

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية
الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -
Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de MASTER**

En : Génie mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par : MEHIAOUI Soumicha

Sujet

Analyse du comportement vibratoire d'un arbre tournant en matériaux composite par la Méthode des Éléments Finis Hiérarchiques en Quadrature Différentielle - DQHFEM

Soutenu publiquement, le 04/07/2021 , devant le jury composé de :

Mr. GUEZZEN Samir	MCB	Univ.Tlemcen	Président
Mr. HADJOUI abdelhamid	Professeur	Univ.Tlemcen	Directeur de mémoire
Mr. SAIMI Ahmed	MCB	ENSH.Blida	Co-Directeur de mémoire
Mr. BELKAID Mohamed	MAA	Univ.Tlemcen	Examineur

Dédicace

À mon père

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le laboratoire Ingénierie des Systèmes Mécaniques et Matériaux (IS2M), de Tlemcen sous la direction du professeur HADJOUI Abdelhamid et SAIMI Ahmed maitre de conférences classe B.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon directeur de mémoire HADJOUI Abdelhamid pour la confiance qu'il m'a accordée dans ce travail de recherche scientifique. Ses précieux conseils, et son encouragement qu'il m'a apporté tout au long de ce mémoire.

Je tiens ensuite à remercier plus particulièrement mon co-directeur de mémoire SAIMI Ahmed qui m'est d'une aide précieuse, je tiens également à témoigner ma reconnaissance envers lui d'avoir enrichi mes connaissances et de m'avoir guidé durant ces six derniers mois, ce qui m'a permis d'aboutir à la réussite de ce mémoire.

J'adresse de même mes plus sincères remerciements à mes professeurs GUEZZEN Samir et BELKAID Mohamed pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail en acceptant de présider et d'examiner mon travail.

Soumicha

Table des matières

Résumé.....	i
Abstract.....	ii
الملخص.....	iii
Liste des figures	iv
Listes des tableaux	vi
Listes des symboles.....	vii
Introduction Générale.....	1
1. Introduction	2
2. Plan du mémoire.....	3
1.1. Introduction aux machines tournantes.....	5
1.1.1. Les machines tournantes dans l'industrie.....	5
1.1.2. Dynamique des rotors.....	6
1.2. Généralités sur les matériaux composites.....	7
1.2.1. Définition.....	7
1.2.2. Constituants des matériaux composites.....	9
1.2.2.1. Matrice.....	9
1.2.2.2. Renforts.....	10
1.2.2.3. Interface.....	10
1.2.3. Propriétés des matériaux composites.....	10
1.3. Dynamique des rotors en matériaux composites.....	11
2.1. Équations de mouvements.....	12
2.1.1. Etude cinématique	12
2.1.2. Relation déformation- déplacement.....	13
2.1.3. Relation contrainte – déformation	14
2.1.4. Energie de déformation de l'arbre	19

2.1.5.	Energie Cinétique de l'arbre.....	21
2.1.6.	Equations de mouvements.....	23
3.1.	Introduction	25
3.2.	Règle de la quadrature différentielle.....	25
3.3.	Règle de quadrature de Gauss Lobatto.....	26
3.4.	The Differential Quadrature Hierarchical Finite Element Method (DQHFEM).....	27
3.5.	Détermination des matrices élémentaires Me et Ge de l'arbre	30
3.6.	Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre Ke	31
3.7.	Forme finale des équations du mouvement :	33
3.8.	Bibliographie	36
4.1.	Introduction	37
4.2.	Modèle de l'arbre en matériaux composite	38
4.3.	Convergence et Validation	39
4.3.1.	Convergence.....	39
4.3.2.	Validation	40
4.4.	Etudes de cas :.....	42
4.4.1.	Influence de l'orientation des fibres	42
4.4.2.	Influence des Conditions aux limites	44
4.4.3.	Influence du rapport L/D.....	45
	Conclusion générale.....	49
	Bibliographie.....	50

Résumé

Le besoin d'une analyse fiable du comportement vibratoire des arbres tournant ne cesse d'augmenter avec les nouvelles exigences qui ont pour objectif d'atteindre des vitesses de rotation plus élevées et d'alléger la structure. Dans ce contexte s'inscrit ce travail, qui a pour objectif d'étudier le comportement dynamique des arbres tournants en matériaux composites, en utilisant une combinaison de la méthode des éléments finis et la méthode de la quadrature différentielle, pour donner une nouvelle méthode appelée « a differential quadrature hierarchical finite element method » (DQHFEM). La modélisation du comportement dynamique d'un arbre tournant est basée sur la théorie des poutres d'Euler Bernoulli qui néglige l'influence de l'effet de cisaillement et celle de Timoshenko qui prend en compte cet effet. Les effets gyroscopiques, de l'inertie rotatoire ainsi que celui du couplage due à la stratification des couches des composites sont pris en compte. Un programme en Matlab a été élaboré pour la détermination des fréquences propres de l'arbre tournant et des diagrammes de Campbell.

Nous avons validé notre programme, et plusieurs cas ont été étudiés en vue de déterminer l'influence des différents paramètres comme le rapport longueur/diamètre, les orientations des fibres, les conditions aux limites ainsi que les différents matériaux.

Mots clés : Arbre, Composite, DQHFEM, vitesse critique, diagramme de Campbell.

Abstract

The need for reliable analysis of the vibration behaviour of rotating shafts continues to increase with the new requirements which aim to achieve higher rotational speeds and lighten the structure. In this context, the aims of this work is to study the dynamic behaviour of rotating shafts of composite materials, using a combination of the finite element method and the differential quadrature method, which gives a new method called a differential quadrature hierarchical finite element method (DQHFEM). The modeling of the dynamic behaviour of a rotating shaft is based on the theory of beams of Euler Bernoulli which neglects the influence of the shear effect and also the theory of Timoshenko which takes this effect into account. A Matlab program, which determine the eigen frequencies of the rotating shaft and Campbell diagrams is developed.

We have validated our program, and several studies have made to determine the influence of different parameters such as length/diameter ratio, fibre orientation, boundary conditions and different materials.

Keywords: Shaft, Composite, DQHFEM, Critical speed, Campbell diagram.

المخلص

الحاجة المتزايدة في معرفة اهتزازات للأعمدة الدورانية مع المتطلبات الجديدة التي من أهدافها رفع سرعة الدوران وتقليص من وزن الهياكل تعطى أهمية بالغة لهذا المجال.

في هذا السياق يدرج عمل هذا المشروع الذي يهدف الى دراسة اهتزازات الاعمدة الدورانية المصنوعة من المواد المركبة وذلك باستعمال مزيج من طريقة العناصر المتناهية والتربيع التفاضلي DQHFEM باستعمال نظرية اولير بارنولي وتيموشانكو.

تم انشاء برنامج لحساب الترددات ورسم مخططات كامبل.

قمنا بدراسة بعض الدراسات لتحديد تأثيرات الخصائص الميكانيكية والهندسية على اهتزازات الاعمدة الدورانية المصنوعة من المواد المركبة. من بين هذه الخصائص شروط الحدود - أنواع المواد المركبة - نسبة الطول على القطر واتجاهات الطبقات المكونة للهيكل.

الكلمات الرئيسية : الأعمدة الدورانية - مخططات كامبل - المواد المركبة - DQHFEM.

Liste des figures

Figure 1. 1 : Éléments de base d'une machine tournantes.....	5
Figure 1. 2 : Exemples des machines tournantes6Figure 1. 3 : Constituants d'un matériau coomposite.....	8
Figure 1. 4 : Les différentes familles de Matrice [20].....	9
Figure 1. 5 : Principaux matériaux de renfort [20].....	10
Figure 2. 1 : Cordonnées du système : Cylindrique (x, r, θ) et cartésien (x, y, z)	15
Figure 2. 2 : k couches de l'arbre en matériaux composites.....	18
Figure 2. 3 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié.....	18
Figure 2. 4 : Composantes des vecteurs des contraintes dans les systèmes d'axe (x, y, z) et (x, r, θ)	20
Figure 2. 5 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axe (e_x, e_θ, e_r) du stratifié.....	20
Figure 2. 6 : Déplacement d'un point arbitraire P de la section droite de l'arbre tournant.....	24
Figure 2. 7 : Déplacement de la section droite de l'arbre tournant.....	25
Figure 4. 1 : Programme de calcul.....	39
Figure 4. 2 : Modèle de l'arbre tournant.....	40
Figure 4.3 : Convergence des trois premières fréquences de flexion en fonction du nombre d'échantillonnage des nœuds DQHFEM (l'arbre est discrétisé en un seul élément) $\Omega=0$	41
Figure 4. 4 : diagramme de Campbell pour la première et deuxième fréquence pour ..	45
Figure 4. 5 : Diagramme de vitesses critiques pour différentes orientations des fibres η (°).....	45
Figure 4. 6 : diagramme de Campbell pour déferant condition aux limite Graphite-époxyde.....	46
Figure 4. 8 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de l'orientation des fibres pour différents rapports L/D et différentes conditions aux limites (S-S, C-C)....	47
Figure 4. 7 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de rapports L/D pour différentes orientations des fibres (C-C).....	47

Figure 4. 9 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de rapports L/D pour différentes orientations des fibres (S-S). 48

Liste des tableaux

Tableau 4. 1 : Propriétés géométriques de l'arbre.....	40
Tableau 4. 2 : Propriétés physiques de l'arbre.....	40
Tableau 4. 3 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en bore époxyde	42
Tableau 4. 4 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en bore époxyde	43
Tableau 4. 5 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en graphite époxyde.....	43
Tableau 4. 6 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en graphite époxyde.....	44
Tableau 4. 7 : La première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en Graphite époxyde pour différentes orientations des fibres.....	44

Liste des symboles

$u(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction x .
$v(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction y .
$w(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction z .
θ_y	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe y .
θ_z	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe z .
θ_x	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe x due à la déformation de torsion.
$(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$	Axes des coordonnées cylindriques.
(x, r, θ)	Coordonnées cylindriques.
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Axes des coordonnées cartésiennes.
(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes.
$(1, 2, 3)$	Axes principaux d'une couche de stratifié.
L	Direction longitudinale suivant l'axe 1.
T'	Direction transversale suivant l'axe 2.
T''	Direction transversale suivant l'axe 3.
E	Module Young.
G	Module de cisaillement.
ν	Coefficient de Poisson.
E_L	Module de Young mesuré dans un essai de traction longitudinale.
$E_T, E_{T'}$	Modules de Young mesurés dans un essai de traction transversale.
G_{LT}	Modules de cisaillement mesuré dans un essai de cisaillement longitudinal.

G_{TT}	Modules de cisaillement mesuré dans un essai de cisaillement transversal.
ν_{LT}	Coefficient de Poisson, mesuré dans un essai de traction longitudinale.
$\nu_{TT'}$	Coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction transversale.
C_{ij}	Constants élastiques.
k_s	Facteur de correction de cisaillement.
ρ	Masse volumique.
L	Longueur de l'arbre.
D	Diamètre moyen de l'arbre.
e	Epaisseur de l'arbre.
R_n	Le $n^{\text{ème}}$ rayon intérieur de l'arbre composite
R_{n+1}	Le $n^{\text{ème}}$ rayon extérieur de l'arbre composite.
I_m, I_m^D	Moment d'inertie massique de l'arbre tournant, par unité de longueur.
I_d, I_d^D	Moment d'inertie diamétral de l'arbre tournant, par unité de longueur.
I_p, I_p^D	Moment d'inertie polaire de l'arbre tournant, par unité de longueur.
k	Nombre des couches
η	Orientation des fibres.
θ	Coordonnée circonférentielle.
P	Point arbitraire de la section droite de l'arbre.
G_c	Centre de la section droite de l'arbre.
(O, x, y, z)	Repère fixe (R_F).
(G, x', y', z')	Repère mobile (R_M) lié à l'arbre en mouvement.

$R_{P/O}$	Vecteur déplacement de P dans (R_F).
$R_{P/G}$	Vecteur déplacement de P dans (R_M).
$R_{G/O}$	Vecteur déplacement de G dans (R_F).
E_{ca}	Energie cinétique de l'arbre
E_d	Energie de déformation de l'arbre
E_{ij}	Tenseur de déformation de l'arbre.
τ_{ij}	Tenseur de contrainte.
Ω	Fréquence, valeur propre.
$\{w\}$	Vecteurs propres.
$\{x1\}$	Vecteur d'amplitude.
$[L]$	Matrice triangulaire inférieure.
$[I]$	Matrice identité
Ω	Vitesse de rotation.
$[C]$	Matrice des coefficients de rigidité dans la base (1, 2, 3)
$[C^*]$	Matrice des coefficients de rigidité dans la base $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
$[M^e]$	Matrice masse élémentaire de l'arbre
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire de l'arbre
$[G^e]$	Matrice de l'effet gyroscopique élémentaire de l'arbre.
$\{q_i\}$	Coordonnées généralisées. ($i = U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)
$\{\dot{q}_i\}$	Vitesses généralisées.
$\{\ddot{q}_i\}$	Accélérations généralisées.
$[A], [B]$	Matrices transformées.

$\{Q_{tr}\}$	Vecteur transformé.
$[T_r]$	Matrice d'état
$[M]$	Matrice masse globale de l'arbre.
$[G]$	Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.
$[K]$	Matrice de rigidité linéaire globale de l'arbre.
$A_{ij}^{(n)}$	Coefficient de pondération
C_j	Coefficient de pondération de l'intégration Gauss-Lobatto
x_j	Zéro (j-1) de la dérivée du premier ordre de $P_{N-1}(x)$
K	Valeur de x à $i^{\text{ème}}$ étape d'itération
$H(\xi)$	Premières fonctions de formes
$\psi(\xi)$	Fonctions hiérarchiques
$(\dot{\quad})$	$\frac{dQ}{dt}$
$(\ddot{\quad})$	$\frac{d^2Q}{d^2t}$

Note :

$$\begin{cases} (E_L; E_T; E_{T'}) = (E_1; E_2; E_3) \\ (v_{LT}; v_{LT'}; v_{TT'}) = (v_{12}; v_{13}; v_{23}) \\ (G_{LT}; G_{LT'}; G_{TT'}) = (G_{12}; G_{13}; G_{23}) \\ E_T = E_{T'} \\ v_{LT} = v_{LT'} \\ G_{LT} = G_{LT'} \end{cases}$$

Introduction générale

- 1. Introduction 2
- 2. Plan du mémoire..... 3

1. Introduction

La dynamique des machines tournantes est un domaine particulier de la mécanique qui a depuis longtemps intéressé autant la communauté scientifique que le monde industriel, les premiers y voyant un vaste domaine à explorer, riche en phénomènes physiques complexes, pour les seconds un atout majeur non seulement pour la compréhension des problèmes rencontrés mais aussi pour l'innovation technologique.

La modélisation du comportement vibratoire des arbres en composite a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs. En effet, les nouvelles exigences de la technologie moderne imposent l'utilisation des matériaux novateurs (composites) dont les propriétés mécaniques sont élevées pour un usage adapté à leur utilisation et présentant une faible masse volumique afin d'augmenter leur résistance à la torsion et atteindre des vitesses de rotation plus élevées offrant ainsi une structure légère et une haute performance mécanique des machines industrielle. Ils sont de plus en plus utilisés par l'industrie et en particulier dans le transport terrestre et aérien grâce à leurs caractéristiques mécaniques exceptionnelles qui présentent un enjeu économique et écologique dans l'industrie moderne.

Le besoin d'une analyse fiable du comportement vibratoire des arbres ne cesse d'augmenter avec les nouvelles exigences qui ont pour objectif d'atteindre des vitesses de rotation plus élevées ainsi d'alléger la structure. Dans ce contexte s'inscrit notre travail qui a pour objectif d'étudier le comportement dynamique des arbres tournants en matériaux composite, en utilisant une combinaison de la méthode des éléments finis et la méthode de la quadrature différentielle, pour donner une nouvelle méthode appelée « a differential quadrature hierarchical finite element method » (DQHFEM), c'est une méthode qui exprime les matrices obtenues par la méthode des éléments finis hiérarchiques sous une forme similaire à celle de la méthode en quadrature différentielle et qui introduit la base d'interpolation sur la frontière des éléments finis hiérarchiques de la méthode. La méthode de la différentielle quadrature DQM est généralement utilisée pour résoudre des équations aux dérivées ordinaires et partielles. Elle peut être essentiellement caractérisée par les valeurs des dérivées à chaque point de grille sous forme de sommes linéaires pondérées approximant les valeurs des fonctions à tous les points de grille dans le domaine considéré.

Nous avons mené des travaux de modélisation basée sur la théorie des poutres d'Euler Bernoulli qui néglige l'influence de l'effet de cisaillement, et celle de Timoshenko qui prend en compte cet effet, afin de déterminer le comportement dynamique des arbres en composites et ceci en en tenant compte de l'influence de plusieurs paramètres tel que l'effet gyroscopique, l'inertie rotatoire ainsi que celui du couplage due à la stratification des couches des composites.

Un programme en Matlab est élaboré pour la détermination des fréquences propres de l'arbre tournant en matériaux composites et des diagrammes de Campbell. Après validation du programme plusieurs cas sont étudiés en vue de déterminer l'influence des différents paramètres comme le rapport longueur/diamètre, les orientations des fibres, les conditions aux limites, les différents matériaux.

2. Plan du mémoire

Le présent mémoire s'organise autour de quatre chapitres.

À partir d'une étude bibliographique, le premier chapitre présente des généralités sur les machines tournantes et les matériaux composites. Et plus spécialement l'intervention des matériaux composites dans le domaine de la dynamique des rotors.

Le deuxième chapitre porte sur l'étude des équations de mouvements de l'arbre, et l'étude des lois de comportement des matériaux composites. Les énergies cinétique et de déformation de l'arbre en composite sont déterminées.

Au troisième chapitre, nous exposons la modélisation par la DQHFEM pour la résolution des équations du mouvement de la structure étudiée, en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement.

Enfin, au quatrième chapitre, Nous élaborons un code de calcul en Matlab et après validation du programme, plusieurs cas sont étudiés en vue d'optimiser les paramètres de construction des machines tournantes.

Chapitre I : Revue de la littérature

1.1.	Introduction aux machines tournantes.....	5
1.1.1.	Les machines tournantes dans l'industrie.....	5
1.1.2.	Dynamique des rotors.....	6
1.2.	Généralités sur les matériaux composites.....	7
1.2.1.	Définition.....	7
1.2.2.	Constituants des matériaux composites.....	9
1.2.2.1.	Matrice.....	9
1.2.2.2.	Renforts.....	10
1.2.2.3.	Interface.....	10
1.2.3.	Propriétés des matériaux composites.....	10
1.3.	Dynamique des rotors en matériaux composites.....	11

1.1.Introduction aux machines tournantes

Les machines tournantes sont devenues depuis nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne, ils occupent actuellement une place prépondérante dans les applications faisant intervenir des systèmes de transmission de puissance. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées, ils sont composés des parties tournantes autour d'un axe fixe par le biais des paliers. L'ensemble tournant autour d'un même axe constitue un rotor. La fonction de ce dernier nécessite un apport extérieur d'énergie assurée par le moteur. Les éléments de base d'une machine tournante sont : disque, arbre et palier, illustrés dans la (figure 1.1).

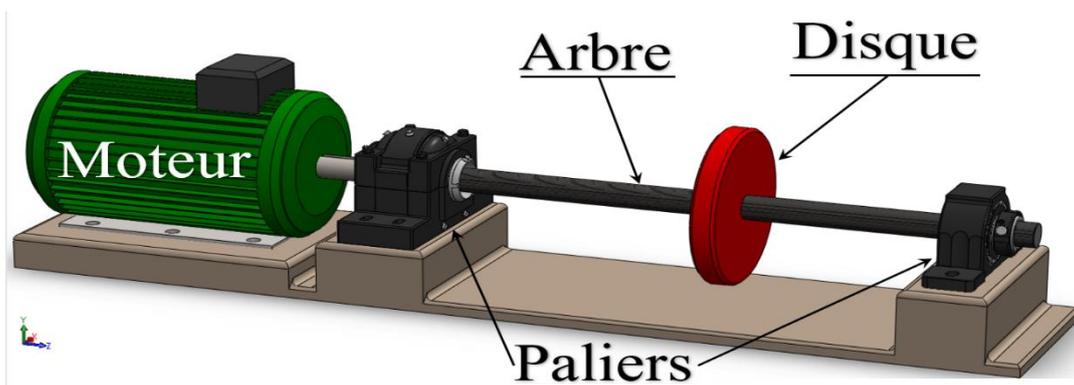


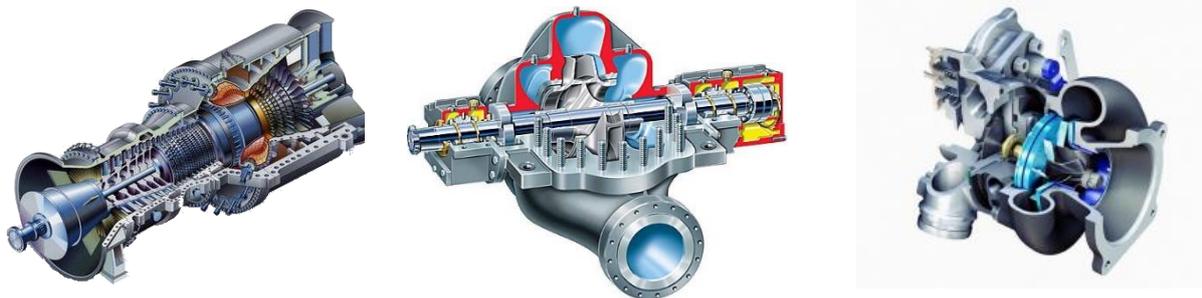
Figure 1.1 : Éléments de base d'une machine tournantes

1.1.1. Les machines tournantes dans l'industrie

Les machines tournantes sont présentes dans de nombreux secteurs d'activité de l'industrie (aéronautique, automobile, nucléaire, l'industrie pétrolière et gazière...etc.). Elles sont très diverses : compresseurs, turbines, moteurs d'avion, pompes, alternateurs (figure 1.2). Elles doivent, dans un souci de qualité, d'efficacité et de sûreté, être étudiées avec soin au niveau du projet [1]. Les machines tournantes basiques peuvent être rencontrées dans des produits et systèmes variés allant des moteurs électriques des réfrigérateurs et des machines à laver jusqu'aux moteurs d'avions [2].

De nombreuses recherches scientifiques sont focalisées sur l'étude du comportement des machines tournantes. L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des machines

tournantes engendrent des problèmes de vibrations. Lorsque ces vibrations sont trop élevées, elles causent souvent un sentiment d'inquiétude, puisqu'elles annoncent possiblement un arrêt ou un bruit imprévu et par conséquent une perte non négligeable de productivité ou une atteinte à la sécurité du personnel. Ils peuvent être causées par divers phénomènes d'excitation, un déséquilibre crée par des effets particuliers tel que le balourd, des mouvements sismiques, défauts de roulements, présence des fissures, et d'autre sources d'instabilité.



(a) Turbine à gaz [3]

(b) Pompe à double aspiration [4]

(c) Turbocompresseur [5]

Figure 1. 2 : Exemples des machines tournantes

1.1.2. Dynamique des rotors

La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Au fur et à mesure que la vitesse de rotation d'un arbre tournant augmente, son niveau de vibration traverse souvent un seuil critique, appelée 'vitesse critique', qui est parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors. D'après Nelson [6], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin du XVIIIe siècle lors d'essais expérimentaux concernant la vibration des arbres embarqués par des poulies réalisées par Dunkerley [7]. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournante, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. Aujourd'hui le concept de vitesse critique a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant, la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système. Cette évolution est souvent excitée par un déséquilibre de la structure tournante. Si l'ampleur de la vibration à ces vitesses critiques devient excessive, une

défaillance catastrophique peut se produire. Afin d'optimiser le rendement et la performance de la machine tournante, le coefficient de sécurité, et l'écart entre le disque et le stator doivent être réduits. Pour cela, la prédiction du comportement dynamique des composants des machines tournantes doit être déterminée avec beaucoup de précision et d'aboutir à une compréhension accrue des phénomènes physiques mis en jeu.

La première analyse d'un arbre tournant a été étudié par Rankine [8], considérant l'arbre comme flexible, Il a défini certaine vitesse comme vitesse de tourbillonnement "whirling speed" de l'arbre et a démontré qu'au-delà de cette vitesse de tourbillonnement que la déflexion radiale du modèle de Rankine augmente sans limite [9]. Aujourd'hui, cette vitesse s'appellerait la vitesse de seuil "threshold speed" pour l'instabilité divergente.

Plusieurs travaux de recherches ont été porté sur les phénomènes liés au comportement dynamique des systèmes de rotor rigides ou flexibles, symétriques ou dissymétriques montés sur des paliers élastiques linéaires ou non linéaires dans le cas d'un support fixe, tels que les travaux de Rao [10], Lalanne et Ferraris [11], Genta en 1995 et en 2005 [12], [13], Yamamoto et Ishada [14], Bachschamid et al [15].

1.2. Généralités sur les matériaux composites

Dans le contexte de la crise énergétique actuelle, les matériaux composites représentent une alternative intéressante aux matériaux traditionnels métalliques. Ils présentent effectivement une résistance mécanique spécifique largement supérieure à la plupart des alliages métalliques et constituent une ressource prometteuse, en particulier dans les secteurs industriels du transport terrestre et aérien où l'allègement des structures devient un enjeu à la fois économique et écologique [16]. Les premières applications ont vu le jour dans le domaine de l'aérospatial en remplacement des batteries chimiques traditionnelles et plus récemment dans le transport terrestre [17].

1.2.1. Définition

Un matériau composite est un assemblage formé d'au moins deux matériaux non miscibles, ils permettent d'aboutir à un matériau hétérogène dont les qualités respectives se

complètent pour former un matériau aux performances globales améliorées (l'ensemble des performances obtenus sont supérieures à ceux des composants pris séparément).

Les composites sont constitués des renforts et d'une matrice dont laquelle sont noyés les renforts (figure 1.3), entre ces derniers existe une zone de liaison appelée interface. Le développement des composites modernes est essentiellement dû à la nécessité de satisfaire les exigences de plus en plus poussées de l'industrie, surtout dans les secteurs : aérospatial, aéronautique et la biomécanique.

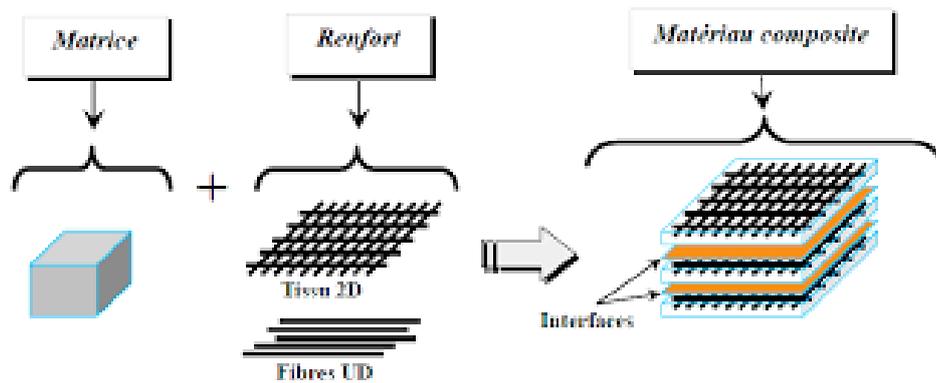


Figure 1.3 : Constituants d'un matériau composite

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels (métaux, plastiques, céramique). Le principal intérêt de leur utilisation provient de leurs excellentes performances. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- Légèreté ;
- Peu sensible à l'humidité, la chaleur, la corrosion ...etc. ;
- Une bonne isolation électrique ;
- Création de pièces de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande ;
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale ;
- Grande résistance à la fatigue ;
- Maintenance réduite ;
- Un très bon comportement aux chocs.

On distingue deux types de composites [18] [19] :

- Grande diffusion : Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont : Optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe du matériaux (moulage par contact, SMC et injection).
- Hautes performances : Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%. Ces composites sont élaborés par les procédures suivantes : - drapage autoclave, enroulement filamentaire, RTM. - beaucoup de procédés encore manuels.

1.2.2. Constituants des matériaux composites

1.2.2.1. Matrice

La matrice a pour principal but de transmettre les efforts mécaniques au renfort. Elle assure aussi une protection (chimique, thermique, électrique) des renforts vis-à-vis des diverses conditions environnementales. Elle permet en outre de donner la forme voulue au produit réalisé tel que la fabrication de pièces à géométrie complexe par drapage sur contre-moule.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée dans la (figure 1.4).

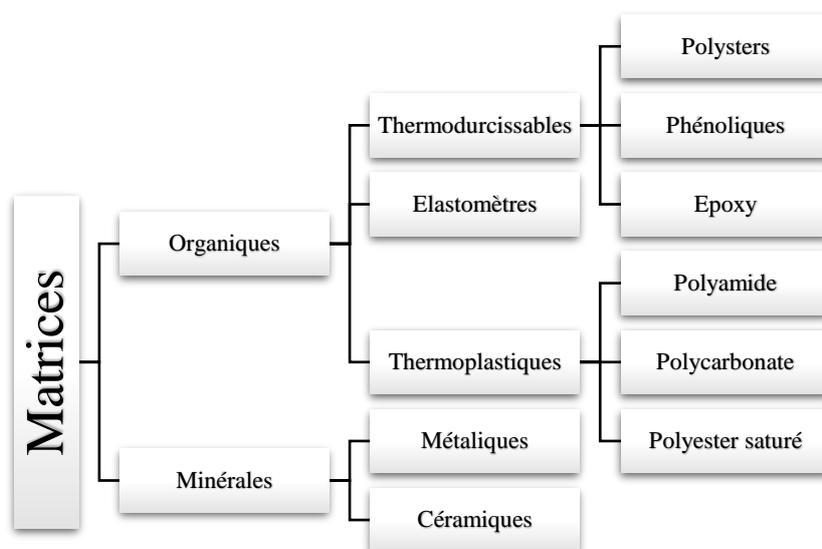


Figure 1.4 : Les différentes familles de Matrice [20]

1.2.2.2. Renforts

Les renforts assurent l'essentiel des propriétés mécaniques du composite, contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent le plus souvent sous forme de fibres. Ces derniers peuvent être courtes (0,1 - 1 mm), longues (1 - 50 mm) ou continues (> 50 mm).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée dans la (figure 1.5).

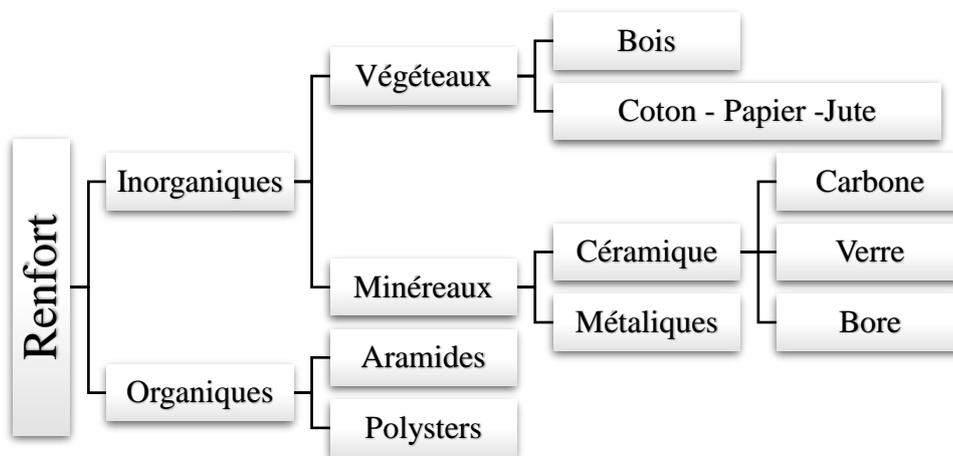


Figure 1.5 : Principaux matériaux de renfort [20]

1.2.2.3. Interface

En plus de ces fibres et la matrice, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine.

1.2.3. Propriétés des matériaux composites

Au final, les matériaux composites se différencient des matériaux classiques par un fort module d'Young, une faible masse volumique et une bonne tenue en fatigue. Ils ont l'avantage d'avoir une limite élastique très élevée, de ne pas se corroder et de résister aux produits chimiques courants tels que les graisses, huiles, peintures, etc. [21]

1.3. Dynamique des rotors en matériaux composites

La modélisation du comportement vibratoire des arbres en composite a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs. En effet, les nouvelles exigences de la technologie moderne imposent l'utilisation des matériaux novateurs (composites) dont les propriétés mécaniques sont élevées pour un usage adapté à leur utilisation et présentant une faible masse volumique afin d'augmenter leur résistance à la torsion et atteindre des vitesses de rotation plus élevées offrant ainsi une structure légère et une haute performance mécanique des machines industrielle. Ils sont de plus en plus utilisés par l'industrie et en particulier dans le transport terrestre et aérien grâce à leur caractéristiques mécanique exceptionnelle qui présentent un enjeu économique et écologique dans l'industrie moderne.

Les arbres en matériaux composite ont été introduits principalement dans le secteur aérospatial étant un secteur exigeant dont l'unique objectif été essentiellement de procurer un gain de masse sur la pièce mécanique tout en conservant d'excellentes caractéristiques mécaniques. Une analyse du comportement vibratoire d'un arbre de transmission en bore/époxyde d'un rotor de queue d'hélicoptère a été réalisé par Zinberg et Symmonds [22] en utilisant une approche simple fondée sur la théorie des poutres appelée la théorie des poutres du module équivalent EMBT afin de déterminer les vitesses critiques et les comparant avec celles trouvés expérimentalement. Par la suite, Dos Reis et al [23] ont employé la méthode des éléments fini afin d'investiguer sur l'arbre étudié par Zinberg et Symmonds [22].

En comparant les résultats ils ont trouvé que les fréquences changent par l'effet de l'accouplement flexion-traction et aux contraintes normales de cisaillement. L'effet de l'accouplement de flexion-torsion sur la vitesse critique a fait l'objet d'une enquête d'où Bert [24] a développé une théorie simplifiée (théorie d'Euler Bernoulli) pour l'étude d'un arbre de transmission en composite et par la suite Kim et Bert [25] ont fait une analyse théorique pour déterminer la vitesse critique d'un arbre creux en composite. Gupta et Singh [26] ont étudié le comportement dynamique des rotors composites afin d'investiguer sur l'effet du couplage due aux contraintes normales de cisaillement sur l'amortissement modal et les fréquences naturelles tout en incluant l'effet gyroscopique. Bert et Kim [27] ont fait une autre étude qui consiste à analyser l'instabilité dynamique d'un arbre de transmission en matériaux composites soumis à

des variations de couple et/ou à la vitesse de rotation en utilisant divers aspects théoriques tels que les théories des coques minces. Chang et al [28] ont fait une analyse du comportement vibratoire d'un arbre tournant en composite en prenant en compte la déformation transversale de cisaillement, l'effet de couplage due à la stratification des couches l'effet gyroscopique avec un modèle basé sur la théorie des poutres et la déformation de cisaillement du premier ordre (Théorie des poutres de Timoshenko).

Diverses approches fondées sur les théories des poutres et des coques ont été présentées pour déterminer les vitesses critiques des tubes en composite axisymétrique monté sur des supports élastiques ou indéfiniment rigides par Dos Reis et al [23], Sino et al [29] tels que la théorie des poutres du module équivalent EMBT et la théorie de stratifié des poutres (LBT) qui ont été utilisé dans l'analyse du comportement dynamique des rotors en composite par Singh et Gupta [30] fournissant un outil puissant pour la détermination des vitesses critiques. Singh et Gupta [31] ont fait une étude expérimentale sur la dynamique des rotors ensuite ils ont continué le travail en utilisant "the layerwise theory" dans leur article [32] sur deux arbres en carbone/époxyde avec des orientations des fibres constantes (45° et 60°), les auteurs ont prouvé que les effets de couplage dus aux déformations flexion-traction et aux contraintes normales de cisaillement changent avec la séquence d'empilement, et changent les valeurs de fréquences.

Boukhalfa et al [33] ont publié un article concernant l'étude du comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites avec des disques rigides isotropes, sur palier élastique amortis modélisé comme ressorts et amortisseurs visqueux en utilisant la version-p de la méthode des éléments finis pour la modélisation de la structure. Boukhalfa et Hadjoui [34] dans une autre étude ont étudié le comportement vibratoire des arbres tournants embarqués en composite en utilisant la méthode h-p de la méthode des éléments finis.

Le besoin d'une analyse fiable du comportement vibratoire des arbres ne cesse d'augmenter avec les nouvelles exigences qui ont pour objectif d'atteindre des vitesses de rotation plus élevées ainsi d'alléger la structure. Dans ce contexte s'inscrit notre travail qui a pour objectif d'étudier le comportement dynamique des arbres tournants en matériaux composite, en utilisant une combinaison de la méthode des éléments finis et la méthode de la quadrature différentielle, pour donner une nouvelle méthode appelée « a differential quadrature

hierarchical finite element method » (DQHFEM), qui a été utilisé pour la première fois par Liu et al [35], ils ont étudié la méthode et ses applications à la vibration et à la flexion des plaques de Mindlin avec des domaines curvilignes, C'est une méthode qui exprime les matrices obtenues par la méthode des éléments finis hiérarchiques sous une forme similaire à celle de la méthode en quadrature différentielle et qui introduit la base d'interpolation sur la frontière des éléments finis hiérarchiques de la méthode. Saimi et Al [36] ont utilisé cette méthode pour faire une analyse dynamique d'un rotor embarqué avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

La modélisation du comportement dynamique de l'arbre étudié est basée sur la théorie des poutres d'Euler Bernoulli qui néglige l'influence de l'effet de cisaillement et celle de Timoshenko qui prend en compte cet effet. Les effets gyroscopiques, de l'inertie rotatoire ainsi que celui du couplage due à la stratification des couches des composites sont pris en compte.

Un programme en Matlab a été élaboré pour la détermination des fréquences propres de l'arbre tournant et des diagrammes de Campbell.

Chapitre II : Théorie du mouvement du rotor

2.1. Équations de mouvements.....	12
2.1.1. Etude cinématique	12
2.1.2. Relation déformation- déplacement.....	13
2.1.3. Relation contrainte – déformation	14
2.1.4. Energie de déformation de l'arbre	19
2.1.5. Energie Cinétique de l'arbre.....	21
2.1.6. Equations de mouvements.....	23

2.1. Équations de mouvements

L'approche énergétique étant utilisée, on établit les équations différentielles du mouvement par le calcul de l'énergie potentielle de déformation ainsi que l'énergie cinétique du déplacement.

2.1.1. Etude cinématique

Les hypothèses cinématiques de la poutre Timoshenko permet d'exprimer les champs de déplacements dans la couche n d'un point arbitraire de la section transversale dans les directions x, y, z comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, t) + z\theta_y(x, t) - y\theta_z(x, t) \\ V(x, y, z, t) &= v(x, t) - z\theta_x(x, t) \\ W(x, y, z, t) &= w(x, t) + y\theta_x(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Comme montre la figure 2.1 ci-dessous, Les variables u, v et w représentent les déplacements de flexion dans les directions w, y et z des points sur l'axe de référence de l'arbre. Tandis que θ_x, θ_y , et θ_z représentent les rotations de la section droite autour des axes x, y et z , respectivement.

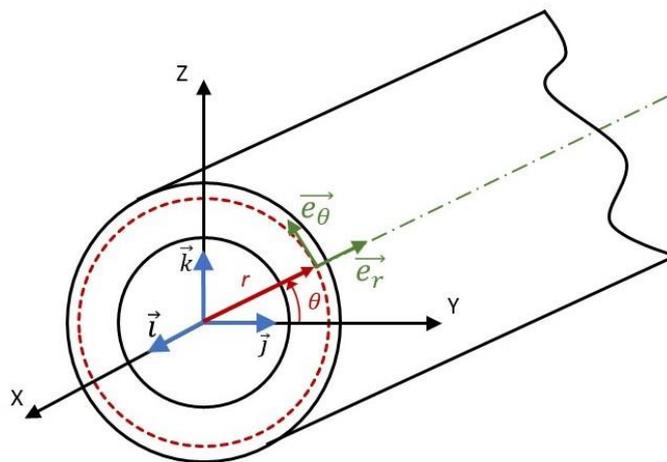


Figure 2. 1 : Cordonnées du système : Cylindrique (x, r, θ) et cartésien (x, y, z)

2.1.2. Relation déformation- déplacement

Les relations déformations-déplacements peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(-\theta_z + \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Avec : $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz}$ et $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$

Les trois composantes de déformation ε_{yy} , ε_{zz} et ε_{yz} égales à zéro, est une hypothèse de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre, qui ne considère pas la déformation transversale normale et de cisaillement.

Dans le système des coordonnées cylindriques (x, r, θ) avec les vecteurs unitaires (i, e_r, e_θ) (comme montre la figure 2.1) le tenseur de déformation est exprimé comme suit [6] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

Puisque $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0$, les composantes de déformation du système de coordonnées cylindriques peuvent être simplifiés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

Par conséquent, le champ déformation dans le système des coordonnées cylindriques peut être écrit en termes des variables déplacement et de rotation comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + r \sin\theta \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - r \cos\theta \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\
 \varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left(\theta_z \sin\theta + \theta_y \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial w}{\partial x} + r \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xr} &= \frac{1}{2} \left(\theta_y \sin\theta - \theta_z \cos\theta + \cos\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{r\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tels que : $\varepsilon_{xr} = \varepsilon_{rx}$ et $\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x}$

Le tenseur des déformations dans la couche n de n'importe quel point du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est donnée par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{xr} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

2.1.3. Relation contrainte – déformation

La relation contrainte- déformation de la k^{th} couche (voir figure 2.2) définie par le rayon intérieur R_{k-1} et le rayon extérieur R_k , dans les coordonnées locales orthotropes (1, 2,3) (voir figure 2.3) est exprimée comme suit [3] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

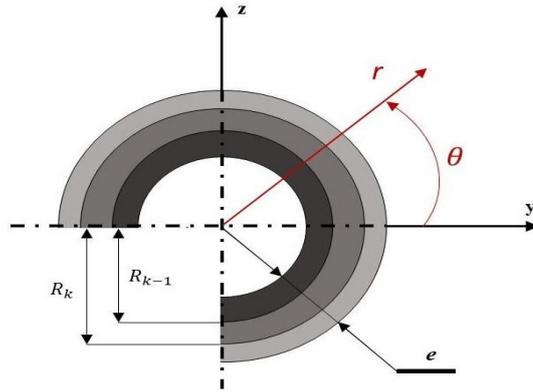


Figure 2. 2 : k couches de l'arbre en matériaux composites

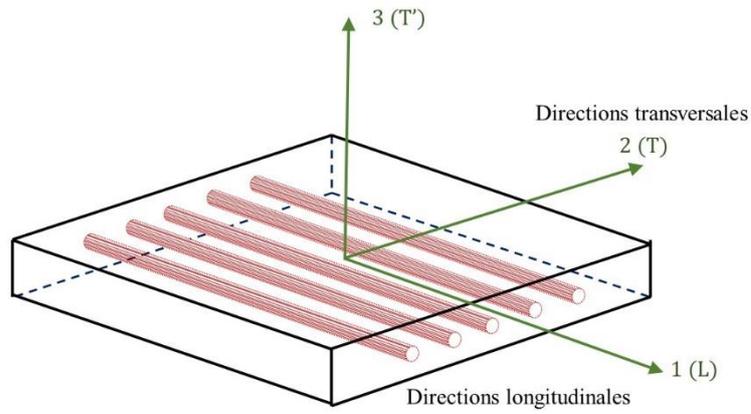


Figure 2. 3 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié

La matrice de rigidité $[C]$ est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dans le système des coordonnées cylindriques (x, r, θ) la relation globale contrainte-déformation pour K^{th} couche est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = [C'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$[C']$ est la matrice de rigidité transformée illustrée dans la figure 2.4 et donnée par :

$$[C'] = [T_r]^{-1}[C][T_r]^{-T} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & C'_{11} & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Où et $[T]$ est la matrice de transformation donnée par [3] :

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta & \sin^2 \eta & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \eta \sin \eta \\ \sin^2 \eta & \cos^2 \eta & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \eta \sin \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ -2 \cos \eta \sin \eta & 2 \cos \eta \sin \eta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \eta - \sin^2 \eta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Et C'_{ij} sont les coefficients de la matrice transformée de rigidité exprimés en fonction de l'angle η (voir la figure 2.5) par rapport aux axes formés les directions principales, et les constantes de rigidité C_{ij} .

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{11} \cos^4 \eta + C_{22} \sin^4 \eta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \eta \cos^2 \eta \\ C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \eta \cos^3 \eta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \eta \cos \eta \\ C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \eta \cos^2 \eta + C_{66} (\sin^4 \eta + \cos^4 \eta) \\ C'_{55} = C_{44} \sin^4 \eta + C_{55} \cos^4 \eta \end{cases} \quad (2.12)$$

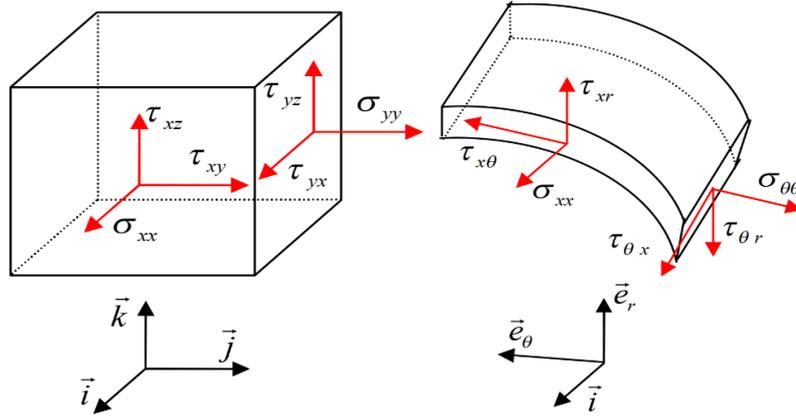


Figure 2. 4 : Composantes des vecteurs des contraintes dans les systèmes d'axe (x, y, z) et (x, r, θ)

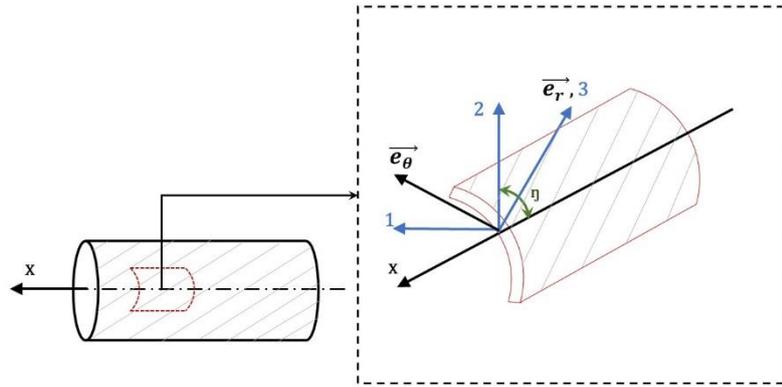


Figure 2. 5 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axe $(\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r)$ du stratifié

Dans l'hypothèse $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} = \gamma_{r\theta} = 0$, la relation contrainte-déformation peut être simplifiée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & k_s C'_{16} & 0 \\ k_s C'_{16} & k_s C'_{66} & 0 \\ 0 & 0 & k_s C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xr} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Où k_s est le facteur de correction de cisaillement

Avec : $\tau_{xr} = \tau_{rx}$ et $\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x}$

Le tenseur des contraintes dans la couche n de n'importe quel point du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est donnée par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ \tau_{xr} & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux sont [3] :

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ C_{22} = \frac{E_T}{E_L} C_{11} \\ C_{12} = \nu_{LT} C_{22} \\ C_{66} = G_{LT} \\ C_{44} = G_{TT'} \\ C_{55} = G_{LT'} \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

$$\begin{cases} (E_L; E_T; E_{T'}) = (E_1; E_2; E_3) \\ (\nu_{LT}; \nu_{LT'}; \nu_{TT'}) = (\nu_{12}; \nu_{13}; \nu_{23}) \\ (G_{LT}; G_{LT'}; G_{TT'}) = (G_{12}; G_{13}; G_{23}) \\ E_T = E_{T'} \\ \nu_{LT} = \nu_{LT'} \\ G_{LT} = G_{LT'} \end{cases} \quad (2.16)$$

Le plan transverse repéré par les directions 2 et 3 notées également T et T' , ces directions étant équivalentes.

E_L, ν_{LT} : Module de Young et coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale.

$E_T, \nu_{TL}, \nu_{TT'}$: Module de Young et coefficient de Poisson mesurés dans un essai de traction transversale.

$G_{TL}, G_{TT'}$: Modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transversal.

2.1.4. Energie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation de l'arbre en composite est donnée par la formule suivante :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T [\varepsilon] dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xr} \gamma_{xr} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}) dV \quad (2.17)$$

Tel que : $\gamma = 2\varepsilon$

En considérant les équations (2.13) et (2.17), l'expression de l'énergie de déformation devient :

$$E_{da} = \frac{1}{2} \int_V (C'_{11} \varepsilon_{xx}^2 + k_s C'_{55} \gamma_{xr}^2 + k_s C'_{66} \gamma_{x\theta}^2 + 2k_s C'_{16} \gamma_{x\theta} \varepsilon_{xx}) dV \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} E_{da} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_k} \left[C'_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + r \sin\theta \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - r \cos\theta \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & + k_s C'_{55} \left(\theta_y \sin\theta - \theta_z \cos\theta + \cos\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & + k_s C'_{66} \left(\theta_z \sin\theta + \theta_y \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial w}{\partial x} + r \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2k_s C'_{16} \left(\theta_z \sin\theta + \theta_y \cos\theta - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ & \left. \left. + r \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + r \sin\theta \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - r \cos\theta \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \right] r dx dr d\theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

Après développement de l'équation (2.19), On aboutit ainsi à l'expression de l'énergie de déformation de l'arbre :

$$\begin{aligned}
 E_{da} = & \frac{1}{2} A_{11} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[\int_0^l \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} K_s B_{66} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} K_s A_{16} \left[2 \int_0^l \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^l \theta_z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} dx - \int_0^l \theta_y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} dx - \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} dx - \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} dx \right] \\
 & + \frac{1}{2} K_s (A_{55} + A_{66}) \left[\int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \theta_y^2 dx + \int_0^l \theta_z^2 dx \right. \\
 & \left. + 2 \int_0^l \theta_y \frac{\partial w}{\partial x} dx - 2 \int_0^l \theta_z \frac{\partial v}{\partial x} dx \right]
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Où L est la longueur de l'arbre et les constantes A_{ij} , B_{ij} sont exprimées ci-dessous :

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_{11} &= \pi \sum_{n=1}^k C'_{11n} (R_{n+1}^2 - R_n^2) \\
 A_{55} &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{55n} (R_{n+1}^2 - R_n^2) \\
 A_{66} &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{66n} (R_{n+1}^2 - R_n^2) \\
 A_{16} &= \frac{2\pi}{3} \sum_{n=1}^k C'_{16n} (R_{n+1}^3 - R_n^3) \\
 B_{11} &= \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k C'_{11n} (R_{n+1}^4 - R_n^4) \\
 B_{66} &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k C'_{66n} (R_{n+1}^4 - R_n^4)
 \end{aligned} \right. \tag{2.21}$$

Où k est le nombre des couches et n est l'indice des couches et R_0 est le rayon intérieur de l'arbre, R_k est le rayon extérieur de l'arbre et e est l'épaisseur de l'arbre (voir figure 2.2).

2.1.5. Energie Cinétique de l'arbre

Pour un point P arbitraire de la section droite de l'arbre tournant (voir figure 2.6), sa nouvelle position est due à une déformation longitudinale, de flexion et de torsion de l'arbre tournant et peut être décrit à l'aide d'un ensemble de coordonnées mobiles x', y', z' fixées à l'arbre tournant et la section droite. Le centre G_c de la section droite coïncide avec le centre O avant déformation de l'arbre.

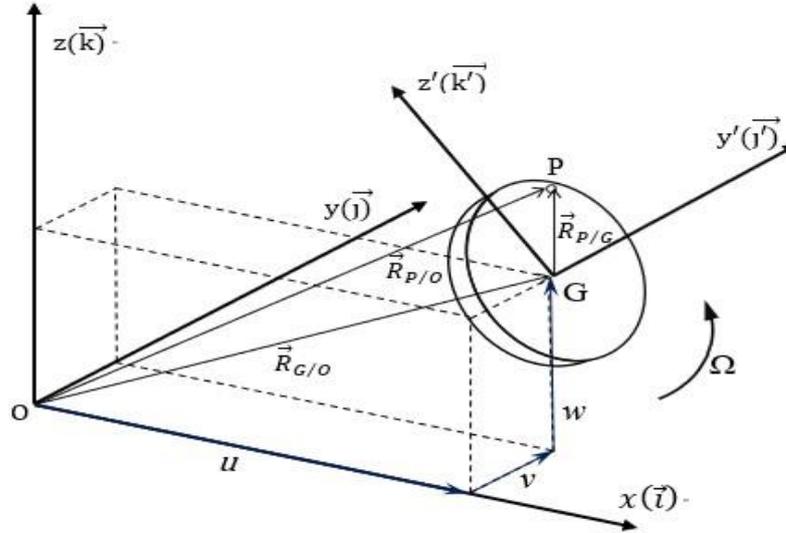


Figure 2. 6 : Déplacement d'un point arbitraire P de la section droite de l'arbre tournant

Le vecteur position $R_{P/O}$, où le point O coïncide avec le centre G_c de la section droite avant déformation de l'arbre, peut s'exprimer comme suit :

$$\vec{R}_{P/O} = \vec{R}_{G_c/O} + \vec{R}_{P/G_c} = (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) + (y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \quad (2.22)$$

Le vecteur position $R_{P/O}$ peut-être écrit en fonction des rotations de la section droite illustrés dans la figure 2.7 et qui représente les angles d'Euler de cette section $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ de x, y et z respectivement, et avec $\varphi = \theta_x + \Omega t$, comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{P/O} = & (u - y'\theta_z \cos \varphi + y'\theta_y \sin \varphi + z'\theta_z \sin \varphi + z'\theta_y \cos \varphi)\vec{i} + \\ & (v - y'\cos \varphi + y'\theta_y \theta_z \sin \varphi - z'\sin \varphi + z'\theta_y \theta_z \cos \varphi)\vec{j} + (w + y'\sin \varphi + z'\cos \varphi)\vec{k} \end{aligned} \quad (2.23)$$

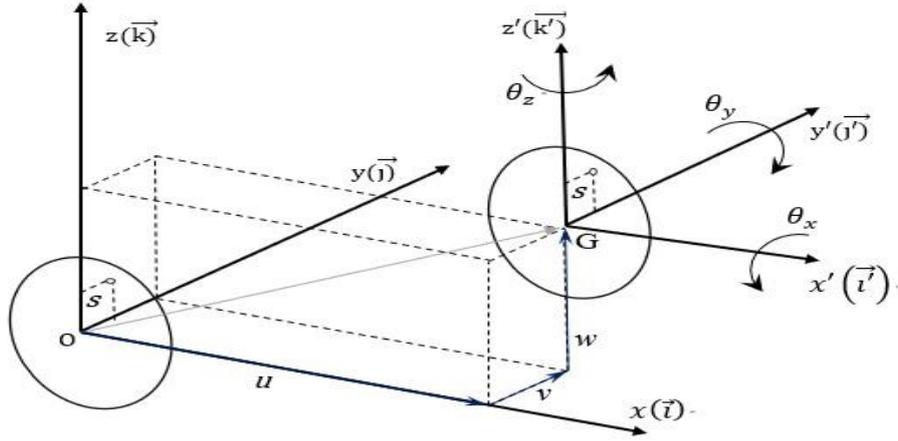


Figure 2.7 : Déplacement de la section droite de l'arbre tournant

L'énergie cinétique de l'arbre tournant en composite est donnée par la formule :

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\vec{R}_{P/O} \cdot \vec{R}_{P/O}) dV \quad (2.24)$$

Après développement, l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre devient :

$$E_{ca} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_d (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) - 2\Omega I_p \theta_y \dot{\theta}_z + 2\Omega I_p \dot{\theta}_x \right. \\ \left. + I_p \dot{\theta}_x^2 + \Omega^2 I_p + \Omega^2 I_d (\theta_y^2 + \theta_z^2) \right] dx \quad (2.25)$$

Où Ω est la vitesse de rotation supposée constante, I_m , I_d et I_p sont les moments d'inertie massique, diamétral et polaire, respectivement, ils sont exprimés ci-dessous :

$$\begin{cases} I_m = \pi \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^2 - R_{n-1}^2) \\ I_d = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \\ I_p = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^k \rho_n (R_n^4 - R_{n-1}^4) \end{cases} \quad (2.26)$$

Le terme $I_m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)$ est relatif aux déplacements en translation, $I_d (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2)$ représente l'effet de l'inertie rotatoire du mouvement de flexion, $I_p \dot{\theta}_x^2$ représente l'effet de l'inertie rotatoire du mouvement de torsion, $\Omega^2 I_d (\theta_y^2 + \theta_z^2)$ est relatif à l'effet de

rigidification centrifuge, il va être négliger par la suite de l'analyse. Finalement le terme $2\Omega I_p \theta_y \dot{\theta}_z$ est relatif à l'effet gyroscopique.

2.1.6. Equations du mouvement

Dans le cas des vibrations libre, l'équation de Lagrange peut être exprimé comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = 0 \quad (2.27)$$

E_c : Energie cinétique globale du système

E_d : Energie de déformation globale du système

$\{q_i\}$: Cordonnées généralisées, avec (i= u, v, w, θ_x , θ_y , θ_z)

Dans la suite, les équations générales du mouvement seront développées par la DQHFEM. Les matrices élémentaires seront explicitées et la forme générale des équations de mouvement sera détaillé dans le chapitre suivant.

Chapitre III : Modélisation par la DQHFEM

3.1. Introduction	27
3.2. Règle de la quadrature différentielle.....	27
3.3. Règle de quadrature de Gauss Lobatto.....	28
3.4. The Differential Quadrature Hierarchical Finite Element Method (DQHFEM).....	29
3.5. Détermination des matrices élémentaires Me et Ge de l'arbre	32
3.6. Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre Ke	33
3.7. Forme finale des équations du mouvement :	35

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons la modélisation par la DQHFEM pour la résolution des équations du mouvement de la structure étudié, en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement.

La DQHFEM est une méthode qui exprime les matrices obtenues par la méthode des éléments finis hiérarchiques sous une forme similaire à celle de la méthode en quadrature différentielle et qui introduit la base d'interpolation sur la frontière des éléments finis hiérarchiques de la méthode

3.2. Règle de la quadrature différentielle

Les règles de DQ rapprochent la dérivée d'une fonction à un point par une somme linéaire pondérée des variables de champ le long d'une ligne passant par le point. En plus des fonctions de Lagrange, toute autre base complète peut être utilisée comme base pour la formulation des règles des DQ. [39] [40]

Ainsi, pour une variable de champ $f(x)$ sa dérivée d'ordre n en un point discret x_i peut être exprimé comme suit :

$$\left. \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(n)} f(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (3.1)$$

Où $A_{ij}^{(n)}$ est le coefficient de pondération qui est lié à la dérivée d'ordre n et il est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(1)} &= \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N \\ A_{ii}^{(1)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.2)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M(x_i) &= \prod_{K=1, K \neq i}^N (x_i - x_K) \\ M(x_j) &= \prod_{K=1, K \neq j}^N (x_j - x_K) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si $n > 1$, dérivées secondaires et d'ordre supérieur, les coefficients de pondération sont déterminés à l'aide de la relation de récurrence simple suivante :

$$A_{ij}^{(n)} = n \left(A_{ij}^{(1)} * A_{ii}^{(n-1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N, n > 1$$

$$A_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, N$$
(3.4)

3.3. Règle de quadrature de Gauss Lobatto

La théorie des règles de quadrature de Gauss-Lobatto peut être trouvée dans la littérature mathématique. La règle de quadrature de Gauss-Lobatto avec un degré de précision $(2n-3)$ pour la fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $[-1, 1]$ est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^N C_j f(x_j)$$
(3.5)

C_j est le coefficient de pondération de l'intégration Gauss-Lobatto et est donnée par:

$$C_1 = C_N = \frac{2}{N(N-1)}, C_j = \frac{2}{N(N-1)[P_{N-1}(x_j)]^2} \quad (j \neq 1, N)$$
(3.6)

x_j est le zéro $(j-1)$ de la dérivée du premier ordre de $P_{N-1}(x)$. Pour résoudre les racines des polynômes de Legendre, nous utiliserons la formule de récursivité données dans les équations (3.7) et (3.8), il sera plus facile d'obtenir des milliers de racines.

$$P_{N+1}(x) = \frac{2N+1}{N+1} x P_N(x) - \frac{N}{N+1} P_{N-1}(x)$$
(3.7)

Avec $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$. La dérivation d'ordre n des polynômes de Legendre peut être déterminée par la formule de récurrence suivante :

$$P_{N+1}^{(n)}(x) = x P_N^{(n)}(x) + (N+n) P_N^{(n)}(x)$$
(3.8)

Afin d'obtenir une précision importante près des limites (population plus dense), les points d'échantillonnage sont sélectionnés en fonction de la distribution de grille des nœuds de Gauss - Lobatto.

$$x_j = - \cos \left(\frac{j-1}{N-1} \pi \right)$$
(3.9)

Les nœuds de Gauss-Lobatto sont résolus avec la méthode d'itération Newton-Raphson.

$$x^{iT+1} = x^{iT} - \mathbf{F}'(x^{iT})^{-1} \mathbf{F}(x^{iT}), iT = 0, 1, \dots \dots \quad (3.10)$$

Comprenant :

$$x = x_2, x_3, \dots, x_{N-1T} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{F}(x) = f(x_2, f(x_3, \dots, f(x_{N-1T})) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F}'(x) = \partial f(x_j) \partial x_i (N-2) \times (N-2) \quad (3.13)$$

$$f(x_j) = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{x_j - x_k} \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_i} = \begin{cases} - \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{(x_j - x_k)^2}, & (i = j) \\ \frac{1}{(x_j - x_i)^2}, & (i \neq j) \end{cases} \quad (3.15)$$

Où K est la valeur de x à $i^{\text{ème}}$ étape d'itération. Cette méthode est moins sensible à la valeur initiale. Les valeurs données par l'équation (3.9) sont utilisées comme valeurs initiales.

3.4. The Differential Quadrature Hierarchical Finite Element Method (DQHFEM)

Dans notre travail nous utilisons une combinaison de la méthode de la quadrature différentielle et celle des éléments finis hiérarchiques, afin de déterminer l'équation différentielle de mouvement pour un arbre tournant en composite, nous suivrons les mêmes étapes effectuées pour une poutre Euler-Bernoulli uniforme [39].

Le champ déplacement utilisé pour le DQHFEM est le même que pour hpFEM :

$$u[x(\xi)] = H_1(\xi)u_1 + \frac{L_e}{2}H_2(\xi)\frac{du_1}{dx} + H_3(\xi)u_2 + \frac{L_e}{2}H_4(\xi)\frac{du_2}{dx} + \sum_{n=1}^M \psi_n(\xi)U_n \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 w[x(\xi)] = & H_1(\xi)w_1 + \frac{L_e}{2}H_2(\xi)\frac{dw_1}{dx} + H_3(\xi)w_2 + \frac{L_e}{2}H_4(\xi)\frac{dw_2}{dx} \\
 & + \sum_{n=1}^M \psi_n(\xi)W_n
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Les quatre premières fonctions de formes $H1(\xi)$, $H2(\xi)$, $H3(\xi)$ et $H4(\xi)$ sont celles de la méthode des éléments finis nécessaire pour décrire les déplacements et les rotations aux nœuds de l'élément, nous utilisons à cet effet les fonctions cubiques de forme Hermite [41].

$$\begin{aligned}
 H_1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) & H_2(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(\xi+1) \\
 H_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) & H_4(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Où les coordonnées locales sont liées aux coordonnées non dimensionnelles par la relation :

$$x = \frac{L_e}{2}(\xi + 1) \text{ avec } -1 \leq \xi \leq 1 \tag{3.19}$$

Avec $\psi(\xi)$ sont les fonctions hiérarchiques qui contribuent au domaine interne du déplacement.

$$\psi_n(\xi) = \frac{(\xi^2 - 1)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \frac{d^2 P_{n+1}}{d\xi^2} \tag{3.20}$$

Le polynôme de Legendre d'ordre inférieur peut être calculé à partir de la forme de Rodrigues des polynômes spéciaux de Legendre [42]. La fonction génératrice est citée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 P_n(\xi) &= \sum_{K=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{(-1)^K (2n-2K-7)!!}{2^K K! (n-2K-1)!} \xi^{(n-2K-1)} \\
 &\quad \text{with } , n > 4 \\
 n!! &= n(n-2)(n-4) \dots (2 \text{ or } 1), \quad 0!! = (-1)!! = 1, \\
 \text{et } \frac{n-1}{2} &\text{ réfère à sa propre partie entière.}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dans le cadre de certaines études utilisant les versions h , p et hp des éléments finis, les auteurs [43] [44] ont utilisé cette expression polynomiale de Legendre.

On peut aussi utiliser la formule de récursivité Equations (3.7) (3.8) l'ordre n peut atteindre plusieurs milliers. Les vecteurs de déplacement de l'élément sont notés comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^T &= [u_1 \quad u'_1 \quad u_2 \quad u'_2 \quad U_1 \quad \dots \quad U_M] \\
 \mathbf{v}^T &= [v_1 \quad v'_1 \quad v_2 \quad v'_2 \quad V_1 \quad \dots \quad V_M] \\
 \mathbf{w}^T &= [w_1 \quad w'_1 \quad w_2 \quad w'_2 \quad W_1 \quad \dots \quad W_M] \\
 \boldsymbol{\theta}_x^T &= [\theta_{x1} \quad \theta'_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta'_{x2} \quad H_{x1} \quad \dots \quad H_{xM}] \\
 \boldsymbol{\theta}_y^T &= [\theta_{y1} \quad \theta'_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta'_{y2} \quad H_{y1} \quad \dots \quad H_{yM}] \\
 \boldsymbol{\theta}_z^T &= [\theta_{z1} \quad \theta'_{z1} \quad \theta_{z2} \quad \theta'_{z2} \quad H_{z1} \quad \dots \quad H_{zM}]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les équations deviennent :

$$\begin{aligned}
 u[x(\xi)] &= [N_u]^T \mathbf{u} \\
 v[x(\xi)] &= [N_v]^T \mathbf{v} \\
 w[x(\xi)] &= [N_w]^T \mathbf{w} \\
 \theta_x[x(\xi)] &= [N_{\theta_x}]^T \boldsymbol{\theta}_x \\
 \theta_y[x(\xi)] &= [N_{\theta_y}]^T \boldsymbol{\theta}_y \\
 \theta_z[x(\xi)] &= [N_{\theta_z}]^T \boldsymbol{\theta}_z
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Où,

$$\begin{aligned}
 [N_u]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right] \\
 [N_v]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right] \\
 [N_w]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right] \\
 [N_{\theta_x}]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right] \\
 [N_{\theta_y}]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right] \\
 [N_{\theta_z}]^T &= \left[H_1(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_2(\xi) \quad H_3(\xi) \quad \frac{L_e}{2} H_4(\xi) \quad \psi_1(\xi) \quad \psi_2(\xi) \quad \dots \quad \psi_M(\xi) \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le calcul des nœuds de Gauss-Lebatto $\xi_j, j=1, 2, \dots, N$ avec $N=M+4$, définit les vecteurs de mouvement suivant :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}^T &= [u(x_1)u(x_2) \dots \dots u(x_N)] \\
 \bar{\mathbf{v}}^T &= [v(x_1)v(x_2) \dots \dots v(x_N)] \\
 \bar{\mathbf{w}}^T &= [w(x_1)w(x_2) \dots \dots w(x_N)] \\
 \bar{\boldsymbol{\theta}}_x^T &= [\theta_x(x_1)\theta_x(x_2) \dots \dots \theta_x(x_N)] \\
 \bar{\boldsymbol{\theta}}_y^T &= [\theta_y(x_1)\theta_y(x_2) \dots \dots \theta_y(x_N)] \\
 \bar{\boldsymbol{\theta}}_z^T &= [\theta_z(x_1)\theta_z(x_2) \dots \dots \theta_z(x_N)]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Les coefficients de Gauss-Lobatto C_j d'intégration sont donnée par :

$$C = \text{diag}[C_1 C_2 \dots C_N] \quad (3.26)$$

Selon l'équation (3.22) la relation entre l'équation (3.22) et (3.25) est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= G_u u \\ \bar{v} &= G_v v \\ \bar{w} &= G_w w \\ \bar{\theta}_x &= G_{\theta_x} \theta_x \\ \bar{\theta}_y &= G_{\theta_y} \theta_y \\ \bar{\theta}_z &= G_z \theta_z \end{aligned} \quad (3.27)$$

Où,

$$\begin{aligned} G_u &= [N_u](\xi_1) \quad [N_u](\xi_2) \dots \dots [N_u](\xi_N)]^T \\ G_v &= [N_v](\xi_1) \quad [N_v](\xi_2) \dots \dots [N_v](\xi_N)]^T \\ G_w &= [N_w](\xi_1) \quad [N_w](\xi_2) \dots \dots [N_w](\xi_N)]^T \\ G_{\theta_x} &= [[N_{\theta_x}](\xi_1) \quad [N_{\theta_x}](\xi_2) \dots \dots [N_{\theta_x}](\xi_N)]^T \\ G_{\theta_y} &= [[N_{\theta_y}](\xi_1) \quad [N_{\theta_y}](\xi_2) \dots \dots [N_{\theta_y}](\xi_N)]^T \\ G_{\theta_z} &= [[N_{\theta_z}](\xi_1) \quad [N_{\theta_z}](\xi_2) \dots \dots [N_{\theta_z}](\xi_N)]^T \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.5. Détermination des matrices élémentaires $[M^e]$ et $[G^e]$ de l'arbre

En remplaçant les équations (3.2), (3.4), (3.25), (3.26), (3.25) et (3.28) dans l'équation (2.25), l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre devient :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left[I_m ([G_u]^T [C] [G_u] \dot{u}^2 + [G_v]^T [C] [G_v] \dot{v}^2 + [G_w]^T [C] [G_w] \dot{w}^2) \right. \\ &\quad + I_d \left([G_{\theta_y}]^T [C] [G_{\theta_y}] \dot{\theta}_y^2 + [G_{\theta_z}]^T [C] [G_{\theta_z}] \dot{\theta}_z^2 \right) \\ &\quad - 2\Omega I_p [G_{\theta_y}]^T [C] [G_{\theta_z}] \theta_y \dot{\theta}_z + 2\Omega I_p [C] [G_{\theta_x}] \dot{\theta}_x \\ &\quad + I_p [G_{\theta_x}]^T [C] [G_{\theta_x}] \dot{\theta}_x^2 \\ &\quad \left. + \Omega^2 I_d \left([G_{\theta_y}]^T [C] [G_{\theta_y}] \theta_y^2 + [G_{\theta_z}]^T [C] [G_{\theta_z}] \theta_z^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Après application de l'équation de Lagrange pour les différentes variables, la matrice de masse élémentaire obtenue avec (DQHFEM) :

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M_u] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [M_v] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M_w] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M_{\theta_x}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [M_{\theta_y}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [M_{\theta_z}] \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Avec,

$$\begin{aligned} [M_u] &= [I_m([G_u^T][C][G_u])] \\ [M_v] &= [I_m([G_v^T][C][G_v])] \\ [M_w] &= [I_m([G_w^T][C][G_w])] \\ [M_{\theta_x}] &= [I_p[G_{\theta_x}^T][C][G_{\theta_x}]] \\ [M_{\theta_y}] &= [I_d([G_{\theta_y}^T][C][G_{\theta_y}])] \\ [M_{\theta_z}] &= [I_d([G_{\theta_z}^T][C][G_{\theta_z}])] \end{aligned} \quad (3.31)$$

La matrice de l'effet gyroscopique obtenue avec (DQHFEM) :

$$[G^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [G_{yz}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{yz}] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Avec,

$$[G_{yz}] = \Omega I_p [G_{\theta_y}^T][C][G_{\theta_z}] \quad (3.33)$$

3.6. Détermination de la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre $[K^e]$

En remplaçant les équations (3.2), (3.4), (3.25), (3.26), (3.25) et (3.28) dans l'équation (2.20), l'expression de l'énergie de déformation de l'arbre devient :

$$E_{da} = \frac{1}{2} A_{11} [G_u^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_u] u^2 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} B_{11} \left[[G_{\theta_y}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \theta_y^2 + [G_{\theta_z}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \theta_z^2 \right] \\
 & + \frac{1}{2} K_s B_{66} [G_{\theta_x}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_x}] \theta_x^2 \\
 & + \frac{1}{2} K_s A_{16} \left[2 [G_{\theta_x}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_u] \theta_x u \right. \\
 & + [G_{\theta_y}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \theta_y \theta_z - [G_{\theta_z}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \theta_z \theta_y \\
 & - [G_v^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] v \theta_y \\
 & \left. - [G_w^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] w \theta_z \right] \\
 & + \frac{1}{2} K_s (A_{55} + A_{66}) \left[[G_v^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_v] v^2 \right. \\
 & + [G_w^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_w] w^2 + [G_{\theta_y}^T] [C] [G_{\theta_y}] \theta_y^2 \\
 & + [G_{\theta_z}^T] [C] [G_{\theta_z}] \theta_z^2 + 2 [G_w^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] w \theta_y \\
 & \left. - 2 [G_v^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] v \theta_z \right]
 \end{aligned}$$

Après application de l'équation de Lagrange pour les différentes variables, la matrice de rigidité élémentaire obtenue avec (DQHFEM) :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_u] & [0] & [0] & [K_{ux}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_v] & [0] & [0] & [K_{vy}] & [K_{vz}] \\ [0] & [0] & [K_w] & [0] & [K_{wy}] & [K_{wz}] \\ [K_{xu}] & [0] & [0] & [K_x] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{yv}] & [K_{yw}] & [0] & [K_y] & [K_{yz}] \\ [0] & [K_{zv}] & [K_{zw}] & [0] & [K_{zy}] & [K_z] \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Avec,

$$\begin{aligned}
 [K_u] &= A_{11} [G_u^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_u] \\
 [K_{ux}] &= K_s A_{16} [G_{\theta_x}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_u] \\
 [K_v] &= K_s (A_{55} + A_{66}) [G_v^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_v] \\
 [K_{vy}] &= -\frac{1}{2} K_s A_{16} [G_v^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \\
 [K_{vz}] &= -K_s (A_{55} + A_{66}) [G_v^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \\
 [K_w] &= K_s (A_{55} + A_{66}) [G_w^T] [A^{(1)T}] [C] [A^T] [G_w] \\
 [K_{wy}] &= K_s (A_{55} + A_{66}) [G_w^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}]
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{wz}] &= -\frac{1}{2}K_s A_{16} [G_w^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \\
 [K_{xu}] &= K_s A_{16} [G_{\theta_x}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_u] \\
 [K_x] &= K_s B_{66} [G_{\theta_x}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_x}] \\
 [K_{yv}] &= \frac{1}{2}K_s A_{16} [G_v^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \\
 [K_{yw}] &= K_s (A_{55} + A_{66}) [G_w^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \\
 [K_y] &= B_{11} [G_{\theta_y}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] + K_s (A_{55} + A_{66}) [G_{\theta_y}^T] [C] [G_{\theta_y}] \\
 [K_{yz}] &= \frac{1}{2}K_s A_{16} \left[[G_{\theta_y}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] - [G_{\theta_z}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \right] \\
 [K_{zv}] &= -K_s (A_{55} + A_{66}) [G_v^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \\
 [K_{zw}] &= -\frac{1}{2}K_s A_{16} [G_w^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] \\
 [K_{zy}] &= \frac{1}{2}K_s A_{16} \left[[G_{\theta_y}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] - [G_{\theta_z}^T] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_y}] \right] \\
 [K_z] &= B_{11} [G_{\theta_z}^T] [A^{(1)T}] [C] [A^{(1)}] [G_{\theta_z}] + K_s (A_{55} + A_{66}) [G_{\theta_z}^T] [C] [G_{\theta_z}]
 \end{aligned}$$

3.7. Forme finale des équations du mouvement :

En appliquant les équations de Lagrange au système discrétisé par DQHFEM, nous obtenons le système d'équations différentielles (sans second membre) suivant :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (3.37)$$

$[M]$: Matrice masse globale de l'arbre

$[G]$: Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.

$[K]$: Matrice de rigidité linéaire globale de l'arbre.

Afin de transformer le système différentiel de n équations différentielles du second ordre, en un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre l'expression suivante est ajoutée à l'équation (3.37) :

$$-[M]\{\dot{q}\} + [M]\{\dot{q}\} = 0 \quad (3.38)$$

Equation (3.37) et (3.38) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [G] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [K] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.39)$$

On pose :

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [G] & [M] \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [K] & [0] \end{bmatrix}$$

$$\{Q_{tr}\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Le système d'équations différentielles devient :

$$[A]\{\dot{Q}_{tr}\} + [B]\{Q_{tr}\} = \{0\} \quad (3.42)$$

Donc :

$$\{\dot{Q}_{tr}\} = -[A]^{-1}[B]\{Q_{tr}\} = [T_r]\{Q_{tr}\} \quad (3.43)$$

Avec :

$$[T_r] = -[A]^{-1}[B] = - \begin{bmatrix} -[M]^{-1} & [0] \\ [M]^{-2}[G] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [K] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Après calcul :

$$[T_r] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[G] \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Où :

$[I]$ représente la matrice identité de taille $(2p * n_{el} - 4(n_{el} - 1)) \times (2p * n_{el} - 4(n_{el} - 1))$. La solution représentée par le vecteur d'état $\{Q_{tr}\}$ de dimension $(2p * n_{el} - 4(n_{el} - 1))$ est cherché sous la forme classique suivante :

$$\{Q_{tr}\} = \{Q_{tr}^a\} e^{\lambda_{tr} t} \quad (3.46)$$

Et sa dérivée est :

$$\{\dot{Q}_{tr}\} = \lambda_{tr} \{Q_{tr}^a\} e^{\lambda_{tr} t} \quad (3.47)$$

En remplaçant les équation (3.46) et (3.47) dans (3.43) on obtient :

$$\lambda_{tr} \{Q_{tr}^a\} = [T_r] \{Q_{tr}^a\} \quad (3.48)$$

D'après l'équation (3.48), λ_{tr} et $\{Q_{tr}^a\}$ sont les résultats du problème.

$[T_r]$ est la matrice d'état de dimension $(2p * nel - 4(nel - 1)) \times (2p * nel - 4(nel - 1))$ ce qui conduit à trouver $(2p * nel - 4(nel - 1))$ valeurs propres λ_{tr}^i et vecteurs propres $\{Q_{tr}^{a,i}\}$ qui sont des paires de quantités complexes deux à deux conjuguées.

Les valeurs absolues des valeurs propres λ_{tr}^i représentent les pulsations ω_{rt} du système, elles dépendent de la vitesse de rotation Ω , l'évolution des pulsations en fonction de la vitesse de rotation est appelée diagramme de Campbell, ce dernier représente aussi l'évolution des fréquences naturelles $f_r = \omega_r/2\pi$.

L'assemblage des matrices globale est fait de la même manière que la version classique de la méthode des éléments finis pour plusieurs éléments. Le langage de programmation utilisée est MATLAB. Nous utilisons la méthode numérique DQHFEM afin de résoudre les équations de mouvement et déterminer les fréquences propres d'un arbre tournant en matériaux composites suivant différentes conditions aux limites et différents paramètres physiques et géométriques.

Chapitre IV : Résultats et interprétations

4.1.	Introduction	37
4.2.	Modèle de l'arbre en matériaux composite	38
4.3.	Convergence et Validation	39
4.3.1.	Convergence	39
4.3.2.	Validation	40
4.4.	Etudes de cas :	42
4.4.1.	Influence de l'orientation des fibres	42
4.4.2.	Influence des Conditions aux limites	44
4.4.3.	Influence du rapport L/D	45

4.1. Introduction

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux applications numériques présentées dans les chapitres précédents. Un programme en Matlab est élaboré pour la détermination des fréquences propres de l'arbre tournant en matériaux composites et des diagrammes de Campbell. Après validation du programme plusieurs cas vont être étudiés en vue de déterminer l'influence des différents paramètres comme le rapport longueur/diamètre, les orientations des fibres, les conditions aux limites, les différents matériaux. L'organigramme du programme de calcul est représenté ci-dessous :

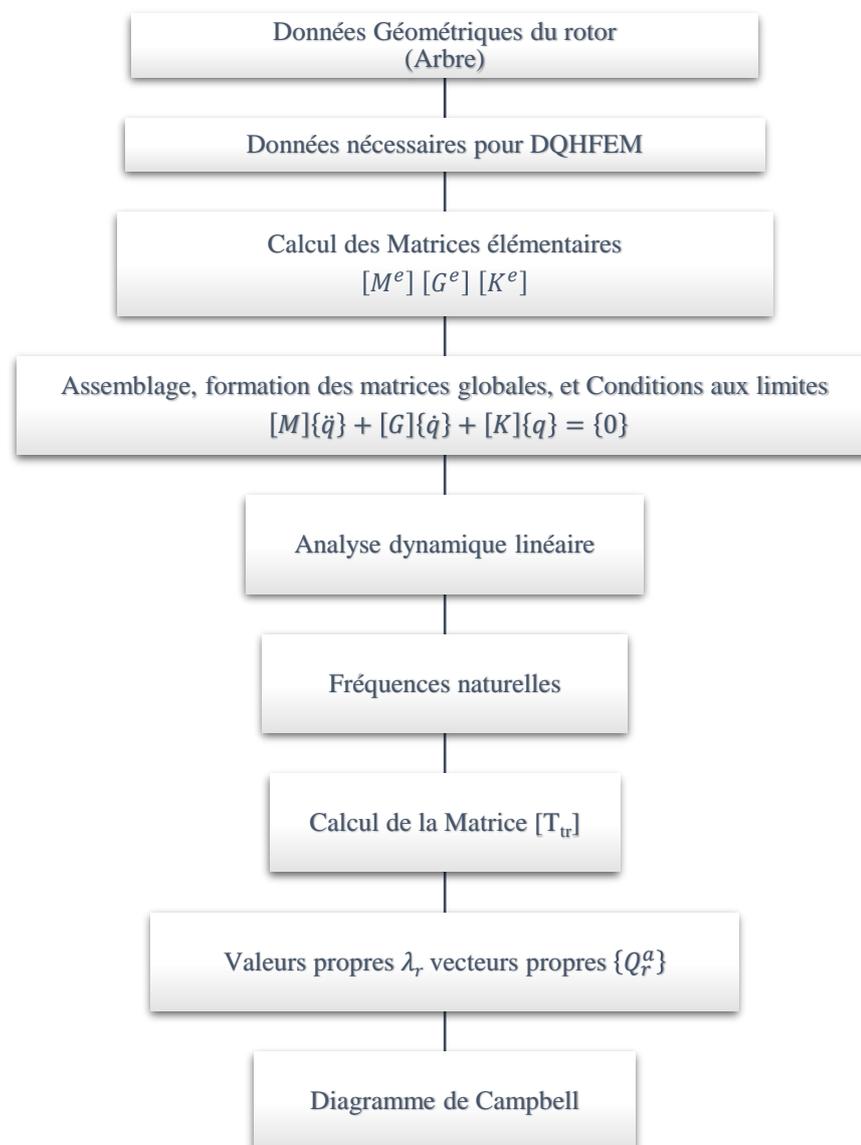


Figure 4. 1 : Programme de calcul

4.2. Modèle de l'arbre en matériaux composite

L'arbre tournant flexible représenté dans la figure est utilisé afin de valider le programme élaboré par la méthode numérique DQHFEM en utilisant la théorie de Timoshenko et la théorie d'Euler Bernoulli. Les propriétés géométriques et physiques de l'arbre tournant en composites étudié sont données dans les tableaux (4.1) et (4.2).



Figure 4.2 : Modèle de l'arbre tournant

Tableau 4.1 : Propriétés géométriques de l'arbre

Symbole	Quantité	Valeur
K_s	Facteur de correction de cisaillement	0.503
n	Nombre de couches	10
η	Orientations des fibres	$90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$
L	Longueur de l'arbre	2.47 m
D	Diamètre de l'arbre	12.69 cm
e	Epaisseur de l'arbre	1.321 mm

Tableau 4.2 : Propriétés physiques de l'arbre

	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ρ (kg/m ³)
Bore- époxyde	211.0	24.1	6.9	6.9	0.36	1967.0
Graphite- époxyde	139.0	11.0	6.05	3.78	0.313	1578.0

4.3. Convergence et Validation

4.3.1. Convergence

La figure (4.3) représente les résultats des trois premières fréquences naturelles pour un arbre tournant en Bore-Epoxyde bi-appuyé en fonction des nombres d'échantillonnage. On remarque que la méthode élaborée converge rapidement, en augmentant le nombre d'échantillonnage N . Pour les basses fréquences la convergence est atteinte avec un nombre d'échantillonnage très faible ($N=6$) et pour les hautes fréquences, avec un nombre légèrement plus élevé ($N=10$). Donc d'après ces résultats de convergences, les calculs suivants pour la validation et les études de cas, on prend un nombre d'échantillonnage égal à 10 ($N=10$).

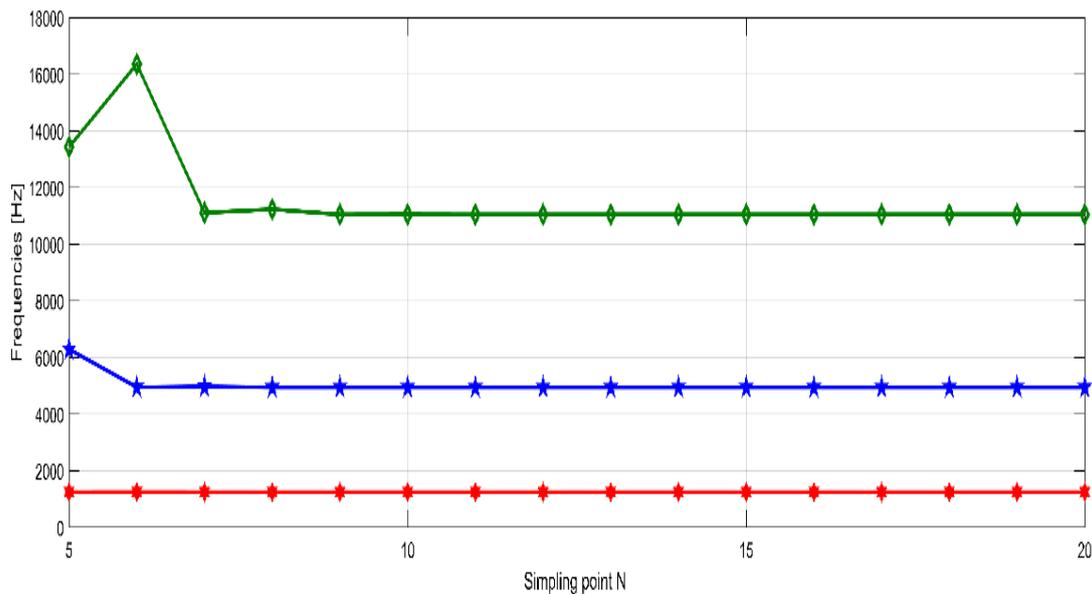


Figure 4.3 : Convergence des trois premières fréquences de flexion en fonction du nombre d'échantillonnage des nœuds DQHFEM (l'arbre est discrétisé en un seul élément) $\Omega=0$.

4.3.2. Validation

Les tableaux ci-dessous montrent la validation des résultats obtenus par DQHFEM pour un arbre tournant en Bore- Epoxyde et en Graphite-Epoxyde basée sur la théorie des poutres de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement, et celle d'Euler Bernoulli qui néglige l'influence de cet effet. Nous comparons nos résultats avec ceux disponibles dans la littérature.

Dans le cas du Bore-Epoxyde, la première vitesse critique trouvée par notre méthode basée sur la poutre de Timoshenko concorde avec ceux disponibles dans la littérature tel que le résultat de **M.-Y. Chang et al** qui a utilisé la poutre de Timoshenko avec paliers flexibles, ainsi que le résultat obtenu par **Bert** qui a adopté la poutre de Timoshenko. Pour la première vitesse critique basée sur la poutre d'Euler Bernoulli, où les résultats sont montrés, dans le tableau 4.3, nous remarquons qu'il n'existe pratiquement aucune différence entre nos résultats et ceux trouvés par Dos Reis et al qui ont utilisé des éléments coques dans la méthode des éléments finis dans le cas d'une poutre de Bernoulli-Euler.

Tableau 4. 3 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en bore époxyde

	Théories/ méthodes de comparaison	Ω_{cr1} (tr/min)
Zinberg et Symonds	Mesurée expérimentalement	6000
	EMBT	5780
Bert et Kim	Coque de Sanders	5872
Bert	Coque mince de Donnell	6399
Singh et Gupta	Poutre de Bresse-Timoshenko	5788
	EMBT (La théorie des poutres du module équivalent)	5747
	LBT (La théorie de stratifié des poutres)	5620
M.-Y. Chang et al	Poutre de Timoshenko	5762
Present study	Poutre de Timoshenko avec la méthode DQHFEM	5684

Tableau 4. 4 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en bore époxyde

	Théories/ méthodes de comparaison	Ω_{cr1} (tr/min)
Dos Reis et al.	Poutre de Bernoulli-Euler par la rigidité déterminée	4942
Bert et Kim	Par les éléments finis des coques	5919
	Poutre de Bernoulli-Euler	
Present Study	Poutre de Bernoulli-Euler avec la méthode DQHFEM	4959

En gardant les mêmes propriétés géométriques et les mêmes conditions aux limites (bi-appuyé), et en changeant uniquement le matériau par le Graphite Epoxyde, nous obtenons pour les premières vitesses critiques pour la poutre de Timoshenko et la poutre d'Euler-Bernoulli les valeurs représentés sur les tableaux.

Dans le premier exemple qui est basé sur la poutre de Timoshenko, on remarque que nos résultats sont semblables au modèle basé sur la théorie des coques de Sanders vu que la paroi étudiée dans cet exemple est relativement mince, et c'est ce qui a permis l'application de la théorie des coques.

Tableau 4. 5 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en graphite époxyde

	Théories/ méthodes de comparaison	Ω_{cr1} (tr/min)
Bert et Kim	Coque de Sanders	5349
	Coque mince de Donnell	5805
M-Y. Chang et al	Poutre de Bresse- Timoshenko	5197
Present study	Poutre de Timoshenko avec la méthode DQHFEM	5035

Tableau 4.6 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en graphite époxydeite époxyde

	Théories/ méthodes de comparaison	Ω_{cr1} (tr/min)
Bert et Kim	Poutre de Bernoulli Euler	5301
Present Study	Poutre de Bernoulli Euler avec la méthode DQHFEM	4469

4.4. Etudes de cas :

Dans cette partie, nous étudions les influences des différents paramètres géométriques et mécaniques sur les vitesses et sur les diagrammes de Campbell.

4.4.1. Influence de l'orientation des fibres

Nous étudions l'influence des orientations des fibres des différentes couches sur un arbre tournant en graphite époxyde en gardant les mêmes propriétés géométriques et physique données dans les deux tableaux (4.1) (4.2), et le même nombre de couche (10 couches). Et cela pour voir leur influence sur les premières vitesses critiques.

La vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en graphite- époxyde pour différentes orientations des fibres est représentée dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.7 : La première vitesse critique (tr/mn) de l'arbre tournant en Graphite Epoxyde pour différentes orientations des fibres

		Orientation des fibres η (°)						
		0	15	30	45	60	75	90
Vitesse critique	FW	4282	5291	6918	7594	6818	4978	3739
	BW	4278	5285	6911	7586	6810	4973	3735

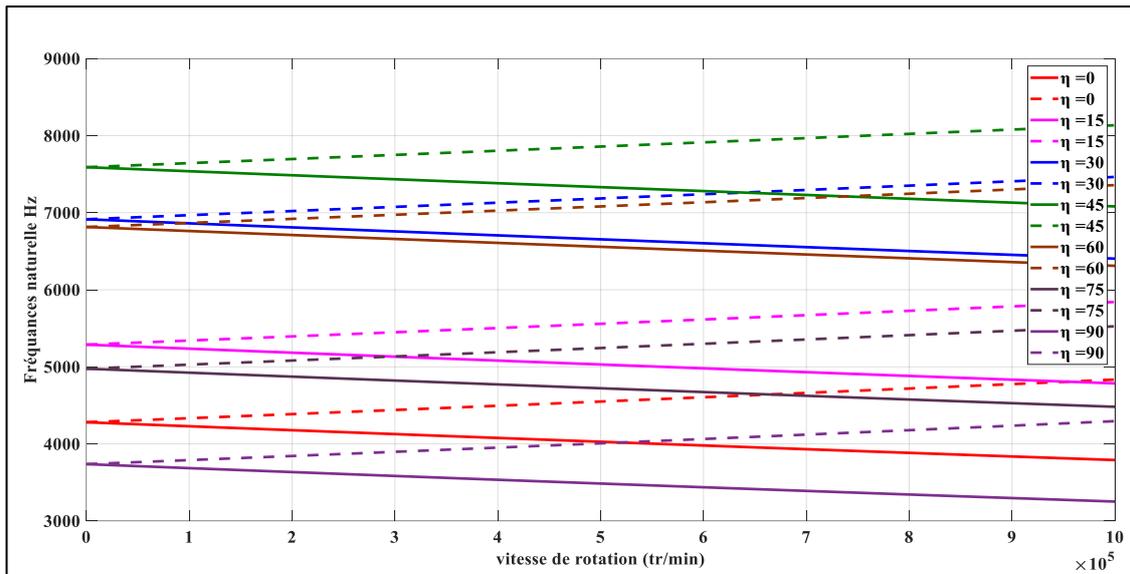


Figure 4.4 : diagramme de Campbell pour la première et deuxième fréquence pour

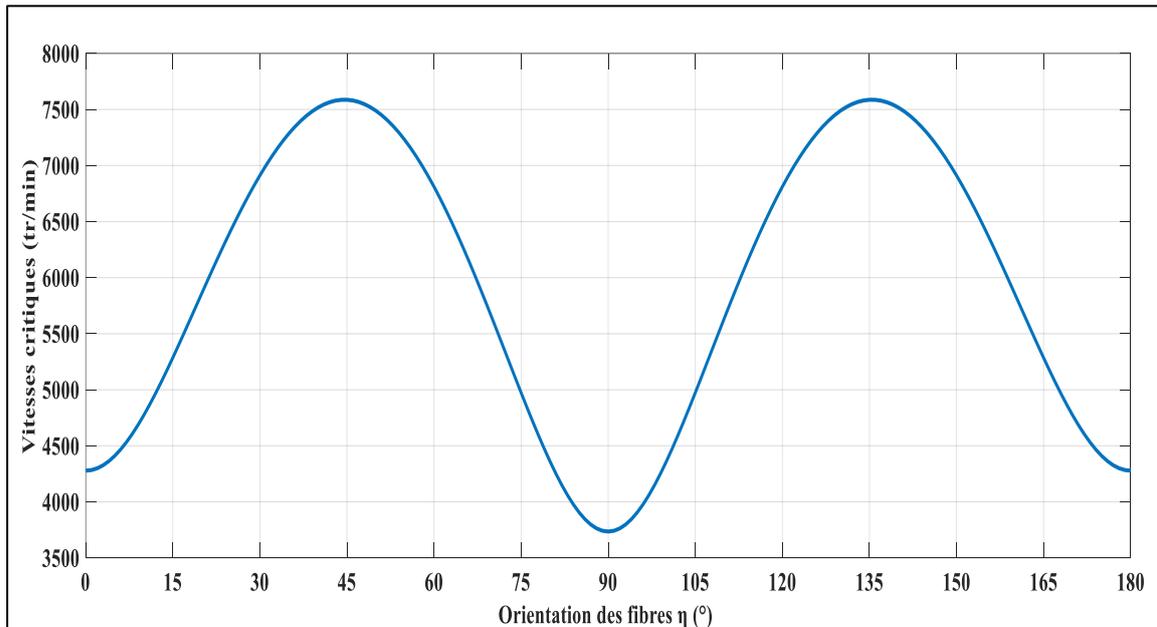


Figure 4.5 : Diagramme de vitesses critiques pour différentes orientations des fibres η (°)

Selon les résultats obtenus dans le tableau (4.7) et les figures (4.3) et (4.4) on constate, que les vitesses critiques sont comprises entre la vitesse critique quand l'orientation des fibres est égale à 0 et quand elle est égale à 90. Donc pour avoir une bonne résistance aux vitesses critiques, il faut bien choisir la bonne combinaison les orientations de chaque fibre.

4.4.2. Influence des Conditions aux limites

Nous étudions l'influence des conditions aux limites du même arbre tournant en graphite époxyde en gardant les mêmes propriétés géométriques et physique données dans les deux daleaux (4.1) (4.2), et le même nombre de couche (10 couches). La première vitesse critique des trois conditions aux limites : S-S, C-C et S-C est représentée sur la figure (4.5).

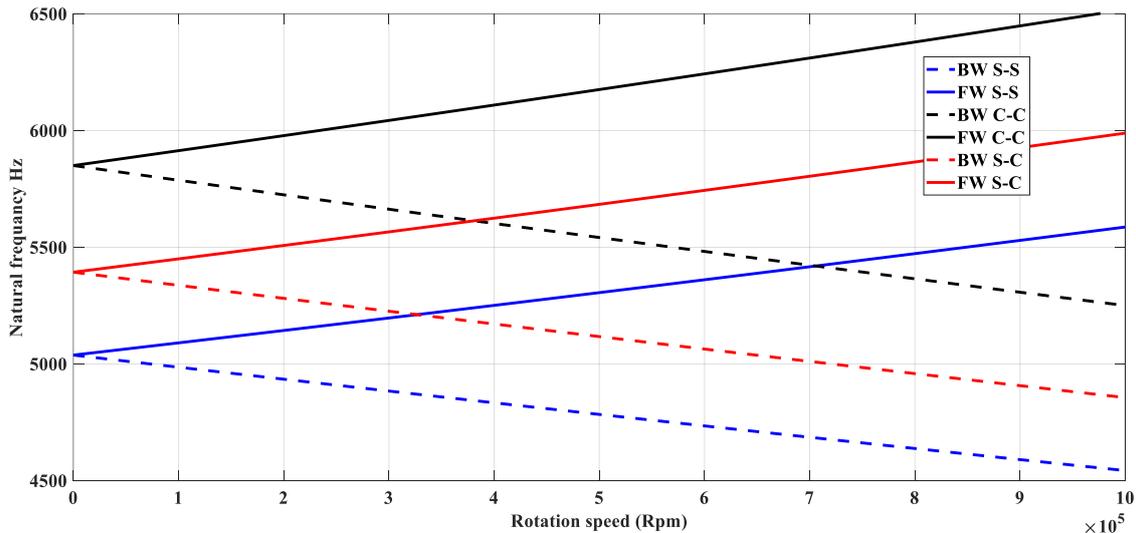


Figure 4.6 : diagramme de Campbell pour déferant condition aux limite Graphite-époxyde

Dans cette exemple, l'arbre tournant est en Graphite-époxyde. Les fréquences de l'arbre tournant sont analysées. L'orientation des fibres dans les dix couches est η ($^\circ$) = [90 45 – 45 0 0 0 0 0 90]. Les propriétés géométriques sont les mêmes que celles de l'exemple précédent.

La figure 4.5 montre la variation de la fréquence fondamentale en fonction de la vitesse de rotation Ω (diagramme de Campbell) pour différentes conditions aux limites.

D'après ces résultats trouvés, on remarque que les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres d'un arbre tournant en matériaux composites et par conséquent sur les fréquences naturelles du système.

Les fréquences de cas encastés dans les deux côtés sont élevés comparées à celles dans le cas simplement appuis dans les deux côtés, ce qui explique physiquement que l'encastrement rend la structure plus résistant aux vibrations.

4.4.3. Influence du rapport L/D

Nous étudions l'influence du rapport L/D du même arbre tournant en graphite époxyde en gardant les mêmes propriétés géométriques et physiques de l'exemple précédent.

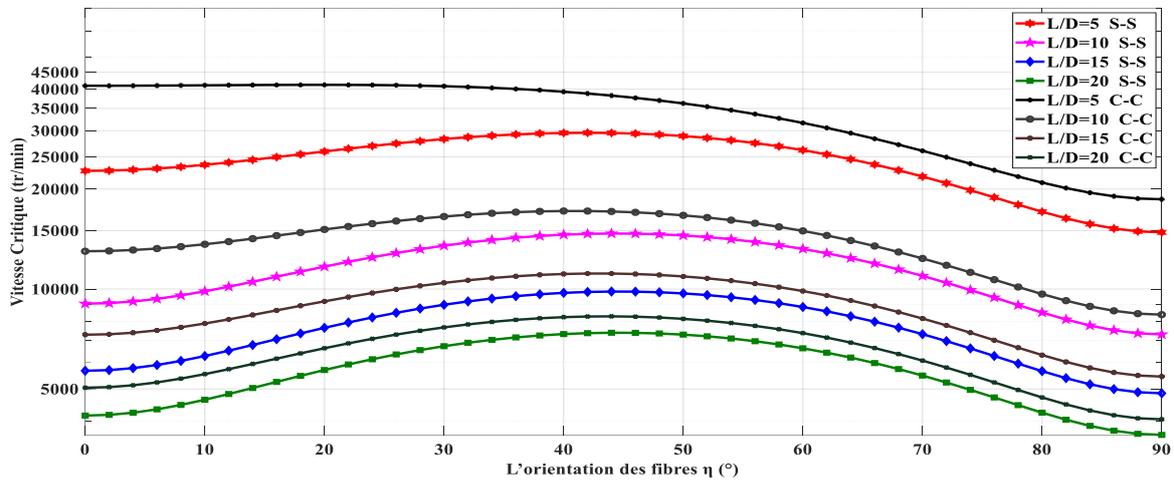


Figure 4.7 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de rapports L/D pour différentes orientations des fibres (C-C).

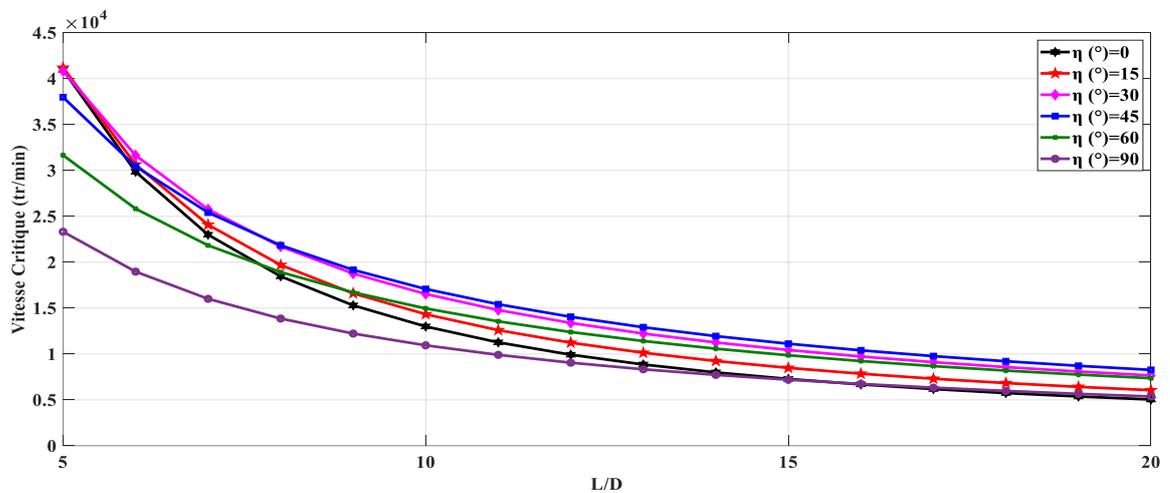


Figure 4.8 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de l'orientation des fibres pour différents rapports L/D et différentes conditions aux limites (S-S, C-C).

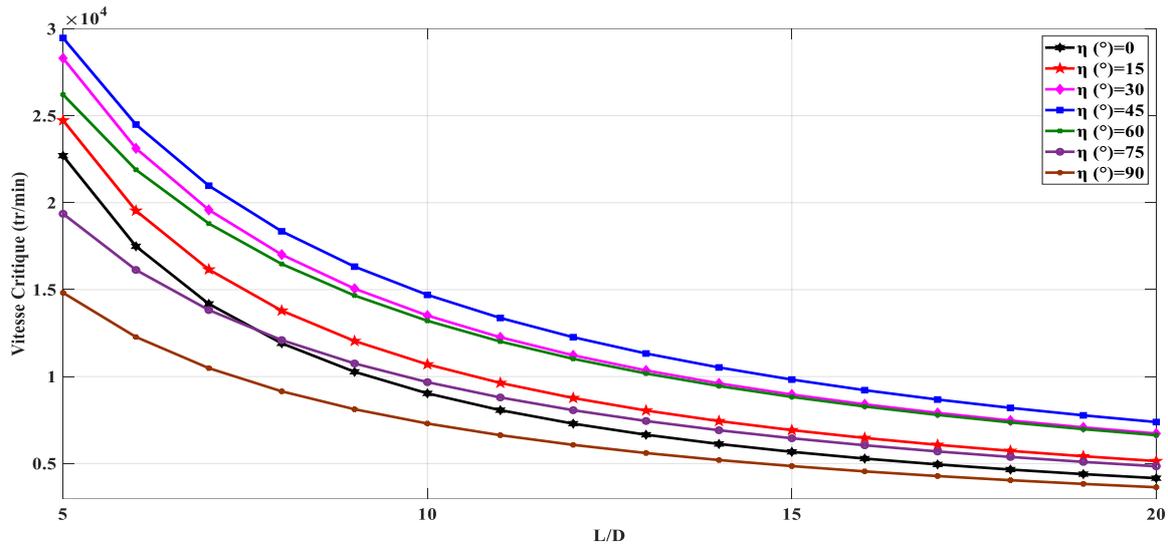


Figure 4.9 : Première vitesse critique de l'arbre tournant en fonction de rapports L/D pour différentes orientations des fibres (S-S).

Les figures (4.6) (4.7) (4.8) donnent successivement la variation des premières vitesses critiques du même arbre tournant en graphite- époxyde avec différents rapport L/D en fonction de l'orientation des fibres, et pour différentes conditions aux limites. On remarque que les vitesses critiques diminuent par rapport à l'augmentation du rapport L/D

Selon ces résultats obtenus, tout en prévoyant quelle orientation des fibres de l'arbre tournant en matériaux composites ayant la vitesse critique maximum, nous devrions prendre en considération le rapport L/D et le type des conditions aux limites. C'est-à-dire, la vitesse critique maximum d'un arbre tournant en matériaux composites n'est pas toujours à un angle de pli égale zéro degré, mais elle dépend du rapport de L/D et le type des conditions aux limites.

Conclusion Générale

L'importance des matériaux composites dans l'industrie moderne nous a orienté vers l'étude de l'analyse vibratoire des arbres tournants en matériaux composites.

Dans notre travail, la modélisation est faite en combinant deux méthodes à savoir la méthode des éléments finis hiérarchiques et la méthode de la quadrature différentielle, qui donne naissance à la DQHFEM.

Les arbres sont analysés en utilisant les théories d'Euler Bernoulli et Timoshenko, nous avons développé un programme pour le calcul des fréquences et du diagramme de Campbell.

Plusieurs études de cas sont faites pour la détermination des influences des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement vibratoire des arbres en composites.

À travers ces études nous pouvons conclure :

- La DQHFEM converge rapidement.
- La convergence peut être contrôlée en fonction de nombre d'échantillonnage et du nombre des fonctions d'interpolation.
- Les vitesses critiques sont comprises entre la vitesse critique quand l'orientation des fibres est égale à 0 et quand elle est égale à 90. La résistance de l'arbre peut être contrôlée par les orientations des fibres.
- Les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres.
- Plus le rapport L/D augmente, plus l'arbre devient moins rigide.

Comme perspectives nous pouvons étudier l'influence de la température sur le comportement vibratoire des rotors composites.

Bibliographie

- [1] C. W. Bert and C. D. Kim, "Dynamic Instability of Composite-Material Drive Shaft Subjected to Fluctuating Torque and/or Rotational Speed," *Dynamics and Stability of Systems*, 2, 125-147, 1995.
- [2] C. Bert , "The Effect of Bending–Twisting Coupling on The Critical Speed Of a Driveshafts," *In: Proceedings, 6th Japan-US Conference on Composites Materials, Orlando, FL. Technomic, Lancaster. PA 29-36*, 1992.
- [3] J. Berthelot, *Matériaux Composites, Comportement Mécanique et Analyse des*, Paris: Masson, , Deuxième édition, 1996.
- [4] A. Boukhalfa and al, "Free Vibration Analysis of a Rotating Composite Shaft Using the p- Version of the Finite Element Method," *International Journal of Rotating Machinery*, 1–10, 2008.
- [5] A. Boukhalfa and A. Hadjoui, "Free vibration analysis of an embarked rotating composite shaft using the hp-version of the FEM," *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(2), 105–141, 2009.
- [6] M. Y. Chang and al, "A Simple Spinning Laminated Composite Shaft Model," *International Journal of Solids and Structures*. 41, 637–662., 2004.
- [7] H. L. M. Dos Reis and al, "Thin Walled Laminated Composite Cylindrical Tubes: Part III- Critical Speed Analysis," *Journal of Composites Technology* 9, 58–62, 1987.
- [8] K. Gupta and S. E. Singh, "Dynamics of Composite Rotors," *Proceedings of Indo-USsymposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering, New Delhi, India. 59-70*, 1996.

- [9] C. D. Kim and C. W. Bert, "Critical Speed Analysis of Laminated Composite, Hollow Drive Shafts,," *Composites Engineering*, 3, 633–643, 1993.
- [10] C. Liu and al, "A differential quadrature hierarchical finite element method and its applications to vibration and bending of Mindlin plates with curvilinear domains," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(2), 174–197., 2016.
- [11] A. Saimi et al, «An Differential Quadrature Finite Element and the Differential Quadrature Hierarchical Finite Element Methods for the Dynamics Analysis of on Board Shaft,» *European Journal of Computational Mechanics*, 2021.
- [12] S. P. Singh and K. Gupta, "Composite Shaft Rotordynamic Analysis Using a Layerwise Theory," *Journal of Sound and Vibration*, 191, 5, 739–756, 1996.
- [13] S. E. Singh and K. Gupta, "Experimental Studies on Composite Shafts," *Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering, Bangalore, India 1205-1221*, 1995.
- [14] S. Singh and K. Gupta, "Free Damped Flexural Vibration Analysis of Composite Cylindrical Tubes Using Beam and Shell Theories," *Journal of Sound and Vibration*, 172(2) 171-190., 1994.
- [15] R. Sino and al, "Dynamic analysis of a rotating composite shaft," *Composites Science and Technology* 68 (2) 337–345, 2008.
- [16] H. Zinberg and M. Symmonds, "The Development of an Advanced Composite Tail Rotor Driveshaft," *Presented at the 26th Annual Forum of the American helicopter Society, Washington, DC*, June 1970.
- [17] I. M. Friswell et al, «Dynamics of rotating machines,» *Cambridge University Press*, 2010.

- [18] M. Lalanne et G. Ferraris, «Dynamique des rotors en flexion,» *Technique de l'ingénieur*, 2015.
- [19] F. Nelson, «A review of the origins and current status of rotor dynamics,» *In IFToMM- Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, 2002.
- [20] S. Dunkerley, «On the Whirling and Vibration of Shafts,» *Phil. Trans. R. Soc, London, Ser. A*, 185, 279-360., 1894.
- [21] W. J. M. Rankine, «On the Centrifugal Force of Rotating Shafts,» *Engineer*, 27, 1869.
- [22] R. G. Loewy et V. J. Piarulli, « Dynamics of Rotating Shafts,» *Shock and Vibration*, 1969.
- [23] M. Lalanne et G. Ferraris, «Rotor dynamics prediction in engineering, 2nd Edition,» *Chichester, John Wiley*, p. 254, 1998.
- [24] J. RAO, «Rotordynamics,» *New York : Wiley*, 1992.
- [25] T. Yamamoto et Y. Ishada, «Linear and nonlinear rotordynamics: A modern treatment with applications,» *New York : Wiley*, 2001.
- [26] N. Bachschmid et al, «Cracked Rotors,» *Berlin : Springer*, 2010.
- [27] V. Placet et al, «Potentialités et limites des structures composites à enroulement circonférentiel pour des applications sur machine tournante,» *AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc, 92400 Courbevoie, France(FR)*, 2011.
- [28] J. Ratner et al, « Composite flywheel rotor technology – a review. Composite Materials: Testing and Design Fourteenth volume,» *ASTM STP 1436. E. Bakis Ed*, 2003.

- [29] J.-M. Berthelot, mécanique et analyse des structure 5^eédition, Lavoisier Paris IBBN : 978-2-7430-14507, 2012 .
- [30] N. bahlouli, Cours Matériaux composites /DESS Mécanique avancée et stratégie, IOST-ULP.
- [31] A. Boukhalifa and al, “Free Vibration Analysis of a Rotating Composite Shaft Using the p- Version of the Finite Element Method,” *International Journal of Rotating Machinery*, 1–10, 2008.
- [32] «Document ressource sur les moteurs,» [En ligne]. Available: <http://www.rvb15.fr/ressources/moteurs/turbineCombInt.html>.
- [33] «pumpfundamental,» [En ligne]. Available: https://www.pumpfundamentals.com/pump_glossary.htm.
- [34] «carbon-cleaning,» [En ligne]. Available: <https://www.carbon-cleaning.com/techniques/le-turbo>.
- [35] F. Horel, *MODÉLISATION ANALYTIQUE DE L'AMORTISSEMENT DES POUTRES COMPOSITES SANDWICH CONTENANT DES COUCHES*, Montréal , 2013.
- [36] G. Genta, «Dynamics of rotating systems,» *New York : Springer*, 2005.
- [37] G. Genta, «Vibration of structures and machines,» *New York : Springer*, 1995.
- [38] M. Reyne, «Les composites,» *Presses Universitaires de France (PUF)*, Novembre, 2007.

- [39] C. Liu and al, “A differential quadrature hierarchical finite element method and its applications to vibration and bending of Mindlin plates with curvilinear domains,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(2), 174–197., 2016.
- [40] L. Cuiyun et al., «A differential quadrature hierarchical finite element and its applications to vibration and bending of Mindlin plates with curvilinear domains,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(2), p. pp. 174–197., 2016.
- [41] N. S. Bardell, «An engineering application of the hp version of the finite element method to the static analysis of a Euler-Bernoulli beam.,» *Computers & structures*, 59(2), p. pp. 195–211, 1996.
- [42] A. Peano, « Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending,» *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 2, p. pp. 211–224., 1976.
- [43] A. H. A. Saimi, «An engineering application of the h-p version of the finite elements method to the dynamics analysis of a symmetrical on-board rotor,» *European Journal of Computational Mechanics*, p. pp. 388–416., 2016.
- [44] A. Hassan et al, « Numerical analysis on the dynamics behavior of FGM rotor in thermal environment using hp finite element method,» *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, p. pp. 1–24., 2020.