



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
MÉMOIRE DE MASTER
Spécialité : Biomathématiques & Modélisations
présentée par
MESLI ANES ABDELLAH

**Simplexe de charge dans le modèle de
compétition de Lotka-Volterra avec succession
saisonnière et applications**

Soutenue le 05-10-2021

devant le jury composé de :

M. BORSALI FETHI	MCA	Université de Tlemccen	Président
M. MOUSSAOUI ALI	Professeur	Université de Tlemccen	Examineur
M. YADI KARIM	Professeur	Université de Tlemccen	Encadrant

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mon très cher père pour ces encouragements et son soutien, que Dieu te soit miséricordieux et t'accueille dans Son vaste Paradis.

Ma mère et mes soeurs Imen et Rania.

Mon cousin Mehdi.

Ma cousine Amel.

Ainsi à toute ma famille et à toute les personnes qui ont su être présents lorsque j'en avais besoin.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie notre grand Dieu tout puissant qui m'a prodigué aide, inspiration, patience et courage durant toutes ces années d'études .

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Monsieur Yadi Karim pour sa patience, son aide, sa gentillesse et surtout ses judicieux conseils. Je lui suis également profondément reconnaissant pour sa disponibilité et ses encouragements.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes sincères remerciements à Messieurs : Fethi Borsali et Moussaoui Ali d'avoir accepté de faire partie du jury qui examinera ce modeste travail.

Merci à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et à mon apprentissage tout au long mes études.

Enfin, un grand merci à mes parents et à mes soeurs pour leur soutien inconditionnel et aussi pour tout ce qu'ils ont fait.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Modèle de compétition de Lotka-Volterra	11
2.1	Présentation du modèle	11
2.2	Modèle à temps discret : application de Poincaré	13
2.3	Définitions et notations	15
2.4	Théorème d'existence d'un simplexe de charge	17
3	Système à deux dimensions	25
	Bibliographie	37

Chapitre 1

Introduction

Le présent mémoire est une synthèse de l'article **Lin Niu and Yin Wang, carrying simplex in the Lotka-Volterra competition model with seasonal succession with applications, Discrete and continuous dynamical systems, series B Volume 26, Number 4, April 2021, 2161–2172**, concernant, comme son titre l'indique, un modèle de compétition de Lotka-Volterra de dimension n , et en fait périodique, mais ayant une structure spéciale.

L'idée est de démontrer l'existence d'une sorte de variété de dimension $n - 1$ qui va attirer toutes les solutions non triviales : le simplexe de charge.

La seconde partie de l'article de Niu et Wang consiste à retrouver, par la méthode du simplexe de charge, la classification complète de la dynamique globale en dimension 2 telle qu'elle avait été obtenue dans l'article

S. B Hsu, X. Q Zhao, a Lotka-Volterra competition model with seasonal succession, J. Math. Biol 64(2012), 109-130.

Dans certaines conditions naturelles, peut-être dans presque toutes, la dynamique d'une population ou d'un groupe de populations en interaction, est sujette à une variation périodique, combinaison de contraintes internes et/ou externes. On donne souvent l'exemple de la croissance du phytoplancton et du zooplancton lacustres, en zones tempérées pendant les mois chauds et leur déclin ou repos pendant la saison froide. Sommer et al. [19] ont qualifié ce phénomène de *succession saisonnière*

(seasonal succession, en anglais), responsable d'une dynamique dite de non-équilibre.

Ce phénomène a été théoriquement étudié par un certain nombre d'auteurs. Nous citons quelques approches, mais nous renvoyons à l'introduction de l'article de Niu et Wang et de celui de Klausmeier [8] pour plus de littérature.

Dans le cas de la compétition en plus de nos articles de référence, on peut citer Hsu [3]. En épidémiologie, on peut citer Stone et al. [20], et pour les modèles ressource-consommateur et proie-prédateur on a les articles de Huppert et al. [6] et Rinaldi et al. [13].

Le progrès en terme d'étude théorique, a été entravé au départ par un manque d'outils mathématiques appropriés. L'approche numérique par simulations avec l'aide de solveurs d'équations différentielles s'est imposée au départ, puis celle de la théorie de Floquet/Lyapounov [Klausmeier, [9]], celle de la méthode de continuation pour générer rapidement des diagrammes de bifurcation [Kuznetsov et Levitin, [10]], d'approches propres aux ingénieurs (équilibre harmonique)[Piccardi, [12]], et enfin l'approche des simplexes de charge (Smith [15]) et de la méthode de SSD.

Dans le présent mémoire, on met en exergue la méthode du simplexe de charge telle qu'expliquée dans l'article de Niu et Wang. Il faut noter que les systèmes obtenus dans le cadre de succession de saisons sont des systèmes à commutations forcées, discontinus et périodiques en temps, mais que les applications périodiques associées sont continues.

Dans ce travail de synthèse, nous voulons plus faire connaître la théorie utilisée et la méthode du simplexe, que de donner des preuves complètes des résultats. En effet ces preuves font référence à un nombre important de résultats dans la littérature qu'il nous est impossible de tous détailler.

Du modèle continu à l'application de Poincaré :

On reporte l'étude qui a été menée par Niu et Wang d'un modèle de compétition de Lotka-Volterra, de dimension n , avec succession sai-

sonnière. Il est d'abord prouvé l'existence d'un simplexe de charge de dimension $n - 1$, attirant toute orbite non triviale de \mathbb{R}_+^n . C'est l'objet du chapitre 2.

Pour comprendre un peu les hypothèses H_i qui apparaissent dans le chapitre 2, il est intéressant d'expliquer d'où elles viennent en se basant sur l'article de Smith [15] :

H.L Smith, Periodic competitive differentiel equations and the discrete dynamics of competitive maps, J.Differentiel equations, 64(1986), 165-194.

Soit $N = \{1, 2, \dots, n\}$, si x et y sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , la relation $x \leq y$ signifie que pour tout $i \in N$, $x_i \leq y_i$, la relation $x \ll y$ signifie que pour tout $i \in N$, $x_i < y_i$, enfin, la relation $x < y$ signifie que pour tout $i \in N$, $x \leq y$ et $x \neq y$.

Soit $I \subset N$, $I \neq \emptyset$. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On note par H_I le sous-espace de \mathbb{R}^n engendré par $\{e_i\}_{i \in I}$.

On définit alors $H_I^+ := H_I \cap \mathbb{R}_+^n$, l'intérieur duquel est noté \dot{H}_I^+ et définit par $\dot{H}_I^+ = \{x \in H_I^+ : x_i > 0\}$ (voir chapitre 2 pour plus de détails et de définitions).

Une matrice carrée d'ordre n est dite réductible si elle laisse invariant un des sous-espaces H_I , où I est un sous-espace propre non vide de N . Autrement, elle est irréductible (on peut bien sûr revenir à la définition classique qui dit qu'une matrice carré d'ordre n est réductible si et seulement si il existe une matrice de permutation P telle que $P^t A P$ s'écrive comme une matrice triangulaire bloc supérieure).

On note par A_I la sous-matrice de A obtenue en ôtant les lignes et les colonnes indexées par le complémentaire de I dans N .

Smith considère alors le système de Kolmogorov

$$x'_i = x_i f_i(t, x_1, \dots, x_n) =: F_i(t, x), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

où $F = (F_1, \dots, F_n)$ est suffisamment régulière pour x dans un ouvert U de \mathbb{R}^n tel que $\mathbb{R}_+^n \subset U$ et $t \in \mathbb{R}$. Il est supposé que les solutions de (1.1) sont globales. De plus

1. Il existe $\omega > 0$: $F(t + \omega, x) = F(t, x)$ (périodicité).

2. A) $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(t, x) \leq 0$ pour $i \neq j$ (compétitivité).

B) Pour tout $I \subset N := \{1, \dots, n\}$, $I \neq \emptyset$, la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x)\right)$, $(i, j) \in I \times I$, est irréductible pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \dot{H}_i^+$.

3. Pour tout $i \in N$ la solution triviale de l'équation

$$x'_i = x_i f_i(t, 0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) \quad (1.2)$$

est hyperbolique, soit λ_i son multiplicateur de Floquet.

- Soit $\lambda_i < 1$, auquel cas on suppose que la solution triviale est un attracteur global de (1.2).
- Soit $\lambda_i > 1$, auquel cas on suppose qu'il existe une solution unique non triviale ω -périodique de (1.2) qui soit hyperbolique et qui attire toute autre solution non triviale (voir l'hypothèse H_5 dans le chapitre 2).

Soit alors

$$T : U \subset \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x_0 \mapsto T(x_0) = x(\omega, 0, x_0)$$

l'application de Poincaré associée à (1.1), et où on note par $x(t, 0, x_0)$ la solution de (1.1) telle que $x(0, 0, x_0) = x_0$.

Parmi les conséquences des hypothèses (1), (2) et (3) on peut indiquer les suivantes

- La forme de (1.1) implique que $T(0) = 0$ et que pour tout $\emptyset \neq I \subset N$, H_I , H_I^+ , \dot{H}_I^+ sont positivement invariants (comparer avec l'hypothèse H_2 du chapitre 2).
- T est un C^2 -difféomorphisme de U dans $T(U)$ qui préserve l'orientation (comparer avec les hypothèses H_1 et H'_1).
- L'hypothèse ((2).A) a pour conséquence ce qui suit, (voir hypothèse H_4)

Proposition A

— Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, $T(x) \ll T(y) \Rightarrow x \ll y$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, $T(x) = y \Rightarrow [0, y] \subset T([0, x])$.

- L'hypothèse ((2).B) a pour conséquence (voir hypothèse H_3)

Proposition B

Pour tout $I \subset N$ non vide, si $x \in \dot{H}_I^+$, alors

$$D(T|_{H_I^+})(x)^{-1} := (DT(x))_I^{-1} \gg 0.$$

Notons que $D(T|_{H_I})(x)$ est la matrice obtenue à partir de $DT(x)$ en supprimant les lignes et les colonnes indexées par $j \in C_N(I)$. Notons aussi que pour $x \in \dot{H}_I^+$, $DT(x)$ est une matrice réductible ($\frac{\partial T_j}{\partial x_i} = 0$, pour $i \in I$ et $j \in C_N(I)$) avec $D(T|_{H_I})(x)$ comme une sous-matrice. Il est intéressant d'expliquer le sens ou le but de la proposition B ou de l'hypothèse (3).

Rappelons que le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A est le plus grand des modules des valeurs propres de A ,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\},$$

où $\sigma(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A (spectre).

Si $A \gg 0$, alors $\rho(A) > 0$. Le théorème de Perron-Frobenius pour les matrices fortement positives (i.e. $A \gg 0$), dit alors que $\rho(A)$ est une valeur propre simple de la matrice A (plus grande que toute les autres valeurs propres en module), de plus le vecteur propre correspondant est strictement positif. Ainsi, si la matrice inverse $DT(x)^{-1} \gg 0$, alors la matrice $DT(x)$ admet une valeur propre positive simple qui est strictement plus petite en module que toute autre valeur propre et un vecteur propre correspondant fortement positif.

On peut voir que si x est un point m -périodique de \dot{H}_I^+ (i.e. $T^m(x) = x$ et $T^j(x) \neq x$, pour tout $j = 1, \dots, m-1$) $D(T|_{H_I})^m(x)$ a aussi une plus petite valeur propre (multiplicateur de Floquet) notée $\mu_{I,m}(x)$.

Il correspond à $\mu_{I,m}(x)$ la solution ωm -périodique $\Phi_I(t, 0, x)$ de (1.2) restreinte à I . Smith a ajouté alors l'hypothèse suivante :

4. pour tout $I, \emptyset \neq I \subset N$, pour toute solution ωm -périodique $x(t)$ de (1.1) dans \dot{H}_I^+ , $m > 0$, on a :

$$\int_0^\omega \left(\sum_{i \in I} x_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x(t)) \right) dt \leq 0.$$

La conséquence de cette hypothèse, qu'il faut comparer à H_6 dans le chapitre 2, est :

Proposition C

Si $x \in \dot{H}_I^+$ est un point m -périodique de T , alors $\mu_{I,m}(x) < 1$, $\emptyset \neq I \subset N$.

Nous invitons le lecteur intéressé à consulter pour plus de détails et de motivations biologiques l'article de Smith.

Chapitre 2

Modèle de compétition de Lotka-Volterra

2.1 Présentation du modèle

Le modèle de compétition de Lotka-Volterra de dimension n avec succession saisonnière est donné par le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i, \quad m\omega \leq t \leq m\omega + (1 - \varphi)\omega, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dx_i}{dt} = x_i(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j), \quad m\omega + (1 - \varphi)\omega \leq t \leq (m + 1)\omega, \quad i = 1, \dots, n, \\ (x_1(0), \dots, x_n(0)) = x^0 \in \mathbb{R}_+^n, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in [0, 1]$, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ et où les constantes biologiques ω , λ_i , b_i , et a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) sont strictement positives.

Si $\varphi = 0$, le système (2.1) est réduit au système découplé à n équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ (x_1(0), \dots, x_n(0)) = x^0 \in \mathbb{R}_+^n, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

tandis que, si $\varphi = 1$, le système (2.1) n'est autre que le modèle classique de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j), i = 1, \dots, n, \\ (x_1(0), \dots, x_n(0)) = x^0 \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut voir que le système (2.1) est un système non autonome périodique dans un environnement de succession saisonnière. La période globale est ω , et φ représente la proportion de commutation d'une période entre les sous-systèmes (2.2) et (2.3). D'un point de vue biologique, φ est utilisée pour décrire la proportion de la période de la bonne saison pendant laquelle l'espèce suit le système(2.3), tandis que $(1 - \varphi)$ représente la proportion de la période de la mauvaise saison pendant laquelle l'espèce décline de façon exponentielle selon le système (2.2).

Pour écrire le système(2.1) sous la forme d'un système de Lotka-Volterra ω -périodique de dimension n , on pose pour $i, j = 1, \dots, n$:

$$b_i(t) = \begin{cases} -\lambda_i, & t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega[, \\ b_i, & t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega], \end{cases}$$

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega[, \\ a_{ij}, & t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega]. \end{cases}$$

Le système (2.1) s'écrit comme un modèle de Lotka-Volterra avec des coefficients ω -périodiques discontinus $b_i(t)$ et $a_{ij}(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i(t)(b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t)), \\ (x_1(0), \dots, x_n(0)) = x^0 \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (2.4)$$

On peut voir que le système (2.1) (ou (2.4)) admet une solution globale unique positive ou nulle $x(t, x^0)$ dans $[0, +\infty[$ pour tout $x^0 \in \mathbb{R}_+^n$, on peut le voir, pour simplifier, dans le cas $n = 1$. On note

par $\bar{x}(t, \bar{x}_0)$ la solution unique de l'équation

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}(b - a\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^+,$$

on en déduit que la solution $x(t, x_0)$ de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x, & m\omega \leq t \leq m\omega + (1 - \varphi)\omega, \\ \frac{dx}{dt} = x(b - ax), & m\omega + (1 - \varphi)\omega \leq t \leq (m + 1)\omega, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

est déterminée de manière unique comme suit,

$$\begin{cases} x(t, x_0) = e^{-\lambda(t-m\omega)}x(m\omega, x_0), & t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega] \\ x(t, x_0) = \bar{x}(t - (m\omega + (1 - \varphi)\omega), x(m\omega + (1 - \varphi)\omega, x_0)), \\ t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega] \end{cases}$$

2.2 Modèle à temps discret : application de Poincaré

Puisque le système (2.1) est ω -périodique, il suffit de considérer l'application de Poincaré S sur \mathbb{R}_+^n , c'est-à-dire, $S(x^0) = x(\omega, x^0)$ pour tout $x^0 \in \mathbb{R}_+^n$.

Déterminons d'abord l'application linéaire L par :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e^{-\lambda_1(1-\varphi)\omega}x_1, e^{-\lambda_2(1-\varphi)\omega}x_2, \dots, e^{-\lambda_n(1-\varphi)\omega}x_n) \quad (2.5)$$

pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Notons par ailleurs par $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ le flot associé au système (2.3) de compétition Lotka-Volterra, nous pouvons voir alors que :

$$S(x^0) = Q_{\varphi\omega}(Lx^0), \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad i.e. \quad S = Q_{\varphi\omega} \circ L$$

Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur la dynamique du système à temps discret $\{S^n\}_{n \geq 0}$ (où $S^n = S \circ S \circ \dots \circ S$, n -fois).

Comme expliqué dans le chapitre introductif, Smith [15] a considéré la dynamique de l'application de Poincaré T associée aux systèmes d'équations différentielles de Kolmogorov périodiques. En se basant sur la structure spéciale des systèmes compétitifs de Kolmogorov, il a introduit les six hypothèses suivantes :

- (H_1) T est un difféomorphisme injectif sur son image.
- (H_2) Pour chaque sous-ensemble non vide $I \subset N := \{1, 2, \dots, n\}$, les ensembles H_I , H_I^+ , et \dot{H}_I^+ sont tous positivement invariants pour T et T^{-1} , où $H_I = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j \notin I\}$, $H_I^+ = \mathbb{R}_+^n \cap H_I$ et $\dot{H}_I^+ = \{x \in H_I^+ : x_i > 0, i \in I\}$;
- (H_3) Pour chaque sous-ensemble non vide $I \subset N$, la matrice $D(T|_{H_I^+})(x)^{-1} = (DT(x)^{-1})_I \gg 0$ pour tout $x \in \dot{H}_I^+$ où $T|_{H_I^+}$ est la restriction de T à H_I^+ ;
- (H_4) Si $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = Tx$ alors $[0, y] \subset T[0, x]$;
- (H_5) $T|_{H_I^+}$ a un unique point fixe $u_i > 0$ avec $0 < \frac{d}{dx_i}(T|_{H_I^+})(u_i) < 1$ pour chaque $i \in N$;
- (H_6) Si x est un point m -périodique non trivial de T et $I \subset N$ est tel que $x \in \dot{H}_I^+$, alors $\mu_{I,m}(x) < 1$ où $\mu_{I,m}(x)$ est la valeur propre de $D(T|_{H_I^+})^m(x)$ ayant le plus petit module.

Sous ces hypothèses, il a conjecturé que, de manière générique, il existe un simplexe de charge (nommé ainsi par Zeeman [23]) attirant toutes les orbites non triviales de \mathbb{R}_+^n . Wang et Jiang [22] ont introduit une hypothèse supplémentaire :

- (H_7) Pour chaque sous-ensemble non vide $I \subset N$ et $x, y \in \dot{H}_I^+$, si $0 < T_i x < T_i y$ pour tout $i \in I$, alors $\frac{T_i x}{T_i y} \geq \frac{x_i}{y_i}$ pour tout $i \in I$.

Ils ont prouvé la conjecture. De plus, ils ont montré que (H_7) est en effet génériquement satisfaite par l'application de Poincaré associée aux systèmes de Kolmogorov compétitifs.

Diekmann, Wang et Yan [[2], Théorème 1.1] ont supprimé l'hypothèse (H_6) difficilement vérifiable (c'est le cas pour le systèmes (2.1)), et ont modifié les hypothèses (H_1) et (H_7) en :

(H'_1) T est un C^1 -difféomorphisme sur son image ;

(H'_7) Pour les sous-ensembles non vides $I \subseteq J \subseteq N$, $x \in \dot{H}_I^+$ et $y \in \dot{H}_J^+$, si $T_i x < T_i y$ pour tout $i \in I$, alors $\frac{T_i x}{T_i y} > \frac{x_i}{y_i}$ pour tout $i \in I$.

2.3 Définitions et notations

Nous introduisons et rappelons d'abord quelques définitions et notations utiles :

Notations

- $N := \{1, 2, \dots, n\}$.
- Étant donné $\emptyset \neq I \subset N$,

$$H_I = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, \quad j \notin I\}$$

$$H_I^+ = \mathbb{R}_+^n \cap H_I$$

$$\dot{H}_I^+ = \{x \in H_I^+ : x_i > 0, \quad i \in I\}.$$

- Pour deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous écrivons

$$x \leq y \quad \text{si} \quad x_i \leq y_i \quad \text{pour tout} \quad i \in N.$$

$$x \ll y \quad \text{si} \quad x_i < y_i \quad \text{pour tout} \quad i \in N.$$

$$x < y \quad \text{si} \quad x \leq y \quad \text{et} \quad x \neq y.$$

Définitions

1. Soit $X \subset \mathbb{R}_+^n$ et $S : X \longrightarrow X$ l'application de Poincaré du système (2.1). L'orbite d'un état x pour S est $\gamma(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ où S^n est la composée de S par elle même n fois.
2. Un point fixe x de S est un point $x \in X$ tel que $S(x) = x$.
3. Un point $y \in X$ est appelé un point k -périodique de S s'il existe un entier $k > 1$, tel que $S^k(y) = y$ et $S^m(y) \neq y$ pour tout entier strictement positif $m < k$. L'orbite k -périodique du point k -périodique y , $\gamma(y) = \{y, S(y), S^2(y), \dots, S^{k-1}(y)\}$, est simplement appelée orbite périodique.
4. Un ensemble $V \subset X$ est positivement invariant par S si $SV \subset V$, et invariant si $SV = V$.
5. Si S est une application différentiable, on note par $DS(x)$ la matrice Jacobienne de S au point x .
6. Pour une matrice A ($n \times n$), on écrit $A \geq 0$ si A est une matrice positive ou nulle (i.e. toutes les entrées sont positives ou nulles) et $A \gg 0$ si A est une matrice strictement (ou fortement) positive (i.e. toute les entrées sont strictement positives).
7. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on définit l'intervalle d'ordre fermé,

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^n : x \leq z \leq y\}$$
8. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on définit l'intervalle d'ordre ouvert,

$$[[x, y]] := \{z \in \mathbb{R}^n : x \ll z \ll y\}$$
9. On dit d'une application S qu'elle est compétitive dans \mathbb{R}_+^n , si $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ et $S(x) < S(y)$, alors $x < y$.
10. S est dite fortement compétitive dans \mathbb{R}_+^n , si $S(x) < S(y)$ alors $x \ll y$.
11. Un simplexe de charge pour l'application périodique S est un sous-ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ avec les propriétés suivantes :
 - (P1) Σ est compact, invariant et non ordonné (i.e. $\forall x, y \in \Sigma$, si $x \leq y$ alors $x = y$).

(P2) Σ est homéomorphe par projection radiale au simplexe de probabilité standard de dimension $(n - 1)$, $\Delta^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_i x_i = 1\}$.

(P3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ il existe un $y \in \Sigma$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} |S^n x - S^n y| = 0$.

2.4 Théorème d'existence d'un simplexe de charge

L'importance des simplexes de charges vient du fait que les propriétés asymptotiques des trajectoires sont reflétées par la dynamique réduite à Σ .

Une conséquence de la propriété (P3) est que, si $x > 0$, alors $\omega(x) \subset \Sigma$, où $\omega(x)$ est l'ensemble ω -limite de la trajectoire passant par x . Σ contient donc en particulier, tous les points fixes où triviaux et les orbites périodiques.

Notons que Smith explique que la propriété (P2) est en fait une conséquence du fait que Σ est supposée non ordonnée dans (P1), dans le sens où toute droite dans \mathbb{R}_+^n passant par l'origine rencontre Σ en un unique point, Σ est alors homéomorphe à Δ^{n-1} .

Exemples

A)

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

L'équation logistique a justement pour simplexe de charge l'ensemble

$\Sigma = \{K\}$, où K est la capacité de portée où la capacité limite.

B)

$$\begin{cases} S' = 1 - S - \frac{mSx}{a + S} \\ x' = x\left(\frac{mS}{a + S} - 1\right) \end{cases}$$

C'est le modèle normalisé du chemostat simple [18].

Si on pose $V = 1 - S - x$, on obtient

$$V' = -V,$$

qui a pour solution $V(t) = V(0)e^{-t}$.

On remarque que $S(t) + x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$, d'où l'on peut déduire que l'ensemble ω -limite du modèle se trouve dans le segment

$$\Sigma : S + x - 1 = 0$$

qui est en fait un simplexe de charge.

Avant d'énoncer le théorème principal d'existence d'un simplexe de charge on donne les lemmes suivants :

Lemme 2.1 (*Hsu et Zhao [[5], Lemme 2.1]*) *Soit $x(t, x_0)$ l'unique solution du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x, & m\omega \leq t \leq m\omega + (1 - \varphi)\omega, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{dx}{dt} = x(b - ax), & m\omega + (1 - \varphi)\omega \leq t \leq (m + 1)\omega, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2.6)$$

Alors les deux assertions suivantes sont satisfaites :

- (i) Si $b\varphi - \lambda(1 - \varphi) \leq 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$;
- (ii) Si $b\varphi - \lambda(1 - \varphi) > 0$, alors le système (2.6) admet une unique solution $x^*(t)$ ω -périodique strictement positive, et $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, x_0) - x^*(t)) = 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

PREUVE. Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, soit $y(t, y_0)$ l'unique solution de l'équation $\frac{dy}{dt} = y(b - ay)$, avec $y(t, y_0) = \frac{\frac{b}{a}y_0}{(\frac{b}{a} - y_0)e^{-bt} + y_0}$, $y(0, y_0) = y_0 \in \mathbb{R}^+$.

Il découle que l'unique solution $x(t, x_0)$ du système (2.6) est déterminée comme suit :

$$x(t, x_0) = e^{-\lambda(t - m\omega)} x(m\omega, x_0), \quad \text{pour tout } t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega]$$

$$x(t, x_0) = y(t - [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega], x(m\omega + (1 - \varphi)\omega, x_0)),$$

pour tout $t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega]$.

Soit S l'application de Poincaré associée au système (2.6) telle que :
 $S(x_0) = x(\omega, x_0)$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$S(x_0) = y(\varphi\omega, e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0),$$

$$S(x_0) = \frac{\frac{b}{a}e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0}{\left(\frac{b}{a} - e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0\right)e^{-b\varphi\omega} + x_0e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}}, \text{ pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Évidemment l'origine est un point fixe de S . Cherchons les points fixes positifs :

$$S(x_0) = x_0$$

$$\iff \frac{\frac{b}{a}e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0}{\left(\frac{b}{a} - e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0\right)e^{-b\varphi\omega} + x_0e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}} = x_0$$

$$\iff \frac{\frac{b}{a}e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}}{\left(\frac{b}{a} - e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0\right)e^{-b\varphi\omega} + x_0e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}} = 1$$

$$\iff \frac{b}{a}e^{-\lambda(1-\varphi)\omega} = \left(\frac{b}{a} - e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}x_0\right)e^{-b\varphi\omega} + x_0e^{-\lambda(1-\varphi)\omega}$$

$$\iff \frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}e^{\lambda(1-\varphi)\omega} - x_0\right)e^{-b\varphi\omega} + x_0$$

$$\iff x_0 = \frac{\frac{b}{a}(1 - e^{\lambda(1-\varphi)\omega - b\varphi\omega})}{1 - e^{-b\varphi\omega}}$$

$$\iff x_0 = \frac{\frac{b}{a}(1 - e^{-\omega(b\varphi - \lambda(1-\varphi))})}{1 - e^{-b\varphi\omega}}$$

Ainsi, on remarque que si $b\varphi - \lambda(1 - \varphi) \leq 0$ alors $1 \leq e^{\lambda(1-\varphi)\omega - b\varphi\omega}$, donc l'application de Poincaré n'admet aucun point fixe strictement

positif.

Par contre si $b\varphi - \lambda(1 - \varphi) > 0$, alors l'application de Poincaré admet un unique point fixe strictement positif. ■

Lemme 2.2 *Supposons (H'_1) , (H_2) et (H_3) , alors l'hypothèse (H_4) est satisfaite.*

Pour la preuve voir See Jiang et al. [[7] Proposition 2.1]

Grâce à ce dernier lemme l'hypothèse H_4 sera ignorée dans l'énoncé du théorème principal suivant

Théorème 2.1 *(Condition suffisante d'existence du simplexe de charge)*

Supposons que les hypothèses H'_1 , H_2 , H_3 , H_5 , H'_7 sont vérifiées et que $b_i\varphi - \lambda_i(1 - \varphi) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Soit $S : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ l'application de Poincaré induite par le système (2.1). Alors, le système (2.1) admet un simplexe de charge Σ qui attire toute orbite non triviale dans \mathbb{R}_+^n .

PREUVE.

Selon le théorème de Diekmann et al. [2] il suffit de vérifier les hypothèses (H'_1) , (H_2) , (H_3) , (H_5) et (H'_7) pour l'application de Poincaré S associée au système (2.1). Tout d'abord nous pouvons obtenir que S est un difféomorphisme sur son image en raison de l'expression $S = Q_{\varphi\omega} \circ L$ et la régularité du flot $\{Q_t\}_{t>0}$, alors l'hypothèse (H'_1) est vérifiée.

Par l'expression de l'équation (2.4), nous pouvons voir que tous les axes et plans de coordonnées sont invariants sous l'application périodique S , ce qui implique que l'hypothèse (H_2) est vérifiée.

On définit maintenant :

$F(x) = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$, avec :

$$F_i(x) = x_i(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

On note $u(t, x) := Q_t(x)$ et $V(t, x) := D_x u(t, x) = D_x Q_t(x)$.

Alors

$$S(x) = Q_{\varphi\omega}(Lx) = u(\varphi\omega, Lx). \quad (2.7)$$

et donc

$$\begin{aligned} DS(x) &= D(Q_{\varphi\omega}(Lx)) \cdot D(Lx) \\ &= V(\varphi\omega, Lx) \cdot \text{diag}(e^{-\lambda_1(1-\varphi)\omega}, e^{-\lambda_2(1-\varphi)\omega}, \dots, e^{-\lambda_n(1-\varphi)\omega}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

On voit que $V(t, x)$ est solution de l'équation différentielle matricielle de

$$\frac{dU(t)}{dt} = DF(u(t, x))U(t), \quad U(0) = I_d. \quad (2.9)$$

Pour utiliser les résultats sur les systèmes coopératifs, plutôt que compétitifs, on pose :

$$Y(t) = (U(t)^T)^{-1}$$

On obtient l'équation adjointe correspondante ainsi

$$\frac{dY(t)}{dt} = -(DF(u(t, x)))^T Y(t), \quad Y(0) = I_d. \quad (2.10)$$

La matrice $-(DF(u(t, x)))^T$ est une matrice coopérative et irréductible (voir Smith [15]).

D'après Smith [[16], théorème $D(ii)$], nous obtenons $(V(t, x)^T)^{-1} \gg 0$ pour tout $t > 0$, donc en particulier $(V(\varphi\omega, Lx)^T)^{-1} \gg 0$. D'après (2.8), on a alors que

$$DS(x)^{-1} = \text{diag}(e^{\lambda_1(1-\varphi)\omega}, \dots, e^{\lambda_n(1-\varphi)\omega})(V(\varphi\omega, Lx)^T)^{-1} \gg 0.$$

Si $x \in \dot{H}_I^+$, alors $D(S \mid_{H_I^+})(x)$ est une matrice obtenue à partir de $DS(x)$ en supprimant les lignes et les colonnes indexées par le complémentaire de I dans N .

Il découle que $(DS(x))^{-1} \gg 0$. Ainsi, l'hypothèse (H_3) est vraie pour le système (2.1).

Notons que l'hypothèse (H_4) est un résultat de (H'_1) , (H_2) et (H_3) par le lemme (2.2).

Compte tenu du lemme (2.1) il découle que l'application unidimensionnelle correspondante possède propriété de la convergence de toutes les orbites non triviales vers le point fixe strictement positif, c'est-à-dire que l'hypothèse (H_5) est vérifiée.

Enfin, il reste à montrer que l'hypothèse (H'_7) est vérifiée, pour cela on écrit le système (2.3) comme suit :

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

avec

$$f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

.

Soit

$$W(t) = \frac{u_i(t, Lx)}{u_i(t, Ly)}$$

Comme $Q_t(x) = u(t, x)$ pour $t \in [0, \varphi\omega]$, on a :

$$\dot{u}_i(t, Lx) = u_i(t, Lx) f_i(u(t, Lx))$$

$i = 1, 2, \dots, n$, pour $t \in [0, \varphi\omega]$, alors :

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= \frac{\dot{u}_i(t, Lx)u_i(t, Ly) - u_i(t, Lx)\dot{u}_i(t, Ly)}{u_i(t, Ly)^2} \\
&= \frac{u_i(t, Lx)f_i(u(t, Lx))u_i(t, Ly) - u_i(t, Lx)u_i(t, Ly)f_i(t, Ly)}{u_i(t, Ly)^2} \\
&= \frac{u_i(t, Lx)(f_i(u(t, Lx)) - f_i(t, Ly))}{u_i(t, Ly)} \\
&= W(t)(f_i(u(t, Lx)) - f_i(t, Ly)) \\
&= W(t) \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \lambda(s)) \cdot (u_j(t, Lx) - u_j(t, Ly)) ds,
\end{aligned}$$

où $\lambda(s) = su(t, Lx) + (1-s)u(t, Ly)$, $s \in [0, 1]$.

En remarquant l'expression du système (2.3), on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0$. Si $S_i x < S_i y$, alors $u_i(t, Lx) < u_i(t, Ly)$, $t \in [0, \varphi\omega]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ainsi $\dot{W}(t) > 0$, i.e. $W(\varphi\omega) > W(0)$. Par conséquent :

$$\frac{u_i(\varphi\omega, Lx)}{u_i(\varphi\omega, Ly)} > \frac{u_i(0, Lx)}{u_i(0, Ly)} = \frac{(Lx)_i}{(Ly)_i} = \frac{e^{-\lambda_i(1-\varphi)\omega} x_i}{e^{-\lambda_i(1-\varphi)\omega} y_i} = \frac{x_i}{y_i}$$

Cela implique que $\frac{S_i x}{S_i y} > \frac{x_i}{y_i}$, c'est-à-dire l'hypothèse (H'_7) est vérifiée.

■

Chapitre 3

Systeme à deux dimensions

Dans ce chapitre, nous utiliserons le simplexe de charge (théorème (2.1)) pour étudier la dynamique globale du modèle compétitif de Lotka-Volterra à deux dimensions avec succession saisonnière :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i, & m\omega \leq t \leq m\omega + (1 - \varphi)\omega, \quad i = 1, 2, \\ \frac{dx_1}{dt} = x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2), & m\omega + (1 - \varphi)\omega \leq t \leq (m + 1)\omega, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2), & m\omega + (1 - \varphi)\omega \leq t \leq (m + 1)\omega, \\ (x_1(0), x_2(0)) = x^0 \in \mathbb{R}_+^2, & m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Hsu et Zhao [5] ont analysé la stabilité du point fixe trivial O , des points fixes axiaux R_i , $i = 1, 2$ et du point fixe strictement positif E , et obtenu une étude complète de la dynamique globale du système (3.1).

Expliquons ce que sont R_1 et R_2 . Supposons par exemple que $b_1\varphi - \lambda_1(1 - \varphi) > 0$. D'après le lemme (2.1) le sous-système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 & t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega], \quad m = 1, \dots, n \\ \frac{dx_1}{dt} = x_1(b_1 - a_1 x_1) & t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega], \end{array} \right.$$

admet une solution ω -périodique $x_1^*(t)$ unique attirant tous les solutions non nulles. A cette solution, il correspond pour le système complet (3.1) la solution périodique $(x_1^*(t), 0)$.

On définit alors pour S l'équilibre correspondant à cette solution périodique $R_1 = (x_1^*(0), 0)$.

De même que $R_2 = (0, x_2^*(0))$ où $x_2^*(t)$ est la solution unique du sous-système

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 & t \in [m\omega, m\omega + (1 - \varphi)\omega], \quad m = 1, \dots, n \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(b_2 - a_2 x_2) & t \in [m\omega + (1 - \varphi)\omega, (m + 1)\omega]. \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous allons simplifier leur approche en utilisant la théorie du simplexe de charge pour obtenir la classification complète de la dynamique globale du système (3.1).

Cette approche permet d'éviter les estimations compliquées concernant les multiplicateurs de Floquet de la solution périodique strictement positive du système (3.1).

On définit

$$h_i = b_i \varphi - \lambda_i (1 - \varphi) \omega, \quad i = 1, 2.$$

D'après le lemme (2.1), si $h_i \leq 0$, alors l'espèce i s'éteindra, et donc la dynamique du système est triviale.

Tout au long de ce qui vient, nous ne considérons que le cas : $h_i > 0$, $i = 1, 2$.

Définitions et notations :

- Soit $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$.
- On écrit $x \leq_K y$ si $y - x \in K$, $x <_K y$ si $y - x \in K \setminus \{0\}$, et $x \ll_K y$ si $y - x \in \text{Int}K$.
- On note $C_1 := \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}^+\}$, et $C_2 := \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}^+\}$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^2$ et $a \ll_K b$, on définit l'intervalle fermé d'ordre- K

$$[a, b]_K := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : a \leq_K x \leq_K b\},$$

et l'ouvert d'ordre- K

$$[[a, b]]_K := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : a \ll x \ll b\}.$$

Graphiquement, $x \leq_K y$ signifie que, dans le plan (xoy) , le point d'affixe x est au nord-ouest du point d'affixe y , tout en pouvant être au nord ou à l'ouest. Même remarque pour $x <_K y$, sauf que $x \neq y$. Enfin $x \ll y$ signifie que x est strictement au nord-ouest de y .

De même, graphiquement, l'intervalle $[[a, b]]_K$ ouvert est en fait l'intérieur du rectangle dont l'une des diagonales est le segment $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 .

Lemme 3.1 *L'application de Poincaré S associée au système (3.1) a les propriétés suivantes :*

- (i) *Si $x \leq_K y$, alors $S(x) \leq_K S(y)$. De plus, si $x <_K y$ et $y \in \text{Int}\mathbb{R}_+^2$, alors $S(x) \ll_K S(y)$.*
- (ii) *Pour tout $x^0 \in \mathbb{R}_+^2$, la suite de points $S^n(x^0)$ converge vers un point fixe de S lorsque $n \rightarrow \infty$.*
- (iii) *S admet un simplexe de charge Σ de dimension 1 tel que toute orbite non triviale est asymptotique à un point fixe de Σ .*

PREUVE.

Pour (i) et (ii), voir Hsu et Zhao [[5], lemme 2.2].

Pour la monotonie de S par rapport à " \leq_K ", voir aussi Smith et Waltman [[18], théorème B. 6].

L'assertion (iii) résulte de (ii) et du théorème (2.1) pour le cas de $n = 2$. ■

Lemme 3.2 *Considérons le système (3.1) :*

- (i) *Comme les h_i sont supposées positifs l'origine O est un point fixe de S hyperbolique répulsif.*
- (ii) *Si $\frac{h_2}{a_{21}} > \frac{h_1}{a_{11}}$, alors R_1 est un point fixe instable (point-selle)*

de S , donc R_1 est répulsif le long de Σ .

Si $\frac{h_2}{a_{21}} < \frac{h_1}{a_{11}}$, alors R_1 est un point fixe asymptotiquement

stable (nœud) de S , donc R_1 est attractif le long de Σ .

(iii) Si $\frac{h_1}{a_{12}} > \frac{h_2}{a_{22}}$, alors R_2 est un point fixe instable (point-selle)

de S , et donc R_2 est répulsif le long de Σ .

Si $\frac{h_1}{a_{12}} < \frac{h_2}{a_{22}}$, alors R_2 est un point fixe asymptotiquement

stable (nœud) de S , et donc R_2 est attractif le long de Σ .

PREUVE.

Pour (i), voir la preuve du théorème 2.1(i) dans Hsu et Zhao [5].

D'après le lemme 2.3 dans Hsu et Zhao [5] et le lemme (3.1), (ii) et (iii) sont vérifiées. ■

Lemme 3.3 On considère le système (3.1) :

(i) Si S a un point fixe strictement positif \bar{x} , alors $y := \int_0^{\varphi\omega} Q_t(L\bar{x})dt$ doit être une solution strictement positive du système algébrique linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = h_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = h_2. \end{cases}$$

(ii) Si $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, alors S a au plus un point fixe strictement positif.

PREUVE. Voir Hsu et Zhao [[5] lemme 2.5]. ■

Lemme 3.4 Soit (X, X^+) un espace de Banach ordonné avec un cône solide X^+ . Soit $T : U \longrightarrow U$ une application monotone et continue, où U est un ensemble ouvert borné de $\text{Int}X^+$. Supposons que T a un point fixe $x^* \in U$ de telle sorte que

(a) La dérivée au sens de Fréchet $DT(x^*) : X \longrightarrow X$ existe, $DT(x^*)$ est fortement positive et bornée, et le rayon spectral $\rho(DT(x^*)) = 1$;

(b) x^* n'attire aucun point $x \in U$ avec soit $x > x^*$ soit $x < x^*$.
 Alors il existe un $\delta > 0$ tel que l'ensemble localement stable
 $W_\delta^T := \{x \in U : \|x - x^*\| < \delta, \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x^*\}$ est une
 variété locale fortement stable de T en x^* .

PREUVE. voir Smith and Thieme [[17], preuve du théorème 3.4]. ■

Lemme 3.5 *Supposons que*

$$h_i > 0, i = 1, 2.$$

Sous les hypothèses du théorème (2.1), si E est un point fixe strictement positif de S , alors la matrice jacobienne $DS(E)$ est fortement K -positive et $\det DS(E) < 1$.

PREUVE.

Soit $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) := Q_t(LE)$ et $V(t) = (V_1(t), V_2(t)) := D_x Q_t(LE)$. Compte tenu de l'équation (2.9),

$$\frac{dV(t)}{dt} = \begin{pmatrix} b_1 - 2a_{11}u_1(t) - a_{12}u_2(t) & -a_{12}u_1(t) \\ -a_{21}u_2(t) & b_2 - 2a_{22}u_2(t) - a_{21}u_1(t) \end{pmatrix} V(t),$$

$$V(0) = I_d.$$

D'après les coefficients de la matrice de l'équation ci-dessus, $V(t)$ est fortement monotone par rapport à ($<_K$) dans $Int\mathbb{R}_+^2$. Pour tout $\xi >_K 0$, on a

$$diag(e^{-\lambda_1(1-\varphi)\omega}, e^{-\lambda_2(1-\varphi)\omega}) \cdot \xi >_K 0.$$

Donc,

$$DS(E)\xi = V(\varphi\omega) \cdot diag(e^{-\lambda_1(1-\varphi)\omega}, e^{-\lambda_2(1-\varphi)\omega}) \cdot \xi \gg_K 0,$$

ce qui implique que $DS(E)$ est fortement K -positive.

D'après l'expression (2.8) de $DS(x)$ dans la démonstration du théorème (2.1), il en résulte que

$$\det DS(x) = \det V(\varphi\omega, Lx) \cdot \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \varphi)\omega).$$

D'après (2.9) et à la formule de Liouville, nous avons :

$$\begin{aligned} \det V(\varphi\omega, LE) &= \exp\left(\int_0^{\varphi\omega} \operatorname{tr}(DF(u(t)))dt\right) \\ &= \exp\left((\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \varphi)\omega - \int_0^{\varphi\omega} (a_{11}u_1(t) + a_{22}u_2(t))dt\right), \end{aligned}$$

où $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) := Q_t(LE)$, alors,

$$DS(E) = \exp\left(-\int_0^{\varphi\omega} (a_{11}u_1(t) + a_{22}u_2(t))dt\right) < 1.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de classification principal de ce chapitre et d'en donner la preuve telle que trouvée dans l'article de NIU et al. [11].

Théorème 3.1 *Pour le système (3.1)*

1. *(Exclusion compétitive) Si $\frac{h_2}{a_{21}} > \frac{h_1}{a_{11}}$, $\frac{h_1}{a_{12}} < \frac{h_2}{a_{22}}$, alors S n'admet aucun*

point fixe strictement positif, et R_2 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus C_1$.

2. *(Exclusion compétitive) Si $\frac{h_2}{a_{21}} < \frac{h_1}{a_{11}}$, $\frac{h_1}{a_{12}} > \frac{h_2}{a_{22}}$, alors S n'admet aucun*

point fixe strictement positif, et R_1 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus C_2$.

3. *(Coexistence) Si $\frac{h_2}{a_{21}} > \frac{h_1}{a_{11}}$, $\frac{h_1}{a_{12}} > \frac{h_2}{a_{22}}$, alors S admet un*
unique

point fixe strictement positif E globalement asymptotiquement stable dans $\operatorname{Int}\mathbb{R}_+^2$.

4. (Bi-stabilité) Si $\frac{h_2}{a_{21}} < \frac{h_1}{a_{11}}, \frac{h_1}{a_{12}} < \frac{h_2}{a_{22}}, R_1$ et R_2 sont localement

asymptotiquement stable et S admet un unique point fixe strictement positif E . De plus il existe une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^2$ continue, non bornée, invariante et non ordonnée (par rapport à " $<_K$ "), qui sépare les bassins d'attraction de R_1 et R_2 .

L'énoncé 1 du théorème (3.1), en terme de solutions du système (3.1), dit que la solution périodique $(x_1^*(t), 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour (3.1) dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus C_1$.

L'énoncé 3 dit que sous la condition donnée, le modèle (3.1) admet une unique solution positive ω -périodique $\bar{x}(t)$ et que $\bar{x}(t)$ est globalement asymptotiquement stable dans $Int\mathbb{R}_+^2$.

L'énoncé 4 donne une condition qui assure l'existence d'une unique solution positive ω -périodique $\bar{x}(t)$, et qu'il existe une courbe unidimensionnelle $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^2$ telles que O et $\bar{x}(0)$ sont dans Γ avec :

- a) Si $x^0 \in \Gamma \setminus \{0\}$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x^0) - \bar{x}(t)| = 0$.
- b) Si $x^0 >_K y^0$ pour $y^0 \in \Gamma$, $x(t, x^0)$ est asymptotique à $(x_1^*(t), 0)$.
- c) Si $x^0 <_K y^0$ pour $y^0 \in \Gamma$, la solution $x(t, x^0)$ est asymptotique à $(0, x_2^*(t))$.

PREUVE.

• Pour (1) et (2), nous ne démontrons que (1), car l'autre est équivalente. Le système algébrique linéaire du lemme (3.3) (i) n'admet pas de solution positive (car un des déterminants secondaires est négatif). Donc il n'existe aucun point fixe strictement positif.

D'après le lemme (3.2) (ii), (iii), il découle que R_1 est un point-selle et que R_2 est asymptotiquement stable. Compte tenu du lemme (3.1) (iii), nous obtenons que R_2 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus C_1$.

• Maintenant montrons l'énoncé (3) du théorème, comme $\frac{h_2}{a_{21}} > \frac{h_1}{a_{11}},$

$$\frac{h_1}{a_{12}} > \frac{h_2}{a_{22}}$$

alors R_1 et R_2 sont tous deux des points-selles, et par le lemme (3.1) (ii), il existe au moins un point fixe strictement positif.

D'après le lemme (3.3) (ii), le point fixe strictement positif est unique (noté E).

En même temps, le lemme (3.1) (iii), assure que E est globalement attractif dans $Int\mathbb{R}_+^2$, de plus on a $E \in [[R_1, R_2]]_K$.

Pour tout voisinage U_1 de E , on peut trouver deux points $p, q \in U_1 \cap \Sigma$ de telle sorte que

$$p \ll_K E \ll_K q \text{ et } [[p, q]]_K \subset U_1.$$

Puisque le simplexe de charge Σ est invariant, non ordonné (par rapport à " \leq ") et globalement attractif, on peut supposer sans perte de généralité que $p \ll Sp$ et $Sq \ll q$. Alors le lemme (3.1) (i) implique que

$$p \ll Sp \ll \dots \ll S^n p \text{ et } S^n q \ll \dots \ll Sq \ll q, \forall n \geq 1.$$

Alors

$$\forall x \in [[p, q]]_K \text{ on a } S^n p \ll S^n x \ll S^n q, \forall n \geq 0,$$

donc

$$S^n x \in [[p, q]]_K \subset U_1, \forall n \geq 0,$$

qui cela signifie que E est stable au sens de Lyapounov.

D'autre part en remarquant que $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n p = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n q = E$, nous obtenons en outre que E est localement asymptotiquement stable.

Conclusion E est globalement asymptotiquement stable.

• Montrons l'énoncé (4). Soit

$$U := [R_2, R_1]_K = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : R_2 \leq_K x \leq_K R_1\}.$$

Comme $\frac{h_2}{a_{21}} < \frac{h_1}{a_{11}}$, $\frac{h_1}{a_{12}} < \frac{h_2}{a_{22}}$ alors R_1 et R_2 sont localement asymptotiquement stables d'après le lemme (3.2) (ii), (iii).

D'après la proposition (2.1) dans Hsu, Smith and Waltman [4], S admet un point fixe positif E dans U , et $R_2 \leq_K E \leq_K R_1$, de plus

d'après le lemme (3.3) (ii), E est unique. On suppose par l'absurde auquel cas, R_1 et E sont tous deux stables, alors d'après la proposition (2.1) dans Hsu, Smith and Waltman [4], S a un autre point fixe positif E' dans $[E, R_1]_K$, ce qui contredit l'unicité du point fixe positif, donc E est instable.

Soit B_1 et B_2 les bassins d'attractions respectifs de R_1 et R_2 pour S dans \mathbb{R}_+^2 , alors B_1 et B_2 sont relativement ouvert; de plus en raison du Théorème dit des 'connecting orbits' (Dancer and Hess [[1], Proposition 1]) on remarque que :

$\{\omega \in \mathbb{R}_+^2 : E <_K \omega \leq_K R_1\} \subset B_1$ et $\{\omega \in \mathbb{R}_+^2 : R_2 <_K \omega \leq_K E\} \subset B_2$.

On définit $\Gamma := \mathbb{R}_+^2 \setminus (B_1 \cup B_2)$. On a $O, E \in \Gamma$ et Γ est invariant.

Montrons d'abord que Γ n'est pas borné, Supposons, par l'absurde, que Γ est borné alors il existe une boule ouverte $B \subset \mathbb{R}^2$, de fermeture \bar{B} , telle que $\Gamma \subset \bar{B}$, donc $\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{B} = (B_1 \setminus \bar{B}) \cup (B_2 \setminus \bar{B})$ qui est une contradiction avec la connexité de $\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{B}$.

Maintenant montrons que Γ est non ordonné par rapport a " \leq_K ". Supposons deux points $x, y \in \Gamma$ tel que $x <_K y$, alors en raison du fait que $\Gamma \setminus \{O\} \subset \text{Int}\mathbb{R}_+^2$ le lemme (3.1) (i) implique que $S^n x \ll_K S^n y$ pour tout $n \geq 1$, de plus on remarque que $x, y \notin B_1 \cup B_2$, et d'après le lemme (3.1) (ii) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n y = E$ ce qui donne que E attire un sous-ensemble ouvert $[[S^{n_1}x, S^{n_1}y]]_K$.

D'autre part d'après le lemme (3.5) la plus petite valeur propre strictement positive de la matrice $DS(E)$ est inférieure a 1. Soit ρ la plus grande valeur propre de la matrice $DS(E)$, puisque E est instable alors on a $\rho \geq 1$. D'une part, si $\rho > 1$, alors E est un point-selle donc n'est pas attractif ce qui induit a une contradiction avec le fait que E attire un sous-ensemble ouvert $[[S^{n_1}x, S^{n_1}y]]_K$.

D'autre part si $\rho = 1$, alors le lemme (3.1) (i) et le lemme (3.5) impliquent que S est une application continue et monotone par rapport a " \leq_K " et $DS(E)$ est strictement positif. On remarque aussi que

$$\{\omega \in \mathbb{R}_+^2 : E <_K \omega \leq_K R_1 \subset B_1\},$$

et

$$\{\omega \in \mathbb{R}_+^2 : R_2 \leq_K \omega <_K E\} \subset B_2,$$

il découle du Lemme (3.4) qu'il existe un certain $\delta > 0$ tel que l'ensemble localement stable $W_\delta^s := \{x \in \text{Int}\mathbb{R}_+^2 : \|x - E\| < \delta, \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x) = E\}$ est une variété localement fortement stable W_{loc}^{ss} de E .

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n y = E$, on peut choisir un entier n_2 assez grand, tel que $z \in W_\delta^s(E)$ pour tout $z \in [[S^{n_2}x, S^{n_2}y]]_K$, ce qui donne $[[S^{n_2}x, S^{n_2}y]]_K \subset W_\delta^s(E)$, finalement par le lemme (3.4) on a $[[S^{n_2}x, S^{n_2}y]]_K \subset W_{loc}^{ss}(E)$.

D'autre part d'après Shub [[14], Théorème.8] on a $W_{loc}^{ss}(E)$ est un graphe lipschitzien et par conséquent il ne peut pas contenir l'ensemble ouvert $[[S^{n_2}x, S^{n_2}y]]_K$ ce qui nous ramène a une contradiction.

Conclusion Γ n'est pas ordonné par rapport a " \leq_K " .

Maintenant il nous reste a montrer que Γ est une courbe continue, d'abord on remarque que S est fortement monotone par rapport a " \leq_K " dans $\text{Int}\mathbb{R}_+^2$.

En suite on définit $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{O\}$, alors $((B_1 \cup \Gamma) \cap \text{Int}\mathbb{R}_+^2, (B_2 \cup \Gamma) \cap \text{Int}\mathbb{R}_+^2)$ est une décomposition d'ordre de $\text{Int}\mathbb{R}_+^2$ (Takáč [[21], définition 1.1]) avec $\tilde{\Gamma}$ étant la borne.

D'après Takáč [[21], proposition 1.3], on obtient $\tilde{\Gamma}$ est un graphe lipschitzien de dimension 1, on peut écrire $\tilde{\Gamma}$ comme le graphe $\{(x_1, h(x_1)) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 > 0\}$, avec $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue strictement croissante.

Soit $P = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} (x_1, h(x_1))$, alors $P \in \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \Gamma$, ce qui donne que $P = O$, ainsi,

$\Gamma = \tilde{\Gamma} \cup \{O\}$, d'ou Γ est une courbe continue. ■

Selon l'analyse ci-dessus, nous avons quatre portraits de phase correspondants comme suit

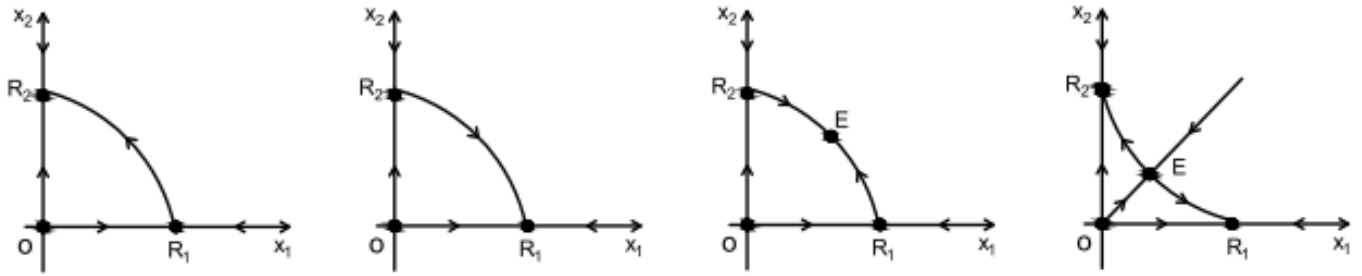


FIGURE 3.1 –

Conclusion

Dans ce mémoire, les auteurs se sont concentrés sur le modèle de compétition entre n -espèces de Lotka-Volterra à coefficients périodiques. Ils ont obtenu que le système (2.1) admet un simplexe de charge de dimension $n - 1$ qui attire toutes les orbites non-triviales dans \mathbb{R}_+^n , sous la condition $h_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. En particulier, lorsque $n = 2$, le système admet un simplexe de charge Σ de dimension 1. Les auteurs ont appliqué la théorie du simplexe de charge au modèle de dimension 2 proposé par Hsu et Zhao [5] pour obtenir la même classification complète de la dynamique. Plus précisément, nous avons seulement besoin d'analyser la stabilité des points fixes axiaux et l'unicité du point fixe strictement positif, au lieu de l'estimation des multiplicateurs de Floquet du point fixe strictement positif.

Bibliographie

- [1] E. N. Dancer and P. Hess, Stability of fixed points for order-preserving discrete-time dynamical systems, *J. Reine Angew. Math.*, 419 (1991), 125–139.
- [2] O. Diekmann, Y. Wang and P. Yan, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20 (2008), 37–52.
<http://dx.doi.org/10.3934/dcds.2008.20.37>
- [3] S. B. Hsu, A competition model for a seasonally fluctuating nutrient. *Journal of Mathematical Biology* 9 (1980), 115–132.
- [4] S. B. Hsu, H. L. Smith and P. Waltman, Competitive exclusion and coexistence for competitive systems on ordered Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (1996), 4083–4094.
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01724-2>
- [5] S. B. Hsu and X. Q. Zhao, A Lotka–Volterra competition model with seasonal succession, *J. Math. Biol.* (2012) 64 :109–130.
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-011-0408-6>
- [6] A. Huppert, B. Blasius, R. Olinky, L. Stone, A model for seasonal phytoplankton blooms. *Journal of Theoretical Biology* 236 (2005), 276–290.
- [7] J. Jiang, J. Mierczynski and Y. Wang, Smoothness of the carrying simplex for discrete time competitive dynamical systems : A characterization of neat embedding, *J. Differential Equations*, 246 (2009), 1623–1672.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2008.10.008>
- [8] C.A. Klausmeier, successional state dynamics : A novel approach to modeling nonequilibrium foodweb dynamics, *Journal of Theo-*

retical Biology, 262 (2010), 584–595
www.elsevier.com/locate/yjtbi

- [9] C.A. Klausmeier, Floquet theory : a useful tool for understanding none-equilibrium dynamics. *Theoretical Ecology* 1 (2008), 153–161.
- [10] Yu. A. Kuznetsov, V.V. Levitin, *CONTENT* : a multiplatform environment for analyzing dynamical systems. Dynamical Systems Laboratory, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam (1996).
<http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT/>
- [11] L. Niu and Y. Wang, carrying simplex in the Lotka-Volterra competition model with seasonal succession with applications, *Discrete and continuous dynamical systems, series B Volume 26, Number 4*, April 2021, 2161–2172.
<http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2021014>
- [12] C. Piccardi, 1994. Bifurcations of limit cycles in periodically forced nonlinear systems : the harmonic balance approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* 41, 315–320.
- [13] S. Rinaldi, S. Muratori, YU. Kuznetsov, 1993. Multiple attractors, catastrophes and chaos in seasonally-perturbed predator–prey communities. *Bulletin of Mathematical Biology* 55, 15–35.
- [14] M. Shub, *Global Stability of Dynamical Systems* Springer, New-York/Berlin, 1987.
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-1947-5>
- [15] H.L Smith, Periodic competitive differential equations and the discrete dynamics of competitive maps, *J. Differential equations*, 64 (1986), 165–194.
- [16] H. L. Smith, Periodic solutions of periodic competitive and cooperative systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 17 (1986), 1289–1318.
<http://dx.doi.org/10.1137/0517091>
- [17] H. L. Smith and H. R. Thieme, Stable coexistence and bi-stability for competitive systems on ordered Banach spaces, *J. Differential*

- Equations, 176 (2001), 195–222.
<http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2001.3981>
- [18] H. L. Smith and P. Waltman, *The Theory of the Chemostat*, Cambridge University Press, 1995
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511530043>
- [19] U. Sommer, Z. M. Gliwicz, W. Lampert and A. Duncan, The PEG-model of seasonal succession of planktonic events in fresh waters, *Archiv für Hydrobiologie*, 106 (1986), 433–471.
- [20] L. Stone, R. Olinky, A. Huppert, 2007. Seasonal dynamics of recurrent epidemics. *Nature* 446, 533–536.
- [21] P. Takáč, Domains of attraction of generic ω -limit sets for strongly monotone discrete-time semigroups, *J. Reine Angew. Math.*, 423 (1992), 101–173.
<http://dx.doi.org/10.1515/crll.1992.423.101>
- [22] Y. Wang and J. Jiang, Uniqueness and attractivity of the carrying simplex for discrete-time competitive dynamical systems, *J. Differential Equations*, 186 (2002), 611–632.
[http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0396\(02\)00025-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00025-6)
- [23] M. L. Zeeman, Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka-Volterra systems, *Dynam. Stability Systems*, 8 (1993), 189–217.
<http://dx.doi.org/10.1080/02681119308806158>