



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à:

FACULTÉ DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de:

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: *Analyse*

Par:

Mme DIB-BAGHDADLI Nabahats Adiba

Sur le thème

Application de la théorie des Équations Différentielles Abstraites (EDA) à des problèmes de dynamique de population

Soutenue le 30 Mars 2022 à Tlemcen devant le jury composé de:

Mr BOUGUIMA Sidi Med	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr MAHDJOUB Tewfik	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr MEDEGHRI Ahmed	Professeur	Université de Mostaganem	Codirecteur de thèse
Mr LABBAS Rabah	Professeur Émérite	Université du Havre	Examineur
Mr TOUAOULA Med Tarik	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr MENAD Abdellah	MCA	Université de Mostaganem	Examineur

*Laboratoire d'Analyse Non Linéaire des Mathématiques Appliquées (L.A.N.L.M.A)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

A la mémoire de mon père

Comment t'oublier???

Je dédie cet événement à la mémoire de mon très cher père décédé récemment, qui m'a toujours poussée à achever cette thèse. Il me manque terriblement, il aurait été très fier de moi.

J'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance, de la part de sa fille qui a toujours prié pour le salut de son âme.

Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde!

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui, directement ou indirectement, m'ont permis de mener à bien ce travail.

En particulier, je remercie vivement mon directeur de thèse le Professeur **MAHDJOUR Tewfik**, qui a toujours été présent à mes côtés pour m'orienter. Sa gentillesse et son expérience m'ont été profitables. Merci pour votre attention et votre disponibilité malgré vos nombreuses charges. Je remercie tous les membres du laboratoire *Analyse Non Linéaire et Application Mathématique* de Tlemcen.

J'adresse également mes remerciements à mon co-encadreur le Professeur **MEDEGHRI Ahmed**, qui m'a fait profiter avec générosité et patience de sa culture et m'a accueilli dans son laboratoire LMA de Mostaganem, sa rigueur, ses exigences et son savoir m'ont permis d'entreprendre sereinement ce travail. Il m'a permis d'approfondir au maximum mes travaux afin de pouvoir être fier aujourd'hui du travail réalisé.

Je voudrais aussi témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Émérite des universités **LABBAS Rabah**, de m'avoir accueilli au laboratoire LMAH à l'Université du Havre et de m'expliquer bien la théorie des EDA en me faisant un rappel des outils de base pour bien comprendre cette théorie, son aide précieuse dans l'aboutissement aux résultats qui ont fait l'objet d'une publication d'un article dans l'un des meilleurs journaux. Je profite pour remercier **THOREL Alexandre** pour sa sympathie et aussi **MAINGOT Stéphane** qui sont tous les deux, experts dans le domaine des EDA en particulier des opérateurs sectoriels.

Monsieur le Professeur **BOUGUIMA Sidi Mohamed**, je vous adresse mes remerciements pour avoir accepté de juger ce travail et d'en être le président de jury.

Monsieur le Professeur **TOUAOULA Mohamed Tarik**, je vous remercie d'avoir accepté de faire partie des membres du jury de ma thèse.

Mes remerciements vont à Monsieur **MENAD Abdellah** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, en occurrence je remercie mon cher époux pour son soutien quotidien indéfectible, mon fils, mon défunt père qui n'a pas cessé de m'encourager pour finir cette thèse et qui était la source de ma force, ma persévérance et ma volonté, ma mère qui est ma fierté et que dieu la protège ainsi à tout le reste de ma famille.

Table des matières

Introduction	1
1 Maladie de Chagas, sa modélisation	7
1.1 Aperçu sur la maladie de Chagas	7
1.1.1 Transmission	8
1.1.2 L'estimation de l'OMS	10
1.1.3 Signes et symptômes	12
1.1.4 Diagnostique biologique	16
1.1.5 Traitement	17
1.1.6 Lutte et prévention	18
1.1.7 La réponse de l'OMS	19
1.1.8 Les triatomines vecteurs de la maladie de Chagas	20
1.2 État de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie . . .	22
1.3 Position de notre étude	26
2 Construction du modèle et position du problème	27
2.1 Présentation du modèle et sa transformation abstraite	27
2.1.1 Définition des habitats	27
2.1.2 Considérations biologiques	28

2.1.3	Système d'équations de réaction-diffusion	30
2.1.4	Transformation du système précédent en une équation différentielle abstraite	32
2.2	Conclusion	34
3	Outils mathématiques	36
3.1	Opérateurs linéaires	36
3.1.1	Opérateurs linéaires bornés	38
3.1.2	Opérateurs linéaires fermés	38
3.1.3	Opérateurs sectoriels	43
3.2	Espaces de Sobolev	45
3.3	Les semi-groupes	46
3.3.1	Semi-groupes fortement continus	47
3.3.2	Semi-groupes analytiques	47
3.3.3	Semi-groupes analytiques généralisés	49
3.4	Espaces UMD	50
3.5	Espaces d'interpolation	52
3.5.1	Espaces intermédiaires	52
3.5.2	Espaces de moyenne	53
3.5.3	Espaces d'interpolation et domaine d'opérateurs	54
4	Étude du modèle	56
4.1	Présentation du modèle	56
4.2	Position du problème	57
4.3	Transformation abstraite	59
4.4	L'équation spectrale	59
4.5	L'équation spectrale explicitée	60
4.6	Splitting du système	61
4.7	Écriture opérationnelle	63

4.8	Quelques rappels importants	64
4.9	Résolution du premier système (4.5)	66
4.9.1	Inversibilité de $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}$	73
4.9.2	Résolution de (S1)	76
4.9.3	Régularité optimale de v_- et v_+ et estimations	78
4.10	Retour à l'équation d'évolution	85
4.10.1	Cadre $L^q(0, T; \mathcal{E})$	86
4.10.2	Application du théorème du point fixe	87
Conclusion et perspectives		94
Bibliographie		97

Introduction

La **maladie de Chagas** ou trypanosomiase américaine est une maladie potentiellement mortelle causée par le parasite protozoaire flagellé *Trypanosoma cruzi* (*T.cruzi*) (**figure 1.1**). Elle est principalement transmise par des punaises hématophages appartenant à la sous-famille des **Triatomines** (**figure 1.2**). Via ces vecteurs, le parasite peut infecter les humains ainsi qu'un grand nombre de mammifères domestiques ou sauvages.

Si les insectes vivent au voisinage des nids de mammifères ou d'oiseaux non domestiqués, la transmission du parasite est dite **sylvatique**. Si les habitats des insectes avoisinent les habitations humaines alors la transmission est dite **domestique**. Il est à noter que certaines espèces, comme *Triatoma Dimidiata* (***T. Dimidiata***) peuvent aussi bien habiter au voisinage des habitations humaines qu'en pleine forêt.

Les différents processus impliqués dans la transmission de ***T. Cruzi*** sont très complexes et leur compréhension passe par des études pointues en écologie vectorielle. En particulier, la démographie et la dispersion spatiale sont des processus importants lors d'une infestation/ré-infestation d'une région donnée. Dans la plupart des cas, ils ne sont pas saisis au moyen d'études de laboratoire.

La modélisation mathématique reste un bon outil pour comprendre ces processus [49]. Ses approches passent par l'utilisation, par exemple, des **équations différentielles ordinaires** [35], **équations aux dérivées partielles** [54] et **équations d'intégré-différence** [44], [42].

D'autres études basées sur le calcul scientifique ont également été utilisées comme **les cellulaires automates** [58], [17] et **les modèles à base d'agents** [21], [27].

Dans cette étude, nous considérons l'infestation d'un village par l'espèce **T. Dimidiata**. Les individus non domiciliés au village se déplacent vers ce dernier pour se nourrir. La nourriture consiste en un repas de sang sur les humains ou les mammifères/oiseaux élevés. La transmission du parasite *T.Cruzi* du vecteur **T.Dimidiata** à l'hôte a lieu pendant cette phase. Après la piqûre de la punaise appelée "kissing bug" , cette dernière dépose immédiatement après un fèces renfermant *T.Cruzi* qui rentra dans l'hôte par la peau lorsque ce dernier se gratte. La punaise se déplace par la suite pour enclencher sa fécondité.

Ce travail est une contribution à l'étude de la propagation géographique de la maladie de Chagas. Pour cela, nous considérons une population de triatomines structurée en stades de développement : juvéniles et adultes. Les processus de démographie et de dispersion spatiale sont décrits par des équations de réaction-diffusion bidimensionnelles. Dans des espaces fonctionnels adéquats, le système d'équations différentielles partielles est transformé en une équation différentielle abstraite qui sera étudiée.

Soit Ω défini de la façon suivante :

$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$ où

$$\begin{cases} \Omega_- =]-d, 0[\times]0, 1[\\ \Omega_+ =]0, D[\times]0, 1[\end{cases}$$

avec $d, D > 0$,

le premier pavé Ω_- représente le village et le deuxième Ω_+ représente la zone tampon qui est entre le village et la forêt.

Nous considérons la population structurée en deux stades de développement : le stade adulte de densité $A(t, x, y)$ et le stade juvénile de densité $J(t, x, y)$.

Les équations de réaction-diffusion s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j_-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a_-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j_+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a_+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ , \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Omega_- \\ \\ \text{sur } \Omega_+ \end{array}$$

où

Δ est le Laplacien,

les d_{j_-} , d_{a_-} , d_{j_+} et d_{a_+} sont les coefficients de diffusion,

les $\omega_j(t)$, $f_a(t)$ et $s_a(t)$ sont des paramètres démographiques.

Avec les conditions initiales :

$$(IC) \left\{ \begin{array}{l} J_-(0, x, y) = J_-^0(x, y) \\ A_-(0, x, y) = A_-^0(x, y) \\ J_+(0, x, y) = J_+^0(x, y) \\ A_+(0, x, y) = A_+^0(x, y) , \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Omega_- \\ \\ \text{sur } \Omega_+ \end{array}$$

et les conditions aux bords :

$$(EC_1) \left\{ \begin{array}{l} J_-(., x, 0) = J_-(., x, 1) = 0 \\ A_-(., x, 0) = A_-(., x, 1) = 0 \\ J_+(., x, 0) = J_+(., x, 1) = 0 \\ A_+(., x, 0) = A_+(., x, 1) = 0 , \end{array} \right. \begin{array}{l} x \in]-d, 0[\\ \\ x \in]0, D[\end{array}$$

$$(EC_2) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} J_- \\ A_- \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{sur } \{-d\} \times]0, 1[\\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\begin{array}{c} J_+ \\ A_+ \end{array} \right) = 0 \quad \text{sur } \{D\} \times]0, 1[. \end{array} \right.$$

En suivant Cantrell et Cosner [10], nous supposons qu'il existe sur la frontière commune, appelée interface, une dispersion spatiale des individus décrite par les équations suivantes :

$$(Int.C) \left\{ \begin{array}{l} pd_{j_-} \frac{\partial J_-}{\partial \nu} = (1-p)d_{j_+} \frac{\partial J_+}{\partial \nu} \\ pd_{a_-} \frac{\partial A_-}{\partial \nu} = (1-p)d_{a_+} \frac{\partial A_+}{\partial \nu} \\ \left(\begin{array}{c} J_- \\ A_- \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} J_+ \\ A_+ \end{array} \right) , \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma = \{0\} \times]0, 1[$$

appelées conditions d'asymétrie (skewness condition), où $p > 1/2$ est la probabilité de traverser l'interface de Ω_+ à Ω_- ;

Le modèle à étudier est donc :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j_-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a_-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j_+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a_+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ \\ \\ (I.C) \\ \\ (Int.C) \\ \\ (EC_1) \\ \\ (EC_2) \end{array} \right.$$

Par un changement de variables adéquat, le système (P) se transformera en une équation différentielle abstraite (1), en effet on définira un opérateur \mathcal{L} , de domaine $D(\mathcal{L})$, qui agit par rapport aux variables spatiales (x,y),

et $\mathcal{B}(t)$ est une matrice définie comme suit :

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} \omega_j(t) s_j(t) I & f_a(t) s_a(t) I \\ (1 - \omega_j(t)) s_j(t) I & s_a(t) I \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t) \quad t > 0 \\ V(0) = V^0 = \begin{pmatrix} J^0(0, \cdot, \cdot) \\ A^0(0, \cdot, \cdot) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (1)$$

posé dans l'espace Banach $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$ muni d'une norme adéquate.

Étudier (P) revient donc à étudier l'équation différentielle abstraite (1). A cet effet, les outils d'analyse fonctionnelle et de la théorie des équations différentielles abstraites seront utilisés. On commence par expliciter l'équation spectrale, puis à partir de son écriture opérationnelle, on est ramené à résoudre le système abstrait associé, par application des outils de l'analyse fonctionnelle, des opérateurs sectoriels et le calcul H-infinis.

Notre objectif est de montrer que l'opérateur \mathcal{L} génère un semi-groupe analytique. Nous prouvons alors l'existence, la régularité optimale et l'unicité d'une solution locale au problème correspondant.

Cette thèse est organisée comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous décrivons le modèle biologique : parasite, vecteur et maladie de Chagas,
- Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des processus démographique et de dispersion spatiale des vecteurs,
- Le troisième chapitre concerne le rappel des principaux outils mathématiques utilisés,
- Et enfin, un quatrième chapitre, où nous exposons la résolution du système abstrait, nous étudierons la régularité optimale de la solution en vue de montrer que l'opérateur \mathcal{L} génère un semi-groupe analytique dans l'espace \mathcal{E} . Ensuite par application du théorème de point fixe nous montrons l'unicité de la solution locale de notre problème (P).

Chapitre 1

Maladie de Chagas, sa modélisation

Ce chapitre se compose de deux parties. La première partie est un aperçu sur la maladie de Chagas et ses vecteurs qui sont des insectes de la famille des triatomines appelés triatomes. La seconde partie traite de l'état de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie.

1.1 Aperçu sur la maladie de Chagas

La Trypanosomiase humaine américaine (**THAm**) ou **maladie de Chagas** a été décrite pour la première fois en 1909 par Carlos Justiniano Ribeiro Chagas, un brillant médecin brésilien [14]. C'est une maladie à transmission vectorielle, liée au moment de sa découverte à un habitat rural dans un contexte de pauvreté des paysans latino-américains, la THAm est devenue aujourd'hui une maladie de plus en plus urbaine et cosmopolite, touchant toutes les classes sociales.

Morbidité Il existe de grandes variations régionales de la morbidité due à la maladie de Chagas. Les formes cardiaques et digestives sévères peuvent représenter de 10 à 50 % des cas [18]. Il est possible que la sous-estimation du nombre de cas soit en partie responsable

des écarts. L'isolement des populations dans certaines régions est sans doute un biais dans l'évaluation exacte du nombre de cas.

Les migrations de populations latino-américaines vers d'autres continents font que la maladie de Chagas est actuellement rencontrée partout dans le monde, en particulier aux États-Unis d'Amérique, au Canada, au Japon, en Australie, en Europe surtout en Espagne et en France, et dans certains pays du Pacifique occidental. La maladie de Chagas fait partie des maladies tropicales négligées.

1.1.1 Transmission

Elle est causée par un petit parasite de la famille des trypanosomes (*Trypanosoma cruzi*) (**figure 1.1**) qui est un protozoaire flagellé, transmis par des insectes vecteurs, les **triatomes** ou réduves (**figure 1.2**).

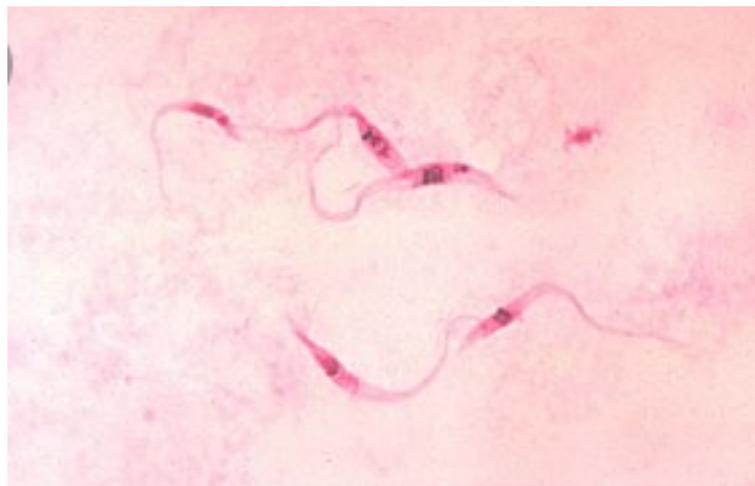


FIGURE 1.1 – *Trypanosoma cruzi*

Les réduves sont des insectes piqueurs-suceurs hématophages qui entretiennent depuis des millénaires un cycle sauvage du parasite [12]. Ces triatomines (sorte de punaises) vivent généralement dans les fentes des murs des habitations précaires en milieu rural ou suburbain (**figure 1.3**). Ils se cachent généralement pendant la journée et sortent la nuit pour se nourrir de sang de mammifères, y compris de sang humain (**figure 1.4**). Chez ce dernier, il pique généralement une zone de peau exposée comme le visage, et défèque ou urine à proximité de la piqûre. Les parasites pénètrent dans l'organisme lorsque la personne se frotte ou se gratte



FIGURE 1.2 – Triatome

instinctivement et fait pénétrer les déjections dans la lésion, les yeux, la bouche, ou toute autre altération de la peau.



FIGURE 1.3 –

Le parasite *T. cruzi* est transmis par [62] :



FIGURE 1.4 –

- la consommation d'aliments contaminés par *T. cruzi*, par exemple par contact avec des déjections ou des urines de triatomés ou de marsupiaux contaminés ;
- par transfusion de sang de donneurs infectés ;
- par passage d'une mère infectée à son enfant pendant la grossesse ou l'accouchement ;
- par transplantation d'organes de donneurs infectés ;
- lors d'accidents de laboratoire.

1.1.2 L'estimation de l'OMS

En 2020 l'estimation de l'Organisation mondiale de la santé (OMS) est de 6 à 7 millions de personnes infectées par *Trypanosoma cruzi* dans les zones endémiques de 21 pays d'Amérique Latine.

En Amérique Latine un quart de la population est menacée par cette maladie. La prévalence de la maladie est de 40% pour le Brésil qui est le plus grand pays d'endémie pour cette infection parasitaire. Depuis plus d'une décennie la maladie est détectée chez des personnes vivants dans des zones non endémiques telles que les États-Unis (plus de 300000 cas, provenant principalement du Mexique), l'Australie, le Japon et dans presque tous les pays d'Europe occidentale. L'Espagne estime avoir près de 50000 cas sur son territoire, principalement migrants de l'Équateur,

de l'Argentine, du Pérou et de la Bolivie. Depuis 1990, les initiatives régionales ont contribué de manière significative à contrôler l'infection vectorielle sur le continent Américain, mais 50000 nouveaux cas sont encore décelés annuellement. Un contrôle renforcé des dons de tissus et de cellules est imposé [51].

Il existe de grandes variations régionales de la morbidité due à la maladie de Chagas. Les formes cardiaques et digestives sévères peuvent représenter de 10 à 50% des cas [18]. Il est possible que la sous-estimation du nombre de cas soit en partie responsable des écarts. L'isolement des populations dans certaines régions est sans doute un biais dans l'évaluation exacte du nombre de cas.

Selon l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), d'un point de vue mondial, la maladie de Chagas est la troisième maladie tropicale humaine par son importance, après le paludisme et les schistosomoses. Le produit national brut moyen par habitant et par an de l'Amérique Latine est estimé à \$2.966 US. Les pertes économiques causées par la maladie de Chagas pour le continent s'élevaient en 1997 à \$8.156 millions US, soit l'équivalent de 2,5% du montant de la dette extérieure de l'ensemble du continent en 1995. Ces pertes sont dues à la mortalité précoce et aux infirmités provoquées par cette maladie chez les jeunes adultes qui normalement constituent le groupe économique le plus productif de la population [45]. La trypanosomiase américaine est une menace permanente pour presque 25% de la population de l'Amérique Latine. Dans les années 1990, l'OMS a estimé qu'il y avait 16 à 18 millions d'humains infectés et 100 millions à risque dans le monde, surtout dans les régions où la construction des habitations favorise la colonisation par les vecteurs [62]. Cependant, ce nombre a diminué à 12 millions grâce aux moyens intensifs de lutte [55] [48], il y'a jusqu'à 50.000 morts par an. L'infection existe dans toute l'Amérique Latine mais les symptômes et les caractéristiques épidémiologiques sont variables d'un foyer d'endémie à l'autre. Il y a une grande variabilité de la prévalence, des modes de transmission, caractéristiques parasitologiques, lésions anatomopathologiques, vecteurs, et des espèces d'hôtes. Plus que toutes les autres maladies parasitaires humaines, la maladie de Chagas est liée aux conditions socio-économiques précaires. Ceci implique que cette maladie existera tant qu'existeront les habitations favorables à la pullulation des vecteurs, la migration

humaine, et une urbanisation incontrôlée en Amérique Latine [62].

1.1.3 Signes et symptômes

La durée d'incubation varie de 1 à 6 semaines, plus courte si la porte d'entrée est une piqûre de triatome (1 à 3 semaines), que si elle est transfusionnelle (3 à 6 semaines) [16].

L'évolution de la maladie s'effectue classiquement en trois phases, aiguë, chronique silencieuse (ou phase de latence) et chronique symptomatique.

a. La phase aiguë

La phase aiguë associe des signes locaux, généraux, cutanés et viscéraux. Les signes locaux sont absents si la contamination est transfusionnelle. De nombreux cas aigus graves ont été rapportés en Amazonie, le plus souvent en relation avec une contamination orale. Si la porte d'entrée est conjonctivale, la maladie débute par un syndrome ophtalmo-ganglionnaire appelé signe de Romana (figure 1.5) visible 1 à 2 mois et se caractérisant par un œdème bi-palpébral unilatéral, une conjonctivite et des adénites pré-auriculaire, parotidienne ou sous-maxillaire. Si la porte d'entrée est cutanée, le premier signe qui apparaît au point de piqûre du triatome est une papule érythémateuse de plusieurs centimètres (figure 1.6)[4].

Les signes généraux sont principalement marqués par la fièvre. Elle est irrégulière, proportionnelle à la parasitémie, elle oscille entre 38°C et 39,5°C avec quelques pics fébriles supérieurs à 40°C. Les autres signes sont la pâleur, les myalgies et un œdème généralisé [20][29].

Les signes neurologiques et neuropsychiatriques fréquemment associés chez l'adulte sont les céphalées, la psychasthénie, l'anorexie, l'anxiété, l'irritabilité, la somnolence ou l'insomnie. La méningo-encéphalite ou l'encéphalomyélite chagasique, plus fréquente chez les enfants en bas âge, s'accompagne de crises convulsives avec raideur de nuque et perte de connaissance pouvant aller jusqu'au coma [13],[20],[29]. Les signes digestifs, plus fréquents chez les enfants associent vomissements, ballonnement abdominal, diarrhée avec déshydratation aiguë possible chez le nourrisson [29]. L'évolution létale lors de cette phase est observée dans 5% des cas.



FIGURE 1.5 – Signe de Romania

b. La phase chronique silencieuse

Présence de 50 à 60% des cas. La phase aiguë peut passer inaperçue et la maladie peut être révélée de manière fortuite lors d'un dépistage systématique par la positivité des réactions immunologiques. A ce stade, les patients ignorent l'infection et ne présentent aucun symptôme. La recherche d'anticorps anti-*Trypanosoma cruzi* effectuée par exemple au cours de l'examen sanguin d'un donneur potentiel (sang ou organes) habitant ou revenant de zone à risque peut révéler l'infection. La forme silencieuse ou indéterminée est asymptomatique pour les examens de base, cliniques, électrocardiographiques et radiologiques du cœur, de l'œsophage et du gros intestin. Il s'agit de la forme clinique la plus commune de la maladie dont le pronostic est en général excellent pour les dix années qui suivent le diagnostic. Toutefois 20 à 50% de ces patients peuvent présenter des anomalies organiques à ce stade lors d'examens complémentaires plus poussés. Ils peuvent mener une vie normale sans restriction mais un suivi médical à ce stade doit être annuel car ils peuvent évoluer vers la forme symptomatique ou la mort subite [12]. Le risque de transmission transfusionnelle du parasite est permanent quelque soit la phase clinique. Certains patients restent asymptomatiques toute leur vie [16].



FIGURE 1.6 – Lésions de la peau

c. La phase chronique symptomatique

De nombreux cas de trypanosomiase américaine sont uniquement diagnostiqués lors de la phase chronique symptomatique, 10 à 30 ans après une primo-infection passée inaperçue. La population de malades chagasiques chroniques est estimée entre 20 et 35% de la population totale de patients infectés par *T. cruzi* dans une région donnée. Le pourcentage varie en fonction de la zone géographique [47].

La cardiopathie chronique chagastique En Amérique Latine, la cardiopathie chronique chagastique est la plus fréquente des cardiopathies. C'est la première cause de mortalité cardio-vasculaire entre 30 et 50 ans. Elle est plus précoce et sévère chez le sexe masculin. Les manifestations cliniques sont en général progressives. Elles associent des troubles du rythme, une insuffisance cardiaque et des accidents thromboemboliques [12].

L'oesophagopathie chagastique Elle se rencontre plus fréquemment dans le cône sud de l'Amérique Latine. C'est la manifestation chronique la plus précoce de la maladie de Chagas. Elle survient au cours de la deuxième décennie de la vie et quelquefois même chez des enfants et aussi mais rarement dans la forme aiguë. 20 à 50% des patients porteurs d'une oesophagopathie sont porteurs d'une cardiopathie chronique chagastique.

La colopathie chagastique C'est la plus tardive des manifestations chroniques de la maladie de Chagas. Elle se déclare en général après la quarantaine. Plus fréquente au Brésil, le symptôme principal est la constipation. Les signes cliniques associés sont : les douleurs et la distension abdominale asymétriques, le météorisme, l'alternance avec la diarrhée au début de l'évolution, la rétention de selles jusqu'à 2 à 3 mois [16].

Autres formes

- Trypanosomiase américaine congénitale :
 - * Forme asymptomatique : 60 à 90% des cas,

- * Forme symptomatique : avortements, morts nés, prématurés, syndrome fébrile prolongé, œdème, exanthème, anémie, ictère, hépatosplénomégalie, mégaoesophage, myocardite, hypotonie axiale, calcifications cérébrales et méningo-encéphalites.
- Au niveau urinaire : mégavessie, mégauretère
Réactivation de la maladie de Chagas chez l'immunodéprimé,
- Forme neurologique : 5% des immunodéprimés chagasiques la développent. Elle se manifeste par une encéphalopathie chronique et des abcès cérébraux [18].

1.1.4 Diagnostique biologique

Le diagnostic biologique est parasitologique ou sérologique varie en fonction du stade de la maladie.

Diagnostic parasitologique en phase aiguë ou d'infection congénitale Mise en évidence des formes trypanomastigotes dans le sang périphérique (à l'état frais ou après concentration) par microscopie optique (avec ou sans coloration). Si les résultats sont négatifs, ils doivent être répétés tant que la suspicion clinique persiste. En cas de maladie de Chagas congénitale, le prélèvement est fait sur le sang du cordon ou sur le sang périphérique, pour la mise en évidence des parasites par centrifugation. Toutefois, cette technique est peu sensible et détecte moins de 50 % des nouveau-nés infectés.

En complément, s'il existe une forte suspicion clinique et épidémiologique, la PCR *T. cruzi* est d'une grande sensibilité en cas d'infection aiguë et en cas de maladie de Chagas congénitale. La PCR montre une sensibilité élevée dans le diagnostic des infections néo-natales, permettant un diagnostic précoce [16].

Diagnostic sérologique en phase aiguë Il y'a peu de kits commercialisés et validés pour détecter les IgM en phase aiguë. Des tests d'IFI/IgM ou d'ELISA/IgM sont pratiqués dans quelques laboratoires de référence dans le monde, notamment au Brésil [16].

Diagnostic parasitologique en phase chronique La PCR spécifique de *T. cruzi* dans le sang peut permettre de confirmer un diagnostic en cas de tests sérologiques non concluants. Mais une PCR négative n'exclut pas un diagnostic à ce stade[16].

Diagnostic sérologique en phase chronique Le diagnostic en phase chronique est essentiellement sérologique par la mise en évidence des anticorps IgG anti-*T. cruzi* au-delà de 8 à 12 semaines après l'infection. Les techniques de nouvelle génération ont considérablement amélioré la précision du diagnostic de la maladie de Chagas en utilisant un large mélange d'antigènes recombinants avec différents systèmes de détection [2], [51].

1.1.5 Traitement

Pour éliminer le parasite, la maladie peut être traitée au moyen de benznidazole ou de nifurtimox. Les 2 médicaments sont efficaces à près de 100% et permettent de guérir la maladie s'ils sont administrés suffisamment tôt après l'infection, dès le début de la phase aiguë. Leur efficacité diminue toutefois avec l'ancienneté de l'infection.

Le traitement est également indiqué pour les personnes chez qui l'infection a été réactivée (par exemple en raison d'une immunodépression) pour les patients au cours de la phase chronique précoce. Les adultes infectés, notamment ceux qui ne présentent aucun symptôme, devraient se voir proposer un traitement, car le traitement antiparasitaire peut éviter ou freiner l'évolution de la maladie et prévenir la transmission congénitale chez la femme enceinte. Les avantages potentiels du traitement médicamenteux pour prévenir ou retarder le développement de la maladie de Chagas devraient être pesés en tenant compte de la durée prolongée du traitement (jusqu'à 2 mois) et des réactions indésirables possibles (qui surviennent dans un pourcentage de patients pouvant aller jusqu'à 40%) [62].

Le benznidazole et le nifurtimox ne devraient pas être administrés aux femmes enceintes ni aux personnes souffrant d'insuffisance rénale ou hépatique. Le nifurtimox est également contre-indiqué pour les personnes présentant des antécédents de troubles neurologiques ou psychiatriques. De plus, un traitement spécifique des manifestations cardiaques ou digestives peut s'avérer nécessaire.

1.1.6 Lutte et prévention

Il n'existe pas de vaccin contre la maladie de Chagas. La lutte antivectorielle est la méthode la plus efficace pour prévenir la maladie de Chagas en Amérique latine. Un dépistage sanguin est nécessaire pour prévenir l'infection consécutive à une transfusion ou à une transplantation d'organe. À l'origine (>9000 ans), *T. cruzi* ne touchait que les animaux sauvages. Il s'est ensuite propagé aux animaux domestiques et aux personnes. En raison de la taille du réservoir du parasite chez la faune sauvage dans les Amériques, il ne peut être éradiqué. Par contre, les objectifs de la lutte sont d'éliminer la transmission et de donner accès aux soins de santé aux personnes infectées et malades.

T. cruzi peut infecter plusieurs espèces de triatomes, dont la vaste majorité sont présentes dans les Amériques. Selon la zone géographique, l'OMS recommande les méthodes suivantes de prévention et de lutte [62] :

- pulvérisation d'insecticides à effet rémanent dans les maisons et les zones environnantes ;
- améliorations apportées aux habitations et propreté des logements pour prévenir l'infestation par des vecteurs ;
- mesures de prévention personnelle telles que les moustiquaires ;
- bonnes pratiques d'hygiène lors de la préparation des aliments ou de leur transport, leur stockage et leur consommation ;
- dépistage des donneurs de sang ;
- dépistage des donneurs et des receveurs d'organes, de tissus ou de cellules ;
- accès au diagnostic et au traitement pour les personnes chez qui il est recommandé de suivre un traitement médical anti-parasitaire, en particulier les enfants et les femmes en âge de procréer avant qu'elles ne soient enceintes ;
- dépistage de la maladie chez les nouveau-nés et les autres enfants dont la mère est infectée et n'a jamais reçu de traitement anti-parasitaire, afin de poser un diagnostic et d'instaurer un traitement précocement.

1.1.7 La réponse de l’OMS

Depuis les années 1990, d’importants succès ont été remportés dans la lutte antivectorielle et antiparasitaire en Amérique latine, dans les territoires des pays du Cône Sud, en Amérique centrale, dans le cadre des initiatives du Pacte andin et de l’initiative intergouvernementale amazonienne, avec le Secrétariat technique de l’Organisation panaméricaine de la Santé (OPS). Ces initiatives multinationales ont permis de faire baisser considérablement la transmission et d’élargir l’accès au diagnostic et au traitement anti-parasitaire.

En outre, le risque de transmission par transfusion sanguine a été extrêmement réduit grâce au dépistage universel dans toutes les banques de sang des pays d’Amérique latine, ainsi que des pays d’Europe et du Pacifique occidental où la maladie est présente. Ces progrès ont été possibles en raison de l’engagement ferme des États membres touchés par la maladie, de la force de leurs organismes de recherche et de contrôle, et avec le soutien de nombreux partenaires internationaux [62].

Il reste cependant une série de problèmes à résoudre, à savoir :

- la pérennisation, le maintien et la consolidation des progrès en matière de lutte ;
- l’émergence de la maladie de Chagas dans des régions précédemment considérées comme indemnes – comme le bassin amazonien ;
- la persistance de la maladie dans des régions où la lutte avait progressé – telles que dans la région de Chaco en Argentine et en Bolivie ;
- la dissémination, principalement due à une mobilité accrue de la population entre l’Amérique latine et le reste du monde ;
- l’extension de l’accès au diagnostic et au traitement à des millions de personnes infectées.

Pour parvenir à éliminer la transmission de la maladie de Chagas et apporter aux personnes infectées ou malades les soins de santé dont elles ont besoin, tant dans les pays d’endémie que dans les autres, l’OMS développe des réseaux au niveau mondial et renforce les capacités régionales et nationales, en se concentrant sur les points suivants :

- le renforcement des systèmes d’information et de surveillance épidémiologique mondiale ;

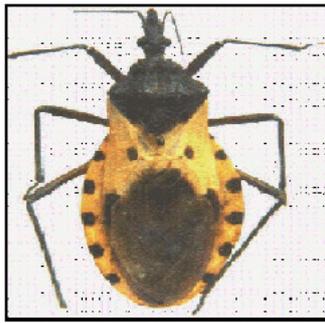
- la prévention de la transmission par transfusion sanguine et la transplantation d'organes dans les pays d'endémie et de non endémie ;
- la promotion de la recherche de tests de diagnostic mieux adaptés pour le dépistage et le diagnostic de l'infection ;
- l'élargissement de la prévention primaire de la transmission congénitale et prise en charge des cas d'infections congénitales et non congénitales ;
- la promotion d'un consensus actualisé sur la prise en charge adéquate des cas.

1.1.8 Les triatomines vecteurs de la maladie de Chagas

Les insectes vecteurs de *T. cruzi* appartiennent à la sous famille des Triatomines au sein de la famille des Reduviidae (Hemiptera) défini par son hémaphagie et les adaptations morphologiques nécessaires à la recherche d'hôtes et à la nutrition [57].

Le cycle de vie des triatomines se compose de sept stades, oeuf, cinq stades larvaires et le stade adulte voir (**figure 1.8**). Pour passer d'un stade au stade suivant puis au stade adulte, il faut au moins un repas sanguin. Tous les stades et les adultes des deux sexes se nourrissent sur des hôtes vertébrés (rats, souris, chauves-souris et opossums). La durée du cycle peut varier de quelques mois (*R. prolixus*, *T. infestans*(**figure 1.7**)) à plus d'une année (*T. dimidiata*) en fonction de la fréquence et de l'opportunité des repas sanguins, de la densité de population [56] mais aussi des conditions de température et d'humidité du milieu [41]. Les triatomines sont actives particulièrement la nuit. Le premier pic d'activité nocturne (à la tombée de la nuit) sert à trouver un hôte vertébré, le deuxième (à l'aube), à trouver un abri (terriers, crevasses, nids d'animaux), généralement d'un hôte, pour y s'agréger pendant la journée. La reproduction, l'oviposition (la ponte des oeufs chez les insectes) et la dispersion ont aussi lieu durant ces phases nocturnes.

La dispersion des triatomines peut être passive ou active. La dispersion passive peut être facilitée par les hôtes vertébrés à petite échelle [57] ou par les mouvements de populations humaines (valises, meubles, etc.) à plus grande échelle. Comme seuls les adultes possèdent des ailes, le déplacement actif des nymphes se fait à pied et le déplacement des adultes se fait



T. dimidiata



T. infestans



Rhodnius prolixus

FIGURE 1.7 – Les trois types des Triatomines

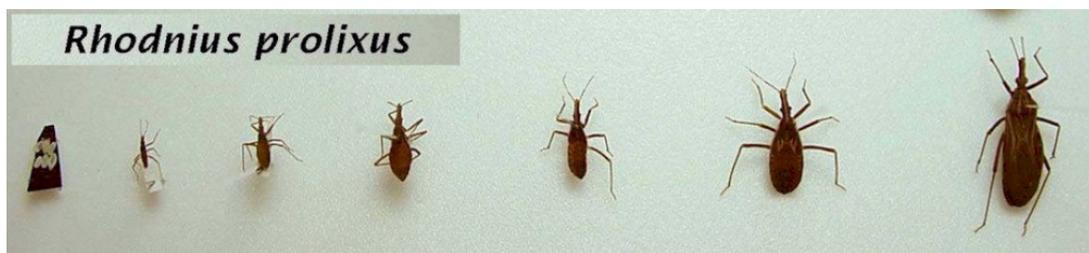


FIGURE 1.8 – Rhodnius prolixus : oeufs, cinq stades nymphaux et adulte

particulièrement par le vol [61]. Bien que la marche soit un moyen fréquemment utilisé [3], la colonisation active d'un nouvel habitat se fait principalement par le vol [46].

En raison du manque de vaccin, la principale stratégie préconisée par ceux qui contrôlent la propagation de la maladie est la lutte antivectérielle basée sur la pulvérisation massive d'insecticides dans les zones domestiques et péri-domestiques. Parallèlement, les programmes de prévention suivent un dépistage sanguin systématique [38]. Malgré les coûteux programmes internationaux de lutte lancés dans les années 90, les objectifs ont été partiellement atteints car la maladie n'a pas été éliminée ni sa transmission interrompue [1]. Au contraire, la lutte contre la maladie pose un nouveau défi : sa ré-émergence dans les zones supposées être traitées, soutenue par la transmission du parasite via des espèces non domiciliées comme T dimidiata [44].

1.2 État de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie

Le problème considéré est l'étude du processus de ré-infestation des villages par les espèces de triatomines venant des forêts avoisinantes, bien qu'une lutte insecticide y soit menée. Certaines espèces, comme *Triatoma dimidiata*, s'adaptent, en effet, aussi bien à une vie sylvatique (pleine forêt) qu'à une vie domestique (à l'intérieur du village) ou péri-domestique[50].

Les différents processus impliqués dans la transmission de *T. cruzi* par des bogues non domiciliés sont très complexes et leur compréhension passe par la connaissance de l'écologie vectorielle. En particulier, la démographie et la dispersion spatiale sont des processus importants lors de la ré-infestation d'une zone domestique. Dans la plupart des cas, ils ne sont pas capturés au moyen d'études en laboratoire.

La modélisation mathématique est un bon outil pour mieux comprendre ces processus[49]. Ces approches ont utilisé, par exemple :

1. **Des équations différentielles ordinaires** [35] : Des recherches récentes sur la transmission du parasite protozoaire *T. cruzi*, dont certaines souches provoquent la maladie de Chagas, suggèrent que la consommation de vecteurs par des hôtes sylvatiques tels que les rats laveurs peut jouer un rôle dans le maintien du cycle de transmission à l'état sauvage. Comme les auteurs ont observé que les hôtes et les vecteurs envahissaient de nouvelles niches écologiques, il est important de considérer l'effet que la consommation de vecteurs peut avoir sur la densité des vecteurs. Pour cette raison, ils utilisent une vitesse de contact par individu qui augmente à peu près linéairement pour de faibles densités vectorielles et sature pour des densités élevées. Le modèle à l'étude superpose ainsi une structure prédateur-proie à un cycle d'infection hôte-vecteur (avec d'abord un hôte, puis plusieurs hôtes). Le comportement en cas d'épidémie suit le comportement de seuil classique via le nombre de reproduction R_0 , ce qui permet d'évaluer l'importance de cette voie de transmission par rapport à la voie traditionnelle. Pour une saturation de la vitesse de contact suffisamment nette, deux densités vectorielles localement stables

1.2. État de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie

peuvent exister.

2. **Des équations aux dérivées partielles** [54] :Le but est de comprendre la propagation spatiale de la maladie de Chagas, qui est principalement transmise par les triatomines. Les auteurs proposent un modèle mathématique utilisant un système d'équations de réaction-diffusion différentielles partielles pour étudier et décrire la propagation de cette maladie dans la population humaine. Ils considèrent les sous-classes respectives d'individus infectés et non infectés au sein des populations humaines et triatomes. La dynamique de la sous-population humaine infectée considère deux phases de la maladie : aiguë et chronique. La population humaine est considérée comme étant répartie de manière homogène dans un espace pour décrire la propagation locale de la maladie de Chagas par les Triatomines pendant une courte période épidémique. Ils déterminent le nombre de reproduction de base qui nous permet d'évaluer les mesures de contrôle de la maladie de Chagas, et ils déterminent la vitesse de propagation de la maladie en utilisant des solutions d'ondes progressives pour leur modèle.
3. **Des équations aux différences intégrales** [44] :Les processus démographiques et la dispersion spatiale de *Triatoma dimidiata*, un vecteur d'espèce triatomique de la maladie de Chagas, sont modélisés par des équations d'intégré-différence pour estimer la capacité d'invasion de cette espèce dans différentes conditions écologiques. L'application de la théorie des polynômes orthogonaux et de la méthode de descente la plus raide appliquée à ces équations, permet une bonne approximation de l'abondance de la population femelle adulte et de la vitesse d'invasion. Ils montrent que :
 - Dans les mêmes conditions moyennes de démographie et de dispersion, la dispersion spatiale périodique se traduit par une vitesse d'invasion 2,5 fois supérieure à la vitesse d'invasion lorsque la dispersion spatiale est continue ;
 - lorsque la vitesse d'invasion de la dispersion spatiale périodique est corrélée à des conditions démographiques défavorables, elle est 34,7% plus élevée par rapport à une dispersion périodique qui est corrélée à de bonnes conditions démographiques. De leurs résultats, ils concluent, en termes de contrôle de la population triatomique,

1.2. État de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie

que le succès invasif de *T. dimidiata* peut être le plus sensible à la probabilité de transition du stade juvénile au stade adulte.

4. D'autres études basées sur le calcul scientifique ont également été utilisées comme **les automates cellulaires**[58, 17] :

- Dans [58] : La maladie de Chagas est un problème de santé majeur en Amérique du Sud et centrale. En l'absence de vaccins et de traitements, la seule stratégie pour arrêter l'épidémie est de contrôler la dynamique des populations d'insectes vecteurs transmettant des parasites à l'homme. Du point de vue de la théorie des systèmes et du point de vue épidémiologique, une modélisation appropriée est le premier besoin pour développer une stratégie de contrôle efficace. Le but des auteurs de l'article est de développer une description spatio-temporelle de la dynamique des populations vectorielles à l'échelle d'un village. L'approche proposée est basée sur des automates cellulaires, ce qui constitue un cadre approprié pour étudier les phénomènes de propagation spatiale. Ils ont établi le concept de dissémination périodique dans des systèmes spatialement distribués et l'utiliser pour étudier les variations temporelles du risque de transmission de la maladie de Chagas dans un village de la péninsule du Yucatan, au Mexique. Cette nouvelle approche de modélisation épidémiologique fournit un outil souhaitable pour évaluer et améliorer l'efficacité des stratégies actuelles de pulvérisation d'insecticides ainsi que pour concevoir des stratégies de lutte alternatives.
- Dans [17] : Les auteurs ont développé un modèle d'automate cellulaire (CA) afin d'étudier l'invasion d'une souche hypothétique de *T. cruzi* à travers la région définie par les cycles sylvatiques primaires dans le nord du Mexique et dans certaines parties du sud-est des États-Unis. Le modèle donné est un CA déterministe, qui peut être décrit comme un grand modèle de métapopulation au format d'un système dynamique avec 9 376 équations. Les taux de migration dans le modèle, utilisés comme paramètres de couplage entre les cellules de l'AC, sont estimés en additionnant la proportion de vecteurs traversant les limites des patches (c'est-à-dire passant d'une

1.2. État de l'art sur la modélisation de l'expansion géographique de la maladie

cellule à une autre). Plus précisément, ils développent des méthodes pour estimer la vitesse et la direction de l'invasion en fonction des taux de migration des vecteurs, y compris la préférence pour une direction particulière de la migration. Ils développent deux méthodes pour estimer la vitesse d'invasion : via des composantes de vitesse locale orthogonales et par le calcul direct de la magnitude et de la direction d'un vecteur de vitesse global étant donné un front créé par des cellules identifiées comme envahies par l'épidémie. Les résultats indiquent que la vitesse d'invasion est grandement affectée par les paysages physiques et épidémiologiques à travers lesquels la vague d'infection passe. Un ajustement de la loi de puissance suggère que la vitesse d'invasion augmente légèrement moins que la racine carrée des augmentations du taux de migration.

5. Modèle à base d'agents [21, 27] :

- Dans [21] : Un modèle original basé sur un agent (ABM) a été conçu pour prédire la prévalence (c'est-à-dire la proportion d'individus infectés dans la population totale à un moment donné) de *T. cruzi* I et II au cours d'infections uniques et mixtes. L'ABM a été calibré à partir de données expérimentales extraites de la littérature. Il a été montré que l'inclusion d'hôtes réservoirs comme type supplémentaire d'agent dans le modèle était nécessaire pour obtenir des résultats de simulation réalistes de la prévalence des deux souches.
- Dans [27] : Les auteurs ont développé un modèle basé sur les agents (ABM) pour simuler la transmission sylvatique du parasite *T. cruzi*. Cet ABM incorpore des interactions hôte-vecteur, des processus démographiques pour les hôtes et les vecteurs, ainsi que des dispersions de vecteurs et d'hôtes. Ils ont implémenté l'ABM sous des valeurs de paramètres correspondant aux conditions réelles de la nature. Les simulations ABM donnent des résultats quantitatifs prédisant la prévalence du parasite *T. cruzi* chez les hôtes et les vecteurs, l'abondance des populations hôtes et vecteurs, et des estimations numériques de la probabilité de persistance de la population de *T. cruzi*, en fonction des différentes distributions spatiales initiales de infection. En

outre, cette étude met en évidence le rôle de la population hôte en tant que facteur déterminant de la transmission de l'infection et de la persistance des parasites, et présente des images montrant l'émergence de grappes d'infection.

1.3 Position de notre étude

Dans cette thèse, nous considérons l'infestation d'un village par les espèces domestiques *T. Dimidiata*. Le village jouxte une forêt représentant l'habitat des vecteurs. Ces derniers se déplacent au village pour se nourrir [52]. La nourriture consiste en un repas de sang sur les humains ou les mammifères qu'ils élèvent. La transmission de *T. Cruzi* du vecteur à l'hôte a lieu principalement au cours de cette phase. Après le "*kissing bug*", les individus se déplacent à nouveau pour chercher un habitat au village ou retournent dans la forêt pour déclencher leur fécondité.

Sur la population *Triatomine* structurée, la démographie et les processus de dispersion spatiale sont capturés par les équations de réaction-diffusion dans un espace à deux dimensions.

Dans des espaces fonctionnels adéquats, le système d'équations aux dérivées partielles (ou bien les équations de réaction-diffusion) est transformé en une équation différentielle abstraite.

Notre objectif est de montrer que l'opérateur génère un semi-groupe analytique. Nous prouvons alors l'existence et l'unicité d'une solution locale au problème de Cauchy correspondant.

Chapitre 2

Construction du modèle et position du problème

Dans cette étude, nous considérons l'infestation d'un village par l'espèce domestique *T. Dimidiata*. Le village jouxte une forêt représentant l'habitat des vecteurs. Ces derniers déménagent au village pour se nourrir [52]. La nourriture consiste en un repas de sang sur les humains ou les mammifères qu'ils élèvent. La transmission de *T. Cruzi* du vecteur à l'hôte se déroule principalement pendant cette phase. Après la piqûre de la punaise appelée "kissing bug", les individus se déplacent à nouveau pour chercher un habitat soit au village, soit retournent en forêt pour déclencher leur fécondité.

2.1 Présentation du modèle et sa transformation abstraite

2.1.1 Définition des habitats

Nous représentons le village infecté par le domaine rectangulaire $(-d, 0) \times (0, 1)$ noté Ω_- . Entre le village et la forêt existe, comme recommandé par Cantrell et al. [11], une zone tampon $(0, D) \times (0, 1)$ notée Ω_+ . La forêt couvre le demi-plan $x > D$ (figure 2.1).

Pour simplifier l'étude, nous supposons que les parties de la bordure de $\Omega_- \cup \Omega_+$ définies par $\Gamma_1 = [-d, D] \times \{1\}$, $\Gamma_2 = [-d, D] \times \{0\}$, $\Gamma_3 = \{-d\} \times [0, 1]$ sont des barrières naturelles délimitant des zones hostiles pour la population (montagnes par exemple).

La frontière commune $\Gamma = \partial\Omega_- \cap \partial\Omega_+$, appelée interface (**figure 2.1**), joue un rôle important dans la dynamique spatio-temporelle de la population. En effet, les triatomines de la zone tampon Ω_+ voisins $\partial\Omega_- \cap \partial\Omega_+$ sont attirés vers le village pour se nourrir ou trouver refuge. Leur mouvement définit alors un mouvement brownien biaisé [9].

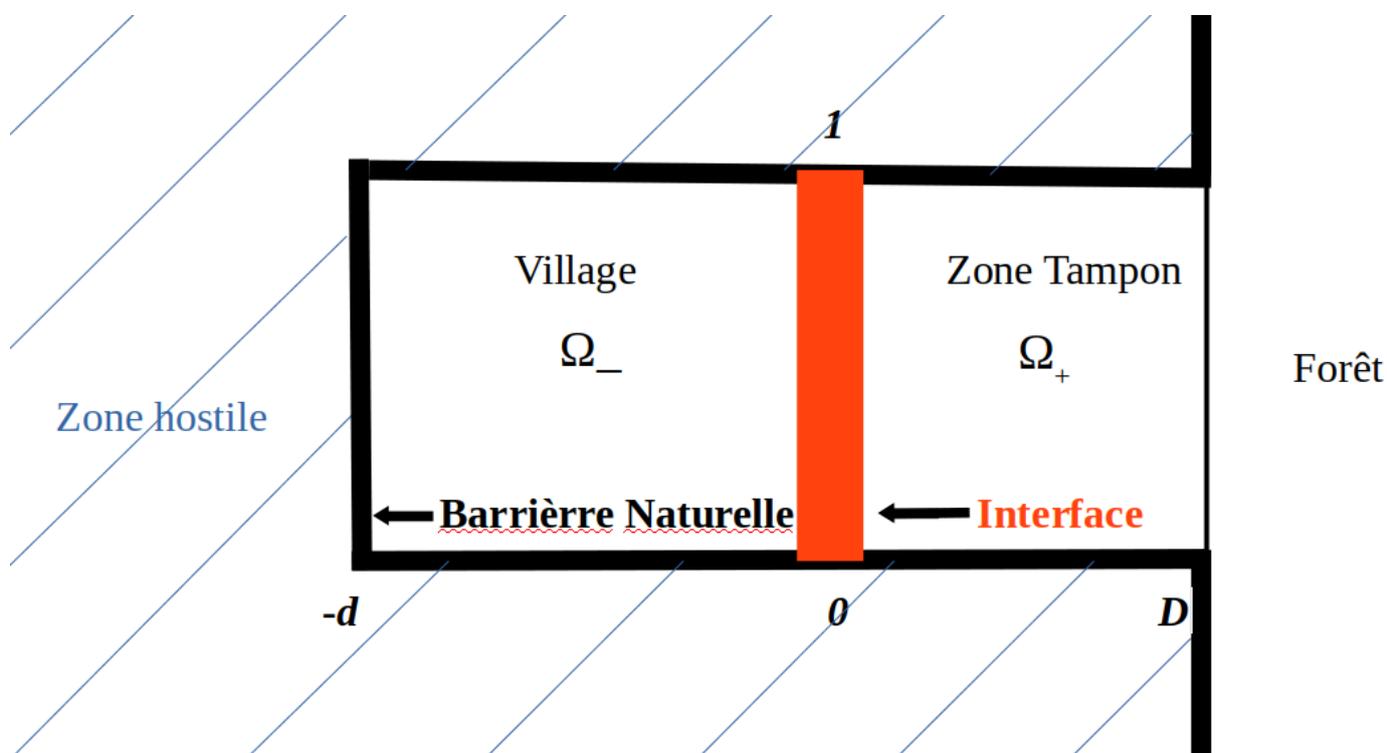


FIGURE 2.1 – Densité de population dans deux habitats.

2.1.2 Considérations biologiques

Bien que le cycle de vie des triatomines se compose de sept stades de développement : un stade œuf, cinq stades larvaires et un stade adulte, le développement de l'œuf au cinquième stade larvaire est considéré comme un stade unique qui sera appelé stade juvénile (**figure 2.2**).

Notons par $J(t, x, y)$ et $A(t, x, y)$ les densités respectives des classes de juvéniles et d'adultes

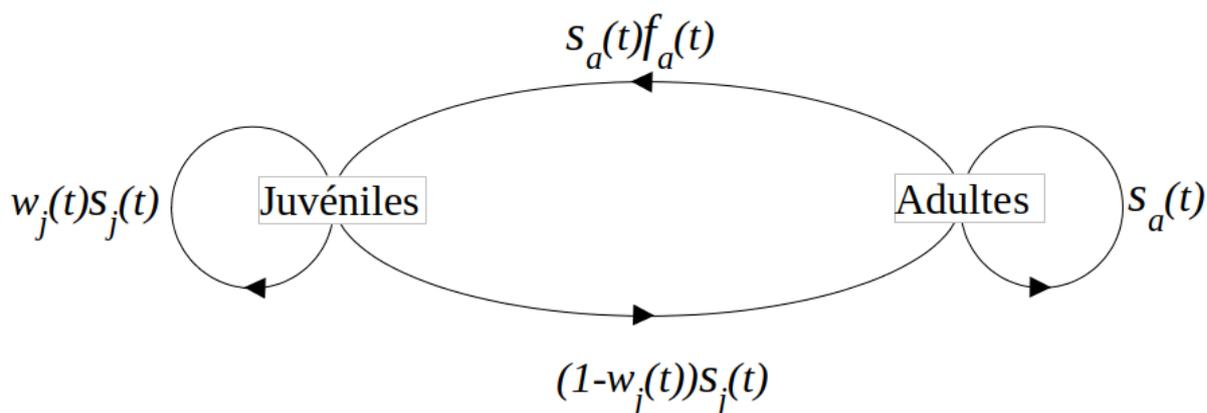


FIGURE 2.2 – Représentation schématique du cycle de vie des triatomines.

à l'instant $t > 0$ et au point (x, y) . Supposons un sex-ratio équilibré $\tau = 1 : 1$ (une femelle pour un mâle). Nous concentrons notre modélisation sur la densité d'insectes féminins dans le domaine $\Omega_- \cup \Omega_+$.

Nous supposons qu'à l'intérieur de ce domaine, les paramètres démographiques ne dépendent pas de la position spatiale. Pendant un pas de temps dt entre t et $t + dt$, les juvéniles ayant survécu jusqu'à t avec une probabilité $s_j(t)$ resteront juvéniles avec une probabilité $w_j(t)$ ou passeront au stade adulte avec une probabilité $(1 - w_j(t))$. Les adultes qui ont survécu avec une probabilité $s_a(t)$ pondront des œufs avec un taux $f_a(t)$. Le cycle de vie complet est montré dans (**figure 2.2**).

Sauf au voisinage de l'interface, la dispersion spatiale de la population biologique dans le domaine $\Omega_- \cup \Omega_+$ est modélisée par un processus de diffusion pour les juvéniles et les adultes avec des constantes respectives $d_j > 0$ et $d_a > 0$. Ces coefficients sont non négatifs car, quel que soit leur stade de développement, les insectes doivent se déplacer pour leur repas de sang [36].

Si au cours du processus démographique, nous avons supposé des paramètres démographiques identiques $\Omega_- \cup \Omega_+$, il est clair que les constantes de diffusion dépendent de la nature de chaque partie du domaine. On notera donc, d_{j+} et d_{a+} les constantes des coefficients de diffusion dans Ω_+ , d_{j-} et d_{a-} les constantes des coefficients de diffusion dans Ω_- .

Les paramètres démographiques et de diffusion de *T. Dimidiata* population sont résumés en

(table 2.1).

<i>Paramètres</i>	<i>Définition</i>	<i>Propriétés</i>
$s_j(t)$	Probabilité de survie des juvéniles par unité de temps	$0 \leq s_j(t) \leq 1$
$s_a(t)$	Probabilité de survie de l'adulte par unité de temps	$0 \leq s_a(t) \leq 1$
$w_j(t)$	Probabilité de transition du juvénile à l'adulte	$0 \leq w_j(t) \leq 1$
$f_a(t)$	Fécondité féminine par unité de temps	$f_a(t) \geq 0$
d_{j-}, d_{j+}	coefficient de diffusion des juvéniles	$d_{j-}, d_{j+} > 0$
d_{a-}, d_{a+}	coefficient de diffusion des adultes	$d_{a-}, d_{a+} > 0$

TABLE 2.1 – Les paramètres démographiques et de diffusion de la population *T. Dimidiata*

2.1.3 Système d'équations de réaction-diffusion

En désignant J_- et A_- (respectivement J_+ et A_+) les densités des Triatomines dans Ω_- , (respectivement dans Ω_+), le système biologique est modélisé par le système d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ , \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Omega_- \\ \\ \text{sur } \Omega_+ \end{array}$$

avec les conditions initiales :

$$(IC) \left\{ \begin{array}{l} J_-(0, x, y) = J_-^0(x, y) \\ A_-(0, x, y) = A_-^0(x, y) \\ J_+(0, x, y) = J_+^0(x, y) \\ A_+(0, x, y) = A_+^0(x, y) , \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Omega_- \\ \\ \text{sur } \Omega_+ \end{array}$$

et les conditions aux limites :

$$(EC_1) \left\{ \begin{array}{l} J_-(., x, 0) = J_-(., x, 1) = 0 \\ A_-(., x, 0) = A_-(., x, 1) = 0 \\ \\ J_+(., x, 0) = J_+(., x, 1) = 0 \\ A_+(., x, 0) = A_+(., x, 1) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in]-d, 0[\\ \\ \\ x \in]0, D[\end{array}$$

$$(EC_2) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} J_- \\ A_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \begin{pmatrix} J_+ \\ A_+ \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } \{-d\} \times]0, 1[\\ \\ \text{sur } \{D\} \times]0, 1[. \end{array}$$

Dans la dernière équation, $\partial/\partial\nu$ désigne la dérivée externe normale sur $\{D\} \times]0, 1[$. Dans notre géométrie, elle coïncide avec $\partial/\partial x$. Dans (EC_2) , la première condition signifie que la population meurt sur $\{-d\} \times]0, 1[$ (comme dans (EC_1)) et que son flux disparaît sur $\{D\} \times]0, 1[$. D'autres conditions aux limites peuvent être envisagées au lieu de celles (EC_2) .

A l'interface Γ , suivant Cantrell et Cosner [11], nous considérons également les conditions de mouvement brownien asymétrique et la continuité des densités.

$$(Int.C) \left\{ \begin{array}{l} pd_{j_-} \frac{\partial J_-}{\partial \nu} = (1-p)d_{j_+} \frac{\partial J_+}{\partial \nu} \\ pd_{a_-} \frac{\partial A_-}{\partial \nu} = (1-p)d_{a_+} \frac{\partial A_+}{\partial \nu} \\ \\ \begin{pmatrix} J_- \\ A_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_+ \\ A_+ \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma = \{0\} \times]0, 1[$$

où $p > 1/2$ est la probabilité de traverser l'interface à partir de Ω_+ à Ω_- .

Le système d'équations aux dérivées partielles à étudier est donc :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j_-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a_-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j_+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a_+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ \\ (I.C) \\ (Int.C) \\ (EC_1) \\ (EC_2) \end{array} \right.$$

2.1.4 Transformation du système précédent en une équation différentielle abstraite

L'objectif est d'écrire ce système sous une forme abstraite en suivant la méthode de Labbas et al. [37].

On pose :

$$\begin{aligned} p d_{j_-} &= \mu_-, & (1-p) d_{j_+} &= \mu_+, \\ p d_{a_-} &= \alpha_-, & (1-p) d_{a_+} &= \alpha_+, \end{aligned}$$

$$V(t, x, y) = \begin{pmatrix} J(t, x, y) \\ A(t, x, y) \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega = \Omega_- \cup \Omega_+, \quad t \geq 0,$$

$$V_- = V_{|\Omega_-} = \begin{pmatrix} J_- \\ A_- \end{pmatrix}, \quad V_+ = V_{|\Omega_+} = \begin{pmatrix} J_+ \\ A_+ \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- + \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} d_{j_-} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_-} \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_j(t) s_j(t) I & f_a(t) s_a(t) I \\ (1 - \omega_j(t)) s_j(t) I & s_a(t) I \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_+ + \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} d_{j_+} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_+} \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_j(t) s_j(t) I & f_a(t) s_a(t) I \\ (1 - \omega_j(t)) s_j(t) I & s_a(t) I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces deux matrices sont des matrices d'opérateurs.

L'opérateur suivant \mathcal{L} (qui agit par rapport aux variables spatiales (x, y)) est alors défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, \cdot, \cdot) &= \mathcal{L} \begin{pmatrix} J(t, \cdot, \cdot) \\ A(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} d_{j_-} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_-} \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_-(t, \cdot, \cdot) \\ A_-(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} & \text{sur } \Omega_-, \\ \begin{pmatrix} d_{j_+} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_+} \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_+(t, \cdot, \cdot) \\ A_+(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} & \text{sur } \Omega_+, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} d_{j_-} \Delta J_-(t, \cdot, \cdot) \\ d_{a_-} \Delta A_-(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} & \text{sur } \Omega_-, \\ \begin{pmatrix} d_{j_+} \Delta J_+(t, \cdot, \cdot) \\ d_{a_+} \Delta A_+(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} & \text{sur } \Omega_+, \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}) &= \left\{ W = (v, w) \in [L^q(\Omega)]^2 : W_- = W_{|\Omega_-} = (v_-, w_-) \in [W^{2,q}(\Omega_-)]^2 \right. \\ &\quad \left. W_+ = W_{|\Omega_+} = (v_+, w_+) \in [W^{2,q}(\Omega_+)]^2 \text{ et } W_-, W_+ \text{ verifiant } (Int.C), (EC_1), (EC_2) \right\}, \end{aligned}$$

où $q \in]1, +\infty[$.

La notation vectorielle opérationnelle classique suivante sera adoptée

$$V(t, x, y) := V(t)(x, y).$$

Le problème précédent s'écrit donc sous la forme d'un système abstrait réaction-diffusion :

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t) & t > 0 \\ V(0) = V^0 = \begin{pmatrix} J^0(0, \cdot, \cdot) \\ A^0(0, \cdot, \cdot) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.1)$$

posé dans l'espace de Banach $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$ qu'on norme par :

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = \max \left(\|v\|_{L^q(\Omega)}, \|w\|_{L^q(\Omega)} \right), \quad (2.2)$$

qui est équivalente à

$$\max \left(\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)} + \|w_-\|_{L^q(\Omega_-)}, \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)} + \|w_+\|_{L^q(\Omega_+)} \right).$$

2.2 Conclusion

Après avoir transformé notre modèle en une équation différentielle abstraite, nous analyserons le problème précédent dans sa formulation opérationnelle en montrant l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution. De plus nous donnerons la représentation explicite de la solution. Cela nécessitera l'utilisation de puissants outils d'analyse fonctionnelle (voir Chapitre suivant) tels que :

1. la théorie des semi-groupes,
2. celle des opérateurs linéaires fermés sectoriels,
3. les espaces d'interpolation réels,

4. les espaces de Banach UMD,
5. le calcul fonctionnel d'une manière générale.

Chapitre 3

Outils mathématiques

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [26], [40], [53], [28], [59], [43]).

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(H, \|\cdot\|_H)$ trois espaces de Banach.

3.1 Opérateurs linéaires

Définition 3.1.1.

1. **Un opérateur linéaire** de E dans F est une application linéaire Λ définie d'un sous-espace vectoriel $D(\Lambda) \subset E$ et à valeurs dans F , i.e. tel que $\forall x, y \in D(\Lambda)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a :

- $\Lambda(x + y) = \Lambda x + \Lambda y$,
- $\Lambda(\lambda x) = \lambda \Lambda x$.

(On note $\Lambda(x) = \Lambda x \quad \forall x \in D(\Lambda)$).

Quand $E = F$, on dit que Λ est un opérateur linéaire sur E .

2. On appelle **image** de Λ le sous-espace vectoriel de F , noté $Im(\Lambda)$, défini par :

$$Im(\Lambda) := \{y \in F : \exists x \in D(\Lambda) / y = \Lambda x\} = \{\Lambda x : x \in D(\Lambda)\}.$$

3. $D(\Lambda)$ est appelé le **domaine** de Λ . On dit que Λ est à **domaine dense** (ou **densément défini**) si $\overline{D(\Lambda)} = E$, i.e. si pour tout x dans E , il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(\Lambda)$ telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

4. On appelle **noyau** de Λ le sous-espace de E , noté $Ker(\Lambda)$, défini par :

$$Ker(\Lambda) := \{x \in D(\Lambda) : \Lambda x = 0\}.$$

5. On appelle **graphe** de Λ le sous espace de $E \times F$, noté $G(\Lambda)$, défini par :

$$G(\Lambda) := \{(x, y) \in E \times F : x \in D(\Lambda), y = \Lambda x\}.$$

Définition 3.1.2. Soient $\Lambda_1 : D(\Lambda_1) \subset E \rightarrow F$ et $\Lambda_2 : D(\Lambda_2) \subset E \rightarrow H$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur $\Lambda_2 \Lambda_1$:

$$\begin{cases} D(\Lambda_2 \Lambda_1) &= \{x \in D(\Lambda_1) : \Lambda_1 x \in D(\Lambda_2)\} \\ (\Lambda_2 \Lambda_1)x &= \Lambda_2(\Lambda_1 x), \forall x \in D(\Lambda_2 \Lambda_1). \end{cases}$$

Si Λ est injectif, on définit l'opérateur linéaire Λ^{-1} par :

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} : Im(\Lambda) &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto \Lambda^{-1}y = x, \end{aligned}$$

où $x \in D(\Lambda)$ est défini par $\Lambda x = y$. Notons que $Im(\Lambda^{-1}) = D(\Lambda)$

3.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 3.1.3. Un opérateur linéaire Λ défini de E tout entier dans F est dit **borné** s'il est continu, i.e. si pour tout $x_0 \in E$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|x - x_0\|_E = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \|\Lambda x - \Lambda x_0\|_F = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|\Lambda x\|_F = 0.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F . On pose $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Proposition 3.1.4. *Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.1.5. *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors :*

1. $I - \Lambda$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$,
2. $(I - \Lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda^n$.

Proposition 3.1.6.

$$\Lambda \in \mathcal{L}(E, F) \iff \exists M > 0, \forall x \in E, \quad \|\Lambda x\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Alors, on définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ qu'on note $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ et elle est définie pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$ par :

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|\Lambda x\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\Lambda x\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\Lambda x\|_F.$$

3.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 3.1.7. Un opérateur linéaire de E dans F est **fermé** si son graphe est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$.

Notons qu'un opérateur linéaire borné est un opérateur linéaire fermé.

Proposition 3.1.8. *Un opérateur linéaire $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow F$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(\Lambda)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n & \longrightarrow x, & \text{dans } E \\ \Lambda x_n & \longrightarrow y, & \text{dans } F, \end{cases}$$

on a $x \in D(\Lambda)$ et $\Lambda x = y$.

Notation 3.1.9. Soit Λ un opérateur linéaire sur E . On écrira $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et on dira que Λ est inversible, pour signifier que :

1. Λ est bijectif,
2. Λ^{-1} est un opérateur linéaire borné sur E .

Proposition 3.1.10. *Soit Λ un opérateur linéaire sur E .*

1. *Si Λ est un opérateur fermé injectif, alors Λ^{-1} est fermé.*
2. *Λ est un opérateur fermé bijectif si et seulement si $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

Définition 3.1.11. Soit Λ un opérateur linéaire sur E . On définit l'ensemble résolvant qu'on note $\rho(\Lambda)$, de Λ par :

$$\rho(\Lambda) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \Lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \}.$$

Si $\lambda \in \rho(\Lambda)$, la **résolvante** $R(\lambda, \Lambda)$ de Λ au point λ est défini par :

$$R(\lambda, \Lambda) := (\lambda I - \Lambda)^{-1}.$$

On définit le **spectre** de Λ , qu'on note $\sigma(\Lambda)$, par :

$$\sigma(\Lambda) := \mathbb{C} \setminus \rho(\Lambda).$$

Remarque 3.1.12. D'après ce qui précède, on a :

1. Si $\rho(\Lambda)$ est différent d'un ensemble vide, alors Λ est un opérateur fermé.
2. $\sigma(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \Lambda) \text{ n'est pas bijectif ou } (\lambda I - \Lambda)^{-1} \notin \mathcal{L}(E)\}$.

Proposition 3.1.13. Soit Λ un opérateur linéaire fermé sur E .

Alors l'application

$$\begin{aligned} \rho(\Lambda) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \lambda &\longmapsto R(\lambda, \Lambda) \end{aligned}$$

est analytique sur $\rho(\Lambda)$.

Définition 3.1.14. Si Λ est un opérateur linéaire borné sur E , alors on définit le **rayon spectral** $r(\Lambda)$ de Λ de la manière suivante :

$$r(\Lambda) := \sup_{\lambda \in \sigma(\Lambda)} |\lambda|.$$

Si $\sigma(\Lambda)$ est égale à un ensemble vide, par convention, on pose $r(\Lambda) := 0$.

Remarque 3.1.15. Si Λ est borné, alors $\sigma(\Lambda) \subset \overline{B(0, r(\Lambda))}$.

Proposition 3.1.16. Soit Λ un opérateur linéaire fermé sur E . Si $0 \in \rho(\Lambda)$, alors on a $B(0, R) \subset \rho(\Lambda)$, où $1/R := r(\Lambda^{-1})$ est le rayon spectral de Λ^{-1} .

Proposition 3.1.17. Soit Λ un opérateur linéaire fermé sur E . $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\Lambda)$, l'égalité suivante est appelée **identité de la résolvante** :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1, \Lambda)R(\lambda_2, \Lambda) = R(\lambda_1, \Lambda) - R(\lambda_2, \Lambda).$$

Définition 3.1.18. Soient Λ_1 et Λ_2 deux opérateurs linéaires fermés sur E tels que $\rho(\Lambda_1) \neq \emptyset$ et $\rho(\Lambda_2) \neq \emptyset$. Alors on dit que Λ_1 et Λ_2 commutent au sens des résolvantes si et seulement si, pour tout $\lambda_1 \in \rho(\Lambda_1)$ et tout $\lambda_2 \in \rho(\Lambda_2)$

$$R(\lambda_1, \Lambda_1) R(\lambda_2, \Lambda_2) = R(\lambda_2, \Lambda_2) R(\lambda_1, \Lambda_1).$$

Proposition 3.1.19. Soient Λ_1 et Λ_2 deux opérateurs linéaires fermés sur E tels que

1. $D(\Lambda_1) = D(\Lambda_2)$,
2. $\rho(\Lambda_1) \neq \emptyset$ et $\rho(\Lambda_2) \neq \emptyset$.

Donc on a l'équivalence entre les deux propositions qui suivent

1. Λ_1 et Λ_2 commutent au sens des résolvantes.
2. $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$.

Proposition 3.1.20. On considère Λ_1 et Λ_2 deux opérateurs linéaires sur E . Alors :

1. Si Λ_2 est borné, donc Λ_2 est fermé.
2. Si Λ_1 est inversible et Λ_2 est fermé, donc $\Lambda_1\Lambda_2$ est fermé.
3. Si Λ est inversible, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Λ^n est fermé.
4. Si Λ_1 est fermé et Λ_2 est borné, donc $\Lambda_1 + \Lambda_2$ est fermé.
5. Si Λ_1 est fermé et Λ_2 est borné, donc $\Lambda_1\Lambda_2$ est fermé.

Définition 3.1.21. On considère $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On munit $D(\Lambda)$ d'une norme qu'on note $\|\cdot\|_{D(\Lambda)}$ et qu'on appelle norme du graphe, qu'on définit par :

$$\forall x \in D(\Lambda) \quad \|x\|_{D(\Lambda)} := \|x\|_E + \|\Lambda x\|_F$$

Proposition 3.1.22. Si Λ est un opérateur linéaire fermé, donc $(D, \|\cdot\|)_{D(\Lambda)}$ est un espace de Banach.

Proposition 3.1.23. Si Λ est un opérateur linéaire fermé inversible sur E , alors

1. $] -\infty, 0[\subset \rho(\Lambda) \iff] -\infty, 0[\subset \rho(\Lambda^{-1})$,
2. $]0, +\infty[\subset \rho(\Lambda) \iff]0, +\infty[\subset \rho(\Lambda^{-1})$.

Proposition 3.1.24. On considère Λ un opérateur linéaire sur E , alors Λ est un opérateur fermé si et seulement si $(D(\Lambda), \|\cdot\|_{D(\Lambda)})$ est un espace de Banach.

Proposition 3.1.25. On considère $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire bijectif. Alors on a l'équivalence entre les deux propriétés qui suivent :

1. Λ est fermé
2. $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Démonstration : On suppose que Λ soit fermé, on définit

$$\begin{aligned} L : G(\Lambda) &\longrightarrow E \\ (x, \Lambda x) &\longmapsto L(x, \Lambda x) = \Lambda x. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\|L(x, \Lambda x)\|_E = \|\Lambda x\|_E \leq \|x\|_{G(\Lambda)}.$$

D'où L est une application linéaire continue et

$$L(x, \Lambda x) = \Lambda x = y \iff x = \Lambda^{-1}y.$$

Par conséquent grâce au théorème d'isomorphisme de Banach,

$$L^{-1}(y) = (\Lambda^{-1}y, y)$$

est une application continue et il existe $c > 0$ tel que

$$\|L^{-1}(y)\|_{G(\Lambda)} = \|\Lambda^{-1}y\|_E + \|y\|_E \leq c \|y\|_E.$$

Par déduction on a

$$\|\Lambda^{-1}y\|_E \leq c \|y\|_E.$$

Donc $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. On considère $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $D(\Lambda)$ telle que

$$\begin{cases} x_n &\longrightarrow x, & \text{dans } E, \\ \Lambda x_n &\longrightarrow y, & \text{dans } E, \end{cases}$$

Or Λ est bijectif alors,

$$x_n = \Lambda^{-1}\Lambda x_n \longrightarrow \Lambda^{-1}y.$$

D'où $x \in D(\Lambda)$.

Or $x_n \longrightarrow x$, alors par unicité de la limite,

$$x = \Lambda^{-1}y,$$

par conséquent, $\Lambda x = y$ et Λ est fermé. ■

Définition 3.1.26. Une équation différentielle abstraite est une équation différentielle dont les coefficients sont des opérateurs linéaires (non bornés mais au moins fermés) sur un espace de Banach.

3.1.3 Opérateurs sectoriels

On énonce par la suite des résultats qui sont issus de M. Haase [34] et A. Lunardi [40].

Définition 3.1.27. L'opérateur Λ est dit **sectoriel** s'il vérifie les deux points suivants :

- Son domaine $D(\Lambda)$ et son image $Im(\Lambda)$ sont denses dans E ,
- son noyau $Ker(\Lambda) = 0$ et $\rho(\Lambda) \supset]-\infty, 0[$ et $\exists M \geq 1$ telle que $\|(\lambda(\Lambda - \lambda I))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$.

Définition 3.1.28. Pour un $\omega \in [0, \pi]$, on définit

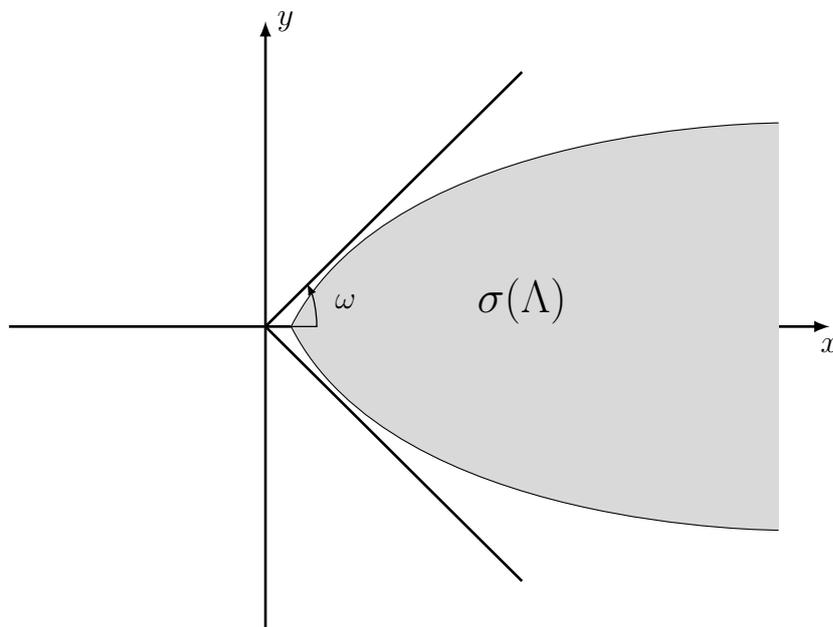
$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |arg(z)| < \omega\} & \text{si } \omega \in]0, \pi], \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Alors, si $\omega > 0$, S_ω désigne le secteur ouvert, symétrique autour de l'axe réel positif, d'angle 2ω .

Définition 3.1.29. Pour un $\omega \in [0, \pi[$. On dit qu'un opérateur linéaire Λ sur E est **sectoriel d'angle** ω , qu'on note par $\Lambda \in Sect(\omega)$, si :

1. $\sigma(\Lambda) \subset \overline{S_\omega}$

2. $\exists M > 0, \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}} \|R(\lambda, \Lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{|\lambda|} < +\infty, \text{ pour tout } \omega' \in]\omega, \pi[.$



Ici Λ est sectoriel d'angle ω .

Proposition 3.1.30. *Si l'opérateur Λ est sectoriel d'angle $\omega \in [0, \pi[$, alors il est fermé.*

Proposition 3.1.31. *Pour $\omega \in [0, \pi[$. On a les propriétés suivantes :*

1. $\Lambda \in \text{Sect}(\omega), c \geq 0 \implies c\Lambda \in \text{Sect}(\omega).$
2. $\Lambda \in \text{Sect}(\omega), \varepsilon \geq 0 \implies \Lambda + \varepsilon I \in \text{Sect}(\omega).$
3. $\Lambda \in \text{Sect}(\omega)$ et Λ injectif $\iff \Lambda^{-1} \in \text{Sect}(\omega).$

Proposition 3.1.32. *Soit Λ un opérateur linéaire fermé sur E .*

1. *Si $\mathbb{R}_* \subset \rho(\Lambda)$ et $M(\Lambda) := \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda I + \Lambda)^{-1}\| < \infty$, alors*

$$M(\Lambda) \leq 1 \quad \text{et} \quad \Lambda \in \text{Sect}(\pi - \arcsin(M(\Lambda)^{-1})).$$

2. *Si E est réflexif et $\Lambda \in \text{Sect}(\omega)$, alors $\overline{D(\Lambda)} = E$ et $E = \text{Ker}(\Lambda) \oplus \overline{\text{Im}(\Lambda)}$.*
3. *Soit $\omega \in [0, \pi[$. Si $\Lambda \in \text{Sect}(\omega)$ est injectif et E est réflexif, alors*

$$\overline{\text{Im}(\Lambda)} = \overline{D(\Lambda)} = E = \overline{D(\Lambda^n) \cap \text{Im}(\Lambda^n)}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3.2 Espaces de Sobolev

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et E un espace de Banach.

On définit d'abord les espaces L^p avec $p \in [1, +\infty[$, car les espaces de Sobolev sont construits à partir des espaces L^p .

Définition 3.2.1. Soit l'application $f : I \rightarrow E$. On définit pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(I; E) := \left\{ f \text{ est mesurable telle que } \int_I \|f\|^p d\mu < +\infty \right\}$$

munit de la norme

$$\|f\|_{L^p(I; E)} = \left(\int_I \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Définition 3.2.2. Soient Λ un opérateur linéaire sur E de domaine $D(\Lambda)$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit

$$L^p(I, D(\Lambda)) := \{ \varphi \in L^p(I, E) : \varphi(x) \in D(\Lambda) \text{ p.p. } x \in I \text{ et } \Lambda\varphi(x) \in L^p(I, E) \text{ p.p. } x \in I \}.$$

Théorème 3.2.3. On a pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(I; E)$ est un espace de Banach.

Définition 3.2.4. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{n,p}$ de la façon suivante :

$$W^{n,p}(I; E) := \left\{ u \in L^p(I; E), [u]^{(j)} \in L^p(I; E), \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } j \leq n \right\}.$$

On note que pour $j = 0, 1, \dots, k$, $[u]^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ème}}$ au sens des distributions de u et $[u]^{(j)} \in L^p(I; E)$ veut dire que

$$\exists g_j \in L^p(I; E) \text{ tel que } [u]^{(j)} = [g_j].$$

Théorème 3.2.5. Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; E)$ est un espace de Banach.

Théorème 3.2.6. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; E)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; E)$.*

Remarque 3.2.7. $W^{n,p}(I; E)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; E)$, veut dire que toute fonction de $W^{n,p}(I; E)$ est (presque partout égale à) une fonction de $C^{n-1}(I; E)$ et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{n,p}(I; E)$, on a

$$\|u\|_{C^{n-1}(I;E)} \leq C \|u\|_{W^{n,p}(I;E)}.$$

Cela signifie que l'identité $I : W^{n,p}(I; E) \longrightarrow C^{n-1}(I; E)$ est continue. On note alors

$$W^{n,p}(I; E) \hookrightarrow C^{n-1}(I; E).$$

3.3 Les semi-groupes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach Complexe.

Définition 3.3.1. On appelle **semi-groupe**, toute famille d'opérateurs linéaires bornés $(G(t))_{t \geq 0}$ qui vérifie :

1. $G(0) = I$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(s+t) = G(s)G(t)$.

Autrement dit $(G(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe si et seulement si l'application ψ définie de \mathbb{R}^+ dans $\mathcal{L}(E)$ et qui à tout $t > 0$ associe $\psi(t) = G(t)$ est un homomorphisme du semi-groupe additif $(\mathbb{R}^+, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathcal{L}(E), \circ)$.

Définition 3.3.2. L'opérateur linéaire Λ sur E est appelé **générateur infinitésimal** d'un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ si

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\Lambda) := \left\{ x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)x - x}{h} \text{ existe dans } E \right\}, \\ \Lambda x := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)x - x}{h}, \quad x \in D(\Lambda). \end{array} \right.$$

3.3.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 3.3.3. Un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est dit **fortement continu**, si ψ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$, i.e. si, pour tout $\psi \in E$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)\psi - \psi\| = 0$. Un semi-groupe fortement continu est encore appelé **C_0 -semi-groupe**.

Cette propriété est appelée la forte continuité en zéro.

Proposition 3.3.4. Si $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, alors il existe des constantes réelles $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, telles que

$$\forall t \geq 0, \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}.$$

De plus, si $\omega = 0$ et $M = 1$, $(G(t))_{t \geq 0}$ est appelé C_0 -semi-groupe de contraction.

Corollaire 3.3.5. Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors pour tout $x \in E$, $t \mapsto G(t)x$ est une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans E , i.e. pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \|G(t)x - G(t_0)x\| = 0$.

3.3.2 Semi-groupes analytiques

Définition 3.3.6. On dit que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un **semi-groupe analytique** sur E si et seulement si

1. $\forall t \geq 0, G(t) \in \mathcal{L}(E)$,
2. $G(0) = I$ et pour $t_1, t_2 \geq 0, G(t_1 + t_2) = G(t_1)G(t_2)$,
3. $t \mapsto G(t)$ est analytique de $]0, +\infty[$ vers $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 3.3.7 (Théorème de Kato).

Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant :

1. Λ est fermé et $\overline{D(\Lambda)} = E$,
2. $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que : $\forall \lambda > 0 : \|(\lambda I - \Lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda}$.

Alors Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant :

(a) $\exists > 0, \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C$.

(b) $\forall t > 0, G(t) \in \mathcal{L}(E, D(\Lambda))$ et $\|\Lambda G(t)\| \leq \frac{M}{t}$.

Soit $\omega \in]0, \pi/2]$, on définit le secteur $S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \omega\}$.

Définition 3.3.8. Soit $\omega \in]0, \pi/2]$. Une famille $(G(z))_{z \in S_\omega}$ d'éléments de $L(E)$ forme un semi-groupe analytique de type ω dans E si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $G(0) = I$,
2. $\forall z_1, z_2 \in S_\omega$ tels que $(z_1 + z_2) \in S_\omega$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,
3. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \lim_{z \rightarrow 0, z \in S_{\omega-\varepsilon}} G(z)x = x$,
4. l'application $z \mapsto G(z)$ est holomorphe sur S_ω .

Si de plus,

$\forall \varepsilon > 0, \sup \|G(z)\| < \infty, i.e. (G(z))_{z \in S_{\omega-\varepsilon}}$ est uniformément borné dans $S_{\omega-\varepsilon}$, alors $(G(z))_{z \in S_\omega}$ est appelé **semi-groupe analytique borné de type ω** dans E .

D'une autre manière, on peut définir les semi-groupes analytiques comme suit :

Définition 3.3.9. Soit $\omega \in]0, \pi/2]$. Une famille $(G(z))_{z \in S_\omega}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ forme un semi-groupe analytique de type ω dans E si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $G(\cdot)$ est la restriction d'une fonction holomorphe $G : S_\omega \mapsto \mathcal{L}(E)$,
2. $\forall z_1, z_2 \in S_\omega$ tels que $(z_1 + z_2) \in S_\omega$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,
3. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \lim_{z \rightarrow 0, z \in S_{\omega-\varepsilon}} G(z)x = x$.

Théorème 3.3.10. Soient Λ un opérateur linéaire fermé, $\overline{D(\Lambda)} = E$ et $\omega \in]0, \pi/2]$ tels que

$$\begin{cases} S_{\omega+\pi/2} \subset \rho(\Lambda), \\ \exists M > 0, \forall \lambda \in \rho(\Lambda), \|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{|\lambda|}. \end{cases} \quad (3.1)$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(G(t))_{t \geq 0}$, notée $(e^{t\Lambda})_{t \geq 0}$, par

$$\begin{cases} G(0) = I, \\ \forall t > 0, \forall x \in E, G(t)x = e^{t\Lambda}x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\Lambda - \lambda I)^{-1} x d\lambda, \end{cases}$$

où $\Gamma \subset \rho(\Lambda)$ est un contour non borné dans $S_{\omega+\pi/2}$ allant de $+\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}+\omega)}$ à $+\infty e^{i(\frac{\pi}{2}+\omega)}$.

Alors $(e^{t\Lambda})_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal Λ . De plus $(e^{t\Lambda})_{t \geq 0}$ se prolonge analytiquement en un semi-groupe analytique de type ω noté $(e^{z\Lambda})_{z \in S_\omega}$.

Remarque 3.3.11. Si Λ est un opérateur linéaire fermé et $\overline{D(\Lambda)} = E$ vérifiant (3.1), alors $-\Lambda \in \text{Sect}(\omega + \pi/2)$, $\omega \in]0, \pi/2]$, au sens de Haase.

Le théorème qui suit est un résultat de Balakrishnan [5]. Il donne un résultat important sur les puissances fractionnaires d'opérateurs que l'on utilisera ultérieurement.

Théorème 3.3.12. Soit Λ un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(\Lambda)$ dans E tel que

$$]0, +\infty[\subset \rho(\Lambda) \text{ et } \exists M > 0, \forall \lambda > 0, \|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Alors il existe un secteur S_Φ , $0 < \Phi \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$S_\Phi \subset \rho(\Lambda) \text{ et } \forall \lambda \in S_\Phi, \|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

De plus, l'opérateur $(-\Lambda)^{1/2}$ est bien défini et il existe un secteur $S_{\omega+\frac{\pi}{2}}$, avec $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$, tel que

$$S_{\omega+\frac{\pi}{2}} \subset \rho(-(-\Lambda)^{1/2}),$$

et $-(-\Lambda)^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique.

3.3.3 Semi-groupes analytiques généralisés

Définition 3.3.13. Soit $\omega \in]0, \pi/2]$. Un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est un **semi-groupe analytique généralisé** d'angle ω dans E si :

1. $G(\cdot)$ est la restriction d'une fonction holomorphe $G : S_\omega \rightarrow \mathcal{L}(E)$,

2. $\forall Z_1, Z_2 \in S_\omega$ tels que $Z_1 + Z_2 \in S_\omega$, $G(Z_1 + Z_2) = G(Z_1) G(Z_2)$.

Remarque 3.3.14. Un semi-groupe analytique est donc un semi-groupe analytique généralisé qui est de plus fortement continu en 0.

3.4 Espaces UMD

Parfois les espaces de Banach fournissent un cadre de travail insuffisant. On fait alors appel à un espace qui a des propriétés supplémentaires, il s'agit des **espaces UMD** (Unconditional Martingale Difference). Ces espaces font intervenir la théorie des martingales à valeurs vectorielles. On utilisera ici une autre définition équivalente, qui utilise la transformée de Hilbert. Les deux définitions sont équivalentes, voir la démonstration dans Burkholder [7] et Bourgain[6].

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe.

Définition 3.4.1. Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. L'opérateur $H_\varepsilon \in L(L^p(\mathbb{R}, E))$ est défini par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, E), \quad (H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds, \quad p.p. x \in \mathbb{R}.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, E)$. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}, E),$$

alors cette limite qu'on notera Hf est appelée **la transformée de Hilbert** de f sur $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Définition 3.4.2. X est appelé un **espace UMD** si

$$\exists p \in]1, +\infty[, \forall f \in L^p(\mathbb{R}, E), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}, E)$$

Dans ce cas l'application

$$\begin{aligned} H : L^p(\mathbb{R}, E) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}, E) \\ f &\longmapsto Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f, \end{aligned}$$

est dans $L(L^p(\mathbb{R}, E))$, en appliquant le Théorème de Banach-Steinhaus, et qui est appelée **la transformée de Hilbert** sur $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Proposition 3.4.3. *Soit E un espace UMD.*

Donc :

$$\forall p \in]1, +\infty[, \forall f \in L^p(\mathbb{R}, E), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}, E)$$

Pour donner une caractérisation géométrique des espaces UMD, on définit la notion de ζ -convexité

Définition 3.4.4. X est dit ζ -convexe s'il existe une fonction $\zeta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\zeta(0, 0) > 0$,
2. $\forall x, y \in E$, $\zeta(x, \cdot)$ et $\zeta(\cdot, y)$ sont convexes sur E ,
3. $\forall x, y \in E$, $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

On cite le résultat fondamental de Burkholder [7] [8] qui donne une caractérisation géométrique des espaces UMD.

Théorème 3.4.5. *L'espace X est UMD si et seulement s'il est ζ -convexe.*

Définition 3.4.6. On considère E un espace de Banach.

E s'injecte "canoniquement" dans son bidual par l'application suivante :

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto \hat{x} : E' \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(x). \end{aligned}$$

J est une isométrie.

On dit que E est un espace **réflexif** si J est une application surjective, cela veut dire si toute forme linéaire continue sur E' est de la forme $f \mapsto f(x)$ pour un x dans E .

Proposition 3.4.7. *Soient Ω un espace mesuré σ -fini et $p \in]1, +\infty[$. Donc*

1. *Tout espace de Hilbert est un espace UMD.*

2. Tout espace UMD est un espace réflexif.
3. Si E est un espace UMD, alors $L^p(\Omega, E)$ est un espace UMD.
4. Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.
5. Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est un espace UMD.
6. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $L^p(\Omega)$ est un espace UMD.

Remarque 3.4.8. Les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas UMD car ils ne sont pas réflexifs.

3.5 Espaces d'interpolation

Dans cette section, on utilisera les définitions et les résultats cités dans la bibliographie par exemple : P. Grisvard [32], J.-L. Lions et J. Peetre [39] et H. Triebel [60].

3.5.1 Espaces intermédiaires

Considérons E_1 et E_2 , deux espaces de Banach, tous les deux contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé E , avec les $E_i \hookrightarrow E$ ($i = 1, 2$) sont des inclusions avec injections continues.

Considérons les espaces $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2 := \{\varphi \in E : \exists \varphi_1 \in E_1 \text{ et } \exists \varphi_2 \in E_2, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2\}$ munis des normes respectives

$$\|\varphi\|_{E_1 \cap E_2} := \max\left(\|\varphi\|_{E_1}, \|\varphi\|_{E_2}\right),$$

et

$$\|\varphi\|_{E_1 + E_2} := \inf\left(\|\varphi_1\|_{E_1} + \|\varphi_2\|_{E_2}\right), \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ où } \varphi_1 \in E_1 \text{ et } \varphi_2 \in E_2.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

Pour $i = 1, 2$, on a :

$$E_1 \cap E_2 \hookrightarrow E_i \hookrightarrow E_1 + E_2.$$

Définition 3.5.1. On appelle espace intermédiaire (entre E_1 et E_2) tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé I tel que

$$E_1 \cap E_2 \hookrightarrow I \hookrightarrow E_1 + E_2$$

où, les injections sont continues.

Avec cette définition, les espaces E_1 et E_2 eux-mêmes sont des espaces intermédiaires.

On considérera dans la suite uniquement les familles d'espaces intermédiaires formées d'espaces de Banach.

3.5.2 Espaces de moyenne

Définition 3.5.2. Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit, l'espace de Banach

$$L_*^p(\mathbb{R}^+; E) := \left\{ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow E \text{ fortement mesurable, } \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; E)} := \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Définition 3.5.3. On appelle espace de moyenne (ou espace d'interpolation réel) entre E_1 et E_2 , l'espace de Banach $(E_1, E_2)_{\theta, p}$ où $(\theta \in (0, 1))$ définit par

$$\varphi \in (E_1, E_2)_{\theta, p} \iff \begin{cases} \forall t > 0, \exists \varphi_1(t) \in E_1, \exists \varphi_2(t) \in E_2 : \varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \\ t^{-\theta} \varphi_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; E_1), t^{1-\theta} \varphi_2 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; E_2), \end{cases}$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\theta, p} := \inf_{\substack{\varphi_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow E, i = 1, 2 : \\ \forall t > 0, \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = \varphi(t)}} \left(\|t^{-\theta} \varphi_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; E_1)} + \|t^{1-\theta} \varphi_2\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; E_2)} \right).$$

On a, de plus

$$E_1 \cap E_2 \hookrightarrow (E_1, E_2)_{\theta, p} \hookrightarrow E_1 + E_2,$$

avec injections continues.

Proposition 3.5.4. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$. Alors*

$$(E_1, E_2)_{\theta, p} = (E_2, E_1)_{1-\theta, p}.$$

3.5.3 Espaces d'interpolation et domaine d'opérateurs

On considère un opérateur linéaire Λ , avec son domaine $D(\Lambda) \subset E$, qui vérifie

$$]0, +\infty[\subset \rho(\Lambda) \quad \text{et} \quad \exists C > 0 : \forall t > 0, \quad \|t(\Lambda - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C.$$

Cela veut dire que $-\Lambda \in \text{Sect}(\omega_\Lambda)$, avec $\omega_\Lambda \in [0, \pi[$, sur l'espace de Banach E .

Proposition 3.5.5. *On a pour $\theta \in]0, 1[$*

$$(E, D(\Lambda))_{\theta, p} := \left\{ \varphi \in E : t^\theta \Lambda(tI + \Lambda)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}^+; E) \right\}.$$

Définition 3.5.6. On considère $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 1[$. Les espaces d'interpolation réels sont définis comme suit :

$$(D(\Lambda), E)_{k+\theta, q} := \left\{ \varphi \in D(\Lambda^k) : \Lambda^k \varphi \in (D(\Lambda), E)_{\theta, q} \right\}$$

et

$$(E, D(\Lambda))_{k+\theta, q} := \left\{ \psi \in D(\Lambda^k) : \Lambda^k \psi \in (E, D(\Lambda))_{\theta, q} \right\}.$$

Théorème 3.5.7 (Densité). *On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha < \beta$. Donc l'espace $D(\Lambda^\beta)$ est dense dans $(E, D(\Lambda^\alpha))_{\theta, p}$, avec $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$.*

Lemme 3.5.8 (Triebel [60]). *On considère $\varphi \in E$ et G le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur E . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty[$, on a l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. $x \mapsto G^n e^{(x-a)G} \varphi \in L^p(a, b; E)$,
2. $\varphi \in (D(G^n), E)_{\frac{1}{np}, p}$.

Corollaire 3.5.9. *On considère $\varphi \in E$ et G le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur E . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. $x \mapsto G^n e^{(x-a)G} \varphi \in L^p(a, b; E)$,
2. $x \mapsto e^{(x-a)G} \varphi \in W^{n,p}(a, b; E)$,
3. $\varphi \in (D(G), E)_{n-1+\frac{1}{p}, p}$.

Chapitre 4

Étude du modèle

Dans ce chapitre nous appliquons les résultats obtenus du chapitre précédent concernant la résolution d'une équation différentielle abstraite pour donner une représentation de la solution de notre problème où on détaillera la preuve de l'inversibilité du discriminant du système abstrait, aussi nous étudierons la régularité optimale de la solution en vu de montrer que l'opérateur \mathcal{L} génère un semi-groupe analytique dans l'espace \mathcal{E} . Ensuite par application du théorème de point fixe nous montrons l'unicité de la solution locale de notre problème (P).

4.1 Présentation du modèle

Nous nous sommes inspirés de notre article [22], où les auteurs ont construit un modèle de dispersion des Triatomines qui véhicule le parasite appelé *Tripanozoma. Cruzi* qui est responsable de la transmission de la maladie de Chagas voir [14].

4.2 Position du problème

Rappelons que notre problème à étudier est :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j_-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a_-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j_+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a_+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ \\ \\ (I.C) \\ \\ (Int.C) \\ \\ (EC_1) \\ \\ (EC_2) \end{array} \right.$$

Pour étudier (P), nous l'avons transformé en **une équation différentielle abstraite** avec définition du domaine de l'opérateur i.e *équation différentielle dont les coefficients sont des opérateurs linéaires (non bornés mais au moins fermés) sur un espace de Banach*; alors pour l'étudier, on utilise **la théorie des semi-groupes** et celle **des opérateurs sectoriels** .

On rappelle aussi le schéma récapitulatif de notre problème posé voir (figure 4.1) :

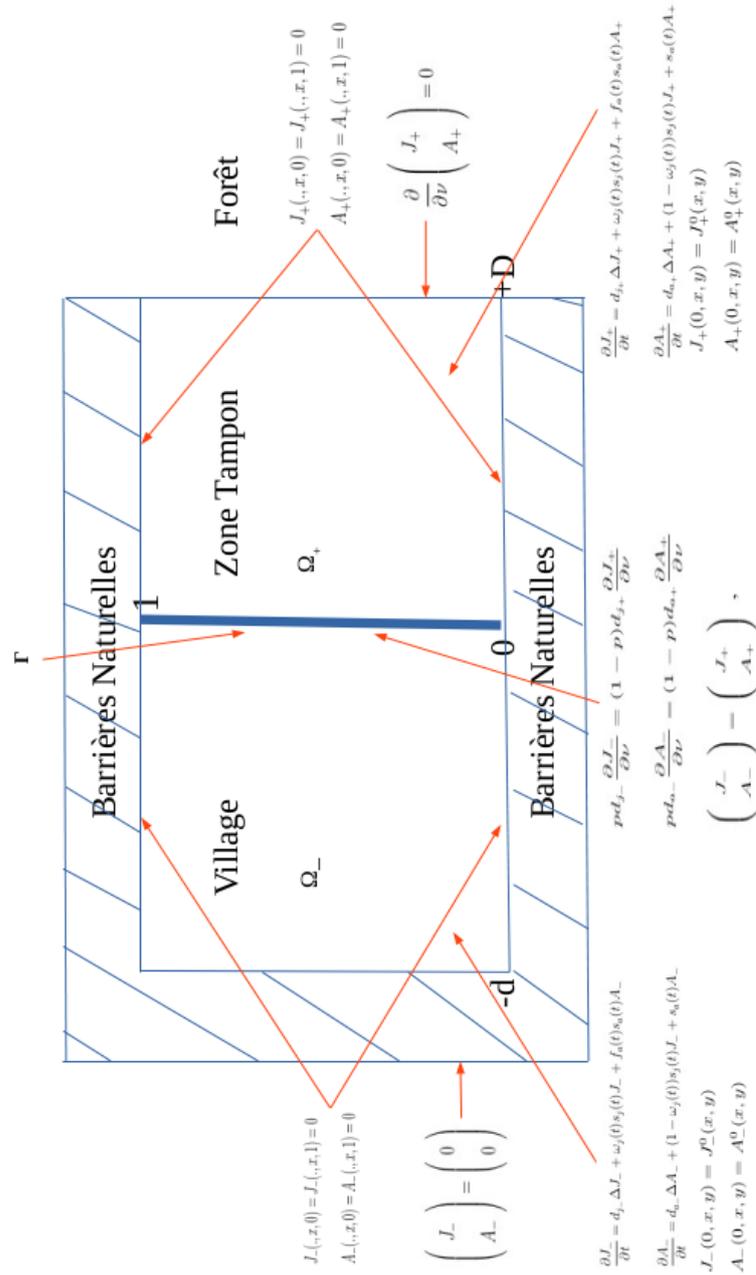


FIGURE 4.1 – Densité de population dans deux habitats.

4.3 Transformation abstraite

Soit :

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ W = (v, w) \in [L^q(\Omega)]^2 : W_- = W|_{\Omega_-} = (v_-, w_-) \in [W^{2,q}(\Omega_-)]^2 \right. \\ \left. W_+ = W|_{\Omega_+} = (v_+, w_+) \in [W^{2,q}(\Omega_+)]^2 \text{ et } W_-, W_+ \text{ verifiant } (Int.C), (EC_1), (EC_2) \right\},$$

où $q \in]1, +\infty[$.

Le problème précédent (P) est donc écrit sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait (voir chapitre 2) :

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t) & t > 0 \\ V(0) = V^0 = \begin{pmatrix} J^0(0, \cdot, \cdot) \\ A^0(0, \cdot, \cdot) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (4.1)$$

dans l'espace Banach $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$ qu'on norme par :

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = \max(\|v\|_{L^q(\Omega)}, \|w\|_{L^q(\Omega)}), \quad (4.2)$$

qui est équivalente à

$$\max(\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)} + \|w_-\|_{L^q(\Omega_-)}, \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)} + \|w_+\|_{L^q(\Omega_+)}) .$$

4.4 L'équation spectrale

L'étude du problème d'évolution précédent (4.1) est basée dans un premier temps sur l'équation spectrale

$$\mathcal{L}W - \lambda W = F \in [L^q(\Omega)]^2, \quad (4.3)$$

pour λ complexe pris dans un bon secteur à préciser et on y doit majorer la norme :

$$\|(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}\|_{L([L^q(\Omega)]^2)},$$

et cela en vue de monter que \mathcal{L} génère un semi groupe analytique. Alors, après la résolution de l'équation spectrale, on doit majorer :

$$\begin{aligned} \|W\|_{[L^q(\Omega)]^2} &= \max(\|v\|_{L^q(\Omega)}, \|w\|_{L^q(\Omega)}) \\ &= \max(\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)} + \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)}, \|w_-\|_{L^q(\Omega_-)} + \|w_+\|_{L^q(\Omega_+)}) , \end{aligned}$$

4.5 L'équation spectrale explicitée

Posons :

$$W = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

alors l'équation spectrale précédente (4.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} d_{j_-} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_-} \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ w_- \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} v_- \\ w_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_- \\ g_- \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Omega_-, \\ \begin{pmatrix} d_{j_+} \Delta & 0 \\ 0 & d_{a_+} \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_+ \\ w_+ \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} v_+ \\ w_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+ \\ g_+ \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Omega_+, \end{array} \right.$$

avec les conditions de transmission

$$(Int.C) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} v_- \\ w_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_+ \\ w_+ \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma, \\ \begin{pmatrix} \mu_- \frac{\partial v_-}{\partial x} \\ \alpha_- \frac{\partial w_-}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} \\ \alpha_+ \frac{\partial w_+}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

les conditions aux limites

$$(EC_1) \left\{ \begin{array}{l} v_-(x, 0) = v_-(x, 1) = 0 \\ w_-(x, 0) = w_-(x, 1) = 0 , \\ \\ v_+(x, 0) = v_+(x, 1) = 0 \\ w_+(x, 0) = w_+(x, 1) = 0 , \end{array} \quad \begin{array}{l} x \in]-d, 0[\\ \\ x \in]0, D[\end{array} \right.$$

et

$$(EC_2) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} v_- \\ w_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \{-d\} \times]0, 1[, \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_+ \\ w_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \{D\} \times]0, 1[. \end{array} \right.$$

4.6 Splitting du système

On explicite le système spectral précédent

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{j_-} \Delta v_- - \lambda v_- = f_- \\ d_{a_-} \Delta w_- - \lambda w_- = g_- , \\ \\ d_{j_+} \Delta v_+ - \lambda v_+ = f_+ \\ d_{a_+} \Delta w_+ - \lambda w_+ = g_+ , \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega_- \\ \\ \text{sur } \Omega_+ \end{array} \right.$$

avec

$$(Int.C) \left\{ \begin{array}{l} v_-(0, y) = v_+(0, y) \quad y \in]0, 1[, \\ w_-(0, y) = w_+(0, y) \quad y \in]0, 1[, \\ \mu_- \frac{\partial v_-}{\partial x}(0, y) = \mu_+ \frac{\partial v_+}{\partial x}(0, y) \quad y \in]0, 1[, \\ \alpha_- \frac{\partial w_-}{\partial x}(0, y) = \alpha_+ \frac{\partial w_+}{\partial x}(0, y) \quad y \in]0, 1[, \end{array} \right.$$

et

$$(EC_1) \left\{ \begin{array}{l} v_-(x, 0) = v_-(x, 1) = 0 \\ w_-(x, 0) = w_-(x, 1) = 0 , \end{array} \quad x \in]-d, 0[\right.$$

$$\left. \begin{array}{l} v_+(x, 0) = v_+(x, 1) = 0 \\ w_+(x, 0) = w_+(x, 1) = 0 , \end{array} \quad x \in]0, D[\right.$$

$$(EC_2) \left\{ \begin{array}{l} v_-(-d, y) = w_-(-d, y) = 0 \quad y \in]0, 1[, \\ \frac{\partial v_+}{\partial x}(D, y) = \frac{\partial w_+}{\partial x}(D, y) = 0 \quad y \in]0, 1[. \end{array} \right.$$

Ce système peut être scindé en deux sous-systèmes ; un qui est régi par le couple (v_-, v_+) (des juvéniles) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{j_-} \Delta v_- - \lambda v_- = f_- \text{ sur } \Omega_- , \\ d_{j_+} \Delta v_+ - \lambda v_+ = f_+ \text{ sur } \Omega_+ , \end{array} \right.$$

avec

$$(Int.C_v) \left\{ \begin{array}{l} v_-(0, y) = v_+(0, y) \quad y \in]0, 1[, \\ \mu_- \frac{\partial v_-}{\partial x}(0, y) = \mu_+ \frac{\partial v_+}{\partial x}(0, y) \quad y \in]0, 1[, \end{array} \right.$$

$$(EC_{1v}) \left\{ \begin{array}{l} v_-(x, 0) = v_-(x, 1) = 0 \quad x \in]-d, 0[, \\ v_+(x, 0) = v_+(x, 1) = 0 \quad x \in]0, D[, \end{array} \right.$$

$$(EC_{2v}) \begin{cases} v_-(-d, y) = 0 & y \in]0, 1[, \\ \frac{\partial v_+}{\partial x}(D, y) = 0 & y \in]0, 1[; \end{cases}$$

et l'autre par le couple (w_-, w_+) (des adultes) vérifiant un système analogue. La différence entre les deux réside dans les coefficients de diffusion qui sont tous différents (ici, on les a supposé constants). Par conséquent, il suffira de faire l'analyse d'un système.

4.7 Écriture opérationnelle

Introduisons, dans l'espace de Banach $E = L^q(0, 1)$, l'opérateur Λ défini par :

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \{\varphi \in W^{2,q}(0, 1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ (\Lambda\varphi)(y) = \varphi''(y) . \end{cases}$$

Pour $\omega \in [0, \pi]$, on définit le secteur :

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\} & \text{si } \omega \in]0, \pi[\\]0, +\infty[& \text{si } \omega = 0 . \end{cases}$$

Il est connu que cet opérateur est linéaire fermé avec un domaine dense et vérifie :

$$\begin{cases} \overline{D(\Lambda)} = E, \text{ pour tout } \eta \in]0, \pi[, \rho(\Lambda) \supset S_{\pi-\eta} \cup \{0\} \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall z \in S_{\pi-\eta} \cup \{0\}, \|(zI - \Lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |z|} , \end{cases} \quad (4.4)$$

et il existe une boule $B(0, \delta)$, $\delta > 0$, telle que $\rho(\Lambda) \supset \overline{B(0, \delta)}$ et l'estimation ci-dessus reste valide dans $S_{\pi-\eta} \cup \overline{B(0, \delta)}$. Ici $\rho(\Lambda)$ désigne l'ensemble résolvant de Λ . La notation opérationnelle usuelle des fonctions à valeurs vectorielles suivante :

$$v_\pm(x)(y) := v_\pm(x, y) ,$$

conduit le système écrit ci dessus (4.3) pour le couple (v_-, v_+) , dans l'espace E , à être formulé par :

$$(S1) \begin{cases} v_-''(x) + \Lambda v_-(x) - \frac{\lambda}{d_{j_-}} v_-(x) = \frac{f_-(x)}{d_{j_-}} & \text{sur }]-d, 0[, \\ v_+''(x) + \Lambda v_+(x) - \frac{\lambda}{d_{j_+}} v_+(x) = \frac{f_+(x)}{d_{j_+}} & \text{sur }]0, D[, \\ v_-(-d) = 0 , \\ v_+'(D) = 0 , \\ v_-(0) = v_+(0) , \\ \mu_- v_-'(0) = \mu_+ v_+'(0) . \end{cases} \quad (4.5)$$

les conditions aux limites (EC_{1v}) sont implicites et exprimées par l'action de Λ .

Pour avoir l'estimation de la résolvante, on doit estimer :

$$\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)}, \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)}, \|w_-\|_{L^q(\Omega_-)} \text{ et } \|w_+\|_{L^q(\Omega_+)} .$$

Or avec notre notation opérationnelle, on a :

$$\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)} = \|v_-\|_{L^q((-d,0);E)} \text{ et } \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)} = \|v_+\|_{L^q((0,D);E)} .$$

4.8 Quelques rappels importants

On utilisera les résultats suivants.

Lemme 4.8.1. *Soit $\eta \in]0, \pi/2[$. Pour tout $z \in S_\eta$, on a*

1. $|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| < \eta$
2. $|1 + e^{-z}| \geq C_\eta = 1 - e^{-\pi/(2 \tan(\eta))} > 0$
3. $\frac{|z| \cos \eta}{1 + |z| \cos \eta} \leq |1 - e^{-z}| \leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}$.

□

Voir [25], Proposition 4.10, p.1880.

Lemme 4.8.2. Soient $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. on a

$$|w + z| \geq (|w| + |z|) \left| \cos \frac{\arg w - \arg z}{2} \right|.$$

□

Voir Proposition 4.9, p.1879 in [25].

Maintenant rappelons quelques résultats dans [34].

Soit $\omega \in [0, \pi[$, un opérateur K sur un espace de Banach complexe E est dit sectoriel d'angle ω si

1. $\sigma(K) \subset \overline{S_\omega}$ et
2. $M(K, \omega') := \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}} \|\lambda(K - \lambda I)^{-1}\| < \infty$ pour tout $\omega' \in]\omega, \pi[$.

On écrira : $K \in \text{Sect}(\omega)$. L'angle suivant

$$\omega_K := \min \{ \omega \in [0, \pi[: K \in \text{Sect}(\omega) \},$$

est appelé l'angle sectoriel de K . Le point 2. implique nécessairement que K est fermé.

Proposition 4.8.3. Si $] -\infty, 0[\subset \rho(K)$ et

$$M(K) := M(K, \pi) := \sup_{\mu > 0} \|\mu(K + \mu I)^{-1}\| < \infty,$$

alors $M(K) \geq 1$ et

$$K \in \text{Sect}(\pi - \arcsin(1/M(K))).$$

Voir [34], proposition 2.1.1

□

Proposition 4.8.4. Soit K un opérateur sectoriel et $\nu \in]0, 1/2[$. Alors $K^\nu \in \text{Sect}(\nu\omega_K)$, et donc $-K^\nu$ génère un semi-groupe analytique.

Voir [34] p. 80-81

□

Posons

$$H^\infty(S_\omega) = \{f : f \text{ est holomorphe et bornée sur } S_\omega\},$$

avec $\omega \in]0, \pi[$; on rappelle alors que si $f \in H^\infty(S_\omega)$ est telle que $1/f \in H^\infty(S_\omega)$ et

$$(1/f)(K) \in \mathcal{L}(X),$$

alors $f(K)$ est inversible à inverse borné et

$$[f(K)]^{-1} = (1/f)(K), \tag{4.6}$$

voir, par exemple [19].

4.9 Résolution du premier système (4.5)

Ici on supposera que λ est tel que

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0, \tag{4.7}$$

où ε_0 est fixé petit.

Considérons les deux opérateurs suivants :

$$\Lambda_\lambda^- = \Lambda - \frac{\lambda}{d_{j_-}} I, \quad \Lambda_\lambda^+ = \Lambda - \frac{\lambda}{d_{j_+}} I,$$

qui ont le même domaine

$$D(\Lambda_\lambda^-) = D(\Lambda_\lambda^+) = D(\Lambda).$$

Proposition 4.9.1. *Les opérateurs $-\Lambda_\lambda^-$ et $-\Lambda_\lambda^+$ sont sectoriels dans $E = L^q(0, 1)$.*

Démonstration. En effet, on a : $] -\infty, 0] \subset \rho(-\Lambda_\lambda^-)$ et si on pose

$$M(-\Lambda_\lambda^-) := M(-\Lambda_\lambda^-, \pi) := \sup_{\mu > 0} \left\| \mu(-\Lambda_\lambda^- + \mu I)^{-1} \right\|,$$

alors pour tout λ tel que

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0,$$

et par un calcul explicite on a :

$$M(-\Lambda_\lambda^-) \leq \sup_{\mu > 0} \left(\frac{\mu}{\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right) \right]} \frac{1}{\left| \frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right|} \right).$$

On a deux cas possibles :

1. Si $|\arg(\lambda)| < \pi/2$ alors pour tout $\mu > 0$:

$$\left| \frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right| \geq \mu,$$

2. Si $\pi/2 \leq |\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0$, alors

$$\left| \frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right| \geq \mu \sin \alpha,$$

où $\alpha \in]\varepsilon_0, \pi/2]$; alors :

$$\left| \frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right| \geq \mu \sin \varepsilon_0,$$

on en déduit qu'il existe une constante C indépendante de λ telle que

$$\begin{aligned} M(-\Lambda_\lambda^-) &\leq \sup_{\mu > 0} \left(\frac{\mu}{\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right) \right]} \frac{1}{\left| \frac{\lambda}{d_{j^-}} + \mu \right|} \right) \\ &\leq \frac{C}{\cos \frac{\pi - \varepsilon_0}{2}} = \frac{C}{\sin(\varepsilon_0/2)} < \infty. \end{aligned}$$

D'où

$$-\Lambda_\lambda^- \in \text{Sect} \left[\pi - \arcsin \left(1/M(-\Lambda_\lambda^-) \right) \right],$$

où $M(-\Lambda_\lambda^-)$ est indépendant de λ , voir Proposition 2.1.1 dans [34].

On obtient d'une manière similaire

$$-\Lambda_\lambda^+ \in \text{Sect} \left(\pi - \arcsin \left[1/M(-\Lambda_\lambda^+) \right] \right),$$

avec $M(-\Lambda_\lambda^+)$ est indépendante de λ .

□

Soient

$$Q_\lambda^- = - \left[- \left(\Lambda - \frac{\lambda}{d_{j_-}} I \right) \right]^{1/2}, \quad Q_\lambda^+ = - \left[- \left(\Lambda - \frac{\lambda}{d_{j_+}} I \right) \right]^{1/2},$$

de même domaine

$$D(Q_\lambda^-) = D(Q_\lambda^+) = D \left([-\Lambda]^{1/2} \right) := D(Q),$$

(ici $Q := -[-\Lambda]^{1/2}$).

Proposition 4.9.2. *Les opérateurs Q_λ^- et Q_λ^+ génèrent des semi-groupes analytiques sur E .*

Démonstration. Voir [34] p.81 et aussi [5].

□

Proposition 4.9.3. *Ils existent $\epsilon_- > 0$, $\epsilon_+ > 0$, $C_- > 0$ et $C_+ > 0$ indépendantes de λ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon_- \right\}, \left\| (Q_\lambda^- - zI)^{-1} \right\| \leq \frac{C_-}{\sqrt{1 + |\lambda| + |z|}}, \\ \text{pour tout } z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon_+ \right\}, \left\| (Q_\lambda^+ - zI)^{-1} \right\| \leq \frac{C_+}{\sqrt{1 + |\lambda| + |z|}}. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Démonstration. Voir dans [31], le (lemme 4.2), et estimations (28)-(29).

□

On va maintenant se focaliser sur la résolution du système

$$(S1) \left\{ \begin{array}{l} v''_-(x) + \Lambda v_-(x) - \frac{\lambda}{d_{j_-}} v_-(x) = \frac{f_-(x)}{d_{j_-}} := N_-(x) \quad \text{sur }]-d, 0[\\ v''_+(x) + \Lambda v_+(x) - \frac{\lambda}{d_{j_+}} v_+(x) = \frac{f_+(x)}{d_{j_+}} := N_+(x) \quad \text{sur }]0, D[\\ v_-(-d) = 0 \\ v'_+(D) = 0 \\ v_-(0) = v_+(0) \\ \mu_- v'_-(0) = \mu_+ v'_+(0), \end{array} \right.$$

qu'on écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} v''_-(x) - (Q_\lambda^-)^2 v_-(x) = N_-(x) \quad \text{sur }]-d, 0[\\ v''_+(x) - (Q_\lambda^+)^2 v_+(x) = N_+(x) \quad \text{sur }]0, D[\\ v_-(-d) = 0 \\ v'_+(D) = 0 \\ v_-(0) = v_+(0) \\ \mu_- v'_-(0) = \mu_+ v'_+(0). \end{array} \right.$$

On a la solution v_\pm qui s'écrit sous forme

$$v_\pm(x) = e^{(x-c_\pm)Q_\lambda^\pm} \gamma_\pm + e^{(b_\pm-x)Q_\lambda^\pm} \delta_\pm + w_\pm(N)(x),$$

où $\gamma_\pm, \delta_\pm \in E$; $c_- = -d, b_- = 0$; $c_+ = 0, b_+ = D$ et

$$w_\pm(N_\pm)(x) = \frac{1}{2} \int_{c_\pm}^x e^{(x-t)Q_\lambda^\pm} (Q_\lambda^\pm)^{-1} N_\pm(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^{b_\pm} e^{(t-x)Q_\lambda^\pm} (Q_\lambda^\pm)^{-1} N_\pm(t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_-(x) &= e^{(x+d)Q_\lambda^-} \gamma_- + e^{-xQ_\lambda^-} \delta_- + w_-(N_-)(x), \quad x \in]-d, 0[\\ v_+(x) &= e^{xQ_\lambda^+} \gamma_+ + e^{(D-x)Q_\lambda^+} \delta_+ + w_+(N_+)(x), \quad x \in]0, D[, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_-(N_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-d}^x e^{(x-t)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt, \\ w_+(N_+)(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)Q_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} N_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^D e^{(t-x)Q_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} N_+(t) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} v'_-(x) &= Q_\lambda^- e^{(x+d)Q_\lambda^-} \gamma_- - Q_\lambda^- e^{-xQ_\lambda^-} \delta_- + w'_-(N_-)(x), \quad x \in]-d, 0[\\ v'_+(x) &= Q_\lambda^+ e^{xQ_\lambda^+} \gamma_+ - Q_\lambda^+ e^{(D-x)Q_\lambda^+} \delta_+ + w'_+(N_+)(x), \quad x \in]0, D[, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_-(0) &= Q_\lambda^- e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- - Q_\lambda^- \delta_- + w'_-(N_-)(0), \\ v'_+(0) &= Q_\lambda^+ \gamma_+ - Q_\lambda^+ e^{DQ_\lambda^+} \delta_+ + w'_+(N_+)(0). \end{aligned}$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_-(-d) = \gamma_- + e^{dQ_\lambda^-} \delta_- + w_-(N_-)(-d) = 0 \\ v'_+(D) = Q_\lambda^+ e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ - Q_\lambda^+ \delta_+ + w'_+(N_+)(D) = 0, \end{cases}$$

impliquent

$$\begin{cases} \gamma_- = -e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-d) \\ \delta_+ = e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D). \end{cases}$$

Les conditions de transmission deviennent

$$\begin{cases} e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- + \delta_- + w_-(N_-)(0) = \gamma_+ + e^{DQ_\lambda^+} \delta_+ + w_+(N_+)(0) \\ \mu_- [Q_{\lambda^-} e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- - Q_{\lambda^-} \delta_- + w'_-(N_-)(0)] = \mu_+ [Q_{\lambda^+} \gamma_+ - Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} \delta_+ + w'_+(N_+)(0)] \end{cases}.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \gamma_- = -e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-d), \\ \delta_+ = e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_{\lambda^+}^+)^{-1} w'_+(N_+)(D), \\ \mu_- (Q_{\lambda^-} e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- - Q_{\lambda^-} \delta_-) - \mu_+ (Q_{\lambda^+} \gamma_+ - Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} \delta_+) = -\mu_- w'_-(N_-)(0) + \mu_+ w'_+(N_+)(0), \\ e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- + \delta_- + w_-(N_-)(0) = \gamma_+ + e^{DQ_\lambda^+} \delta_+ + w_+(N_+)(0), \end{cases}$$

qui donne le système

$$\begin{cases} \gamma_- = -e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-d), \\ \delta_+ = e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_{\lambda^+}^+)^{-1} w'_+(N_+)(D), \\ \mu_- (e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- - \delta_-) - \mu_+ ((Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} \gamma_+ - (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} \delta_+) = (I) \\ [e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- + \delta_-] - [\gamma_+ + e^{DQ_\lambda^+} \delta_+] = (II), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} (I) := (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} [-\mu_- w'_-(N_-)(0) + \mu_+ w'_+(N_+)(0)] \\ (II) := w_+(N_+)(0) - w_-(N_-)(0). \end{cases}$$

En utilisant les deux premières équations, on obtient

$$\begin{aligned} & \mu_- (e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- - \delta_-) - \mu_+ ((Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} \gamma_+ - (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} \delta_+) \\ = & \mu_- (e^{dQ_\lambda^-} [-e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-d)] - \delta_-) \\ & - \mu_+ (Q_{\lambda^-}^{-1} Q_{\lambda^+} \gamma_+ - Q_{\lambda^-}^{-1} Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} [e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_{\lambda^+}^+)^{-1} w'_+(N_+)(D)]) \\ = & -\mu_- [e^{2dQ_\lambda^-} \delta_- + \delta_-] - \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) - \mu_+ (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} \gamma_+ \\ & + \mu_+ (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} e^{2DQ_\lambda^+} \gamma_+ + \mu_+ (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} e^{DQ_\lambda^+} (Q_{\lambda^+}^+)^{-1} w'_+(N_+)(D) \\ = & -\mu_- [I + e^{2dQ_\lambda^-}] \delta_- - \mu_+ (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} Q_{\lambda^+} [I - e^{2DQ_\lambda^+}] \gamma_+ \\ & + \mu_+ (Q_{\lambda^-}^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) - \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & [e^{dQ_\lambda^-} \gamma_- + \delta_-] - [\gamma_+ + e^{DQ_\lambda^+} \delta_+] \\
 = & e^{dQ_\lambda^-} [-e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-l)] + \delta_- \\
 & - [\gamma_+ + e^{DQ_\lambda^+} [e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D)]] \\
 = & (I - e^{2dQ_\lambda^-}) \gamma_- - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \gamma_+ \\
 & - e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) - e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D).
 \end{aligned}$$

Le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\mu_- [I + e^{2dQ_\lambda^-}] \delta_- - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ [I - e^{2DQ_\lambda^+}] \gamma_+ \\
 = (I) - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) + \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) := (I') \\
 (I - e^{2dQ_\lambda^-}) \delta_- - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \gamma_+ \\
 = (II) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D) := (II'),
 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\mu_- [I + e^{2dQ_\lambda^-}] \delta_- - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ [I - e^{2DQ_\lambda^+}] \gamma_+ = (I') \\
 (I - e^{2dQ_\lambda^-}) \delta_- - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \gamma_+ = (II').
 \end{array} \right.$$

Le déterminant abstrait de ce système est alors :

$$\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+} = \mu_- (I + e^{2dQ_\lambda^-}) (I + e^{2DQ_\lambda^+}) + \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (I - e^{2dQ_\lambda^-}).$$

Proposition 4.9.4. $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}$ est inversible à inverse borné et

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} = (1/l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}) (-\Lambda) \\
 \|\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{\mu_-}.
 \end{array} \right.$$

où $l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z)$ est définie par :

$$l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z) = \mu_- \left(1 + e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}}\right) \left(1 + e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}}\right) \\ + \mu_+ \frac{(z + \lambda_+)^{1/2}}{(z + \lambda_-)^{1/2}} \left(1 - e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}}\right) \left(1 - e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}}\right);$$

Démonstration. Voir (4.9.1). □

Pour son inversibilité, on va utiliser H^∞ -calcul pour les opérateurs sectoriels. On sait par ailleurs que les opérateurs $(I + e^{2dQ_\lambda^-})$, $(I + e^{2DQ_\lambda^+})$, $(I - e^{2DQ_\lambda^+})$ et $(I - e^{2dQ_\lambda^-})$ sont inversibles à inverse borné, voir Proposition 2.3.6, page 60 dans [40].

4.9.1 Inversibilité de $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}$

Posons

$$\frac{\lambda}{d_{j_-}} = \lambda_-, \quad \frac{\lambda}{d_{j_+}} = \lambda_+,$$

où, comme nous l'avons précisé plus haut, λ est fixé tel que

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0,$$

et rappelons, pour $\omega \in]0, \pi[$:

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

On considère la fonction

$$l_{\lambda, \mu_-, \mu_+} : S_\omega \ni z \longmapsto l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z),$$

définie par

$$l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z) = \mu_- \left(1 + e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}}\right) \left(1 + e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}}\right) \\ + \mu_+ \frac{(z + \lambda_+)^{1/2}}{(z + \lambda_-)^{1/2}} \left(1 - e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}}\right) \left(1 - e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}}\right);$$

cette fonction est analytique et bornée sur S_ω car

$$\operatorname{Re}(z + \lambda_-)^{1/2} > 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}(z + \lambda_+)^{1/2} > 0,$$

et donc $l_{\lambda, \mu_-, \mu_+} \in H^\infty(S_\omega)$. D'autre part, on sait que $-\Lambda$ possède le caractère borné $H^\infty(S_\omega)$ du calcul fonctionnel; donc

$$\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+} = l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(-\Lambda).$$

Maintenant, en vertu de nos lemmes; nous avons, pour tout $z \in S_\omega$:

$$\begin{aligned} |l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z)| &\geq \left(\mu_+ \left| \frac{(z + \lambda_+)^{1/2}}{(z + \lambda_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + \mu_- \left| 1 + e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right| \right) \cdot |\cos(\Pi/2)|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Pi &= \arg \left(\frac{(z + \lambda_+)^{1/2}}{(z + \lambda_-)^{1/2}} \right) + \arg \left(1 - e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right) \\ &\quad + \arg \left(1 - e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right) \\ &\quad - \arg \left(1 + e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\Pi| &\leq \left| \arg(z + \lambda_+)^{1/2} - \arg(z + \lambda_-)^{1/2} \right| \\ &\quad + \left| \arg \left(1 - e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2d(z + \lambda_-)^{1/2}} \right) \right| \\ &\quad + \left| \arg \left(1 - e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2D(z + \lambda_+)^{1/2}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Et il est facile de voir qu'ils existent $\omega_{\lambda_+} \in]0, \omega/2[$ et $\omega_{\lambda_-} \in]0, \omega/2[$ (avec $\omega_{\lambda_+} < \omega_{\lambda_-}$ par exemple) tel que

$$\begin{cases} 2d(z + \lambda_-)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_-}} \\ 2D(z + \lambda_+)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_+}} \end{cases}$$

par conséquent, puisque

$$\begin{cases} \left| \arg \left(1 - e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}} \right) \right| < \omega_{\lambda_+} \\ \left| \arg \left(1 - e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}} \right) - \arg \left(1 + e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}} \right) \right| < \omega_{\lambda_-}, \end{cases}$$

on déduit que

$$|\Pi| \leq \omega_{\lambda_+} - \omega_{\lambda_-} + \omega_{\lambda_-} + \omega_{\lambda_+} = 2\omega_{\lambda_+} < \omega,$$

ainsi

$$\begin{aligned} |l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z)| &\geq \left(\mu_+ \left| \frac{(z + \lambda_+)^{1/2}}{(z + \lambda_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + \mu_- \left| 1 + e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}} \right| \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} \right), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} |l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(z)| &\geq \mu_- \left| 1 + e^{-2d(z+\lambda_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2D(z+\lambda_+)^{1/2}} \right| \cos \left(\frac{\omega}{2} \right) \\ &\geq \mu_- \left[1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_-}))} \right] \left[1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_+}))} \right] \cos \left(\frac{\omega}{2} \right) \\ &\geq \mu_- \left(1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega/2))} \right)^2 \cos \left(\frac{\omega}{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Alors, la fonction $l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(\cdot)$ ne s'annule pas sur S_ω et la fonction $1/l_{\lambda, \mu_-, \mu_+}(\cdot)$ est bornée, donc appartient à $H^\infty(S_\omega)$.

Finalement, $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}$ est inversible à inverse borné et

$$\begin{cases} \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} = \left(1/l_{\lambda, \mu_-, \mu_+} \right) (-\Lambda) \\ \left\| \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\mu_-}. \end{cases}$$

La constante C est indépendante du paramètre λ .

Maintenant, de l'égalité

$$\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+} \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+},$$

on déduit aussi

$$\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \Lambda = \Lambda \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1},$$

sur le domaine $D(\Lambda)$, donc $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1}$ est un opérateur borné de $D(\Lambda)$ dans lui même. Par conséquent, par interpolation $\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1}$ est borné sur tout espace d'interpolation $(D(\Lambda), E)_{\alpha, s}$ dans lui même (voir la définition dans [33]) et il est clair que nous avons aussi la même estimation :

$$\left\| \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}((D(\Lambda), E)_{\alpha, s})} \leq \frac{C}{\mu_-}.$$

4.9.2 Résolution de (S1)

On rappelle que :

$$\begin{cases} (I) := (Q_\lambda^-)^{-1} \left[-\mu_- w'_-(N_-)(0) + \mu_+ w'_+(N_+)(0) \right] \\ (II) := w_+(N_+)(0) - w_-(N_-)(0), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (I') := (I) - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) + \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) \\ (II') := (II) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D). \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} (I') &= (I) - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) + \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) \\ &= (Q_\lambda^-)^{-1} \left[-\mu_- w'_-(N_-)(0) + \mu_+ w'_+(N_+)(0) \right] \\ &\quad - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) + \mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (II') &= (II) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D) \\ &= w_+(N_+)(0) - w_-(N_-)(0) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D). \end{aligned}$$

Du système

$$\begin{cases} -\mu_- (I + e^{2dQ_\lambda^-}) \delta_- - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) \gamma_+ = (I') \\ (I - e^{2dQ_\lambda^-}) \delta_- - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \gamma_+ = (II'), \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \delta_- = \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (II') - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) (I') \right] \\ \gamma_+ = \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left[-\mu_- (I + e^{2dQ_\lambda^-}) (II') - (I - e^{2dQ_\lambda^-}) (I') \right], \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_- &= -e^{dQ_\lambda^-} \delta_- - w_-(N_-)(-d) \\ &= -\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} e^{dQ_\lambda^-} \left(\left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (II') - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) (I') \right] \right. \\ &\quad \left. - w_-(N_-)(-d) \right), \end{aligned}$$

de laquelle nous obtenons pour $x \in]-d, 0[$

$$\begin{aligned} v_-(x) &= e^{(x+d)Q_\lambda^-} \gamma_- + e^{-xQ_\lambda^-} \delta_- + w_-(N_-)(x) \\ &= -\Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} e^{dQ_\lambda^-} e^{(x+d)Q_\lambda^-} \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (II') - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) (I') \right] \\ &\quad - e^{(x+d)Q_\lambda^-} [w_-(N_-)(-d)] \\ &\quad + \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} e^{-xQ_\lambda^-} \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (II') - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) (I') \right] \\ &\quad + w_-(N_-)(x); \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} &\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) (II') - (I + e^{2DQ_\lambda^+}) (I') \\ = &\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) [w_+(N_+)(0) - w_-(N_-)(0)] \\ &+ \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+}) \left[e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(L) \right] \\ &- (Q_\lambda^-)^{-1} (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \left[-\mu_- w'_-(N_-)(0) + \mu_+ w'_+(N_+)(0) \right] \\ &- (I + e^{2DQ_\lambda^+}) \left[\mu_- e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) - \mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} e^{DQ_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) \right]; \end{aligned}$$

on obtient pour tout $x \in]-d, 0[$:

$$\begin{aligned} v_-(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\ &\quad - \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\left(I + e^{2DQ_\lambda^+} \right) (I') \right] \\ &\quad - e^{(x+d)Q_\lambda^-} [w_-(N_-)(-d)] \\ &\quad + w_-(N_-)(x). \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} \delta_+ &= e^{DQ_\lambda^+} \gamma_+ + (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D) \\ &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} e^{DQ_\lambda^+} \left(\left[-\mu_- \left(I + e^{2dQ_\lambda^-} \right) (II') - \left(I - e^{2dQ_\lambda^-} \right) (I') \right] \right) \\ &\quad + (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D), \end{aligned}$$

et pour tout $x \in]0, D[$,

$$\begin{aligned} v_+(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left(e^{xQ_\lambda^+} + e^{(2D-x)Q_\lambda^+} \right) \left[-\mu_- \left(I + e^{2dQ_\lambda^-} \right) (II') - \left(I - e^{2dQ_\lambda^-} \right) (I') \right] \\ &\quad + (Q_\lambda^+)^{-1} e^{(D-x)Q_\lambda^+} w'_+(N_+)(D) + w_+(N_+)(x). \end{aligned}$$

4.9.3 Régularité optimale de v_- et v_+ et estimations

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = Au(x) + f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

Avec les hypothèses :

- L'hypothèse géométrique sur l'espace est :

$$X \text{ est un espace UMD..} \tag{4.9}$$

- L'hypothèse d'ellipticité

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists c > 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + \lambda} \quad (4.10)$$

- L'hypothèse $Bip(\theta_A, X)$

$$\forall s \in \mathcal{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists c > 1, \theta_A \in]0, \pi[\ \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c e^{\theta_A |s|}. \quad (4.11)$$

Lemme 4.9.5. Soit $f \in L^p(0, 1, X)$, $1 < p < +\infty$. Sous les hypothèses 4.9, 4.10, 4.11 on a

1. $x \mapsto F(x, f) = Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1, X)$.
2. $x \mapsto F(1-x, f(1-\cdot)) = Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1, X)$.
3. $x \mapsto T(x, f) = Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1, X)$.

Démonstration. Les première et deuxième assertions sont une conséquence du théorème Dore-Venni [23]. Pour l'assertion (3.), on écrit, pour $x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} T(x, f) &= Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x+s)Q} f(s) ds + Q \int_x^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x-s)Q} e^{(2s)Q} f(s) ds + e^{(2x)Q} Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \\ &= F(x, e^{2\cdot Q} f) + e^{2xQ} F(1-x, f(1-\cdot)) \end{aligned}$$

et nous appliquons (1.) et (2.). □

Lemme 4.9.6. Supposons que l'hypothèse 4.11 est réalisée et soit $p \in]1, +\infty[$.

1. $Ae^Q \varphi \in L^p(0, 1, X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.
2. $Qe^Q \varphi \in L^p(0, 1, X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{p}, p}$.

Démonstration. Voir la preuve dans [15], [30] et Triebel [60] théorème dans la page 96. □

Corollaire 4.9.7. $\int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{p}, p}$

Démonstration. En appliquant le troisième point du lemme 4.9.5, on a :

$$Q e^{\cdot Q} \int_0^1 e^{(s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1, X),$$

alors, du lemme 4.9.6, on conclut que :

$$\int_0^1 e^{(s)Q} f(s) ds \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{p}, p}.$$

□

Dans cette section, nous utiliserons le lemme suivant (voir la preuve dans [31]), où les auteurs ont utilisé le lemme 2.6 de [24].

Lemme 4.9.8. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Alors :*

1. *Pour $\lambda \in S_\omega$, $Q_\lambda^- = - \left[- (\Lambda_\lambda^-) \right]^{1/2}$ qui génère un semi-groupe $(e^{tQ_\lambda^-})_{t \geq 0}$ borné, analytique pour $t > 0$ et fortement continu pour $t \geq 0$ satisfait en outre*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists K_0 > 0, \exists c_0 > 0, \forall t \geq 1/2, \forall \lambda \in S_\omega : \\ \max \left\{ \| e^{tQ_\lambda^-} \|_{L(E)}, \| G_\lambda e^{tQ_\lambda^-} \|_{L(E)} \right\} \leq K_0 e^{-tc_0 |\lambda|^{1/2}}. \end{array} \right.$$

2. *Pour $x \in [a, b]$, $\lambda \in S_\omega$ et $f \in L^q(a, b; E)$, $1 < q < +\infty$, nous avons établi,*

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\lambda, f}(x) = \int_a^x e^{(x-t)Q_\lambda^-} f(t) dt, \quad a \leq x \\ V_{\lambda, f}(x) = \int_x^b e^{(t-x)Q_\lambda^-} f(t) dt, \quad x \leq b. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Il existe $M > 0$ telle que $f \in L^q(a, b; E)$ et les $\lambda \in S_\omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U_{\lambda, f}\|_{L^p(a, b; E)} \leq \frac{M}{\sqrt{|\lambda| + 1}} \|f\|_{L^p(a, b; E)} \\ \|V_{\lambda, f}\|_{L^p(a, b; E)} \leq \frac{M}{\sqrt{|\lambda| + 1}} \|f\|_{L^p(a, b; E)}. \end{array} \right.$$

On doit montrer que :

$$\begin{cases} v_- \in W^{2,q}(-d, 0; E) \cap L^q(-d, 0; D(\Lambda_\lambda^-)) \\ v_+ \in W^{2,q}(0, D; E) \cap L^q(0, D; D(\Lambda_\lambda^+)) \end{cases}$$

et que toutes les conditions aux limites et de transmission sont vérifiées.

On rappelle pour $x \in]-d, 0[$, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_\lambda^- v_-(x) = (Q_\lambda^-)^2 v_-(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} (Q_\lambda^-)^2 \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\ &\quad - \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} (Q_\lambda^-)^2 \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left(I + e^{2DQ_\lambda^+} \right) (I') \\ &\quad - (Q_\lambda^-)^2 e^{(x+d)Q_\lambda^-} [w_-(N_-)(-d)] \\ &\quad + (Q_\lambda^-)^2 w_-(N_-)(x) \\ &= (I)(x) + (II)(x) + (III)(x) + (IV)(x). \end{aligned}$$

On doit montrer que

$$x \mapsto (Q_\lambda^-)^2 v_-(x) \in L^q(-d, 0; E).$$

On a, pour $x \in]-d, 0[$:

$$\begin{aligned} (I)(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} (Q_\lambda^-)^2 \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\ &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\ &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- e^{-xQ_\lambda^-} [\mu_+ Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+})] (II') \\ &\quad + \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- e^{(x+2d)Q_\lambda^-} [\mu_+ Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+})] (II') \\ &= (1)(x) + (2)(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (II') &= (II) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D) \\ &= w_+(N_+)(0) - w_-(N_-)(0) + e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w'_+(N_+)(D), \end{aligned}$$

Proposition 4.9.9. $x \mapsto I(x) \in L^q(-d, 0; E)$.

Démonstration. Pour le terme (2)(x), le semi-groupe $e^{(x+2d)Q_\lambda^-}$ reste car $(x+2d) \neq 0$ pour presque tout $x \in (-d, 0)$ donc

$$e^{(x+2d)Q_\lambda^-} [\mu_+ Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+})] (II') \in D((Q_\lambda^+)^k) \subset D(Q_\lambda^+), \forall k \geq 1.$$

Pour le terme (1)(x), le semi-groupe $e^{-xQ_\lambda^-}$ devient l'opérateur identité lorsque $x=0$:

$$\begin{aligned} (1)(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- [\mu_+ Q_\lambda^+ (I - e^{2DQ_\lambda^+})] (II') \\ &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- \mu_+ Q_\lambda^+ (II') + \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} Q_\lambda^- \mu_+ Q_\lambda^+ e^{2DQ_\lambda^+} (II') \\ &= (3)(x) + (4)(x), \end{aligned}$$

on a $x \mapsto (4)(x) \in L^q(-d, 0; E)$ car le semi-groupe $e^{2DQ_\lambda^+}$ est régularisant, par conséquent : $e^{2DQ_\lambda^+} (II') \in D((Q_\lambda^+)^k) \subset D(Q_\lambda^+)$, $\forall k \geq 1$, alors (4) $\in L^q(-d, 0; E)$,

pour le terme (3) :

$$\begin{aligned} \mu_+ Q_\lambda^+ (II') &= \mu_+ Q_\lambda^+ [w_+(N_+(0)) - w_-(N_-(0))] \\ &\quad + \mu_+ Q_\lambda^+ [e^{dQ_\lambda^-} w_-(N_-)(-d) + e^{DQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} w_+(N_+)(D)] \\ &= (5) + (6), \end{aligned}$$

pour (6), il y'a présence des semi-groupes $e^{dQ_\lambda^-}$ et $e^{DQ_\lambda^+}$ qui sont régularisants,

il reste (5) :

$$(5) = \mu_+ Q_\lambda^+ [w_+(N_+(0)) - w_-(N_-(0))] \tag{4.13}$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_+ Q_\lambda^+ \left[\int_{-d}^0 e^{(-s)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(s) ds - \int_0^D e^{sQ_\lambda^+} (Q_\lambda^+)^{-1} N_+(s) ds \right] \tag{4.14}$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_+ Q_\lambda^+ \left[\underbrace{((Q_\lambda^-)^{-1} \int_0^d e^{(s)Q_\lambda^-} N_-(s) ds)}_{\text{}} - \underbrace{(Q_\lambda^+)^{-1} \int_0^D e^{sQ_\lambda^+} N_+(s) ds}_{\text{}} \right]. \tag{4.15}$$

Dans (4.15), les deux intégrales appartiennent à $D(Q_\lambda, E)_{\frac{1}{q}, q}$ (d'après corollaire 4.9.7), par suite en appliquant le lemme 4.9.5, (4.15) appartient à $L^q(-d, 0; E)$,

Conclusion : $x \mapsto I(x) \in L^q(-d, 0; E)$. □

idem pour (II)(x), (III)(x).

Proposition 4.9.10. $x \mapsto IV(x) \in L^q(-d, 0; E)$.

Démonstration. Rappelons que :

$$\begin{aligned} w_-(N_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-d}^x e^{(x-s)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(s-x)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(s) ds, \\ (Q_\lambda^-)^2 w_-(N_-)(x) &= \frac{1}{2} \left((Q_\lambda^-)^{-1} \right)^2 \left[\underbrace{\int_{-d}^x e^{(x-s)Q_\lambda^-} N_-(s) ds}_{\text{}} + \underbrace{(Q_\lambda^-) \int_x^0 e^{(s-x)Q_\lambda^-} N_-(s) ds}_{\text{}} \right], \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.9.5 qui grâce à Dore-Venni les deux intégrales appartiennent à $\in L^q(-d, 0; E)$. □

Conclusion : $x \mapsto (Q_\lambda^-)^2 v_-(x) \in L^q(-d, 0; E)$.

Le terme

$$\begin{aligned} v_-''(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} (Q_\lambda^-)^2 \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\ &\quad - \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} (Q_\lambda^-)^2 \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left(I + e^{2DQ_\lambda^+} \right) (I') \\ &\quad - (Q_\lambda^-)^2 e^{(x+d)Q_\lambda^-} [w_-(N_-)(-l)] + w_-''(N_-)(x), \end{aligned}$$

peut être traité de la même manière.

Nous allons maintenant majorer

$$\|v_-\|_{L^q(-d, 0; E)}.$$

On rappelle que

$$\begin{aligned}
 v_-(x) &= \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\mu_+ (Q_\lambda^-)^{-1} Q_\lambda^+ \left(I - e^{2DQ_\lambda^+} \right) (II') \right] \\
 &\quad - \Delta_{\lambda, \mu_-, \mu_+}^{-1} \left(e^{-xQ_\lambda^-} - e^{(x+2d)Q_\lambda^-} \right) \left[\left(I + e^{2DQ_\lambda^+} \right) (I') \right] \\
 &\quad - e^{(x+d)Q_\lambda^-} [w_-(N_-)(-d)] \\
 &\quad + w_-(N_-)(x),
 \end{aligned}$$

où

$$w_-(N_-)(x) = \frac{1}{2} \int_{-d}^x e^{(x-t)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt,$$

et λ est tel que

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0.$$

Maintenant, nous utilisons le lemme 4.9.8 :

on a

$$\begin{aligned}
 w_-(N_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-d}^x e^{(x-t)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)Q_\lambda^-} (Q_\lambda^-)^{-1} N_-(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} (Q_\lambda^-)^{-1} \int_{-d}^x e^{(x-t)Q_\lambda^-} N_-(t) dt + \frac{1}{2} (Q_\lambda^-)^{-1} \int_x^0 e^{(t-x)Q_\lambda^-} N_-(t) dt,
 \end{aligned}$$

grâce au lemme 4.9.8 et (4.8), il existe deux constantes $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ (indépendantes de λ) telle que :

$$\|w_-(N_-)\|_{L^q(-d,0;E)} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{M_2}{\sqrt{|\lambda|} + 1} \right] \|N_-\|_{L^q(-d,0;E)},$$

d'où l'existence d'une constante $C > 0$ (indépendante de λ) telle que :

$$\|w_-\|_{L(L^q(-d,0;E))} \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Une estimation similaire est obtenue pour les autres termes.

En résumé, nous obtenons

$$\begin{cases} \|v_-\|_{L(L^q(-d,0;E))} = \|v_-\|_{L(L^q(\Omega_-))} \leq \frac{C}{|\lambda|} \\ \|v_+\|_{L(L^q(\Omega_+))} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

Par la même méthode, on obtient :

$$\begin{cases} \|w_-\|_{L(L^q(-d,0;E))} = \|w_-\|_{L(L^q(\Omega_-))} \leq \frac{C}{|\lambda|} \\ \|w_+\|_{L(L^q(\Omega_+))} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

Puis dans l'espace $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} &= \|W\|_{\mathcal{E}} = \max(\|v\|_{L^q(\Omega)}, \|w\|_{L^q(\Omega)}) \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{E}}; \end{aligned}$$

nous concluons par le théorème :

Théorème 4.9.11. *L'opérateur \mathcal{L} génère un semi-groupe analytique dans l'espace $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$.*

□

4.10 Retour à l'équation d'évolution

Revenons à notre équation abstraite d'évolution :

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t), & t > 0 \\ V(0) = V^0. \end{cases}$$

Puisque \mathcal{L} génère un sémigroupe analytique dans $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$ (qui décroît de façon exponentielle), alors la solution (si elle existe) s'écrit comme suit :

$$V(t) = e^{t\mathcal{L}}V^0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} [\mathcal{B}(s)V(s)] ds, \quad (4.16)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(t)V(t) &= \begin{pmatrix} \omega_j(t)s_j(t)I & f_a(t)s_a(t)I \\ (1 - \omega_j(t))s_j(t)I & s_a(t)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega_j(t)s_j(t)J(t) + f_a(t)s_a(t)A(t) \\ (1 - \omega_j(t))s_j(t)J(t) + s_a(t)A(t) \end{pmatrix} \\
 &:= G(t, V(t)) ,
 \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation opérationnelle

$$\begin{pmatrix} J(t, \cdot, \cdot) \\ A(t, \cdot, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} ,$$

avec, par exemple, pour $t > 0$:

$$J(t)(x, y) = J(t, x, y) = \begin{cases} J_-(t, x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega_- \\ J_+(t, x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega_+ . \end{cases}$$

4.10.1 Cadre $L^q(0, T; \mathcal{E})$

On note que l'espace de Banach $L^q(0, T; \mathcal{E})$ où $q \in]1, +\infty[$ est UMD.

Ici, la représentation (4.16) est bien définie, si pour tout

$$t \mapsto \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} \in L^q(0, T; \mathcal{E}),$$

on a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \omega_j(t)s_j(t)J(t) + f_a(t)s_a(t)A(t) \\ (1 - \omega_j(t))s_j(t)J(t) + s_a(t)A(t) \end{pmatrix} \in L^q(0, T; \mathcal{E}).$$

Cela est vérifié si, par exemple, les taux ω_j , s_j , f_a et s_a sont bornés. D'où

$$t \mapsto G(t, V(t)) \in L^q(0, T; \mathcal{E}),$$

et du coup l'intégrale

$$\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} G(s, V(s)) ds$$

est bien défini et grâce à l'assertion 1. du lemme (4.9.5) on a :

$$t \mapsto \mathcal{L} \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} G(s, V(s)) ds \in L^q(0, T; \mathcal{E}).$$

4.10.2 Application du théorème du point fixe

On applique le théorème du point fixe à l'équation :

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t), & t \in (0, T) \\ V(0) = V^0. \end{cases}$$

On peut également considérer cette équation comme une équation linéaire non autonome puisque nous savons que $\mathcal{L} + \mathcal{B}(t)$ pour chaque $t \geq 0$ génère un semigroupe analytique ($\mathcal{B}(t)$ est borné) qu'on écrit sous forme

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + G(t, V(t)), & t \in (0, T) \\ V(0) = V^0. \end{cases}$$

Il est bien connu que l'équation :

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{L}\Phi(t) + g(t), & t \in (0, T) \\ \Phi(0) = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

avec $g \in L^q(0, T; \mathcal{E})$ admet la L^q -régularité maximale. Donc pour tout $g \in L^q(0, T; \mathcal{E})$, il existe une unique solution

$$\Phi \in W_0^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})),$$

et il existe une constante $C_0 > 0$ tel que

$$\|\Phi\|_1 := \|\Phi\|_{L^q(0, T; D(\mathcal{L}))} + \|\Phi'\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})} \leq C_0 \|g\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})}.$$

D'autre part, on sait que

$$W_0^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})) \subset C\left([0, T]; (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}\right)$$

pour l'espace d'interpolation voir [33] avec injection continue et donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \leq C_1 \|\Phi\|_1.$$

Ces constantes ne dépendent pas de T ici car \mathcal{L} est inversible, le semigroupe est à décroissance exponentielle, donc on a la Lq -régularité maximale sur $(0, +\infty)$. Considérons maintenant, le problème :

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{L}\Phi(t) + G(t, 0) = \mathcal{L}\Phi(t), & t \in (0, T) \\ \Phi(0) = V^0, \end{cases}$$

qui admet une solution unique donnée par :

$$\Phi^*(t) = e^{t\mathcal{L}}V^0,$$

appartenant à $W^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L}))$ pour tout

$$V^0 \in (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}.$$

Introduisons la boule fermée suivante de $L^q(0, T; \mathcal{E})$ de centre Φ^* et de rayon $r \in]0, 1[$:

$$\mathbb{B}_r = \left\{ W \in L^q(0, T; \mathcal{E}) : W - \Phi^* \in W_0^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})) \text{ et } \|W - \Phi^*\|_1 \leq r \right\};$$

Nous allons appliquer le théorème du point fixe.

1. Pour chaque $W \in \mathbb{B}_r$, le problème

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + G(t, W(t)), & t \in (0, T) \\ V(0) = V^0, \end{cases}$$

admet une unique solution $V \in W^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L}))$.

Définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{B}_r &\longrightarrow W^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})) \\ W &\longmapsto \Psi(W) = V. \end{aligned}$$

2. Montrons que Ψ est une contraction stricte \mathbb{B}_r . on a

$$\begin{aligned} \|\Psi(W) - \Phi^*\|_1 &= \|V - \Phi^*\|_1 \\ &\leq C_0 \|G(\cdot, W)\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})} \\ &\leq C_0 \|G(\cdot, W) - G(\cdot, \Phi^*)\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})} + C_0 \|G(\cdot, \Phi^*) - G(\cdot, 0)\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})} \\ &\quad + C_0 \|G(\cdot, 0)\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})}; \end{aligned}$$

où évidemment $G(\cdot, 0) = 0$.

3. On rappelle que

$$G(t, V(t)) = G\left(t, \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \omega_j(t)s_j(t)J(t) + f_a(t)s_a(t)A(t) \\ (1 - \omega_j(t))s_j(t)J(t) + s_a(t)A(t) \end{pmatrix},$$

Posons

$$W(\cdot) = \begin{pmatrix} W_1(\cdot) \\ W_2(\cdot) \end{pmatrix}, \quad \Phi^*(\cdot) = \begin{pmatrix} \Phi_1^*(\cdot) \\ \Phi_2^*(\cdot) \end{pmatrix};$$

On sait que

$$W - \Phi^* \in W_0^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L}))$$

par définition de \mathbb{B}_r , on a

$$W - \Phi^* \in W_0^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})) \subset C\left([0, T]; (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}\right)$$

donc pour tout $t \in [0, T]$:

$$W(t) - \Phi^*(t) \in (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}.$$

on a

$$G(t, W(t)) - G(t, \Phi^*(t)) = \begin{pmatrix} \omega_j(t) s_j(t) [W_1(t) - \Phi_1^*(t)] + f_a(t) s_a(t) [W_2(t) - \Phi_2^*(t)] \\ (1 - \omega_j(t)) s_j(t) [W_1(t) - \Phi_1^*(t)] + s_a(t) [W_2(t) - \Phi_2^*(t)] \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} & \|G(t, W(t)) - G(t, \Phi^*(t))\|_{\mathcal{E}} \\ &= \max \left(\|\omega_j(t) s_j(t) [W_1(t) - \Phi_1^*(t)] + f_a(t) s_a(t) [W_2(t) - \Phi_2^*(t)]\|_{L^q(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. \|(1 - \omega_j(t)) s_j(t) [W_1(t) - \Phi_1^*(t)] + s_a(t) [W_2(t) - \Phi_2^*(t)]\|_{L^q(\Omega)} \right) \\ &\leq \phi(t) \left(\| [W_1(t) - \Phi_1^*(t)] \|_{L^q(\Omega)} + \| [W_2(t) - \Phi_2^*(t)] \|_{L^q(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

où

$$\phi(t) = \sup (\omega_j(t) s_j(t), f_a(t) s_a(t), |(1 - \omega_j(t))| s_j(t), s_a(t))$$

4. On note que toutes ces fonctions dans le sup sont positives et ne sont pas seulement des coefficients à valeur vectorielle. Ensuite, dans l'espace $\mathcal{E} = [L^q(\Omega)]^2$, on a

$$\begin{aligned} \|G(t, W(t)) - G(t, \Phi^*(t))\|_{\mathcal{E}} &\leq \phi(t) \|W(t) - \Phi^*(t)\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \phi(t) \|W(t) - \Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \\ &\leq \phi(t) \sup_{t \in [0, T]} \|W(t) - \Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|G(\cdot, W) - G(\cdot, \Phi^*)\|_{L^q(0, T; \mathcal{E})} \leq \|\phi\|_{L^q(0, T)} \sup_{t \in [0, T]} \|W(t) - \Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}}.$$

De même :

$$\begin{aligned} \|G(\cdot, \Phi^*) - G(\cdot, 0)\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} &= \|G(\cdot, \Phi^*)\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} \\ &\leq \|\phi\|_{L^q(0,T)} \sup_{t \in [0,T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}}. \end{aligned}$$

5. Finalement :

$$\begin{aligned} &\|\Psi(W) - \Phi^*\|_1 \\ &= \|V - \Phi^*\|_1 \\ &\leq C_0 \|G(\cdot, W)\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} \\ &\leq C_0 \|G(\cdot, W) - G(\cdot, \Phi^*)\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} + C_0 \|G(\cdot, \Phi^*)\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} \\ &\leq C_0 \|\phi\|_{L^q(0,T)} \left[\sup_{t \in [0,T]} \|W(t) - \Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}} + \sup_{t \in [0,T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}} \right] \\ &\leq C_0 \|\phi\|_{L^q(0,T)} \left[C_1 \|W - \Phi^*\|_1 + \sup_{t \in [0,T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}} \right] \\ &\leq C_0 \|\phi\|_{L^q(0,T)} \left[C_1 r + \sup_{t \in [0,T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}} \right]. \end{aligned}$$

6. De la même manière on a, pour deux quelconques W, \bar{W} dans \mathbb{B}_r

$$\begin{aligned} \|\Psi(W) - \Psi(\bar{W})\|_1 &\leq C_0 \|G(\cdot, W) - G(\cdot, \bar{W})\|_{L^q(0,T;\mathcal{E})} \\ &\leq C_0 \|\phi\|_{L^q(0,T)} \sup_{t \in [0,T]} \|(W - \bar{W})(t)\|_{(D(\mathcal{L});\mathcal{E})_{1/q,q}} \\ &\leq C_0 C_1 \|\phi\|_{L^q(0,T)} \|W - \bar{W}\|_1. \end{aligned}$$

La fonction

$$\mu(\tau) = \|\phi\|_{L^q(0,\tau)} = \left(\int_0^\tau |\phi(s)|^q ds \right)^{1/q},$$

est continu (par rapport à τ) positive, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, \mu(T)]$; il existe donc $T^* \leq T$ tel que

$$C_0 C_1 \|\phi\|_{L^q(0,T^*)} \leq 1/2, \quad (4.18)$$

d'où nous obtenons que la fonction :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{B}_r^* &\longrightarrow W^{1,q}(0, T; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T; D(\mathcal{L})) \\ W &\longmapsto \Psi(W) = V. \end{aligned}$$

est une contraction stricte, où

$$\mathbb{B}_r^* = \left\{ W \in L^q(0, T^*; \mathcal{E}) : W - \Phi^* \in W_0^{1,q}(0, T^*; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T^*; D(\mathcal{L})) \text{ et } \|W - \Phi^*\|_1 \leq r \right\} \quad (4.19)$$

7. Il reste à montrer que Ψ s'applique \mathbb{B}_r^* en \mathbb{B}_r^* . On a vu que

$$\|\Psi(W) - \Phi^*\|_1 \leq C_0 \|\phi\|_{L^q(0, T)} \left[C_1 r + \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \right] \quad (4.20)$$

$$\leq C_0 C_1 \|\phi\|_{L^q(0, T)} r + C_0 \|\phi\|_{L^q(0, T)} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}}. \quad (4.21)$$

On rappelle que

$$\Phi^*(t) = e^{t\mathcal{L}} V^0,$$

où

$$V^0 \in (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q};$$

Φ^* appartenant à $W^{1,q}(0, +\infty; \mathcal{E}) \cap L^q(0, +\infty; D(\mathcal{L}))$ pour tout :

$$V^0 \in (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}.$$

Puisque \mathcal{L} est à décroissance exponentielle, il existe $\delta > 0$ et $M \geq 1$ tel que

$$\|e^{t\mathcal{L}}\| \leq M e^{-\delta t},$$

donc

$$\|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \leq M \|V^0\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}},$$

alors il existe $T^{**} \leq T^*$ tel que

$$C_0 \|\phi\|_{L^q(0, T^{**})} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \leq MC_0 \|\phi\|_{L^q(0, T^{**})} \|V^0\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \leq r/2, \quad (4.22)$$

de (4.18) et (4.22) :

$$\begin{aligned} \|\Psi(W) - \Phi^*\|_1 &\leq r C_0 C_1 \|\phi\|_{L^q(0, T)} + C_0 \|\phi\|_{L^q(0, T)} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi^*(t)\|_{(D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}} \\ &\leq r/2 + r/2 \\ &\leq r \end{aligned}$$

donc $\Psi(W)$ appartient à \mathbb{B}_r^* , voir (4.19).

Alors Ψ appliqué à \mathbb{B}_r^* dans \mathbb{B}_r^* est un espace métrique complet.

Finalement on a :

- i) Ψ est défini de \mathbb{B}_r^* dans \mathbb{B}_r^* ,
 - ii) Ψ est une contraction stricte de \mathbb{B}_r^* vers \mathbb{B}_r^* ,
 - iii) \mathbb{B}_r^* est fermée dans un espace de Banach, donc c'est un espace métrique complet,
- alors le théorème du point fixe appliqué à Ψ dans \mathbb{B}_r^* .

D'où le théorème important d'existence, d'unicité et de régularité maximale :

Théorème 4.10.1. *On suppose que $V^0 \in (D(\mathcal{L}); \mathcal{E})_{1/q, q}$, alors il existe $0 < T^{**} \leq T$ tel que le problème*

$$\begin{cases} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + G(t, W) \\ V(0) = V^0. \end{cases}$$

*admet une solution locale unique sur l'intervalle $[0, T^{**}]$ vérifiant la L^q -régularité maximale.*

$$V \in W^{1, q}(0, T^{**}; \mathcal{E}) \cap L^q(0, T^{**}; D(\mathcal{L})).$$

□

Conclusion et perspectives

Conclusion

Ce travail est une contribution à l'étude de la propagation géographique de la maladie de Chagas.

Nous avons considéré une population de triatomines structurée en stades de développement : juvéniles et adultes. Les processus de démographie et de dispersion spatiale sont décrits par des équations de réaction-diffusion bidimensionnelles. Dans des espaces fonctionnels adéquats, le système d'équations différentielles partielles est transformé en une équation différentielle abstraite que nous avons étudiée par application des outils d'analyse fonctionnelle et de la théorie des équations différentielles abstraites

Nous avons présenté un modèle de dispersion d'une population des Triatomines structurée en juvéniles J et adultes A sous des conditions d'asymétrie (skewness condition) et de dispersion continue à l'interface qui représentent le comportement des individus aux limites, voir le problème de réaction diffusion (P) :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_-}{\partial t} = d_{j_-} \Delta J_- + \omega_j(t) s_j(t) J_- + f_a(t) s_a(t) A_- \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_- \\ \frac{\partial A_-}{\partial t} = d_{a_-} \Delta A_- + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_- + s_a(t) A_- \\ \\ \frac{\partial J_+}{\partial t} = d_{j_+} \Delta J_+ + \omega_j(t) s_j(t) J_+ + f_a(t) s_a(t) A_+ \\ \hspace{15em} \text{sur } \Omega_+ \\ \frac{\partial A_+}{\partial t} = d_{a_+} \Delta A_+ + (1 - \omega_j(t)) s_j(t) J_+ + s_a(t) A_+ \\ \\ (I.C) \\ \\ (Int.C) \\ \\ (EC_1) \\ \\ (EC_2) \end{array} \right.$$

Nous avons transformé (P) en un problème de Cauchy abstrait :

$$\left\{ \begin{array}{l} V'(t) = \mathcal{L}V(t) + \mathcal{B}(t)V(t) \quad t > 0, \\ V(0) = V^0 = \begin{pmatrix} J^0(0, \cdot, \cdot) \\ A^0(0, \cdot, \cdot) \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

avec l'opérateur \mathcal{L} défini dans un domaine $D(\mathcal{L})$ comme suit :

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ W = (v, w) \in [L^q(\Omega)]^2 : W_- = W|_{\Omega_-} = (v_-, w_-) \in [W^{2,q}(\Omega_-)]^2 \right. \\ \left. W_+ = W|_{\Omega_+} = (v_+, w_+) \in [W^{2,q}(\Omega_+)]^2 \text{ et } W_-, W_+ \text{ verifiant } (Int.C), (EC_1), (EC_2) \right\},$$

où $q \in]1, +\infty[$, et :

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = \max(\|v\|_{L^q(\Omega)}, \|w\|_{L^q(\Omega)}) , \quad (4.23)$$

qui est équivalente à

$$\max \left(\|v_-\|_{L^q(\Omega_-)} + \|w_-\|_{L^q(\Omega_-)}, \|v_+\|_{L^q(\Omega_+)} + \|w_+\|_{L^q(\Omega_+)} \right) .$$

L'étude de ce problème a été faite selon les étapes suivantes :

- Nous avons résolu l'équation spectrale :

$$\mathcal{L}W - \lambda W = F \in [L^p(\Omega)]^2 ,$$

pour λ complexe.

- Nous avons donné une représentation de la solution du système abstrait.
- Nous avons majoré $\|W\|_{[L^p(\Omega)]^2}$ en fonction de F et λ pris dans un bon secteur.
Et ceci, en vue de montrer que \mathcal{L} génère un semi-groupe analytique.([22])
- Nous pouvons maintenant écrire alors la solution explicite de notre problème (P). (**Ce qui est très intéressant dans la réalité!!!**)
- Nous avons appliqué le théorème du point fixe au problème de Cauchy abstrait, pour montrer l'unicité d'une solution locale.

Perspectives

- Une approche numérique de ce problème serait intéressante du moment que nous avons l'existence et l'unicité de la solution.
- Considérer le même problème sur une couronne.
- Étudier l'existence et l'unicité et la régularité de la solution globale en utilisant par exemple la méthode d'Aquistapace-Terreni.
- Étudier le même problème dans le cadre des espaces des fonctions Holdériennes et les espaces des fonctions continues.

Bibliographie

- [1] F. Abad-Franch, L. Diotaiuti, R. Gurgel-Goncalves, R.E. Guertler, Certifying the interruption of Chagas disease transmission by native vectors : cui bono, Mem. Inst. Oswaldo Cruz. 108 (2013) 251–254.
- [2] A.Abras, M.Gállego, T.Llovet, and all. Serological Diagnosis of Chronic Chagas Disease : Is It Time for a Change ? J Clin Microbiol. 2016 ; 54 : 1566–1572.
- [3] D’Ascoli, A., and Gómez-Núñez, J., 1965. [Notes on the dispersion methods of *Rhodnius prolixus* Stal]. Acta científica venezolana 17, 22-25.
- [4] I.Aune, 1996 : Quatre nouveaux cas de myocardite aiguë chagassique en Guyane française (1994- 1996) : données récentes sur la maladie de Chagas. Thèse de médecine. Université Joseph Fourier ; Faculté de médecine de Grenoble, 165 p.
- [5] A.V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, Pacific J. Math. 10 (1960) 419-437.
- [6] J. BOURGAIN, Some Remarks on Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional, Ark. Mat. 21 (1983), p. 163-168.
- [7] D. L. BURKHOLDER, “A Geometrical Characterization of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional”, *Pacific Journal of Mathematics*, Ann. Probab. 9, pp. 997-1011, 1981.

-
- [8] D. L. BURKHOLDER, “Martingales and Fourier Analysis in Banach Spaces”, *Probability and Analysis, Lect.Sess. C.I.M.E., Varenna/Italy 1985, Lect. Notes Math. 1206*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 61-108, 1986.
- [9] R.S. Cantrell, C. Cosner, Skew Brownian motion : a model for diffusion with interfaces, in : Proc. Int. Conf. Math. Model. Med. Heal. Sci., 1998 : pp. 73-78.
- [10] R.S. Cantrell, and C. Cosner , Diffusion Models for Population Dynamics Incorporating Individual Behavior at Boundaries : Applications to Refuge Design, *Theoretical Population Biology* 55, 189-207(1999).
- [11] R.S. Cantrell, C. Cosner, Spatial ecology via reaction-diffusion equations, John Wiley and Sons, 2004.
- [12] Y. Carlier, J. C. Pinto Dias, A. Ostermayer Luquetti, M. Hontebeyrie, F. Torrico, C. Truyens, 2002 : Trypanosomiase américaine ou maladie de Chagas. in : Encyclopédie Médico-Chirurgicale, Maladies infectieuses. 8-505-A-20, Editions Scientifiques et Médicales Elsevier SAS, 21 p.
- [13] H. Cerdan, 1993 : La Maladie de Chagas en Guyane française. Thèse de doctorat en Pharmacie à l’Université d’Aix Marseille 2, 123 p.
- [14] Chagas, C., 1909. Nova tripanozomiaze humana : estudos sobre a morfologia e o ciclo evolutivo do Schizotrypanum cruzi n. gen., n. sp., agente etiologico de nova entidade morbida do homem. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz* 1, 159-218.
- [15] Mustapha Cheggag, Angelo Favini, Rabah Labbas, Stéphane Maingot, Ahmed Medeghri, Sturn-Liouville problems for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces, *Differential and Integral Equations* Volume 21, Numbers 9-10 (2008), 981–1000.
- [16] J. Collgros, 2009 : Ecologie et morphologie des vecteurs de la maladie de Chagas en Guyane Française. Thèse de doctorat en Médecine à l’Université de Picardie Jules Verne.

-
- [17] B. Crawford, C. Kribs-Zaleta, G. Ambartsoumian, Invasion Speed in Cellular Automaton Models for *T. cruzi* Vector Migration, *Bull. Math. Biol.* 75 (2013) 1051–1081. <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9840-7>.
- [18] J. R. Coura, 2007 : Chagas disease : what is known and what is needed - A background article. *MEMORIAS DO INSTITUTO OSWALDO CRUZ*, oct, 102 (suppl. 1), 113-122.
- [19] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi, Banach space operator with a bounded H-infini functional calculus, *J.Aust. Math. Soc. A* 60 (1996) 51-89.
- [20] C. Delavenna, 1995 : Maladie de Chagas en Guyane française : revue à propos d'un cas survenu dans le service de réanimation du C.H. de Cayenne. Thèse de médecine. num 38 .
- [21] H. Devillers, J.R. Lobry, F. Menu, An agent-based model for predicting the prevalence of *Trypanosoma cruzi* I and II in their host and vector populations, *J. Theor. Biol.* 255 (2008) 307–315. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.08.023>.
- [22] N. Dib-Baghdadli, R. Labbas, T. Mahdjoub and A. Medeghri, On some reaction-diffusion equations generated by non-domiciliated triatominae, vectors of Chagas disease.(*DCDS-B*) Vol. 26, no. 12 December 2021 doi : 10.3934/dcdsb.2021004
- [23] G. Dore and A. Venni, On the Closedness of the Sum of two Closed Operators, *Mathematische Zeitschrift*, 196 (1987), 270–286.
- [24] G. Dore et S. Yakubov. :Semigroup estimates and noncoercive Boundary Value Problems, *Semigroup Forum*, 60 (2000), pp. 93-121.
- [25] G. Dore, A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, An abstract transmission problem in a thin layer, I : sharp estimates, *J.Funct. Anal.* 261 (2011) 1865-1922.
- [26] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Part 1 : General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.
- [27] N. El Saadi, A. Bah, T. Mahdjoub, C. Kribs, On the sylvatic transmission of *T. cruzi*, the parasite causing Chagas disease : a view from an agent-based model, *Ecol. Modell.* 423 (2020) 109001. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2020.109001>.

-
- [28] K.-J. Engel & R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.
- [29] J.Esnault, 1984 *Épidémiologie de la maladie de Chagas en Guyane française*. Thèse de doctorat en médecine à la Faculté de Médecine de Tours. Num 66, 129 p.
- [30] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, and A. Yagi, Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD Spaces, *Funkcialaj Ekvacioj*, 49 (2006), 193–214 .
- [31] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Thorel : Elliptic differential operator with an abstract Robin boundary condition containing two spectral parameters, study in a non commutative framework. To appear in 2020.
- [32] P. Grisvard, "Spazi di tracce e applicazioni", *Rendiconti di Matematica*, (4) Vol.5, Serie VI, pp. 657-729, 1972.
- [33] P. Grisvard : Spazi di Tracce e Applicazioni, *Rendiconti di Matematica* (4) Vol. 5, série VI, (1972), pp. 657-729.
- [34] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol.169, 2006.
- [35] C. Kribs-Zaleta, Vector consumption and contact process saturation in sylvatic transmission of T-cruzi, *Math. Popul. Stud.* 13 (2006) 135–152. <https://doi.org/10.1080/08898480600788576>.
- [36] C.R. Lazzari, M.H. Pereira, M.G. Lorenzo, Behavioural biology of Chagas disease vectors, *Mem. Inst. Oswaldo Cruz.* 108 (2013) 34-47.
- [37] Labbas, R., Medeghri, A., Menad, A., 2018. Solvability of Elliptic Differential Equations, Set in Three Habitats with Skewness Boundary Conditions at the Interfaces. *Mediterr. J. Math.* 15, 128.
- [38] F.-X. Lescure, G. Le Loup, H. Freilij, M. Develoux, L. Paris, L. Brutus, G. Pialoux, Chagas disease : changes in knowledge and management, *Lancet Infect. Dis.* 10 (2010) 556–570. [https://doi.org/10.1016/s1473-3099\(10\)70098-0](https://doi.org/10.1016/s1473-3099(10)70098-0).

- [39] J.-L. Lions & J. Peetre, "Sur une classe d'espaces d'interpolation", Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 19, pp. 5-68, 1964.
- [40] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [41] Luz, C., Fargues, J., and Grunewald, J., 1999. Development of *Rhodnius prolixus* (Hemiptera :Reduviidae) under constant and cyclic conditions of temperature and humidity. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz* 94, 403-409.
- [42] T. Mahdjoub, C. Kribs, Assessing the invasion speed of triatomine populations, Chagas disease vectors, *Rev. Matemática Teoría y Apl.* 27 (2020) 73-92. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica/article/view/39949>.
- [43] Maëlis MEISNER, Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif : applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces L^p . Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Le Havre-Normandie, 2012
- [44] M. Mesk, T. Mahdjoub, S. Gourbière, J.E. Rabinovich, F. Menu, Invasion speeds of *Triatoma dimidiata*, vector of Chagas disease : An application of orthogonal polynomials method, *J. Theor. Biol.* 395 (2016) 126–143. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.01.017>
- [45] Minter DM, Minter-Goedbloed E, Marsden PD, Miles MA, Boreham PF 1973 : The host selection pattern and infection rates of *Panstrongylus megistus* in an area of eastern Brazil. *Trans R Soc Trop Med Hyg.* 67 (2) : 291.
- [46] Minoli, S.A., and Lazzari, C.R., 2006. Take-off activity and orientation of triatomines (Heteroptera : Reduviidae) in relation to the presence of artificial lights. *Acta tropica* 97, 324-330.
- [47] A. Moncayo, M. I. Ortiz Yanine, 2006 : An update on Chagas disease. *ANNALS OF TROPICAL MEDICINE AND PARASITOLOGY*, dec, 100 (8), 663-677.
- [48] Monteiro FA, Escalante AA, Beard CB, 2001 : Molecular tools and triatomine systematics : a public health perspective. *Trends Parasitol.* 17 (7) : 344-347.

- [49] P. Nouvellet, Z.M. Cucunubá, S. Gourbière, Chapter Four - Ecology, Evolution and Control of Chagas Disease : A Century of Neglected Modelling and a Promising Future, in : M.A. Roy, B. Maria Gloria (Eds.), *Adv. Parasitol.*, Academic Press, 2015 : pp. 135–191. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/bs.apar.2014.12.004>.
- [50] Nouvellet, P., Cucunubá, Z.M., Gourbière, S., 2015. Chapter Four - Ecology, Evolution and Control of Chagas Disease : A Century of Neglected Modelling and a Promising Future, in : Roy, M.A., Maria Gloria, B. (Eds.), *Advances in Parasitology*. Academic Press, pp. 135–191.
- [51] OMS. Maladie de Chagas (trypanosomiase américaine). Principaux faits, 17 avril 2019.
- [52] V. Payet, M.J. Ramirez-Sierra, J. Rabinovich, F. Menu, E. Dumonteil, Variations in sex ratio, feeding, and fecundity of *Triatoma dimidiata* (Hemiptera : Reduviidae) among habitats in the Yucatan Peninsula, Mexico, *Vector-Borne Zoonotic Dis.* 9 (2009) 243–251.
- [53] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [54] V. Steindorf, N.A. Maidana, Modeling the Spatial Spread of Chagas Disease, *Bull. Math. Biol.* (2019) 1–44.
- [55] GA. Schmunis, 1999 : Iniciativa del Cono Sur. In proceedings of the second international workshop on population biology and control of triatominae (Schofield CJ and Ponce C, eds), pp. 26-31, Indre 1999, Mexico city.
- [56] Schofield, C.J., 1980. Density regulation of domestic populations of *Triatoma infestans* in Brazil. *Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene* 74, 761-769.
- [57] Schofield, C., and Galvão, C., 2009. Classification, evolution, and species groups within the Triatominae. *Acta tropica* 110, 88-100.
- [58] R. Slimi, S. El Yacoubi, E. Dumonteil, S. Gourbiere, A cellular automata model for Chagas disease, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 1072–1085.

- [59] Thorel Alexandre, Équation de diffusion généralisée de croissance et de dispersion d'une population incluant des comportements individuels à la frontière des différents habitats. Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Le Havre-Normandie, 2018
- [60] H. Triebel, Interpolation theory, function Spaces, differential Operators, North-Holland publishing company Amsterdam New York Oxford, 1978.
- [61] Vallvé, S.L., Rojo, H., and Wisnivesky-Colli, C., 1996. Urban ecology of *Triatoma infestans* in San Juan, Argentina. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz* 91, 405-408.
- [62] WHO Expert Committee, 1991 : Control of Chagas' Disease (WHO Technical Report Series 811). Geneva, Switzerland : World Health Organization. 95 pages.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons l'infestation d'un village par l'espèce domestique *Triatoma Dimidiata*. Le village jouxte une forêt représentant l'habitat des vecteurs. Ces derniers se rendent au village pour se nourrir. La nourriture consiste en un repas de sang sur les humains ou les mammifères qu'ils élèvent. La transmission de *Trypanosoma Cruzi* du vecteur à l'hôte se déroule principalement pendant cette phase. Dans ce travail, nous considérons une population triatomique structurée dans le temps et dans l'espace. Les processus de démographie et de dispersion spatiale sont capturés par les équations de réaction-diffusion dans un espace bidimensionnel. Dans des espaces fonctionnels adéquats, le système d'équations différentielles partielles est transformé en une équation différentielle abstraite. Notre premier objectif est de montrer que l'opérateur génère un semi-groupe analytique. Nous prouvons alors l'existence et l'unicité d'une solution locale au problème de Cauchy correspondant.

Mots clés : Problème de transmission, réaction-diffusion, semi-groupe analytique, opérateur sectoriel.

Summary

In this thesis, we consider the infestation of a village by the domestic species *Triatoma Dimidiata*. The village adjoins a forest representing the habitat of vectors. The latter go to the village to eat. Food is a meal of blood from the humans or mammals they breed. The transmission of *Trypanosoma Cruzi* from vector to host takes place mainly during this phase. In this work, we consider a triatomic population structured in time and space. The processes of demography and spatial dispersion are captured by reaction-diffusion equations in two-dimensional space. In adequate functional spaces, the system of partial differential equations is transformed into an abstract differential equation. Our first objective is to show that the operator generates an analytical semi-group. We then prove the existence and uniqueness of a local solution to the corresponding Cauchy problem.

Key words : Transmission problem, reaction-diffusion, analytic semi-group, sectorial operator.

الملخص

في هذه الأطروحة المدروسة ، لقد نظرنا في انتشار قرية من قبل النوع المحلي المسمى ، ترياتوما ديميدياتا يحد القرية غابة تمثل موئل المتجهات . الناقلون يسافرون إلى القرية للتغذية . الغذاء يتكون من وجبة من الدم على البشر أو الثدييات التي يقومون بتربيتها . نقل المثقبيات كروزى من الناقل إلى المضيف يحدث في المقام الأول خلال هذه المرحلة. و في هذا العمل ، نعتبر أن هناك تجمعا سكانيا ثلاثي الاتومات منظم من حيث الزمان ، و المكان . و يتم التقاط عمليات الديموغرافيا و التشتت المكاني بمعادلات انتشار رد الفعل في فضاء ثنائي الأبعاد. في الفضاءات الوظيفية الكافية، يتحول نظام المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية مجردة. هدفنا الأول هو إظهار أن المشغل يولد مجموعة شبه تحليلية. ثم ثبت وجود حل محلي لمشكلة كاوشي المناظرة و تفردنا .

الكلمات الرئيسية : مشكلة الإرسال ، انتشار رد الفعل ، شبه المجموعة التحليلية ، مشغل القطاع.