



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ ABOUBEKR BELKAID
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'ÉLECTRONIQUE

THESE

Présentée par

Ibtissem DIDI

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Automatique

Intitulée:

Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants:
Application aux Bioprocédés

Jury :

-Salim LABIOD

-Pierre ROUCHON

- Tewfik SARI

-Karim YADI

-Jérôme HARMAND

-Hacen DIB

-Brahim CHERKI

Professeur à l'Université de Jijel

Professeur à l'École des Mines de Paris

Professeur à IRSTEA, Montpellier

Professeur à l'Université de Tlemcen

Directeur de recherche LBE, Narbonne

Professeur à l'Université de Tlemcen

Professeur à l'Université de Tlemcen

Président

Examinateur

Examinateur

Examinateur

Invité

Directeur

Co-directeur

*A mes parents, mon frère et mes sœurs
dont l'amour m'est si précieux*

REMERCIEMENTS

Un chaleureux remerciement pour Mr Hacem DIB pour sa patience, sa compréhension et son soutien régulier. Le travail avec Mr Hacem DIB m'a appris à prendre de nouveaux challenges avec enthousiasme et à faire de mon mieux pour atteindre mes objectifs.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mr Brahim CHERKI, professeur à l'Université de Tlemcen et Directeur du laboratoire d'automatique à Tlemcen, de m'avoir initié à l'automatique, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et ses encouragements continus qui m'ont permis de mener à bien cette tâche.

Je remercie vivement les membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail : Mr Salim LABIOD président du jury, Mr Pierre ROUCHON, Mr Tewfik SARI, Mr Jérôme HARMAND et Mr Karim YADI. Leurs remarques et leurs expertises ont contribué à enrichir ce travail.

Je voudrais dire un grand merci à Amina AÏTOUMEZIANE, ma meilleure amie, d'être toujours présente, prête à partager mes idées et donner ses appréciations.

Enfin, mes remerciements, à mes parents, mon frère et mes sœurs ainsi qu'à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Sur l'observation des systèmes non linéaires
invariants : Application aux Bioprocédés

Melle Ibtissem DIDI

Table des matières

1	Introduction générale	4
1.1	Le modèle du Chemostat simple	6
1.1.1	Définition	6
1.1.2	Modélisation	7
1.2	Positivité et bornitude des variables d'état	9
1.2.1	Positivité	9
1.2.2	Bornitude supérieure	9
1.2.3	Bornitude inférieure	11
2	Etat de l'art sur les observateurs appliqués aux bio-procédés	13
2.1	Principe des observateurs et observabilité	13
2.2	Les différents types d'observateurs	15
2.2.1	Observateur de Luenberger étendu et filtre de Kalman étendu	15
2.2.2	Observateur à grand gain	17
2.2.3	Observateur asymptotique	19
2.2.4	Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique	20
2.2.5	Observateurs par intervalles	21
3	Systèmes invariants et Application	24
3.1	Généralités sur les systèmes invariants	24
3.2	Forme générale d'un pré-observateur invariant	25
3.3	Application au Chemostat	26
3.3.1	Observabilité	26
3.3.2	Invariance du Chemostat	26
3.3.3	Construction du pré-observateur invariant	29
3.3.4	Convergence du pré-observateur	31
3.4	Résultats de simulation	36

4	Compétition dans le Chemostat	41
4.1	Invariance du modèle de compétition dans le Chemostat	42
4.2	Pré-observateur	44
4.2.1	Les fonctions scalaires invariantes	44
4.2.2	Les champs de vecteurs invariants	45
4.2.3	Le pré-observateur invariant	46
4.2.4	Convergence du pré-observateur	46
4.3	Résultats de simulation	54
5	Observateurs pour le modèle AM2	58
5.1	Observabilité	59
5.2	Bornitude supérieure des variables d'état	60
5.2.1	La variable d'état s_1	60
5.2.2	La variable d'état x_1	60
5.2.3	La variable d'état s_2	61
5.2.4	La variable d'état x_2	62
5.3	Observateur non linéaire de Luenberger à dynamique d'erreur linéaire	63
5.3.1	Observateur type-Luenberger pour le modèle du Chemostat	63
5.3.2	Observateur type-Luenberger pour le modèle AM2	64
5.3.3	Résultats de simulations	67
5.4	Observateur invariant pour le modèle AM2 avec la sortie (s_1, s_2) .	71
5.4.1	Invariance du modèle AM2	71
5.4.2	Les fonctions scalaires invariantes	73
5.4.3	Champs de vecteurs invariants	75
5.4.4	Le Pré-observateur	76
5.4.5	Convergence du pré-observateur	78
5.4.6	Résultats de simulations	84
5.5	Discussion autour de la robustesse	88
5.6	Étude comparative	91
5.7	Observateur invariant pour le modèle AM2 avec la sortie q_M	92
6	Conclusion générale	95
7	Annexe A	96
7.1	Invariance du modèle du Chemostat	96
7.2	Invariance du modèle de compétition dans le Chemostat	97
7.3	Invariance du modèle AM2	100

8	Annexe B	103
8.1	Stabilité des systèmes non linéaires	103

Chapitre 1

Introduction générale

Le volume total de l'eau présent sur Terre est estimé à 1400 millions de km^3 . Ce volume paraît considérable : il correspond à un cube de 1400 kilomètres de côté ou à 400 fois le volume de la Méditerranée. Il convient cependant de relativiser : plus de 97% de l'eau de la planète bleue est salée, et *l'eau douce* ne représente qu'à peine 3% du volume total. Sur ces 3% d'eau douce, 99% sont très difficilement exploitables : 77% sont gelées au niveau des calottes polaires et dans les glaciers de montagne et 22% sont profondément enfouies dans le sous-sol. Ainsi, **moins de 1% est donc véritablement disponible** pour les êtres vivants qui en dépendent, soit environ 9 millions de km^3 . Devant une demande en constante croissance (population, agriculture, industrie,..), concernant une ressource qui semble limitée, le traitement des eaux usées devient un élément de solution incontournable.

Les eaux usées sont toutes les eaux chargées de différents éléments provenant de l'usage domestique mais aussi des activités industrielles. Certaines eaux usées sont plus difficiles à traiter que d'autres. Par exemple, les eaux usées industrielles peuvent être difficiles à traiter, par opposition aux eaux usées domestiques. Ces dernières sont souvent traitées dans les stations d'épuration dont le but est de les séparer des polluants qui y sont présents. Le traitement en général nécessite plusieurs étapes.

Le présent travail s'inscrit dans une approche intégrée de traitement des eaux usées par voie biologique. Ce type de traitement est le procédé qui permet la dégradation de certains polluants grâce à l'action de micro-organismes.

Une multitude d'organismes est associée à cette dégradation selon différents cycles de transformations. Parmi ces organismes, nous trouvons généralement des bactéries, des algues, des champignons et des protozoaires. Ce traitement a pour principe de provoquer, en présence ou non d'oxygène une prolifération plus ou moins contrôlée de micro-organismes capables de dégrader les matières organiques apportées par l'effluent. Il s'agit en fait d'un véritable transfert d'une forme non accessible de la pollution vers une forme manipulable.

Un des défis majeurs est alors de développer des procédés fiables, robustes et peu coûteux permettant le traitement simultané ou séquentiel des diverses sources de pollution. Ainsi, la stabilité, les performances et la robustesse des systèmes de dépollution ne peuvent être obtenues qu'en faisant appel à l'Automatique pour leur **gestion** et leur **contrôle**. C'est ce que nous convenons d'appeler *l'Automatique du traitement biologique des eaux usées*.

Dans ces procédés biologiques, la mise en uvre d'une commande nécessite souvent la connaissance de toutes les entrées et les états du système. Malheureusement, cela n'est pas toujours possible. Ainsi nous avons besoin de capteurs permettant de donner à chaque instant t une valeur approximative de l'état. Deux types de capteurs de nature différentes sont utilisés : des *capteurs physiques* provenant de l'instrumentation ; ces capteurs sont parfois trop coûteux ou difficiles à réaliser pour des raisons techniques, des *capteurs logiciels* dits aussi **observateurs** et qui sont l'objet de notre présente étude.

Ce sont des systèmes dynamiques basés sur le modèle mathématique qui utilisent une information pertinente donnée par des mesures physiques. Les observateurs délivrent à chaque instant t une estimation des variables d'état non mesurées du système.

Cette thèse est organisée comme suit. Dans le chapitre 1, nous allons rappeler le modèle du Chemostat simple avec quelques propriétés remarquables. Il constitue un fragment générique dans des modèles plus complexes décrivant au mieux les bioréacteurs. Le second chapitre sera dédié à un état de l'art portant sur les observateurs les plus utilisés dans ce domaine, en particulier des observateurs appliqués au modèle du Chemostat simple. Dans le chapitre 3, nous allons donner des généralités sur les systèmes invariants, et nous allons aborder la synthèse d'observateurs invariants toujours appliqués au Chemostat.

Ceci est la contribution la plus importante de cette thèse, avec une preuve de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système. Des simulations seront présentées illustrant les résultats obtenus. Le chapitre 4, portera sur l'application du même observateur à un modèle représentant la compétition de deux espèces sur un seul substrat dans le Chemostat. Le chapitre 5 sera consacré au modèle de la digestion anaérobie AM2, pour lequel nous allons synthétiser deux observateurs, le premier sera de type Luenberger non linéaire avec une dynamique de l'erreur linéaire, et le second est un observateur invariant, en choisissant les substrats comme variables mesurées. Des simulations suivront pour montrer la convergence des états estimés vers les états du système. Enfin, nous donnerons une conclusion générale et quelques perspectives de développement des résultats obtenus.

1.1 Le modèle du Chemostat simple

1.1.1 Définition

Un Chemostat est un type particulier de bioréacteur qui permet de faire croître une population de micro-organismes (algues unicellulaires, bactéries, levures, phytoplancton, zooplancton,...) sur certains substrats, tout en conservant des conditions environnantes (température, luminosité, pH, aération). Il est utilisé pour la production de la masse cellulaire elle-même, pour l'extraction et la dégradation de certains polluants dans un milieu liquide et pour la production de substances organiques résultant de l'activité métabolique.

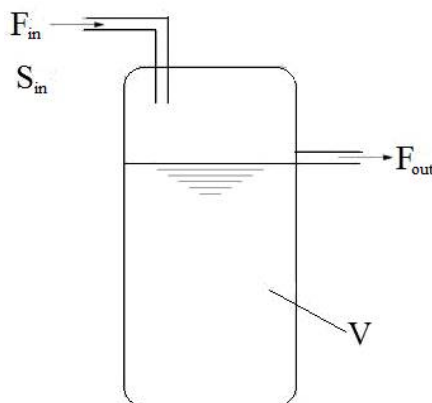


FIGURE 1.1 – Schéma du Chemostat

Notations :

- V est le volume du Chemostat mesuré en litres (L),
- F_{in} et F_{out} sont les flux d'entrée et de sortie mesurés en g/L ,
- s_{in} est la concentration d'entrée,
- la réaction biochimique qui transforme le substrat en biomasse est $ks \xrightarrow{r} x$ où $r = \mu x$, est la vitesse de réaction, k est une constante stchiométrique sans dimension et μ est la cinétique de la réaction qui s'exprime en $jour^{-1}$,
- s et x sont les concentrations du substrat et de la biomasse mesurées en g/L .

Il existe trois types de fonctionnements :

1. Le mode *batch*. Ici, L'entrée et la sortie sont nulles, c'est-à-dire on n'applique pas de dilution ($D = 0$ pas de flux entrant). On assiste à une croissance exponentielle des organismes.
2. Le mode *continu*. C'est le mode typique du Chemostat. Ici, le volume est maintenu constant c'est-à-dire la vitesse du flux entrant est égale à la vitesse du flux sortant ($F_{in} = F_{out} = F$).
3. Le mode *fed-batch*. C'est une combinaison des deux modes de fonctionnement précédents. On utilise une dilution mais à volume variable ($F_{out} = 0$). C'est le mode de fonctionnement préféré lorsque l'objectif est le contrôle d'une population.

1.1.2 Modélisation

Le Chemostat a été conçu dans les années 1950 par Leo Szilárd. Alors que Jacques Monod [25] étudiait les cinétiques de croissance d'*Escherichia coli* dans un milieu de culture contenant à la fois du glucose et du lactose comme source carbonée, Szilárd lui suggéra de fournir de manière continue les deux sucres à la vitesse où les bactéries les consomment. De cette manière, il pourrait savoir si l'utilisation de l'un des sucres exclut l'utilisation de l'autre. C'est pour tester cette hypothèse que Szilárd inventa le Chemostat dans lequel les concentrations de glucose et/ou de lactose peuvent être maintenues constantes [26].

Nous allons rappeler la modélisation du Chemostat en mode continu à l'aide de deux équations différentielles simples. Tout d'abord, regardons ce qui se passe pour le substrat dans le bioréacteur, ensuite ce qui se passe pour le bilan de la biomasse.

La masse du substrat est Vs et celle de la biomasse est Vx . En appliquant le principe de conservation de la masse au réacteur, on peut écrire le bilan suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dVs}{dt} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s - k\mu Vx \\ \frac{dVx}{dt} = -F_{out}(t)x + \mu Vx \\ \frac{dV}{dt} = F_{in}(t) - F_{out}(t) \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} s \frac{dV}{dt} + V \frac{ds}{dt} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s - k\mu Vx \\ x \frac{dV}{dt} + V \frac{dx}{dt} = -F_{out}(t)x + \mu Vx \end{array} \right. \quad (1.1)$$

En remplaçant $\frac{dV}{dt}$ dans (1.1) par son expression, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{in}(t)s - F_{out}(t)s + V \frac{ds}{dt} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s - k\mu Vx \\ F_{in}(t)x - F_{out}(t)x + V \frac{dx}{dt} = -F_{out}(t)x + \mu Vx \end{array} \right. \quad (1.2)$$

En simplifiant les termes $F_{out}(t)s$ et $F_{out}(t)x$, (1.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{in}(t)s + V \frac{ds}{dt} = F_{in}(t)s_{in} - k\mu Vx \\ F_{in}(t)x + V \frac{dx}{dt} = \mu Vx \end{array} \right.$$

Ainsi, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} V \frac{ds}{dt} = F_{in}(t)s_{in} - F_{in}(t)s - k\mu Vx \\ V \frac{dx}{dt} = \mu Vx - F_{in}(t)x \end{array} \right.$$

Nous obtenons en divisant ces deux équations par V :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \frac{F_{in}(t)}{V}s_{in} - \frac{F_{in}(t)}{V}s - k\mu x \\ \frac{dx}{dt} = \mu x - \frac{F_{in}(t)}{V}x \end{array} \right.$$

On note

$$D(t) = \frac{F_{in}(t)}{V}$$

le taux de dilution qui s'exprime en $jour^{-1}$. Par suite, les équations dynamiques représentant le modèle du Chemostat s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{s} &= D(t)(s_{in} - s) - k\mu(s)x \\ \dot{x} &= [\mu(s) - D(t)]x \end{cases} \quad (1.3)$$

Ils existent plusieurs fonctions de croissance. Dans cette thèse nous allons travailler avec la cinétique de Monod et la cinétique de Haldane qui seront définies plus tard.

1.2 Positivité et bornitude des variables d'état

1.2.1 Positivité

Les systèmes biologiques sont des systèmes dont les variables d'état doivent être positives. La positivité des variables d'état du Chemostat a été prouvée dans [34]. Cela veut dire que si nous commençons avec $s(0) > 0$ et $x(0) > 0$, les deux trajectoires de (1.3) restent dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1.2.2 Bornitude supérieure

La variable d'état $s(t)$

Nous avons :

$$\dot{s}(t) = D(t)(s_{in} - s(t)) - k\mu(s(t))x(t)$$

Etant donné que la quantité $k\mu(s(t))x(t)$ est positive, alors

$$\dot{s}(t) \leq D(t)(s_{in} - s(t))$$

d'où

$$\dot{s}(t) + D(t)s(t) \leq D(t)s_{in}$$

Nous obtenons en multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$s(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s(0) + s_{in} \int_0^t D(\tau)e^{\int_0^\tau D(\xi)d\xi}d\tau$$

ainsi

$$s(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s(0) + s_{in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

Multiplions maintenant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$,

$$s(t) \leq s(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Cette inégalité peut s'écrire comme ceci

$$s(t) \leq (s(0) - s_{in})e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{in}$$

Supposons que $s(0) \leq s_{in}$, par conséquent

$$(s(0) - s_{in})e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq 0$$

D'où

$$s(t) \leq s_{in}, \forall t \geq 0$$

La variable d'état $x(t)$

Posons tout d'abord :

$$\xi(t) = s(t) + kx(t)$$

La dynamique de la variable $\xi(t)$ s'écrit :

$$\dot{\xi}(t) = D(t)s_{in} - D(t)\xi(t)$$

ainsi

$$\dot{\xi}(t) + D(t)\xi(t) = D(t)s_{in}$$

Nous trouvons, en multipliant les deux membres de l'égalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$\xi(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} = \xi(0) + s_{in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

En multipliant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$, nous obtenons

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Comme $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ et $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ car $D(\tau) \geq 0$, alors

$$\xi(t) \leq \xi(0) + s_{in}$$

Passons maintenant aux variables $s(t)$ et $x(t)$, on obtient :

$$s(t) + kx(t) \leq s(0) + kx(0) + s_{in}$$

puisque $s(t) > 0$, alors

$$kx(t) \leq s(0) + kx(0) + s_{in}$$

Ce qui donne en définitive :

$$x(t) \leq \frac{2}{k}s_{in} + x(0), \forall t \geq 0$$

car $s(0) \leq s_{in}$.

1.2.3 Bornitude inférieure

La variable d'état $s(t)$

Lemme 1.2.1 (H1) *Supposons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t D(\tau) d\tau \right) = +\infty$ (condition de persistance d'excitation).*

(H2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max}) d\tau \right) = C$ où C est une constante négative.
Alors il existe une constante positive ϑ telle que $s \geq \vartheta$.

Preuve. Prenons toujours la variable ξ

$$\dot{\xi} = -D(t)\xi + D(t)s_{in}$$

qui admet comme solution

$$\xi = (\xi(0) - s_{in})s^{-\int_0^t D(\tau) d\tau} + s_{in}$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\min(s_{in}, \xi(0)) < \xi(t) < \max(s_{in}, \xi(0))$$

Soit

$$\dot{s}(t) = D(t)(s_{in} - s) - k\mu(s, K)x$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\dot{s}(t) = D(t)(s_{in} - s) - k\mu_{max}x + \underbrace{k(\mu_{max} - \mu(s, K))x}_{\geq 0}$$

Donc,

$$\dot{s}(t) \geq D(t)(s_{in} - s) - k\mu_{max}x$$

En remplaçant x et ξ par leurs expressions, nous obtenons :

$$\dot{s}(t) \geq D(t)s_{in} + (\mu_{max} - D(t))s - \mu_{max} \max(s_{in}, \xi(0))$$

Sous le choix de $\xi(0) < s_{in}$, nous avons :

$$s(t) \geq s_{in} + (s(0) - s_{in})e^{-\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max}) d\tau}$$

Posons $\varphi(t) = s_{in} + (s(0) - s_{in})e^{-\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max}) d\tau}$

$$\varphi(0) = s(0)$$

Sous l'hypothèse **(H2)**, nous avons

$$\varphi(+\infty) = s_{in} + (s(0) - s_{in})e^{-C}$$

Maintenant

$$\dot{\varphi}(t) = (s(0) - s_{in})(\mu_{max} - D(t))e^{-\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max})d\tau}$$

pour $s(0) \leq s_{in}$ et $D(t) \leq \mu_{max}$ alors $\dot{\varphi}(t) \leq 0$ donc

$$\varphi(+\infty) \leq \varphi(t) \leq \varphi(0)$$

Il n'est pas difficile de prouver que

$$s(t) \geq \vartheta = s_{in} + (s(0) - s_{in})e^{-C}$$

■

La variable d'état $x(t)$

Nous avons

$$\dot{x}(t) = [\mu(s(t)) - D(t)]x(t)$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$x(t) = x(0)exp\left(\int_0^t [\mu(s(\tau)) - D(\tau)]d\tau\right)$$

Nous allons maintenant borner cette quantité, ainsi :

$$0 < \vartheta \leq s(\tau) \leq s_{in}$$

Ce qui implique que :

$$t\mu(\vartheta) - \int_0^t D(\tau)d\tau \leq \int_0^t [\mu(s(\tau)) - D(\tau)]d\tau \leq t\mu(s_{in}) - \int_0^t D(\tau)d\tau$$

Dans cette inégalité nous avons besoin que de la borne supérieure, ce qui donne :

$$\int_0^t [\mu(s(\tau)) - D(\tau)]d\tau \geq t(\mu(\vartheta) - D_{max})$$

car $D_{min} \leq D(\tau) \leq D_{max}$. Ainsi, pour que x soit supérieure à une quantité positive, il suffit d'avoir $\mu(\vartheta) = D_{max}$.

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques généralités qui concernent le modèle du Chemostat qui serviront dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Etat de l'art sur les observateurs appliqués aux bio-procédés

Dans les bio-procédés, la mesure directe d'une variable, qui peut être une concentration d'un composant d'un processus réactionnel, une fonction chimique ou des paramètres de réactions biologiques comme le rendement, le taux de croissance, etc. nécessite des capteurs physiques, et cette voie s'avère très difficile d'autant plus que, généralement, ces capteurs sont très coûteux.

Dans ce cas on fait appel à des capteurs logiciels appelés aussi observateurs. Ces dispositifs sont largement utilisés dans le domaine du Génie Biologique et du Génie des Procédés.

2.1 Principe des observateurs et observabilité

Un observateur consiste en un système auxiliaire (O) dont les entrées sont les entrées et les sorties mesurées d'un système (S), et les sorties sont supposées donner une estimation de l'état de (S), selon le schéma décrit par la figure (2.1).

Avant d'entamer une procédure de conception d'un observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état de ce système dynamique peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, la définition est liée aux entrées et aux conditions initiales.

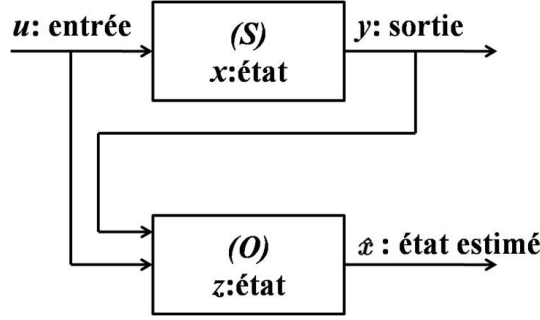


FIGURE 2.1 – Principe de l'observateur

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Pour les définitions suivantes, voir [21].

Définition 2.1.1 (*Indistinguabilité*) : Soient $y_u^0(t), (t \geq 0)$ et $y_u^1(t), (t \geq 0)$ deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée $u(t), t \geq 0$ au système (2.1) avec les conditions initiales x^0 et x^1 , respectivement. On dit que x^0 et x^1 sont indistinguables si

$$y_u^0(t) = y_u^1(t), \forall t \geq 0 \text{ pour toute entrée } u$$

Dans le cas contraire, on dit que x^0 et x^1 sont distinguables.

Définition 2.1.2 (*Observabilité*) : Le système (2.1) est dit observable en x^0 , si x^0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système (2.1) est observable si $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, le système (2.1) est observable en x^0 .

Dans la pratique, ces notions sont relativement difficiles à vérifier et souvent on fait appel au critère suivant :

Critère 2.1.3 (*Critère du rang*) : La paire (f, h) est observable si :

$$\text{rang} \{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h\}^T = n$$

où $L_f h$ est la dérivée de Lie de h dans la direction de f .

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

l'expression de $dL_f^k h$ est donnée par le vecteur :

$$dL_f^k h = \left(\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right)$$

2.2 Les différents types d'observateurs

2.2.1 Observateur de Luenberger étendu et filtre de Kalman étendu

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bon résultats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger a été utilisé pour les systèmes linéaires déterministes.

Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs.

Dans le cadre des bio-procédés, plusieurs observateurs ont été proposés et étudiés par Bastin et Dochain [6]. On cite le filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu. Ces deux approches sont très bien maîtrisées, elles nécessitent la connaissance du modèle du procédé et les entrées du système. Le filtre de Kalman étendu nécessite aussi la connaissance de l'intensité des bruits, il prend en compte les bruits de mesure et de l'état. Par contre il utilise une linéarisation du modèle. Le filtre de Kalman étendu est plus une approche heuristique et aucune preuve de convergence n'existe [32]. Dans l'observateur de Luenberger étendu, nous pouvons régler la vitesse de convergence à l'aide d'un placement de pôles de la partie linéaire de l'observateur.

Observateur de Luenberger étendu

Le principe : Le principe est directement inspiré du cas linéaire. L'observateur de Luenberger étendu nécessite la connaissance du modèle, y compris les cinétiques et les entrées du système [6].

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, x_0 est la condition initiale à l'instant initial t_0 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

La synthèse de l'observateur de Luenberger étendu basée sur (2.2) donne lieu à la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K [y(t) - h(\hat{x}(t))]; \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (2.3)$$

Le calcul du gain K est fait en supposant que l'état restera autour d'une zone où l'approximation par un modèle linéaire est valable et pour laquelle le placement de pôles a été fait.

Bien que cette méthode soit bien maîtrisée, elle est rarement employée en biotechnologie vu que l'observateur peut rapidement devenir instable si l'on s'éloigne du point de fonctionnement, ce qui implique une stabilité et une convergence locales.

Exemple 2.2.1 *Considérons le système représentant le modèle du Chemostat (1.3) en prenant comme sortie la variable s , l'observateur de Luenberger étendu pour ce système s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} &= D(t)(s_{in} - \hat{s}) - k\mu(\hat{s})\hat{x} + K(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}} &= (\mu(\hat{s}) - D(t))\hat{x} + K(s - \hat{s}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Filtre de Kalman étendu

L'idée consiste à linéariser un système non linéaire autour de sa trajectoire estimée. Alors le problème est équivalent à construire un filtre de Kalman pour un système non stationnaire [6].

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + w(t); x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t)) + v(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

où $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs (Gaussien) avec des covariances $Q(t)$ et $R(t)$, respectivement. Supposons que la distribution initiale est Gaussienne, telle que :

$$E[x_0] = \hat{x}_0; E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0$$

où E représente l'espérance mathématique et P_0 est la matrice de covariance initiale de l'erreur.

Le filtre s'écrit en plusieurs étapes :

1. Initialisation :

$$E[x_0] = \hat{x}_0; E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0 \quad (2.6)$$

2. Estimation du vecteur d'état :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + K(t)[y(t) - h(\hat{x}(t))]; \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (2.7)$$

3. En utilisant les matrices de linéarisée :

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)}, C(t) = \left. \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)} \quad (2.8)$$

Nous écrivons la propagation de l'erreur de la covariance (équation de Riccati) :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R(t)^{-1}CP(t) + Q(t) \quad (2.9)$$

4. Calcul de gain

$$K(t) = P(t)C^T R(t)^{-1} \quad (2.10)$$

2.2.2 Observateur à grand gain

Les observateurs à grand gain [14] et [23] prennent en compte la structure non linéaire du système et ils assurent une convergence et une stabilité avec une vitesse de convergence réglable. Comme inconvénients la synthèse de ces observateurs est complexe et ils sont sensibles aux bruits.

Principe : Rappelons brièvement la notion de l'observateur à grand gain pour un système en général. Considérons le système différentiel défini dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

où f est une fonction continue $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, h une fonction continue $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pour construire un observateur à grand gain, des hypothèses doivent être vérifiées.

Hypothèses :

1. Le système (2.11) est observable.

2. L'application Φ est défini comme suit : $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $x \mapsto \begin{pmatrix} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{pmatrix}$

est un difféomorphisme de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur $\Phi(\Omega)$.

Sous l'hypothèse 2, le système (2.11) devient :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} = F(z) \\ y = z_1 \end{cases}$$

3. φ peut être prolongée de $\Phi(\Omega)$ en une fonction C^∞ globalement Lipschitzienne sur \mathbb{R}^n .

Ces hypothèses sont vérifiées en général pour les systèmes biologiques. Ainsi nous obtenons l'observateur à grand gain.

Proposition 2.2.2 *Pour un θ assez grand le système différentiel suivant (2.12) est un observateur exponentiel pour (2.11) :*

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + S_\theta^{-1} C^T (y - C\hat{z}) \quad (2.12)$$

où S_θ est la solution de l'équation $\theta S_\theta + A^t S_\theta + S_\theta A = C^t C$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$S_\theta = s_\theta(i, j) \in M_n(\mathbb{R})$ peut être calculé analytiquement

$$s_\theta(i, j) = \frac{(-1)^{i+j} (i+j-2)!}{\theta^{i+j-1} (i-1)! (j-1)!}$$

Exemple 2.2.3 *Considérons le modèle classique (1.3) du Chemostat. En appliquant la proposition (2.2.2), on obtient directement le système (2.13) :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} &= D(s_{in} - \hat{s}) - \frac{k\mu_{max}\hat{s}\hat{x}}{\hat{s} + K} - 2\theta(\hat{s} - y) \\ \dot{\hat{x}} &= \left(\frac{\mu_{max}\hat{s}}{\hat{s} + K} - D \right) \hat{x} + \left(2\theta \frac{K\hat{x}}{(K + \hat{s})\hat{s}} + \theta^2 \frac{\hat{s} + K}{k\mu_{max}\hat{s}} \right) (\hat{s} - y) \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce système est un observateur exponentiel pour le système standard.

2.2.3 Observateur asymptotique

Dans le domaine des bio-procédés, Bastin et Dochain [6] ont proposé un observateur asymptotique qui permet (sous certaines conditions) d'observer l'état du système sans aucune connaissance du modèle cinétique. Cette approche est particulièrement intéressante. Néanmoins, le prix à payer est de ne plus pouvoir fixer arbitrairement la vitesse de convergence de l'observateur comme l'observateur de Luenberger. La vitesse de convergence est fonction uniquement du taux de dilution, c'est-à-dire des conditions de fonctionnement de la culture. Ceci peut poser problème lorsqu'on fonctionne à faible taux de dilution et conduit à une erreur d'estimation constante, égale à l'erreur initiale dans le cas de cultures en batch (pour lesquelles le taux de dilution est nul). Ces observateurs ont été conçus pour des systèmes relativement simples, ensuite ils ont été étendus par Chen [11], pour inclure des systèmes plus complexes. Ces observateurs sont caractérisés par la simplicité de leurs méthodes de synthèse et prennent spécifiquement en compte la structure non linéaire du système, assurant une stabilité et convergence si les entrées sont persistantes et bornées. Mais ils ont une vitesse de convergence non réglable, en plus le changement de coordonnées dépend des coefficients stœchiométriques ce qui rend ces observateurs peu robustes. Plus tard Gouzé et *al.* [16], [17] ont généralisé ce type d'observateurs et ils les ont rendu robustes à vitesse de convergence réglable partiellement.

Exemple 2.2.4 *Considérons le système dynamique (1.3) et posons $z = kx + s$. Supposons que s est mesurée et la fonction $\mu(\cdot)$ n'est pas connue.*

Alors la dynamique de z est :

$$\dot{z} = D(s_{in} - z) \quad (2.14)$$

Un observateur asymptotique pour (2.14) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = D(s_{in} - \hat{z}) \quad (2.15)$$

Cet observateur converge vers z avec un taux de convergence imposé par le taux de dilution D , voir [6]. Alors, \hat{x} est estimé comme suit : $\hat{x} = \frac{\hat{z} - s}{k}$.

L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro, selon l'équation (2.14), pour autant que le taux de dilution $D(t)$ constitue une excitation persistante [33], c'est-à-dire qu'il existe des constantes positives ϵ et T telles que

$$0 < \epsilon T \leq \int_t^{t+T} D(\tau) d\tau$$

Cette condition implique que le taux de dilution $D(t)$ ne reste pas nul durant de trop longues périodes. Il résulte de l'équation (2.14) que la vitesse de convergence est indépendante des cinétiques du modèle et ne dépend que du taux de dilution.

2.2.4 Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique

Le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique sont en réalité complémentaires, les avantages de l'un constituant généralement les inconvénients de l'autre (et vice versa). Il existe donc une solution hybride entre ces deux approches [9].

Principe : L'idée est d'introduire un degré de confiance ($0 \leq \zeta \leq 1$) dans le modèle cinétique. Ce nouveau paramètre sera estimé conjointement avec l'ensemble des autres états du système, l'estimateur constituant un filtre de Kalman étendu légèrement transformé. Pour $\zeta = 1$, l'estimateur correspondra rigoureusement au filtre de Kalman (et pourra donc tirer parti de la connaissance du modèle cinétique vis-à-vis duquel il a marqué sa confiance) et, pour $\zeta = 0$, il correspondra rigoureusement à un observateur asymptotique (qui n'utilise donc plus du tout le modèle cinétique vis-à-vis duquel il a marqué sa défiance).

Exemple 2.2.5 *Considérons toujours le système représentant le Chemostat (1.3), utilisons la structure de l'observateur hybride décrite dans [9], en l'appliquant sur notre modèle, l'observateur s'écrit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1 = k\mu_{max} \frac{\hat{z}_1 \hat{x}}{\hat{z}_1 + K} + D(s_{in} - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = \zeta \mu_{max} \frac{\hat{z}_1 \hat{x}}{\hat{z}_1 + K} - D(s_{in} + \frac{1-\zeta}{k} \hat{z}_2) \\ \dot{\zeta} = 0 \\ \hat{s} = \zeta \hat{z}_1 + (1-\zeta)y \\ \hat{x} = \hat{z}_2 + \frac{1-\zeta}{k} \hat{s} \\ \dot{P} = F(\hat{z})P + PF^T(\hat{z}), t_k \leq t \leq t_{k+1} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où F est un flux d'ajout de substrat externe.

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z^T = [z_1^T \ z_2^T \ \zeta] \\ f(z) = \begin{bmatrix} k\mu_{max} \frac{z_1 x}{z_1 + K} + D(s_{in} - z_1) \\ \zeta\mu_{max} \frac{z_1 x}{z_1 + K} - D(s_{in} + \frac{1-\zeta}{k} z_2) \end{bmatrix} \\ x = z_2 + \frac{1-\zeta}{k} (\zeta z_1 + (1-\zeta)y) \\ F(\hat{z}) = \left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=\hat{z}(t)}, \forall t \end{array} \right. \quad (2.17)$$

correction :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(t) = P(t_k^-) C_\zeta^T [C_\zeta P(t_k^-) C_\zeta^T + Q(t_k)]^{-1} \\ \hat{z}(t_k^+) = \hat{z}(t_k^-) + K(t_k) (y(t_k) - \hat{s}(t_k)) \\ P(t_k^+) = P(t_k^-) - K(t_k) C_\zeta P(t_k) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

où Q est le flux de sortie, t_k^- et t_k^+ représentent les instants précédent et suivant de l'instant t_k respectivement.

Les corrections $\hat{z}(t_k^+)$ étant saturées de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_1(t_k^+) \geq 0 \\ \hat{z}_2(t_k^+) \geq -\frac{1-\zeta}{k} \hat{s}(t_k^+) \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

La matrice de mesure C_ζ correspond à

$$C_\zeta = [1 \ 0 \ 0]$$

L'aptitude de cet observateur hybride dépend de la qualité du modèle à tirer parti des avantages respectifs de ses deux cas extrêmes (filtre de Kalman et observateur asymptotique) et hérite des inconvénients des deux approches.

2.2.5 Observateurs par intervalles

Ce type d'observateur devrait donner de bonnes solutions pour les systèmes avec de grandes incertitudes ([1], [2], [3], [4], [5] et [15]). Ce genre d'observateur est en fait l'association de deux observateurs, l'un observe la borne inférieure des états et un autre pour observer la borne supérieure du système, et il est nécessaire de connaître les bornes des incertitudes dans le modèle. Ces observateurs sont stables et convergent si les entrées sont persistantes et bornées. Ils sont robustes aux entrées inconnues, et la vitesse de convergence est partiellement réglable [24].

Principe

L'idée est d'utiliser des bornes dynamiques connues des incertitudes :

Les bornes dynamiques sur les incertitudes du modèle permettent de calculer (dans les cas intéressants) des bornes dynamiques sur la variable d'état à estimer.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \end{cases} \quad (2.20)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée, x_0 est la condition initiale en t_0 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Les quantités inconnues $w \in \mathbb{R}^r$ et $v \in \mathbb{R}^s$ sont des incertitudes caractérisées par leurs bornes supérieure et inférieure.

$$\begin{aligned} w^-(t) &\leq w(t) \leq w^+(t), \forall t \geq t_0 \\ v^-(t) &\leq v(t) \leq v^+(t), \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

En se basant sur la structure du modèle (2.20) et l'ensemble des variables connues, le système dynamique auxiliaire peut être construit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}^- = f^-(t, z^-, z^+, u, y) \\ \dot{z}^+ = f^+(t, z^-, z^+, u, y) \\ x^- = h^-(t, z^-, z^+, u, y) \\ x^+ = h^+(t, z^-, z^+, u, y) \end{cases} \quad (2.21)$$

Cela signifie que si nous pouvons encadrer la condition initiale inconnue et les incertitudes $w(\cdot)$ et $v(\cdot)$ alors nous pouvons encadrer les variables non mesurées du système dynamique étudié. Ces propriétés d'encadrement sont basées sur les propriétés de *coopérativité* des systèmes dynamiques.

La théorie des systèmes coopératifs permet de comparer plusieurs solutions d'une équation différentielle ordinaire. Considérons la coopérativité du système $\dot{x} = f(x, t)$. Notons $\phi(t, a)$ la solution correspondante à la condition initiale a pour $t = 0$ et $\phi(t, b)$ la solution correspondante à la condition initiale b pour $t = 0$. Si $a \leq b$ alors les solutions de ce système vont être obtenues de tel sorte que $\phi(t, a) \leq \phi(t, b)$. La coopérativité est définie comme suit :

Définition 2.2.6 Soit $\dot{x} = f(x, t)$, ce système est dit coopératif si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0$, $\forall i \neq j$. Ce qui implique que si $x(0) \geq 0$ alors $x(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

Exemple 2.2.7 Considérons toujours le système dynamique (1.3), nous avons :

$$s_{in}^- \leq s_{in} \leq s_{in}^+$$

$$x_0^- \leq x_0 \leq x_0^+$$

Le système :

$$\begin{cases} \dot{z}^- = D(s_{in}^- - z^-); z(0) \leq z^+(0) \\ \dot{z}^+ = D(s_{in}^+ - z^+); z^-(0) \leq z(0) \\ x^- = \frac{z^- - s}{k} \\ x^+ = \frac{z^+ - s}{k} \end{cases} \quad (2.22)$$

est un observateur par intervalles pour le système (1.3).

Nous nous sommes restreint aux observateurs appliqués aux bio-procédés. Dans ce qui suit, nous allons construire une classe d'observateur qui enrichira la gamme des systèmes de bio-procédés en essayant de minimiser les inconvénients.

Chapitre 3

Systemes invariants et Application

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques généralités sur les systèmes invariants, nous allons aussi voir comment construire un pré-observateur invariant, ensuite nous appliquerons ce pré-observateur au Chemostat simple avec une démonstration de sa convergence. Des simulations vont illustrer le résultat démontré.

3.1 Généralités sur les systèmes invariants

Le concept d'invariance que nous allons utiliser dans ce travail est l'invariance sous l'action d'un groupe. Ce concept a été utilisé par plusieurs auteurs en particulier P. Rouchon et *al.* [30], [10] and [31] dans un contexte de contrôle en automatique et dans le cas général, nous pouvons consulter les deux livres de Olver [27], [28].

Considérons le système dynamique (3.1, 3.2), où u est le vecteur d'entrée du système, x le vecteur d'état et y la sortie mesurée :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.1}$$

$$y = h(x, u) \tag{3.2}$$

avec $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

Soit G un groupe de Lie de transformations, agissant sur X par $\varphi_g : X \rightarrow X \forall g \in G$, φ_g est un difféomorphisme (au moins C^1) sur X avec $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ et $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1.g_2}$. Nous considérons aussi l'action du même groupe G sur U par $(\psi_g)_{g \in G}$ et sur Y par $(\rho_g)_{g \in G}$.

Définition 3.1.1 G est un groupe de symétries de (3.1) si, pour chaque solution $(x(t), u(t))$ de (3.1) et $\forall g \in G$, $(\varphi_g(x(t)), \psi_g(u(t)))$ est aussi une solution.

Par conséquent, le système (3.1) est dit *invariant* si et seulement si :

$$f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g}(x)f(x, u), \text{ pour tout } g, x \text{ et } u.$$

où D_{φ_g} est la matrice jacobienne de $\varphi_g(x)$.

La sortie y est dite *equi-variante* si et seulement si :

$$h(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = \rho_g(h(x, u)), \text{ pour tout } g, x \text{ et } u.$$

Le système dynamique $\frac{d}{dt}\hat{x} = F(\hat{x}, u, \hat{y})$ est dit *pré-observateur* si et seulement si :

$$F(x, u, h(x, u)) = f(x, u), \text{ pour tout } x \text{ et } u.$$

Il est *invariant* si et seulement si :

$$F(\varphi_g(\hat{x}), \psi_g(u), \rho_g(\hat{y})) = D_{\varphi_g}(\hat{x})F(\hat{x}, u, \hat{y})$$

pour tout g, \hat{x}, u et \hat{y} .

3.2 Forme générale d'un pré-observateur invariant

Pour construire un pré-observateur, nous avons besoin de deux ingrédients importants : *les fonctions scalaires invariantes* et *les champs de vecteurs invariants*.

Une fonction J définie sur $X \times U \times Y$, est dite *invariante* si et seulement si :

$$J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y) \text{ pour tout } g, x, u \text{ et } y.$$

Un champ de vecteur w est dit *invariant* sur $X \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$w(\varphi_g(x)) = D_{\varphi_g}(x)w(x) \text{ pour tout } g \text{ et } x$$

Le système dynamique suivant :

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = f(\hat{x}) + \sum_i J_i(\hat{x}, y)w_i(\hat{x}) \quad (3.3)$$

est un *pré-observer invariant* pour le système (3.1)-(3.2) [30], si nous choisissons J_i une fonction scalaire invariante satisfaisant $J_i(\hat{x}, h(\hat{x}, u)) = 0$ et w_i un champs de vecteur invariant. Cette formule exprime la forme générale du pré-observateur invariant. Si le pré-observateur invariant (3.3) converge vers le modèle (3.1), alors (3.3) est appelé *observateur invariant*.

3.3 Application au Chemostat

Dans ce chapitre, nous allons prendre comme fonction de croissance la cinétique de Monod définie par :

$$\mu(s, K) = \mu_{max} \frac{s}{s + K}$$

où μ_{max} est le taux de croissance maximal et K est la constante de demi saturation.

Réécrivons le modèle (1.3) en introduisant cette cinétique de croissance :

$$\begin{cases} \dot{s} &= D(t)(s_{in} - s) - k\mu_{max} \frac{s}{s + K} x \\ \dot{x} &= \left[\mu_{max} \frac{s}{s + K} - D(t) \right] x \end{cases} \quad (3.4)$$

avec une sortie $y = s$.

3.3.1 Observabilité

Vérifions l'observabilité du système à l'aide du critère du rang : Nous avons

$$\begin{pmatrix} h \\ L_f h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ D(t)(s_{in} - s) - \frac{k\mu_{max}sx}{s + K} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D(t) - \frac{k\mu_{max}Kx}{(s + K)^2} & -\frac{k\mu_{max}s}{s + K} \end{pmatrix}}_O$$

En calculant le déterminant de la matrice O on trouve : $\det(O) = -\frac{k\mu_{max}s}{s + K} \neq 0$ si $s \neq 0$. Par suite, le rang de la matrice d'observabilité O est égal à 2, ce qui implique que notre système est observable.

3.3.2 Invariance du Chemostat

Tout d'abord nous allons choisir quelques variables du système (1.3) qui joueront le rôle d'un contrôle virtuel dans le but de rendre le système invariant. Soit $u = (s_{in}, k, K)$ un contrôle virtuel, où s_{in} est la seule entrée du système et k et K sont des paramètres constants.

Nous avons

$$\begin{cases} f_1(s, x, s_{in}, k, K) = D(t)(s_{in} - s) - k\mu_{max} \frac{sx}{s + K} \\ f_2(s, x, s_{in}, k, K) = \left[\mu_{max} \frac{s}{s + K} - D(t) \right] x \end{cases} \quad (3.5)$$

Cherchons un groupe de transformation linéaire sous lequel (1.3) est invariant.

Soit

$$\begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{x} \\ \tilde{s}_{in} \\ \tilde{k} \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = e^{\nu A} \begin{pmatrix} s \\ x \\ s_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix}$$

où A est une matrice constante quelconque. En posant $B(\nu) = e^{\nu A}$, on aura

$$a_{ij} = \left. \frac{d}{d\nu} b_{ij}(\nu) \right|_{\nu=0}.$$

Par dérivation par rapport à t , on remarque que les variables s_{in} , k et K deviendront nulles, ainsi nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{s}} \\ \dot{\tilde{x}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & \vdots & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ 0 & 0 & \vdots & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} f_1(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) \\ f_2(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & \vdots & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ 0 & 0 & \vdots & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s, x, s_{in}, k, K) \\ f_2(s, x, s_{in}, k, K) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système matriciel peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) = b_{11}f_1(s, x, s_{in}, k, K) + b_{12}f_2(s, x, s_{in}, k, K) \\ f_2(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) = b_{21}f_1(s, x, s_{in}, k, K) + b_{22}f_2(s, x, s_{in}, k, K) \end{cases}$$

Dérivons ce système par rapport à ν , on aura :

$$\frac{d}{d\nu} \Big|_{\nu=0} f_1 \left(e^{\nu A} \begin{pmatrix} s \\ x \\ s_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix} \right) = \left\langle A \begin{pmatrix} s \\ x \\ s_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix}, \nabla f_1 \right\rangle$$

et

$$\frac{d}{d\nu} \Big|_{\nu=0} f_2 \left(e^{\nu A} \begin{pmatrix} s \\ x \\ s_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix} \right) = \left\langle A \begin{pmatrix} s \\ x \\ s_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix}, \nabla f_2 \right\rangle$$

$$\text{où } \nabla f_1 = \begin{pmatrix} -D(t) - k\mu_{max}K \frac{x}{(s+K)^2} \\ -k\mu_{max}K \frac{s}{s+K} \\ D(t) \\ -\mu_{max} \frac{sx}{s+K} \\ k\mu_{max} \frac{sx}{(s+K)^2} \end{pmatrix} \text{ et } \nabla f_2 = \begin{pmatrix} \mu_{max}K \frac{x}{(s+K)^2} \\ \mu_{max} \frac{s}{s+K} - D(t) \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_{max} \frac{sx}{(s+K)^2} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}f_1(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) + a_{12}f_2(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) = (a_{11}s + a_{12}x + a_{13}s_{in} + a_{14}k + a_{15}K) \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \quad + (a_{21}s + a_{22}x + a_{23}s_{in} + a_{24}k + a_{25}K) \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \quad + (a_{31}s + a_{32}x + a_{33}s_{in} + a_{34}k + a_{25}K) \frac{\partial f_1}{\partial s_{in}} \\ \quad + (a_{41}s + a_{42}x + a_{43}s_{in} + a_{44}k + a_{45}K) \frac{\partial f_1}{\partial k} \\ \quad + (a_{51}s + a_{52}x + a_{53}s_{in} + a_{54}k + a_{55}K) \frac{\partial f_1}{\partial K} \\ a_{21}f_1(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) + a_{22}f_2(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{s}_{in}, \tilde{k}, \tilde{K}) = (a_{11}s + a_{12}x + a_{13}s_{in} + a_{14}k + a_{15}K) \frac{\partial f_2}{\partial s} \\ \quad + (a_{21}s + a_{22}x + a_{23}s_{in} + a_{24}k + a_{25}K) \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \quad + (a_{31}s + a_{32}x + a_{33}s_{in} + a_{34}k + a_{25}K) \frac{\partial f_2}{\partial s_{in}} \\ \quad + (a_{41}s + a_{42}x + a_{43}s_{in} + a_{44}k + a_{45}K) \frac{\partial f_2}{\partial k} \\ \quad + (a_{51}s + a_{52}x + a_{53}s_{in} + a_{54}k + a_{55}K) \frac{\partial f_2}{\partial K} \end{array} \right.$$

Après résolution sous Maple (voir Annexe A), la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quelconques. Donc le plus grand groupe linéaire qui rend le système du Chemostat invariant est le groupe des homothéties $G = (R_+^* \times R_+^*, \cdot)$, qui agit sur (s, x) avec deux paramètres (λ_1, λ_2) où $\lambda_1 = e^\alpha$ et $\lambda_2 = e^\beta$.

Ainsi on obtient les actions de G sur X, U et Y par :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(s, x) &= (\lambda_1 s, \lambda_2 x) \\ \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(s_{in}, k, K) &= (\lambda_1 s_{in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k, \lambda_1 K) \\ \rho_{\lambda_1, \lambda_2}(y) &= \lambda_1 y \end{aligned}$$

3.3.3 Construction du pré-observateur invariant

Les fonctions scalaires invariantes

A partir de la définition des fonctions scalaires invariantes, nous avons :

$$J(\lambda_1 s, \lambda_2 x, \lambda_1 s_{in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k, \lambda_1 K, \lambda_1 y) = J(s, x, s_{in}, k, K, y)$$

Pour $\lambda_2 = 1$ et λ_1 quelconque, on a :

$$J(\lambda_1 s, x, \lambda_1 s_{in}, \lambda_1 k, \lambda_1 K, \lambda_1 y) = J(s, x, s_{in}, k, K, y)$$

Par dérivation par rapport à λ_1 en $\lambda_1 = 1$, on obtient :

$$s \frac{\partial J}{\partial s} + s_{in} \frac{\partial J}{\partial s_{in}} + k \frac{\partial J}{\partial k} + K \frac{\partial J}{\partial K} + y \frac{\partial J}{\partial y} = 0$$

Ainsi, le système caractéristique s'écrit :

$$\frac{ds}{s} = \frac{ds_{in}}{s_{in}} = \frac{dk}{k} = \frac{dK}{K} = \frac{dy}{y}$$

d'où

$$J(s, x, s_{in}, k, K, y) = G \left(\underbrace{x}_{z_1}, \underbrace{\frac{s_{in}}{s}}_{z_2}, \underbrace{\frac{k}{s}}_{z_3}, \underbrace{\frac{K}{s}}_{z_4}, \underbrace{\frac{y}{s}}_{z_5} \right)$$

Pour $\lambda_1 = 1$ et λ_2 quelconque et en utilisant la forme précédente, on aura :

$$G \left(\lambda_2 z_1, z_2, \frac{z_3}{\lambda_2}, z_4, z_5 \right) = G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$

Nous trouvons après avoir dérivé par rapport à λ_2 , en $\lambda_2 = 1$:

$$z_1 \frac{\partial G}{\partial z_1} - z_3 \frac{\partial G}{\partial z_3} = 0$$

Le système caractéristique s'écrit :

$$\frac{dz_1}{z_1} = -\frac{dz_3}{z_3}$$

Ce qui donne

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = L(z_1 z_3, z_2, z_4, z_5)$$

Donc, nous obtenons toutes les fonctions scalaires invariantes :

$$J(s, x, s_{in}, k, K, y) = L\left(\frac{xk}{s}, \frac{s_{in}}{s}, \frac{K}{s}, \frac{y}{s}\right)$$

Dans notre travail nous allons prendre une fonction invariante particulière

$$J(s, x, s_{in}, k, K, y) = H\left(\frac{y}{s}\right)$$

Nous préciserons notre choix de H ultérieurement.

Champs de vecteurs invariants

A partir de la définition des champs de vecteurs invariants, nous avons :

$$\begin{aligned} w_1(\lambda_1 s, \lambda_2 x) &= \lambda_1 w_1(s, x) \\ w_2(\lambda_1 s, \lambda_2 x) &= \lambda_2 w_2(s, x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} w_1(s, x) &= a_1 s \\ w_2(s, x) &= a_2 x \end{aligned}$$

où a_1 et a_2 sont deux constantes qui joueront le rôle de gains.

Le pré-observateur invariant

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) &= D(t)(s_{in} - \hat{s}(t)) - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a_1\hat{s}(t) \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \\ \dot{\hat{x}}(t) &= [\mu(\hat{s}(t), K) - D(t)]\hat{x}(t) + a_2\hat{x}(t) \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3.4 Convergence du pré-observateur

Pour montrer la convergence nous avons besoin d'une expression de l'erreur qui soit invariante et qui tende vers 0 quand t tend vers ∞ . Ceci nous amène à choisir l'erreur de la forme suivante :

$$e_1(t) = \ln(s(t)) - \ln(\hat{s}(t)) \text{ et } e_2(t) = \ln(x(t)) - \ln(\hat{x}(t))$$

qui nous amène à son tour à prendre, pour simplifier, la fonction scalaire invariante suivante :

$$H\left(\frac{y}{s}\right) = \ln\left(\frac{y}{s}\right)$$

Ainsi, le pré-observateur (3.6) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) &= D(t)(s_{in} - \hat{s}(t)) - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a_1\hat{s}(t) (\ln s - \ln \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= [\mu(\hat{s}(t), K) - D(t)]\hat{x}(t) + a_2\hat{x}(t) (\ln s - \ln \hat{s}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous allons d'abord montrer que \hat{s} et \hat{x} sont positifs. Ceci justifiera notre écriture de $\ln \hat{s}$ et $\ln \hat{x}$ dans les erreurs.

Positivité des variables d'état de l'observateur

Pour la variable \hat{x} , nous avons à priori :

$$\dot{\hat{x}} = [\mu(\hat{s}, K) - D(t)]\hat{x} + a_2\hat{x} (\ln s(t) - \ln |\hat{s}(t)|)$$

cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = (\mu(\hat{s}, K) - D(t) + a_2 (\ln s(t) - \ln |\hat{s}(t)|))\hat{x}$$

ainsi

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \exp\left(\int_0^t [\mu(\hat{s}(\tau), K) - D(\tau) + a_2 (\ln s(\tau) - \ln |\hat{s}(\tau)|)] d\tau\right)$$

Si $\hat{x}(0) \geq 0$ alors $\hat{x}(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.

Pour la variable \hat{s} , nous avons à priori aussi :

$$\dot{\hat{s}}(t) = D(t)(s_{in} - \hat{s}(t)) - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a_1\hat{s}(t) (\ln s(t) - \ln |\hat{s}(t)|)$$

Ici deux cas se présentent :

1. si $\hat{s}(0) = 0$ nous avons

$$\dot{\hat{s}}(0) = D(0)(s_{in} - \hat{s}(0)) > 0$$

Ceci implique que $\hat{s}(t)$ pour $t > 0$ et voisin de 0.

2. si $\hat{s}(0) > 0$, soit $t_0 = \inf \{t > 0 / \hat{s}(t) > 0\}$ sachant que $\hat{s}(t_0) = 0$, d'une part nous avons

$$\dot{\hat{s}}(t_0) = D(t_0)s_{in} > 0$$

et d'autre part

$$\dot{\hat{s}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\hat{s}(t) - \hat{s}(t_0)}{t - t_0} \leq 0$$

D'où la contradiction. Par conséquent, il n'existe pas de t_0 tel que $\hat{s}(t_0) = 0$. Ce qui implique que $\hat{s}(t) > 0, \forall t \geq 0$ si $\hat{s}(0) > 0$.

Théorème 3.3.1 *Pour le système (3.4) avec la sortie $y = s$, le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t)(s_{in} - \hat{s}(t)) - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a_1\hat{s}(t)(\ln s - \ln \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}}(t) = [\mu(\hat{s}(t), K) - D(t)]\hat{x}(t) + a_2\hat{x}(t)(\ln s - \ln \hat{s}) \end{cases} \quad (3.8)$$

est un observateur. La dynamique des erreurs est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -a_1 e_1 - \frac{D(t)s_{in}}{s}(e^{e_1} - 1) - \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)(se^{-e_1}+K)}(e^{-e_1} - 1) \\ \quad + \frac{k\mu_{max}x}{se^{-e_1}+K}(e^{-e_2} - 1) \\ \dot{e}_2 = -a_2 e_2 - \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)(se^{-e_1}+K)}(e^{-e_1} - 1) \end{cases} \quad (3.9)$$

Supposons que $a_1 > 0$ suffisamment grand et $a_2 < 0$, avec $|a_2|$ assez grand, alors $(0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système (3.9).

Preuve du théorème. Le système (3.9) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \left[-a_1 - \frac{D(t)s_{in}}{s} + \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2} \right] e_1 - \frac{k\mu_{max}x}{s+K} e_2 - \frac{D(t)s_{in}}{s} (e^{e_1} - e_1 - 1) \\ \quad - \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_1} + e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_1} - 1) e_1 \right] \\ \quad + \frac{k\mu_{max}x}{s+K} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_2} + e_2 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_1} - 1) e_2 \right] \\ \dot{e}_2 = \left[-a_2 + \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)^2} \right] e_1 - \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)^2} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_1} + e_1 - 1) \right. \\ \quad \left. + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{-e_1} - 1) e_1 \right] \end{cases} \quad (3.10)$$

En posant :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{D(t)s_{in}}{s} & u_2(t) &= \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2} & u_3(t) &= \frac{k\mu_{max}x}{s+K} \\ u_4(t) &= \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)^2} & v_1(t) &= \frac{s+K}{se^{-e_1}+K} & v_2(t) &= \frac{s}{se^{-e_1}+K} \end{aligned}$$

le système (3.10) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = [-a_1 - u_1 + u_2]e_1 - u_3e_2 - u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) \\ + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ \dot{e}_2 = [-a_2 + u_4]e_1 - u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \end{cases} \quad (3.11)$$

Notons que dans ce système $(0, 0)$ est un équilibre. Il reste à montrer que cet équilibre est localement uniformément asymptotiquement stable. Le système (3.11) est non-autonome, alors nous allons utiliser le théorème (I.2.1, p. 195) dans [29] (voir Annexe B).

Le système (3.11) peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) + \chi(t, e(t))$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 - u_1 + u_2 & -u_3 \\ -a_2 + u_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ + u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ -u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Pour la majoration de χ , nous allons prendre la norme $\|e\| = |e_1| + |e_2|$, i.e. nous devons montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ tel que } (|e_1| + |e_2|) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow (|\chi_1| + |\chi_2|) \leq \epsilon (|e_1| + |e_2|), \forall t \geq T$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 0 < \vartheta \leq s(t) \leq s_{in} & , & 0 < x(t) \leq \sigma \\ 0 < D_{min} \leq u_1(t) \leq \frac{D_{max}s_{in}}{\vartheta} & , & 0 \leq u_2(t) \leq \frac{k\mu_{max}\sigma}{4K} \\ 0 \leq u_3(t) \leq \frac{k\mu_{max}\sigma}{K} & , & 0 \leq u_4(t) \leq \frac{\mu_{max}}{4} \\ 0 \leq v_1(t) \leq \frac{s_{in} + K}{K} & , & 0 \leq v_2(t) \leq \frac{s_{in}}{K} \end{aligned}$$

où

$$\sigma = \frac{2}{k}s_{in} + x(0) \text{ and } \vartheta = s_{in} + (s(0) - s_{in})e^{-C} > 0 \text{ (voir lemme(1.2.1)).}$$

À partir de

$$e^{e_1} = 1 + e_1 + e_1^2 \int_0^1 (1 - \tau)e^{e_1\tau} d\tau$$

nous avons

$$\begin{aligned} |e^{\pm e_1} \mp e_1 - 1| &\leq \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon |e_1| \quad , \quad |e^{-e_1} - 1| \leq \delta_\epsilon + \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon^2 \\ \left[\begin{aligned} \chi_1 &= -u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ &\quad + u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ |\chi_1| &= |-u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ &\quad + u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2]| \\ |\chi_1| &\leq u_1|e^{e_1} - e_1 - 1| + u_2[v_1|e^{-e_1} + e_1 - 1| + v_2|e^{e_1} - 1||e_1|] \\ &\quad + u_3[v_1|e^{-e_2} + e_2 - 1| + v_2|e^{e_1} - 1||e_2|] \\ |\chi_1| &\leq \left[\frac{D_{max}s_{in}}{2s}e^{\delta_\epsilon} + \frac{k\mu_{max}\sigma}{K} \left(\frac{s_{in} + K}{2K}e^{\delta_\epsilon} + \frac{s_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_1| \\ &\quad + \left[\frac{k\mu_{max}\sigma}{K} \left(\frac{s_{in} + K}{2K}e^{\delta_\epsilon} + \frac{s_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_2| \\ |\chi_1| &\leq \left[\frac{D_{max}s_{in}}{2s}e^{\delta_\epsilon} + \frac{k\mu_{max}\sigma}{K} \left(\frac{s_{in} + K}{2K}e^{\delta_\epsilon} + \frac{s_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_1| \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \chi_2 &= -u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ |\chi_2| &= |-u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1]| \\ |\chi_2| &\leq u_4[v_1|e^{-e_1} + e_1 - 1| + v_2|e^{e_1} - 1||e_1|] \\ |\chi_2| &\leq \left[\mu_{max} \left(\frac{s_{in} + K}{2K}e^{\delta_\epsilon} + \frac{s_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2}e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_1| \end{aligned} \right.$$

par suite

$$|\chi_1| + |\chi_2| \leq \frac{1}{2} \left[\frac{D_{max}s_{in}}{s}e^{\delta_\epsilon} + \frac{\mu_{max}}{K} \left(\frac{k\sigma}{K} + 1 \right) ((s_{in} + K)e^{\delta_\epsilon} + s_{in}(2 + e^{\delta_\epsilon}\delta_\epsilon)) \right] \delta_\epsilon (|e_1| + |e_2|)$$

Donc

$$|\chi_1| + |\chi_2| \leq \ell(\delta_\epsilon)(|e_1| + |e_2|)$$

où

$$\ell(\delta_\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{D_{max} s_{in}}{s} e^{\delta_\epsilon} + \frac{\mu_{max}}{K} \left(\frac{k\sigma}{K} + 1 \right) ((s_{in} + K)e^{\delta_\epsilon} + s_{in} (2 + e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon)) \right] \delta_\epsilon$$

Notons que la fonction $\ell(\delta_\epsilon)$ est continue en δ_ϵ et $\ell(0) = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que $\ell(\delta_\epsilon) < \epsilon$.

Il reste à montrer que $(0, 0)$ est uniformément asymptotiquement stable pour le système linéaire

$$\frac{de}{dt} = A(t)e$$

Pour cela, nous allons prendre la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_\alpha(e_1, e_2) = \left\| \begin{pmatrix} \alpha e_1 + e_2 \\ e_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (\alpha e_1 + e_2)^2 + e_2^2$$

où $\alpha > 0$.

Notons que cette fonction est aussi une norme qui est radialement non bornée.

Nous avons

$$\dot{V}_\alpha(e_1, e_2) = 2(\alpha e_1 + e_2)(\alpha \dot{e}_1 + \dot{e}_2) + 2e_2 \dot{e}_2$$

En remplaçant les dynamiques de e_1 et de e_2 par leurs expressions, nous obtenons ceci :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha(e_1, e_2) &= 2\alpha [\alpha (-a_1 - u_1 + u_2) + (-a_2 + u_4)] e_1^2 \\ &- 2 [\alpha^2 u_3 - \alpha (-a_1 - u_1 + u_2) - 2(-a_2 + u_4)] e_1 e_2 - 2\alpha u_3 e_2^2 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} M_\alpha \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha [\alpha (-a_1 - u_1 + u_2) + (-a_2 + u_4)] & -\alpha^2 u_3 + \alpha (-a_1 - u_1 + u_2) \\ & + 2(-a_2 + u_4) \\ -\alpha^2 u_3 + \alpha (-a_1 - u_1 + u_2) & -2\alpha u_3 \\ + 2(-a_2 + u_4) & \end{pmatrix}$$

$\dot{V}_\alpha(e_1, e_2)$ est négative si et seulement si $tr(M_\alpha) < 0$ et $\det(M_\alpha) > 0$. Nous allons choisir a_1 et a_2 tels que ces conditions soient vérifiées.

$$tr(M_\alpha) = 2\alpha [\alpha (-a_1 - u_1 + u_2) + (-a_2 + u_4)] - 2\alpha u_3$$

$$\det(M_\alpha) = -(\alpha a_1 + 2a_2)^2 + p a_1 + q a_2 + r$$

où

$$p = -2\alpha (\alpha u_1 - \alpha_2 - \alpha^2 u_3 - 2u_4)$$

$$q = -4(\alpha u_1 - \alpha_2 - 2u_4)$$

$$r = -\alpha^2 (u_1 - \alpha u_3)^2 - (\alpha u_1 - \alpha u_2 - 2u_4)^2 + \alpha^2 u_1^2 - 2\alpha^3 u_2 u_3$$

La bornitude de u_1, \dots, u_4 implique la bornitude de p, q et r .

En choisissant $\alpha a_1 + 2a_2 = 0$ et $\alpha > 0$, $tr(M_\alpha)$ et $\det(M_\alpha)$ deviennent :

$$tr(M_\alpha) = -\alpha^2 a_1 - 2\alpha [\alpha (u_1 - u_2) + u_3]$$

$$\det(M_\alpha) = \left(p - \frac{\alpha}{2}q\right) a_1 + r$$

donc $\det(M_\alpha) > 0$ car $p - \frac{\alpha}{2}q = 2\alpha^3 u_3 > 0$ et en prenant a_1 suffisamment grand positif, ce qui conduit à la négativité de $tr(M_\alpha)$. Donc $(0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. ■

Remarque 3.3.2 *La relation $\alpha a_1 + 2a_2 = 0$ permet de faire varier simultanément a_1 et a_2 (selon les conditions données dans le théorème précédent) pour ajuster la vitesse de convergence.*

3.4 Résultats de simulation

La définition des paramètres du modèle du Chemostat, leurs valeurs et les conditions initiales sont données dans les tableaux (3.1) et (3.2) [1].

Paramètres	Définition	Valeurs et unités
k	Coefficient stchiométrique pour la dégradation du COD	6.6 Kg COD/Kg x
μ_{max}	Taux de croissance maximal	1.2 d ⁻¹
K	Paramètre de saturation	4.95 Kg COD/m ³
s_{in}	Le flux d'entrée de s	9 Kg/m ³

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle

	$s(0)$ (Kg/m ³)	$x(0)$ (Kg/m ³)
Modèle	3	0.5
Observateur	3	3

TABLE 3.2 – Conditions initiales

Nous considérons le taux de dilution suivant :

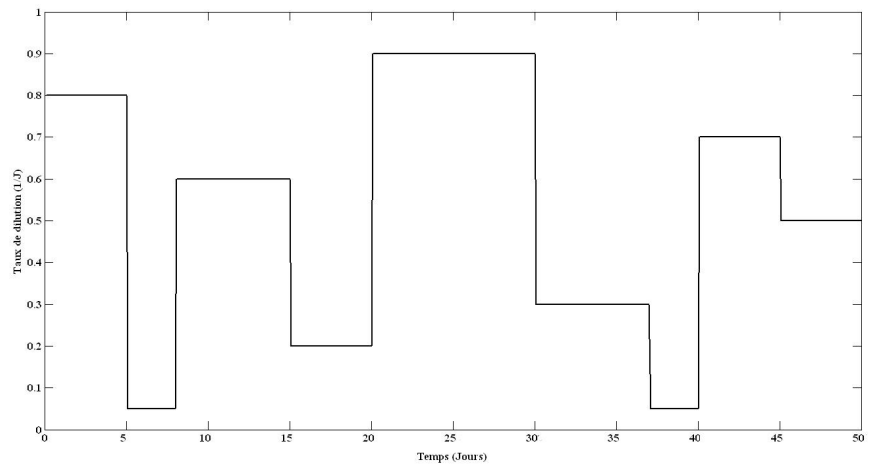


FIGURE 3.1 – Le taux de dilution

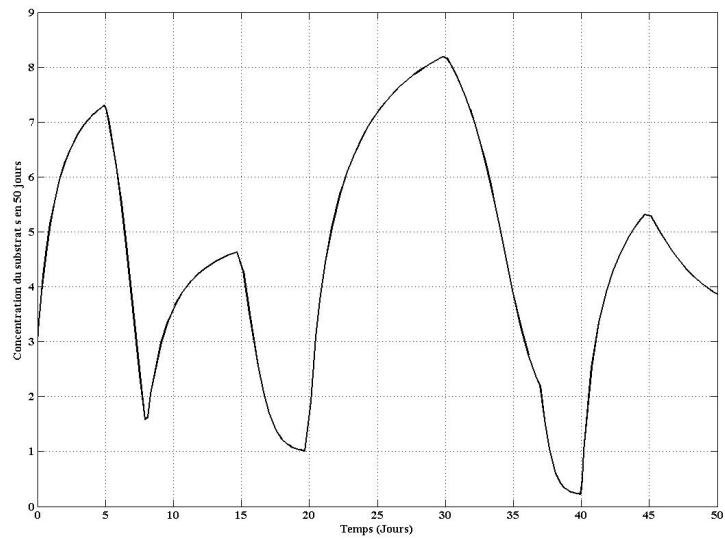


FIGURE 3.2 – Concentration du Substrat

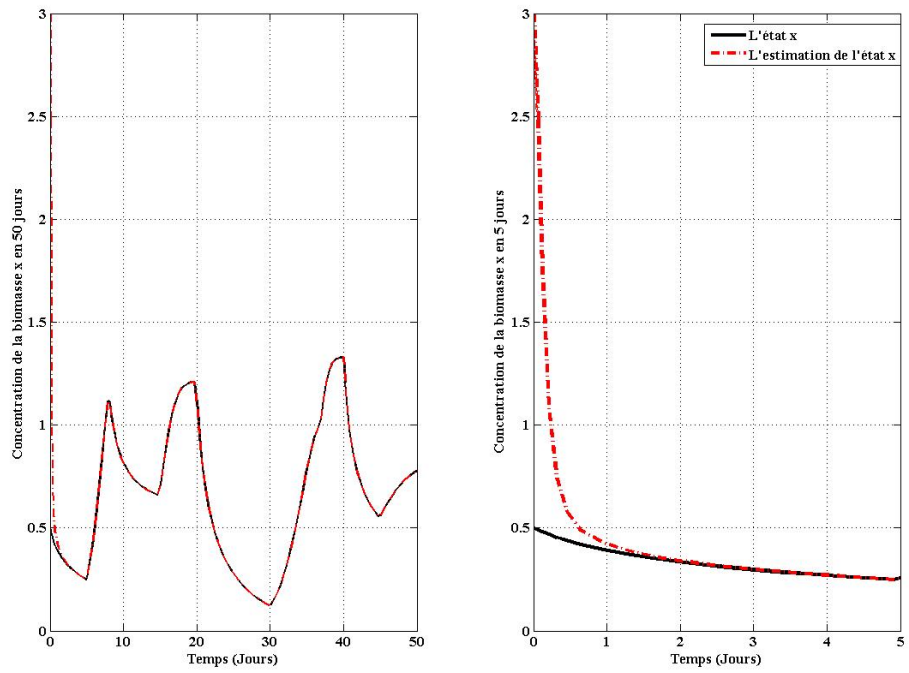


FIGURE 3.3 – Concentration de la Biomasse et son estimation pour $a_1 = 10$ et $a_2 = -50$ (On a pris $\alpha = 10$)

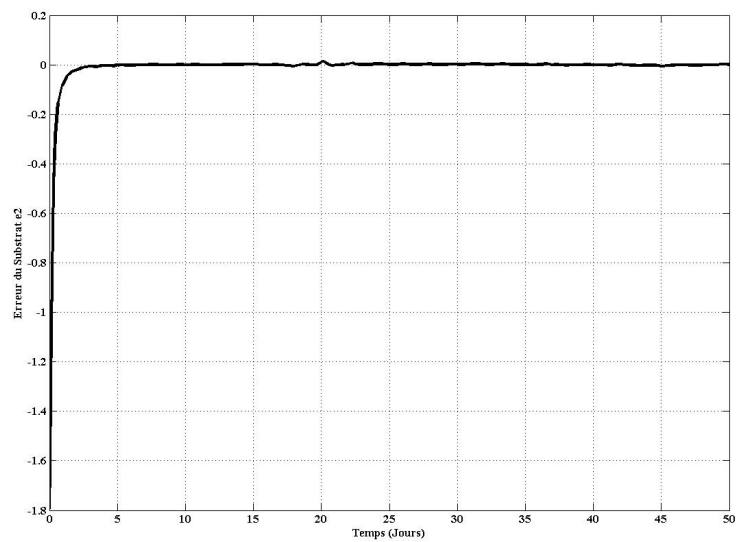


FIGURE 3.4 – Erreur correspondant à la biomasse

Les figures (3.2) et (3.3) représentent l'état mesuré s et l'estimation de l'état x respectivement. La figure (3.4) représente l'erreur d'estimation pour l'état x . Concernant la convergence, nous avons pris $a_1 = 10$ et $a_2 = -50$, ainsi nous remarquons que notre observateur invariant présente une excellente convergence pour la biomasse qui est obtenue après $t \approx 2$ jours avec une erreur de l'ordre de 10^{-2} .

Cas particulier : Prenons le cas où $D(t)$ est constant. Dans ce cas, nous avons deux points équilibres [34] :

$$E^0 = (s_{in}, 0)$$

et

$$E^* = \left(\frac{DK}{\mu_{max} - D}, \frac{1}{k} \left(s_{in} - \frac{DK}{\mu_{max} - D} \right) \right)$$

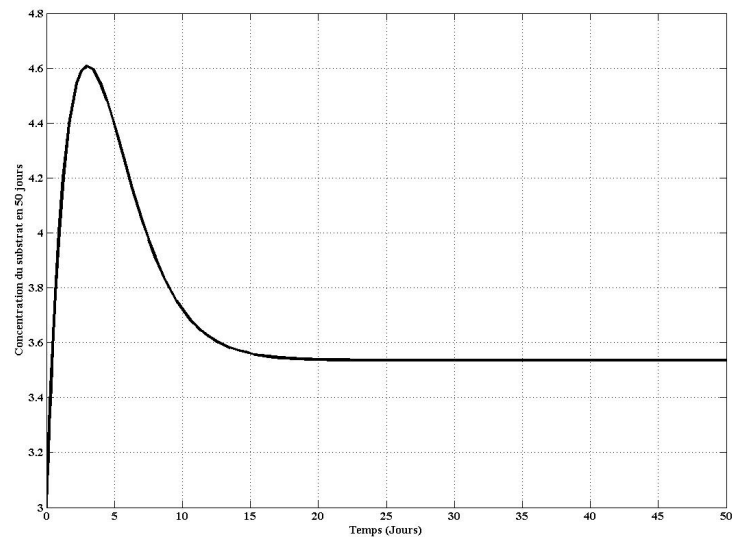


FIGURE 3.5 – Concentration du substrat

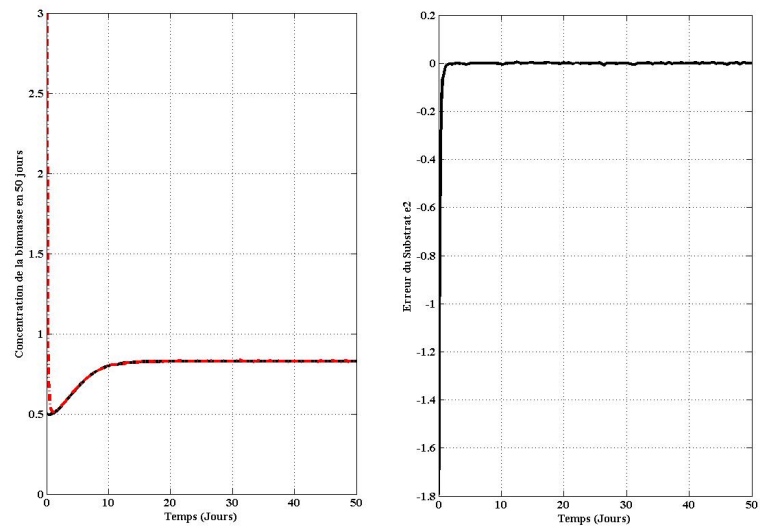


FIGURE 3.6 – Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation

À partir de ces deux figures, nous remarquons que la biomasse converge vers le second point d'équilibre, ainsi que la variable \hat{x} de l'observateur. Dans le cas où $D(t)$ est variable, on verrait mieux le fait que l'observateur donne une estimation des variables d'état.

Chapitre 4

Compétition dans le Chemostat

Il existe un résultat classique dans la compétition entre n espèces sur un seul nutriment, ce résultat est connu comme le Principe d'Exclusion Compétitive ([18], [19] et [34]). Ce principe contredit la biodiversité que l'on trouve dans les bioréacteurs où au moins deux espèces en compétition sur une seule ressource coexistent [20].

Plusieurs modèles ont été mis en oeuvre et étudié mathématiquement [13], mais peu d'observateurs ont été synthétisés. On cite le travail de Karafyllis [22] où il a construit un observateur (Reduced Dead-beat) qui est très complexe à synthétiser et presque impossible de le simuler.

Soit le système dynamique représentant la compétition dans le Chemostat :

$$\begin{cases} \dot{s} &= D(t)(s_{in} - s) - k_1\mu_1(s)x_1 - k_2\mu_2(s)x_2, \\ \dot{x}_1 &= [\mu_1(s) - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2 - D_1(t)] x_1, \\ \dot{x}_2 &= [\mu_2(s) - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - D_2(t)] x_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

où s et x_i désignent les concentrations du substrat et de l'espèce i , $i = 1, 2$; $\alpha_{ii}x_i$ désigne les termes de compétition intra-spécifique (entre les individus de la même espèce) et, $\alpha_{ij}x_i$, $i \neq j$ désigne les termes de compétition inter-spécifique (entre les individus de différentes espèces). La fonction $\mu_i(s)$ représente le taux de croissance de l'espèce i qui est définie par :

$$\mu_i(s) = \mu_{imax} \frac{s}{s + K_i}$$

$D_i(t)$ désigne le taux de prélèvement de l'espèce i défini par :

$$D_i(t) = D(t) + \tilde{D}_i$$

où \tilde{D}_i est le taux de mortalité de l'espèce i .

4.1 Invariance du modèle de compétition dans le Chemostat

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = D(t)(s_{in} - s) - \frac{k_1 \mu_{1max} s x_1}{s + K_1} - \frac{k_2 \mu_{2max} s x_2}{s + K_2} \\ f_2(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = \left[\frac{\mu_{1max} s}{s + K_1} - \alpha_{11} x_1 - \alpha_{12} x_2 - D_1(t) \right] x_1 \\ f_3(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = \left[\frac{\mu_{2max} s}{s + K_1} - \alpha_{11} x_1 - \alpha_{22} x_2 - D_2(t) \right] x_2 \end{array} \right.$$

Soit

$$\begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{s}_{in} \\ \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_2 \\ \tilde{\alpha}_{11} \\ \tilde{\alpha}_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} \\ \tilde{\alpha}_{22} \end{pmatrix} = e^{\nu \tilde{A}} \begin{pmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \\ s_{in} \\ k_1 \\ k_2 \\ K_1 \\ K_2 \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

où A est une matrice quelconque, et $\tilde{A}_{ij} = \left. \frac{d}{d\nu} B_{ij}(\nu) \right|_{\nu=0}$.

Par dérivation par rapport à t nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{s}} \\ \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} & b_{110} & b_{111} & b_{112} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} & b_{29} & b_{210} & b_{211} & b_{212} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} & b_{39} & b_{310} & b_{311} & b_{312} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} & b_{49} & b_{410} & b_{411} & b_{412} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{54} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} & b_{59} & b_{510} & b_{511} & b_{512} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{64} & b_{65} & b_{66} & b_{67} & b_{68} & b_{69} & b_{610} & b_{611} & b_{612} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} & b_{78} & b_{79} & b_{710} & b_{711} & b_{712} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} & b_{89} & b_{810} & b_{811} & b_{812} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{94} & b_{95} & b_{96} & b_{97} & b_{98} & b_{99} & b_{910} & b_{911} & b_{912} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{104} & b_{105} & b_{106} & b_{107} & b_{108} & b_{109} & b_{1010} & b_{1011} & b_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{114} & b_{115} & b_{116} & b_{117} & b_{118} & b_{119} & b_{1110} & b_{1111} & b_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{124} & b_{125} & b_{126} & b_{127} & b_{128} & b_{129} & b_{1210} & b_{1211} & b_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{x}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système matricielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + b_{13}f_3 \\ \tilde{f}_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + b_{23}f_3 \\ \tilde{f}_3 = b_{31}f_1 + b_{32}f_2 + b_{33}f_3 \end{cases}$$

Dérivons ce système par rapport à ν :

$$\left. \frac{d}{d\nu} \right|_{\nu=0} f_i e^{\nu \tilde{A}} \begin{pmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \\ s_{in} \\ k_1 \\ k_2 \\ K_1 \\ K_2 \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \left\langle \tilde{A} \begin{pmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \\ s_{in} \\ k_1 \\ k_2 \\ K_1 \\ K_2 \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}, \nabla f_i \right\rangle, i = \overline{1, 4}$$

Après résolution sous Maple (voir Annexe A), nous obtenons la matrice suivante :

$$\tilde{A} = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \alpha - \beta, \alpha - \gamma, \alpha, \alpha, -\beta, -\gamma, -\beta, -\gamma)$$

Donc le plus grand groupe linéaire qui rend le système de la compétition dans le Chemostat invariant est le groupe des homothéties $G = (R_+^* \times R_+^* \times R_+^*, \cdot)$, qui agit sur (s, x_1, x_2) avec trois paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où $\lambda_1 = e^\alpha$, $\lambda_2 = e^\beta$ et $\lambda_3 = e^\gamma$.

4.2 Pré-observateur

4.2.1 Les fonctions scalaires invariantes

Par définition, nous avons :

$$J(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, y) \\ = J\left(\lambda_1 s, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_2, \lambda_1 s_{in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_3} k_2, \lambda_1 K_1, \lambda_1 K_2, \frac{1}{\lambda_2} \alpha_{11}, \frac{1}{\lambda_3} \alpha_{12}, \frac{1}{\lambda_2} \alpha_{21}, \frac{1}{\lambda_3} \alpha_{22}, \lambda_1 y\right)$$

Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et λ_1 quelconque, nous avons :

$$J(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, y) \\ = J(\lambda_1 s, x_1, x_2, \lambda_1 s_{in}, \lambda_1 k_1, \lambda_1 k_2, \lambda_1 K_1, \lambda_1 K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \lambda_1 y)$$

Par dérivation par rapport à λ_1 en $\lambda_1 = 1$, nous obtenons :

$$s \frac{\partial J}{\partial s} + s_{in} \frac{\partial J}{\partial s_{in}} + k_1 \frac{\partial J}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial J}{\partial k_2} + K_1 \frac{\partial J}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial J}{\partial K_2} + y \frac{\partial J}{\partial y} = 0$$

Ainsi, l'équation caractéristique de cette équation aux dérivées partielles s'écrit comme suit :

$$\frac{ds}{s} = \frac{ds_{in}}{s_{in}} = \frac{dk_1}{k_1} = \frac{dk_2}{k_2} = \frac{dK_1}{K_1} = \frac{dK_2}{K_2} = \frac{dy}{y}$$

Ce qui donne :

$$J(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, y) \\ = G\left(\underbrace{x_1}_{z_1}, \underbrace{x_2}_{z_2}, \underbrace{\alpha_{11}}_{z_3}, \underbrace{\alpha_{12}}_{z_4}, \underbrace{\alpha_{21}}_{z_5}, \underbrace{\alpha_{22}}_{z_6}, \underbrace{\frac{s_{in}}{s}}_{z_7}, \underbrace{\frac{k_1}{s}}_{z_8}, \underbrace{\frac{k_2}{s}}_{z_9}, \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{z_{10}}, \underbrace{\frac{K_2}{s}}_{z_{11}}, \underbrace{\frac{y}{s}}_{z_{12}}\right)$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ et λ_2 quelconque, nous avons :

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}) = G\left(\lambda_2 z_1, z_2, \frac{1}{\lambda_2} z_3, z_4, \frac{1}{\lambda_2} z_5, z_6, z_7, \frac{1}{\lambda_2} z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}\right)$$

Par dérivation par rapport à λ_2 en $\lambda_2 = 1$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$z_1 \frac{\partial G}{\partial z_1} - z_3 \frac{\partial G}{\partial z_3} - z_5 \frac{\partial G}{\partial z_5} - z_8 \frac{\partial G}{\partial z_8} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\frac{dz_1}{z_1} = -\frac{dz_3}{z_3} = -\frac{dz_5}{z_5} = -\frac{dz_8}{z_8}$$

Ainsi,

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}) \\ = L(\underbrace{z_2}_{v_1}, \underbrace{z_4}_{v_2}, \underbrace{z_6}_{v_3}, \underbrace{z_7}_{v_4}, \underbrace{z_9}_{v_5}, \underbrace{z_{10}}_{v_6}, \underbrace{z_{11}}_{v_7}, \underbrace{z_{12}}_{v_8}, \underbrace{z_1 z_3}_{v_9}, \underbrace{z_1 z_5}_{v_{10}}, \underbrace{z_1 z_8}_{v_{11}})$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et λ_3 quelconque, nous avons :

$$L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}) = L\left(\lambda_3 v_1, \frac{1}{\lambda_3} v_2, \frac{1}{\lambda_3} v_3, v_4, \frac{1}{\lambda_3} v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\right)$$

Par dérivation par rapport à λ_3 en $\lambda_3 = 1$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$v_1 \frac{\partial L}{\partial v_1} - v_2 \frac{\partial L}{\partial v_2} - v_3 \frac{\partial L}{\partial v_3} - v_5 \frac{\partial L}{\partial v_5} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{dv_2}{v_2} = -\frac{dv_3}{v_3} = -\frac{dv_5}{v_5}$$

Ainsi,

$$L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}) = R(v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_5)$$

Par suite, nous obtenons toutes les fonctions scalaires invariantes suivantes :

$$J(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, y) \\ = R\left(\frac{s_{in}}{s}, \frac{K_1}{s}, \frac{K_2}{s}, \frac{y}{s}, \alpha_{11} x_1, \alpha_{21} x_1, \frac{k_1 x_1}{s}, \alpha_{12} x_2, \alpha_{22} x_2, \frac{k_2 x_2}{s}\right)$$

Dans ce qui suit, nous allons prendre une fonction invariante particulière qui est de la forme :

$$J(s, x_1, x_2, s_{in}, k_1, k_2, K_1, K_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, y) = H\left(\frac{y}{s}\right)$$

4.2.2 Les champs de vecteurs invariants

A partir de la définition des champs de vecteurs invariants, nous avons :

$$w_1(\lambda_1 s, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_2) = \lambda_1 w_1(s, x_1, x_2) \\ w_2(\lambda_1 s, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_2) = \lambda_2 w_2(s, x_1, x_2) \\ w_3(\lambda_1 s, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_2) = \lambda_3 w_3(s, x_1, x_2)$$

Donc

$$\begin{aligned}w_1(s, x_1, x_2) &= a_1 s \\w_2(s, x_1, x_2) &= a_2 x_1 \\w_3(s, x_1, x_2) &= a_3 x_2\end{aligned}$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes qui joueront le rôle de gain.

4.2.3 Le pré-observateur invariant

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} &= D(t)(s_{in} - \hat{s}) - k_1\mu(\hat{s}, K_1)\hat{x}_1 - k_2\mu(\hat{s}, K_2)\hat{x}_2 + a_1\hat{s} \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \\ \dot{\hat{x}}_1 &= [\mu(\hat{s}, K_1) - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2 - D_1(t)]\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_1 \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \\ \dot{\hat{x}}_2 &= [\mu(\hat{s}, K_2) - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - D_2(t)]\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_2 \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2.4 Convergence du pré-observateur

Pour montrer la convergence nous avons besoin d'une expression de l'erreur qui soit invariante et qui tend vers 0 quand t tend vers ∞ . Ceci nous amène à choisir l'erreur de la forme suivante :

$$e_1(t) = \ln(s(t)) - \ln(\hat{s}(t)), \quad e_2(t) = \ln(x_1(t)) - \ln(\hat{x}_1(t)) \quad \text{et} \quad e_3(t) = \ln(x_2(t)) - \ln(\hat{x}_2(t))$$

qui nous amène à son tour à prendre, pour simplifier, la fonction scalaire invariante suivante :

$$H\left(\frac{y}{s}\right) = \ln\left(\frac{y}{s}\right)$$

Théorème 4.2.1 *Pour le système (4.1) avec la sortie $y = s$, le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} &= D(t)(s_{in} - \hat{s}) - k_1\mu(\hat{s}, K_1)\hat{x}_1 - k_2\mu(\hat{s}, K_2)\hat{x}_2 + a_1\hat{s} (\ln s - \ln \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}}_1 &= [\mu(\hat{s}, K) - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2 - D_1(t)]\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_1 (\ln s - \ln \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= [\mu(\hat{s}, K) - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - D_2(t)]\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_2 (\ln s - \ln \hat{s}) \end{cases} \quad (4.3)$$

est un observateur. La dynamique des erreurs est donnée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = -a_1 e_1 - \frac{D(t)s_{in}}{s}(e^{e_1} - 1) - \left[\frac{k_1 \mu_{1max} x_1 s}{(s + K_1)(se^{-e_1} + K_1)} + \frac{k_2 \mu_{2max} x_2 s}{(s + K_2)(se^{-e_1} + K_2)} \right] (e^{-e_1} - 1) \\ \quad + \frac{k_1 \mu_{1max} x_1}{se^{-e_1} + K_1} (e^{-e_2} - 1) + \frac{k_2 \mu_{2max} x_2}{se^{-e_1} + K_2} (e^{-e_3} - 1), \\ \dot{e}_2 = -a_2 e_1 - \frac{K_1 \mu_{1max} s}{(s + K_1)(se^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) + \alpha_{11} x_1 (e^{-e_2} - 1) + \alpha_{12} x_2 (e^{-e_3} - 1), \\ \dot{e}_3 = -a_3 e_1 - \frac{K_2 \mu_{2max} s}{(s + K_2)(se^{-e_1} + K_2)} (e^{-e_1} - 1) + \alpha_{21} x_1 (e^{-e_2} - 1) + \alpha_{22} x_2 (e^{-e_3} - 1) \end{array} \right.$$

Supposons que $a_1 > 0$ assez grand, $a_2 < 0$ et $a_3 < 0$, alors $(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable.

preuve. Le système (4.4) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{e}_1 = \left[-a_1 - \frac{D(t)s_{in}}{s} + \frac{k_1\mu_{1max}x_1s}{(s+K_1)^2} + \frac{k_2\mu_{2max}x_2s}{(s+K_2)^2} \right] e_1 - \frac{k_1\mu_{1max}x_1}{s+K_1}e_2 - \frac{k_2\mu_{2max}x_2}{s+K_2}e_3 \\
 - \frac{D(t)s_{in}}{s}(e^{e_1} - e_1 - 1) - \frac{k_1\mu_{1max}x_1s}{(s+K_1)^2} \left[\frac{s+K_1}{se^{-e_1}+K_1}(e^{-e_1} + e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_1} \right. \\
 \left. (e^{-e_1} - 1)e_1 \right] - \frac{k_2\mu_{2max}x_2s}{(s+K_2)^2} \left[\frac{s+K_2}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_1} + e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_1} - 1)e_1 \right] \\
 + \frac{k_1\mu_{1max}x_1}{s+K_1} \left[\frac{s+K_1}{se^{-e_1}+K_1}(e^{-e_2} + e_2 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_1}(e^{-e_1} - 1)e_2 \right] \\
 + \frac{k_2\mu_{2max}x_2}{s+K_2} \left[\frac{s+K_2}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_3} + e_3 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_1} - 1)e_3 \right], \\
 \dot{e}_2 = \left[-a_2 + \frac{K_1\mu_{1max}s}{(s+K_1)^2} \right] e_1 - \alpha_{11}x_1e_2 - \alpha_{12}x_2e_3 \\
 - \frac{K_1\mu_{1max}s}{(s+K_1)^2} \left[\frac{s+K_1}{se^{-e_1}+K_1}(e^{-e_1} + e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_1}(e^{-e_1} - 1)e_1 \right] \\
 + \alpha_{11}x_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + \alpha_{12}x_2(e^{-e_3} + e_3 - 1), \\
 \dot{e}_3 = \left[-a_3 + \frac{K_2\mu_{2max}s}{(s+K_2)^2} \right] e_1 - \alpha_{21}x_1e_2 - \alpha_{22}x_2e_3 \\
 - \frac{K_2\mu_{2max}s}{(s+K_2)^2} \left[\frac{s+K_2}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_1} + e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K_2}(e^{-e_1} - 1)e_1 \right] \\
 + \alpha_{21}x_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + \alpha_{22}x_2(e^{-e_3} + e_3 - 1)
 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Posons maintenant,

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{D(t)s_{in}}{s} & u_2 &= \frac{k_1\mu_{1max}x_1s}{(s+K_1)^2} & u_3 &= \frac{k_2\mu_{2max}x_2s}{(s+K_2)^2} & u_4 &= \frac{k_1\mu_{1max}x_1}{s+K_1} \\
u_5 &= \frac{k_2\mu_{2max}x_2}{s+K_2} & u_6 &= \frac{K_1\mu_{1max}s}{(s+K_1)^2} & u_7 &= \alpha_{11}x_1 & u_8 &= \alpha_{12}x_2 \\
u_9 &= \frac{K_2\mu_{2max}s}{(s+K_2)^2} & u_{10} &= \alpha_{21}x_1 & u_{11} &= \alpha_{22}x_2 \\
v_1 &= \frac{s+K_1}{se^{-e_1}+K_1} & v_2 &= \frac{s}{se^{-e_1}+K_1} & v_3 &= \frac{s+K_2}{se^{-e_1}+K_2} & \text{et } v_4 &= \frac{s}{se^{-e_1}+K_2}
\end{aligned}$$

Le système (4.5) devient :

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{e}_1 &= [-a_1 - u_1 + u_2 + u_3]e_1 - u_4e_2 - u_5e_3 - u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) \\
&\quad - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] - u_3[v_3(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e] \\
&\quad + u_4[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] + u_5[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e_3], \\
\dot{e}_2 &= [-a_2 + u_6]e_1 - u_7e_2 - u_8e_3 - u_6[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
&\quad + u_7(e^{-e_2} + e_2 - 1) + u_8(e^{-e_3} + e_3 - 1), \\
\dot{e}_3 &= [-a_3 + u_9]e_1 - u_{10}e_2 - u_{11}e_3 - u_9[v_3(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
&\quad + u_{10}(e^{-e_2} + e_2 - 1) + u_{11}(e^{-e_3} + e_3 - 1)
\end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

Rappelons que $(0, 0, 0)$ est un équilibre pour le système (4.4). Nous devons montrer qu'il est localement uniformément asymptotiquement stable. Le système (4.6) est non-autonome, alors nous allons utiliser le même théorème utilisé dans le chapitre précédent [29] (voir Annexe B).

Le système (4.6) peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) + \tilde{\chi}(t, e(t))$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 - u_1 + u_2 + u_3 & -u_4 & -u_5 \\ -a_2 + u_6 & -u_7 & -u_8 \\ -a_3 + u_9 & -u_{10} & -u_{11} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1 \\ \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ -u_3[v_3(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_4[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ + u_5[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e_3] \\ -u_6[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_7(e^{-e_2} + e_2 - 1) + u_8(e^{-e_3} + e_3 - 1) \\ -u_9[v_3(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_4(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_{10}(e^{-e_2} + e_2 - 1) + u_{11}(e^{-e_3} + e_3 - 1) \end{pmatrix}$$

Ici, nous allons prendre la norme $\|e\| = |e_1| + |e_2| + |e_3|$, i.e. nous devons montrer que pour $\forall t \geq T$

$$\forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} > 0 \text{ tel que } (|e_1| + |e_2| + |e_3|) \leq \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} \Rightarrow (|\tilde{\chi}_1| + |\tilde{\chi}_2| + |\tilde{\chi}_3|) \leq \tilde{\epsilon} (|e_1| + |e_2| + |e_3|)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 0 < \vartheta \leq s(t) \leq s_{in} & , & 0 < x_1(t) \leq \sigma_1 & , & 0 < x_2(t) \leq \sigma_2 \\ 0 < D_{min} \leq u_1(t) \leq \frac{D_{max}s_{in}}{\vartheta} & , & 0 \leq u_2(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1} & , & 0 \leq u_3(t) \leq \frac{k_2\mu_{2max}\sigma_2}{K_2} \\ 0 \leq u_4(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1} & , & 0 \leq u_5(t) \leq \frac{k_2\mu_{2max}\sigma_2}{K_2} & , & 0 \leq u_6(t) \leq \mu_{1max} \\ 0 \leq u_7(t) \leq \alpha_{11}\sigma_1 & , & 0 \leq u_8(t) \leq \alpha_{12}\sigma_2 & , & 0 \leq u_9(t) \leq \mu_{2max} \\ 0 \leq u_{10}(t) \leq \alpha_{21}\sigma_1 & , & 0 \leq u_{11}(t) \leq \alpha_{22}\sigma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq v_1(t) \leq \frac{s_{in} + K_1}{K_1} & , & 0 \leq v_2(t) \leq \frac{s_{in}}{K_1} \\ 0 \leq v_3(t) \leq \frac{s_{in} + K_2}{K_2} & , & 0 \leq v_4(t) \leq \frac{s_{in}}{K_2} \end{aligned}$$

À partir de

$$e^{e_i} = 1 + e_i + e_i^2 \int_0^1 (1 - \tau) e^{e_i\tau} d\tau, \quad i = \overline{1, 3}$$

nous avons

$$|e^{\pm e_i} \mp e_i - 1| \leq \frac{1}{2} e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} |e_i| \quad , \quad |e^{-e_i} - 1| \leq \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{2} e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}^2$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\tilde{\chi}_1| \leq & \frac{1}{2} \left(\frac{D_{max}s_{in}}{\vartheta} e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} + 1) + K_1) e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} + 2s_{in} \right] \right. \\ & + \frac{k_2\mu_{2max}\sigma_2}{K_2^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} + 1) + K_2) e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} + 2s_{in} \right] \Big) \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} |e_1| + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{2K_1^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} + 1) + K_1) e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} + 2s_{in} \right] \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} |e_2| \\ & + \frac{k_2\mu_{2max}\sigma_2}{2K_2^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} + 1) + K_2) e^{\tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}}} + 2s_{in} \right] \tilde{\delta}_{\tilde{\epsilon}} |e_3| \end{aligned}$$

$$|\tilde{\chi}_2| \leq \frac{\mu_{1max}}{2K_1} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + 2s_{in} \right] \tilde{\delta}_\varepsilon |e_1| + \frac{\alpha_{11}\sigma_1}{2} e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon |e_2| + \frac{\alpha_{12}\sigma_2}{2} e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon |e_3|$$

$$|\tilde{\chi}_3| \leq \frac{\mu_{2max}}{2K_2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_2)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + 2s_{in} \right] \tilde{\delta}_\varepsilon |e_1| + \frac{\alpha_{21}\sigma_1}{2} e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon |e_2| + \frac{\alpha_{22}\sigma_2}{2} e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon |e_3|$$

Alors

$$|\tilde{\chi}_1| + |\tilde{\chi}_2| + |\tilde{\chi}_3| \leq \tilde{l}_1(\tilde{\delta}_\varepsilon)\tilde{\delta}_\varepsilon |e_1| + \tilde{l}_2(\tilde{\delta}_\varepsilon)\tilde{\delta}_\varepsilon |e_2| + \tilde{l}_3(\tilde{\delta}_\varepsilon)\tilde{\delta}_\varepsilon |e_3|$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1(\tilde{\delta}_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left(\frac{D_{max}s_{in}}{\vartheta} e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + \frac{\mu_{1max}}{K_1^2} (k_1\sigma_1 + K_1) \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + s_{in} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{2max}}{K_2^2} (k_2\sigma_2 + K_2) \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_2)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + s_{in} \right] \right) \tilde{\delta}_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\tilde{l}_2(\tilde{\delta}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + s_{in} \right] + (\alpha_{11} + \alpha_{21}) \sigma_1 e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \right) \tilde{\delta}_\varepsilon$$

$$\tilde{l}_3(\tilde{\delta}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_2\mu_{2max}\sigma_2}{K_2^2} \left[s_{in}((\tilde{\delta}_\varepsilon + 1) + K_2)e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} + s_{in} \right] + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) \sigma_2 e^{\tilde{\delta}_\varepsilon} \right) \tilde{\delta}_\varepsilon$$

Ainsi

$$|\tilde{\chi}_1| + |\tilde{\chi}_2| + |\tilde{\chi}_3| \leq \underbrace{\max \left(\tilde{l}_1(\tilde{\delta}_\varepsilon), \tilde{l}_2(\tilde{\delta}_\varepsilon), \tilde{l}_3(\tilde{\delta}_\varepsilon) \right)}_{\tilde{l}(\tilde{\delta}_\varepsilon)} (|e_1| + |e_2| + |e_3|)$$

Notons que la fonction $\tilde{l}(\tilde{\delta}_\varepsilon)$ est continue en $\tilde{\delta}_\varepsilon$ et $\tilde{l}(0) = 0$, alors pour tout $\tilde{\varepsilon} > 0$ il existe $\tilde{\delta}_\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{l}(\tilde{\delta}_\varepsilon) < \tilde{\varepsilon}$.

Il reste à montrer que $(0, 0, 0)$ est uniformément asymptotiquement stable pour le système linéaire

$$\frac{de}{dt} = A(t)e$$

Pour cela réécrivons la partie linéaire du système (4.6) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= [-a_1 - u_1 + u_2 + u_3] e_1 - u_4 e_2 - u_5 e_3 \\ \dot{e}_2 &= [-a_2 + u_6] e_1 - u_7 e_2 - u_8 e_3 \\ \dot{e}_3 &= [-a_3 + u_9] e_1 - u_{10} e_2 - u_{11} e_3 \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans cette partie nous allons prendre la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_{\lambda, \xi_1, \xi_2}(e_1, e_2, e_3) = e_1^2 + \lambda(e_2^2 + e_3^2) + \frac{1}{2}(\xi_1 e_1 e_2 + \xi_2 e_1 e_3)$$

avec $\xi_1, \xi_2 > 0$ petits et $\lambda > 0$ grand. Donc

$$\dot{V}_{\lambda, \xi_1, \xi_2}(e_1, e_2, e_3) = 2e_1 \dot{e}_1 + 2\lambda(e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3) + \frac{1}{2}[\xi_1(\dot{e}_1 e_2 + e_1 \dot{e}_2) + \xi_2(\dot{e}_1 e_3 + e_1 \dot{e}_3)]$$

En remplaçant les dynamiques de e_1 , e_2 et de e_3 par leurs expressions, nous obtenons ceci :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\lambda, \xi_1, \xi_2}(e_1, e_2, e_3) &= \left[-2(a_1 + u_1 - u_2 - u_3) + \frac{1}{2}\xi_1(-a_2 + u_6) + \frac{1}{2}\xi_2(-a_3 + u_9) \right] e_1^2 \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}\xi_1 u_4 + 2\lambda u_7 \right] e_2^2 - \left[\frac{1}{2}\xi_2 u_5 + 2\lambda u_{11} \right] e_3^2 \\ &\quad \left[-\frac{1}{2}\xi_1(a_1 + u_1 - u_2 - u_3 + u_7) - \frac{1}{2}\xi_2 u_{10} + 2\lambda(-a_2 + u_6) - 2u_4 \right] e_1 e_2 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2}\xi_1 u_8 - \frac{1}{2}\xi_2(a_1 + u_1 - u_2 - u_3 + u_{11}) + 2\lambda(-a_3 + u_9) - 2u_5 \right] e_1 e_3 \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}\xi_1 u_5 + \frac{1}{2}\xi_2 u_4 + 2\lambda(u_8 + u_{10}) \right] e_2 e_3 = e^T \widetilde{M}_{\lambda, \xi_1, \xi_2} e \end{aligned}$$

Avec

$$\widetilde{M}_{\lambda, \xi_1, \xi_2} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \tilde{m}_{13} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \tilde{m}_{23} \\ \tilde{m}_{31} & \tilde{m}_{32} & \tilde{m}_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{11} &= -2(a_1 + u_1 - u_2 - u_3) + \frac{1}{2}\xi_1(-a_2 + u_6) + \frac{1}{2}\xi_2(-a_3 + u_9) \\ \tilde{m}_{12} = \tilde{m}_{21} &= -\frac{1}{4}\xi_1(a_1 + u_1 - u_2 - u_3 + u_7) - \frac{1}{4}\xi_2 u_{10} + \lambda(-a_2 + u_6) - u_4 \\ \tilde{m}_{13} = \tilde{m}_{31} &= -\frac{1}{4}\xi_1 u_8 - \frac{1}{4}\xi_2(a_1 + u_1 - u_2 - u_3 + u_{11}) + \lambda(-a_3 + u_9) - u_5 \\ \tilde{m}_{22} &= -\left[\frac{1}{2}\xi_1 u_4 + 2\lambda u_7 \right] \\ \tilde{m}_{23} = \tilde{m}_{32} &= -\left[\frac{1}{4}\xi_1 u_5 + \frac{1}{2}\xi_2 u_4 + \lambda(u_8 + u_{10}) \right] \end{aligned}$$

et

$$\tilde{m}_{33} = -\left[\frac{1}{2}\xi_2 u_5 + 2\lambda u_{11} \right]$$

$\dot{V}_{\lambda, \xi_1, \xi_2}(e_1, e_2, e_3)$ est négative si et seulement si $\widetilde{M}_{\lambda, \xi_1, \xi_2}$ est définie négative c'est-à-dire les mineurs $\tilde{\delta}_1 < 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$ et $\tilde{\delta}_3 < 0$.

Où $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$ et $\tilde{\delta}_3$ sont les mineurs principaux de $\widetilde{M}_{\lambda, \xi_1, \xi_2}$.

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1 &= -2(a_1 + u_1 - u_2 - u_3) + \frac{1}{2}\xi_1(-a_2 + u_6) + \frac{1}{2}\xi_2(-a_3 + u_9) \\ \tilde{\delta}_2 &= -\frac{1}{16}(\xi_1 a_1 + 4\lambda a_2)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\xi_1 u_6 + 4u_7 \right) \lambda - \frac{1}{8}\xi_1^2(u_1 - u_2 - u_3 + u_7) - \frac{1}{8}\xi_1 \xi_2 u_{10} + \frac{1}{2}\xi_1 u_4 \right] a_1 \\ &\quad + \left[2u_6 \lambda^2 - \frac{1}{2}(\xi_1(u_1 - u_2 - u_3 - u_7) + \xi_2 u_{10} + 4u_4) \lambda + \frac{1}{4}\xi_1^2 u_4 \right] a_2 + \tilde{R}_1\end{aligned}$$

On prend $\xi_1 a_1 + 4\lambda a_2 = 0$ ainsi $\tilde{\delta}_2$ devient :

$$\tilde{\delta}_2 = \frac{16}{\lambda} [64u_7 \lambda^2 - 4\xi_1(\xi_1 u_7 + 4u_4)\lambda - \xi_1^3 u_4] a_1 + \tilde{R}_1$$

Pour un $a_1 > 0$ et $\lambda > 0$ assez grand, $\tilde{\delta}_2$ devient positif.

$$\tilde{\delta}_3 = \frac{1}{32}(4\lambda u_7 + \xi_1 u_4)(\xi_2 a_1 + 4\lambda a_3)^2 + \tilde{p}_1(\lambda, \xi, u_i) a_1 + \tilde{p}_2(\lambda, \xi, u_i) a_3 + \tilde{R}_2$$

On prend $\xi_2 a_1 + 4\lambda a_3 = 0$ ainsi $\tilde{\delta}_1$ devient :

$$\tilde{\delta}_1 = \left(\frac{1}{8\lambda}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2 \right) a_1 - 2(u_1 - u_2 - u_3) + \frac{1}{2}\xi_1 u_6 + \frac{1}{2}\xi_2 u_9$$

Pour $\left(\frac{1}{8\lambda}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2 \right) < 0$ et $a_1 > 0$ assez grand, $\tilde{\delta}_1 < 0$. Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_3 &= \left(2[(u_8 + u_{10})^2 - 4u_7 u_{11}] \lambda^2 - \frac{1}{8} [((u_8 + u_{10})^2 - 4u_7 u_{11})(\xi_1^2 + \xi_2^2) \right. \\ &\quad \left. - 8((u_8 + u_{10})u_5 - 4u_4 u_{11})\xi_1 - 8((u_8 + u_{10})u_4 - 4u_5 u_7)\xi_2 +] \lambda + \frac{1}{16} [((2u_4 u_{11} - u_5(u_8 + u_{10}))\xi_1 \right. \\ &\quad \left. (2u_5 u_7 - u_4(u_8 + u_{10}))\xi_2) (\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2u_5^2 \xi_1^2 - 2u_4^2 \xi_2^2] - \frac{1}{128\lambda} [\xi_1^4 u_5^2 + \xi_2^4 u_4^2 \right. \\ &\quad \left. - 2u_4 u_5 \xi_1 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1^2 \xi_2^2 (u_4^2 + u_5^2)] \right) a_1 + \tilde{R}_2\end{aligned}$$

Supposons

$$(u_8 + u_{10})^2 - 4u_7 u_{11} < 0 \tag{4.9}$$

Pour $\lambda > 0$ assez grand devant $|\xi_1|$ et $|\xi_2|$, on aura $\tilde{\delta}_3 < 0$.

Posons

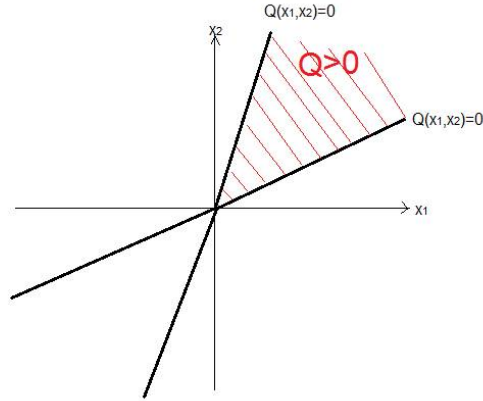
$$Q(x_1, x_2) = 4u_7 u_{11} - (u_8 + u_{10})^2$$

La condition (4.9) se traduit par $Q(x_1, x_2) > 0$.

En remplaçant les u_i par leurs expressions, nous avons :

$$Q(x_1, x_2) = 4\alpha_{11}\alpha_{22}x_1x_2 - (\alpha_{12}x_2 + \alpha_{21}x_1)^2$$

En étudiant l'équation $Q(x_1, x_2) = 0$, nous obtenons deux solutions formant un cône représenté dans la figure ci-dessous.



Remarque 4.2.2 *Nous conjecturons que si nous prenons un $(x_1(0), x_2(0))$ dans le cône positif, $(x_1(t), x_2(t))$ reste dedans, $\forall t > 0$.*

En admettant que notre conjecture est satisfaite, on peut dire que $(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable.

■

4.3 Résultats de simulation

La définition des paramètres du modèle de compétition dans le Chemostat rappelées dans [13], leurs valeurs et les conditions initiales sont données dans les tableaux (4.1) et (4.2).

Paramètres	Valeur	Unité
k_1	1	Kg COD/Kg x_1
k_2	1	mol VFA/Kg x_1
μ_{1max}	2	day ⁻¹
μ_{2max}	1	day ⁻¹
K_1	2	Kg COD/m ³
K_2	0.5	mol VFA/m ³
s_{in}	10	Kg/m ³

TABLE 4.1 – Paramètres du modèle de compétition dans le Chemostat

	$s_1(0)$ (Kg/m ³)	$x_1(0)$ (Kg/m ³)	$x_2(0)$ (Kg/m ³)
Modèle	3	0.5	0.12
Observateur	3	3	0.5

TABLE 4.2 – Conditions Initiales

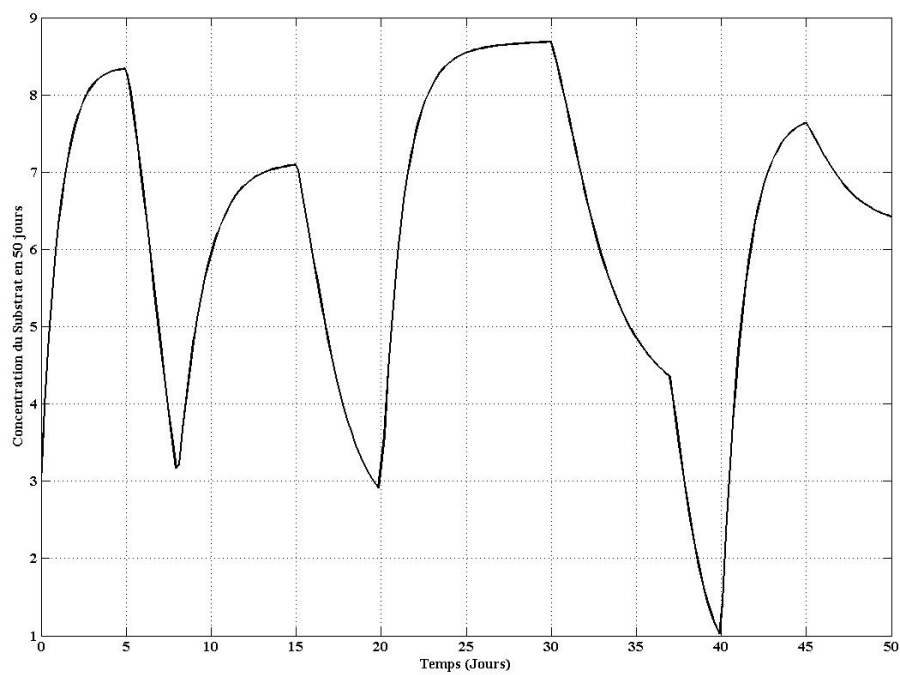


FIGURE 4.1 – Concentration du Substrat

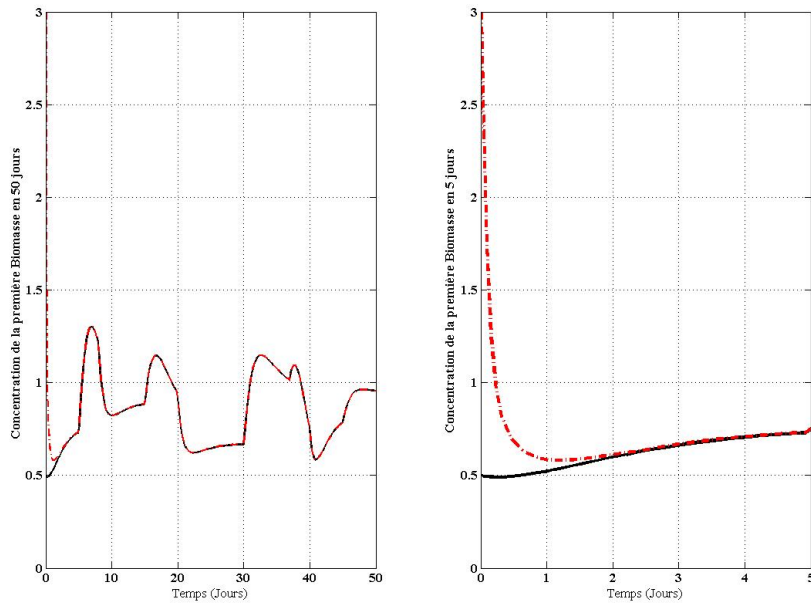


FIGURE 4.2 – Concentration de la première biomasse et son estimation pour $a_1 = 10$, $a_2 = a_3 = -0.06$ (On a pris $\lambda = 40$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$)

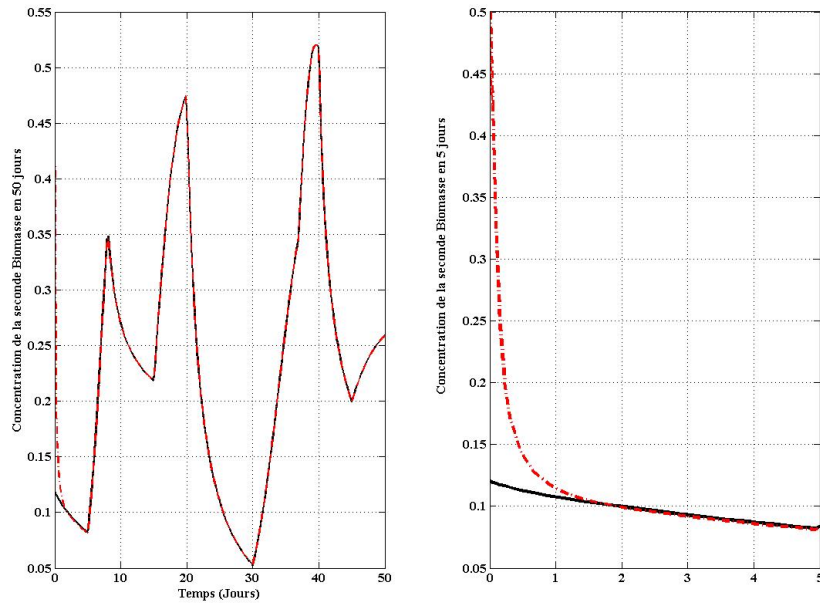


FIGURE 4.3 – Concentration de la seconde biomasse et son estimation pour $a_1 = 10$, $a_2 = a_3 = -0.06$ (On a pris $\lambda = 40$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$)

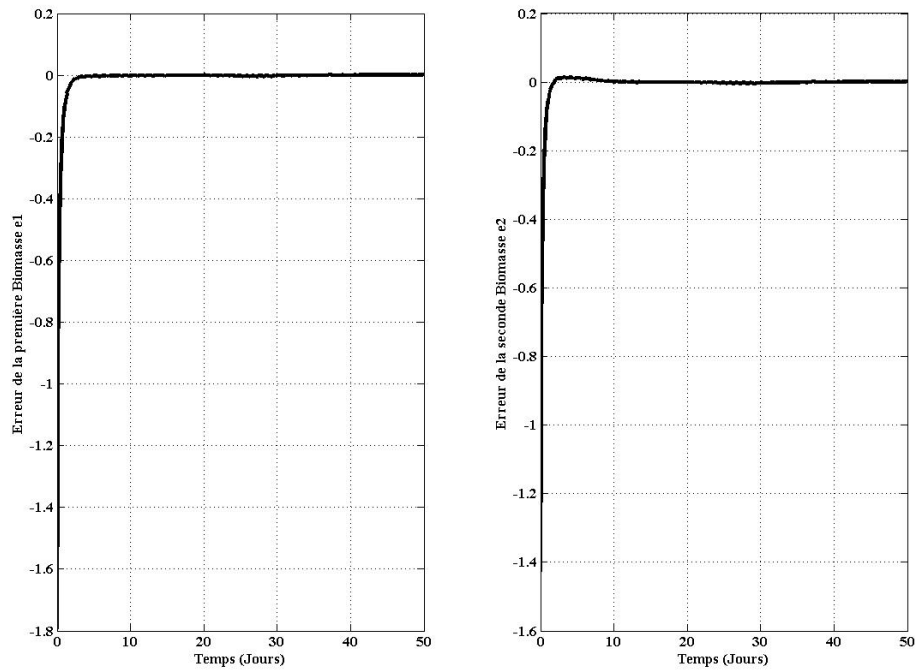


FIGURE 4.4 – Erreurs correspondantes aux deux biomasses

La figure (4.1) représente l'état mesuré s . Les figures (4.2) et (4.3) représentent les estimations des deux biomasses x_1 et x_2 respectivement. La figure (4.4) représente les erreurs d'estimations pour les deux biomasses x_1 et x_2 .

Nous avons pris dans nos simulations $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$ et $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.1$ et comme taux de mortalités de x_1 et x_2 , $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = 0.05$, ainsi nous remarquons que notre observateur invariant présente une bonne convergence pour la première biomasse x_1 qui est obtenue après $t \approx 3$ jours avec une erreur près égale à 10^{-2} et pour la seconde biomasse x_2 qui est obtenue après $t \approx 2$ jours avec la même erreur.

Chapitre 5

Observateurs pour le modèle AM2

Le modèle AM2 a été développé sous le projet Européen AMOCO. C'est un modèle de digestion anaérobie à deux-étapes (correspondant à deux réactions biologiques en cascade, d'où son nom), qui est représenté par le système mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 &= D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1, K_1)x_1 \\ \dot{x}_1 &= [\mu_1(s_1, K_1) - D(t)]x_1 \\ \dot{s}_2 &= D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1, K_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2, K_2)x_2 \\ \dot{x}_2 &= [\mu_2(s_2, K_2) - D(t)]x_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $y = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

Ce modèle a été proposé dans [8] et il est formé de deux principales réactions (acidogénèse-méthanogénèse), où le substrat s_1 est dégradé en substrat s_2 par la biomasse x_1 puis le substrat s_2 est dégradé par la biomasse x_2 , où $(s_1, s_2) \in R_+^* \times R_+^*$ et $(x_1, x_2) \in R_+^* \times R_+^*$.

Dans cette partie nous allons utiliser comme cinétiques de croissance, la cinétique de Monod et la cinétique de Haldane, définis respectivement comme suit :

$$\mu_1(s_1, K_1) = \mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} \text{ et } \mu_2(s_2, K_2) = \mu_{2max} \frac{s_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2}$$

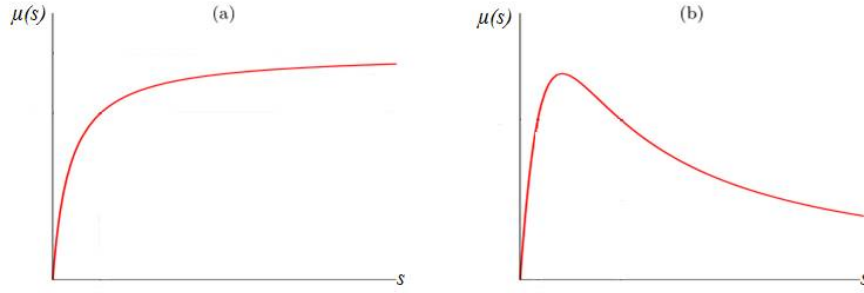


FIGURE 5.1 – Les cinétiques de croissance de Monod et Haldane

Plusieurs observateurs ont été proposé pour le modèle de la digestion anaérobie, comme l'observateur à grand gain, l'observateur asymptotique et l'observateur par intervalles décrit dans le chapitre 2.

5.1 Observabilité

Étudions l'observabilité de ce modèle en utilisant la définition cité dans [12]. Nous avons,

$$y = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} D(t)(s_{1in} - s_1) - \frac{k_1\mu_{1max}s_1x_1}{s_1 + K_1} \\ D(t)(s_{2in} - s_2) + \frac{k_2\mu_{1max}s_1x_1}{s_1 + K_1} - \frac{k_3\mu_{2max}s_2x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2} \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1 + K_1}{k_1\mu_{1max}s_1} [D(t)(s_{1in} - s_1) - \dot{s}_1] \\ \frac{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2}{k_3\mu_{2max}s_2} \left[D(t)(s_{2in} - s_2) + \frac{k_2}{k_1} (D(t)(s_{1in} - s_1) - \dot{s}_1) - \dot{s}_2 \right] \end{pmatrix}$$

Alors, à partir de y et sa dérivée, nous avons pu déduire les deux variables non mesurées x_1 et x_2 , ce qui implique que le modèle est algébriquement observable.

5.2 Bornitude supérieure des variables d'état

5.2.1 La variable d'état s_1

Nous avons :

$$\dot{s}_1 = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1, K_1)x_1$$

Etant donné que la quantité $k_1\mu_1(s_1, K_1)x_1$ est positive, alors

$$\dot{s}_1 \leq D(t)(s_{1in} - s_1)$$

d'où

$$\dot{s}_1 + D(t)s_1 \leq D(t)s_{1in}$$

On obtient en multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$s_1 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s_1(0) + s_{1in} \int_0^t D(\tau) e^{\int_0^\tau D(\xi)d\xi} d\tau$$

ainsi

$$s_1 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s_1(0) + s_{1in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

multiplions maintenant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$,

$$s_1 \leq s_1(0) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Cette inégalité peut s'écrire comme ceci

$$s_1 \leq (s_1(0) - s_{1in}) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in}$$

Par conséquent

$$s_1 \leq s_{1in}$$

où l'on a supposé $s_1(0) \leq s_{1in}$ d'où $(s_1(0) - s_{1in}) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 0$.

5.2.2 La variable d'état x_1

Posons tout d'abord :

$$\xi_1 = s_1 + k_1 x_1$$

La dynamique de la variable ξ_1 s'écrit :

$$\dot{\xi}_1 = D(t)s_{1in} - D(t)\xi_1$$

ainsi

$$\dot{\xi}_1 + D(t)\xi_1 = D(t)s_{1in}$$

De même, on trouve en multipliant les deux membres de l'égalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$\xi_1 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} = \xi_1(0) + s_{1in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

multipliant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$, on obtient

$$\xi_1 = \xi_1(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Comme $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ et $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ car $D(\tau) \geq 0$, alors

$$\xi_1 \leq \xi_1(0) + s_{1in}$$

Passons maintenant aux variables s_1 et x_1 , on obtient :

$$s_1 + k_1 x_1 \leq s_1(0) + k_1 x_1(0) + s_{1in}$$

puisque $s_1 > 0$, alors

$$k_1 x_1 \leq s_1(0) + k_1 x_1(0) + s_{1in}$$

Ce qui donne en définitive :

$$x_1 \leq \frac{2}{k_1} s_{1in} + x_1(0)$$

car $s_1(0) \leq s_{1in}$.

5.2.3 La variable d'état s_2

Posons

$$\xi_2 = s_2 - k_2 x_1$$

La dynamique de la variable ξ_2 s'écrit :

$$\dot{\xi}_2 = D(t)s_{2in} - D(t)\xi_2 - k_3\mu_2(s_2, K_2)x_2$$

Étant donné que la quantité $k_3\mu_2(s_2, K_2)x_2$ est positive, alors

$$\dot{\xi}_2 \leq D(t)(s_{2in} - \xi_2)$$

Ainsi, on trouve en multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$\xi_2 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq \xi_2(0) + s_{2in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

multipliant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$, on obtient

$$\xi_2 \leq \xi_2(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{2in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Comme $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ et $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ car $D(\tau) \geq 0$, alors

$$\xi_2 \leq \xi_2(0) + s_{2in}$$

Passons maintenant aux variables s_2 et x_1 , on obtient :

$$s_2 - k_2x_1 \leq s_2(0) - k_2x_1(0) + s_{2in}$$

alors

$$s_2 \leq 2s_{2in} + \frac{2k_2}{k_1}s_{1in}$$

car $s_2(0) \leq s_{2in}$.

5.2.4 La variable d'état x_2

Posons tout d'abord :

$$\xi_3 = s_2 - k_2x_1 + k_3x_2$$

La dynamique de la variable ξ_3 s'écrit :

$$\dot{\xi}_3 = D(t)s_{2in} - D(t)\xi_3$$

ainsi

$$\dot{\xi}_3 + D(t)\xi_3 = D(t)s_{2in}$$

De même, on trouve en multipliant les deux membres de l'égalité par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$ et en les intégrant entre 0 et t

$$\xi_3 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} = \xi_3(0) + s_{2in} \left[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1 \right]$$

multipliant les deux membres par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$, on obtient

$$\xi_3 = \xi_3(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{2in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Comme $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ et $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ car $D(\tau) \geq 0$, alors

$$\xi_3 \leq \xi_3(0) + s_{2in}$$

Passons maintenant aux variables s_2 , x_1 et x_2 , on obtient :

$$s_2 - k_2x_1 + k_3x_2 \leq s_2(0) - k_2x_1(0) + k_3x_2(0) + s_{2in}$$

puisque $s_2 > 0$, alors

$$x_2 \leq x_2(0) + \frac{2}{k_3} \left(s_{2in} + \frac{k_2}{k_1}s_{1in} \right)$$

5.3 Observateur non linéaire de Luenberger à dynamique d'erreur linéaire

A titre de comparaison et à cause de la forme spécifique de la sortie nous allons construire un observateur non linéaire de Luenberger à dynamique d'erreur linéaire pour le système AM2 avec l'injection de la sortie dans la fonction non linéaire $\mu(s)$ quelconque. Puisque le Chemostat constitue un fragment générique dans le modèle AM2, nous allons tout d'abord l'appliquer au Chemostat.

5.3.1 Observateur type-Luenberger pour le modèle du Chemostat

Considérons toujours le système (1.1), et suivant [33], nous supposons que $D(t)$ satisfait la condition suivante :

$$\exists T > 0, \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \geq 0, \int_t^{t+T} D(\tau) d\tau \geq \epsilon T \quad (5.2)$$

appelée condition de *persistance de l'excitation*.

Théorème 5.3.1 *Pour le système (1.1), le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} &= D(t)(s_{in} - \hat{s}) - k\mu(s)\hat{x} + a_1(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}} &= [\mu(s) - D(t)]\hat{x} + a_2(s - \hat{s}) \end{cases} \quad (5.3)$$

est un observateur, où a_1 et a_2 sont deux paramètres de réglage.

En posant $e_1 = s - \hat{s}$ et $e_2 = x - \hat{x}$, la dynamique des erreurs peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D(t) - a_1 & -k\mu(s) \\ -a_2 & \mu(s) - D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Supposons $a_1 > 0$ assez grand et $a_2 < 0$ avec $|a_2|$ assez grand, alors $(0, 0)$ est un équilibre de (5.4) qui est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Tout d'abord nous allons réécrire les erreurs sans $D(t)$, pour cela, posons : $p(t) = e^{\int_0^t D(\tau) d\tau}$ et multiplions $p(t)$ par les deux équations, ainsi (5.4) devient :

$$\begin{cases} p(t)\dot{e}_1 + D(t)p(t)e_1 &= -a_1p(t)e_1 - k\mu(s)p(t)e_2 \\ p(t)\dot{e}_2 + D(t)p(t)e_2 &= -a_2p(t)e_1 + \mu(s)p(t)e_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

Posons maintenant $u_1(t) = p(t)e_1$ et $u_2(t) = p(t)e_2$, alors on obtient :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= -a_1u_1 - k\mu(s)u_2 \\ \dot{u}_2 &= -a_2u_1 + \mu(s)u_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Pour prouver la convergence de cet observateur, prenons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_\alpha(u_1, u_2) = \left\| \begin{pmatrix} \alpha u_1 + u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (\alpha u_1 + u_2)^2 + u_2^2$$

où $\alpha > 0$. Cette fonction est une norme de \mathbb{R}^2 qui est radialement non bornée.

En dérivant V_α , on trouve :

$$\dot{V}_\alpha(u_1, u_2) = -2\alpha(a_1\alpha + a_2)u_1^2 + 2\mu(s)(2 - \alpha k)u_2^2 + 2[\alpha(1 - \alpha k)\mu(s) - (a_1\alpha + 2a_2)]u_1u_2$$

Cette fonction peut aussi s'écrire comme suit :

$$\dot{V}_\alpha(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -2\alpha(a_1\alpha + a_2) & \alpha(1 - \alpha k)\mu(s) - (a_1\alpha + 2a_2) \\ \alpha(1 - \alpha k)\mu(s) - (a_1\alpha + 2a_2) & 2\mu(s)(2 - \alpha k) \end{pmatrix}}_{B(t)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que \dot{V}_α est définie négative, calculons la trace et le déterminant de $B(t)$, ainsi :

$$tr(B(t)) = -2\alpha(a_1\alpha + a_2) + 2\mu(s)(2 - \alpha k)$$

et

$$det(B(t)) = -(a_1\alpha + 2a_2)^2 + 2\alpha^2\mu(s)(\alpha k - 3)a_1 - 4\alpha\mu(s)a_2 - \alpha^2\mu(s)^2(1 - \alpha k)^2$$

posons $a_1\alpha + 2a_2 = 0$, par suite le déterminant devient :

$$det(B(t)) = 2\alpha^2\mu(s)(\alpha k - 2)a_1 - \alpha^2\mu(s)^2(1 - \alpha k)^2$$

Pour un $a_1 > 0$ et assez grand et $\alpha > \frac{2}{k}$ la $tr(B(t)) < 0$ et $det(B(t)) > 0$. Donc $(0, 0)$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. ■

5.3.2 Observateur type-Luenberger pour le modèle AM2

Théorème 5.3.2 *Un observateur de type Luenberger pour le système (5.1) peut s'écrire comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1 &= D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu_1(s_1, K_1)\hat{x}_1 + a_1(s_1 - \hat{s}_1) + a_2(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{x}}_1 &= (\mu_1(s_1, K_1) - D(t))\hat{x}_1 + a_3(s_1 - \hat{s}_1) + a_4(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{s}}_2 &= D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu_1(s_1, K_1)\hat{x}_1 - k_3\mu_2(s_2, K_2)\hat{x}_2 + a_5(s_1 - \hat{s}_1) + a_6(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= (\mu_2(s_2, K_2) - D(t))\hat{x}_2 + a_7(s_1 - \hat{s}_1) + a_8(s_2 - \hat{s}_2) \end{cases} \quad (5.7)$$

En posant : $e_1 = s_1 - \hat{s}_1$, $e_2 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_3 = s_2 - \hat{s}_2$, $e_4 = x_2 - \hat{x}_2$ le système dynamique des erreurs s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(D(t) + a_1)e_1 - k_1\mu_1(s_1)e_2 - a_2e_3 \\ \dot{e}_2 = -a_3e_1 + [\mu_1(s_1) - D(t)]e_2 - a_4e_3 \\ \dot{e}_3 = -a_5e_1 + k_2\mu_1(s_1)e_2 - (D(t) + a_6)e_3 - k_3\mu_2(s_2)e_4 \\ \dot{e}_4 = -a_7e_1 - a_8e_3 + [\mu_2(s_2) - D(t)]e_4 \end{cases} \quad (5.8)$$

Supposons $a_1 > 0$ et a_6 assez grands et $a_3 < 0$ et $a_8 < 0$ avec $|a_3|$ et $|a_8|$ assez grands, alors $(0,0,0,0)$ est un point d'équilibre de (5.8) qui est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Ecrivons le système (5.8) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D(t) - a_1 & -k_1\mu_1(s_1, K_1) & \vdots & -a_2 & 0 \\ -a_3 & \mu_1(s_1, K_1) - D(t) & \vdots & -a_4 & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ -a_5 & k_2\mu_1(s_1, K_1) & \vdots & -D(t) - a_6 & -k_3\mu_2(s_2, K_2) \\ -a_7 & 0 & \vdots & -a_8 & \mu_2(s_2, K_2) - D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Si nous prenons $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$, le système (5.9) devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D(t) - a_1 & -k_1\mu_1(s_1, K_1) & \vdots & 0 & 0 \\ -a_3 & \mu_1(s_1, K_1) - D(t) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & k_2\mu_1(s_1, K_1) & \vdots & -D(t) - a_6 & -k_3\mu_2(s_2, K_2) \\ 0 & 0 & \vdots & -a_8 & \mu_2(s_2, K_2) - D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Remarquons que les blocs diagonaux ressemblent au bloc du Chemostat. Alors procédons de la même manière que précédemment.

Soit $p(t) = e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$, multiplions $p(t)$ par les 4 équations du système (5.10) et posons $u_1(t) = p(t)e_1(t)$, $u_2(t) = p(t)e_2(t)$, $u_3(t) = p(t)e_3(t)$ and $u_4(t) = p(t)e_4(t)$, alors le système (5.10) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -a_1u_1 - k_1\mu_1(s_1)u_2 \\ \dot{u}_2 = -a_3u_1 + \mu_1(s_1)u_2 \\ \dot{u}_3 = k_2\mu_1(s_1)u_2 - a_6u_3 - k_3\mu_2(s_2)u_4 \\ \dot{u}_4 = -a_8u_3 + \mu_2(s_2)u_4 \end{cases} \quad (5.11)$$

Pour prouver la convergence de cet observateur nous allons prendre la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_{\alpha,\beta}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left\| \begin{pmatrix} \alpha u_1 + u_2 \\ u_2 \\ \beta u_3 + u_4 \\ u_4 \end{pmatrix} \right\|^2$$

où α et β sont des constantes positives qu'on va choisir plus tard, $V_{\alpha,\beta}$ est aussi une norme qui est radialement non bornée. Alors

$$\dot{V}_{\alpha,\beta}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2(\alpha u_1 + u_2)(\alpha \dot{u}_1 + \dot{u}_2) + 2u_2 \dot{u}_2 + 2(\beta u_3 + u_4)(\beta \dot{u}_3 + \dot{u}_4) + 2u_4 \dot{u}_4$$

En substituant \dot{u}_i , $i = \overline{1,4}$ dans $\dot{V}_{\alpha,\beta}(u_i)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\alpha,\beta} = & -2\alpha(a_1\alpha + a_3)u_1^2 - 2[a_1\alpha + 2a_3 + \alpha(\alpha k_1 - 1)\mu_1]u_1u_2 \\ & -2(\alpha k_1 - 2)\mu_1u_2^2 + 2k_2\beta^2\mu_1u_2u_3 + 2k_2\beta\mu_1u_2u_4 \\ & -2\beta(a_6\beta + a_8)u_3^2 - 2[a_6\beta + 2a_8 + \beta(\beta k_3 - 1)\mu_2]u_3u_4 \\ & -2(\beta k_3 - 2)\mu_2u_4^2 \end{aligned}$$

Cette fonction peut être écrite de la manière suivante :

$$\dot{V}_{\alpha,\beta} = U^T C(t) U$$

$$\text{où } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} -2\alpha(a_1\alpha + a_3) & -[a_1\alpha + 2a_3 + \alpha(\alpha k_1 - 1)\mu_1] & 0 & 0 \\ -[a_1\alpha + 2a_3 + \alpha(\alpha k_1 - 1)\mu_1] & -2(\alpha k_1 - 2)\mu_1 & k_2\beta^2\mu_1 & k_2\beta\mu_1 \\ 0 & k_2\beta^2\mu_1 & -2\beta(a_6\beta + a_8) & -[a_6\beta + 2a_8 + \beta(\beta k_3 - 1)\mu_2] \\ 0 & k_2\beta\mu_1 & -[a_6\beta + 2a_8 + \beta(\beta k_3 - 1)\mu_2] & -2(\beta k_3 - 2)\mu_2 \end{pmatrix}$$

Nous devons montrer que $C(t)$ est définie négative, i.e. $-C(t)$ définie positive, alors nous devons montrer que tout les mineurs principaux de $-C(t)$ sont positifs. Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et δ_4 ces mineurs.

$$\delta_1 = 2\alpha(a_1\alpha + a_3)$$

$$\delta_2 = -(a_1\alpha + 2a_3)^2 + 2\alpha^2\mu_1(k_1\alpha - 3)a_1 - 4\alpha\mu_1a_3 - \alpha^2(k_1\alpha - 1)^2\mu_1^2$$

Posons $a_1\alpha + 2a_3 = 0$ alors $a_3 = -\frac{\alpha}{2}a_1$ donc δ_2 devient :

$$\delta_2 = 2\alpha^2\mu_1(k_1\alpha - 2)a_1 - \alpha^2(k_1\alpha - 1)^2\mu_1^2$$

Pour $a_1 > 0$ et suffisamment grand et pour $\alpha > \frac{2}{k_1}$, δ_1 et δ_2 sont tout les deux positifs.

$$\begin{aligned} \delta_3 &= 2\alpha^2\beta^2\mu_1[2(\alpha k_1 - 2)a_1 - \mu_1(\alpha k_1 - 1)^2]a_6 \\ &\quad + 2\alpha^2\beta\mu_1[2(\alpha k_1 - 2)a_1 - \mu_1(\alpha k_1 - 1)^2]a_8 - \alpha^2\beta^4k_2^2\mu_1^2a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_4 &= \alpha^2\mu_1[\mu_1(\alpha k_1 - 1)^2 - 2(\alpha k_1 - 2)a_1](\beta a_6 + 2a_8)^2 \\ &\quad + 2\mu_1\mu_2\alpha^2\beta^2(\beta k_3 - 3)[(\alpha k_1 - 2)a_1 - \mu_1(\alpha k_1 - 1)^2]a_6 \\ &\quad + 2\alpha^2\beta\mu_1[(\beta^2k_2^2\mu_1 + 4\mu_2(1 - 2\alpha k_1))a_1 + 2\mu_1\mu_2(\alpha k_1 - 1)^2]a_8 \\ &\quad - 2\mu_1\mu_2\alpha^2\beta^2[\mu_2(\alpha k_1 - 2)(\beta k_3 - 1)^2 - k_2^2]a_1 \\ &\quad + \mu_1^2\mu_2^2\alpha^2\beta^2(\beta k_3 - 1)^2(\alpha k_1 - 1)^2 \end{aligned}$$

Posons $a_6\beta + 2a_8 = 0$ alors $a_8 = -\frac{\beta}{2}a_6$ donc δ_4 devient :

$$\begin{aligned} \delta_4 &= \alpha^2\beta^2\mu_1[2\mu_2((\beta k_3 - 3)(\alpha k_1 - 2) - 2(1 - 2\alpha k_1)) \\ &\quad - \beta^2k_2^2\mu_1]a_6 - 2\mu_1\mu_2\alpha^2\beta^2[\mu_2(\alpha k_1 - 2)(\beta k_3 - 1)^2 - k_2^2]a_1 \\ &\quad + \mu_1^2\mu_2^2\alpha^2\beta^2(\beta k_3 - 1)^2(\alpha k_1 - 1)^2 \end{aligned}$$

Pour $a_6 > 0$ et suffisamment grand et pour $\beta > \frac{3}{k_3}$, δ_3 et δ_4 sont tout les deux positifs. Donc $(0, 0, 0, 0)$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. ■

5.3.3 Résultats de simulations

Les simulations ont été réalisées en utilisant les valeurs des paramètres rappelés dans [1]. Elles sont données dans le tableau (5.1) et les conditions initiales sont données dans le tableau (5.2).

Paramètres	Valeur	Unité
k_1	6.6	Kg COD/Kg x_1
k_2	7.8	mol VFA/Kg x_1
k_3	611.2	mol VFA/Kg x_2
μ_{1max}	1.2	day ⁻¹
μ_{2max}	0.69	day ⁻¹
K_1	4.95	Kg COD/m ³
K_2	9.28	mol VFA/m ³
K_i	20	(mol VFA/m ³) ^{1/2}
s_{1in}	15	Kg/m ³
s_{2in}	80	mol/m ³

TABLE 5.1 – Paramètres du Modèle AM2

	$s_1(0)$ (Kg/m ³)	$x_1(0)$ (Kg/m ³)	$s_2(0)$ (mol/m ³)	$x_2(0)$ (Kg/m ³)
Modèle	3	0.5	15	0.12
Observateur	3	3	15	0.5

TABLE 5.2 – Conditions initiales

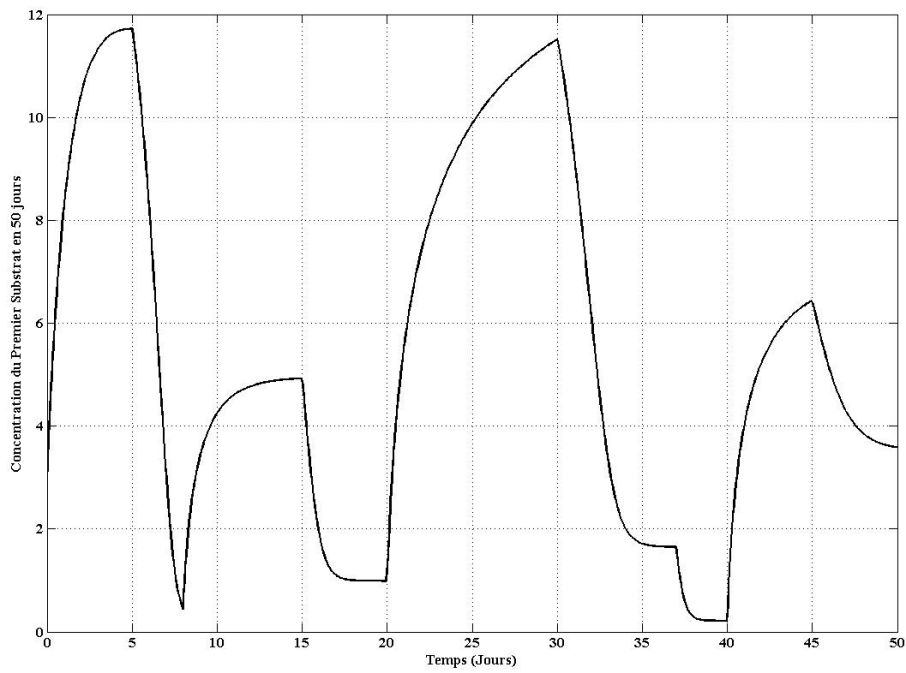


FIGURE 5.2 – Concentration du premier substrat s_1

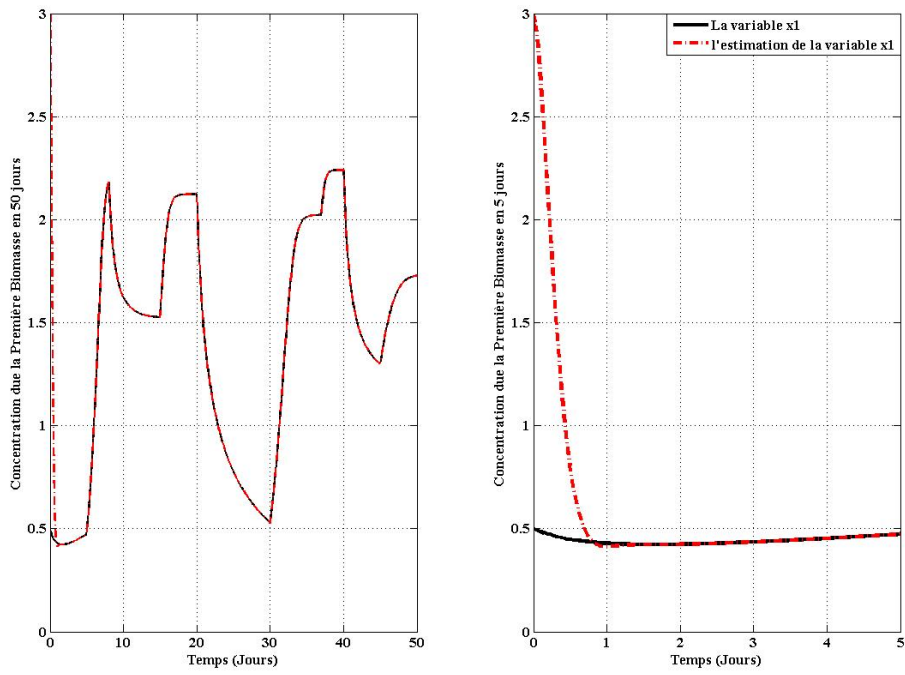


FIGURE 5.3 – Concentration de la première biomasse et son estimation pour $a_1 = 10$, $a_3 = -10$, $a_6 = 12$ et $a_8 = -6$ (On a pris $\alpha = 2$ et $\beta = 1$)

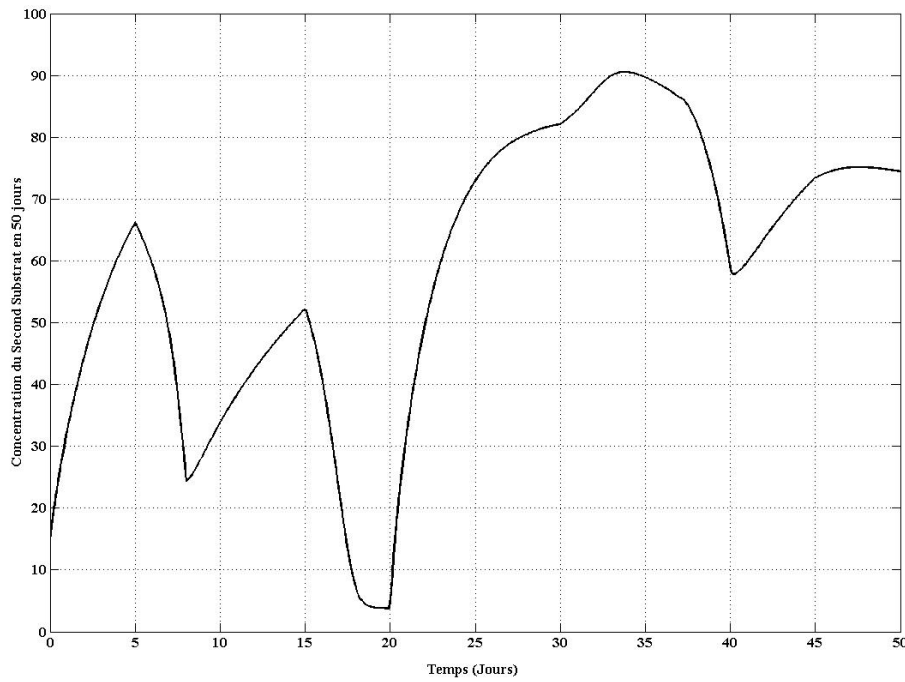


FIGURE 5.4 – Concentration du second substrat s_2

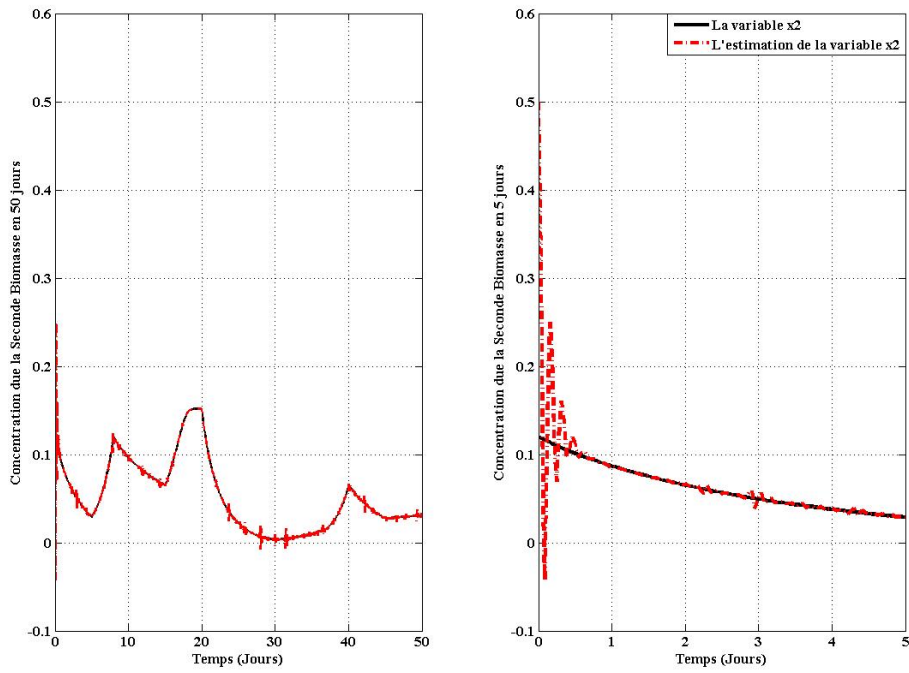


FIGURE 5.5 – Concentration de la seconde biomasse et son estimation pour $a_1 = 10$, $a_3 = -10$, $a_6 = 12$ et $a_8 = -6$ (On a pris $\alpha = 2$ et $\beta = 1$)

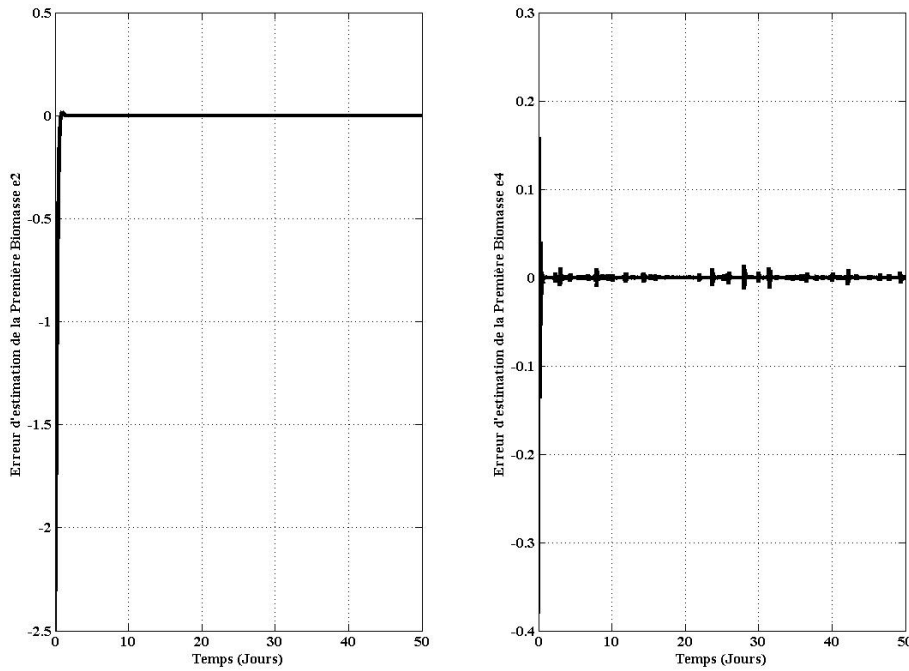


FIGURE 5.6 – Erreurs correspondants aux deux biomasses

Les figures (5.2) et (5.4) représentent les états mesurés s_1 et s_2 respectivement. Les figures (5.3) et (5.5) représentent les estimations des deux biomasses x_1 et x_2 respectivement et la figure (5.6) représente les erreurs d'estimations pour les deux biomasses x_1 et x_2 .

Nous avons pris dans nos simulations $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $a_1 = 10$, $a_3 = -10$, $a_6 = 12$, $a_8 = -6$ et $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$. Nous remarquons que notre observateur converge après $t \approx 1$ jour avec une erreur égale à 10^{-2} pour la première biomasse x_1 et pour la seconde biomasse x_2 .

5.4 Observateur invariant pour le modèle AM2 avec la sortie (s_1, s_2)

5.4.1 Invariance du modèle AM2

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i) = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1 \mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} \\ f_2(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i) = \left[\mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} - D(t) \right] x_1 \\ f_3(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i) = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2 \mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} \\ \quad - k_3 \mu_{2max} \frac{s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2} \\ f_4(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i) = \left[\mu_{2max} \frac{s_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2} - D(t) \right] x_2 \end{array} \right.$$

Soit

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{s}_{1in} \\ \tilde{s}_{2in} \\ \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \\ \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_2 \\ \tilde{K}_i \end{pmatrix} = e^{\nu A} \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_2 \\ x_2 \\ s_{1in} \\ s_{2in} \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_i \end{pmatrix}$$

où A est une matrice quelconque, et $A_{ij} = \left. \frac{d}{d\nu} B_{ij}(\nu) \right|_{\nu=0}$.

Par dérivation par rapport à t nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{s}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{s}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \vdots & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} & b_{110} & b_{111} & b_{112} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \vdots & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} & b_{29} & b_{210} & b_{211} & b_{212} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \vdots & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} & b_{39} & b_{310} & b_{311} & b_{312} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \vdots & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} & b_{49} & b_{410} & b_{411} & b_{412} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} & b_{59} & b_{510} & b_{511} & b_{512} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{65} & b_{66} & b_{67} & b_{68} & b_{69} & b_{610} & b_{611} & b_{612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{75} & b_{76} & b_{77} & b_{78} & b_{79} & b_{710} & b_{711} & b_{712} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} & b_{89} & b_{810} & b_{811} & b_{812} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{95} & b_{96} & b_{97} & b_{98} & b_{99} & b_{910} & b_{911} & b_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{105} & b_{106} & b_{107} & b_{108} & b_{109} & b_{1010} & b_{1011} & b_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{115} & b_{116} & b_{117} & b_{118} & b_{119} & b_{1110} & b_{1111} & b_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{125} & b_{126} & b_{127} & b_{128} & b_{129} & b_{1210} & b_{1211} & b_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{x}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système matriciel peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + b_{13}f_3 + b_{14}f_4 \\ \tilde{f}_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + b_{23}f_3 + b_{24}f_4 \\ \tilde{f}_3 = b_{31}f_1 + b_{32}f_2 + b_{33}f_3 + b_{34}f_4 \\ \tilde{f}_4 = b_{41}f_1 + b_{42}f_2 + b_{43}f_3 + b_{44}f_4 \end{cases}$$

Dérivons ce système par rapport à ν :

$$\frac{d}{d\nu} \Big|_{\nu=0} f_i e^{\nu A} \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_2 \\ x_2 \\ s_{1in} \\ s_{2in} \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_i \end{pmatrix} = \left\langle A \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_2 \\ x_2 \\ s_{1in} \\ s_{2in} \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_i \end{pmatrix}, \nabla f_i \right\rangle, i = \overline{1, 4}$$

Après résolution sous Maple (voir Annexe A), nous obtenons la matrice suivante :

$$A = \text{diag} \left(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha, \gamma, \alpha - \beta, \gamma - \beta, \gamma - \delta, \alpha, \gamma, \frac{\gamma}{2} \right)$$

Donc le plus grand groupe linéaire qui rend le système de AM2 invariant est le groupe des homothéties $G = (R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \times R_+^*, \cdot)$, qui agit sur (s_1, s_2, x_1, x_2) avec quatre paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ où $\lambda_1 = e^\alpha$, $\lambda_2 = e^\beta$, $\lambda_3 = e^\gamma$ et $\lambda_4 = e^\delta$.

5.4.2 Les fonctions scalaires invariantes

$$J \left(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2, \lambda_1 s_{1in}, \lambda_3 s_{2in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k_1, \frac{\lambda_3}{\lambda_2} k_2, \frac{\lambda_3}{\lambda_4} k_3, \lambda_1 K_1, \lambda_3 K_2, \frac{\lambda_3}{2} K_i, \lambda_1 y_1, \lambda_3 y_2 \right) \\ = J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2)$$

Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ et λ_1 quelconque, nous avons :

$$J(\lambda_1 s_1, x_1, s_2, x_2, \lambda_1 s_{1in}, s_{2in}, \lambda_1 k_1, k_2, k_3, \lambda_1 K_1, K_2, K_i, \lambda_1 y_1, y_2) \\ = J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2)$$

Ainsi, le système caractéristique s'écrit :

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_{1in}}{s_{1in}} = \frac{dk_1}{k_1} = \frac{dK_1}{K_1} = \frac{dy_1}{y_1}$$

d'où

$$J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2)$$

$$= G \left(\underbrace{x_1}_{z_1}, \underbrace{s_2}_{z_2}, \underbrace{x_2}_{z_3}, \underbrace{s_{2in}}_{z_4}, \underbrace{k_2}_{z_5}, \underbrace{k_3}_{z_6}, \underbrace{K_2}_{z_7}, \underbrace{K_i}_{z_8}, \underbrace{y_2}_{z_9}, \underbrace{\frac{s_{1in}}{s_1}}_{z_{10}}, \underbrace{\frac{k_1}{s_1}}_{z_{11}}, \underbrace{\frac{K_1}{s_1}}_{z_{12}}, \underbrace{\frac{y_1}{s_1}}_{z_{13}} \right)$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ et λ_2 quelconque, nous avons :

$$G = (\lambda_2 z_1, z_2, z_3, z_4, \frac{1}{\lambda_2} z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, \frac{1}{\lambda_2} z_{11}, z_{12}, z_{13})$$

$$= G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13})$$

donc , l'équation caractéristique s'écrit comme suit :

$$\frac{dz_1}{z_1} = -\frac{dz_5}{z_5} = -\frac{dz_{11}}{z_{11}}$$

ainsi

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13})$$

$$= L \left(\underbrace{z_2}_{u_1}, \underbrace{z_3}_{u_2}, \underbrace{z_4}_{u_3}, \underbrace{z_6}_{u_4}, \underbrace{z_7}_{u_5}, \underbrace{z_8}_{u_6}, \underbrace{z_9}_{u_7}, \underbrace{z_{10}}_{u_8}, \underbrace{z_{12}}_{u_9}, \underbrace{z_{13}}_{u_{10}}, \underbrace{z_1 z_5}_{u_{11}}, \underbrace{z_1 z_{11}}_{u_{12}} \right)$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 1$ et λ_3 quelconque, nous avons :

$$L(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12})$$

$$= L(\lambda_3 u_1, u_2, \lambda_3 u_3, \lambda_3 u_4, \lambda_3 u_5, \frac{\lambda_3}{2} u_6, \lambda_3 u_7, u_8, u_9, u_{10}, \lambda_3 u_{11}, u_{12})$$

Nous avons ainsi, l'équation caractéristique :

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{du_3}{u_3} = \frac{du_5}{u_5} = \frac{2du_6}{u_6} = \frac{du_7}{u_7} = \frac{du_{11}}{u_{11}}$$

donc

$$L(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12})$$

$$= R \left(\underbrace{u_2}_{v_1}, \underbrace{u_8}_{v_2}, \underbrace{u_9}_{v_3}, \underbrace{u_{10}}_{v_4}, \underbrace{u_{12}}_{v_5}, \underbrace{\frac{u_3}{u_1}}_{v_6}, \underbrace{\frac{u_4}{u_1}}_{v_7}, \underbrace{\frac{u_5}{u_1}}_{v_8}, \underbrace{\frac{u_6^2}{u_1}}_{v_9}, \underbrace{\frac{u_7}{u_1}}_{v_{10}}, \underbrace{\frac{u_{11}}{u_1}}_{v_{11}} \right)$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et λ_4 quelconque, nous avons :

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}) = R \left(\lambda_4 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \frac{1}{\lambda_4} v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \right)$$

L'équation caractéristique s'écrit comme suit :

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{dv_7}{v_7}$$

alors

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}) = N(v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1 v_7)$$

Ainsi, nous obtenons toutes les fonctions scalaires invariantes :

$$\begin{aligned} & J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) \\ &= N\left(\frac{s_{1in}}{s_1}, \frac{K_1}{s_1}, \frac{y_1}{s_1}, \frac{k_1 x_1}{s_1}, \frac{s_{2in}}{s_2}, \frac{K_2}{s_2}, \frac{K_i^2}{s_2}, \frac{y_2}{s_2}, \frac{k_2 x_1}{s_2}, \frac{k_3 x_2}{s_2}\right) \end{aligned}$$

Dans ce travail nous allons prendre une fonction invariante particulière

$$J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) = H\left(\frac{y_1}{s_1}, \frac{y_2}{s_2}\right)$$

5.4.3 Champs de vecteurs invariants

A partir de la définitions des champs de vecteurs invariants, nous avons :

$$\begin{aligned} w_1(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_1 w_1(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ w_2(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_2 w_2(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ w_3(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_3 w_3(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ w_4(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_4 w_4(s_1, x_1, s_2, x_2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} w_1(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_1 s_1 \\ w_2(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_2 x_1 \\ w_3(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_3 s_2 \\ w_4(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_4 x_2 \end{aligned}$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes qui joueront le rôle de gain.

5.4.4 Le Pré-observateur

En remplaçant les fonctions de Monod et Haldane par leurs expressions, le système (5.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_{1max}\frac{s_1x_1}{s_1 + K_1} \\ \dot{x}_1 = \left[\mu_{1max}\frac{s_1}{s_1 + K_1} - D(t) \right] x_1 \\ \dot{s}_2 = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_{1max}\frac{s_1x_1}{s_1 + K_1} - k_3\mu_{2max}\frac{s_2x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2} \\ \dot{x}_2 = \left[\mu_{2max}\frac{s_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2} - D(t) \right] x_2 \end{cases} \quad (5.12)$$

Nous prenons toujours comme sortie $y = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

Théorème 5.4.1 Pour (5.12), le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1 = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu_{1max}\frac{\hat{s}_1\hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} + a_1\hat{s}_1 \ln\left(\frac{s_1}{\hat{s}_1}\right) \\ \dot{\hat{x}}_1 = \left[\mu_{1max}\frac{\hat{s}_1}{\hat{s}_1 + K_1} - D(t) \right] \hat{x}_1 + a_2\hat{x}_1 \ln\left(\frac{s_1}{\hat{s}_1}\right) \\ \dot{\hat{s}}_2 = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu_{1max}\frac{\hat{s}_1x_1}{\hat{s}_1 + K_1} - k_3\mu_{2max}\frac{\hat{s}_2\hat{x}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \left(\frac{\hat{s}_2}{K_i}\right)^2} + a_3\hat{s}_2 \ln\left(\frac{s_2}{\hat{s}_2}\right) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \left[\mu_{2max}\frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \left(\frac{\hat{s}_2}{K_i}\right)^2} - D(t) \right] \hat{x}_2 + a_4\hat{x}_2 \ln\left(\frac{s_2}{\hat{s}_2}\right) \end{cases} \quad (5.13)$$

est un observateur. Définissons $e_1 = \ln s_1 - \ln \hat{s}_1$, $e_2 = \ln x_1 - \ln \hat{x}_1$, $e_3 = \ln s_2 - \ln \hat{s}_2$ et $e_4 = \ln x_2 - \ln \hat{x}_2$

La dynamique des erreurs est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{e}_1 = -a_1 e_1 - \frac{D(t)s_{1in}}{s_1} (e^{e_1} - 1) - \frac{k_1 \mu_{1max} s_1 x_1}{(s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) + \frac{k_1 \mu_{1max} x_1}{s_1 e^{-e_1} + K_1} (e^{-e_2} - 1) \\
\dot{e}_2 = -a_2 e_1 - \frac{K_1 \mu_{1max} s_1}{(s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) \\
\dot{e}_3 = -a_3 e_3 - \frac{D(t)s_{2in}}{s_2} (e^{e_3} - 1) + \frac{k_2 \mu_{1max} s_1^2 x_1}{s_2 (s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) \\
\quad - \frac{k_2 \mu_{1max} s_1 x_1}{s_2 (s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1 - e_2 + e_3} - 1) \\
\quad - \frac{k_3 \mu_{2max} s_2 x_2}{\left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 \right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 e^{-2e_3} \right)} (e^{-e_3} - 1) \\
\quad - \frac{k_3 \mu_{2max} x_2}{\left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 e^{-2e_3} \right)} (e^{-e_4} - 1) \\
\quad - \frac{k_3 \mu_{2max} s_2^2 x_2}{K_i^2 \left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 \right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 e^{-2e_3} \right)} (e^{-2e_3} - 1) \\
\dot{e}_4 = -a_4 e_3 - \frac{K_2 \mu_{2max} s_2}{\left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 \right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 e^{-2e_3} \right)} (e^{-e_3} - 1) \\
\quad + \frac{\mu_{2max} s_2^3}{K_i^2 \left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 \right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i} \right)^2 e^{-2e_3} \right)} (e^{-e_3} - 1) e^{-e_3}
\end{array} \right. \tag{5}$$

Supposons $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$ assez grands et $a_2 < 0$ et $a_4 < 0$ avec $|a_2|$ et $|a_4|$ assez grands, alors $(0,0,0,0)$ est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable.

5.4.5 Convergence du pré-observateur

Preuve. Posons :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{D(t)s_{1in}}{s_1}, & u_2 &= \frac{k_1\mu_{1max}s_1x_1}{(s_1 + K_1)^2}, & u_3 &= \frac{k_1\mu_{1max}x_1}{s_1 + K_1}, \\
 u_4 &= \frac{K_1\mu_{1max}s_1}{(s_1 + K_1)^2}, & u_5 &= \frac{D(t)s_{2in}}{s_2}, & u_6 &= \frac{k_2\mu_{1max}s_1^2x_1}{s_2(s_1 + K_1)^2}, \\
 u_7 &= \frac{k_2\mu_{1max}s_1x_1}{s_2(s_1 + K_1)}, & u_8 &= \frac{k_3\mu_{2max}s_2x_2}{\left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2\right)}, \\
 u_9 &= \frac{k_3\mu_{2max}x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2}, & u_{10} &= \frac{2k_3\mu_{2max}s_2^2x_2}{K_i^2 \left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2\right)^2}, \\
 u_{11} &= \frac{\left(K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2\right)\mu_{2max}s_2}{\left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2\right)^2}, & u_{12} &= \frac{2\mu_{2max}s_2^3}{K_i^2 \left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2\right)^2}, \\
 v_1 &= \frac{s_1 + K_1}{s_1e^{-e_1} + K_1}, & v_2 &= \frac{s_1}{s_1e^{-e_1} + K_1}, \\
 v_3 &= \frac{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2}{s_2e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2 e^{-2e_3}}, & v_4 &= \frac{s_2}{s_2e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2 e^{-2e_3}}, \\
 v_5 &= \frac{s_2^2}{K_i^2 \left(s_2e^{-e_3} + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2 e^{-2e_3}\right)}
 \end{aligned}$$

Le système (5.14), devient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{e}_1 = (-a_1 - u_1 + u_2)e_1 - u_3e_2 - u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) \\
\quad - u_2 [v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_3 [v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\
\dot{e}_2 = (-a_2 + u_4)e_1 - u_4 [v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
\dot{e}_3 = (-u_6 + u_7)e_1 + u_7e_2 + (-a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_{10})e_3 - u_9e_4 - u_5(e^{e_3} - e_3 - 1) \\
\quad + u_6 [v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
\quad - u_7 [v_1(e^{-e_1 - e_2 + e_3} + (e_1 + e_2 - e_3) - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)(e_1 + e_2 - e_3)] \\
\quad - u_8 [v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
\quad - u_{10} [v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + 2v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + 2v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
\quad + u_9 [v_3(e^{-e_4} + e_4 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_4 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_4] \\
\dot{e}_4 = (-a_4 + u_{11} - u_{12})e_3 - u_{11} [v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
\quad + u_{12} [v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)2e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)2e_3]
\end{array} \right. \quad (5.15)$$

Ainsi ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{e} = A(t)e + \bar{\chi}(t, e)$$

où $A(t)$ est une matrice (4×4) qui contient la partie linéaire du système et $\bar{\chi}(t, e)$ est la partie non linéaire du système.

Avec

$$A(t) = \begin{pmatrix}
-a_1 - u_1 + u_2 & -u_3 & \vdots & 0 & 0 \\
& & \vdots & & \\
-a_2 + u_4 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
-u_6 + u_7 & u_7 & \vdots & -a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_{10} & -u_9 \\
& & \vdots & & \\
0 & 0 & \vdots & -a_4 + u_{11} - u_{12} & 0
\end{pmatrix}$$

et

$$\bar{\chi}(t, e) = \begin{pmatrix} -u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ +u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ \\ -u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ \\ -u_5(e^{e_3} - e_3 - 1) + u_6[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ -u_7[v_1(e^{-e_1 - e_2 + e_3} + (e_1 + e_2 - e_3) - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)(e_1 + e_2 - e_3)] \\ -u_8[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ -u_{10}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + 2v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + 2v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ +u_9[v_3(e^{-e_4} + e_4 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_4 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_4] \\ \\ -u_{11}[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ +u_{12}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)2e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)2e_3] \end{pmatrix}$$

Ici, nous allons prendre la norme $\|e\| = |e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|$, i.e. nous devons montrer que pour $\forall t \geq T$

$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{\delta}_\epsilon > 0$ tel que $(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|) \leq \bar{\delta}_\epsilon$ ce qui implique

$$(|\bar{\chi}_1| + |\bar{\chi}_2| + |\bar{\chi}_3| + |\bar{\chi}_4|) \leq \bar{\epsilon} (|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 0 < \vartheta_1 \leq s_1(t) \leq s_{1in} & , & 0 < \vartheta_2 \leq s_2(t) \leq s_{2in} \\ 0 < x_1(t) \leq \sigma_1 & , & 0 < x_1(t) \leq \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < D_{min} \leq u_1(t) \leq \frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1} & , & 0 < u_2(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1} & , & 0 < u_3(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1} \\ 0 < u_4(t) \leq \mu_{1max} & , & 0 < D_{min} \leq u_5(t) \leq \frac{D_{max}s_{2in}}{\vartheta_2} & , & 0 < u_6(t) \leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{\vartheta_1} \\ 0 < u_7(t) \leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{\vartheta_1} & , & 0 < u_8(t) \leq \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2} & , & 0 < u_9(t) \leq \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2} \\ 0 < u_{10}(t) \leq \frac{2k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_i^2} & , & 0 < u_{11} \leq \left(1 + \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i^2}\right) \mu_{2max} & , & 0 < u_{12} \leq \frac{2\mu_{2max}s_{2in}}{K_i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < v_1(t) \leq \frac{s_{1in} + K_1}{K_1} & , & 0 \leq v_2(t) \leq \frac{s_{1in}}{K_1} \\ 0 \leq v_3(t) \leq \frac{s_{2in} + K_2}{K_2} + \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i^2} & , & 0 \leq v_4(t) \leq \frac{s_{2in}}{K_2} & , & 0 \leq v_5(t) \leq \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i^2} \end{aligned}$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\bar{\chi}_1| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1} e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1^2} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \right) \bar{\delta}_\varepsilon |e_1| \\
&\quad + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{2K_1^2} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \bar{\delta}_\varepsilon |e_2| \\
|\bar{\chi}_2| &\leq \frac{\mu_{1max}}{2K_1} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \bar{\delta}_\varepsilon |e_1| \\
|\bar{\chi}_3| &\leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \bar{\delta}_\varepsilon (|e_1| + |e_2|) \\
&\quad + \left(\frac{D_{max}s_{2in}}{2\vartheta_1} e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] + \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{2K_2^2} \right. \\
&\quad \left[\left(s_{2in} \left(1 + \frac{4s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] + \frac{4k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2 K_i^2} \\
&\quad \left. \left[\left(s_{2in} \left(\frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \right) \bar{\delta}_\varepsilon |e_3| \\
&\quad + \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{2K_2^2} \left[\left(s_{2in} \left(1 + \frac{4s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \bar{\delta}_\varepsilon |e_4| \\
|\bar{\chi}_4| &\leq \left(\left(1 + \frac{s_{2in}^2}{K_2 K_i^2} \right) \frac{\mu_{2max}}{2K_2} \left[\left(s_{2in} \left(1 + \frac{4s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \frac{4\mu_{2max}s_{2in}}{K_2 K_i^2} \left[\left(s_{2in} \left(\frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \right) \bar{\delta}_\varepsilon |e_3|
\end{aligned}$$

Alors

$$|\bar{\chi}_1| + |\bar{\chi}_2| + |\bar{\chi}_3| + |\bar{\chi}_4| \leq \bar{l}_1(\bar{\delta}_\varepsilon)\bar{\delta}_\varepsilon |e_1| + \bar{l}_2(\bar{\delta}_\varepsilon)\bar{\delta}_\varepsilon |e_2| + \bar{l}_3(\bar{\delta}_\varepsilon)\bar{\delta}_\varepsilon |e_3| + \bar{l}_4(\bar{\delta}_\varepsilon)\bar{\delta}_\varepsilon |e_4|$$

où

$$\bar{l}_1(\bar{\delta}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1} e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + \frac{\mu_{1max}}{K_1} \left[\frac{2k_1\vartheta_1 + k_2K_1}{\vartheta_1 K_1} \sigma_1 + 1 \right] \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \right) \bar{\delta}_\varepsilon$$

$$\bar{l}_2(\bar{\delta}_\varepsilon) = \left(\frac{\mu_{1max}\sigma_1}{2K_1} \left[\frac{k_1\vartheta_1 + k_2K_1}{\vartheta_1 K_1} \right] \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] \right) \bar{\delta}_\varepsilon$$

$$\bar{l}_3(\bar{\delta}_\varepsilon) = \left(\frac{D_{max}s_{2in}}{2\vartheta_1} e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} \left[s_{1in}((\bar{\delta}_\varepsilon + 1) + K_1)e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{1in} \right] + \frac{\mu_{2max}}{2K_2} \right.$$

$$\left. \left[1 + \frac{1}{K_2} \left(k_3\sigma_2 + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} \right) \right] \left[\left(s_{2in} \left(1 + \frac{4s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\varepsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\varepsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \right)$$

$$+ \frac{4\mu_{2max}}{K_2 K_i^2} (k_3 \sigma_2 + s_{2in}) \left[\left(s_{2in} \left(\frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\epsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \bar{\delta}_\epsilon$$

$$\bar{l}_4(\bar{\delta}_\epsilon) = \frac{k_3 \mu_{2max} \sigma_2}{2K_2^2} \left[\left(s_{2in} \left(1 + \frac{4s_{2in}}{K_i^2} \right) \bar{\delta}_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i^2} + s_2 + K_2 \right) e^{\bar{\delta}_\epsilon} + 2s_{2in} \left(1 + \frac{s_{2in}}{K_i^2} \right) \right] \bar{\delta}_\epsilon$$

Ainsi

$$|\bar{\chi}_1| + |\bar{\chi}_2| + |\bar{\chi}_3| + |\bar{\chi}_4| \leq \underbrace{\max(\bar{l}_1(\bar{\delta}_\epsilon), \bar{l}_2(\bar{\delta}_\epsilon), \bar{l}_3(\bar{\delta}_\epsilon), \bar{l}_4(\bar{\delta}_\epsilon))}_{\bar{l}(\bar{\delta}_\epsilon)} (|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)$$

Notons que la fonction $\bar{l}(\bar{\delta}_\epsilon)$ est continue en $\bar{\delta}_\epsilon$ et $\bar{l}(0) = 0$, alors pour tout $\bar{\epsilon} > 0$ il existe $\bar{\delta}_\epsilon > 0$ tel que $\bar{l}(\bar{\delta}_\epsilon) < \bar{\epsilon}$.

Il reste à montrer que $(0, 0, 0, 0)$ est uniformément asymptotiquement stable pour le système linéaire

$$\frac{de}{dt} = A(t)e$$

Pour cela réécrivons la partie linéaire du système (5.14) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (-a_1 - u_1 + u_2) e_1 - u_3 e_2 \\ \dot{e}_2 = (-a_2 + u_4) e_1 \\ \dot{e}_3 = (-u_6 + u_9) e_1 + u_7 e_2 + (-a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_{10}) e_3 - u_9 e_4 \\ \dot{e}_4 = (-a_4 - u_{11} + u_{12}) e_3 \end{cases} \quad (5.16)$$

Dans cette partie nous allons prendre la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(e_1, e_2, e_3, e_4) = V_{\bar{\alpha}}(e_1, e_2) V_{\bar{\beta}}(e_3, e_4)$$

où $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ sont strictement positives. Avec

$$V_{\bar{\alpha}}(e_1, e_2) = ((\bar{\alpha} e_1 + e_2)^2 + e_2^2)$$

et

$$V_{\bar{\beta}}(e_3, e_4) = ((\bar{\beta} e_3 + e_4)^2 + e_4^2)$$

Donc

$$\dot{V} = \dot{V}_{\bar{\alpha}} V_{\bar{\beta}} + V_{\bar{\alpha}} \dot{V}_{\bar{\beta}}$$

Nous avons :

$$\dot{V}_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}[-\bar{\alpha}(a_1 + u_1 - u_2) + (-a_2 + u_4)] & -\bar{\alpha}^2 u_3 - \bar{\alpha}(a_1 + u_1 - u_2) \\ & +2(-a_2 + u_4) \\ -\bar{\alpha}^2 u_3 - \bar{\alpha}(a_1 + u_1 - u_2) & -2\bar{\alpha} u_3 \\ +2(-a_2 + u_4) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Prenons $\bar{\alpha}a_1 + 2a_2 = 0$, ainsi $\dot{V}_{\bar{\alpha}}$ devient :

$$\dot{V}_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{\alpha}^2 a_1 - 2\bar{\alpha}^2(u_1 - u_2) + 2\bar{\alpha}u_4 & -\bar{\alpha}^2 u_3 - \bar{\alpha}(u_1 - u_2) + 2u_4 \\ -\bar{\alpha}^2 u_3 - \bar{\alpha}(u_1 - u_2) + 2u_4 & -2\bar{\alpha}u_3 \end{pmatrix}}_{M_{\bar{\alpha}}} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$M_{\bar{\alpha}}$ est définie négative car $tr(M_{\bar{\alpha}}) < 0$ et $det(M_{\bar{\alpha}}) > 0$. En effet :

$$tr(M_{\bar{\alpha}}) = -\bar{\alpha}^2 a_1 - 2\bar{\alpha}^2(u_1 - u_2) + 2\bar{\alpha}(-u_3 + u_4)$$

$$det(M_{\bar{\alpha}}) = 2\bar{\alpha}^3 u_3 a_1 + 4\bar{\alpha}^3 u_3(u_1 - u_2) - 4\bar{\alpha}^2 u_3 u_4 - [-\bar{\alpha}^2 u_3 - \bar{\alpha}(u_1 - u_2) + 2u_4]^2$$

En prenant a_1 suffisamment grand, nous avons $tr(M_{\bar{\alpha}}) < 0$ et $det(M_{\bar{\alpha}}) > 0$.

Donc

$$\dot{V}_{\bar{\alpha}} \leq \lambda_{max}(M_{\bar{\alpha}})(e_1^2 + e_2^2) \leq c\lambda_{max}(M_{\bar{\alpha}})V_{\bar{\alpha}}$$

car les normes dans \mathbb{R} sont équivalentes, où $\lambda_{max}(M_{\bar{\alpha}})$ est la plus grande valeur propre négative de $M_{\bar{\alpha}}$. Ce qui implique que $\dot{V}_{\bar{\alpha}}(e_1, e_2)$ est négative.

Faisons le même raisonnement pour $V_{\bar{\beta}}$:

$$V_{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{\beta} [\bar{\beta}(-a_3 - u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) + (-a_4 + u_{11} - u_{12})] & \bar{\beta}(-a_3 - u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) - \bar{\beta}^2 u_9 + 2(-a_4 + u_{11} - u_{12}) \\ \bar{\beta}(-a_3 - u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) & -2\bar{\beta}u_9 \\ -\bar{\beta}^2 u_9 + 2(-a_4 + u_{11} - u_{12}) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \\ + 2\bar{\beta}((-u_6 + u_7)e_1 + u_7 e_2)(\bar{\beta}e_3 + e_4)$$

Prenons $\bar{\beta}a_3 + 2a_4 = 0$, ainsi $\dot{V}_{\bar{\beta}}$ devient :

$$\dot{V}_{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{\beta}^2 a_3 + 2\bar{\beta} [\bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) + (u_{11} - u_{12})] & \bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) - \bar{\beta}^2 u_9 + 2(u_{11} - u_{12}) \\ \bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) & -2\bar{\beta}u_9 \\ -\bar{\beta}^2 u_9 + 2(u_{11} - u_{12}) & \end{pmatrix}}_{M_{\bar{\beta}}} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

$$+ 2\bar{\beta}((-u_6 + u_7)e_1 + u_7 e_2)(\bar{\beta}e_3 + e_4)$$

$M_{\bar{\beta}}$ est définie négative car $tr(M_{\bar{\beta}}) < 0$ et $det(M_{\bar{\beta}}) > 0$. En effet :

$$tr(M_{\bar{\beta}}) = -\bar{\beta}^2 a_3 + 2\bar{\beta} [\bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 - u_9 + u_{10}) + (u_{11} - u_{12})]$$

$$\begin{aligned} \det(M_{\bar{\beta}}) &= 2\bar{\beta}^3 u_9 a_3 - 4\bar{\beta}^2 u_9 [\bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) + (u_{11} - u_{12})] \\ &\quad - [-\bar{\beta}(-u_6 - u_7 + u_8 + u_{10}) - \bar{\beta}^2 u_9 + 2(u_{11} - u_{12})]^2 \end{aligned}$$

De même, en prenant a_3 suffisamment grand, nous avons $\text{tr}(M_{\bar{\beta}}) < 0$ et $\det(M_{\bar{\beta}}) > 0$.

Nous avons

$$|2\bar{\beta}((-u_6 + u_7)e_1 + u_7 e_2)(\bar{\beta}e_3 + e_4)| \leq 2\bar{\beta} \underbrace{\sqrt{(-u_6 + u_7)^2 + u_7^2}}_{\leq c_2} \underbrace{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}_{\leq \sqrt{V_{\bar{\alpha}}}} \sqrt{V_{\bar{\beta}}}$$

Donc

$$\dot{V}_{\bar{\beta}} \leq c_3 \lambda_{\max}(M_{\bar{\beta}}) V_{\bar{\beta}} + 2\bar{\beta} c_2 \sqrt{V_{\bar{\alpha}}} \sqrt{V_{\bar{\beta}}}$$

où $\lambda_{\max}(M_{\bar{\beta}})$ est la plus grande valeur propre négative de $M_{\bar{\beta}}$. Pour $\bar{\beta}$ assez petit, nous avons $\dot{V}_{\bar{\beta}}$ négative.

Donc $(0, 0, 0, 0)$ est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable. ■

5.4.6 Résultats de simulations

Les simulations ont été réalisées en utilisant les valeurs des paramètres précédents (voir table(5.1) et table(5.2))

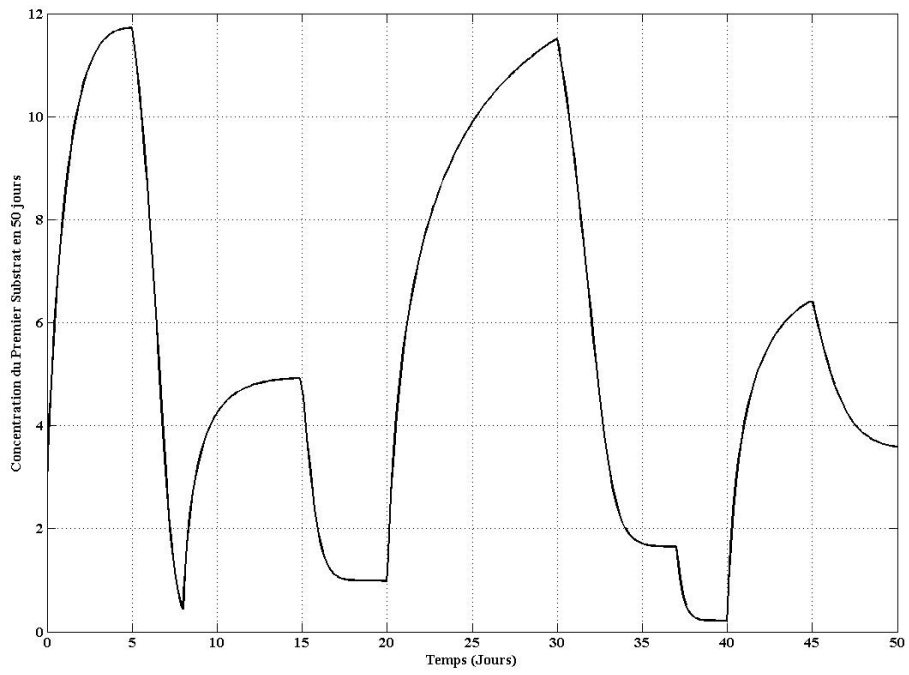


FIGURE 5.7 – Concentration du premier substrat s_1

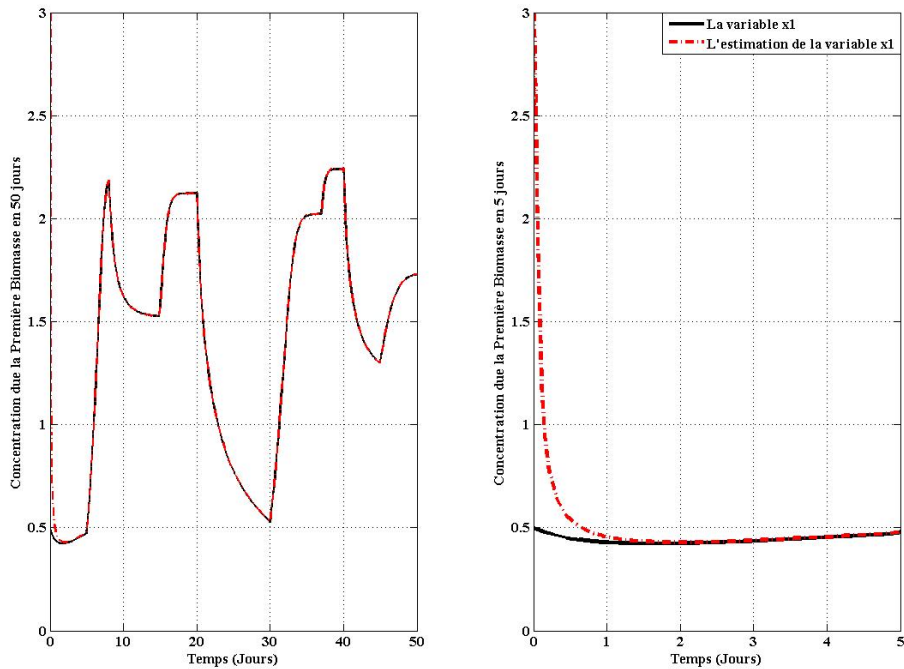


FIGURE 5.8 – Concentration de la première biomasse et son estimation pour $a_1 = 30$, $a_2 = -225$, $a_3 = 5$, et $a_4 = -25$

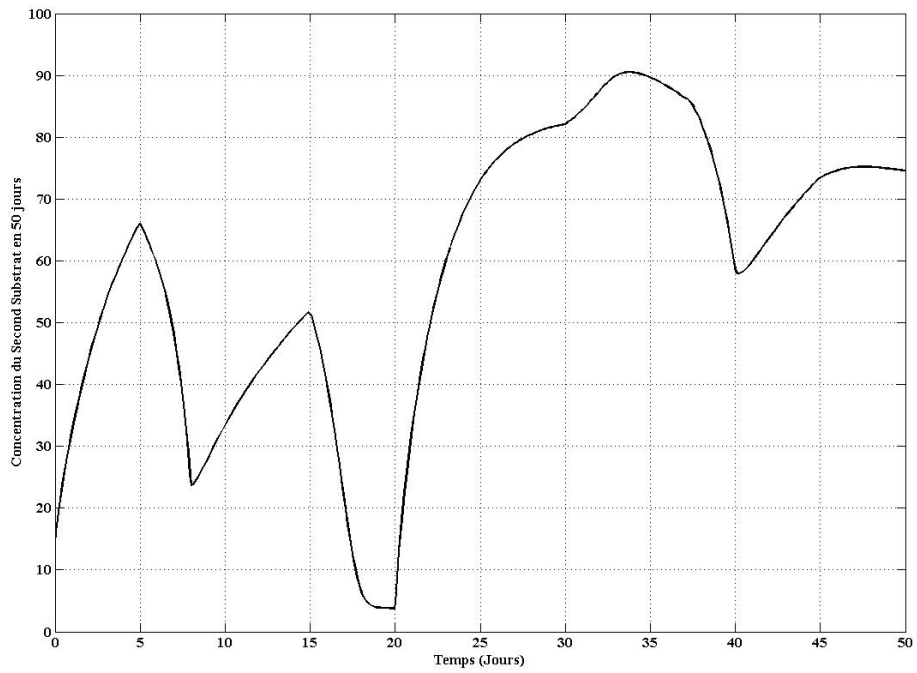


FIGURE 5.9 – Concentration du second substrat s_2

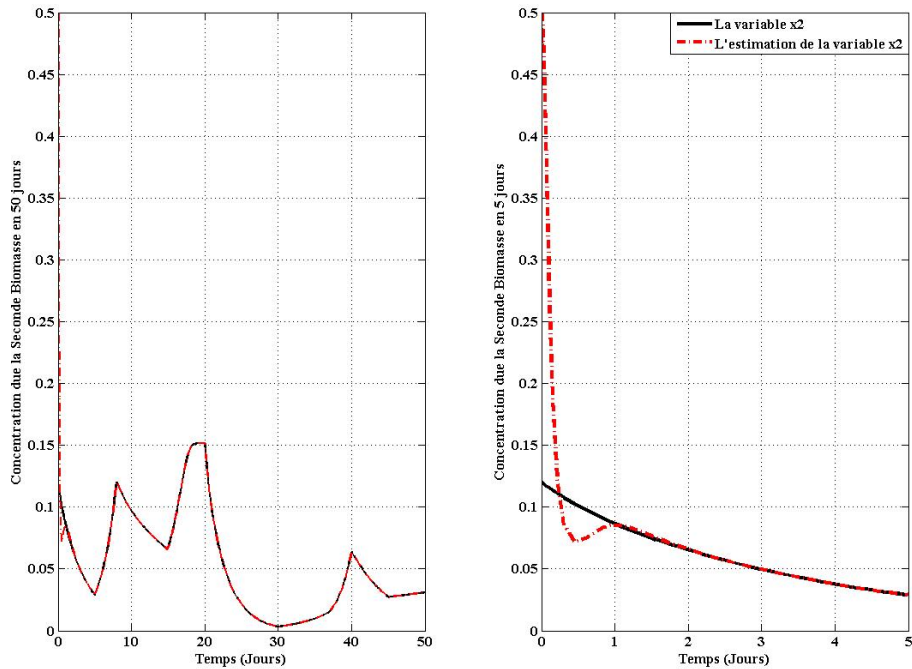


FIGURE 5.10 – Concentration de la seconde biomasse et son estimation pour $a_1 = 30$, $a_2 = -225$, $a_3 = 5$, et $a_4 = -25$

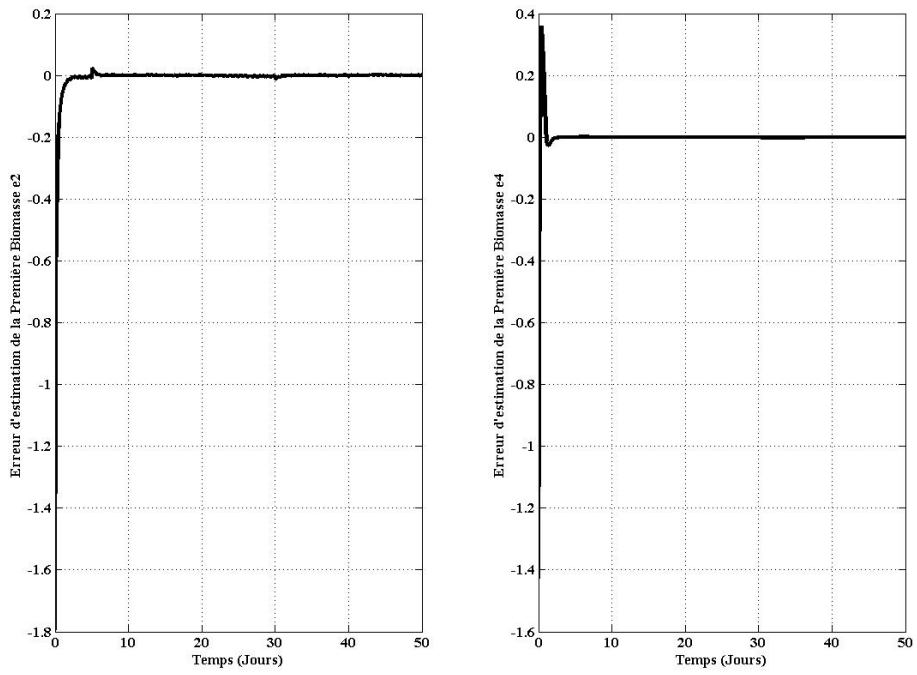


FIGURE 5.11 – Erreurs correspondantes aux deux biomasses

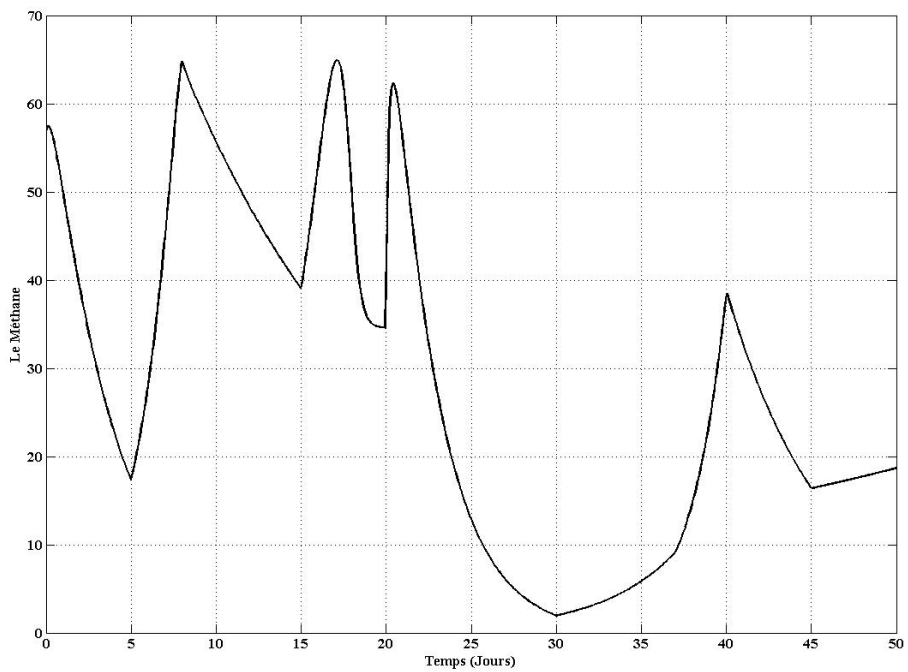


FIGURE 5.12 – Le méthane

Les figures (5.7) et (5.9) représentent les états mesurés s_1 et s_2 respectivement. Les figures (5.8) et (5.10) représentent les estimations des deux biomasses x_1 et x_2 respectivement. La figure (5.11) représente les erreurs d'estimations pour les deux biomasses x_1 et x_2 et la figure (5.12) représente la quantité du méthane produite durant les 50 jours.

Nous avons pris dans nos simulations $\bar{\alpha} = 15$, $\bar{\beta} = 10$, $a_1 = 30$, $a_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{2}a_1$, $a_3 = 5$, et $a_4 = -\frac{\bar{\beta}}{2}a_3$. Nous remarquons que notre observateur converge après $t \approx 2$ jours avec une erreur égale à 10^{-2} pour la première biomasse x_1 et pour la seconde biomasse x_2 .

La quantité du méthane produite par le système est donnée par l'expression suivante :

$$q_M = k_6 \mu_2(s_2) x_2$$

Le méthane peut être estimé à partir des variables estimées x_1 et x_2 qui confère à notre observateur le statut d'un capteur numérique pour le méthane.

5.5 Discussion autour de la robustesse

Nous avons perturbé la première sortie s_1 par un bruit blanc additif ensuite, nous avons observé le comportement du système (voir figures (5.13, 5.14)). Nous remarquons une réponse satisfaisante de l'observateur, ce qui veut dire que notre observateur est bien robuste face aux bruits de mesures. La même perturbation est faite pour s_2 (voir figures (5.15, 5.16)).

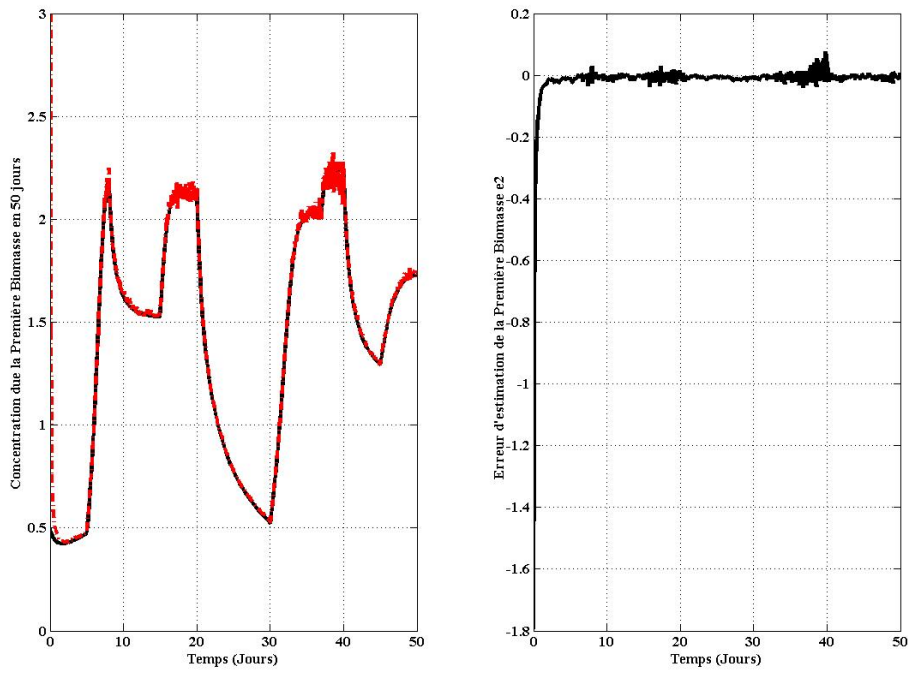


FIGURE 5.13 – L'estimation de la variable x_1 avec une perturbation sur s_1 et son erreur d'estimation

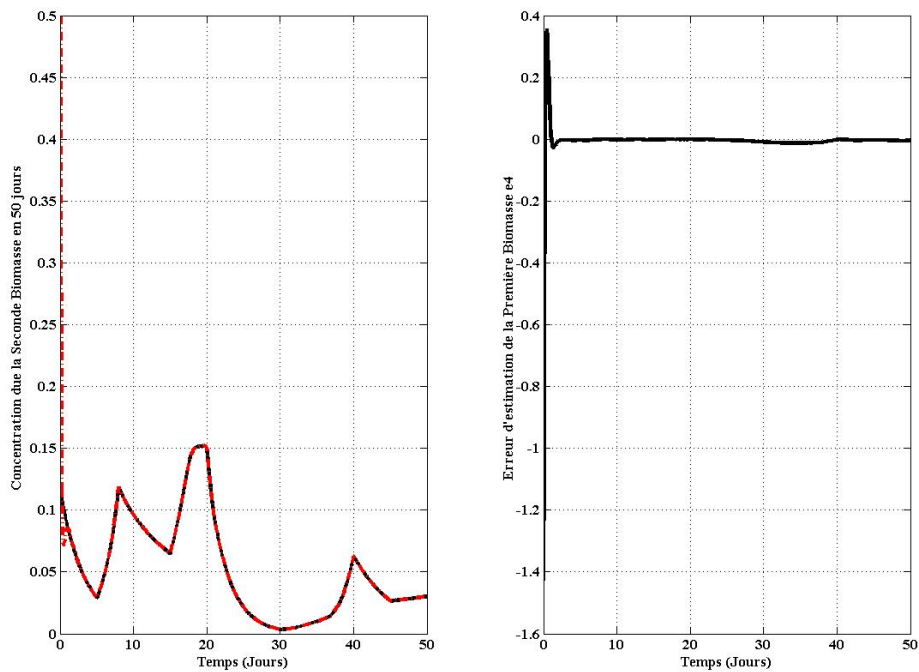


FIGURE 5.14 – L'estimation de la variable x_2 avec une perturbation sur s_1 et son erreur d'estimation

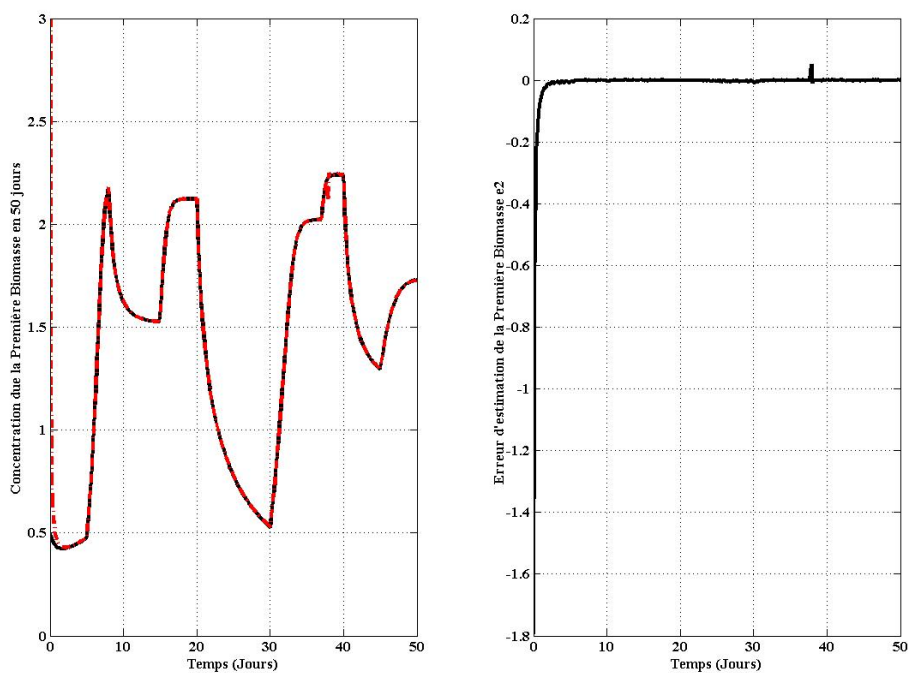


FIGURE 5.15 – L'estimation de la variable x_1 avec une perturbation sur s_2 et son erreur d'estimation

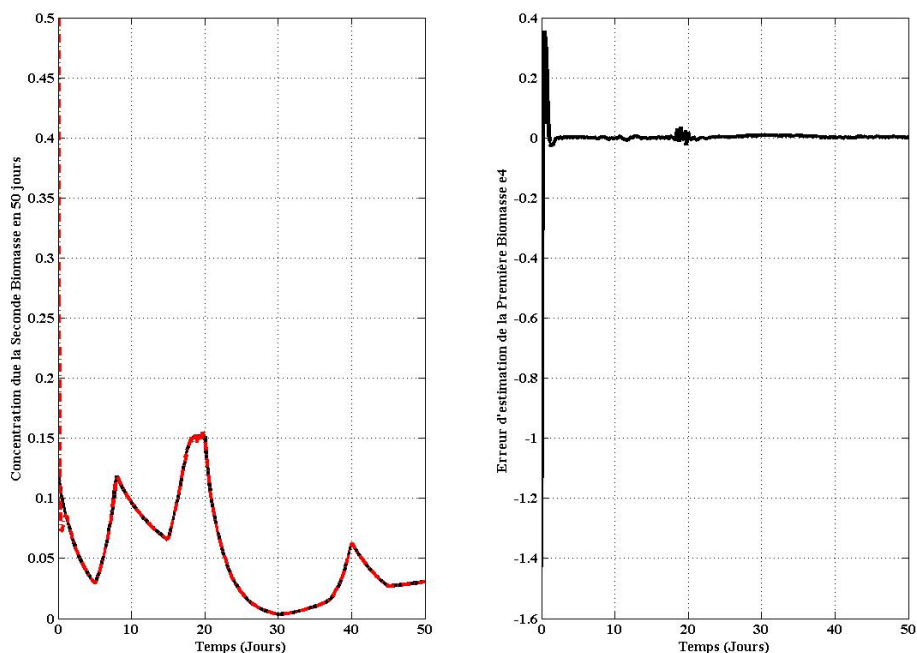


FIGURE 5.16 – L'estimation de la variable x_2 avec une perturbation sur s_2 et son erreur estimée

5.6 Étude comparative

Dans ce qui suit, nous allons faire une comparaison entre les différents comportements des observateurs précédemment étudiés et quelques uns issus de la littérature.

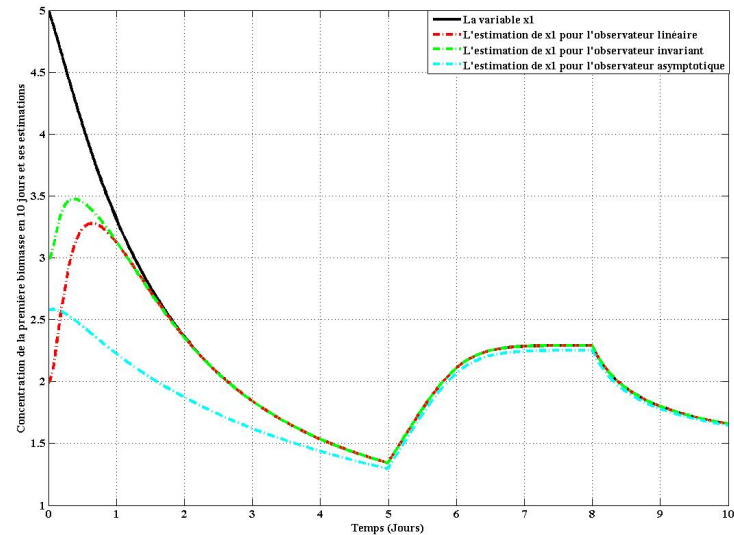


FIGURE 5.17 – Concentration de la première biomasse et ses estimation

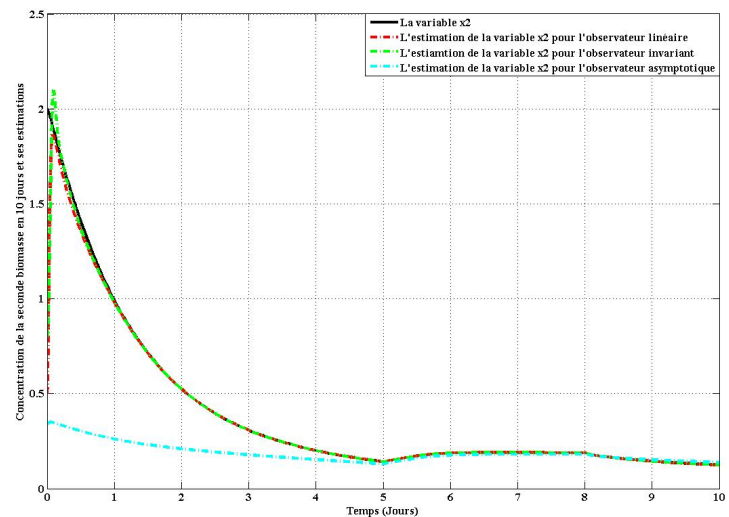


FIGURE 5.18 – Concentration de la seconde biomasse et ses estimation

A partir des figures (5.17) et (5.18), nous remarquons que les vitesses de convergence des deux observateurs celui à dynamique d'erreur linéaire et invariant sont équivalentes. Nous constatons aussi que ces deux observateurs donnent

de meilleurs résultats par rapport à l'observateur asymptotique. Nous citons quelques avantages et inconvénients : l'observateur linéaire est facile à écrire, il a un caractère global de convergence et utilise une cinétique de croissance μ quelconque. Par contre, il n'est valable que si la sortie est $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$.

Contrairement à l'observateur invariant qui est valable quelque soit la sortie pourvu qu'elle soit invariante, il est facile à écrire mais admet une convergence locale.

5.7 Observateur invariant pour le modèle AM2 avec la sortie q_M

Récrivons le système dynamique représentant le modèle de la digestion anaérobie :

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} \\ \dot{x}_1(t) = \left[\mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} - D(t) \right] x_1 \\ \dot{s}_2(t) = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} - k_3\mu_{2max} \frac{s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2} \\ \dot{x}_2(t) = \left[\mu_{2max} \frac{s_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_i}\right)^2} - D(t) \right] x_2 \end{cases} \quad (5.17)$$

qui a pour sortie $y = k_6\mu(s_2, K_2)x_2$.

Un pré-observateur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1(t) = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu_{1max} \frac{\hat{s}_1 \hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \left[\mu_{1max} \frac{\hat{s}_1}{\hat{s}_1 + K_1} - D(t) \right] \hat{x}_1 \\ \dot{\hat{s}}_2(t) = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu_{1max} \frac{\hat{s}_1 \hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} - k_3\mu_{2max} \frac{\hat{s}_2 \hat{x}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \left(\frac{\hat{s}_2}{K_i}\right)^2} \\ \quad + a\hat{s}_2 \left[\ln \left(\frac{y}{\hat{x}_2} \right) + \ln \left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}_2} \right) \right] \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \left[\mu_{2max} \frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \left(\frac{\hat{s}_2}{K_i}\right)^2} - D(t) \right] \hat{x}_2 + b\hat{x}_2 \left[\ln \left(\frac{y}{\hat{x}_2} \right) + \ln \left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}_2} \right) \right] \end{cases} \quad (5.18)$$

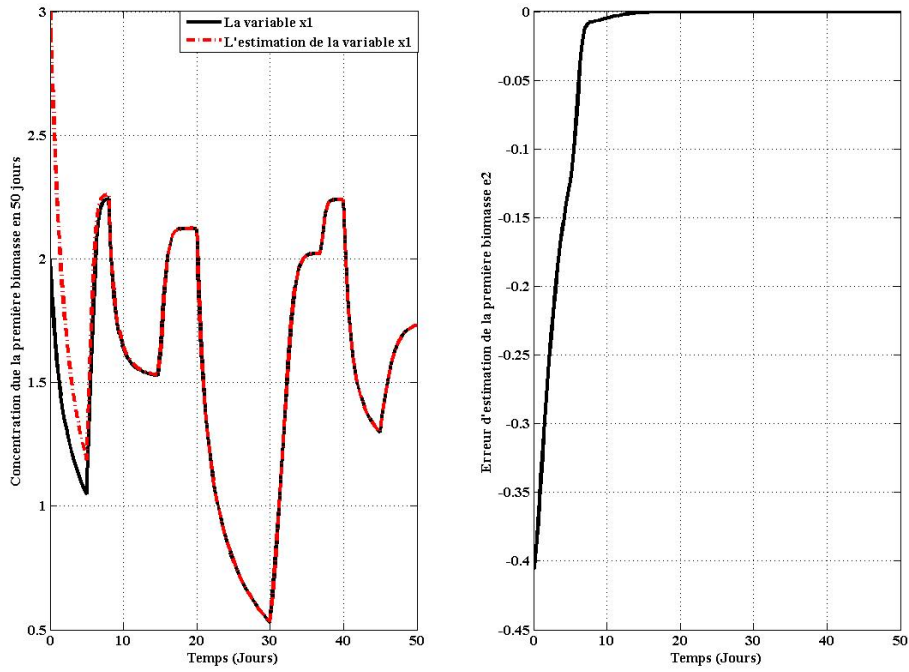


FIGURE 5.19 – Concentration de la première biomasse et son estimation

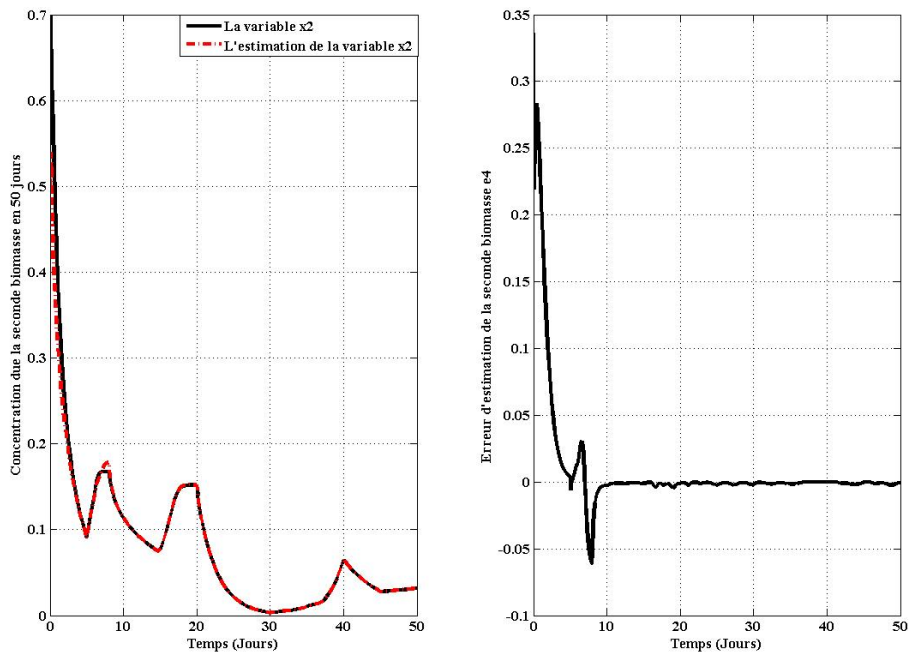


FIGURE 5.20 – Concentration de la seconde biomasse et son estimation

Ces simulations montrent que notre observateur invariant donne de bon résultats de convergence même avec la sortie qM , contrairement aux autres observateurs cités auparavant.

Chapitre 6

Conclusion générale

Le principal objectif de ces travaux était de construire des pré-observateurs invariants pour trois types de modèles de bioprocédés en estimant les variables non mesurés de ces systèmes à partir de l'unique variable mesurée qui est le substrat et en dernier lieu la sortie méthane. Nous avons présenté de nouveaux résultats de convergence et de robustesse d'observateurs construits à partir de la propriété d'invariance.

La mise en évidence d'invariance sous l'action de transformations des variables est une tâche souvent délicate. C'est le choix adéquat des variables jouant le rôle de contrôle qui nous a permis d'accomplir cette tâche.

Les observateurs proposés ont d'une part une forme canonique, et d'autre part possèdent des vitesses de convergences réglables. Ceci est une amélioration par rapport à ceux considérés pour les mêmes systèmes dans la littérature. De plus le temps de convergence a été réduit.

Parmi les perspectives de ce travail, nous proposons de mettre en uvre des observateurs invariants avec des sorties réellement mesurées dans les laboratoires. Nous proposons aussi de trouver un groupe qui n'agit pas de manière linéaire et qui laisse ces systèmes invariants. Finalement, nous espérons pouvoir utiliser dans le futur ce genre d'observateurs dans des boucles de commande.

Chapitre 7

Annexe A

Dans cet annexe, nous allons donner la manière dont nous avons trouvé l'invariance de chaque système présenté dans ce travail. Nous allons présenter des programmes qui ont été fait sous Maple.

7.1 Invariance du modèle du Chemostat

$$\begin{aligned} > a_{11} := \alpha; & > a_{22} := \beta & > a_{34} := 0; & > a_{51} := 0; \\ > a_{12} := 0; & > a_{23} := 0; & > a_{35} := 0; & > a_{52} := 0; \\ > a_{22} := \beta; & > a_{24} := 0; & > a_{41} := 0; & > a_{53} := 0; \\ > a_{13} := 0; & > a_{25} := 0; & > a_{42} := 0; & > a_{54} := 0; \\ > a_{14} := 0; & > a_{31} := 0; & > a_{43} := 0; & > a_{55} := \alpha \\ > a_{15} := 0; & > a_{32} := 0; & > a_{44} := \alpha - \beta; \\ > a_{21} := 0; & > a_{33} := \alpha; & > a_{45} := 0; \end{aligned}$$

Tout d'abord nous avons défini les équations du système et appliqué la méthode citée dans le chapitre 3 pour l'invariance. Le but est de mettre les deux équations E_1 et E_2 en fonction d'une seule variable, le premier "collect", ensuite l'égaliser à zéro. Ceci nous permettra d'identifier quelques paramètres a_{ij} , ces derniers nous les injectons dans les collectifs suivants jusqu'à obtention de tous les paramètres donnés ci-dessus. Le même principe est appliqué dans tous les systèmes étudiés dans cette thèse.

$$\begin{aligned} > stilde & := a_{11}s + a_{12}x + a_{13}s_{in} + a_{14}k + a_{15}K; \\ > xtilde & := a_{21}s + a_{22}x + a_{23}s_{in} + a_{24}k + a_{25}K; \\ > s_{in}tilde & := a_{33}s_{in} + a_{34}k + a_{35}K; \\ > ktilde & := a_{43}s_{in} + a_{44}k + a_{45}K; \\ > Ktilde & := a_{53}s_{in} + a_{54}k + a_{55}K; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> f_1 &:= D(s_{in} - s) - \frac{kmsx}{s + K}; \\
> f_2 &:= \left(\frac{ms}{s + K} - D \right) x; \\
> g_1 &:= stilde \frac{\partial f_1}{\partial s} + xtilde \frac{\partial f_1}{\partial x} + s_{in}tilde \frac{\partial f_1}{\partial s_{in}} + ktilde \frac{\partial f_1}{\partial k} + Ktilde \frac{\partial f_1}{\partial K}; \\
> g_2 &:= stilde \frac{\partial f_2}{\partial s} + xtilde \frac{\partial f_2}{\partial x} + s_{in}tilde \frac{\partial f_2}{\partial s_{in}} + ktilde \frac{\partial f_2}{\partial k} + Ktilde \frac{\partial f_2}{\partial K}; \\
> E_1 &:= (g_1 - (a_{11}f_1 + a_{12}f_2))(s + K)^2; \\
> E_2 &:= (g_2 - (a_{21}f_1 + a_{22}f_2))(s + K)^2; \\
> collect(E_1, D); \\
> collect(E_1, x); \\
> collect(E_1, s_{in}); \\
> collect(E_1, k); \\
> collect(E_1, K); \\
> collect(E_2, d); \\
> collect(E_2, x); \\
> collect(E_2, k); \\
> collect(E_2, s_{in}); \\
> collect(E_2, K);
\end{aligned}$$

7.2 Invariance du modèle de compétition dans le Chemostat

$$\begin{aligned}
> a_{11} &:= \alpha; & > a_{21} &:= 0; & > a_{31} &:= 0; & > a_{44} &:= \alpha; & > a_{57} &:= 0; \\
> a_{12} &:= 0; & > a_{22} &:= \beta; & > a_{32} &:= 0; & > a_{45} &:= 0; & > a_{58} &:= 0; \\
> a_{13} &:= 0; & > a_{23} &:= 0; & > a_{33} &:= \gamma; & > a_{46} &:= 0; & > a_{59} &:= 0; \\
> a_{14} &:= 0; & > a_{24} &:= 0; & > a_{34} &:= 0; & > a_{47} &:= 0; & > a_{510} &:= 0; \\
> a_{15} &:= 0; & > a_{25} &:= 0; & > a_{35} &:= 0; & > a_{48} &:= 0; & > a_{511} &:= 0; \\
> a_{16} &:= 0; & > a_{26} &:= 0; & > a_{36} &:= 0; & > a_{49} &:= 0; & > a_{512} &:= 0; \\
> a_{17} &:= 0; & > a_{27} &:= 0; & > a_{37} &:= 0; & > a_{410} &:= 0; & > a_{64} &:= 0; \\
> a_{18} &:= 0; & > a_{28} &:= 0; & > a_{38} &:= 0; & > a_{411} &:= 0; & > a_{65} &:= 0; \\
> a_{19} &:= 0; & > a_{29} &:= 0; & > a_{39} &:= 0; & > a_{412} &:= 0; & > a_{66} &:= \alpha - \gamma; \\
> a_{110} &:= 0; & > a_{210} &:= 0; & > a_{310} &:= 0; & > a_{54} &:= 0; & > a_{67} &:= 0; \\
> a_{111} &:= 0; & > a_{211} &:= 0; & > a_{311} &:= 0; & > a_{55} &:= \alpha - \beta; & > a_{68} &:= 0; \\
> a_{112} &:= 0; & > a_{212} &:= 0; & > a_{312} &:= 0; & > a_{56} &:= 0; & > a_{69} &:= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a_{610} &:= 0; & > a_{84} &:= 0; & > a_{97} &:= 0; & > a_{1010} &:= -\gamma; & > a_{124} &:= 0; \\
> a_{611} &:= 0; & > a_{85} &:= 0; & > a_{98} &:= 0; & > a_{1011} &:= 0; & > a_{125} &:= 0; \\
> a_{612} &:= 0; & > a_{86} &:= 0; & > a_{99} &:= -\beta; & > a_{1012} &:= 0; & > a_{126} &:= 0; \\
> a_{74} &:= 0; & > a_{87} &:= 0; & > a_{910} &:= 0; & > a_{114} &:= 0; & > a_{127} &:= 0; \\
> a_{75} &:= 0; & > a_{88} &:= \alpha; & > a_{911} &:= 0; & > a_{115} &:= 0; & > a_{128} &:= 0; \\
> a_{76} &:= 0; & > a_{89} &:= 0; & > a_{912} &:= 0; & > a_{116} &:= 0; & > a_{129} &:= 0; \\
> a_{77} &:= \alpha; & > a_{810} &:= 0; & > a_{104} &:= 0; & > a_{117} &:= 0; & > a_{1210} &:= 0; \\
> a_{78} &:= 0; & > a_{811} &:= 0; & > a_{105} &:= 0; & > a_{118} &:= 0; & > a_{1211} &:= 0; \\
> a_{79} &:= 0; & > a_{812} &:= 0; & > a_{106} &:= 0; & > a_{119} &:= 0; & > a_{1212} &:= -\gamma; \\
> a_{710} &:= 0; & > a_{94} &:= 0; & > a_{107} &:= 0; & > a_{1110} &:= 0; & & \\
> a_{711} &:= 0; & > a_{95} &:= 0; & > a_{108} &:= 0; & > a_{1111} &:= -\beta; & & \\
> a_{712} &:= 0; & > a_{96} &:= 0; & > a_{109} &:= 0; & > a_{1112} &:= 0; & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \textit{stilde} &:= a_{11}s + a_{12}x_1 + a_{13}x_2 + a_{14}s_{in} + a_{15}k_1 + a_{16}k_2 + a_{17}K_1 \\
&\quad + a_{18}K_2 + a_{19}\alpha_{11} + a_{110}\alpha_{12} + a_{111}\alpha_{21} + a_{112}\alpha_{22}; \\
> x_1\textit{tilde} &:= a_{21}s + a_{22}x_1 + a_{23}x_2 + a_{24}s_{in} + a_{25}k_1 + a_{26}k_2 + a_{27}K_1 \\
&\quad + a_{28}K_2 + a_{29}\alpha_{11} + a_{210}\alpha_{12} + a_{211}\alpha_{21} + a_{212}\alpha_{22}; \\
> x_2\textit{tilde} &:= a_{31}s + a_{32}x_1 + a_{33}x_2 + a_{34}s_{in} + a_{35}k_1 + a_{36}k_2 + a_{37}K_1 \\
&\quad + a_{38}K_2 + a_{39}\alpha_{11} + a_{310}\alpha_{12} + a_{311}\alpha_{21} + a_{312}\alpha_{22}; \\
> s_{in}\textit{tilde} &:= a_{44}s_{in} + a_{45}k_1 + a_{46}k_2 + a_{47}K_1 + a_{48}K_2 + a_{49}\alpha_{11} + a_{410}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{411}\alpha_{21} + a_{412}\alpha_{22}; \\
> k_1\textit{tilde} &:= a_{54}s_{in} + a_{55}k_1 + a_{56}k_2 + a_{57}K_1 + a_{58}K_2 + a_{59}\alpha_{11} + a_{510}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{511}\alpha_{21} + a_{512}\alpha_{22}; \\
> k_2\textit{tilde} &:= a_{64}s_{in} + a_{65}k_1 + a_{66}k_2 + a_{67}K_1 + a_{68}K_2 + a_{69}\alpha_{11} + a_{610}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{611}\alpha_{21} + a_{612}\alpha_{22}; \\
> K_1\textit{tilde} &:= a_{74}s_{in} + a_{75}k_1 + a_{76}k_2 + a_{77}K_1 + a_{78}K_2 + a_{79}\alpha_{11} + a_{710}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{711}\alpha_{21} + a_{712}\alpha_{22}; \\
> K_2\textit{tilde} &:= a_{84}s_{in} + a_{85}k_1 + a_{86}k_2 + a_{87}K_1 + a_{88}K_2 + a_{89}\alpha_{11} + a_{810}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{811}\alpha_{21} + a_{812}\alpha_{22}; \\
> \alpha_{11}\textit{tilde} &:= a_{94}s_{in} + a_{95}k_1 + a_{96}k_2 + a_{97}K_1 + a_{98}K_2 + a_{99}\alpha_{11} + a_{910}\alpha_{12} \\
&\quad + a_{911}\alpha_{21} + a_{912}\alpha_{22}; \\
> \alpha_{12} &:= a_{104}s_{in} + a_{105}k_1 + a_{106}k_2 + a_{107}K_1 + a_{108}K_2 + a_{109}\alpha_{11} \\
&\quad + a_{1010}\alpha_{12} + a_{1011}\alpha_{21} + a_{1012}\alpha_{22}; \\
> \alpha_{21} &:= a_{114}s_{in} + a_{115}k_1 + a_{116}k_2 + a_{117}K_1 + a_{118}K_2 + a_{119}\alpha_{11} \\
&\quad + a_{1110}\alpha_{12} + a_{1111}\alpha_{21} + a_{1112}\alpha_{22}; \\
> \alpha_{22} &:= a_{124}s_{in} + a_{125}k_1 + a_{126}k_2 + a_{127}K_1 + a_{128}K_2 + a_{129}\alpha_{11} \\
&\quad + a_{1210}\alpha_{12} + a_{1211}\alpha_{21} + a_{1212}\alpha_{22};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> f_1 &:= D(s_{in} - s) - \frac{k_1 m_1 s x_1}{s + K_1} - \frac{k_2 m_2 s x_2}{s + K_2}; \\
> f_2 &:= \left(\frac{m_1 s}{s + K_1} - \alpha_{11} x_1 - \alpha_{12} x_2 - D_1 \right) x_1; \\
> f_3 &:= \left(\frac{m_2 s}{s + K_2} - \alpha_{21} x_1 - \alpha_{22} x_2 - D_2 \right) x_2; \\
> g1 &:= stilde \frac{\partial f_1}{\partial s} + x_1 tilde \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2 tilde \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + s_{in} tilde \frac{\partial f_1}{\partial s_{in}} + k_1 tilde \frac{\partial f_1}{\partial k_1} \\
&\quad + k_2 tilde \frac{\partial f_1}{\partial k_2} + K_1 tilde \frac{\partial f_1}{\partial K_1} + K_2 tilde \frac{\partial f_1}{\partial K_2} + \alpha_{11} tilde \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{11}} + \alpha_{12} tilde \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{12}} \\
&\quad + \alpha_{21} tilde \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{21}} + \alpha_{22} tilde \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{22}}; \\
> g2 &:= stilde \frac{\partial f_2}{\partial s} + x_1 tilde \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2 tilde \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + s_{in} tilde \frac{\partial f_2}{\partial s_{in}} + k_1 tilde \frac{\partial f_2}{\partial k_1} \\
&\quad + k_2 tilde \frac{\partial f_2}{\partial k_2} + K_1 tilde \frac{\partial f_2}{\partial K_1} + K_2 tilde \frac{\partial f_2}{\partial K_2} + \alpha_{11} tilde \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_{11}} + \alpha_{12} tilde \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_{12}} \\
&\quad + \alpha_{21} tilde \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_{21}} + \alpha_{22} tilde \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_{22}}; \\
> g3 &:= stilde \frac{\partial f_3}{\partial s} + x_1 tilde \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + x_2 tilde \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + s_{in} tilde \frac{\partial f_3}{\partial s_{in}} + k_1 tilde \frac{\partial f_3}{\partial k_1} \\
&\quad + k_2 tilde \frac{\partial f_3}{\partial k_2} + K_1 tilde \frac{\partial f_3}{\partial K_1} + K_2 tilde \frac{\partial f_3}{\partial K_2} + \alpha_{11} tilde \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_{11}} + \alpha_{12} tilde \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_{12}} \\
&\quad + \alpha_{21} tilde \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_{21}} + \alpha_{22} tilde \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_{22}}; \\
> E_1 &:= (g_1 - a_{11} f_1 - a_{12} f_2 - a_{13} f_3)(s + K_1)^2 (s + K_2)^2; \\
> E_2 &:= (g_2 - a_{21} f_1 - a_{22} f_2 - a_{23} f_3)(s + K_1)^2 (s + K_2); \\
> E_3 &:= (g_3 - a_{31} f_1 - a_{32} f_2 - a_{33} f_3)(s + K_2)^2 (s + K_1); \\
> l1 &:= simplify(E1); &> l2 := simplify(E2); &> l3 := simplify(E3); \\
> collect(l1, D); &> collect(l2, D); &> collect(l3, D); \\
> collect(l1, x_1); &> collect(l2, x_1); &> collect(l3, x_1); \\
> collect(l1, x_2); &> collect(l2, x_2); &> collect(l3, x_2); \\
> collect(l1, s_{in}); &> collect(l2, s_{in}); &> collect(l3, s_{in}); \\
> collect(l1, k_1); &> collect(l2, k_1); &> collect(l3, k_1); \\
> collect(l1, k_2); &> collect(l2, k_2); &> collect(l3, k_2); \\
> collect(l1, K_1); &> collect(l2, K_1); &> collect(l3, K_1); \\
> collect(l1, K_2); &> collect(l2, K_2); &> collect(l3, K_2); \\
> collect(l1, \alpha_{11}); &> collect(l2, \alpha_{11}); &> collect(l3, \alpha_{11}); \\
> collect(l1, \alpha_{12}); &> collect(l2, \alpha_{12}); &> collect(l3, \alpha_{12}); \\
> collect(l1, \alpha_{21}); &> collect(l2, \alpha_{21}); &> collect(l3, \alpha_{21}); \\
> collect(l1, \alpha_{22}); &> collect(l2, \alpha_{22}); &> collect(l3, \alpha_{22});
\end{aligned}$$

7.3 Invariance du modèle AM2

$$\begin{aligned}
> a_{11} &:= \alpha; & > a_{21} &:= 0; & > a_{31} &:= 0; & > a_{41} &:= 0; & > a_{54} &:= 0; \\
> a_{12} &:= 0; & > a_{22} &:= \beta; & > a_{32} &:= 0; & > a_{42} &:= 0 & > a_{55} &:= \alpha; \\
> a_{13} &:= 0; & > a_{23} &:= 0; & > a_{33} &:= \gamma; & > a_{43} &:= 0; & > a_{56} &:= 0; \\
> a_{14} &:= 0; & > a_{24} &:= 0; & > a_{34} &:= 0; & > a_{44} &:= \delta; & > a_{57} &:= 0; \\
> a_{15} &:= 0; & > a_{25} &:= 0; & > a_{35} &:= 0; & ; > a_{45} &:= 0; & > a_{58} &:= 0; \\
> a_{16} &:= 0; & > a_{26} &:= 0; & > a_{36} &:= 0; & > a_{46} &:= 0; & > a_{59} &:= 0; \\
> a_{17} &:= 0; & > a_{27} &:= 0; & > a_{37} &:= 0; & > a_{47} &:= 0; & > a_{510} &:= 0; \\
> a_{18} &:= 0; & > a_{28} &:= 0; & > a_{38} &:= 0; & > a_{48} &:= 0; & > a_{511} &:= 0; \\
> a_{19} &:= 0; & > a_{29} &:= 0; & > a_{39} &:= 0; & > a_{49} &:= 0; & > a_{512} &:= 0; \\
> a_{110} &:= 0; & > a_{210} &:= 0; & > a_{310} &:= 0; & > a_{410} &:= 0; & > a_{64} &:= 0; \\
> a_{111} &:= 0; & > a_{211} &:= 0; & > a_{311} &:= 0; & > a_{411} &:= 0; & > a_{65} &:= 0; \\
> a_{112} &:= 0; & > a_{212} &:= 0; & > a_{312} &:= 0; & > a_{412} &:= 0; & > a_{66} &:= \gamma;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a_{67} &:= 0; & > a_{710} &:= 0; & > a_{94} &:= 0; & > a_{107} &:= 0; & > a_{1110} &:= 0; \\
> a_{68} &:= 0; & > a_{711} &:= 0; & > a_{95} &:= 0; & > a_{108} &:= 0; & > a_{1111} &:= \gamma; \\
> a_{69} &:= 0; & > a_{712} &:= 0; & > a_{96} &:= 0; & > a_{109} &:= 0; & > a_{1112} &:= 0; \\
> a_{610} &:= 0; & > a_{84} &:= 0; & > a_{97} &:= 0; & > a_{1010} &:= \alpha; & > a_{124} &:= 0; \\
> a_{611} &:= 0; & > a_{85} &:= 0; & > a_{98} &:= 0; & > a_{1011} &:= 0; & > a_{125} &:= 0; \\
> a_{612} &:= 0; & > a_{86} &:= 0; & > a_{99} &:= \gamma - \delta; & > a_{1012} &:= 0; & > a_{126} &:= 0; \\
> a_{74} &:= 0; & > a_{87} &:= 0; & > a_{910} &:= 0; & > a_{114} &:= 0; & > a_{127} &:= 0; \\
> a_{75} &:= 0; & > a_{88} &:= \gamma - \beta; & > a_{911} &:= 0; & > a_{115} &:= 0; & > a_{128} &:= 0; \\
> a_{76} &:= 0; & > a_{89} &:= 0; & > a_{912} &:= 0; & > a_{116} &:= 0; & > a_{129} &:= 0; \\
> a_{77} &:= \alpha - \beta; & > a_{810} &:= 0; & > a_{104} &:= 0; & > a_{117} &:= 0; & > a_{1210} &:= 0; \\
> a_{78} &:= 0; & > a_{811} &:= 0; & > a_{105} &:= 0; & > a_{118} &:= 0; & > a_{1211} &:= 0; \\
> a_{79} &:= 0; & > a_{812} &:= 0; & > a_{106} &:= 0; & > a_{119} &:= 0; & > a_{1212} &:= \frac{\gamma}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> s_1\text{tilde} &:= a_{11}s_1 + a_{12}x_1 + a_{13}s_2 + a_{14}x_2 + a_{15}s_{1in} + a_{16}s_{2in} + a_{17}k_1 \\
&\quad + a_{18}k_2 + a_{19}k_3 + a_{110}K_1 + a_{111}K_2 + a_{112}K_i; \\
> x_1\text{tilde} &:= a_{21}s_1 + a_{22}x_1 + a_{23}s_2 + a_{24}x_2 + a_{25}s_{1in} + a_{26}s_{2in} + a_{27}k_1 \\
&\quad + a_{28}k_2 + a_{29}k_3 + a_{210}K_1 + a_{211}K_2 + a_{212}K_i; \\
> s_1\text{tilde} &:= a_{31}s_1 + a_{32}x_1 + a_{33}s_2 + a_{34}x_2 + a_{35}s_{1in} + a_{36}s_{2in} + a_{37}k_1 \\
&\quad + a_{38}k_2 + a_{39}k_3 + a_{310}K_1 + a_{311}K_2 + a_{312}K_i; \\
> x_2\text{tilde} &:= a_{41}s_1 + a_{42}x_1 + a_{43}s_2 + a_{44}x_2 + a_{45}s_{1in} + a_{46}s_{2in} + a_{47}k_1 \\
&\quad + a_{48}k_2 + a_{49}k_3 + a_{410}K_1 + a_{411}K_2 + a_{412}K_i; \\
> s_{1in}\text{tilde} &:= a_{55}s_{1in} + a_{56}s_{2in} + a_{57}k_1 + a_{58}k_2 + a_{59}k_3 + a_{510}K_1 + a_{511}K_2 \\
&\quad + a_{512}K_i; \\
> s_{2in}\text{tilde} &:= a_{65}s_{1in} + a_{66}s_{2in} + a_{67}k_1 + a_{68}k_2 + a_{69}k_3 + a_{610}K_1 + a_{611}K_2 \\
&\quad + a_{612}K_i; \\
> k_1\text{tilde} &:= a_{75}s_{1in} + a_{76}s_{2in} + a_{77}k_1 + a_{78}k_2 + a_{79}k_3 + a_{710}K_1 + a_{711}K_2 \\
&\quad + a_{712}K_i; \\
> k_2\text{tilde} &:= a_{85}s_{1in} + a_{86}s_{2in} + a_{87}k_1 + a_{88}k_2 + a_{89}k_3 + a_{810}K_1 + a_{811}K_2 \\
&\quad + a_{812}K_i; \\
> k_3\text{tilde} &:= a_{95}s_{1in} + a_{96}s_{2in} + a_{97}k_1 + a_{98}k_2 + a_{99}k_3 + a_{910}K_1 + a_{911}K_2 \\
&\quad + a_{912}K_i; \\
> K_1\text{tilde} &:= a_{105}s_{1in} + a_{106}s_{2in} + a_{107}k_1 + a_{108}k_2 + a_{109}k_3 + a_{1010}K_1 \\
&\quad + a_{1011}K_2 + a_{1012}K_i; \\
> K_2\text{tilde} &:= a_{115}s_{1in} + a_{116}s_{2in} + a_{1117}k_1 + a_{1118}k_2 + a_{1119}k_3 + a_{1110}K_1 \\
&\quad + a_{1111}K_2 + a_{1112}K_i; \\
> K_i\text{tilde} &:= a_{125}s_{1in} + a_{126}s_{2in} + a_{1217}k_1 + a_{128}k_2 + a_{129}k_3 + a_{1210}K_1 \\
&\quad + a_{1211}K_2 + a_{1212}K_i; \\
> f_1 &:= D(s_{1in} - s_1) - \frac{k_1 m_1 s_1 x_1}{s_1 + K_1} - \frac{k_2 m_2 s x_2}{s + K_2}; \\
> f_2 &:= \left(\frac{m_1 s_1}{s_1 + K_1} - D \right) x_1; \\
> f_3 &:= D(s_{2in} - s_2) + \frac{k_2 m_1 s_1 x_1}{s_1 + K_1} - \frac{k_3 m_2 s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_2} \right)^2}; \\
> f_4 &:= \left(\frac{m_2 s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2}{K_2} \right)^2} - D \right) x_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> g1 &:= s_1 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} + x_1 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + s_2 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial s_2} + x_2 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + s_{1in} \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial s_{1in}} \\
&+ s_{2in} \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial s_{2in}} + k_1 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial k_1} + k_2 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial k_2} + k_3 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial k_3} \\
&+ K_1 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial K_1} + K_2 \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial K_2} + K_i \text{tilde} \frac{\partial f_1}{\partial K_i}; \\
> g2 &:= s_1 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial s_1} + x_1 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + s_2 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial s_2} + x_2 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + s_{1in} \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial s_{1in}} \\
&+ s_{2in} \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial s_{2in}} + k_1 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial k_1} + k_2 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial k_2} + k_3 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial k_3} \\
&+ K_1 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial K_1} + K_2 \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial K_2} + K_i \text{tilde} \frac{\partial f_2}{\partial K_i}; \\
> g3 &:= s_1 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial s_1} + x_1 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + s_2 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial s_2} + x_2 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + s_{1in} \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial s_{1in}} \\
&+ s_{2in} \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial s_{2in}} + k_1 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial k_1} + k_2 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial k_2} + k_3 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial k_3} \\
&+ K_1 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial K_1} + K_2 \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial K_2} + K_i \text{tilde} \frac{\partial f_3}{\partial K_i}; \\
> g3 &:= s_1 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial s_1} + x_1 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + s_2 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial s_2} + x_2 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial x_2} + s_{1in} \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial s_{1in}} \\
&+ s_{2in} \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial s_{2in}} + k_1 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial k_1} + k_2 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial k_2} + k_3 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial k_3} \\
&+ K_1 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial K_1} + K_2 \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial K_2} + K_i \text{tilde} \frac{\partial f_4}{\partial K_i};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> E_1 &:= (g_1 - a_{11}f_1 - a_{12}f_2 - a_{13}f_3 - a_{14}f_4)(s_1 + K_1)^2(s_2K_i^2 + K_2K_i^2 + s_2^2); \\
> E_2 &:= (g_2 - a_{21}f_1 - a_{22}f_2 - a_{23}f_3 - a_{24}f_4)(s_1 + K_1)^2(s_2K_i^2 + K_2K_i^2 + s_2^2); \\
> E_3 &:= (g_3 - a_{31}f_1 - a_{32}f_2 - a_{33}f_3 - a_{34}f_4)(s_1 + K_1)^2(s_2K_i^2 + K_2K_i^2 + s_2^2)^2; \\
> E_4 &:= (g_4 - a_{41}f_1 - a_{42}f_2 - a_{43}f_3 - a_{44}f_4)(s_1 + K_1)(s_2K_i^2 + K_2K_i^2 + s_2^2)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> l1 &:= \text{simplify}(E1); & > l2 &:= \text{simplify}(E2); & > l3 &:= \text{simplify}(E3); & > l4 &:= \text{simplify}(E4); \\
> \text{collect}(l1, D); & > \text{collect}(l2, D); & > \text{collect}(l3, D); & > \text{collect}(l4, D); \\
> \text{collect}(l1, x_1); & > \text{collect}(l2, x_1); & > \text{collect}(l3, x_1); & > \text{collect}(l4, x_1); \\
> \text{collect}(l1, x_2); & > \text{collect}(l2, x_2); & > \text{collect}(l3, x_2); & > \text{collect}(l4, x_2); \\
> \text{collect}(l1, s_{1in}); & > \text{collect}(l2, s_{1in}); & > \text{collect}(l3, s_{1in}); & > \text{collect}(l4, s_{1in}); \\
> \text{collect}(l1, s_{2in}); & > \text{collect}(l2, s_{2in}); & > \text{collect}(l3, s_{2in}); & > \text{collect}(l4, s_{2in}); \\
> \text{collect}(l1, k_1); & > \text{collect}(l2, k_1); & > \text{collect}(l3, k_1); & > \text{collect}(l4, k_1); \\
> \text{collect}(l1, k_2); & > \text{collect}(l2, k_2); & > \text{collect}(l3, k_2); & > \text{collect}(l4, k_2); \\
> \text{collect}(l1, k_3); & > \text{collect}(l2, k_3); & > \text{collect}(l3, k_3); & > \text{collect}(l4, k_3); \\
> \text{collect}(l1, K_1); & > \text{collect}(l2, K_1); & > \text{collect}(l3, K_1); & > \text{collect}(l4, K_1); \\
> \text{collect}(l1, K_2); & > \text{collect}(l2, K_2); & > \text{collect}(l3, K_2); & > \text{collect}(l4, K_2); \\
> \text{collect}(l1, K_i); & > \text{collect}(l2, K_i); & > \text{collect}(l3, K_i); & > \text{collect}(l4, K_i);
\end{aligned}$$

Chapitre 8

Annexe B

8.1 Stabilité des systèmes non linéaires

Théorème 8.1.1 [29] Soit (I) $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ un système linéaire sur \mathbb{R}^n , uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$.

Soit

$$\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (t, x) \mapsto \chi(t, x)$$

une fonction continue et $\chi(t, 0) = 0$ telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x\| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \|\chi(t, x)\| \leq \epsilon \|x\|, \forall t \geq T \quad (8.1)$$

Soit (II) $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \chi(t, x)$. Alors la solution $x \equiv 0$ de (II) est uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$.

Bibliographie

- [1] V. Alcaraz-González, A. Genovesi, J. Harmand, A. V. Gonzalez, A. Rapaport, et J. P. Steyer, *Robust exponential nonlinear observers for a class of lumped models useful in chemical and biochemical engineering - Application to a wastewater treatment process*. International Workshop on Application of Interval Analysis to Systems and Control, MISC'99, pp. 225-235. Girona, Espagne, 1999.
- [2] V. Alcaraz-González, J. Harmand, J. P. Steyer, A. Rapaport, V. Gonzalez-Alvarez et C. Pelayo-Ortiz, *Robust interval-based SISO regulation of an anaerobic reactor*. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, ROCOND2000, 6 pages sur CD-ROM, Prague, République Tchèque, 2000a.
- [3] V. Alcaraz-González, A. Maloum, J. Harmand, A. Rapaport, J.P. Steyer, V. González-Alvarez et C. Pelayo-Ortiz, *Robust interval-based SISO and SIMO regulation for a class of highly uncertain bioreactors : Application to the anaerobic digestion*. 39th IEEE Conference on Decision and Control, 6 pages sur CD-ROM, Sydney, Australie, 2000b.
- [4] V. Alcaraz-González, J. Harmand, A. Rapaport, J. P. Steyer, V. Gonzalez-Alvarez et C. Pelayo-Ortiz, *Robust interval-based SISO regulation of a highly uncertain anaerobic digester*. 8th International Conference on Computer Applications in Biotechnology, pp. 281-286, Quebec, Canada, 2001a.
- [5] V. Alcaraz-González, J. Harmand, A. Rapaport, J. P. Steyer, V. Gonzalez-Alvarez et C. Pelayo-Ortiz, *Robust interval-based SISO regulation under maximum uncertainty conditions in an anaerobic digester*, 2001 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 6 pages sur CD-ROM, Mexico, Mexique, 2001b.
- [6] G. Bastin, D. Dochain, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, 1990.

- [7] O. Bernard, G. Sallet, et A. Sciandra. *Nonlinear Observers for a Class of Biological Systems Application to Validation of Phytoplanktonic Growth Model*. IEEE Transactions on Automatic Control, 43 :1056-1065, 1998.
- [8] O. Bernard, Z. Hadj-Sadouk, D. Dochain, A. Genovesi and J. -P. Steyer, *Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process*, Biotechnology and Bioengineering, 75 : 424-438, 2001.
- [9] Ph. Bogaerts, *A hybrid asymptotic-Kalman observer for bioprocesses*, Bioprocess Engineering, 20, 249-255, 1999.
- [10] S. Bonnabel *Observateurs Asymptotiques Invariants : Théorie et exemples*, thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2007.
- [11] L. Chen, *Modelling, Identifiability and Control of Complex Biotechnological Systems*, PhD, Thesis, Catholic University, Louvain, Belgium, 1992.
- [12] G. Conte, C.H. Moog, A.M. Perdon *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*, Second edition, Springer, 2007.
- [13] R. Fekih Salem, *Modèles Mathématiques pour la compétition et la coexistence des espèces microbiennes dans un chémostat*, thèse de doctorat, École doctorale information structures systèmes - UMR MISTEA et école nationale d'ingénieurs de Tunis - LAMSIN, 2013.
- [14] J.P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*. IEEE Transactions on Automatic Control. vol 37(6), pp 875-880, 1992.
- [15] J.L. Gouzé, A. Rapaport and Z. Hadj-Sadok, *Interval observers for uncertain biological systems*. Ecological Modeling 133, 45-56, 2000a.
- [16] J. L. Gouzé, O. Bernard et Z. Hadj-Zadok, *Observers with modelling uncertainties for the wastewater treatment process*. Journées thématiques « Automatique et Environnement », 9-10 mars, Nancy, France, 2000b.
- [17] J. L. Gouzé, et V. Lemesle, *A bounded error observer with adjustable rate for a class of bioreactor models*. European Control Conference, ECC2001, 5 pages sur CD-ROM, Porto, Portugal, 2001.
- [18] J.P. Grover, *Resource Competition*, Chapman and Hall, 1997.
- [19] G. Hardin, *The competitive exclusion principle*, Science, 131, 1292-1297, 1960.

- [20] J. Hebeler, J.K. Schmidt, U. Reichl, and D. Flockerzi, *Coexistence in the chemostat as a result of metabolic by-products*, J. Math. Biol, 53, (4) :556-584, 2006.
- [21] A. Isodiri, *Nonlinear Control Systems* (3rd ed.), Springer, 1995.
- [22] I. Karafyllisa, Z. Jiang, *Reduced order dead-beat observers for the chemostat*, Nonlinear Analysis, 14, 340-351, 2013.
- [23] V. Lemesle et J. L. Gouzé *Hybrid bounded error observers for uncertain bioreactor models*, Bioprocess Biosyst Eng, 27, 311-318, 2005.
- [24] A. Maloum, *Commandes et observateurs robustes pour les systèmes non-linéaires incertains : Application à la dépollution biologique*. Thèse de Doctorat, 221 pages. Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice, 2001.
- [25] J. Monod, *La technique de culture continue theorie et application*, Ann. Inst. Pasteur, 79, 390-410, 1950.
- [26] A. Novick, and L. Szilard, *Description of the chemostat*, Science, 12, 715-716, 1950.
- [27] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second edition, Springer, 1993.
- [28] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge University Press, 1995.
- [29] H. Reinhard, *Equations différentielles*, Gautier-Villars, 1982.
- [30] P. Rouchon, S. Bonnabel, Ph. Martin, *Invariant Asymptotic Observers*, IEEE Trans. Automatic Control, vol.53, 2514-2526, 2008.
- [31] P. Rouchon, *Symmetry preserving asymptotic observers : theory and examples*, 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (CISA09), Zarzis, Tunisia, March 23-25, 2009.
- [32] P. Rouchon, K. Beauchard, *Dynamique et contrôle des systèmes non-linéaires*, cours, 2011.
- [33] M. Sbarciog, J. A. Moreno and A. Vande Wouwer, *Application of super-twisting observers to the estimation of state and unknown inputs in an anaerobic digestion system*, Water Science and Technology, 69, 414,421, 2014.
- [34] Hal L. Smith and P. Waltman, *The Theory of The Chemostat, Dynamics of Microbial Competition*, Cambridge University Press, 1995.

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'application sur la théorie des invariants, appliquée aux modèles des bioprocédés issue de la dépollution.

En considérant certaines constantes des systèmes étudiés comme contrôle virtuel, ceci afin de mettre en évidence le groupe linéaire pour que ces systèmes soient invariants.

Les observateurs construits dans ce travail, conçus pratiquement de toutes les propriétés du système de départ, présentent une très bonne vitesse de convergence. Enfin, les simulations montrent une robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

Abstract

This thesis is dedicated to the application of invariant theory applied to the bioprocesses models.

Considering some constants of the systems studied as a virtual control to highlight the linear group for that these systems are invariants.

Observers built in this work, designed practically all the properties of the original system, show very good convergence rate. Finally, the simulations show a robustness to measurement noise.

ملخص:

كرست هذه الأطروحة لدراسة استعمال نظرية الثوابت المطبقة على نماذج من الطرائق الحيوية الناتجة من الدراسات في إزالة التلوث .

نفترض أن بعض ثوابت الأنظمة، تحت الدراسة، عبارة عن عناصر تحكم افتراضية لتسليط الضوء على المجموعة الخطية لجعل هذه الأنظمة غير متغيرة .

العوامل المبنية في هذا العمل، التي تحاكي تقريبا جميع خصائص النظام الأصلي، تظهر سرعة تقارب جد جيدة. أخيرا، تظهر المحاكاة متانة معتبرة فيما يتعلق بالضوضاء المصاحبة للقياسات.