charges critiques de flambement non dimensionnelles des poutres FG en appui simple.

Mode	Source	p				
		0	1	2	5	10
1	Présent	5.1524	3.9806	3.6223	3.4225	3.3091
2	Présent	151.9318	78.3841	61.7401	49.5790	43.4982
3	Présent	250.6507	135.2048	104.9102	81.3765	69.7502

4.4.2 Etude paramétrique

L'objectif de cette section est d'analyser les effets des différents paramètres géométrique et matérielle de la poutre sur la vibration libre et flambement.

4.4.2.1 Effet du rapport longueur/épaisseur et l'indice de puissance sur la fréquence de vibration

L'effet du rapport longueur/épaisseur sur la fréquence de vibration de la poutre FG en fonction de l'indice de puissance (p) est illustré dans les figures (4.1) et (4.2) sur la base du nouveau FSDT.

Il est à noter que les poutres FG avec des valeurs plus élevées du rapport longueur/épaisseur ont des valeurs plus grandes sur les fréquences de vibration, en raison du phénomène de rigidité. En effet, la minimisation de l'épaisseur de la poutre FG conduit à des fréquences critiques plus faibles. De même, une augmentation de l'indice de puissance génère une réduction des valeurs non dimensionnelles.

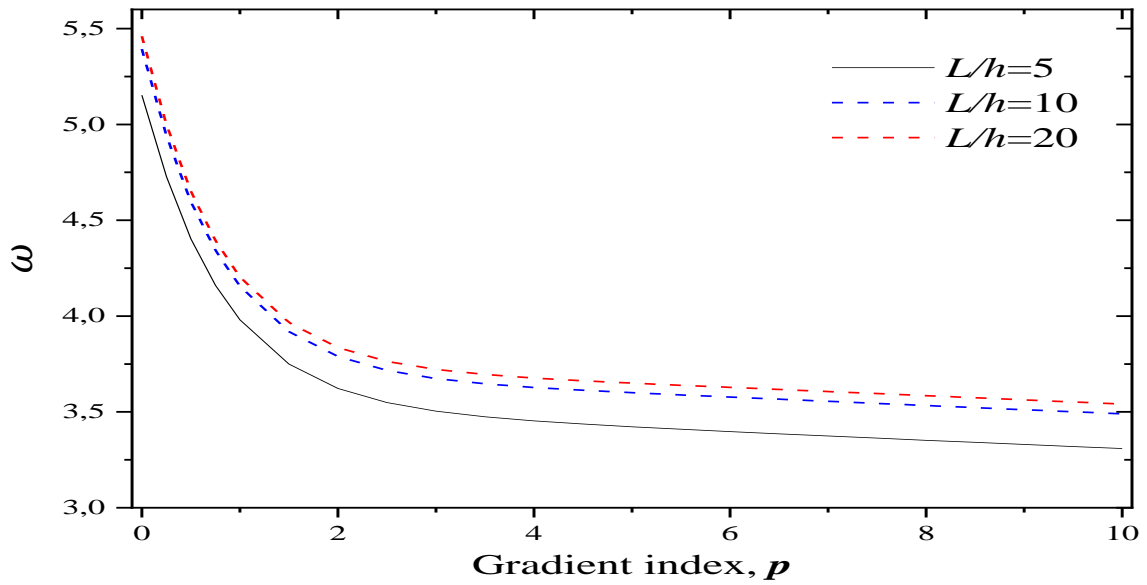


Figure 4.1 Influence de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence non dimensionnelle ω de la poutre FG avec différents rapports longueur/épaisseur L/h .

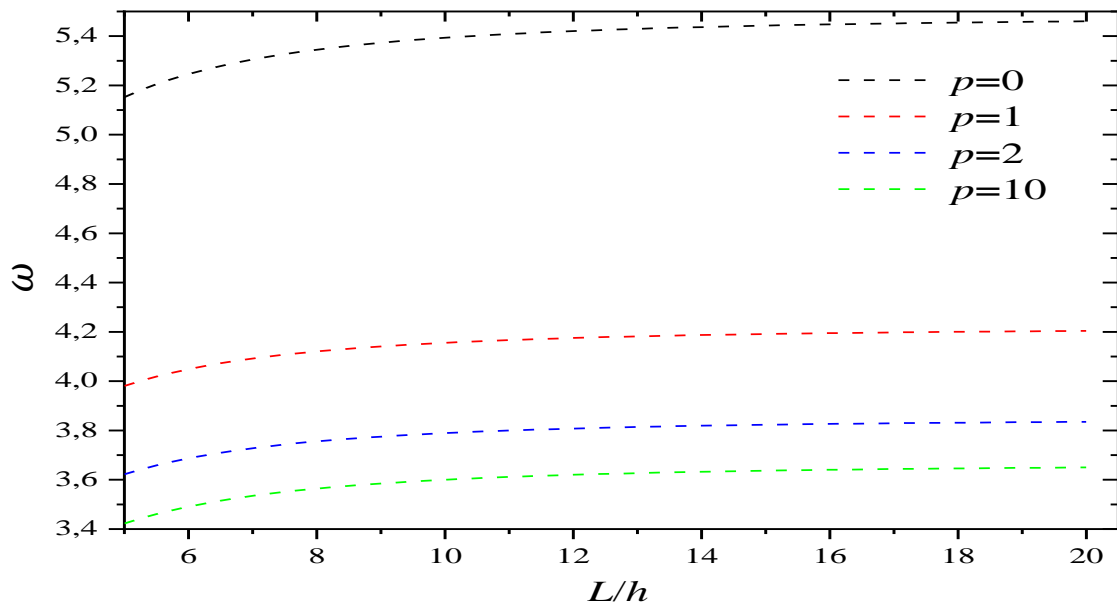


Figure 4.2 Influence des rapports géométrique L/h sur la fréquence non dimensionnelle ω d'une poutre FG avec différents indices de loi de puissance p .

Les fréquences de vibration des poutres FG en appui simple sont présentées dans le tableau (4.4) et sur la figure (4.3) pour démontrer l'impact du rapport du module d'Young,

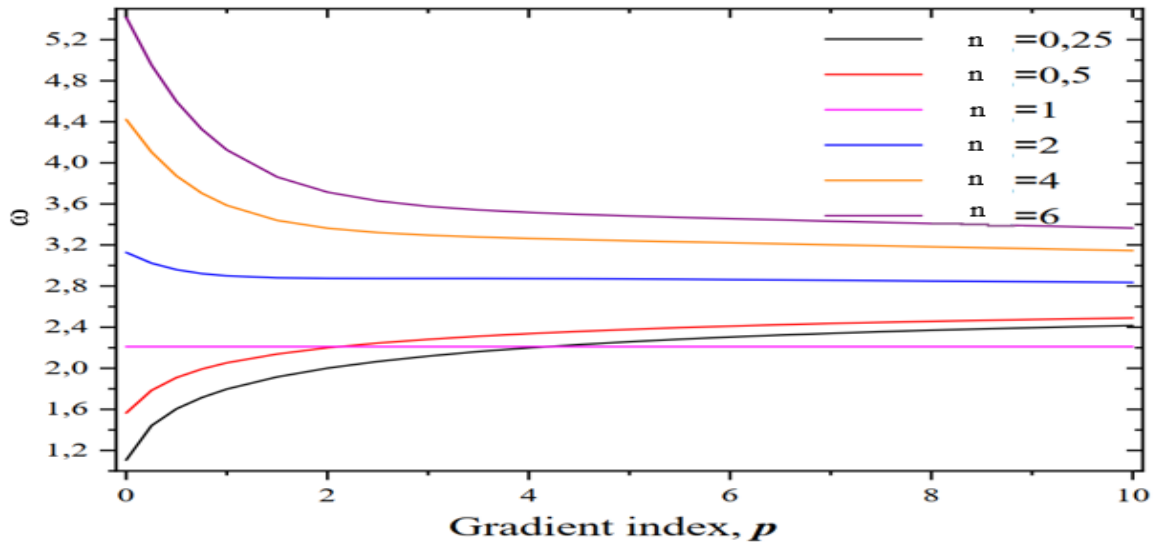


Figure 4.3 Impacts du rapport du module de Young sur les fréquences non dimensionnelles de la poutre S-S FG en fonction de l'indice de puissance ($L/h = 5$).

Tableau 4.4 Impacts du rapport du module de Young sur les fréquences non dimensionnelles dimension des poutres S-S FG avec diverses valeurs de l'indice de loi de puissance.

L/h	n	p , indice de puissance				
		0	1	2	5	6
5	0.25	1.1057	1.7966	2.0008	2.2576	2.4160
	0.5	1.5637	2.0526	2.1991	2.3782	2.4894
	1.0	2.2114	2.4111	2.4899	2.5772	2.6206
	2.0	3.1274	2.8994	2.8754	2.8692	2.8354
	4.0	4.4228	3.5857	3.3634	3.2416	3.1461
	6.0	5.4168	4.1256	3.7149	3.4832	3.3651
20	0.2	1.1717	1.8956	2.1085	2.3809	2.5517
	0.5	1.6571	2.1718	2.3243	2.5136	2.6331
	1.0	2.3435	2.5552	2.6396	2.7329	2.7788
	2.0	3.3142	3.0711	3.0523	3.0537	3.0177
	4.0	4.6871	3.7907	3.5658	3.4575	3.3620
	6.0	5.7405	4.3562	3.9322	3.7143	3.6023

On peut voir que pour une valeur fixe de l'indice de puissance, la fréquence naturelle augmente avec l'augmentation du rapport n . Vice versa, pour une valeur spécifiée de n . De plus, une augmentation de l'exposant de l'indice de puissance, il provoque des réponses opposées sur la vibration, qui est augmentée lorsque $n < 1$ et diminuée lorsque $n > 1$, lorsque $n = 1$ la vibration de la poutre FG prend les valeurs d'une poutre isotrope et reste constante (figure (4.3)). Cela prouve également une autre fois certaines réponses dynamiques citées dans les exemples précédents.

4.4.2.2 Effet du rapport longueur/épaisseur et l'indice de l'indice de puissance sur la charge de flambement

L'objectif de cette sous-section est d'étudier l'effet du rapport longueur/épaisseur et l'indice de l'indice de puissance p sur la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} (voir figure (4.4) et (4.5))

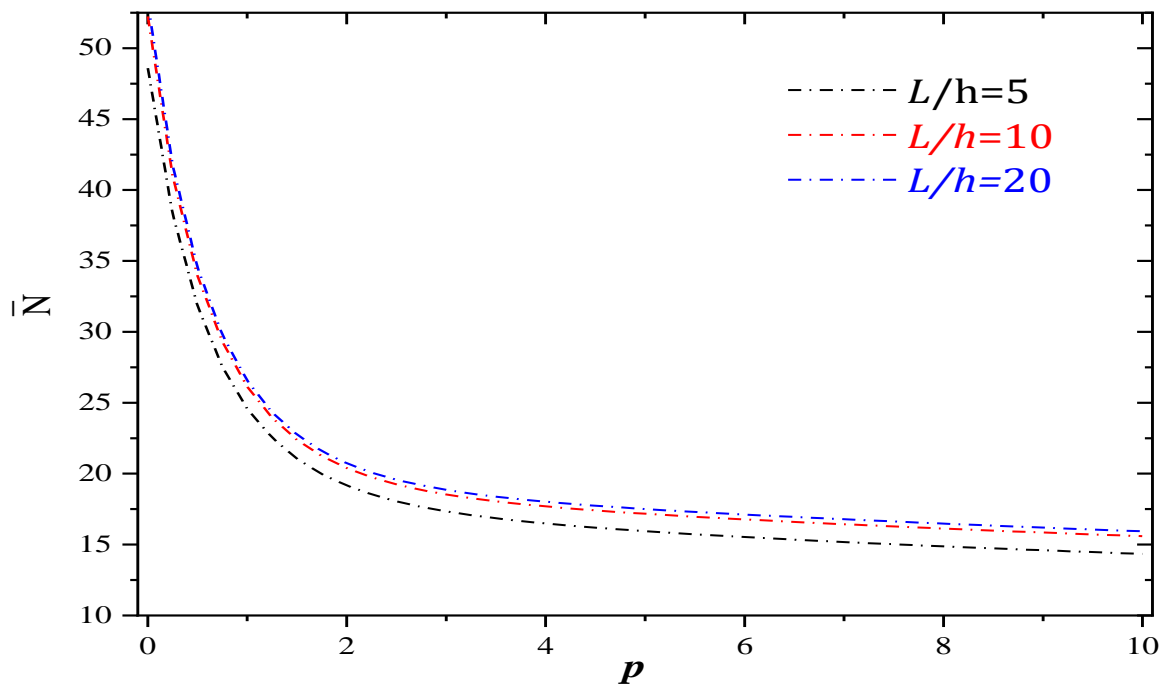


Figure 4.4 Variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} en fonction de l'indice de loi de puissance p pour différentes valeurs des rapports d'élanement L/h .

Comme nous l'avons vu précédemment, une augmentation de l'indice de puissance entraîne une réduction des valeurs des charges critiques. En effet, en augmentant la valeur de l'indice de loi de puissance (p), le pourcentage de la phase métallique augmente, ce qui rend les poutres FG moins rigides. Une autre remarque est que le comportement de flambement des poutres FG est considérablement contrôlé par le rapport d'élanement. En fait, à un indice de puissance constant, une diminution de la longueur par rapport à l'épaisseur (L/h) conduit à des charges de flambage plus faibles en introduisant une rigidité réduite sur la structure des poutres FG.

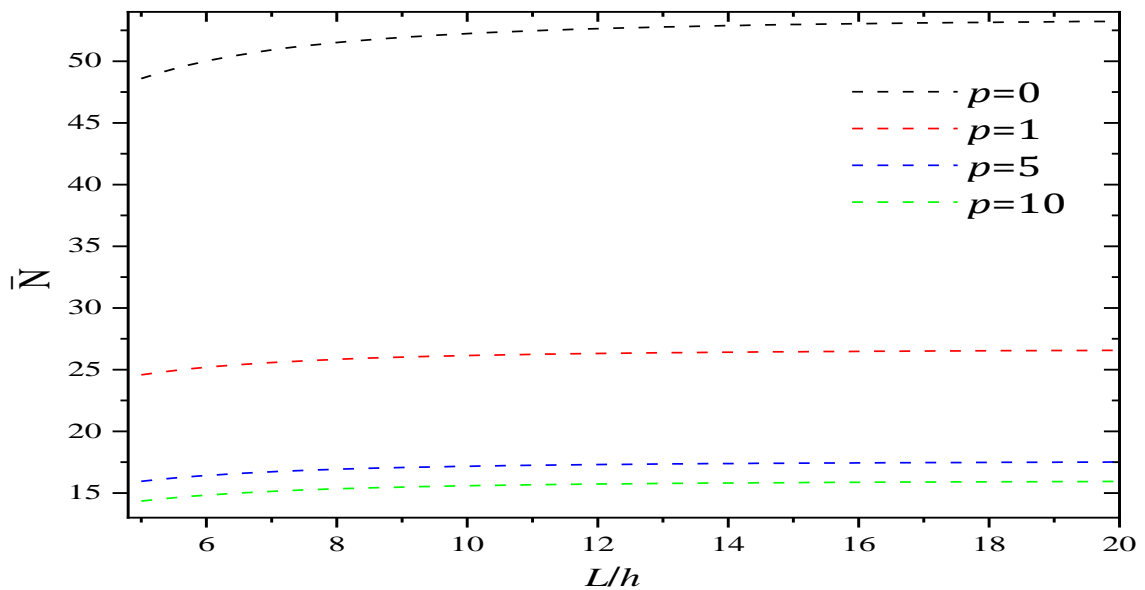


Figure 4.5 Variation de la charge critique de flambement sans dimension \bar{N} en fonction des rapports d'élanement L/h pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p .

Le tableau (4.5) et la figure (4.6) montrent l'effet du rapport du module de Young sur les charges critiques de flambement des poutres FG en appui simple.

On peut observer que les charges critiques augmentent séquentiellement avec l'augmentation de n pour toutes les valeurs de l'indice de puissance-loi considérées. L'effet de ce rapport est plus important pour les valeurs minimales de l'indice de gradient que pour les grandes (tableau (4.5)).

Tableau 4.5 Impacts du rapport du module de Young sur les charges de flambement sans dimension des poutres S-S FG avec diverses valeurs de l'indice de loi de puissance.

L/h	n	p , indice de puissance				
		0	1	2	5	6
5	0.25	2.2377	4.9785	5.7869	6.8734	7.6110
	0.50	4.4754	6.4868	6.9824	7.6234	8.0790
	1.0	8.9508	8.9508	8.9508	8.9508	8.9508
	2.0	17.9017	12.9737	11.9682	11.1088	10.4824
	4.00	35.8034	19.9143	16.4694	14.2493	12.9363
	6.00	53.7051	26.4183	20.1751	16.5353	14.8479
20	0.25	2.4056	5.3084	6.1575	7.3220	8.1289
	0.50	4.8113	6.9561	7.4706	8.1522	8.6501
	1.00	9.6226	9.6226	9.6226	9.6226	9.6226
	2.00	19.2453	13.9123	12.8693	12.0000	11.3318
	4.00	38.4907	21.2336	17.5999	15.3897	14.0502
	6.00	57.7360	28.0710	21.4404	17.7865	16.1324

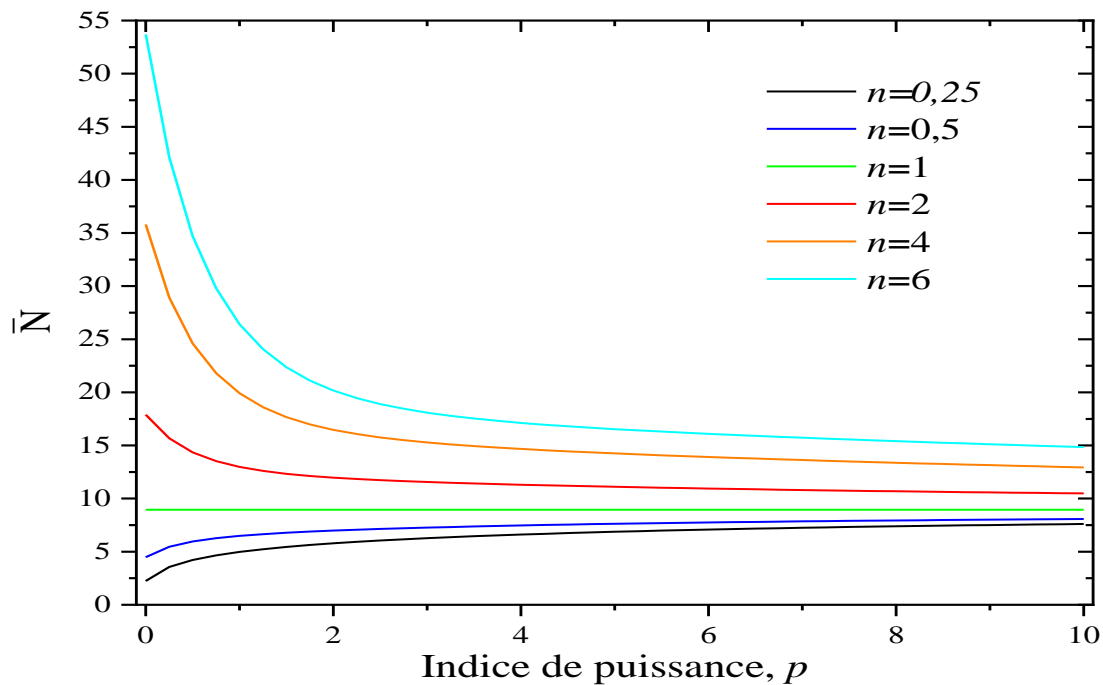


Figure 4.6 Impacts du rapport du module de Young sur les charges de flambage sans dimension d'une poutre S-S FG en fonction de l'indice de puissance ($L/h = 5$).

En outre, si nous prenons n égal à 1, un comportement similaire à celui de l'analyse vibratoire peut être observé pour l'étude du flambement. Il est également observable qu'avec l'augmentation de l'indice de puissance, la charge de flambage augmente lorsque $n < 1$, et une réduction est remarquée lorsque $n > 1$.

Enfin, comme nous l'avons vu précédemment, lorsque la poutre devient homogène, $n = 1$, le flambement critique est indépendant de l'indice de puissance et sa valeur reste constante (figure. (4.6)).

4.4.2.3 Effet de la force axiale sur les fréquences propres non dimensionnelles des poutres

Tableau (4.6) montre les trois premières fréquences naturelles avec et sans l'impact de la force axiale.

La variation des fréquences propres due à la force axiale est importante pour toutes les valeurs de l'exposant de la loi de puissance.

Tableau 4.6 Effet de la force axiale sur les fréquences propres sans dimension des poutres FG simplement appuyées.

L/h	p	N_{cr}	$N_0 = -0.5N_{cr}$	$N_0 = 0$	$N_0 = 0.5N_{cr}$
5	0	2.2675	5.5473	5.1524	4.7247
	1	1.1471	4.2855	3.9806	3.6502
	2	0.8942	3.8998	3.6223	3.3216
	5	0.8439	3.6847	3.4225	3.1385
	10	0.6694	3.5897	3.3091	3.0023
20	0	0.0388	5.4476	5.3932	5.3383
	1	0.0193	4.1974	4.1557	4.1136
	2	0.0151	3.8273	3.7892	3.7508
	5	0.0127	3.6362	3.6001	3.5635
	10	0.0116	3.5252	3.4899	3.4543

De plus, il est évident à partir de ce tableau que les fréquences fondamentales diminuent lorsque la sollicitation axiale passe de la tension à la compression. Ceci est dû au fait que la

force de tension impose un effet de rigidité tandis que la force de compression a un effet de flexibilité sur les paramètres des fréquences naturelles.

4.5 Conclusion

Une nouvelle approche théorique de poutre de déformation de cisaillement du premier ordre est proposée dans ce chapitre pour étudier le comportement dynamique et de flambage des poutres FG. La présente approche théorique est capable de fournir un nombre inférieur de variables dans des cas généralisés qui facilitent les temps de calcul de la conception technique, et respecte également les conditions nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre FG en utilisant un facteur de correction de cisaillement. Les propriétés du matériau de la poutre FG sont supposées changer dans le sens de l'épaisseur et sont évaluées selon le modèle de loi de puissance. Il a été démontré que le modèle proposé, basé sur la nouvelle approche RNFSDT, peut offrir des résultats précis de fréquence et de flambage des poutres FG par rapport aux cas de résultats analytiques disponibles dans la littérature et un bon accord a été révélé. Enfin, une étude paramétrique a été réalisée et les résultats numériques montrent les influences significatives de plusieurs paramètres tels que l'exposant du gradient de propriété du matériau, le rapport longueur/épaisseur, le rapport du module de Young et la charge axiale sur les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement des poutres FG. Contrairement à la théorie classique de la première déformation en cisaillement, l'approche théorique proposée ne contient que quatre inconnues dans le cas général. En conclusion, on peut dire que le modèle amélioré RNFBT adopté est non seulement précis mais aussi efficace pour prédire les comportements de flambement statique et dynamique des poutres à gradient fonctionnel, ce qui présente un grand intérêt, notamment pour la conception de divers problèmes d'ingénierie réels en facilitant les calculs d'ingénierie.

Conclusions générales

Les matériaux fonctionnellement gradués FGMs sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. Cette nouvelle génération des matériaux FGMs possède de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Donc, l'étude de ces comportements est très importante pour déterminer les caractéristiques appropriées du matériau pour garantir la réponse des structures.

Le travail présenté avait pour objectifs d'analyser la vibration libre et le flambement des poutres FG simplement appuyés, les caractéristiques matérielles de la structure utilisée varient selon une loi de puissance (P-FGM) en fonction des fractions volumiques des constituants.

Une formulation basée sur la théorie raffinée d'ordre élevé (RHSDT) a été mise en place permettant d'analyser la vibration libre et le flambement d'une poutre FG simplement appuyés, le principe d'Hamilton a été utilisé pour déterminer les équations de stabilité. Les équations des mouvements obtenus sont résolues par la méthode de Navier afin de déterminer la fréquence naturelle couplée avec la charge critique due à l'effort axiale des poutres FGMs.

L'approche théorique raffinée du premier ordre (NRFSDT) est appliquée pour explorer les caractéristiques des vibrations et des flambements des poutres faites en céramique-métal en gradué, les propriétés matérielles sont considérées être variées à travers l'épaisseur de façon graduelle selon la loi de puissance, le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations d'équilibres, ces équations ont été résolues par une méthode analytique basée sur double série de Fourier pour déterminer la fréquence adimensionnelle due à la vibration libre ainsi que les charges critique due au flambement de la poutre composite FG.

En outre, des études paramétriques menée a été démontrée l'influence de la géométrie de la poutre représentée par le rapport géométrique L/h , les propriétés matérielles telles que

l'indice de puissance p , l'intensité de la charge axiale N_{cr} , sur la fréquence adimensionnelle, les modes propres, et la charge critique de flambement de la poutre FG. Les résultats obtenus sont en excellent accord avec ceux dérivés de travaux antérieurs. Par conséquent, on peut considérer que l'approche théorique présentée est précise et efficace pour résoudre les problèmes de vibrations libres et de flambement des structures en FGM.

En perspective, il est prévu de proposer nouvelles approches théoriques pour l'étude de la réponse globale des poutres FG sous différentes conditions d'appuis, sous différents types de changement mécanique thermique, hygrothermique, etc. En plus, il est prévu aussi d'intégrer d'autres paramètres aux modèles présentés afin de se rapprocher de la réalité pratique des structures dans leur environnement en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

Enfin, nous pouvons dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire d'ingénierie des systèmes mécaniques et matériaux (IS2M) dans le domaine des matériaux composites fonctionnellement gradués et précisément leurs comportements vis-à-vis des différents chargements.

Références bibliographiques

Akmal M., Khalid FA., Hussain MA., 2015 "Interfacial diffusion reaction and mechanical characterization of 316L stainless steel hydroxyapatite functionally graded materials for joint prostheses". *Ceram Int*, Volume 41, pp.14458–67.

Aydogdu, M., 2009 "A new shear deformation theory for laminated composite plates". *Composite Structures*, pp. 94-101.

Bao, G & Wang, L., 1995 "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings". *International Journal of Solids and Structure*, Volume 32, pp.2853–2871.

Bauchau, O & Craig, J., 2009 "Euler--Bernoulli beam theory, *Solid Mechanics and its Applications*", Volume. 163.

Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A., 2011 "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient". *Composites: Part B*, Volume 42, pp. 1386–1394.

Bensaid, I., Cheikh, A., Mangouchi, A., Kerboua, B., 2017 "Static deflection and dynamic behavior of higher-order hyperbolic shear deformable compositionally graded beams". *Advanced Materials Research*, Volume 6, No. 1, pp. 13-26.

Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M., 1986. "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites". *J. Am. Ceram. Soc.* Volume **69** (8), pp. 191–192.

Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., 2015 "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams". *Steel & Composite Structures*, Volume 18, No. 2, pp. 409-423.

Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A., Adda Bedia, E.A. , 2013 "A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams". *Steel & Composite Structures*, Volume 15, No. 5, pp. 467-479.

Chakraverty, Snehashish & Pradhan, Karan Kumar., 2016 "Vibration of functionally graded beams and plates". Academic Press.

Chen WW., Rajendran AM., Song B., Nie X., 2007 "Dynamic fracture of ceramics in armor applications". *J Am Ceram Soc*, Volume 90, pp. 1005–18.

Chin ESC., 1999 "Army focused research team on functionally graded armor composites". *Mater Sci Eng, A*, Volume 259, pp.155–61.

Chi, S.H & Chung, Y.L., 2002 "Cracking in sigmoid functionally graded coating". *Journal of Mechanics*, Volume 18, pp.41–53.

Chi, S.H & Chung, Y.L., 2003 "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 70, pp.1227–1243.

Chung, Y.L., Chi, S.H., 2001 "The residual stress of functionally graded materials". *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, Volume 13, pp.1–9.

Erdogan, F., Chen, Y.F., 1998 "Interfacial cracking of FGM/metal bonds". In: Kokini, K. (Ed.) *Ceramic Coating*, pp. 29–37.

Erdogan, F., Wu, B.H., 1996 "Crack problems in FGM layers under thermal stresses". *Journal of Thermal Stresses* Volume 19, pp.237–265.

Gu, P., Asaro, R.J., 1997 "Crack deflection in functionally graded materials". *International Journal of Solids and Structures*, Volume 34, pp.3085– 3098.

Hao, Z. & Zhi-bo, Y., 2014 "Static, free vibration and buckling analysis of functionally graded beam via B-spline wavelet on the interval and Timoshenko beam theory". *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Volume 100, No. 6, pp. 477-506.

Huang. Y., X.F Li., 2010 "A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section". *Journal of Sound and Vibration*, Volume 329, pp.2291–2303.

Huang C., Chen Y., 2016 "Design and impact resistant analysis of functionally graded Al₂O₃ – ZrO₂ ceramic composite". *JMADE*, Volume 91, pp.294–305.

Jin, Z.H., Batra, R.C., 1996 "Stresses intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock". *Journal of Thermal Stresses*, Volume 19, pp.317–339.

Jin, Z.H., Paulino, G.H., 2001. "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material". *International Journal of Fracture*, Volume 107, pp.73–98.

Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., 2018 "Post buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory". *Structural Engineering and Mechanics*, Volume 65, No. 5, pp. 621-631.

Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou., 2003 "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity". *Int. J. Solids Structures*; Volume 40 (6), pp.1525-1546.

Khalid Almitani, H., 2018 "Buckling behaviors of symmetric and antisymmetric functionally graded beams". *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Volume: 4, No: 2, pp. 115-124.

Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H., 2003 "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering: A*. Volume: 362, number: 1-2, pp: 81-106.

Knight. M, D. Curliss., 2003 "Composite Materials". Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition).

Kim, Seung-Eock., Thai, Huu-Tai., Lee, Jaehong., 2009 "A two variable refined plate theory for laminated composite plates" Composite Structures, Volume 89, No 2, pp. 197-205.

Kim, Seung-Eock., Thai, Huu-Tai., Lee, Jaehong., 2009 "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", Thin-Walled Structures, Volume 47, No 4, pp. 455-462.

Kimberly R., Oo Z., Sujan D., 2015 "Microstructure analysis, physical and thermal properties of Al₂O₃ - Al₂TiO₅ functionally graded ceramics for the application of car brake rot". Pertanika J Sci Technol; Volume 23, pp.153–61.

Koizumi, M., 1997 "FGM activities in Japan". Composites Part B, Volume 28, pp. 1-4.

Kumar S, Reddy KVVSM, Kumar A, Devi GR., 2013 "Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application". Aero Sci Technol; Volume 26, pp.185–91.

Li, Y, Li, Yan., Feng, Zuying., Hao, Liang., Huang, Lijing., Xin, Chenxing., Wang, Yushen ., Bilotti, Emiliano ., Essa, Khamis ., Zhang, Han ., Li, Zheng and others., 2020 "A Review on Functionally Graded Materials and Structures via Additive Manufacturing: From Multi-Scale Design to Versatile Functional Properties". Advanced material technologies. Volume 5, No 6, pp. 1900981.

Li, S.-R. & Batra, R.C., 2013 "Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams" .Composite Structures, Volume 95, pp. 5-9.

Li, S.R. Z.Q. Wan, J. H. Zhang., 2014 "Free vibration of functionally graded beams based on both classical and the first-order shear deformation beam theories". Applied Mathematics and Mechanics , Volume 35 (5), pp.591–606.

Li. X.F., 2008 "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviours of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams". *Journal of Sound and Vibration*, Volume 318, pp:1210–1229.

Liu. Y& D.W. Shu., 2014 "Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination". *Composites: Part B*, Volume 59, pp. 166–172.

Mahmood, M. & Akinlabi, E., 2017 "Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering". s.l.:Springer.

Mannan S., Knox JP., Basu S., 2017. "Correlations between axial stiffness and microstructure of a species of bamboo". *R Soc Open Sci*.

Meksi, A., Belakhdar, K., Bouguenina, O., Tounsi, A., and Bedia El-Abbes, Adda., 2018 "Effect of parabolicconcave thickness variation on the mechanical buckling resistance of simply supported FGM plates". *Jordan Journal of Civil Engineering*, Volume 12, No: 2, pp. 216-227.

Miao X & Sun D., 2010 "Graded/gradient porous biomaterials". *Materials*, Volume 3. pp. 26–47.

Mindlin, Raymond D., 1951 "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates".

Miyamoto, Y., Kaysser, WA., Rabin, BH., Kawasaki, A ., René, G Ford., 1999 "Functionally graded materials: design, processing and applications". Springer Science & Business Media, Volume 5.

Nguyen, T-K ., Sab. Karam ., Bonnet, Guy., 2007. "Shear correction factors for functionally graded plates". *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. Volume 14, N 8, pp. 567-575.

Nguyen, T.K., Vo, T.P., Thai, H.T., 2013 "Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory". *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 147-157.

Nguyen, T.K., 2015 "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials". *J. Mech. Mater. Des.* Volume 11 (2), pp.203-219.

Niino, M., Hirai, T., Watanabe, R., 1987 "The functionally gradient materials". *J. Jpn. Soc. Composite Materials*, Volume 13, pp. 257–264.

Okamura. H., 1991 "State of the art of material design projects for severe service applications". *Materials Science and Engineering: A*, Volume 143, Issues 1–2, pp. 3-9.

Olivier Ozenda and Epifanio G. Virga., 2021 "On the Kirchhoff-Love Hypothesis" *J Elast.* Volume 143, pp.359–384.

Podio-Guidugli, P., 1989 "An exact derivation of the thin plate equation". *J. Elast*, Volume 22, pp.121–133.

Pompe W., Worch H., Epple M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., et al., 2003 "Functionally graded materials for biomedical applications". *Mater Sci Eng, A*, Volume 362, pp. 40–60.

Ram SC., Chattopadhyay K., Chakrabarty I., 2017 "High temperature tensile properties of centrifugally cast in-situ Al-Mg₂Si functionally graded composites for automotive cylinder block liners". *J Alloys Compd*, Volume 724, pp.84–97.

Reddy, J.N., 1997 "Mechanics of Laminated composites plates: Theory and analysis". CRC Press, Boca Raton.

Reissner, E., 1975 «On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". *Int. J. Solids Struct.* Volume 11, pp. 569-573.

Reissner, Eric., 1945 "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates".

Sarkar P., Datta S., Nicholson PS., 1997 "Functionally graded ceramic/ceramic and metal/ceramic composites by electrophoretic deposition". *Composites Part B*, Volume 28, pp. 49–56.

Scheid, Rickne C., Weiss., Gabriela. Jones., 2020 "Woelfel's dental anatomy \& Bartlett Publishers".

Senthilnathan, NR., Lim, SP., Lee, KH., Chow, ST., 1987 "Buckling of shear-deformable plates" *AIAA journal*, Volume 25, No 9, pp.1268—1271.

Shimpi, RP & Patel, HG., 2006. "A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis" *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, No 22-23, pp: 6783-6799.

Shimpi, RP & Patel, HG., 2006 "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory" *Journal of Sound and Vibration*, Volume 296, No 4-5, pp. 979-999.

Shyang-Ho Chi., Yen-Ling Chung., 2006 "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis". *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, pp. 3657–3674.

Simsek, M., 2010a "Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories". *Nuclear Engineering and Design*, Volume 240, No 4, pp. 697-705.

Sina, S.A. H., M. Navazi., H. Haddadpour., 2009 "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams". *Materials and Design*, 30, 741–747.

Suresh, S. & Mortensen, A., 1998. "Fundamentals of functionally graded materials". The Institut of Materials, London, Maney.

Soldatos, KP & Timarci. T., 1993 "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories". *Composite Structures*. Volume 25, No 1-4, pp. 165-171.

Steele, Charles R & Balch, Chad D., 2009 "Introduction to the Theory of Plates" Division of Mechanics and Computation, Department of Mechanical Engineering Stanford University.

Tarlochan F., 2012 "Functionally graded material: a new breed of engineered material". *J Appl Mech Eng*, pp.10–1.

Thai, H.T. & Choi, A., 2013a "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates". *Compos. Struct*, Volume 101, pp.332-340.

Thai, H.T. & Choi, A., 2013b "A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates". *Compos. Struct*, Volume 106, pp.754-763.

Thai, Huu-Tai., Kim, Seung-Eock., 2010 "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory". *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 52, No 4, pp. 626-633.

Thai, Huu-Tai., Kim, Seung-Eock., 2011 "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory". *Composite Structures*, Volume 93, No 7, pp. 1738-1746.

Thai, Huu-Tai., Kim, Seung-Eock., 2015 "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells" *Composite Structures*, Volume 128, pp. 0-86.

Thai, H.T., Nguyen, T.K., Vo, T.P., Lee, J., 2014 "Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory". *Eur. J. Mech.*, Volume 45, pp. 211-225.

Thai, H.T., Vo, T.P., 2012 "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories". *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume. 62, No. 1, pp. 57-66.

Thieme M., Wieters K., Bergner F., Scharnweber D., Worch H., 2001 "Titanium powder sintering for preparation of a porous functionally graded material destined for orthopaedic implants". *J Mater Sci Mater Med*, Volume 12, pp.225–31.

Timoshenko, Stephen P., 1921 "LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Volume 41, No 245, pp. 744-746.

Timoshenko, Stephen P., 1922 "X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Volume 43, No 253, pp. 128-131.

Touratier. M., 1991 "An efficient standard plate theory". *Engng .Sci*, Volume. 29, No 8, pp. 901-916.

Vo, T.P., Thai, H.T., Aydogdu, M., 2017 "Free vibration of axially loaded composite beams using a four-unknown shear and normal deformation theory". *Composite Structures*, Volume. 178, pp. 406-414.

Wang, CM., Reddy, Junuthula Narasimha., Lee, KH., 2000 "Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions" Elsevier.

Xiao R., Feng X., Fan R., Chen S., Song J., Gao L., et al., 2020 "3D printing of titanium-coated gradient composite lattices for lightweight mandibular prosthesis". *Compos B Eng*, pp.193:108057.

Yang. J& Y. Chen., 2011 "Free vibration and buckling analysis of functionally graded beams with edge cracks". *Composite Structures*, Volume 93, pp. 48–60.

Yung, Y.Y& Munz, D., 1996. "Stress analysis in a two materials joint with a functionally graded material". Shiota, T., Miyamoto, M.Y. (Eds.), Functionally Graded Material, pp. 41–46.

Zenkour, Ashraf M ., Mashat, Daoud S and others., 2010 "Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates". Natural Science, Volume 2, No 09, pp. 968.

Zhao P., Wang S., Guo S., Chen Y., Ling Y., Li J., Bonding W., 2012 "W–Cu composite with an amorphous W – Fe coated copper foil through hot pressing method". Mater Des Volume 42, pp.21–4.

Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R., 2017 "A novel simple two unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", Composites Science and Technology, Volume 64, No 2, pp. 145-153.

Ziou Hassina., Hamza Guenfoud., Mohamed Guenfoud., 2020 "Buckling Analysis Behavior of Functionally Graded Beams", Jordan Journal of Civil Engineering, Volume 14, No. 3.

Liste des publications

Bensaid, I., Bekhadda, A., Kerboua, B., 2021 "Size-dependent bending and stability analysis of FG nanobeams via a novel simplified first-order shear deformation beam theory". Composite Materials and Engineering, Volume 3, No 1, pp. 71-88.

Bekhadda, A., Cheikh, A., Bensaid, I., Hadjoui, A., Daikh, A., 2019 "A novel first order refined shear-deformation beam theory for vibration and buckling analysis of continuously graded beams" Advances in aircraft and spacecraft science, Volume 6, No 3, pp. 189-206.

Bekhadda, A., Bensaid, I., Cheikh, A., Kerboua, B., 2019 "Static buckling and vibration analysis of continuously graded ceramic-metal beams using a refined higher order shear deformation theory". Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, Volume 15, No 6, pp. 1152-1169.

Bensaid, I; Bekhadda, A and Kerboua, B., 2018 "Dynamic analysis of higher order shear-deformable nanobeams resting on elastic foundation based on nonlocal strain gradient theory". Advances in nano research, Volume: 6, No:3, pp: 279.

Bensaid, I., Bekhadda, A., 2018 "Thermal stability analysis of temperature dependent inhomogeneous size-dependent nano-scale beams". Advances in Materials Research, Volume 7, No 1, pp. 1.

Bensaid, I., Bekhadda, A., Kerboua, B., Cheikh A., 2018 "Investigating nonlinear thermal stability response of functionally graded plates using a new and simple HSDT". Wind and Structures, Volume 27, No 16, pp. 369-380.