# Sur les algèbres de Lie d'opérateurs bornés

Chahira AICHI

# Table des Matières

# Chapître 1

# Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ( $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ) et $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire noté $< .,. >$. Soit

$$T : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$$

$$x \longmapsto T(x)$$

un opérateur linéaire borné (continu) i.e, $\exists C > 0$ tel que

$$\| T(x) \|_{\mathscr{H}} \leq C \| x \|_{\mathscr{H}}$$

Notons $\| T \|$ la norme d'opérateur associée, c'est-à-dire

$$\| T \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| T(x) \|_{\mathscr{H}}}{\| x \|_{\mathscr{H}}}$$

alors on a pour tout $T$ et $S$ ,

$$\| T.S \| \leq \| T \| . \| S \|$$

Rappelons les expressions suivantes pour la norme d'opérateur :

$$\| T \| = \inf \{c > 0 | \| T(x) \|_{\mathscr{H}} \leq c \| x \|_{\mathscr{H}}\}$$

$$\| T \| = \sup_{\|x\|_{\mathscr{H}} \leq 1} \| T(x) \|_{\mathscr{H}}$$

$$\| T \| = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{| < Tx, y > |}{\| x \|_{\mathscr{H}} \| y \|_{\mathscr{H}}}$$

L'algèbre de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur $\mathscr{H}$ est notée par $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Soit l'application

$$^{*} : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{B}(\mathscr{H})$$

$$T \longmapsto T^{*}$$

où $T^{*}$ désigne l'adjoint de $T$ qui est défini par

$$< Tx, y >_{\mathscr{H}} = < x, T^{*}y >_{\mathscr{H}}$$

pour tout $x$ et $y$ dans $\mathscr{H}$. C'est une involution sur $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ , qui vérifie les propriétés suivantes pour tout $T, S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :

$$(\alpha T + \beta S)^{*} = \overline{\alpha}T^{*} + \overline{\beta}S^{*}$$

$$(TS)^{*} = S^{*}T^{*} \qquad \text{et} \qquad (T^{*})^{*} = T$$

Maintenant montrons que $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ est une $C^{*}$-algèbre. On a par les propriétés de l'involution :

$$\| Tx \|^{2} = < Tx, Tx > = < T^{*}Tx, x > \leq \| T^{*}T \| \| x \|^{2}, \forall x \in \mathscr{H}$$

Donc

$$\| T \|^{2} \leq \| T^{*}T \| \; .$$

On a aussi :

$$\| T^{*}T \| \leq \| T^{*} \| \| T \| = \| T \|^{2}$$

car il est clair que $\| T \| = \| T^{*} \|$. Et par suite on trouve :

$$\| T^{*}T \| = \| T \|^{2} \; .$$

Alors $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ est une $C^{*}$-algèbre. On peut définir sur $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ un produit de Lie $[.,.]$ par

$$[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1 \qquad \text{pour} \quad T_1, T_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}).$$

Ce qui nous permet de voir $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ comme une algèbre de Lie. Introduisons enfin les notations suivantes :

1. $\varepsilon(T, T^{*})$ l'algèbre de Lie engendrée par $T$ et $T^{*}$ i.e, la plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ contenant $T$ et $T^{*}$.

2. $\mathscr{A}(Q, Q^*)$ l'algèbre associative engendrée par $Q$ et $Q^*$ i.e, la plus petite sous-algèbre associative de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ contenant $Q$ et $Q^*$.

Dans ce travail, d'une part nous avons développé certaines démonstrations de l'article intitulé "Lie algebra generated by bounded linear operators in Hilbert spaces" [10], et d'autre part nous avons étudié des exemples où nous avons généralisé celui dans ([10]) et ce en application du théorème3.1.8 du Chapître 3.
Notre but est de préciser la relation entre la structure d'une algèbre de Lie engendrée par un opérateur et son adjoint, et les propriétés (surtout spectrales) de cet opérateur.

# Chapître 2

# Algèbres de Lie

Nous allons rappeler brièvement quelques résultats sur la théorie des algèbres de Lie qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 2.1.1** *Une algèbre de Lie* $L = (V, [.,.])$*(de dimension finie) est un espace vectoriel* $V$ *(de dimension finie) sur un corps* $\mathbb{K}$ *muni d'un produit bilinéaire* $[.,.]$*:* $L \times L \to L$ *tel que :*

1. $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in V$ *. (L'antisymétrie)*
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in V$ *. (Identité de Jacobi)*

*Cette opération est appelée crochet de Lie .*

Pour deux parties $A$ et $B$ de $L$, on notera $[A, B]$ le sous-espace vectoriel engendré par les crochet $[x, y]$ avec $x \in A$ et $y \in B$.

**Exemple 2.1.2**
1. *Tout espace vectoriel* $V$ *sur* $\mathbb{K}$ *muni du crochet* $[x, y] = 0$ *,* $x, y \in V$ *, est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$*.*
2. *Soit* $V$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *. L'algèbre* $gl(V)$ *des endomorphismes de* $V$ *munie du crochet* $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ *est une algèbre de Lie de dimension* $(dimV)^2$ *sur* $\mathbb{K}$*. Par exemple si* $V = \mathbb{C}^n$ *(resp.* $V = \mathbb{R}^n$*), alors* $gl(V)$ *s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie* $gl(n, \mathbb{C})$ *(resp.* $gl(n, \mathbb{R})$*) des matrices carrées d'ordre n à coéfficients complexes (réels). Le crochet de Lie sur* $gl(n, \mathbb{C})$*(resp.* $gl(n, \mathbb{R})$*) est alors défini par le produit matriciel :* $[A, B] = A.B - B.A$*.*

3. *L'espace vectoriel* $sl(n, \mathbb{K})$ *des matrices carrées d'ordre* $n$*, à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *et de trace nulle muni du crochet* $[x, y] = xy - yx$*, est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* $n^2 - 1$.

**Définition 2.1.3** *Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie* $L$ *est un sous-espace vectoriel* $h$ *de* $L$ *stable par le crochet de Lie de* $L$ *i.e,* $[h, h] \subset h$.

**Définition 2.1.4** *Un sous-espace vectoriel* $h$ *d'une algèbre de Lie* $L$ *est un idéal de* $L$ *si* $[L, h] \subset h$.

**Exemple 2.1.5**

1. *Tout idéal d'une algèbre de Lie* $L$ *est une sous-algèbre de* $L$ *(l'inverse est en général faux). En particulier l'idéal* $[L, L]$ *est une sous-algèbre de Lie de* $L$*, appelée l'algèbre dérivée de* $L$.

2. *L'algèbre de Lie* $sl(n, \mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de Lie de* $gl(n, \mathbb{K})$*. C'est aussi un idéal.*

**Définition 2.1.6** *Une algèbre de Lie* $L$ *est dite abélienne (ou commutative) si* $[x, y] = 0$*, pour tout* $x$ *et* $y$ *dans* $L$.

**Définition 2.1.7** *Soit* $L$ *une algèbre de Lie , on définit la suite décroissante d'idéaux de* $L$ *par :*

$$L^0 := L \quad et \quad L^{i+1} := [L, L^i] \subseteq L^i.$$

*$L$ est dite nilpotente ssi il existe un entier* $p \geq 1$ *, tel que* $L^p = \{0\}$.

**Définition 2.1.8** *Soit* $L$ *une algèbre de Lie, on définit la suite décroissante d'idéaux de* $L$ *par:*

$$L^{(0)} := L \quad et \quad L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}] \subseteq L^{(i)}.$$

*Cette suite est appelée suite dérivée de* $L$*.* $L$ *est dite résoluble ssi il existe un entier* $p \geq 1$*, tel que* $L^{(p)} = \{0\}$.

**Remarque 2.1.9** *Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble .*

**Définition 2.1.10** *On appelle radical d'une algèbre de Lie* $L$*, noté* $Rad(L)$ *l'idéal résoluble qui contient tout idéal résoluble de* $L$ *(il existe toujours et il est unique).*

**Exemple 2.1.11** *Le radical de l'algèbre de Lie $sl(n, \mathbb{R})$ est trivial.*

**Définition 2.1.12** *Une algèbre de Lie $L$ est dite semi-simple si elle n'a aucun idéal résoluble non nul, i.e. $Rad(L) = \{0\}$.*
*Si $L$ n'est pas abélienne et n'a aucun idéal propre (autre que $\{0\}$ et $L$) , alors $L$ est dite simple.*

**Remarque 2.1.13** *Toute algèbre de Lie simple est semi-simple.*

**Exemple 2.1.14** *L'algèbre de Lie $sl(n, \mathbb{R})$ est simple et donc semi-simple pour tout $n \geq 2$.*

**Définition 2.1.15** *Un homomorphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire $\rho$ qui respecte les crochets de Lie, i.e :*

$$\rho([.,.]) = [\rho(.), \rho(.)].$$

**Définition 2.1.16** *Une représentation de $L$ dans un espace vectoriel $V$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie $\rho : L \longrightarrow gl(V)$ . La dimension de cette représentation est la dimension de $V$ sur $\mathbb{K}$.*

**Définition 2.1.17** *L'homomorphisme d'algèbre de Lie $L \longrightarrow gl(L)$ défini par $x \longmapsto [x, .]$ est appelé la représentation adjointe de $L$ et elle est notée par ad.*

**Théorème 2.1.18** *Toute algèbre de Lie $L$ sur un corps $\mathbb{K}$ admet la décomposition de Levi :*

$$L = R \oplus G$$

*Où $R$ le radical de $L$, et $G$ une sous-algèbre semi-simple de $L$ ( $G$ est un facteur de Levi de $L$ ) .*

**Démonstration.** ([8] , Proposition 1, Leçon 20)
■

**Exemple 2.1.19**

$$gl(n, \mathbb{C}) = sl(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.id$$

*Où $gl(n, \mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre $n$ à coéfficients complexes, $sl(n, \mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre $n$, à coéfficients dans $\mathbb{C}$ et de trace nulle, id la matrice identité d'ordre $n$.*

# Chapître 3

# Généralités sur $\varepsilon(T,T^*)$

Dans ce chapître nous allons établir, en suivant ([10]), que lorsque $\varepsilon(T,T^*)$ est de dimension finie, on peut récupérer des informations sur la structure de $T$ à partir de la structure de $\varepsilon(T,T^*)$, et on peut obtenir la structure de $\varepsilon(T,T^*)$ par les propriétés de $T$, en voici quelques exemples préliminaires.

1. Si $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est un opérateur auto-adjoint i.e : $T = T^*$, on a :

   $$\varepsilon(T,T^*) = \{\alpha T+\beta T^*+\gamma[T,T^*]+\delta[T,[T,T^*]]+\mu[T^*,[T,T^*]]+\lambda[T,[T,[T,T^*]]]+$$

   $$+...+\xi[T,[T[T^*,[....[T,T^*]]]....]]+...,/\alpha,\beta,\gamma,...,\xi \in \mathbb{C}\}$$

   Donc, à cause de $T = T^*$, on aura :

   $$\varepsilon(T,T^*) = \{\mu T/\mu \in \mathbb{C}\}$$

   D'où : la dimension d'un algèbre de Lie $\varepsilon(T,T^*)$ qui engendrée par un opérateur $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ auto-adjoint est égale à 1 .

2. Si $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est un opérateur normal i.e, $TT^* = T^*T$, alors

   $$\varepsilon(T,T^*) = \{\alpha T + \beta T^*, /\alpha,\beta \in \mathbb{C}\}$$

   Cette algèbre peut être de dimension 1. Voyons ceci sur l'exemple suivant : si $T^* = \lambda T$ alors

   $$T = (T^*)^* = (\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^* = \overline{\lambda}.\lambda T \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\theta}$$

   D'où

   $$T^* = e^{i\theta}T$$

$$\Rightarrow e^{-i\theta/2}T^* = e^{i\theta/2}T \Rightarrow (e^{i\theta/2}T)^* = e^{i\theta/2}T$$

c'est-à-dire que l'opérateur $e^{i\theta/2}T$ est auto-adjoint. Ceci nous montre que la construction d'un opérateur vérifiant $T^* = \lambda T$ peut se faire en prenant un opérateur $S$ auto-adjoint et poser $T = e^{i\varphi}S$. De là on peut conclure que

$$\varepsilon(T, T^*) = \{(\alpha + \beta e^{-2i\varphi})T, /\alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

et donc la dimension de $\varepsilon(T, T^*)$ est éga à 1 , avec T est un opérateur normal mais non auto-adjoint. D'une manière générale si $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est un operateur normal, alors dim $\varepsilon(T, T^*) \leqslant 2$. Cela nous donne en particulier que $\varepsilon(T, T^*)$ est résoluble et commutative.

Posons $\varepsilon^1(T, T^*) := \varepsilon(T, T^*)$ , et $\varepsilon^k(T, T^*) := [\varepsilon(T, T^*), \varepsilon^{k-1}(T, T^*)]$ pour $k$ entier $\geq 1$.

## 3.1 Résultats généraux

**Lemme 3.1.1** *Chaque $S \in \varepsilon^k(T, T^*)$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme :*

$$adT_1 adT_2 ... adT_m(T_j)$$

*où $m$ est un entier $\geq k - 1$ , et*

$$T_1, T_2, ..., T_m, T_j \in \{T, T^*\}$$

*Quand $m = 0$, on convient que $adT_0$ est égal à l'opérateur identique.*

**Démonstration.** La démonstration se fait par récurrence sur l'entier $k$. Soit $P(k)$ la propriété précédente.
1.Montrons que $P(1)$ est vraie. On a

$$\varepsilon(T, T^*) = \{\alpha T + \beta T^* + \gamma[T, T^*] + \delta[T, [T, T^*]] + \mu[T^*, [T, T^*]] + \lambda[T, [T, [T, T^*]]] +$$

$$+ ... + \xi[T, [T[T^*, [....[T, T^*]]]....]] + ..., /\alpha, \beta, \gamma ..., \xi \in \mathbb{C}\}$$

Donc on a bien pour $S \in \varepsilon(T, T^*)$

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + ... + \alpha_n S_n$$

avec $S_i = adT_1adT_2...adT_m(T_j)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $T_1, T_2, ..., T_m, T_j \in \{T, T^*\}$, m entier $\geq 0$.
2.On suppose que $P(k)$ est vraie et on montre $P(k+1)$. D'abord on a

$$\varepsilon^{k+1}(T, T^*) := [\varepsilon(T, T^*), \varepsilon^k(T, T^*)].$$

Soient $v \in \varepsilon(T, T^*)$ et $w \in \varepsilon^k(T, T^*)$. Alors $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$, avec $v_i = adT_1adT_2...adT_m(T_\xi)$ et $T_1, T_2, ..., T_m, T_\xi \in \{T, T^*\}$, m entier $\geq 0$.
Puis $w = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + ... + \gamma_n w_{n'}$, avec $w_j = adU_1adU_2...adU_{m'}(U_\rho)$ et $U_1, U_2, ..., U_{m'}, U_\rho \in \{T, T^*\}$, $m^{'}$ entier $\geq k-1$.
On a $[v_i, w_j] \in \varepsilon^{k+1}(T, T^*)$. Pour $m \geq 0$, $m^{'} \geq k-1$ on peut écrire

$$[v_i, w_j] = [adT_1(adT_2...adT_m(T_\xi)), adU_1adU_2...adU_{m'}(U_\rho)]$$

$$\begin{aligned} [v_i, w_j] = {} & adT_1ad(adT_2...adT_m(T_\xi))adU_1adU_2...adU_{m'}(U_\rho) - \\ & ad(adT_2adT_3...adT_m(T_\xi))adT_1adU_1adU_2...adU_{m'}(U_\rho) \end{aligned}$$

et ce grâce à l'identité $ad([X, Y]) = [adX, adY]$. On exprime ensuite

$$ad(adT_2adT_3...adT_m(T_\xi))$$

comme combinaison de produits de $adT_q$, toujours grâce à l'identité précédente. On remarque alors qu'on augmente toujours $m'$ d'au moins une unité, ce qui est le résultat voulu. ■

**Définition 3.1.2** *Une algèbre de Lie L d'opérateurs est dite auto-adjointe si:*

$$S \in L \Rightarrow S^* \in L$$

*où* $S^*$ *est l'adjoint de S.*

**Lemme 3.1.3** *Pour tout* $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\varepsilon(T, T^*)$ *et* $\varepsilon^2(T, T^*) = [\varepsilon(T, T^*), \varepsilon(T, T^*)]$ *sont des algèbres de Lie auto-adjointes.*

**Démonstration.** Par le lemme 3.1.1, pour $S \in \varepsilon(T, T^*)$ , on a :
$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + ... + \alpha_n S_n$ , avec $S_i = adT_1adT_2...adT_m(T_j)$, $m$ entier $\geqslant 0$ et $T_1, T_2, ....T_m, T_j \in \{T, T^*\}$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Pour tout $R_1, R_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, on a :

$$([R_1, R_2])^* = (R_1R_2)^* - (R_2R_1)^* = R_2^*R_1^* - R_1^*R_2^* = -[R_1^*, R_2^*] \tag{3.1}$$

Donc

$$(adR_1(R_2))^* = -ad(R_1^*)(R_2^*)$$

Soit l'application suivante :

$$\mathscr{C} : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$$

$$T \to T^*$$

Donc

$$\mathscr{C} \circ ad(R) = -(ad(R^*)) \circ \mathscr{C}$$

Par exemple si $Z = adT_1 adT_2(T_j)$ , avec $T_1, T_2, T_j \in \{T, T^*\}$, alors

$$Z^* = -ad(T_1^*) \circ \mathscr{C}(adT_2(T_j)) = (-1)^2(ad(T_1^*))ad(T_2^*)(T_j^*) = ad(T_1^*)ad(T_2^*)(T_j^*)$$

Alors , pour $S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + ... + \alpha_n S_n$ on aura

$$S^* = \overline{\alpha_1} S_1^* + \overline{\alpha_2} S_2^* + ... + \overline{\alpha_n} S_n^*$$

avec

$$S_i^* = (adT_1 adT_2 ... adT_m(adT_j))^* = -ad(T_1^*)(adT_2 ... adT_m(T_j))^*$$

$$= (-1)^2 ad(T_1^*)ad(T_2^*)(adT_3 ... adT_m(T_j))^*$$

$$= (-1)^m ad(T_1^*)ad(T_2^*)ad(T_3^*) ... ad(T_m^*)(T_j^*).$$

Comme

$$T_1, T_2, ... T_m, T_j \in \{T, T^*\}$$

alors

$$T_1^*, T_2^*, ... T_m^*, T_j^* \in \{T, T^*\}$$

et donc $S^* \in \varepsilon(T, T^*)$. Ceci montre que $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie auto-adjointe. Pour $\varepsilon(T, T^*)^2$ c'est une conséquence de ce qui vient d'être établi et de l'identité (3.1). ■

**Proposition 3.1.4** *Si dim $\varepsilon(T, T^*) < +\infty$ et $\varepsilon(T, T^*)$ est résoluble, alors $T$ est un opérateur normal. De plus, $\varepsilon(T, T^*)$ est commutative.*

**Démonstration.** On a $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie résoluble. Par ([1], Section 30, Thm3), tous les éléments dans $[\varepsilon(T, T^*), \varepsilon(T, T^*)]$ sont des opérateurs quasinilpotents; en particulier $[T, T^*]$ l'est i.e,

$$\sigma([T, T^*]) = \{0\}$$

On a $([T, T^*])^* = [T, T^*]$, c'est-à-dire $[T, T^*]$ est auto-adjoint, et par suite est normal.
Soit $r$ le rayon spectral de $T$ i.e,

$$r(T) = \lim_{n \to +\infty} (\| T \|^n)^{\frac{1}{n}}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} [T, T^*]^* = [T, T^*] \Rightarrow r([T, T^*]) = \| [T, T^*] \| \\ \sigma([T, T^*]) = \{0\} \Rightarrow r([T, T^*]) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow [T, T^*] = 0.$$

D'où, $T$ est un opérateur normal, et par suite $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie commutative. ■

**Lemme 3.1.5** *Si dim* $\varepsilon(T, T^*) < +\infty$*, et* $\varepsilon(T, T^*) = R \oplus G$ *est la décomposition de Levi , alors* $[R, G] = \{0\}$.

**Démonstration.** Par ([1]. Section 19,Thm 3 ), pour montrer que $[R, G] = \{0\}$, il suffit de montrer que $\varepsilon(T, T^*)$ ne contient pas un idéal commutatif non nul de dimension finie, constitué d'opérateurs nilpotents . On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose au contraire que l'idéal existe et on le note par $I$. Pour chaque opérateur non nul $S \in I$, on a

$$S^* \in \varepsilon(T, T^*)(\text{car } \varepsilon(T, T^*) \text{ est auto-adjointe }) \text{ et } I \text{ idéal} \Rightarrow [S^*, I] \subset I$$

En particulier on a $[S^*, S] \in I$ et comme les éléments de $I$ sont nilpotents par hypothèse alors $[S^*, S]$ sera nilpotent. Ce qui donne que son rayon spectral $r([S^*, S]) = 0$. D'autre part, et grâce l'identité (3.1), $[S^*, S]$ est auto-adjoint. Ce qui donne que son rayon spectral $r([S^*, S]) = \| [S^*, S] \|$. Il en résulte que $[S^*, S] = 0$ i.e, $S$ normal. Mais de nouveau $r(S) = 0$ à cause du fait que tous les éléments de $I$ sont nilpotents; et $r(S) = \| S \|$ car il est normal. D'où $S = 0$. Ce qui contredit notre hypothèse de travail. ■

**Lemme 3.1.6** *Si dim* $\varepsilon(T, T^*) < +\infty$*, et* $\varepsilon(T, T^*) = R \oplus G$ *est la décomposition de Levi, alors tous les éléments dans* $R$ *sont des opérateurs normaux.*

**Démonstration.** Considérons $\varepsilon(T, T^*) = R \oplus G$ la décomposition de Levi. Pour chaque élément $N$ dans $R \Rightarrow N \in \varepsilon(T, T^*)$, et comme $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre auto-adjointe, donc $N^* \in \varepsilon(T, T^*)$.
On peut écrire $N^* = M + L$ , avec $M \in R$ et $L \in G$ .

Alors $N^* - L = M$ , avec $M \in R$. Posons, pour une commodité de notation, $V = -L$ de sorte que $N^* + V \in R$.
D'après le lemme (3.1.5) : $[R, G] = \{0\}$, alors $[N, V] = 0$.
Comme $[N^*, V] + [V, V] = [N^* + V, V] = 0$, alors : $[N^*, V] = 0$.
Pour tout $S \in [\varepsilon(N, N^*), \varepsilon(N, N^*)]$, par le lemme (3.1.1),

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + ... + \alpha_n S_n$$

avec $S_i = adN_1 adN_2 ... adN_m(N_j)$, $m$ entier $\geq 1$ et $N_1, N_2, ....N_m, N_j \in \{N, N^*\}$.
Dans l'expression de $S$, si on change $N_1, N_2, ....N_m, N_j$ qui sont egaux à $N^*$ par $N^* + V$, on peut obtenir un nouvel opérateur

$$S' \in [\varepsilon(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)]$$

où $\varepsilon(N, N^* + V)$ est la plus petite algèbre de Lie qui contient $N$ , $N^* + V$.
On rappelle qu'on a $[N, V] = 0$, et $[N^*, V] = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon(N, N^* + V) &= \{\alpha N + \beta(N^* + V) + \gamma[N, N^* + V] + \delta[N, [N, N^* + V]] + \\ &\quad \lambda[N^* + V, [N, N^* + V]] + ...|\alpha, \beta, \gamma, \delta, ... \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\alpha N + \beta(N^* + V) + \gamma[N, N^*] + \delta[N, [N, N^*]] + \lambda[N^*, [N, N^*]] \\ &\quad + ...|\alpha, \beta, \gamma, \delta, ... \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

Donc on trouve que $S' = S$, et donc $S \in [\varepsilon(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)]$. Par suite :

$$[\varepsilon(N, N^*), \varepsilon(N, N^*)] \subset [\varepsilon(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)]$$

Réciproquement, pour tout $P \in \varepsilon[(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)]$, par le lemme (3.1.1),

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$$

avec $P_i = adN_1 adN_2 ... adN_m(N_j)$, m entier $m \geqslant 1$ et $N_1, N_2, ....N_m, N_j \in \{N, N^* + V\}$.
Comme on a $[N, V] = 0$, et $[N^*, V] = 0$, donc $P \in [\varepsilon(N, N^*), \varepsilon(N, N^*)]$, et par suite :

$$[\varepsilon(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)] \subset [\varepsilon(N, N^*), \varepsilon(N, N^*)]$$

De là

$$[\varepsilon(N, N^*), \varepsilon(N, N^*)] = [\varepsilon(N, N^* + V), \varepsilon(N, N^* + V)] \subset [R, R]$$

Comme on a $R$ résoluble et de dimension finie , alors $\varepsilon(N,N^*)$ est résoluble et de dimension finie .
Alors $N$ est un opérateur normal $\forall N \in R$ par la Proposition 3.1.4 ■

**Lemme 3.1.7** *Si* $\dim \varepsilon(T,T^*) < +\infty$*, et* $\varepsilon(T,T^*) = R \oplus G$ *est la décomposition de Levi, alors* $R$ *est commutative, de plus* $R$ *et* $G$ *sont auto-adjointes.*

**Démonstration.** 1) $R$ est commutative ?
Il est clair que $R$ est une algèbre d'opérateurs linéaires bornés i.e,
$*$ Si on a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, et $A, B \in R \Rightarrow \alpha A + \beta B \in R$
$*$ Si on a $A, B \in R \Rightarrow [A, B] \in R$
Par le lemme 3.1.6, on a que tous les éléments de $R$ sont des opérateurs normaux. Soit $A, B \in R$, donc $A + B \in R$, et $A + iB \in R$. Par suite $A + B$, et $A + iB$ sont normaux, donc

$$[(A+B)^*, (A+B)] = 0$$

$$\Rightarrow [A^*, A] + [A^*, B] + [B^*, A] + [B^*, B] = 0$$
$$\Rightarrow [A^*, B] + [B^*, A] = 0 \qquad (\diamond)$$

Et on a aussi

$$[(A+iB)^*, (A+iB)] = 0$$
$$\Rightarrow [A^*, A] + i[A^*, B] - i[B^*, A] + [B^*, B] = 0$$
$$\Rightarrow [A^*, B] - [B^*, A] = 0 \qquad (\diamond\diamond)$$

Par une sommation entre $(\diamond)$ et $(\diamond\diamond)$ on trouve

$$2[A^*, B] = 0 \Rightarrow A^*B = BA^*$$

D'où $A^*$ commute avec B. On utilise le Théorème de Fuglede (voir [11]) qui dit :

Si A est normal et $AB = BA$, alors $A^*B = BA^*$.

Comme $A^*$ est un opérateur normal, donc A est commute avec B. Alors $R$ est une algèbre de Lie commutative.
2) $R$ est auto-adjointe ?
Soit $N \in R$, donc $N^* \in \varepsilon(T,T^*)$, puisque $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie auto-adjointe. D'autre part $N$ est un opérateur normal (lemme 3.1.6).

Soit $L := \text{span}\{N^*\} + R$. Puisque $R$ est commutative ($[R, R] = \{0\}$), et $[R, G] = \{0\}$, alors $[R, \varepsilon(T, T^*)] = \{0\}$. D'où $[N, S] = 0$ pour tout $S \in \varepsilon(T, T^*)$. Par le Théorème de Fuglede, on peut dire que puisque $N$ commute avec $S$, et $N$ est normal alors $N^*$ commute avec $S$ i.e, $[N^*, S] = 0$. Par conséquent $[N^*, \varepsilon(T, T^*)] = \{0\}$. Donc

$$[L, \varepsilon(T, T^*)] = \{0\},$$

Ainsi L est un idéal résoluble de $\varepsilon(T, T^*)$. Si on avait $N^* \notin R$, ce sera une contradiction, puisque le radical $R$ est le plus grand idéal résoluble de $\varepsilon(T, T^*)$. Donc $N^* \in R$ i.e, $R$ est auto-adjointe.
3) $G$ est auto-adjointe ?
Nous avons déjà établi que $[R, R] = \{0\}$ et $[R, G] = \{0\}$. Maintenant puisque $G$ est semi-simple alors

$$G = [G, G] = [R \oplus G, R \oplus G] = [\varepsilon(T, T^*), \varepsilon(T, T^*)] = \varepsilon(T, T^*)^2$$

Et comme $\varepsilon(T, T^*)^2$ est une algèbre de Lie auto-adjointe, alors $G$ le sera. ■

Maintenant on va donner le Théorème principal du cette section.

**Théorème 3.1.8** *L'algèbre de Lie* $\varepsilon(T, T^*)$ *est de dimension finie si et seulement si :* $T = N + Q$ *,* $[N, Q] = 0$*, où* $N$ *est un opérateur normal, et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.*

**Démonstration.** ($\Leftarrow$) On suppose que $T = N + Q$, $[N, Q] = 0$, où $N$ est un opérateur normal, et $\varepsilon(Q, Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. A partir de $[N, Q] = 0$, et $N$ un opérateur normal, et par le Théorème de Fuglede, on aura $[N^*, Q] = 0$ puis $[N, Q^*] = 0$. On aura aussi $[N^*, Q^*] = 0$ partant de $[N, Q] = 0$. Alors on obtient

$$\varepsilon(T, T^*) \subset \varepsilon(N, N^*) \oplus \varepsilon(Q, Q^*).$$

Puisque $N$ est un opérateur normal alors $\varepsilon(N, N^*)$ est une algèbre de Lie commutative de dimension $\leq 2$. Et comme $\varepsilon(Q, Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, alors $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie de dimension finie.
($\Rightarrow$)Si $\varepsilon(T, T^*)$ est de dimension finie, et $\varepsilon(T, T^*) = R \oplus G$ est la décomposition de Levi , alors $[R, G] = \{0\}$ (lemme 3.1.5). Donc on peut écrire $T$ , $T^*$ sous la forme :

$T = N + Q$ , avec $N \in R$, $Q \in G$ et $T^* = N^* + Q^*$. Comme $R$ et $G$ sont des algèbre de Lie auto-adjointes, donc on a $N^* \in R$, et $Q^* \in G$.
Soit $e \in \varepsilon(T, T^*)$. Par le lemme 3.1.1, on a $e = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + ... + \gamma_n e_n$, avec $e_i = (adT_1)(adT_2)...(adT_m)(T_j)$ et $T_1, T_2, ..., T_m, T_j \in \{T, T^*\}$, $m \geq 0$.
Soit $T_k = N_k + Q_k$ pour $k \in \{1, 2, ..., m, j\}$ alors

$$\begin{aligned} e_i &= (adT_1)(adT_2)...(adT_m)(T_j) \\ &= (ad(N_1 + Q_1)ad(N_2 + Q_2)...ad(N_m + Q_m))(N_j + Q_j) \\ &= (adN_1 + adQ_1)(adN_2 + adQ_2)...(adN_m + adQ_m)(N_j + Q_j) \end{aligned}$$

Comme on a $[N, Q] = 0$ et $[N, Q^*] = 0$ alors

$$(adN_m + adQ_m)(N_j + Q_j) = (adN_m)(N_j) + (adQ_m)(Q_j)$$

Et par suite on trouve

$$e_i = adN_1 adN_2 ... adN_m(N_j) + adQ_1 adQ_2 ... adQ_m(Q_j)$$

Si $e \in R$, alors $e_i = adN_1 adN_2 ... adN_m(N_j)$, et donc $e \in \varepsilon(N, N^*)$. Ce qui donne $R \subset \varepsilon(N, N^*)$. D'autre part comme on a $N \in R$ , et $N^* \in R$, alors $R \supset \varepsilon(N, N^*)$. D'où $\varepsilon(N, N^*) = R$.
Si $e \in G$, alors $e_i = adQ_1 adQ_2 ... adQ_m(Q_j)$, et donc $e \in \varepsilon(Q, Q^*)$. Ce qui donne $G \subset \varepsilon(Q, Q^*)$. D'autre part comme on a $Q \in G$, et $Q^* \in G$, alors $G \supset \varepsilon(Q, Q^*)$. D'où $\varepsilon(Q, Q^*) = G$.
$N$ est un opérateur normal par la proposition 3.1.5, et $\varepsilon(Q, Q^*) = G$, donc $\varepsilon(Q, Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. ∎

## 3.2 Algèbres de Lie classiques

Nous allons rappeler la définition de certaines algèbres de Lie classiques de dimension finie. Ceci nous permettra d'identifier les algèbres de dimension finie que nous rencontrerons dans l'étude de l'exemple dans la section qui suivera. Soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On a les quatre types d'algèbres de Lie classiques (voir [4] , chapître 1, 2.linear Lie Algebras ): $A_n$ , $B_n$ , $C_n$, $D_n$.

1. $A_n$ : dans ce cas $\dim V = n + 1$, l'algèbre est notée par $sl(V)$ ou $sl(n + 1, \mathbb{C})$. C'est l'ensemble des endomorphismes de $V$ a trace nulle. $sl(n + 1, \mathbb{C})$ est appelée l'algèbre linéaire spéciale.

$$sl(n + 1, \mathbb{C}) = \{X \in gl(n + 1, \mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$$

$\dim sl(n+1, \mathbb{C}) = (n+1)^2 - 1$.

2. $B_n$ : $\dim V = 2n+1$, l'algèbre est dite orthogonale (impaire), notée $o(V)$ ou $o(2n+1, \mathbb{C})$. Elle est définie comme suit
$$o(2n+1, \mathbb{C}) = \{X \in gl(2n+1, \mathbb{C}) \mid X^t J + JX = 0\}$$
avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$, où $I_n$ est la matrice identique $n \times n$. On a que la trace des éléments de $o(2n+1, \mathbb{C})$ est nulle et $\dim o(2n+1, \mathbb{C}) = 2n^2 + n$.

3. $C_n$ : $\dim V = 2n$, c'est l'algèbre symplectique $sp(V)$ ou $sp(2n, \mathbb{C})$. Elle est définie comme suit
$$sp(2n, \mathbb{C}) = \{X \in gl(2n, \mathbb{C}) \mid X^t J + JX = 0\}$$
avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, où $I_n$ est la matrice identique $n \times n$. On a que la trace des éléments de $sp(2n, \mathbb{C})$ est nulle et $\dim sp(2n, \mathbb{C}) = 2n^2 + n$.

4. $D_n$ : $\dim V = 2n$, c'est l'algèbre orthogonale (paire) $o(V)$ ou $o(2n, \mathbb{C})$. La construction de $D_n$ est identique avec $B_n$ sauf la $\dim V = 2n$
$$o(2n, \mathbb{C}) = \{X \in gl(2n, \mathbb{C}) \mid X^t J + JX = 0\}$$
avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, où $I_n$ est la matrice identique $n \times n$. On a que la trace des éléments de $o(2n+1, \mathbb{C})$ est nulle et $\dim o(2n+1, \mathbb{C}) = 2n^2 - n$.

Toutes ces algèbre de Lie sont simples. En petite dimension il existe des isomorphismes, par exemple :
$$C_1 \cong B_1 \cong A_1, C_2 \cong B_2, D_2 \cong A_1 \oplus A_1, D_3 \cong A_3$$
On a $D_1$ est abélienne de dimension 1. Soit $\mathscr{M}(n, \mathbb{C})$ l'ensemble du matrices carrées $n \times n$ à coéfficients dans $\mathbb{C}$. Voici quelques algèbres de Lie semi-simples de dimension petite :

- dimension 3 : il y a $sl(2, \mathbb{C})$, $o(3, \mathbb{C})$ et $sp(2, \mathbb{C})$
- dimension 6 : il y a $o(4, \mathbb{C})$, et $o(3, \mathbb{C}) \oplus o(3, \mathbb{C})$
- dimension 8 : il y a $sl(3, \mathbb{C})$

## 3.3 Etude d'un exemple

Dans cette section nous avons généralisé l'exemple dans ([10]) où les auteurs ont présenté un cas d'opérateur de rang 2. Dans ce travail, nous allons étudier un exemple similaire mais de rang 3.

**Exemple 3.3.1** *Soit* $\mathscr{H}$ *un espace de Hilbert séparable, et* $\{e_n\}$ *une base orthonormale i.e,* $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$*, où* $\delta_{ij}$ *est le symbole de Kronecker. Soit* $M = span\{e_1, e_2, e_3\}$ *de sorte que* $\dim M = 3$ *et* $\mathscr{H} = M \oplus M^{\perp}$*. Soit* $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *tel que* $T = T_1 \oplus 0$ *i.e,*

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*où* $T_1 : M \longrightarrow M$ *i.e,* $T_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *une matrice dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$*. Il est clair que* $T^* = T_1^* \oplus 0$*, où* $T_1^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{d} & \overline{g} \\ \overline{b} & \overline{e} & \overline{h} \\ \overline{c} & \overline{f} & \overline{i} \end{pmatrix}$*. Remarquons que* $T$ *est un opérateur compact car de rang fini. Il est même à trace*

$$tr(T) = tr(T_1) = a + e + i$$

*L'algèbre de Lie* $\varepsilon(T, T^*)$ *est de dimension finie et*

$$\dim \varepsilon(T, T^*) \leqslant 9$$

*L'étude qui va suivre concerne la décomposition de l'opérateur* $T$ *par application du théorème 3.1.8, selon la dimension de* $\varepsilon(T, T^*)$*.*

1. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 1$ *:*
   *Alors* $\varepsilon(T, T^*)$ *est une algèbre de Lie triviale (donc résoluble). D'où* $T$ *est un opérateur normal de la forme* $T = e^{i\phi} S$ *avec* $S$ *auto-adjoint.*

2. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 2$ *:*
   *Alors* $\varepsilon(T, T^*)$ *est une algèbre de Lie résoluble. Donc* $T$ *est un opérateur normal avec* $T$ *et* $T^*$ *linéairement indépendants.*

3. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 3$ *:*
   *Soit* $\varepsilon(T, T^*) = G \oplus R$ *la décomposition de Levi. Comme la partie semi-simple* $G$ *(si elle est* $\neq \{0\}$*) a une dimension* $\geqslant 3$ *(d'après les cas d'algèbres de petite dimension) et que la partie résoluble* $R$ *est de dimension* $\leqslant 2$*, alors la seule possibilité dans ce cas est que* $R = \{0\}$ *et* $\varepsilon(T, T^*) = G$*. C'est-à-dire que* $T_1$ *et son adjoint engendrent une algèbre isomorphe à* $o(3, \mathbb{C})$ *dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$*. D'autre part, grâce aux résultats du chapître 4 ( proposition 4.1.2), on peut affirmer que la partie diagonalisable de* $T_1$ *(dans la décomposition de Jordan de* $T_1$*) est nulle, et donc* $T_1$ *est nilpotent. D'où* $T$ *est nilpotent. En particulier* $\sigma(T) = \{0\}$*.*

4. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 4$ *:*
   *La seule possibilité dans ce cas est* $\dim G = 3$ *et* $\dim R = 1$*. D'où on peut écrire* $T$ *sous la forme*
   $$T = N + Q$$
   *où* $N$ *est un opérateur normal de la forme* $N = e^{i\phi} S$ *avec* $S$ *auto-adjoint, et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *semi-simple. D'après le cas précédent,* $Q$ *est nilpotent.*

5. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 5$ *:*
   *La seule possibilité dans ce cas est* $\dim G = 3$ *et* $\dim R = 2$*. D'où on peut écrire* $T$ *sous la forme*
   $$T = N + Q$$
   *avec* $N$ *un opérateur normal (*$N$ *et* $N^*$ *linéairement indépendants ), et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *est une algèbre de Lie semi-simple de dimension 3 ( même remarque sur* $Q$ *que le cas précédent ).*

6. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 6$ *:*
   *Le fait qu'il n'existe pas d'algèbre de Lie semi-simple de dimension* 4 *ou* 5 *implique que* $\dim R = 0$ *et* $\dim G = 6$*. C'est-à-dire que* $\varepsilon(T_1, T_1^*)$ *est isomorphe à* $o(3, \mathbb{C}) \oplus o(3, \mathbb{C})$ *dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$*. Dans ce cas aussi* $T$ *est nilpotent.*

7. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 7$ *:*
   *La seule possibilité dans ce cas est* $\dim G = 6$ *et* $\dim R = 1$*. D'où on*

*peut écrire* $T$ *sous la forme*

$$T = N + Q$$

*où* $N$ *est un opérateur normal de la forme* $N = e^{i\phi}S$ *avec* $S$ *auto-adjoint, et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *est une algèbre de lie semi-simple de dimension 6.*

8. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 8$ *:*
   *Comme on a* $\dim R \leq 2$*, et il n'existe pas d'algèbre de Lie semi-simple de dimension* 7*, alors les seules possibilités restantes sont : soit* $\dim G = 8$ *et* $\dim R = 0$ *, c'est-à-dire que* $T_1$ *et son adjoint engendrent une algèbre isomorphe à* $sl(3, \mathbb{C})$ *dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$ *et donc* $T$ *sera nilpotent ; soit* $\dim G = 6$ *et* $\dim R = 2$*, et on peut écrire* $T$ *sous la forme*

   $$T = N + Q$$

   *avec* $N$ *est un opérateur normal avec* $N$ *et* $N^*$ *linéairement indépendants, et* $Q$ *et son adjoint engendrent une algèbre isomorphe à* $o(3, \mathbb{C}) \oplus o(3, \mathbb{C})$ *dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$*.*

9. *Si* $\dim \varepsilon(T, T^*) = 9$ *:*
   *La seule possibilité dans ce cas est* $\dim G = 8$ *et* $\dim R = 1$*.*
   *Comme on a* $[R, R] = \{0\}$*, et par lemme 3.1.5* $[R, G] = \{0\}$*, donc* $[R, \varepsilon(T, T^*)] = \{0\}$ *,d'où* $R = span\{I \oplus 0\}$ *, où* $I$ *est la matrice identique* $3 \times 3$ *.*
   *De plus on peut écrire* $T$ *sous la forme*

   $$T = (\lambda I \oplus 0) + (Q_1 \oplus 0)$$

   *où* $Q_1$ *et son adjoint engendrent une algèbre isomorphe à* $sl(3, \mathbb{C})$ *dans* $\mathscr{M}(3, \mathbb{C})$*. Dans ce cas aussi* $Q_1$ *est nilpotent.*

# Chapître 4

# Cas de $\varepsilon(T, T^*)$ semi-simple

Dans ce chapître nous allons étudier le cas où l'algèbre engendrée est semi-simple de dimension finie. Nous allons faire usage du résultat important suivant : l'algèbre associative engendrée par une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie est elle même de dimension finie (voir [1], sect 30, thm 2). Donnons-en un exemple. On prend l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$ qui est semi-simple avec la plus petite dimension possible (dim $sl(2, \mathbb{C}) = 3$).
Soit:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\{H, H_+, H_-\}$ définie une base de $sl(2, \mathbb{C})$. On a

$$[H, H_+] = 2H_+, \quad [H, H_-] = -2H_-, \quad [H_+, H_-] = H.$$

Remarquons que $H_+$ et $H_-$ engendrent $sl(2, \mathbb{C})$ en tant qu'algèbre de Lie. On veut construire l'algèbre associative $\mathscr{A}$ qui est engendrée par $sl(2, \mathbb{C})$. Il suffit de travailler avec les générateurs de $sl(2, \mathbb{C})$. Notons par $\mathscr{A}(H_+, H_-)$ l'algèbre associative engendrée par $H_+$ et $H_-$. On a

$$[H, H_+] = 2H_+ \Rightarrow HH_+ - H_+H = 2H_+ \Rightarrow HH_+ = H_+H + 2H_+.$$

$$[H, H_-] = -2H_- \Rightarrow HH_- - H_-H = -2H_- \Rightarrow HH_- = H_-H - 2H_-.$$

$$[H_+, H_-] = H \Rightarrow H_+H_- - H_-H_+ = H \Rightarrow H_+H_- = H_-H_+ + H.$$

Comme

$$H_+H_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_-H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_-^2 = H_+^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$H_-H_+H_- = H_-, \quad H_+H_-H_+ = H_+$$

Donc

$$H_+(H_+H_-) = H_+^2H_- = 0, \quad H_-(H_-H_+) = H_-^2H_+ = 0.$$

Et par suite, on a

$$\forall k \geq 2,\ \ H_-^kH_+ = 0,\ \ et\ \ H_+H_-^k = 0$$

$$\forall l \geq 2,\ \ H_+^lH_- = 0,\ \ et\ \ H_-H_+^l = 0$$

Ainsi on a montré que l'algèbre associative

$$\mathscr{A}(H_+, H_-) = span\{H_+, H_-, H_+H_-, H_-H_+\}$$

et la dimension de $\mathscr{A}(H_+, H_-)$ est egal à 4. D'autre part, puisque $H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_+H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{A}(H_+, H_-) = \mathscr{M}(2, \mathbb{C})$.

On rappelle que l'algèbre associative engendrée par $T$, $T^*$, notée $\mathscr{A}(T,T^*)$, contient $\varepsilon(T,T^*)$. Et puisque $\mathscr{A}(T,T^*)$ est la plus petite algèbre associative contenant $T$, $T^*$, alors l'algèbre associative $\mathscr{A}(T,T^*)$ engendrée par $\varepsilon(T,T^*)$ coïncide avec l'algèbre associative engendrée par $T$, $T^*$.

## 4.1 Opérateurs nilpotents

Dans cette section nous allons donner quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que des opérateurs particuliers engendrent des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie.

**Lemme 4.1.1** *Si $Q \neq 0, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est un opérateur quasinilpotent, et $\dim \varepsilon(Q,Q^*) < +\infty$, alors $\varepsilon(Q,Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple.*

**Démonstration.** Par le théorème 3.1.8 : $Q = N + Q_1$ , où $N$ est un opérateur normal, $[N, Q_1] = 0$ et $G = \varepsilon(Q_1, Q_1^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
On a : $N \in R$, $Q_1 \in G$, où

$$\varepsilon(Q,Q^*) = R \oplus G.$$

est La décomposition de Levi. On a par le lemme 3.1.6 $[R,G]=\{0\}$, donc $[N,G]=0$. Et comme

$$adQ|_G = ad(N+Q_1)|_G = (adN + adQ_1)|G = adN|_G + adQ_1|G.$$

Donc $adQ|_G = adQ_1|G$. Et comme $Q$ est un opérateur quasinilpotent alors $L_Q|_G$ (resp. $R_Q|_G$) est aussi quasinilpotent i.e, $\sigma(L_Q|_G)=\{0\}$.
Par le Théorème de Rosenblum (voir [1], Chapter I, Section 13, th 1 ) :

$$\sigma(adQ|_G) = \sigma(L_Q|_G) - \sigma(R_Q|_G) = \{0\}.$$

Donc $adQ|_G$ est un opérateur quasinilpotent, et comme $G$ est de dimension finie alors $adQ_1|_G = adQ|_G$ est nilpotent par ([1], section 30, Th 1). Par suite $Q_1$ est un nilpotent donc quasinilpotent. Mais comme on a $N = Q - Q_1$, et $[Q,Q_1]=0$, et par ([2], Chapter 0, pro 8 ), alors $N$ est un opérateur quasinilpotent, et comme $N$ est normal, donc $N=0$. C'est-à-dire $Q_1 = Q$ et $\varepsilon(Q,Q_1^*) = \varepsilon(Q,Q^*)$, d'où $\varepsilon(Q,Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple. ∎
Un cas particulier intéressant est le suivant:

**Proposition 4.1.2** *Soit $T \in gl(n,\mathbb{C})$ tel que $\varepsilon(T,T^*)$ soit semi-simple. Alors $T$ est nilpotent .*

**Démonstration.** Puisque nous sommes en dimension finie, nous avons la décomposition de Jordan

$$T = D + N$$

avec $D$ diagonalisable et $N$ nilpotent vérifiant $[D,N]=0$. Par le théorème de Fuglede, on a $[D,N^*]=0$. On a de ce fait $[D^*,N^*]=0$ et $[D^*,N]=0$. On peut conclure, grâce à th.3.1.8,

$$\varepsilon(T,T^*) = \varepsilon(D,D^*) \oplus \varepsilon(N,N^*)$$

Rappelons que $\varepsilon(D,D^*)$ est le radical résoluble de $\varepsilon(T,T^*)$. Mais comme on a supposé que $\varepsilon(T,T^*)$ est semi-simple alors $\varepsilon(D,D^*)=\{0\}$, d'où $D=0$, et donc $T=N$ est nilpotent. ∎

**Corollaire 4.1.3** *Si $0 \neq Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est un opérateur nilpotent alors $\varepsilon(Q,Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie si et seulement si $\mathscr{A}(Q,Q^*)$ est de dimension finie.*

**Démonstration.** Rappel : $\mathscr{A}(Q,Q^*)$ est la plus petite algèbre associative contenant $Q$ et $Q^*$, et on a

$$\varepsilon(Q,Q^*) \subset \mathscr{A}(Q,Q^*).$$

- Si $\mathscr{A}(Q,Q^*)$ est de dimension finie, alors $\varepsilon(Q,Q^*)$ est de dimension finie aussi. Comme $Q$ est nilpotent, donc $Q$ est quasinilpotent, et par le lemme 4.2.7, on conclut que $\varepsilon(Q,Q^*)$ est semi-simple.
- Par ([1].Th 3, section 30), et comme $\varepsilon(Q,Q^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimesion finie, donc l'algèbre associative $\mathscr{A}(Q,Q^*)$ engendrée par $\varepsilon(Q,Q^*)$ est aussi de dimension finie .

■

Soit $T$ un opérateur nilpotent, $\varepsilon(T,T^*)$ peut ne pas être une algèbre de Lie de dimension finie. En voici un exemple :

**Exemple 4.1.4** *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable, $S$ un opérateur diagonal sur $\mathscr{H}$, $S : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$, avec la diagonale satisfaisant : $\alpha_i > 0$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ et la suite $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ bornée.*
*Donc $S$ est un opérateur positif sur $\mathscr{H}$ de la forme :*

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

*Soit*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sur} \quad \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}.$$

*On a $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $T^2(x+y) = T(\sqrt{S}y + 0) = 0$ pour $x, y \in \mathscr{H}$.*
*Donc $T$ est un opérateur nilpotent sur $\mathscr{H}$, donc quasinilpotent. On suppose que $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie de dimension finie (raisonnement par l'absurde). Par le lemme4.2.7, comme $T \neq 0$ est un opérateur quasinilpotent et $\varepsilon(T,T^*)$ est de dimension finie, alors $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.*

*Par le corollaire 4.1.3, on peut dire que $\mathscr{A}(T, T^*)$ est de dimension finie. Donc chaque élément de $\mathscr{A}(T, T^*)$ est algébrique. Il aura donc un spectre fini. Mais on a*

$$TT^* = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Mais $TT^* \in \mathscr{A}(T, T^*)$, et il a une spectre infini. C'est une contradiction avec l'hypothèse. Dans cet exemple $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie de dimension infinie, malgré que $T$ est un opérateur nilpotent.*

## 4.2 Les sous-espaces réducteurs

Maintenant nous allons explorer une propriété héréditaire que possèdent les algèbres de Lie semi-simples (de dimension finie) d'opérateurs par rapport aux sous-espaces réducteurs.

**Définition 4.2.1** *Un sous-espace invariant par une application linéaire*

$$T : V \to V$$

*est un sous-espace $W$ de $V$ tel que $T(W) \subset W$.*

- *Un sous-espace invariant par $T$ est aussi dit $T$-invariant.*
- *Si $W$ est $T$-invariant, nous pouvons restreindre $T$ à $W$, $T|_W : W \to W$.*

**Définition 4.2.2** *Un sous-espace réducteur de $T$ est un sous-espace de $\mathscr{H}$ qui est invariant par $T$ et $T^*$.*

**Proposition 4.2.3** *Soit $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $H_i$ des sous-espaces réducteurs de $T$, avec $i \in \{1, 2, ..., n\}$*

$$\mathscr{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n.$$

*Alors $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie si et seulement si chaque restriction $T|_{H_i}$ de $T$ sur $H_i$ engendre une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.*

**Démonstration.** On peut écrire T comme:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}$$

Où $T_{jj} = T|_{H_j}$ ,$j = \{1, 2, ...n\}$ , donc:

$$T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_{22}^* & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn}^* \end{pmatrix}$$

De plus :

$$[T,T^*] = \begin{pmatrix} [T_{11},T_{11}^*] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_{22},T_{22}^*] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & [T_{nn},T_{nn}^*] \end{pmatrix}$$

Pour tout $T^1$,$T^2$,...,$T^m$,$T^j \in \{T,T^*\}$, où $m$ est un entier , $m \geqslant 0$ ($T^j$ signifie un indice et non une puissance), on a:

$adT^1 adT^2 ... adT^m(T^j) =$

$$\begin{pmatrix} ad(T^1)_{11}...ad(T^m)_{11}((T^j)_{11}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ad(T^1)_{22}...ad(T^m)_{22}((T^j)_{22}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & ad(T^1)_{nn}...ad(T^m)_{nn}((T^j)_{nn}) \end{pmatrix}$$

On remarque que $(T^k)_{ii}$ est égal à soit $T_{ii}$, soit $T_{ii}^*$ car $(T^k) \in \{T,T^*\}$. Donc:

$$\varepsilon(T,T^*)|_{H_i} = \varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*).$$

Et de même :

$$\varepsilon(T,T^*)^2|_{H_i} = \varepsilon^2(T_{ii},T_{ii}^*).$$

($\Rightarrow$)Quand $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, il est clair que : $\varepsilon(T,T^*)|_{H_i}$ est de dimension finie, donc $\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$ est aussi de dimension finie.
Reste à montrer que $\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$ est semi-simple.
Si $\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$ n'est pas semi-simple, par les lemmes 3.1.5 ,3.1.7 on aura

$$\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*) = R_i \oplus G_i.$$

avec $[R_i,R_i] = \{0\}$, $[R_i,G_i] = \{0\}$. Mais, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*) = \varepsilon(T,T^*)|_{H_i} = [\varepsilon(T,T^*),\varepsilon(T,T^*)]|_{H_i} \\ = [\varepsilon(T,T^*)|_{H_i},\varepsilon(T,T^*)|_{H_i}] = [\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*),\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)] \\ = [R_i \oplus G_i, R_i \oplus G_i] = [G_i,G_i] = G_i.\end{aligned}$$

Alors, $\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple ( c'est la contradiction).
($\Leftarrow$) Quand chaque $\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$ est semi-simple de dimension finie, alors, $\varepsilon(T,T^*)$ est aussi de dimension finie, car $\varepsilon(T,T^*) = \oplus_i\varepsilon(T_{ii},T_{ii}^*)$.
Reste à montrer que $\varepsilon(T,T^*)$ est semi-simple.
Par le théorème 3.1.8 on a $T = N + Q$, avec $N$ un opérateur normal, $[N,Q] = 0$ ($[N,Q^*] = 0$), et $\varepsilon(Q,Q^*)$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
On veut montrer que si $H_i, i \in \{1,2,...,n\}$ sont des sous-espaces réducteurs de $T$, alors, ce des sous-espaces réducteurs de $N$, et $Q$
Comme on a $N \in \varepsilon(T,T^*)$, et par le lemme 3.1.1 on aura $N = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + ... + \alpha_n N_n$ , avec $N_i = adT_1 adT_2...adT_m(T_j)$, $m$ entier $\geqslant 0$ et $T_1,T_2,....T_m,T_j \in \{T,T^*\}$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$, d'où $N = P(T,T^*)$, avec $P$ un polynôme de deux variables $\xi$, $\eta$ non commutatives.
Soit $v \in H_i$ , on a $N(v) = P(T,T^*)(v) \in H_i$, donc $N(H_i) \subset H_i$.
De même pour $N^* \in \varepsilon(T,T^*)$ on trouve que $N^*(v) \in H_i$ $\forall v \in H_i$, alors $N^*(H_i) \in H_i$.
Alors on aura : $H_i$ est un sous-espace réducteur de $N$.
Par la même methode, et comme $Q \in \varepsilon(T,T^*)$, donc $Q = \tilde{\mathrm{P}}(T,T^*)$, avec $\tilde{\mathrm{P}}$ est un polynôme de deux variables $\mu$, $\vartheta$ non commutatives, donc on trouve que $Q(H_i) \in H_i$, et $Q^*(H_i) \in H_i$, d'où on aura : $H_i$ est un sous-espace réducteur de $N$. On rappelle qu'on a

$$T_{ii} = T|_{H_i} = N_{H_i} + Q_{H_i}.$$

Où $N_{H_i} := N|_{H_i}$ un opérateur normal, $Q_{H_i} := Q|_{H_i}$, et $[N_{H_i}, Q_{H_i}] = 0$.
Et comme $N_{H_i} \in \varepsilon(T,T^*)|_{H_i}$, et $\varepsilon(T,T^*)|_{H_i} = \varepsilon(T_{ii}, T_{ii}^*)$, on aura $[N_{H_i}, \varepsilon(T_{ii}, T_{ii}^*)] = \{0\}$. D'autre part on a que chaque $\varepsilon(T_{ii}, T_{ii}^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, donc $N_{H_i} = 0$, et par suit nous aurons $N = 0$, et $T = Q$, et alors $\varepsilon(T,T^*) = \varepsilon(Q,Q^*)$ qui est semi-simple de dimension finie.
D'où $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. ■

Maintenant nous allons examiner une condition nécessaire et suffisante pour que des opérateurs engendrent des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie.

**Définition 4.2.4** *Soit $\mathscr{A}(T,T^*)$ une algèbre associative engendrée par $T$, $T^*$. S'il existe un *-isomorphisme :*

$$U : \mathscr{A}(T,T^*) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

*donc on peut définir une application $Tr_U$ comme suit :*

$$Tr_U : \mathscr{A}(T,T^*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$S \longrightarrow Tr_U(S) := tr(U(S))$$

*Où $tr(A)$ est la trace de la matrice $A$. Il est clair que $Tr_U$ est une fonctionelle linéaire bornée sur l'algèbre associative $\mathscr{A}(T,T^*)$.*

**Lemme 4.2.5** *S'il existe un *-isomorphisme:*

$$U : \mathscr{A}(T,T^*) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),$$

*donc : $Tr_U(T) = 0$ si et seulement si $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.*

**Démonstration.** Il est clair que $\mathscr{A}(T,T^*)$ est une algèbre associative de dimension finie .
($\Rightarrow$) Si $Tr_U(T) = 0$. Supposons que $\varepsilon(T,T^*)$ n'est pas semi-simple.
Soit $N \in R$, par les lemmes 3.1.5, 3.1.7 on aura $[R,R] = \{0\}$, $[R,G] = \{0\}$,

d'où $[R,\varepsilon(T,T^*)] = \{0\}$, et donc $N$ commute avec tous les éléments de $\varepsilon(T,T^*)$. Comme $T$, $T^* \in \varepsilon(T,T^*)$, On a

$$\begin{cases} T^2N = TNT = NTT = NT^2 \\ T^{*2}N = T^*NT^* = NT^*T^* = NT^{*2} \\ TT^*N = TNT^* = NTT^* \\ T^*TN = T^*NT = NT^*T \end{cases} \Rightarrow T^iT^{*j}N = NT^iT^{*j}, \forall i.j \in \mathbb{N}$$

Et par suite, on trouve que $[R,\mathscr{A}(T,T^*)] = \{0\}$ .
Comme $U$ est un isomorphisme d'algèbre de Lie, donc

$$U([R,\mathscr{A}(T,T^*)]) = [U(R),U(\mathscr{A}(T,T^*)] = \{0\}.$$

On rappelle que :

$$U(\mathscr{A}(T,T^*)) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

de plus on a $U(R) = \mathbb{C}I_n$, où $I_n$ est la matrice identique d'ordre n. Soit $T = N+Q$, où $N \in R$, et $Q \in G$, donc $N = T-Q$, Par conséquent on a

$$Tr_U(N) = tr(U(N)) = tr(U(T-Q)) = tr(U(T)) - tr(U(Q)).$$

$$\therefore Tr_U(N) = Tr_U(T) - Tr_U(Q).$$

Et on a $G$ est une algèbre de Lie semi-simple, d'où:

$$[G,G] = G \Rightarrow U[G,G] = U(G) \Rightarrow [U(G),U(G)] = U(G).$$

Et comme on a la trace d'un commutateur est nule, donc :

$$Tr_U(Q) = tr(U(Q)) = 0.$$

Puisqu'on a $Tr_U(T) = 0$ (par hypothèse)

$$\therefore tr(U(N)) = Tr_U(N) = 0.$$

d'où $N = 0$, et $T = Q$, et donc $\varepsilon(T,T^*) = G$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
($\Leftarrow$) Si $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, donc

$$\varepsilon(T,T^*) = [\varepsilon(T,T^*),\varepsilon(T,T^*)]$$

Et comme $T \in \varepsilon(T,T^*)$, donc on aura

$$U(T) \in [\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathscr{M}_n(\mathbb{C})]$$

On rappelle que les traces des commutateurs sont nules, par conséquent :

$$Tr_U(T) = tr(U(T)) = 0.$$

■

Pour une $C^*$ algèbre $\mathscr{A}(T,T^*)$ de dimension finie, et par ([7]. III. th 1) il y a un *-isomorphisme:

$$U : \mathscr{A}(T,T^*) \longrightarrow \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C}).$$

On peut regarder un élément de $\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ comme une matrice diagonale par blocs où un bloc représente un élément de $\mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, c'est à dire:

$$\begin{pmatrix}
\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C}) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})
\end{pmatrix}$$

On trouve que

$$\mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})\mathscr{M}_{n_j}(\mathbb{C}) = \{0\}....(\diamond)$$

pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$, et $i \neq j$. Soit $\mathscr{A}_i = U^{-1}(0 \oplus ... \oplus \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus 0)$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, on a

$$\mathscr{A}(T,T^*) = \mathscr{A}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{A}_i \oplus ... \oplus \mathscr{A}_k$$

Soit

$$T = T_1 + T_2 + ... + T_i + ... + T_k, \text{ où } T_i \in \mathscr{A}_i, \text{ pour } i \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Puisqu'on a un isomorphisme entre $\mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, et $\mathscr{A}_i$, et par $(\diamond)$ on aura

$$T_iT_j = 0, T_i^*T_j = T_iT_j^* = 0...(\diamond\diamond)$$

Pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$, et $i \neq j$.
Maintenant, on va montrer que:

$$\mathscr{A}_i = \mathscr{A}(T_i, T_i^*), \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., k\}$$

$(\supset)$ Puisque $\mathscr{A}_i$ est une $C^*$-algèbre, et contient $T_i$, donc

$$\mathscr{A}(T_i, T_i^*) \subset \mathscr{A}_i.$$

$(\subset)$ On suppose que $S \in \mathscr{A}_i$, alors $S \in \mathscr{A}(T, T^*)$, et donc Il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{<x_1,x_2>}$, avec $S = P(T, T^*)$. Par $(\diamond\diamond)$ on trouve que

$$S = P(T, T^*) = P(T_1, T_1^*) + P(T_2, T_2^*) + ... + P(T_k, T_k^*).$$

Il est clair que: $P(T_i, T_i^*) \in \mathscr{A}_i$.
On rappelle que par la définition de $\mathscr{A}_i$, on aura :

$$U(S) \in 0 \oplus ... \oplus \mathscr{M}_{n_i} \oplus ... \oplus 0.$$

Et comme nous avons

$$U(S) = U(P(T_1, T_1^*) + P(T_2, T_2^*) + ... + P(T_k, T_k^*))$$

Donc

$$U(P(T_j, T_j^*)) = 0, \text{ pour tout } i \neq j.$$

Et puisque, $U$ est un $*$-isomorphisme, d'où on trouve

$$P(T_j, T_j^*) = 0, \text{ pour tout } i \neq j.$$

Donc on aura $S = P(T_i, T_i^*)$, et par suite $S \in \mathscr{A}(T_i, T_i^*)$, d'où

$$\mathscr{A}_i \subset \mathscr{A}(T_i, T_i^*), \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., k\}$$

Alors nous avons le résultat.

Soit $H_i := [\mathscr{A}(T_i, T_i^*)\mathscr{H}]$ le plus petit sous-espace fermé contenant $\mathscr{A}(T_i, T_i^*)\mathscr{H}$.

**Lemme 4.2.6** *$H_i$ est un sous-espace réducteur de l'opérateur $T$, et $H_i \perp H_j$ pour tout $i$, $j \in \{1,2,...,k\}$ et $i \neq j$ .*

**Démonstration.** On a $U$ est un *-isomorphisme tel que

$$U : \mathscr{A}(T,T^*) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Soit : $\mathscr{A}_i(T,T^*) = U^{-1}(0 \oplus ... \oplus \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus 0)$, pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, on a

$$\mathscr{A}(T,T^*) = \mathscr{A}_1(T,T^*) \oplus ... \oplus \mathscr{A}_i(T,T^*) \oplus ... \oplus \mathscr{A}_k(T,T^*).$$

Et comme on a : $\mathscr{A}_i(T,T^*) = \mathscr{A}(T_i,T_i^*)$ pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, d'où $\mathscr{A}(T_i,T_i^*)$ est un idéal de $\mathscr{A}(T,T^*)$, $\forall i \in \{1,2,...,k\}$ (comme une algèbre associative ).
On a $T, T^* \in \mathscr{A}(T,T^*)$, donc

$$T\mathscr{A}(T_i,T_i^*) \subset \mathscr{A}(T_i,T_i^*).$$

$$T^*\mathscr{A}(T_i,T_i^*) \subset \mathscr{A}(T_i,T_i^*).$$

Et pour tout $f \in \mathscr{H}$, on aura

$$T(\mathscr{A}(T_i,T_i^*)f) \subset \mathscr{A}(T_i,T_i^*)f.$$

$$T^*(\mathscr{A}(T_i,T_i^*)f) \subset \mathscr{A}(T_i,T_i^*)f.$$

Par conséquent on trouve

$$TH_i \subset H_i,\ T^*H_i \subset H_i, \text{ pour tout } i \in \{1,2,...,k\}.$$

D'où $H_i$ est un sous-espace réducteur de $T$.
Reste à montrer que $H_i \perp H_j$ pour tout $i$, $j \in \{1,2,...,k\}$ et $i \neq j$ .
Soit les deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_{<x_1,x_2>}$, avec les termes constants nuls i.e, $P_1(0,0) = 0$ et $P_2(0,0) = 0$.
par la relation ($\diamond\diamond$) quand on a $i \neq j$, et pour tout $e, f \in \mathscr{H}$ on aura

$$< P_1(T_i,T_i^*)e, P_2(T_j,T_j^*)f >=< P_2(T_j,T_j^*)^* P_1(T_i,T_i^*)e, f >= 0.$$

Remarquons que

$$\mathscr{A}(T_i,T_i^*)\mathscr{H} = \{P(T_i,T_i^*)\mathscr{H} | P \in \mathbb{C}_{<x_1,x_2>}, P(0,0) = 0\}.$$

Car $\mathscr{A}(T_i,T_i^*)\mathscr{H}$ est dense dans $H_i$. Par ce qui précède on a:

$$\mathscr{A}(T_i,T_i^*)\mathscr{H} \perp \mathscr{A}(T_j,T_j^*)\mathscr{H} \qquad \text{pour tout i , j} \in \{1,2,...,k\} \text{ et } i \neq j$$

D'où

$$H_i \perp H_j \text{ pour tout } i\ ,\ j \in \{1,2,...,k\} \text{ et } i \neq j\ .$$

■

On va définir $H_0$ comme suit :

$$H_0 = (H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k)^{\perp}.$$

Il est clair que :

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k.$$

Puisqu'on $T = T_1 + T_2 + ... + T_k$ et $\mathscr{A}(T,T^*) = \mathscr{A}(T_1,T_1^*) \oplus ... \oplus \mathscr{A}(T_k,T_k^*)$.
Donc :

$$\mathscr{A}(T,T^*)H \subset H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k.$$

Comme $T \in \mathscr{A}(T,T^*)$ , alors $TH \subset H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$ .
Et par suit:

$$rang(T) \subset H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k = {H_0}^{\perp}.$$

D'où on aura $H_0 \subset (rangT)^{\perp}$.
Et comme on a $(rangT)^{\perp} = kerT^*$, alors

$$H_0 \subset kerT^*.$$

Et de la même façon, et comme $T^* \in \mathscr{A}(T,T^*)$, d'où on trouve

$$H_0 \subset kerT.$$

Soit $T_{ii} := T|_{H_i}$, pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$.
Maintenant, d'après la décomposition de $H$

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_k$$

On aura:

$$T = 0 \oplus T_{11} \oplus T_{22} \oplus ... \oplus T_{kk}.$$

**Lemme 4.2.7** *Pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, il existe un $V_i$ *-isomorphisme, tel que:*

$$V_i : \mathscr{A}(T_{ii},T_{ii}^*) \longrightarrow \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

**Démonstration.** Par le lemme 4.2.6, pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, on a $H_i$ est un sous-espace réducteur de $\mathscr{A}(T,T^*)$, et on a :

$$\mathscr{A}(T,T^*) = \mathscr{A}(T_1,T_1^*) \oplus \mathscr{A}(T_2,T_2^*) \oplus ... \oplus \mathscr{A}(T_k,T_k^*)$$

Et comme $\mathscr{A}(T,T^*)H_i \subset H_i$, donc on aura $H_i$ est un sous-espace réducteur de $\{T_j | j = 1,2,...,k\}$.
Puisqu' on a $rangT_i^* \subset H_i$, et comme on a $(rangT_i^*)^\perp = kerT_i$, d'où nous aurons

$$(rangT_i^*)^\perp \supset (H_i)^\perp \Leftrightarrow kerT_i \supset (H_i)^\perp.$$

Par conséquent quand on a $i \neq j$, $T_i|_{H_j} = 0$, donc on aura

$$T_{ii} = T|_{H_i} = T_i|_{H_i}.$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{<x_1,x_2>}$ on va définir l'application suivante

$$\varphi_i : \mathscr{A}(T_i,T_i^*) \longrightarrow \mathscr{A}(T_{ii},T_{ii}^*)$$

$$P(T_i,T_i^*) \longrightarrow P(T_i,T_I^*)|_{H_i}$$

Il est facile de vérifier que $\varphi_i$ est un *-isomorphisme .
Puisqu'on a $\mathscr{A}(T_i,T_i^*) = \mathscr{A}_i(T,T^*)$ , et $\mathscr{A}_i(T,T^*)$ *-isomorphe à $\mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, donc il existe un *-isomorphisme $V_i$ tel que :

$$V_i : \mathscr{A}(T_{ii},T_{ii}^*) \longrightarrow \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \text{ , Pour tout } i \in \{1,2,...,k\} \text{ .}$$

■

**Théorème 4.2.8** *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, $T$ est un opérateur linéaire borné sur $\mathscr{H}$. $\varepsilon(T,T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie ssi il y a les sous-espces réducteurs $\{H_i \mid i = 0,1,...,k\}$ de $T$, tel que :*

$$\mathscr{H} = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k, \text{ et } T = 0 \oplus T_{11} \oplus T_{22} \oplus ... \oplus T_{kk},$$

*correspondant à la décomposition de $\mathscr{H}$. Pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, il y a un *-isomorphisme $U_i$, tel que*

$$U_i : \mathscr{A}(T_{ii},T_{ii}^*) \longrightarrow \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}), \text{ et } Tr_{U_i}(T_{ii}) = 0.$$

**Démonstration.** Si $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, donc $\mathscr{A}(T, T^*)$ est une algèbre associative de dimension finie.
Comme on a dit précédament, il y a les sous-espaces réducteurs $\{H_i \mid i \in \{1, 2, ..., k\}\}$ de $T$, tel que :
$\mathscr{H} = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$, et $T = 0 \oplus T_{11} \oplus T_{22} \oplus ... \oplus T_{kk}$, correspondant à la décomposition de $\mathscr{H}$.
Par le lemme 4.2.7, il existe un *-isomorphisme $U_i$, tel que pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$ on a

$$U_i : \mathscr{A}(T_{ii}, T_{ii}^*) \longrightarrow \mathscr{M}_{n_i}.$$

Et par la proposition 4.2.3 et le lemme 4.2.5, on trouve que:

$$Tr_{U_i}(T_{ii}) = 0.$$

Réciproquememt, on suppose que $T$ satisfait les conditions du Théorème 4.2.8. pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, et par le lemme 4.2.5 on trouve que $\varepsilon(T_i, T_i^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
Donc par la proposition 4.2.3 on aura $\varepsilon(T, T^*)$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.
■

# Chapître 5

# Exemples

Nous allons examiner quelques exemples appliquant le théorème 3.1.8 sur des opérateurs linéaires compacts sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On va contruire des réalisations concrètes des cas abstraits de ces exemples, et ce dans la base orthogonale des séries de Fourier.

**Exemple 5.0.9** *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un opérateur compact. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ une base Hilbertienne, avec:*

$$\begin{cases} T(e_0) = \alpha_0 e_0 + b e_1 & \\ T(e_1) = a e_0 + \alpha_1 e_1 & \qquad \text{avec } \alpha_j \in \mathbb{C}, \text{ et} \\ T(e_j) = \alpha_j e_j & \forall j \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_n) = 0$$

*(Ceci assure la compacité de $T$. Si $(\alpha_n)$ est seulement bornée, alors $T$ sera borné ). D'où :*

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_0 & a & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ b & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*Soit $T = A + B$, avec:*

$$\left\{\begin{array}{ll} A(e_0) = \alpha_0 e_0 + b e_1 & \\ A(e_1) = a e_0 + \alpha_1 e_1 & \\ A(e_j) = 0 & \forall j \geq 2 \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{ll} B(e_0) = 0 & \\ B(e_1) = 0 & \\ B(e_j) = \alpha_j e_j & \forall j \geq 2 \end{array}\right.$$

*On a :* $A(B)(e_0) = 0$, $A(B)(e_1) = 0$,..., $A(B)(e_n) = 0$,...
*et on a aussi :* $B(A)(e_0) = 0$, $B(A)(e_1) = 0$,..., $B(A)(e_n) = 0$, ...
*Donc on aura :*

$$[A, B] = 0, [A^*, B] = 0, [A, B^*] = 0.$$

*Et par suite on trouve que :*

$$\varepsilon(T, T^*) = \varepsilon(A, A^*) \oplus span\{B, B^*\}.$$

*Comme on a* $\dim \varepsilon(A, A^*) \leq 4$, *et* $\dim \varepsilon(B, B^*) = 2$, *alors* $\dim \varepsilon(T, T^*) \leq 6$. *D'où par le théorème 3.1.8, on peut écrire* $T$ *sous la forme :* $T = N + Q$, *avec* $N$ *un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$, *et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *une algèbre de Lie semi-simple. Pour trouver cette décomposition on va écrire* $A$ *sous la forme diagonale ou triangulaire. En algèbre linéaire on a prend que toute matrice peut être triangularisée, et dans certains cas diagonalisée.*
*Soit* $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & a \\ b & \alpha_1 \end{pmatrix}$, *et soit* $P_{A_1}(\lambda)$ *son polynôme caractéristique,*
$P_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \lambda^2 - (\alpha_0 + \alpha_1)\lambda + \alpha_0\alpha_1 - ab.$

$*$ $1^{er}$ *cas : Si* $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ *Il existe* $\lambda_0$, $\lambda_1$ *deux valeurs propres distinctes, alors:* $\exists \{v_0, v_1\}$ *tel que :*
$\left\{\begin{array}{l} A_1(v_0) = \lambda_0 v_0 \\ A_1(v_1) = \lambda_1 v_1 \end{array}\right. \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ *dans la nouvelle base* $\{v_0, v_1\}$.
*D'où dans la base* $\{v_0, v_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *on aura* $T = N + 0$, *où:*

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*alors* $T$ *est un opérateur normal.*

$*$ $2^{eme}$ *cas : Si* $\Delta = 0 \Rightarrow$ *Il existe une valeur propre double* $\lambda$.
*a) Si* $\dim E_\lambda = 2$ *(où* $E_\lambda$ *est l'espace propre du valeur propre* $\lambda$*): Donc il*

*existe une nouvelle base tel que* $A_1 = \lambda I_2$*, d'où* $T$ *est un opérateur normal.*
$b)$ *Si* $\dim E_\lambda = 1$*: donc il existe une nouvelle base* $\{v_0, v_1\}$ *tel que :*

$$\begin{cases} A_1(v_0) = \lambda v_0 \\ A_1(v_1) = v_0 + \lambda v_1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*D'où dans la nouvelle* $\{v_0, v_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *on aura* $T = N + Q$*, avec:*

$$\begin{cases} N(v_0) = \lambda v_0 \\ N(v_1) = \lambda v_1 \\ N(e_j) = \alpha_j e_j \qquad \forall j \geq 2 \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} Q(v_0) = 0 \\ Q(v_1) = v_0 \\ Q(e_j) = 0 \qquad \forall j \geq 2 \end{cases}$$

$N$ *un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$*, et* $\varepsilon(Q, Q^*) \cong sl(2, \mathbb{C})$ *une algèbre de Lie semi-simple de dimension* $3$*, de plus on a* $Q$ *un opérateur nilpotent* $(Q^2 = 0)$.

*On peut construire une réalisation concrète du cas abstrait précédent.*
*Soient* $\mathscr{H} = L^2(-\pi, \pi)$*, et* $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$*,* $n \neq 0$*,* $\alpha_0 = 1$.
*Et soit la série de Fourier* $U(x)$ *:*

$$U(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

*avec* $a_n$*, et* $b_n$ *sont des coéfficients de la serie de Fourier, où:*

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin nx dx. \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx dx. \end{cases}$$

*Soit la base orthogonale des séries de Fourier :*

$$\begin{cases} e_0(x) = 1 \\ e_1(x) = \cos x \\ e_2(x) = \sin x \\ e_{2n+1}(x) = \cos nx \\ e_{2n}(x) = \sin nx \\ \vdots \end{cases}$$

$1)$ *Pour le* $1^{er}$ *cas :* $\Delta \neq 0$*, on a* $T$ *un opérateur normal tel que :*

$$\begin{cases} T(e_0) = \lambda_0 e_0 \\ T(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ T(e_j) = \alpha_j e_j \qquad \forall j \geq 2 \end{cases}$$

*Donc quand on applique l'opérateur $T$ sur la base orthogonale des séries de Fourier on trouve que :*

$$\begin{cases} T(e_0(x)) = T(1) = \lambda_0 \\ T(e_1(x)) = T(\cos x) = \lambda_1 \cos x \\ T(e_2(x)) = T(\sin x) = \sin x \\ T(e_{2n+1}(x)) = T(\cos nx) = \dfrac{1}{n^2} \cos nx \\ T(e_{2n}(x)) = T(\sin nx) = \dfrac{1}{n^2} \sin nx \\ \vdots \end{cases}$$

*D'où :*

$$T(U)(x) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(y)dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos yU(y)dy(\lambda_1 \cos x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin yU(y)dy \sin x +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 2} (\int_{-\pi}^{\pi} \cos nyU(y)dy \cos nx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin nyU(y)dy \sin nx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 - 1) \cos y \cos x)U(y)dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n(y-x)}{n^2} U(y)dy.$$

*(* $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n(y-x)}{n^2}$ *converge uniformément)*
*On a :*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nt}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2}{12} & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \dfrac{3t^2 + 6\pi t + 2\pi^2}{12} & -2\pi \leq t \leq 0 \end{cases}$$

*D'où on aura :*

$$T(U)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (\frac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 - 1) \cos y \cos x + \frac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\frac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 - 1) \cos y \cos x + \frac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy$$

*Le noyau de $T(U)(x)$ est défini comme suit:*

$$K(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 - 1)\cos y \cos x + \dfrac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12} & 0 \leq y - x \leq 2\pi \\ \dfrac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 - 1)\cos y \cos x + \dfrac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12} & -2\pi \leq y - x \leq 0 \end{cases}$$

*On a $K(x,y) = K(y,x)$ ( la symétie du noyau).*
*On peut écrire $T = T_1 + T_2$ où :*

$$\begin{cases} T_1(U)(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\lambda_1 - 1)\cos y \cos x U(y)dy \\ T_2(U)(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{o} (\dfrac{\lambda_0}{2} + \dfrac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy \\ \qquad + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\dfrac{\lambda_0}{2} + \dfrac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy \end{cases}$$

*Et $T_1$ un opérateur intégral, $T_2$ un opérateur de Green associé à un problème de Dirichlet le suivant:*

$$\begin{cases} U" = \dfrac{\sqrt{\mu}}{2}U \\ U(-\pi) = U(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (\diamond)$$

*D'où $T$ est la somme de deux opérateurs l'un intégral, et l'autre générateur de Green associé à un problème de Dirichlet ($\diamond$).*

2) *Pour le $2^{eme}$ cas : $\Delta = 0$, et $\dim E_\lambda = 1$.*
*On a $T = N + Q$ , et on aura que :*

$$\begin{cases} N(e_0(x)) = N(1) = \lambda \\ N(e_1(x)) = N(\cos x) = \lambda \cos x \\ N(e_2(x)) = N(\sin x) = \sin x \\ N(e_{2n+1}(x)) = N(\cos nx) = \dfrac{1}{n^2}\cos nx \\ N(e_{2n}(x)) = N(\sin nx) = \dfrac{1}{n^2}\sin nx \\ \vdots \end{cases} \quad et \begin{cases} Q(e_0(x)) = Q(1) = 0 \\ Q(e_1(x)) = Q(\cos x) = 1 \\ Q(e_2(x)) = Q(\sin x) = 0 \\ Q(e_{2n+1}(x)) = Q(\cos nx) = 0 \\ Q(e_{2n}(x)) = Q(\sin nx) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

*Donc :*

$$T(U)(x) = N(U)(x) + Q(U)(x)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dy(\lambda\cos x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin yU(y)dy\sin x +$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 2}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nyU(y)dy\cos nx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin nyU(y)dy\sin nx) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\lambda}{2} + (\lambda-1)\cos y\cos x + \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n(y-x)}{n^2})U(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dy$$

$$T(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\frac{\lambda}{2} + \frac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\frac{\lambda}{2} + \frac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda-1)\cos y\cos xU(y)dy.$$

*D'où on peut écrire* $T = Q + N_1 + N_2$ *où :*

$$\begin{cases} N_1(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\frac{\lambda}{2} + \frac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy + \\ \qquad\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\frac{\lambda}{2} + \frac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12})U(y)dy \\ N_2(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda-1)\cos y\cos xU(y)dy \\ Q(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dy \end{cases}$$

*Et* $N_2$, $Q$ *des opérateurs intégraux,* $N_1$ *un opérateur de Green associé à un problème de Dirichlet* $(\diamond)$.
*On peut remarquer que* $Q(U)(x)$ *est un operateur nilpotent, puisqu'on a:*

$$Q^2(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos yU(y)dyQ(1) = 0$$

*car on a* $Q(1) = 0$.

**Exemple 5.0.10** *Soient* $\mathscr{H}$ *un espace de Hilbert, et* $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *un opérateur compact. Soit* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *une base Hilbertienne, avec:*

$$\begin{cases} T(e_0) = \alpha_0 e_0 + de_1 + fe_3 \\ T(e_1) = ae_0 + \alpha_1 e_1 + ge_2 \\ T(e_2) = be_0 + ce_1 + \alpha_2 e_2 \\ T(e_j) = \alpha_j e_j & \forall j \geq 3 \end{cases} \quad \textit{avec } \alpha_j \in \mathbb{C}, \textit{ et}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (e_n) = 0$$

*(Ceci assure la compacité de* $T$*. Si* $(\alpha_n)$ *est seulement bornée, alors* $T$ *sera borné ). D'où :*

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ d & \alpha_1 & c & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ f & g & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*Soit* $T = A + B$*, avec:*

$$\begin{cases} A(e_0) = \alpha_0 e_0 + de_1 + fe_3 \\ A(e_1) = ae_0 + \alpha_1 e_1 + ge_2 \\ A(e_2) = be_0 + ce_1 + \alpha_2 e_2 \\ A(e_j) = 0 & \forall j \geq 3 \end{cases} \quad \textit{et} \begin{cases} B(e_0) = 0 \\ B(e_1) = 0 \\ B(e_2) = 0 \\ B(e_j) = \alpha_j e_j & \forall j \geq 3 \end{cases}$$

*On a :* $A(B)(e_0) = 0$*,* $A(B)(e_1) = 0$*,...,* $A(B)(e_n) = 0$*,...*
*et on a aussi :* $B(A)(e_0) = 0$*,* $B(A)(e_1) = 0$*,...,* $B(A)(e_n) = 0$*, ...*
*Donc on aura :*

$$[A, B] = 0, [A^*, B] = 0, [A, B^*] = 0$$

*Et par suite on trouve que :*

$$\varepsilon(T, T^*) = \varepsilon(A, A^*) \oplus \textit{span}\{B, B^*\}.$$

*Comme on a* $\dim \varepsilon(A, A^*) \leq 9$*, et* $\dim \varepsilon(B, B^*) = 2$*, alors* $\dim \varepsilon(T, T^*) \leq 11$*. D'où par le théorème 3.1.8, on peut écrire* $T$ *sous la forme :* $T = N + Q$*, avec* $N$ *un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$*, et* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *une algèbre de Lie semi-simple. Pour trouver cette décomposition on va écrire* $A$ *sous la forme diagonale ou triangulaire. En algèbre linéaire on a prend que toute matrice*

*peut être triangularisée, et dans certains cas diagonalisée.*
*Soit* $A_1 \begin{pmatrix} \alpha_0 & a & b \\ d & \alpha_1 & c \\ f & g & \alpha_2 \end{pmatrix}$
*et soient* $P_{A_1}(\lambda)$ *le polynôme caractéristique de* $A_1$*, et* $\Delta$ *son discriminant.*

$*$ $1^{er}$ *cas : Si* $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ *Il existe* $\lambda_0$*,* $\lambda_1$*, et* $\lambda_3$ *trois valeurs propres distinctes, alors:* $\exists$ $\{v_0, v_1, v_2\}$ *tel que :*

$$\begin{cases} A_1(v_0) = \lambda_0 v_0 \\ A_1(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ A_1(v_2) = \lambda_2 v_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

*dans la nouvelle base* $\{v_0, v_1, v_2\}$.

*D'où dans la base* $\{v_0, v_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *on aura* $T = N+0$*, où: N un opérateur normal, alors T est aussi normal.*

$*$ $2^{eme}$ *cas : Si* $\Delta = 0$.
1) *S'il existe deux valeurs propres* $\lambda$ *de multiplicité* 2*, et une valeur propre* $\mu$ *de multiplicité* 1 .
*a) Si* $\dim E_\lambda = 2$*, donc* $A_1$ *est diagonalisable, et par suite T est un operateur normal.*
*b) Si* $\dim E_\lambda = 1$*, donc il existe* $\{v_0, v_1, v_2\}$ *base de* $A_1$ *tel que :*
$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$*, d'où :* $T = N + Q$ *, avec :*
$$\begin{cases} N(v_0) = \lambda v_0 \\ N(v_1) = \lambda v_1 \\ N(v_2) = \mu v_2 \\ N(e_j) = \alpha_j e_j \qquad j \geq 3 \end{cases} , \ et \begin{cases} Q(v_0) = 0 \\ Q(v_1) = v_0 \\ Q(v_2) = 0 \qquad j \geq 2 \end{cases}$$
*N est un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$*,* $\varepsilon(Q, Q^*) \cong sl(2, \mathbb{C})$ *une algèbre de Lie semi-simple de dimension* 3*, de plus on a Q un opérateur nilpotent* $(Q^2 = 0)$.
2) *S'il existe une valeur propre triple* $\lambda_0$ *de* $P_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$*, on va discuter suivant le polynôme minimal* $(m_{A_1}(\lambda))$.

*a) Si* $m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$*, donc* $A_1 = \lambda_0 I_3$*, d'où on aura que T un opérateur* *normal.*

*b) Si* $m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$*, donc il existe une base tel que :*
$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$*, d'où :* $T = N + Q$ *avec :*

$$\begin{cases} N(e_0) = \lambda_0 e_0 \\ N(e_1) = \lambda_0 e_1 \\ N(e_2) = \lambda_0 e_2 \\ N(e_j) = \alpha_j e_j & j \geq 3 \end{cases}, \ et \begin{cases} Q(e_0) = 0 \\ Q(e_1) = 0 \\ Q(e_2) = e_0 \\ Q(e_j) = 0 & j \geq 3 \end{cases}$$

$N$ *est un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$*, et comme on a* $Q$ *un operateur nilpotent, alors* $\varepsilon(Q, Q^*)$ *une algèbre de Lie semi-simple, et puisqu'on a* $\dim \varepsilon(Q, Q^*) = 3$ *(la base est* $\{Q, Q^*, [Q, Q^*]\}$*), d'où* $\varepsilon(Q, Q^*) \cong o(3, \mathbb{C})$.

*c) Si* $m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$*, donc il existe une base tel que :*
$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$*, d'où :* $T = N + Q$ *avec :*

$$\begin{cases} N(e_0) = \lambda_0 e_0 \\ N(e_1) = \lambda_0 e_1 \\ N(e_2) = \lambda_0 e_2 \\ N(e_j) = \alpha_j e_j & j \geq 3 \end{cases}, \ et \begin{cases} Q(e_0) = 0 \\ Q(e_1) = e_0 \\ Q(e_2) = e_1 \\ Q(e_j) = 0 & j \geq 3 \end{cases}$$

$N$ *est un opérateur normal,* $[N, Q] = 0$*, comme on a* $Q$ *un operateur nilpotent, et* $\dim \varepsilon(Q, Q^*) = 3$ *(la base est*$\{Q, Q^*, [Q, Q^*]\}$*), donc on aura que* $\varepsilon(Q, Q^*) \cong o(3, \mathbb{C})$ *une algèbre de Lie semi-simple de dimension* 3.

*On a construit une réalisation concrète du* $2^{eme}$ *cas abstrait pour* $\Delta = 0$*, et* $m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)$*. Nous avons* $T = N + Q$*, et quand on applique les opérateurs* $N$*,* $Q$ *sur la base orthogonale des séries de Fourier on trouve que:*

$$\begin{cases} N(e_0(x)) = N(1) = \lambda_0 \\ N(e_1(x)) = N(\cos x) = \lambda_0 \cos x \\ N(e_2(x)) = N(\sin x) = \lambda_0 \sin x \\ N(e_{2n+1}(x)) = N(\cos nx) = \dfrac{1}{n^2}\cos nx \\ N(e_{2n}(x)) = N(\sin nx) = \dfrac{1}{n^2}\sin nx \\ \vdots \end{cases} ,et \begin{cases} Q(e_0(x)) = Q(1) = 0 \\ Q(e_1(x)) = Q(\cos x) = 1 \\ Q(e_2(x)) = Q(\sin x) = \cos x \\ Q(e_{2n+1}(x)) = Q(\cos nx) = 0 \\ Q(e_{2n}(x)) = Q(\sin nx) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

*Après calcul on trouve :*

$$T(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda_0 - 1)\cos(y-x)U(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n(y-x)}{n^2}\right)U(y)dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos y + \sin y \cos x)U(y)dy$$

*D'où on peut écrire* $T = Q + N_1 + N_2$ *où :*

$$\begin{cases} N_1(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{3(y-x)^2 + 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12}\right)U(y)dy + \\ \qquad\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{3(y-x)^2 - 6\pi(y-x) + 2\pi^2}{12}\right)U(y)dy \\ N_2(U)(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda_0 - 1)\cos(y-x)U(y)dy \\ Q(U)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos y + \sin y\cos x)U(y)dy \end{cases}$$

*Et* $N_2$, $Q$ *des opérateurs intégraux,* $N_1$ *un opérateur de Green associé à un problème de Dirichlet* ($\diamond$).
*On peut remarquer que* $Q(U)(x)$ *est un operateur nilpotent, puisqu'on a:* $Q^3(U)(x) = 0$.

# Chapître 6

# Conclusion

Dans ce travail on a examiné certains résultats de $\varepsilon(T, T^*)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ contenant $T$ et $T^*$, et $\mathscr{A}(Q, Q^*)$ l'algèbre associative engendrée par $Q$ et $Q^*$. On a précisé la relation entre la structure de l'algèbre de Lie $\varepsilon(T, T^*)$ engendrée par $T$ et son adjoint $T^*$ lorsqu'elle est de dimension fine, et les propriétés de $T$. Nous avons développé certaines démonstrations de l'article intitulé "Lie algebra generated by bounded linear operators in Hilbert spaces" [10].
Nous avons étudié des exemples d'opérateurs linéaires bornés ou compacts, appliquant le théorème 3.1.8 sur ces operateurs, puis on a construit des réalisations concrète des cas abstraits, travaillant dans la base orthogonale des séries de Fourier. Enfin, on a écrit l'opérateur étudié comme une somme d'un operateur intégral, et d'un opérateur de Green associé à un problème de Dirichlet.
Par cette étude, on peut dire qu'on a la possibilité d'utiliser certains résultats sur la théorie des algèbres de Lie dans la théorie spectrale des opérateurs sur un espace de Hilbert.

# Bibliographie


[1] Daniel Beltiţă and Mihai Şabac, *Lie Algebra of Bounded Operators*, BIRKHÄUSER VERLAG, **2001**.

[2] Heydar Radjavi and Peter Rosenthal, *Invariant Subspaces - Second edition*, SPRINGER-VERLAG, **1973**.

[3] Ivar Stakgold and Michael Holst, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, WILEY AND SONS, **2011**.

[4] James E.Humphreys, *Introduction To Lie Algèbras And Représentation Theory*,SPRINGER-VERLAG, **1972**.

[5] Joachim Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, SPRINER - VERLAG, **1980**.

[6] K.O.Friedrichs, *Spectral Theory Of Operators In Hilbert Space*, SPRINGER - BERLIN**1973**

[7] K.R.Davidson, *$C^*$-Algebras by Example*, AMER.MATH.SOC, **1996**.

[8] M.Postnikov,*Leçon de Géométrie, Groupes et Algèbre de Lie* , MIR.MOSCOU, **1982**.

[9] N.Bourbaki, *Elements of mathematics, Lie Groups and Lie Algbras, chap 1-3*, SPRINGER, **1989**.

[10] P.Cao and S.Sun, *Lie algebra generated by bounded linear operators in Hilbert spaces*, J.Math.Ana.App. 327 (**2007**) 461-470.

[11] P.R.Halmos, *A Hilbert Space Problem Book - Second Edition*, SPRINGER, NEW YORK , **1982**.