REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Géométrie différentielle

Par :

Mr DIEB Abdelrazek

Sur le thème

Sur une classe de problèmes elliptiques non locaux et non-linéaires avec terme singulier

---

Soutenue publiquement le 18-12-2019 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr TOUAOULA. T	Professeur	Université De Tlemcen	Président
Mr ABDELLAOUI. B	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr AZZOUZ. A	Maître de Conférences A	Université de Saida	Examinateur
Mr MIRI. S. H	Maître de Conférences A	Université Tlemcen	Examinateur
Mr MAHMOUDI. F	Professeur	Université El Manar	Examinateur

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées (LANMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Je dédie ce manuscrit à :

Mes parents, qui avec leurs sacrifices m'ont permis de donner le meilleur de moi-même.

Ma femme pour son aide inconditionnelle, sa patience et toute la confiance qu'elle m'accorde.

Ma fille Alaa à qui je souhaite tout le bonheur et la réeussite.

Ma soeur Sihame et mes frères Djilali, Noureddine, Khaled et Youcef.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse M. Abdellaoui. B, pour l'honneur qu'il m'a fait de travailler sous sa direction, je remercie en lui sa patience, sa disponibilité permanente, les encouragements qu'il m'a prodigués et surtout ses judicieux conseils et indications toujours fructueuses. Enfin je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Touaoula. T. M., pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Miri. S. H, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury qui examinera cette thèse.

Je prie M. le Professeur Mahmoudi. F, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, M. le Professeur Azzouz. A, d'avoir accepté de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Mes remerciements chaleureux à Mon ami et mon frère Attar A., qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de cette thèse, sa disponibilité, sa gentillesse.

Je remercie les amis ; les vrais, Ahmed, Mohamed, Rachid, Oussama, Sofiane, Fethi pour leur soutien tout au long de ces années.

Je remercie également tous les membres du laboratoire ANLMA, qui m'ont facilité l'intégration dans ce groupe de recherche et aussi pour leur soutien et encouragements tout au long de ces années.

Je remercie ma femme Nour El Houda, sans qui rien n'aurait été possible.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$(-\Delta)^s u$	Laplacien fractionnaire de u
p'	Exposent conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
$p^* = \dfrac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$	Exposent de Sobolev critique fractionnaire
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Domaine borné à frontière régulière
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
Ω^c	complementaire de Ω dans $\mathbb{R}^N$
supp u	Support de la fonction u
$meas(A) = \|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B(x_0, R),\ B_R(x_0)$	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^N$
E'	Espace dual de E
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ / crochet de dualité E, E'
$\setminus$	Différence d'ensemble
δ_{ij}	Indice de Kronecker
u^+	Partie positive de la fonction u, $u^+ = \max(u, 0)$
u^-	Partie negative de la fonction u, $u^- = \max(-u, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe C^k dans Ω

$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe C^k sur Ω
$\mathcal{C}^{\mu}(\Omega)$, $\mu \in \mathbb{R}_+$	Espace des fonctions Hölderiennes avec $k = [\mu]$ et $\beta = \mu - [\mu]$
	où $[\mu]$ est la partie entière de μ
$Lip(\mathbb{R})$	Espace des fonctions Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	$\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|\varphi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} < +\infty\}$
	avec $\|\varphi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} (1+\|x\|^k) \sum\limits_{\|\alpha\|\leqslant l} \|D^{\alpha}\varphi(x)\|, \qquad k,l \in \mathbb{N}_0,$
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_{\Omega} \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$
$L^{\infty}(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable $\exists\, C$ tel que $\|u(x)\| \leqslant C$ p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$H^s(\mathbb{R}^N)$	Espace de Sobolev fractionnaire pour s dans $(0,1)$
$H_0^s(\Omega)$	Sous espace de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ des fonctions qui s'annulent dans Ω^c

Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse à des problèmes elliptiques semi-linéaires non-locaux avec des conditions extérieures de Dirichlet ou Dirichlet-Neumann. Plus précisément, on considère des problèmes dont le modèle général est

$$P_\lambda \quad \equiv \begin{cases} (-\Delta)^s u &= f_\lambda(x,u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 \quad\quad\quad\ \ \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné régulier, f_λ est une non-linéarité qui dépend d'un paramètre λ et $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par,

$$(-\Delta)^s u(x) = a_{N,s}\ P.V. \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy. \tag{0.0.1}$$

où on entend par P.V. l'intégrale au sens de valeur principale et $\mathcal{B}_s$ est une condition extérieure.

Ces problèmes trouvent leurs origines dans différents domaines de mathématiques pures et appliquées, citons à titre d'exemple : le Laplacien fractionnaire peut être considéré comme un générateur infinitésimal d'un processus de Lèvy, ce qui donne une interprétation probabiliste de cet opérateur, il intervient comme modèle dans la dislocation cristalline, les phénomènes de transitions de phases, voir pour plus de détails [43], [28], [47]. Notons que $(-\Delta)^s$ est un opérateur non-local dans le sens où on doit avoir une information sur u dans tout $\mathbb{R}^N$ pour pouvoir évaluer $(-\Delta)^s u(x)$, ce qui est clair à partir de la définition. Une définition équivalente du Laplacien factionnaire est la suivante

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(|\xi|^{2s} u)\Big).$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier ; c'est-à-dire que $(-\Delta)^s$ peut être considéré comme un opérateur pseudodifférentiel.

0.1 Description de la Thèse

0.1.1 Description du chapitre 2

Dans [47], les auteurs ont introduit une nouvelle condition de type Neumann non-locale, compatible avec l'interprétation probabiliste du Laplacien fractionnaire comme générateur infinitésimal d'un processus de Lévy dans $\mathbb{R}^N$. Motivés par cela, on s'intéresse dans ce chapitre à étudier un problème elliptique non-local semi-linéaire avec des données mixtes de Dirichlet et Neumann. Plus précisément, nous étudions l'existence et la multiplicité de solutions positives du problème suivant

$$P_\lambda \quad \equiv \left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & \lambda u^q + u^p & \text{dans } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{array} \right.$$

où $0 < q < 1 < p$, $N > 2s$, $\lambda > 0$. Dans ce contexte, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné régulier et $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par,

$$(-\Delta)^s u(x) = a_{N,s} \ P.V. \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \, dy. \tag{0.1.2}$$

Nous renvoyons le lecteur à [60], [63], [43] pour une vaste description des propriétés de cet opérateur. La constante $a_{N,s} > 0$ est une constante de normalisation et la condition extérieure

$$\mathcal{B}_s u = u\chi_{\Sigma_1} + \mathcal{N}_s u \chi_{\Sigma_2}, \tag{0.1.3}$$

peut être considérée comme une version non-locale de la condition mixte de Dirichlet-Neumann. L'opérateur $\mathcal{N}_s$ est la dérivée normale non-locale introduite dans[47] donnée par

$$\mathcal{N}_s u(x) = a_{N,s} \int_\Omega \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \tag{0.1.4}$$

En outre, Σ_1 et Σ_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ tels que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ et $\overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Notons que dans (0.1.3) nous avons noté χ_A la fonction caractéristique d'un ensemble A.

Nous observons que, contrairement au cas de conditions de Dirichlet homogènes, le cas des conditions de Neumann et mixtes n'ont pas été beaucoup étudiées dans le cadre fractionnaire. Ceci est dû au fait que la condition de Neumann classique possède de bonnes propriétés géométriques (par exemple, le fait que la dérivée normale de la fonction s'annule, permet d'utiliser des arguments de symétrie et de Blow-up) et des propriétés analytiques, tandis que dans le cas non-local les conséquences de (2.1.3) sont beaucoup moins intuitives et plus difficiles à gérer. C'est le premier travail consacré à l'analyse d'un problème non linéaire et non local avec des données extérieures mixtes. Nous notons que récemment un Lemme de Hopf a été prouvé dans [21] pour de telles conditions extérieures mixtes.

En utilisant la formule d'intégration par parties donnée dans [47], nous remarquons que le problème (P_λ) est variationnel et ces solutions sont des points critiques de la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \frac{\lambda}{q+1}\|u_+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_+\|_{p+1}^{p+1}, \tag{0.1.5}$$

où

$$\mathcal{D}_\Omega = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c), \qquad \|v\|_r^r = \int_\Omega |v|^r\,dx \quad \text{et} \quad u_+ = \max(u,0).$$

Ce problème, dans le cas local du Laplacien classique, et avec des conditions de Dirichlet, a été étudié dans la littérature par plusieurs auteurs, en particulier nous citons le travail d'Ambrosetti, Brezis et Cerami [12]. Des problèmes similaires avec des conditions de Dirichlet-Neumann ont été étudiés, dans le cas sous-critique, dans [34] et, dans le cas critique, dans [56].

Dans le cadre non local (c'est-à-dire lorsque $s \in (0,1)$), avec des conditions de Dirichlet, le problème a été étudié dans [22], le cas sous-critique, et dans [20], [44], [45] et [27] pour le cas critique. Voir aussi [71], [72].

Dans [20] et [45], les auteurs utilisent l'extension de Caffarelli-Silvestre, introduite dans [31], qui leur permet de ramener le problème à un problème local.

Notons que, dans notre cas, en raison de la partie non locale de Neumann, nous ne pouvons pas utiliser une telle extension et que nous traitons le problème de manière appropriée purement non locale. De plus, pour obtenir nos résultats de multiplicité, nous utiliserons un argument dû a Alama, voir [10]. Pour quelques des motivations concernant les équations non locales et les opérateurs fractionnaires, voir par exemple [28] et les références qui y figurent. Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème. Soient $0 < s < 1$, $0 < q < 1 < p$. Alors il existe un $\Lambda > 0$, tel que :

1. Pour tout $\lambda \in (0,\Lambda)$, le problème (P_λ) admet une solution minimale u_λ telle que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. De plus, si $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $u_{\lambda_1} < u_{\lambda_2}$.

2. Si $\lambda > \Lambda$, le problème (P_λ) n'admet pas de solutions faibles positives.

3. Si $\lambda = \Lambda$, le problème (P_λ) admet au moins une solution faible positive.

Théorème. Soient $0 < s < 1$, $0 < q < 1 < p < \frac{N+2s}{N-2s}$, $\lambda \in (0, \Lambda)$. Alors le problème (P_λ) admet une deuxième solution positive $v_\lambda > u_\lambda$.

0.1.2 Description du chapitre 3

Les problèmes étudiés dans ce chapitre sont motivés par des résultats récents qui seront présentés par la suite. En premier lieu, nous rappelons l'inégalité de Hardy classique prouvée dans [58] (voir aussi [23, 50, 77, 80]).

Théorème. *(Inégalité de Hardy fractionnaire). Supposons que $s \in (0,1)$ et que $2s < d$, alors pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité suivante est vérifiée,*

$$\frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy \equiv \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2\, d\xi \geqslant \Lambda \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{-2s} u^2\, dx, \tag{0.1.6}$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u,

$$\Lambda = 2^{2s} \frac{\Gamma^2(\frac{d+2s}{4})}{\Gamma^2(\frac{d-2s}{4})} \quad et \quad \mathcal{D}_\Omega = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c). \tag{0.1.7}$$

La constante Λ est optimale est non atteinte.

La constante définie dans (0.1.7) est optimale pour tout domaine borné Ω contenant le pôle du potentiel de Hardy. Plus précisément, si $0 \in \Omega$, alors

$$\Lambda = \inf_{u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \frac{\frac{a_{N,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy}{\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\, dx}. \tag{0.1.8}$$

Notons que l'optimalité de Λ se déduit par le fait que le quotient est invariant par dilatation.

Dans [47] les auteurs considèrent une condition de Neumann non locale, qui nous semble naturelle dans le sens où les formules d'intégrations par parties de Gauss et de Green sont valables pour cette condition. De plus, si Ω est un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$ suffisamment régulier, alors le problème de Neumann pour le laplacien fractionnaire se présente sous la forme

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.1.9}$$

où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)^s u(x) = a_{d,s}\ P.V. \int_{I\!R^d} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\,dy, \tag{0.1.10}$$

et $a_{d,s} > 0$ est une constante de normalisation appropriée donnée par la transformée de Fourier, voir [60], [63], [43], et

$$\mathcal{N}_s u(x) = a_{d,s} \int_\Omega \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \tag{0.1.11}$$

Notons que l'étude du problème aux valeurs propres avec la condition de Neumann non locale, voir [47], montre que la meilleure constante dans l'inégalité de Hardy avec condition de Neumann non locale est 0, de plus, elle est atteinte par toutes les fonctions constantes. Tenant compte des résultats précédents, notre objectif dans ce chapitre sera d'étudier la possibilité d'avoir des conditions suffisantes ou/et nécessaires, géométriques ou analytiques pour que la constante de Hardy fractionnaire avec des conditions de Dirichlet-Neumann soit atteinte. Plus précisément, Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier contenant l'origine et soient N et D deux ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ tels que

$$N \cap D = \emptyset \text{ et } \overline{N} \cup \overline{D} = \mathbb{R}^d \backslash \Omega.$$

On définit par

$$\Lambda_N \equiv \Lambda_N(\Omega) = \inf_{\{\phi \in \mathbb{E}^s(\Omega,D), \phi \neq 0\}} \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2} \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |\phi(x)-\phi(y)|^2\, d\nu}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\phi^2}{|x|^{2s}}\, dx}$$

où

$$\mathbb{E}^s(\Omega, D) = \Big\{ u \in H^s(\mathbb{R}^d) :\ u = 0 \text{ dans } D \Big\}.$$

Le problème de minimisation ci-dessus est fortement lié au *problème aux valeurs propres*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & \Lambda_N \dfrac{u}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1.12}$$

où la condition au "bord" mixte est définie par

$$\mathcal{B}_s u = u\chi_D + \mathcal{N}_s u \chi_N, \tag{0.1.13}$$

$\mathcal{N}_s$ est défini dans (0.1.11) et χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A. Notons que $\mathcal{B}_s$ peut être considérée comme une version non locale de la condition aux bord mixte classique de Dirichlet-Neumann. Le cas local $s = 1$ a été considéré dans [5] et [6] où les auteurs donnent une condition qui assure la possibilité d'atteindre la constante de Hardy. Comme conséquence, ils analysent un problème doublement critique lié à une constante de Hardy-Sobolev mixte. Un cas général lié à l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg est également traité dans [6]. Les auteurs dans [62] ont étudié le comportement des valeurs propres pour des problèmes mixtes Dirichlet-Neumann, non locale, en fonction des conditions "au bord". En particulier, ils ont déterminé une condition nécessaire et suffisante pour que la première valeur propre mixte pour une famille D_k, N_k avec $k \in \mathbb{N}$ converge, quand $k \to \infty$, vers 0, la valeur propre principale du problème de Neumann. L'objectif principal de ce travail est d'étendre les résultats précédents au cadre non local. Notons que dans le cas local on utilise la méthode de concentration-compacité pour étudier les suites minimisantes, cette méthode permet de comprendre les phénomènes de concentration à l'intérieur et sur le bord de Ω. Dans notre cas, il est impossible d'utiliser une telle méthode, ce qui nous a amené à utiliser une autre approche. Un autre point qui marque la différence entre le cas local et le cas non-local est le fait que dans le cas non-local, l'ensemble N peut être non borné, ce qui présente beaucoup de difficultés pour avoir des estimations a priori ou des résultats de régularité.

0.1.3 Description du chapitre 4

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et la multiplicité de solutions de quelques problèmes elliptiques non-locaux de type Ambrosetti-Prodi

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= g(u) - \sigma\phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.1.14}$$

où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \qquad s \in (0,1), \tag{0.1.15}$$

avec

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}, \tag{0.1.16}$$

est une constante de normalisation, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine Lipschitzien borné, $\sigma > 0$ et ϕ_1 la première fonction propre positive du Laplacien fractionnaire avec condition de Dirichlet. Nous supposons dans la suite que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = \mu > \lambda_1 > \lim_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{t} = \eta.$$

Notons qu'on peut avoir $\mu = +\infty$ et $\eta = -\infty$.

Dans le cas local ($s = 1$), le problème ci-dessus a attiré, au cours des dernières années, beaucoup d'attention et de nombreux travaux ont été consacrés à comprendre la structure de l'ensemble de ces solutions et surtout le nombre de solution, nous renvoyons le lecteur intéressé à [16, 24, 37, 38], afin de répondre à une conjecture dû à Lazer-McKenna [61] qui affirme (dans le cas local $s = 1$), que le nombre de solutions du problème (0.1.14) est non borné quand $\sigma \to \infty$ lorsque $\mu = +\infty$, $\eta < \lambda_1$ et g a une croissance appropriée.

Notre objectif principal dans ce chapitre est de démontrer une version non-locale de la conjecture de Lazer-McKenna en généralisant les résultats obtenus dans [37, 38]. Nous considérerons par la suite le cas où $g(u) = |u|^p$ avec $p \in (1, 2*_s -1)$. Autrement dit, nous considérons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= |u|^p - \sigma\phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{0.1.17}$$

Posons $w_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ et $\varepsilon^{2s} = \sigma^{-\frac{p-1}{p}}$, alors w_ε est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s w_\varepsilon + w_\varepsilon^p &= \phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{0.1.18}$$

Notre premier résultat d'existence est le suivant :

Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $p \in (1, 2_s^* - 1)$, le problème (0.1.18) possède une solution unique w_ε de sorte que $0 < w_\varepsilon < \phi_1^{\frac{1}{p}}$, de plus, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $w_{\varepsilon_2} \leqslant w_{\varepsilon_1}$.

La solution w_ε donnée par le Théorème ci-dessus peut être déterminée comme point critique de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange J_ε définie par

$$J_\varepsilon(w) := \frac{\varepsilon^{2s} a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx\, dy - \int_\Omega H(x, w) dx \tag{0.1.19}$$

où D_Ω et donné par

$$D_\Omega = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega) \tag{0.1.20}$$

et $H(x,t) = \int_0^t h(x,\tau)d\tau$ avec

$$h(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \geqslant \phi_1^{\frac{1}{p}}, \\ \phi_1(x) - t^p & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \phi_1^{\frac{1}{p}}, \\ \phi_1(x) & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Il est clair que w_ε est un minimum global de J_ε, $h(x, \phi_1^{\frac{1}{p}}) = 0$ et que la dérivée à gauche de h par rapport à t au point $\phi_1^{\frac{1}{p}}$ est négative.

Le résultat qui suit donne une description exacte du comportement asymptotique de w_ε quand ε tend vers 0.

Théorème. Soit w_ε la solution de (0.1.18) obtenu ci-dessus, alors nous avons

$$w_\varepsilon \to \phi_1^{\frac{1}{p}} \text{ quand } \varepsilon \to 0 \tag{0.1.21}$$

uniformément sur chaque compact de Ω et

$$w_\varepsilon = \phi_1^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{2s} \frac{-(-\Delta)^s \phi_1^{\frac{1}{p}}}{\phi^{\frac{p-1}{p}}} + o(\varepsilon^{2s}) \tag{0.1.22}$$

où $\varepsilon^{-2s} o(\varepsilon^{2s}) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ uniformément sur chaque compact de Ω.

Notre objectif dans ce qui suit est de construire des solutions qui se concentrent en plusieurs points qui se localisent au voisinage de tout maximum local de la première fonction propre ϕ_1. Pour ce faire, la première étape cruciale est la construction d'une bonne approximation de la solution qu'on cherche. Soit u une solution du problème (0.1.17), posons $\breve{u}_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ avec $\varepsilon^{2s} = \sigma^{-\frac{p-1}{p}}$, alors $\breve{u}_\varepsilon$ est solution du problème (0.1.18). Posons maintenant $v = w_\varepsilon - \breve{u}_\varepsilon$, alors v satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p w_\varepsilon^{p-1} v &= f_\varepsilon(x,v) \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.1.23}$$

où

$$f_\varepsilon(x,t) = |t - w_\varepsilon|^p - w_\varepsilon^p + p w_\varepsilon^{p-1} t. \tag{0.1.24}$$

Le problème (0.1.23) admet une structure variationnelle dont la fonctionnelle d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(v): &= \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v|^2\,dx + p\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}v^2dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x,v)dx \\ &= \frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy + p\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}v^2dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x,v)dx, \end{aligned} \tag{0.1.25}$$

où

$$F_\varepsilon(x,t) := \int_0^t f_\varepsilon(x,r)dr = \frac{1}{p+1}|t-w_\varepsilon|^p(t-w_\varepsilon) + \frac{1}{p+1}w_\varepsilon^{p+1} - w_\varepsilon^p t + \frac{p}{2}w_\varepsilon^{p-1}t^2. \tag{0.1.26}$$

Dans ce qui suit nous normalisons la fonction ϕ_1 de sorte que $\max_{z\in\Omega}\phi_1(z) = 1$ et nous notons par $S = \{x \in \Omega : \phi_1(x) = 1\}$. En introduisant le changement de fonction $V(x) = v(\varepsilon x + z^*)$, $z^* \in S$, le problème (0.1.23) est équivalent à,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s V = |V-w_\varepsilon|^p - w_\varepsilon^p & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{0.1.27}$$

où $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon x + z^* :\ x\in\Omega\}$. Par passage à limite dans l'équation, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, utilisons (0.1.21) et la normalisation de ϕ_1, nous obtenons le problème limite suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U = |U-1|^p - 1,\ U>0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ U(0) = \max_{y\in\mathbb{R}^N} U(y), & \\ U \in H^s(\mathbb{R}^n). & \end{cases} \tag{0.1.28}$$

Nous allons montrer dans l'appendice que le problème (0.1.28) admet, modulo une translation, une solution radiale U unique, voir l'appendice pour plus de propriétés. Nous sommes à présent en mesure de construire une solution approximative de notre problème, notons $U_{\varepsilon,x}(y) = U(\frac{y-x}{\varepsilon})$. On définit $\bar{u}_{\varepsilon,x}$ comme étant la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + pu = |U_{\varepsilon,x}-1|^p - 1 + pU_{\varepsilon,x} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\setminus\Omega. \end{cases} \tag{0.1.29}$$

La solution du problème (0.1.23) sera déterminée comme une petite perturbation de $\bar{u}_{\varepsilon,x}$. Plus précisément, nous avons le

Théorème. Soit $k > 0$ un entier positif. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ le problème (0.1.23) admet une solution qui s'écrit sous la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi},$$

où $w_{\varepsilon,\xi} \in H_0^s(\Omega)$ satisfait

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon = o(1) \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

et $\dfrac{|\xi_{\varepsilon,i} - \xi_{\varepsilon,j}|}{\varepsilon} \to \infty$ quand $\xi_{\varepsilon,j}, \xi_{\varepsilon,i} \to \xi_j^* \in \Omega$ avec $\phi_1(\xi_j^*) = \max_{z\in\Omega} \phi_1(z)$.

où

$$\|u\|_\varepsilon = \sqrt{\langle u, u\rangle_\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \langle u, v\rangle_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v + p w_\varepsilon^{p-1} uv \right) dx. \tag{0.1.30}$$

L'existence des solutions qui admettent des pics au voisinage d'un maximum local de ϕ_1 ont été considérés pour la première fois, dans le cas local, dans [37, 38, 39] pour différent type de non-linéarités. L'idée principale de la preuve repose sur l'utilisation de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, voir par exemple [14] pour plus de détails sur cette méthode pour les problèmes locaux. Une fois que la méthode de réduction est justifiée, nous réduisons le problème de trouver des solutions de (0.1.14) à celui de trouver des points critiques d'une fonctionnelle définie sur un espace de dimension finie. Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'étape principale consiste à trouver une bonne solution approximative, puis les "vraies" solutions seront construites comme de petites perturbations de telle approximation.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$

Soit $s \in (0,1)$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^N)$ par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}} \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \right\}, \tag{1.1.1}$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + [u]_s \tag{1.1.2}$$

où $[u]_s$ est la semi-norme de Gagliardo, définie par

$$[u]_s = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy,$$

notons que $H^s(\mathbb{R}^N)$ muni du produit scalaire

$$\int_{\mathbb{R}^N} uv\, dx + \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy.$$

est un espace de Hilbert. En utilisant la transformée de Fourier, nous pouvons obtenir une définition alternative de l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$. On définit l'espace de Sobolev

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty \right\},$$

où

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) e^{-ix.\xi} dx,$$

est la transformée de Fourier de φ. Observons que la définition ci-dessus, est également valable pour tout réel $s \geqslant 1$.

Proposition 1.1. Pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a

$$[u]_s = 2a_{N,s}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |u(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Où $a_{N,s}$ est la constante donnée dans (4.1.3).

Ce résultat et le Théorème de Plancherel donnent l'équivalence, pour $s \in (0,1)$, entre les deux espaces $H^s(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$, voir [43] pour la preuve et pour plus de résultats sur ces espaces. Notons que cette équivalence nous donne une caractérisation de l'espace dual, $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, de $H^s(\mathbb{R}^N)$. A présent on a

$$H^{-s}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}.$$

Où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions tempérées.

Finalement nous rappelons l'inégalité de Sobolev fractionnaire dont la preuve peut être trouvée dans [43].

Proposition 1.1. Soit $s \in (0,1)$ avec $N > 2s$. Alors il existe une constante positive $S = S(N,s)$ telle que pour toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a

$$S \|u\|^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{a_{N,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx \, dy \tag{1.1.3}$$

où $2^*_s = \frac{2N}{N-2s}$.

Pour tout $p \in (2, 2^*_s)$, en utilisant une inégalité d'interpolation, nous pouvons prouver la proposition suivante.

Proposition 1.2. Soit $s \in (0,1)$ avec $N > 2s$ et $p \in (2, 2^*_s)$. Alors il existe une constante positive $C \equiv C(p,N,s)$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a

$$C ||u||^2_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{a_{N,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx \, dy + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx. \tag{1.1.4}$$

1.1.1 Le Laplacien Fractionnaire

Définition 1.1. (**Espace de Schwartz**) On note par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, ainsi que leurs dérivées de tout ordre.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } \|\varphi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} < +\infty\}$$

où $\|.\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$ est la semi-norme définie comme suit :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^k) \sum_{|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha \varphi(x)|, \qquad k,l \in \mathbb{N},$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_N^{\alpha_N}$.

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $s \in (0,1)$, on définit le Laplacien fractionnaire de u par

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \qquad s \in (0,1), \tag{1.1.5}$$

où on entend par P.V. l'intégrale au sens de la valeur principale et

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi\right)^{-1} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}, \tag{1.1.6}$$

est une constante de normalisation. Notons que $\lim_{s\to 0} a_{N,s} = \lim_{s\to 1^-} a_{N,s} = 0$. Observons que le Laplacien fractionnaire est un opérateur non-local dans le sens où pour avoir la valeur de $(-\Delta)^s u(x)$ il faut que u soit donnée sur $\mathbb{R}^N$ tout entier. Il est à noter que $(-\Delta)^s u$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mais $(-\Delta)^s u \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, cependant on a l'estimation importante suivante.

$$\text{Pour toute } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \text{ il existe } C \text{ tel que : } (-\Delta)^s\phi(x) \leqslant \frac{C}{1+|x|^{N+2s}}.$$

Autrement dit, $(-\Delta)^s$ applique l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur l'espace de Banach $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^N)$ défini par

$$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^N) = \left\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \,:\, \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}}\, dx < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}}\, dx.$$

Une autre définition équivalente de $(-\Delta)^s$ est donnée par la transformée de Fourier. Plus précisément on a le résultat

Proposition 1.2. Soit $s \in (0,1)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, l'espace de Schwartz, alors

$$\widehat{(-\Delta)^s}\phi(\xi) = |\xi|^{2s}\widehat{\phi}(\xi)$$

Ainsi, par un argument de densité, $(-\Delta)^s$ est bien défini sur $H^s(\mathbb{R}^N)$, de sorte que

$$(-\Delta)^s : H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^N)$$

est un opérateur continu. De plus, on a le résultat suivant qui donne une relation entre l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ et le Laplacien fractionnaire.

Proposition 1.3.

$$\langle (-\Delta)^s u,\, u\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N),H^{-s}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^s u\, dx = 2a_{N,s}^{-1}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 2a_{N,s}^{-1}\||\xi|^s\widehat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

où $\langle .\, .\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N),H^{-s}(\mathbb{R}^N)}$ est le crochet de dualité.

Une autre manière de définir le Laplacien factionnaire et de le réaliser comme étant un opérateur de Dirichlet-Neumann agissant sur les fonctions du demi-espace $\mathbb{R}^{N+1}_+ = \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. Plus précisément, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ on ait

$$(-\Delta)^s u(x) = -C\lim_{t\to 0}\left(t^{1-2s}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right),$$

où $U : \mathbb{R}^{N+1}_+ \to \mathbb{R}$ est solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(t^{1-2s}\nabla U(x,t)) &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ \\ U(x,0) &= u(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Cette approche est appelée l'extension de Caffarelli-Silvestre et la fonction U est dite extension s-harmonique de u.

1.2 L'espace $H^s_0(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Nous définissons l'espace,

$$H^s_0(\Omega) = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \; u = 0 \; \text{ dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2 = \iint_{D_\Omega} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy,$$

où $D_\Omega = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus \Omega^c \times \Omega^c$. Notons que cette norme est equivalente à celle induite par la norme de $H^s(\mathbb{R}^N)$. De plus $H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé. Maintenant, si on note $H^{-s}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^s(\Omega)$ alors

$$(-\Delta)^s : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

est un opérateur continu, où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire comme défini dans (4.1.2). De plus pour tout $u \in H_0^s(\Omega)$ on ait

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^s u\,dx = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Une conséquence de l'inégalité de Sobolev est le résultat suivant

Proposition 1.3. Soit $s \in (0,1)$ avec $N > 2s$ et $p \in (2, 2_s^*)$. Alors il existe une constante positive $C \equiv C(p,N,s)$ telle que pour tout $u \in H_0^s(\Omega)$, on a

$$C||u||^2_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dx\,dy. \tag{1.2.7}$$

Nous rappelons maintenant l'inégalité de Picone qui nous servira à obtenir des estimations a priori par la suite. Voir [63] pour la démonstration.

Lemme 1.1. Soit $w \in H_0^s(\Omega)$ telle que $w > 0$ dans Ω et $w \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^N$. Supposons que $(-\Delta)^s w = \vartheta$ avec $\vartheta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \geqslant \int_\Omega \frac{(-\Delta)^s w}{w}\varphi^2 dx.$$

Chapitre 2

Sur un problème concave-convexe non local avec des conditions de type Dirichlet-Neumann non locales

Ce chapitre est le développement de l'article [2].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier un problème semi-linéaire elliptique non-local avec des conditions au "bord" mixtes et non-locales. Notre objectif principal est de comprendre l'interaction entre la non-linéarité et les conditions aux bords. Nous prouverons des résultats d'existence, de non existence et de multiplicité de solutions positives. Nous utiliserons la méthode de sur et sous-solution et une méthode variationnelle développée par Alama. Le chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2.2, nous présentons le cadre fonctionnel bien adapté a l'étude du problème (P_λ), ainsi que la notion de solution et quelques résultats auxiliaires. La section 2.3 est consacrée à prouver l'existence de solutions minimales et la solution extrémale. Enfin, dans la section 2.4, nous prouvons l'existence d'une deuxième solution de type Montain-Pass en utilisant l'argument d'Alama. Plus précisément, nous considérons le problème suivant

$$P_\lambda \quad \equiv \left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u & = & \lambda u^q + u^p & \text{dans } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{array} \right.$$

où $0 < q < 1 < p$, $N > 2s$, $\lambda > 0$. Dans ce contexte, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné régulier et $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par,

$$(-\Delta)^s u(x) = a_{N,s}\ P.V. \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy. \tag{2.1.1}$$

Nous renvoyons le lecteur à [60], [63], [43] pour une vaste description des propriétés de cet opérateur. La constante $a_{N,s} > 0$ est une constante de normalisation et la condition extérieure

$$\mathcal{B}_s u = u\chi_{\Sigma_1} + \mathcal{N}_s u \chi_{\Sigma_2}, \tag{2.1.2}$$

peut être considérée comme une version non-locale de la condition mixte de Dirichlet-Neumann. L'opérateur $\mathcal{N}_s$ est la dérivée normale non-locale introduite dans[47] donnée par

$$\mathcal{N}_s u(x) = a_{N,s} \int_\Omega \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \tag{2.1.3}$$

En outre, Σ_1 et Σ_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ tels que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ et $\overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Notons que dans (2.1.2) nous avons noté χ_A la fonction caractéristique d'un ensemble A. Le problème (P_λ) est variationnel et ces solutions sont des points critiques de la fonctionnelle

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy - \frac{\lambda}{q+1} \|u_+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \|u_+\|_{p+1}^{p+1}, \tag{2.1.4}$$

où

$$\mathcal{D}_\Omega = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c),\ \|v\|_r^r = \int_\Omega |v|^r\, dx \quad \text{et} \quad u_+ = \max(u, 0).$$

Nos principaux résultats sont les suivants :

Théorème 2.1. Soient $0 < s < 1$, $0 < q < 1 < p$. Alors il existe un $\Lambda > 0$, tel que :

1. Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (P_λ) admet une solution minimale u_λ telle que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. De plus, si $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $u_{\lambda_1} < u_{\lambda_2}$.
2. Si $\lambda > \Lambda$, le problème (P_λ) n'admet pas de solutions faibles positives.
3. Si $\lambda = \Lambda$, le problème (P_λ) admet au moins une solution faible positive.

Théorème 2.2. Soient $0 < s < 1$, $0 < q < 1 < p < \frac{N+2s}{N-2s}$, $\lambda \in (0, \Lambda)$. Alors le problème (P_λ) admet une deuxième solution positive $v_\lambda > u_\lambda$.

2.2 Préliminaires et cadre fonctionnel

Nous introduisons dans cette section le cadre fonctionnel naturel de notre problème et nous donnons quelques propriétés des espaces qu'on utilise par la suite. Vu la définition du Laplacien fractionnaire, voir [43], [71], et la formule d'intégration par partie, voir [47], il est naturel de considérer les espaces suivants.

Définition 2.1. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, Σ_1 et Σ_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ tels que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ et $\overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Pour $0 < s < 1$, on définit l'espace

$$\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1) = \Big\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \, u = 0 \text{ dans } \Sigma_1 \Big\}.$$

L'espace $\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$, muni de la norme induite, est un sous espace de Hilbert de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Pour tout $u \in \mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$, posons

$$\|u\|^2 = a_{N,s} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy.$$

Alors $\| \, . \, \|$ définit une norme sur $\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$, de plus on a le résultat.

Proposition 2.1. La norme $\| \, . \, \|$ est équivalente à celle induite par $H^s(\mathbb{R}^N)$, par suite $(\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1), \langle \, , \, \rangle)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé

$$\langle u, v \rangle = a_{N,s} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$, posons

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + a_{N,s} \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy.$$

Alors $\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_1 = a_{N,s} \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy + \int_\Omega uv \, dx,$$

est un espace de Hilbert. Notons que le fait que $\mathbb{H}^s(\Omega, \Sigma_1)$ est complet se démontre de la même manière que dans [47], Proposition 3.1. De plus, si on note par

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\{\phi\in\mathbb{H}^s(\Omega,\Sigma_1),\phi\neq 0\}} \frac{a_{N,s}\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega \phi^2\,dx},$$

alors $\lambda_1(\Omega) > 0$, voir [21]. Par conséquent, le produit scalaire précédent se réduit à

$$\langle u, v\rangle = a_{N,s}\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,dx\,dy.$$

Ainsi, on peut munir $\mathbb{H}^s(\Omega,\Sigma_1)$ de la norme de Gagliardo

$$\|u\|^2 = a_{N,s}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy.$$

Remarquons que la norme $\|\,.\,\|$ dans $\mathbb{H}^s(\Omega,\Sigma_1)$ est majorée par la norme induite de $H^s(\mathbb{R}^N)$, ainsi, en utilisant le Théorème de L'application ouverte on déduit que les deux normes sont équivalentes. □

Le résultat suivant justifie notre choix de $\|\,.\,\|$.

Proposition 2.2. Soit $s\in(0,1)$, pour tout u, $v\in\mathbb{H}^s(\Omega,\Sigma_1)$ on a

$$\int_\Omega v(-\Delta)^s u\,dx = \frac{a_{N,s}}{2}\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \int_{\Sigma_2} v\mathcal{N}_s u\,dx.$$

Rappelons que

$$\mathcal{N}_s u(x) = a_{d,s}\int_\Omega\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}dy,\quad x\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega}. \tag{2.2.5}$$

La preuve est une application directe de la formule d'intégration par parties, voir Lemme 3.3 dans [47]. Dans la suite, pour la simplicité de la notation, on notera l'espace fonctionnel introduit dans la définition 2.1 par $\mathbb{H}^s$ et nous allons normaliser la constante $a_{N,s}$ pour qu'elle soit égale à 2.

Maintenant, nous donnons une inégalité de type Sobolev pour les fonctions dans $\mathbb{H}^s$.

Corollaire 2.1. Supposons que $s\in(0,1)$ et $N>2s$. Il existe une constante positive $C = C(N,s,\Omega,\Sigma_2)$ telle que, pour toute fonction $u\in\mathbb{H}^s$,

$$\|u\|^2_{L^r(\Omega)} \leqslant C\|u\|^2,$$

pour tous $1 \leqslant r \leqslant 2_s^*$.

Démonstration. Comme $u \in \mathbb{H}^s \subset H^s(\mathbb{R}^N)$, utilisons l'inégalité de Sobolev fractionnaire, on obtient

$$S\|u\|_{L^{2_s^*}(\Omega)}^2 \leqslant S\|u\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}^2 \leqslant \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy.$$

Maintenant, le résultat s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder et la proposition2.1. □

Considérons maintenant les fonctions de troncature données par

$$T_k(u) = \max\Big\{-k,\ \min\{k,u\}\Big\}$$

et

$$G_k(u) = u - T_k(u).$$

Les propriétés suivantes des fonctions de $\mathbb{H}^s$ sont utiles pour obtenir des résultats de régularité pour certains problèmes elliptiques dans $\mathbb{H}^s$ (voir aussi le Théorème 2.3 ci-dessous).

Proposition 2.3. Soit $u \in \mathbb{H}^s$, alors

1. Si $\Phi \in Lip(\mathbb{R})$ et $\Phi(0) = 0$, alors $\Phi(u) \in \mathbb{H}^s$. En particulier pour tout $k > 0$, $T_k(u)$, $G_k(u) \in \mathbb{H}^s$.
2. Pour tout $k \geqslant 0$

$$\|G_k(u)\|^2 \leqslant \int_\Omega G_k(u)(-\Delta)^s u\,dx + \int_{\Sigma_2} G_k(u)\mathcal{N}_s u\,dx.$$

3. Pour tout $k \geqslant 0$

$$\|T_k(u)\|^2 \leqslant \int_\Omega T_k(u)(-\Delta)^s u\,dx + \int_{\Sigma_2} T_k(u)\mathcal{N}_s u\,dx.$$

Démonstration. Le premier point découle de la définition 2.1 de la norme. Pour avoir 2. et 3., nous affirmons que pour tout a, $b \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$a\Big(G_k(u)(-\Delta)^s T_k(u)\Big)(x) + b\Big(G_k(u)\mathcal{N}_s T_k(u)\Big)(x) \geqslant 0. \tag{2.2.6}$$

En effet, il suffit de considérer le cas $x \in \{G_k(u) \neq 0\}$, sinon (2.2.6) est satisfaite. Par suite, si $x \in \{G_k(u) > 0\}$ on a $T_k(u)(x) = k$, qui est la valeur maximale de $T_k(u)$, et donc $(-\Delta)^s T_k(u)(x) \geqslant 0$ et $\mathcal{N}_s T_k(u)(x) \geqslant 0$.

Inversement, si $x \in \{G_k(u) < 0\}$ on a $T_k(u)(x) = -k$, qui est la valeur minimale de $T_k(u)$, par suite $(-\Delta)^s T_k(u)(x) \leqslant 0$ et $\mathcal{N}_s T_k(u)(x) \leqslant 0$. En combinant ces dernières estimations, on obtient (2.2.6). Maintenant, par (2.2.6) et la Proposition 2.2 on arrive à

$$\begin{aligned}\int_\Omega T_k(u)(-\Delta)^s G_k(u)\,dx &+ \int_{\Sigma_2} T_k(u)\mathcal{N}_s G_k(u)\,dx \\ &= \int_\Omega G_k(u)(-\Delta)^s T_k(u)\,dx + \int_{\Sigma_2} G_k(u)\mathcal{N}_s T_k(u)\,dx \geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

En utilisant la condition de normalisation et la proposition 2.2, il en résulte que

$$\begin{aligned}\|G_k(u)\|^2 &= \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{(G_k(u)(x) - G_k(u)(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &= \int_\Omega G_k(u)(-\Delta)^s G_k(u)\,dx + \int_{\Sigma_2} G_k(u)\mathcal{N}_s G_k(u)\,dx \\ &= \int_\Omega G_k(u)(-\Delta)^s\Big(u - T_k(u)\Big)\,dx + \int_{\Sigma_2} G_k(u)\mathcal{N}_s\Big(u - T_k(u)\Big)\,dx.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

De la même manière on obtient,

$$\|T_k(u)\|^2 = \int_\Omega T_k(u)(-\Delta)^s\Big(u - G_k(u)\Big)\,dx + \int_{\Sigma_2} T_k(u)\mathcal{N}_s\Big(u - G_k(u\Big)\,dx. \tag{2.2.9}$$

Ainsi, le deuxième point se déduit de (2.2.8) et(2.2.7). Le dernier point est une conséquence de (2.2.9) et (2.2.7). $\square$

Considérons maintenant le problème suivant,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2s$, $\mathbb{H}^{-s}$ est l'espace dual de $\mathbb{H}^s$ et $f \in \mathbb{H}^{-s}$.

Définition 2.2. On dit que $u \in \mathbb{H}^s$ est une solution à énergie finie de (2.2.10) si

$$\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\Big(u(x) - u(y)\Big)\Big(\varphi(x) - \varphi(y)\Big)}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}^s, \tag{2.2.11}$$

où $(\ ,\ )$ représente le crochet de dualité entre $\mathbb{H}^s$ et $\mathbb{H}^{-s}$.

Notons que l'existence et l'unicité des solutions du problème (2.2.10) découle du Théorème de Lax-Milgram. De plus si $f \geqslant 0$ alors $u \geqslant 0$. En effet, pour $u \in \mathbb{H}^s$, par le Lemme 2.3, on sait que $u_- = \min\{u, 0\} \in \mathbb{H}^s$. Utilisons u_- comme fonction test dans (2.2.11) on déduit que $u_- = 0$.

Une sur-solution (resp. sous-solution) est une fonction qui vérifie (2.2.11) en remplaçant l' égalité par "$\geqslant$" (resp. "$\leqslant$") pour toute fonction test non négative $\mathbb{H}^s$. En utilisant un argument itératif classique, nous pouvons facilement prouver le résultat suivant.

Lemme 2.1. Supposons que le problème (2.2.10) admet une sous-solution $\underline{w}$ et une sur-solution $\overline{w}$, telles que $\underline{w} \leqslant \overline{w}$. Alors il existe une solution w telle que $\underline{w} \leqslant w \leqslant \overline{w}$.

Nous prouvons dans ce qui suit des résultats de régularité, en supposant que f satisfait certaines conditions minimales d'intégrabilités. Pour montrer que les solutions sont bornées nous utilisons la méthode de Stampacchia pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients bornés. La régularité intérieur est une conséquence des propriétés de continuité, voir [47], et les résultats de régularité dans [74].

Lemme 2.2. Soit u une solution du problème (2.2.10). Si $f \in L^q(\Omega)$, $q > \frac{N}{2s}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Nous suivons ici un argument similaire à celui utilisé dans [63]. Voir aussi [74] et [44] pour plus de résultats.

Soit $k > 0$, utilisons $\varphi = G_k(u)$ comme fonction test dans (2.2.11). Ansi, par la Proposition 2.3, on obtient

$$\|G_k(u)\|^2 \leqslant \int_{A_k} G_k(u) f \, dx + \int_{\Sigma_2} G_k(u) \mathcal{N}_s u \, dx,$$

où $A_k = \{x \in \Omega : u > k\}$. Rappelons (2.2.10), on aura

$$\|G_k(u)\|^2 \leqslant \int_{A_k} G_k(u) f \, dx.$$

Par le corollaire 2.1 et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$S^2 \|G_k(u)\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} \leqslant \|G_k(u)\|^2 \leqslant \|f\|_{L^m(\Omega)} \|G_k(u)\|_{L^{2^*_s}(\Omega)} |A_k|^{1-\frac{1}{2^*_s}-\frac{1}{m}}$$

donc,

$$S^2 \|G_k(u)\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^m(\Omega)} |A_k|^{1-\frac{1}{2^*_s}-\frac{1}{m}}$$

par suite,

$$S^2 (h-k) |A_h|^{\frac{1}{2^*_s}} \leqslant \|f\|_{L^m(\Omega)} |A_k|^{1-\frac{1}{2^*_s}-\frac{1}{m}}$$

et alors,

$$|A_h| \leqslant S^{2_s^*-2} \frac{\|f\|_{L^m(\Omega)}^{2_s^*} |A_k|^{2_s^*(1-\frac{1}{2_s^*}-\frac{1}{m})}}{(h-k)^{2_s^*}}.$$

Comme $m > \frac{N}{2s}$ on ait

$$2_s^* \left(1 - \frac{1}{2_s^*} - \frac{1}{m}\right) > 1.$$

Par conséquent, en appliquant le Lemme 14 dans [63] avec $\psi(\sigma) = |A_\sigma|$, le résultat s'en déduit.

$\square$

Corollaire 2.2. Soit u une solution a énergie finie de (2.2.10), supposons que $f \in L^\infty(\Omega)$. Alors $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour un $\gamma \in (0,1)$.

Démonstration. Nous affirmons que u est bornée $\mathbb{R}^N$. On peut alors appliquer les résultats de régularité intérieure pour les solutions de $(-\Delta)^s u = 0$ dans Ω et $u = g$ dans Ω^c. voir par exemple [74] et [68].

Pour vérifier l'affirmation, par le Lemme 2.2, il suffit de considérer seulement le cas $x \in \overline{\Sigma}_2$. Donc, par (2.2.5)

$$u(x) = c(N,s)^{-1} \int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy \ , \text{ où } \ c(N,s) = \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy.$$

Par suite,

$$|u(x)| \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ pour tout } x \in \overline{\Sigma}_2. \tag{2.2.12}$$

De plus, si Σ_2 et non bornée, par la Proposition 3.13 de [47], on a

$$\lim_{x\to\infty,\, x\in\overline{\Sigma}_2} u(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy. \tag{2.2.13}$$

Par conséquent l'affirmation découle du Lemme 2.2, les inégalités (2.2.12) et (2.2.13). $\square$

Si dans le Lemme 2.2, $f = f(x,u)$ et f vérifie la condition de croissance suivante

$$|f(x,s)| \leqslant c(1+|s|^p) \text{ where } p \leqslant \frac{N+2s}{N-2s}, \tag{2.2.14}$$

alors, en utilisant un schéma itératif de Moser, on aura le

Théorème 2.3. Soit u une solution à énergie finie de (2.2.10) où f vérifie la condition (2.2.14), alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Le résultat suivant est un principe de maximum fort pour des problèmes semi-linéaires, il sera utilisé pour séparer les solution minimales de (P_λ) pour différentes valeurs de λ, voir [36].

Proposition 2.4. Soient $N \geqslant 1$, $0 < s < 1$ et f_1, $f_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $v, w \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{2s+\gamma}(\Omega)$, pour un $\gamma > 0$, tels que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v \geqslant f_1(x, v), & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ (-\Delta)^s w \leqslant f_2(x, w), & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ \qquad v \geqslant w & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Supposons de plus que

$$f_2(x, w(x)) \leqslant f_1(x, w(x)) \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{2.2.15}$$

S'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) = w(x_0)$, alors $v = w$ dans Ω.

Démonstration. Soit $\phi = v - w$ et posons

$$Z_\phi = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}.$$

Par hypothèse $x_0 \in Z_\phi$. De plus, comme ϕ est continue, Z_ϕ est fermé. Montrons que Z_ϕ est un ouvert. En effet, soit $\bar{x} \in Z_\phi$ alors $\phi \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^N$, $\phi(\bar{x}) = 0$ et par (2.2.15) on a

$$(-\Delta)^s \phi(\bar{x}) \geqslant f_1(\bar{x}, v(\bar{x})) - f_2(\bar{x}, w(\bar{x})) = f_1(\bar{x}, w(\bar{x})) - f_2(\bar{x}, w(\bar{x})) \geqslant 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \quad \leqslant \quad (-\Delta)^s \phi(\bar{x}) \quad &= \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\phi(\bar{x}) - \phi(\bar{x} + z) - \phi(\bar{x} - z)}{|z|^{N+2s}} \, dz \\ &= \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{-\phi(\bar{x} + z) - \phi(\bar{x} - z)}{|z|^{N+2s}} \, dz \leqslant 0. \end{aligned}$$

Par conséquent ϕ est identiquement nulle dans $B_\epsilon(\bar{x})$ et alors, pour ϵ petit, $B_\epsilon(\bar{x}) \subseteq Z_\phi$. ce qui montre que Z_ϕ est ouvert. Comme Ω est connexe, on déduit que $Z_\phi = \Omega$. □

Nous établissons maintenant deux résultats importants. Le premier résultat est une inégalité de type Picone et le second est un principe de comparaison de type Brezis-Kamin pour les non-linéarités concaves.

Théorème 2.4. Soient u, $v \in \mathbb{H}^s$, supposons que $(-\Delta)^s u \geqslant 0$ est une mesure de Radon bornée sur Ω, $u \geqslant 0$ et non identiquement nulle, alors,

$$\int_{\Sigma_2} \frac{|v|^2}{u} \mathcal{N}_s u\, dx + \int_{\Omega} \frac{|v|^2}{u} (-\Delta)^s u\, dx \leqslant \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\Big(v(x) - v(y)\Big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy.$$

La preuve est basée sur une inégalité de Picone ponctuelle et se déduit de la même manière que dans [63]. Par conséquent, on a le principe de comparaison suivant, qui généralise au cas fractionnaire un résultat classique dû a Brezis et Kamin, voir [25].

Lemme 2.3. Soit $f(x,\sigma)$ une fonction de type Carathéodory. Supposons que $\frac{f(x,\sigma)}{\sigma}$ est décroissante en σ, uniformément par rapport à $x \in \Omega$. Supposons que $u, v \in \mathbb{H}^s$, avec $0 < s < 1$, et que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u \geqslant f(x,u), \quad u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ (-\Delta)^s v \leqslant f(x,v), \quad v > 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors $u \geqslant v$ dans Ω.

La preuve de ce résultat est la même que la preuve du Théorème 20 dans [63]. Finalement, nous allons utiliser le lemme de compacité suivant pour obtenir la convergence forte dans l'espace $\mathbb{H}^s$.

Lemme 2.4. Soit $\{v_n\}_n$ une suite de fonctions non-négatives telles que $\{v_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{H}^s$, $v_n \rightharpoonup v$ dans $\mathbb{H}^s$ et $v_n \leqslant v$. Supposons que $(-\Delta)^s v_n \geqslant 0$ alors, $v_n \to v$ fortement dans $\mathbb{H}^s$.

Démonstration. Comme $v_n \leqslant v$, alors, en utilisant le fait que $(-\Delta)^s v_n \geqslant 0$, on aura

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s v_n (v - v_n)\, dx \quad \geqslant \quad 0,$$

d'où

$$\int_{\Omega} (-\Delta)^s v_n v\, dx \quad \geqslant \quad \int_{\Omega} (-\Delta)^s v_n v_n\, dx.$$

Maintenant, par l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\Big(v_n(x) - v_n(y)\Big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy \quad \leqslant \quad \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\Big(v(x) - v(y)\Big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy.$$

Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n\| \quad \leqslant \quad \|v\|,$$

et comme

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|v_n-v\|^2 &= \limsup_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\|v\|^2-2\langle v_n,v\rangle)\\ &\leqslant 2\|v\|^2-2\limsup_{n\to\infty}\langle v_n,v\rangle,\end{aligned}$$

en prenant en considération le fait que $v_n \rightharpoonup v$ dans $\mathbb{H}^s$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty}\|v_n-v\|^2=0.$$

Par conséquent, $v_n \to v$ fortement dans $\mathbb{H}^s$. □

2.3 Preuve du Théorème 2.1

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 2.1. Nous allons diviser la preuve en plusieurs lemmes auxiliaires. Le premier résultat est un résultat d'existence.

Lemme 2.5. Supposons que $0<q<1<p$, alors (P_λ) possède une solution bornée non-triviale au moins pour $\lambda>0$ suffisamment petit.

Démonstration. L'idée principale est de montrer que pour λ petit, le problème (P_λ) admet une sous et une sur-solution bornées comparables. Soit $\mathcal{V}$ la solution unique du problème

$$\begin{cases}(-\Delta)^s\mathcal{V} &= 1 \quad \text{dans } \Omega,\\ \mathcal{V} &> 0 \quad \text{dans } \Omega,\\ \mathcal{B}_s\mathcal{V} &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega.\end{cases}$$

Notons que l'existence de $\mathcal{V}$ est une application du Théorème de Lax-Milgram dans l'espace $\mathbb{H}^s$ et la positivité de $\mathcal{V}$ par le principe de maximum, voir [21]. De plus $\mathcal{V}\in\mathcal{C}^\alpha(\bar\Omega)$ pour un $\alpha<1$. Soit $C=\|\mathcal{V}\|_\infty$, il existe un $\lambda^*>0$ tel que pour tout $\lambda<\lambda^*$, l'inégalité

$$M\geqslant \lambda M^qC^q+M^pC^p,$$

admet une solution $M>0$. Fixons λ, M comme ci-dessus et posons $v_1=M\mathcal{V}$, alors v_1 est solution de

$$\begin{cases}(-\Delta)^s v_1 &= M\geqslant \lambda v_1^q+v_1^p \quad \text{dans } \Omega,\\ v_1 &> 0 \quad \text{dans } \Omega,\\ \mathcal{B}_s v_1 &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega.\end{cases} \tag{2.3.16}$$

Ainsi v_1 est une sur-solution de (P_λ).

Nous considérons maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z &= z^q \quad \text{dans } \Omega, \\ z &> 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s z &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Posons,

$$M = \min \left\{ \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega w_+^{q+1} dx, \ w \in \mathbb{H}^s \right\},$$

Comme $q \in (0,1)$, il en résulte que M est atteint par un minimum $z \geqslant 0$ et par la Proposition 2.4 et le Lemme 2.3, on obtient $z > 0$ de plus z est unique. En particulier, z est solution du problème (2.3.17). Par le Théorème 2.3, on a $z \in L^\infty(\Omega)$.

Maintenant, posons $z_\lambda = \lambda^{\frac{1}{1-q}} z$, alors z_λ est solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z_\lambda &= \lambda z_\lambda^q \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s z_\lambda &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Par le résultat de comparaison dans le Lemme 2.3, on aura $z_\lambda \leqslant v_1$. C'est clair que z_λ est une sous solution du problème (P_λ). Par conséquent un argument de monotonie nous permet d'obtenir l'existence d'une solution u_λ du problème (P_λ) avec $z_\lambda \leqslant u_\lambda \leqslant v_1$. □

Lemme 2.6. On définit Λ par

$$\Lambda = \sup \{\lambda > 0 : \quad \text{le problème } (P_\lambda) \text{ admet une solution } \}.$$

Alors $0 < \Lambda < \infty$.

Démonstration. Par le Lemme 2.5, on a $\Lambda > 0$.

Montrons que $\Lambda < \infty$. Soit λ fixé, de sorte que (P_λ) admet une solution $\bar{u}_\lambda$. Par le principe de comparaison, Lemme 2.3, on obtient $z_\lambda \leqslant \bar{u}_\lambda$ où z_λ est l'unique solution positive du problème

(2.3.18). Soit $\phi \in \mathbb{H}^s$, alors par l'inégalité de Picone on obtient

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\big(\phi(x)-\phi(y)\big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy &\geqslant \int_\Omega \frac{\phi^2}{\bar{u}_\lambda}(-\Delta)^s \bar{u}_\lambda\,dx \\ &\geqslant \int_\Omega \phi^2(\lambda \bar{u}_\lambda^{q-1} + \bar{u}_\lambda^{p-1})\,dx \\ &\geqslant \int_\Omega z_\lambda^{p-1}\phi^2\,dx \\ &\geqslant \lambda^{\frac{p-1}{1-q}} \int_\Omega z^{p-1}\phi^2\,dx.\end{aligned}$$

par suite

$$\lambda^{\frac{p-1}{1-q}} \leqslant \inf_{\phi\in\mathbb{H}^s} \frac{\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{\big(\phi(x)-\phi(y)\big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy}{\displaystyle\int_\Omega z^{p-1}\phi^2\,dx} = \Lambda^*. \tag{2.3.19}$$

Par conséquent, $\Lambda \leqslant (\Lambda^*)^{\frac{1-q}{p-1}} < \infty$. Cela donne le point (2) dans le Théorème 2.1. $\square$

Montrons maintenant que pour tout $0 < \lambda < \Lambda$, le problème (P_λ) admet une solution. On a le résultat suivant.

Lemme 2.7. Soit

$$S = \{\lambda > 0 : \quad \text{le problème } (P_\lambda) \text{ admet une solution}\}. \tag{2.3.20}$$

Alors S est un intervalle.

Démonstration. Notons que $S \neq \emptyset$, par le Lemme 2.5. Fixons $\lambda_1 \in S$, il suffit de prouver que pour tout $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, le problème (P_{λ_2}) admet une solution non triviale.

Comme $\lambda_1 \in S$, il existe $u_1 \in \mathbb{H}^s$ telle que u_1 est solution de (P_{λ_1}). Remarquons maintenant que u_1 est une sur-solution de (P_{λ_2}). Soit z l'unique solution du problème (2.3.17). Posons $z_2 = \lambda_2^{\frac{1}{1-q}} z$, alors z_2 est solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z_2 &= \lambda_2 z_2^q \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s z_2 &= 0 \quad\quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Par le principe de comparaison, Lemme 2.3, on obtient $z_2 \leqslant u_1$.

Comme z_2 est une sous solution de (P_{λ_2}), en utilisant un argument de monotonie nous obtenons l'existence de $u_2 \in \mathbb{H}^s$ telle que $z_2 \leqslant u_2 \leqslant u_1$ et u_2 est solution de (P_{λ_2}). Ainsi, $\lambda_2 \in S$ et le résultat est démontré. $\square$

Dans la suite nous démontrons que (P_λ) possède une solution minimale pour tous $0 < \lambda < \Lambda$ et nous donnons quelques propriétés de ces solutions.

Lemme 2.8. Pour tous $0 < \lambda < \Lambda$, (P_λ) possède une solution minimale u_λ telle que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. De plus, la famille des solutions minimales u_λ est croissante par rapport à λ.

Démonstration. Supposons que (P_λ) admet une solution v_λ pour un $\lambda \in S$ donné. On définit la suite $(v_n)_n$ par $v_0 = z_\lambda$,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_n &= \lambda v_{n-1}^q + v_{n-1}^p & \text{dans } \Omega, \\ v_n &\geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s v_n &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Où z_λ est l'unique solution du problème (2.3.18). On a, par le lemme 2.3, $z_\lambda \leqslant ... \leqslant v_{n-1} \leqslant v_n \leqslant v_\lambda$ et alors, par la Proposition 2.4, on déduit que $z_\lambda < v_n < v_\lambda$. En utilisant v_n comme fonction test dans (2.3.21), on obtient $\|v_n\| \leqslant \|v_\lambda\|$. Ainsi, il existe $u_\lambda \in \mathbb{H}^s$ telle que $v_n \rightharpoonup u_\lambda$. Par conséquent, comme $(-\Delta)^s v_n \geqslant 0$, par le Lemme 2.4, $v_n \to u_\lambda$ converge fortement dans $\mathbb{H}^s$ et $u_\lambda \leqslant v_\lambda$. Autrement dit u_λ est une solution minimale.

Maintenant, par le Lemme 2.3 et la Proposition 2.4, nous obtenons la monotonie de la famille$\{u_\lambda, \ \ \lambda \in (0, \Lambda)\}$.

Dans ce qui suit, pour un $\lambda \in (0, \Lambda)$ fixé, nous notons u_λ la solution minimale. On définit $a(x) = \lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1}$ et soit μ_1 la première valeur propre du problème suivant,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \phi - a(x)\phi &= \mu_1 \phi & \text{dans } \Omega, \\ \phi &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s \phi &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.3.22}$$

En utilisant le même argument que dans la preuve du Lemme 3.5 dans [12], nous pouvons prouver que

$$\mu_1 \geqslant 0. \tag{2.3.23}$$

Observons que (2.3.23) est équivalent à

$$\|\phi\|^2 \geqslant \int_\Omega a(x)\phi^2 dx \quad \forall \phi \in \mathbb{H}^s. \tag{2.3.24}$$

Comme u_λ est solution de (P_λ), en utilisant u_λ comme fonction test dans l'équation, on obtient

$$\|u_\lambda\|^2 = \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}. \tag{2.3.25}$$

Par (2.3.24), on déduit que

$$\|u_\lambda\|^2 - \lambda q\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - p\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \geqslant 0. \tag{2.3.26}$$

Remplaçons dans (2.1.4), on aura $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. □

Cela donne le point (1) dans le Théorème 2.1. Ainsi, pour compléter la preuve du Théorème 2.1, nous pouvons maintenant nous concentrer sur la preuve du point (3). Pour ce faire, on a le résultat suivant :

Lemme 2.9. Le Problème (P_λ) possède au moins une solution si $\lambda = \Lambda$.

Démonstration. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite telle que $\lambda_n \nearrow \Lambda$. Notons $u_n \equiv u_{\lambda_n}$ la solution minimale du problème (P_{λ_n}), alors la suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n. Comme $J_{\lambda_n}(u_n) < 0$, on a

$$\begin{aligned}
0 &> J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p+1}J'_\lambda(u_n) \\
&\geqslant (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^2 + \lambda(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1})\|u_n\|_{q+1}^{q+1} \\
&\geqslant (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^2 - \lambda(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Par suite, $\{u_n\}$ est bornée dans $\mathbb{H}^s$. Ainsi, $u_n \rightharpoonup u^*$ dans $\mathbb{H}^s$, pour un $u^* \in \mathbb{H}^s$. Comme $\{u_n\}_n$ est croissante, en utilisant le faite que $(-\Delta)^s u_n \geqslant 0$ et le Lemme 2.4, nous déduisons que $u_n \to u^*$ fortement dans $\mathbb{H}^s$. Par conséquent, u^* est solution de (P_λ) pour $\lambda = \Lambda$. □

Remarque 2.1. Si $p \leqslant 2_s^* - 1$, par le Théorème 2.3, on peut facilement montrer que $u^* \in L^\infty(\Omega)$, autrement dit u^* est une solution extrémale régulière.

Par le Lemme 2.9, on obtient le point (3) du Théorème 2.1. La preuve du Théorème est donc complète.

2.4 Preuve du Théorème 2.2

Dans cette section, nous prouvons l'existence d'une deuxième solution positive de (P_λ).

Comme $p < \frac{N+2s}{N-2s}$, le problème (P_λ) est variationnel, en effet, c'est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle énergie (2.1.4). Notons que J_λ est bien définie et différentiable sur $\mathbb{H}^s$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{H}^s$,

$$(J_\lambda'(u), \varphi) = \langle u, \varphi\rangle - \lambda \int_\Omega |u|^q \varphi\, dx - \int_\Omega |u|^p \varphi\, dx.$$

Ainsi, les points critiques de la fonctionnelle J_λ sont des solutions de (P_λ).

Pour montrer le Théorème 2.2, nous allons utiliser un argument de type Mountain-Pass.

Comme dans le cas local, nous pouvons prouver que le problème (P_λ) possède une deuxième solution positive pour λ petit. Cela résulte en utilisant le Théorème de Mountain-Pass. Il est donc essentiel d'avoir une première solution qui est un minimum local de J_λ dans $\mathbb{H}^s$. Soit

$$f_\lambda(r) = \begin{cases} \lambda r^q + r^p, & \text{si } r \geqslant 0, \\ \\ 0, & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

et

$$F_\lambda(u) = \int_0^u f_\lambda(r)\, dr.$$

On définit la fonctionnelle $J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \displaystyle\int_\Omega F_\lambda(u)$. Les points critiques de J_λ correspondent à des solutions de (P_λ). On définit l'ensemble

$$A = \{\lambda > 0 \,:\, J_\lambda \text{ admet un minimum local } u_{0,\lambda}\}.$$

Si $\lambda \in A$ et w_λ est un minimum de J_λ dans $\mathbb{H}^s$, alors $v = 0$ est un minimum local de la fonctionnelle

$$\hat{J}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(v) dx, \tag{2.4.27}$$

où

$$G_\lambda(v) = \int_0^v g_\lambda(r)\, dr$$

et

$$g_\lambda(r) = \begin{cases} \lambda\left((u_{0,\lambda}(x) + r)^q - u_{0,\lambda}(x)^q\right) + (u_{0,\lambda}(x) + r)^p - u_{0,\lambda}(x)^p, & \text{si } r \geqslant 0, \\ \\ 0, & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Observons maintenant que $\hat{J}_\lambda$ possède la géométrie du Mountain-Pass. Soit $v_0 \in \mathbb{H}^s$ tel que

$\hat{J}_\lambda(v_0) < 0$ et définissons

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^s \ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_0\} \ \text{ et } \ c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi_\lambda(\gamma(t)).$$

On a alors $c \geqslant 0$ et, comme $p < 2_s^* - 1$, $\hat{J}_\lambda$ satisfait la condition Palais-Smale. Si $c > 0$, alors , en utilisant le Théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz, nous obtenons un point critique non trivial. Si $c = 0$, on utilise le Théorème de Ghoussoub-Preiss, voir [54].

Par conséquent, si nous commençons par un minimum local de $\hat{J}_\lambda$, on obtient un second point critique de $\hat{J}_\lambda$, et donc un deuxième solution du problème (P_λ).

Dans ce qui suit, pour montrer que le problème (P_λ) a une deuxième solution pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, nous utilisons un argument dû à Alama, voir [10], en tenant compte de la nature non locale du problème.

Nous montrons dans un premier temps, en utilisant une formulation variationnelle de la méthode de Perron, que la fonctionnelle a un minimum sous contrainte et que ce minimum est un minimum local dans l'ensemble $\mathbb{H}^s$. Pour ce faire, nous utilisons une technique de troncature et des estimations d'énergie. Fixons $\lambda_0 \in (0, \Lambda)$ et soit $\lambda_0 < \bar{\lambda} < \Lambda$. Notons u_0 (resp. $\bar{u}$) la solution minimale de (P_λ) pour $\lambda = \lambda_0$ (resp.$\lambda = \bar{\lambda}$). Par construction, on a $u_0 < \bar{u}$. Posons

$$M = \{u \in \mathbb{H}^s : \ 0 \leqslant u \leqslant \bar{u}\}.$$

Il est clair que $u_0 \in M$ et que M est un sous ensemble fermé convexe de $\mathbb{H}^s$. Comme J_{λ_0} est bornée inférieurement sur M et semi-continue inférieurement, il existe $\vartheta \in M$ tel que

$$J_{\lambda_0}(\vartheta) = \inf_{u \in M} J_{\lambda_0}(u).$$

Soit v l'unique solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda_0 u^q & \text{dans } \Omega, \\ u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

On a $J_{\lambda_0}(v) < 0$, et donc $\vartheta \neq 0$. Comme dans le dans [78, Théorème 2.4], nous concluons que ϑ est une solution au problème (P_λ). Si $\vartheta \neq u_0$, alors le Théorème 2.2 est demontré. Sinon, supposons que $\vartheta = u_0$. Montrons que

$$\vartheta \text{ est un minimum local de } J_{\lambda_0}. \tag{2.4.28}$$

On procède par l'absurde. Supposons que ϑ n'est pas un minimum local de J_{λ_0}. Alors il existe une suite $\{v_n\} \subset \mathbb{H}^s$ tel que $\|v_n - \vartheta\|_{\mathbb{H}^s} \to 0$ quand $n \to \infty$ et

$$J_{\lambda_0}(v_n) < J_{\lambda_0}(\vartheta). \tag{2.4.29}$$

On définit $w_n = (v_n - \bar{u})_+$ et $u_n = \max\{0, \min\{v_n, \bar{u}\}\}$ alors $u_n \in M$ et

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } v_n(x) \leqslant 0, \\ v_n(x) & \text{dans } 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \bar{u}(x), \\ \bar{u}(x) & \text{dans } \bar{u}(x) \leqslant v_n(x). \end{cases}$$

Donc $u_n = v_n^+ - w_n$. Posons $T_n = \{x \in \Omega : \ u_n(x) = v_n(x)\}$ et $S_n = \text{supp } \ w_n \cap \Omega$. Notons que $\text{supp } \ v_n^+ \cap \Omega = T_n \cup S_n$. Nous affirmons que

$$|S_n| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.4.30}$$

En effet, Soit $\varepsilon > 0$,

$$E_n = \{x \in \Omega : \ v_n(x) \geqslant \bar{u}(x) > \vartheta(x) + \delta\}$$
$$\text{et}$$
$$F_n = \{x \in \Omega : \ v_n(x) \geqslant \bar{u}(x) \text{ et } \bar{u}(x) \leqslant \vartheta(x) + \delta\},$$

où δ est convenablement choisi. Comme

$$\begin{aligned} 0 &= |\{x \in \Omega : \ \bar{u}(x) < \vartheta(x)\}| = \left| \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ x \in \Omega : \ \bar{u}(x) \leqslant \vartheta(x) + \frac{1}{j} \right\} \right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \left| \left\{ x \in \Omega : \ \bar{u}(x) \leqslant \vartheta(x) + \frac{1}{j} \right\} \right|, \end{aligned}$$

il en résulte l'existence d'un $\delta_0 = \frac{1}{j_0}$ de sort que si $\delta < \delta_0$, alors

$$|\{x \in \Omega : \ \bar{u}(x) \leqslant \vartheta(x) + \delta\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi $|F_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\|u_n - v_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quand $n \to \infty$, on obtient pour $\eta = \frac{\delta^2\varepsilon}{2}$, si $n \geqslant n_0$, que

$$\frac{\delta^2\varepsilon}{2} \geqslant \int_\Omega |v_n - \vartheta|^2 dx \geqslant \int_{E_n} |v_n - \vartheta|^2 dx \geqslant \delta^2 |E_n|.$$

Donc $|E_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et comme $S_n \subset F_n \cup E_n$, on en déduit que $|S_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \leqslant n_0$ et l'affirmation est démontrée. Maintenant, posons

$$H(u) = \frac{\lambda_0}{q+1} u_+^{q+1} + \frac{u_+^{p+1}}{p+1}.$$

En utilisant le fait que

$$\|v_n\|^2 \geqslant \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2,$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) &= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int\limits_\Omega H(v_n) dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \int\limits_\Omega H(v_n) dx + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \int_{T_n} H(u_n) dx - \int_{S_n} H(v_n) dx + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v_n^+\|^2 - \int_{T_n} H(u_n) dx - \int_{S_n} H(w_n + \bar{u}) dx + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 \\
&= J_{\lambda_0}(u_n) + \frac{1}{2}\Big(\|v_n^+\|^2 - \|u_n\|^2\Big) + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - \int_{S_n} \Big(H(w_n + \bar{u}) - H(\bar{u})\Big) dx,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\int\limits_\Omega H(u_n) dx = \int_{T_n} H(u_n) dx + \int_{S_n} H(\bar{u}) dx.$$

d'autre part, comme $v_n^+ = u_n + w_n$, on a

$$\frac{1}{2}\Big(\|v_n^+\|^2 - \|u_n\|^2\Big) = \frac{1}{2}\|w_n\|^2 + \langle u_n, w_n \rangle.$$

En remarquant que

$$\{w_n \neq 0\} = \{u_n = \bar{u}\},$$

on arrive a

$$\langle u_n, w_n \rangle \geqslant \int\limits_\Omega (-\Delta)^s \bar{u} w_n dx \geqslant \lambda \int_{S_n} \bar{u}^q w_n dx + \int_{S_n} \bar{u}^p w_n dx.$$

Ainsi, rappelons que $\bar{u}$ est une sur-solution de (P_λ) pour $\lambda = \lambda_0$, nous concluons que

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(v_n) &\geqslant J_{\lambda_0}(\vartheta) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2 + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 \\ &- \int_{S_n} \Big\{ H(w_n + \bar{u}) - H(\bar{u}) - \lambda_0 \bar{u}^q w_n - \bar{u}^p w_n \Big\} dx. \end{aligned}$$

Prenons en considération le fait que

$$0 \leqslant \frac{1}{q+1}(w_n + \bar{u})^{q+1} - \frac{1}{q+1}\bar{u}^{q+1} - \bar{u}^q w_n \leqslant \frac{q}{2}\frac{w_n^2}{\bar{u}^{1-q}},$$

et par l'inégalité Picone 2.4, on trouve que

$$\bar{\lambda} \int_\Omega \frac{w_n^2}{\bar{u}^{1-q}} dx \leqslant \int_\Omega \frac{w_n^2}{\bar{u}}(-\Delta)^s \bar{u} \leqslant \|w_n\|^2.$$

Alors,

$$\lambda_0 \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{q+1}(w_n + \bar{u})^{q+1} - \frac{1}{q+1}\bar{u}^{q+1} - \bar{u}^q w_n \Big\} dx \leqslant \frac{q}{2}\int_\Omega \frac{w_n^2}{\bar{u}^{1-q}} dx \leqslant \frac{q}{2}\|w_n\|^2.$$

De plus, comme $2 \leqslant p+1$,

$$0 \leqslant \frac{1}{p+1}(w_n + \bar{u})^{p+1} - \frac{1}{p+1}\bar{u}^{p+1} - \bar{u}^p w_n \leqslant \frac{p}{2} w_n^2 (w_n + \bar{u})^{p-1} \leqslant C(\bar{u}^{p-1} w_n^2 + w_n^{p+1}).$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Sobolev et le fait que $|S_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, on obtient

$$\int_\Omega \Big\{ \frac{1}{p+1}(w_n + \bar{u})^{p+1} - \frac{1}{p+1}\bar{u}^{p+1} - \bar{u}^p w_n \Big\} dx \leqslant o(1)\|w_n\|^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(v_n) &\geqslant J_{\lambda_0}(\vartheta) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2(1 - q - o(1)) + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 \\ &\geqslant J_{\lambda_0}(\vartheta) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2(1 - q - o(1)) + o(1). \end{aligned}$$

Et donc

$$0 > J_{\lambda_0}(v_n) - J_{\lambda_0}(\vartheta) \geqslant \frac{1}{2}\|w_n\|^2(1 - q - o(1)) + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2.$$

Comme $q < 1$, il en résulte que $w_n = v_n^- = 0$ pour n suffisamment grand, autrement dit $v_n \in M$

et alors

$$J_{\lambda_0}(v_n) \geqslant J_{\lambda_0}(\vartheta),$$

qui est en contradiction avec (2.4.29), et la preuve de (2.4.28) est achevée.

Ainsi, ϑ est un minimum local de J_{λ_0}, et donc $\hat{J}_{\lambda_0}$ admet $u = 0$ comme minimum local, autrement dit $\hat{J}_{\lambda_0}$ admet un point critique, $\hat{u}$, non triviale . Par conséquent, $u = \vartheta + \hat{u}$ est une solution, differente de ϑ, du problème (P_λ). Le Théorème 2.2 est démontré.

Remarque 2.2. Si on considère la version symétrique, impaire, du problème (P_λ), à savoir,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ \mathcal{B}_s u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega\,, \end{cases} \tag{2.4.31}$$

la fonctionnelle énergie associée

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

est impaire. Alors, pour $p < \frac{N+2s}{N-2s}$, en utilisant l'argument min-max de Lusternik-Schnirelman, il est possible de prouver que le problème (2.4.31) a une infinité de solutions à énergie négative, voir [12] et [18], et en utilisant les mêmes arguments présentés dans [13], [12] on aura les mêmes résultats pour les solutions à énergie positive.

Chapitre 3

Inégalité de Hardy fractionnaire mixtes et application

Ce chapitre est le développement de l'article [3]

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'inégalité de Hardy fractionnaire pour des fonctions qui s'annulent sur une partie ouverte du complémentaire d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Notre objectif est de déterminer des conditions analytiques et géométriques pour que cette constante soit atteinte ou non. La nature non-locale du problème produit beaucoup de difficultés techniques. En outre, la construction d'un ouvert avec une géométrie convenable s'avère être une tâche plus ardue que dans le cas local.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous introduisons le cadre fonctionnel qu'on utilise par la suite, des inégalités de type Sobolev fractionnaire et une inégalité de Picone.

La constante de Hardy mixte est étudiée dans la section 3.3, nous commençons par prouver une condition nécessaire et suffisante pour que la constante de Hardy mixte soit atteinte. La preuve est plus compliquée que dans le cas local et des estimations plus fines sont nécessaires pour obtenir le résultat principal. Dans la sous section 3.3.1 nous donnons une condition suffisante pour garantir la non atteignabilité de Λ_N et nous donnons deux exemples explicites où cette condition est réalisée. Une inégalité de Hardy améliorée est également obtenue dans ce cas. La sous-section 3.3.2 est dédiée au cas où Λ_N est atteinte. Nous commençons par donner un exemple où la constante de Hardy est atteinte et quelques propriétés importantes sont également étudiées. Dans la dernière section, nous considérons quelques problèmes sous-critiques et doublement critique et nous traitons l'effet du poids de Hardy sur l'existence des solutions.

3.2 Préliminaires

Nous adopterons tout au long de ce chapitre la notation suivante

$$d\nu = \frac{dx\,dy}{|x-y|^{d+2s}}.$$

Rappelons l'espace de Sobolev fractionnaire classique $H^s(\mathbb{R}^d)$,

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{d}{2}+s}} \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \right\}, \tag{3.2.1}$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |u(x)-u(y)|^2\, d\nu, \tag{3.2.2}$$

On sait que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert, voir [43]. Nous rappelons également les inégalités de Sobolev et de Hardy

Proposition 3.1. Soit $s \in (0,1)$ avec $d > 2s$. Alors il existe une constante positive $S = S(d,s)$ telle que, pour toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$S\|u\|^2_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |u(x)-u(y)|^2\, d\nu, \tag{3.2.3}$$

où $2^*_s = \frac{2d}{d-2s}$.

Proposition 3.2. Soit $s \in (0,1)$ avec $d > 2s$, $0 \in \Omega$. Alors pour toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\Lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}} dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |u(x)-u(y)|^2\, d\nu, \tag{3.2.4}$$

où $\Lambda = 2^{2s}\dfrac{\Gamma^2(\frac{d+2s}{4})}{\Gamma^2(\frac{d-2s}{4})}$ est optimale et non atteinte.

Dans le cas d'un domaine borné, on a la version suivante de l'inégalité de Hardy dont la preuve peut être retrouvée dans [1].

Proposition 3.3. Soit Ω un domaine borné régulier tel que $0 \in \Omega$. Alors il existe une constante $C \equiv C(\Omega, s, d) > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$C \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}} \, dx \quad \leqslant \quad \int_\Omega \int_\Omega (u(x) - u(y))^2 \, d\nu. \tag{3.2.5}$$

Comme nous considérons une inégalité de Hardy pour des fonctions qui s'annulent sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$, nous devons spécifier l'espace fonctionnel ou l'inégalité à un sens.

Définition 3.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, D un ouvert de $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Pour $0 < s < 1$, on définit l'espace

$$\mathbb{E}^s(\Omega, D) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^d) \, : \, u = 0 \text{ dans } D \right\}.$$

Rappelons que $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ muni de la norme induite par $H^s(\mathbb{R}^d)$, est un espace de Hilbert.

Pour tout $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, on note par

$$\|u\|^2 = a_{d,s} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x) - u(y)|^2 \, d\nu.$$

Les propriétés de cette norme sont décrites par le résultat suivant. nous renvoyons à [47], [62] pour la preuve et d'autres propriétés.

Proposition 3.4. La norme $\| \, . \, \|$ de $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ est équivalente à celle induite par $H^s(I\!R^d)$, et alors $(\mathbb{E}^s(\Omega, D), \langle \, , \, \rangle)$ est un espace de Hilbert relativement au produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = a_{d,s} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \, d\nu,$$

de plus il existe une constante positive $C(\Omega)$ pour laquelle l'inégalité de Poincaré suivante est satisfaite

$$C(\Omega) \int_\Omega u^2(x) dx \leqslant \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x) - u(y))^2 \, d\nu \text{ pour tout } u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D). \tag{3.2.6}$$

Maintenant, en utilisant la définition de $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ et le résultat d'extension prouvé dans [47], on arrive à prouver l'inégalité de Sobolev suivante.

Proposition 3.5. Supposons que $s \in (0, 1)$ et $d > 2s$. Alors il existe une constante positive $S(N) > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ on a

$$S(N) \|u\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)} \leqslant \|u\|^2.$$

Le résultat suivant sera très utile pour avoir des estimations sur la constante de Hardy, de plus il justifie notre choix des conditions aux "bords" dans la dernière section de ce chapitre.

Proposition 3.6. Soit $s \in (0,1)$, pour tous u, $v \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ on a,

$$\int_\Omega v(-\Delta)^s u \, dx = \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y)) \, d\nu - \int_N v\mathcal{N}_s u \, dx. \tag{3.2.7}$$

Où N est le complémentaire de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$.

La preuve de ce résultat est une application directe de la formule d'intégration par parties, voir le lemme 3.3 dans [47]. Nous utiliserons l'inégalité de type Picone suivante pour obtenir des estimations à priori.

Théorème 3.1. Soient u, $v \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ avec $u \geqslant 0$ et $u > 0$ dans $\Omega \cup N$. Supposons que $(-\Delta)^s u \geqslant 0$ est une mesure de Radon bornée sur Ω. Alors

$$\int_N \frac{|v|^2}{u} \mathcal{N}_s u \, dx + \int_\Omega \frac{|v|^2}{u} (-\Delta)^s u \, dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (v(x)-v(y))^2 \, d\nu. \tag{3.2.8}$$

En particulier, si nous avons l'égalité dans (3.2.8), alors il existe une constante C telle que $v = Cu$ dans $I\!R^d$.

Démonstration. La preuve dans le cas de l'espace $H_0^s(\Omega)$ peut être retrouvée par exemple dans [63]. Cependant, nous donnons ici un petit détail pour obtenir la dernière conclusion du théorème. Pour u, v comme dans les hypothèses du Théorème nous avons

$$(v(x)-v(y))^2 - \left(\frac{v^2(x)}{u(x)} - \frac{v^2(y)}{u(y)}\right)\Big(u(x)-u(y)\Big) = \left(v(x)\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} - v(y)\sqrt{\frac{u(x)}{u(y)}}\right)^2.$$

En multipliant par $d\nu$ et en intégrant l'identité précédente, nous obtenons le résultat souhaité.

Maintenant, si nous avons l'égalité dans (3.2.8), alors

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \left(v(x)\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} - v(y)\sqrt{\frac{u(x)}{u(y)}}\right)^2 d\nu = 0$$

Ainsi $v(x)\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} = v(y)\sqrt{\frac{u(x)}{u(y)}}$ pour tous $(x,y) \in \mathcal{D}_\Omega$. En particulier, si $v(y_0) \neq 0$ pour un $y_0 \in \Omega \cup N$, alors $\frac{v(x)}{v(y_0)} = \frac{u(x)}{u(y_0)}$. Donc $v(x) = \frac{v(y_0)}{u(y_0)} u(x)$ ce qui donne le résultat. $\square$

3.3 Inégalité de Hardy fractionnaire mixte

Dans cette section, nous allons étudier l'atteignabilité de la constante de Hardy et nous donnons des conditions suffisantes pour que cette dernière soit atteinte. Rappelons que la constante de Hardy est définie par

$$\Lambda_N \equiv \Lambda_N(\Omega) = \inf_{\{\phi\in \mathbb{E}^s(\Omega,D),\phi\neq 0\}} \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |\phi(x)-\phi(y)|^2\,d\nu}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\phi^2}{|x|^{2s}}\,dx}. \tag{3.3.9}$$

Notre premier résultat est le suivant

Théorème 3.2. Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier, supposons que $0\in\Omega$. Soient N, D deux ouverts de $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$ tels que $N\cap D=\emptyset$ et $\overline{N}\cup\overline{D}=\mathbb{R}^d\backslash\Omega$, alors

$$0<\Lambda_N\leqslant\Lambda.$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que $\Lambda_N>0$. En effet, soit $u\in\mathbb{E}^s(\Omega,D)$, fixons $\delta>0$ de sort que $B_{2\delta}(0)\subset\Omega$. Soit $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ qui vérifie $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, $\varphi\equiv 1$ dans $B_\delta(0)$ et $\varphi=0$ dans $\Omega\backslash B_{2\delta}(0)$. Dans ce qui suit, nous notons C une constante positive qui dépend de Ω,d,s et indépendante de u. Il est clair que $u=\varphi u+(1-\varphi)u$, donc

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx = \int_\Omega \frac{(u\varphi)^2}{|x|^{2s}}\,dx + \int_\Omega \frac{u^2(1-\varphi)^2}{|x|^{2s}}\,dx + 2\int_\Omega \frac{u^2\varphi(1-\varphi)}{|x|^{2s}}\,dx, \tag{3.3.10}$$

et comme $1-\varphi=0$ dans $B_\delta(0)$, par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\int_\Omega \frac{u^2(1-\varphi)^2}{|x|^{2s}}\,dx + 2\int_\Omega \frac{u^2\varphi(1-\varphi)}{|x|^{2s}}\,dx \leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x)-u(y))^2\,d\nu. \tag{3.3.11}$$

Nous traitons maintenant avec le terme $\displaystyle\int_\Omega \frac{(u\varphi)^2}{|x|^{2s}}\,dx$. En utilisant le fait que $u\varphi\in H_0^s(\Omega)$, alors par l'inégalité de Hardy donnée dans la Proposition 3.2 on obtient que

$$\int_\Omega \frac{(u\varphi)^2}{|x|^{2s}}\,dx \leqslant C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \Big((u\varphi)(x)-(u\varphi)(y)\Big)^2\,d\nu. \tag{3.3.12}$$

Comme

$$\Big(u(x)\varphi(x)-u(y)\varphi(y)\Big)^2=\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\varphi^2(x)+u^2(y)\Big(\varphi(x)-\varphi(y)\Big)^2$$
$$+2u(y)\varphi(x)\Big(u(x)-u(y)\Big)\Big(\varphi(x)-\varphi(y)\Big),$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega(u(x)\varphi(x)-u(y)\varphi(y))^2\,d\nu &= \int_\Omega\int_\Omega(u(x)-u(y))^2\varphi^2(x)\,d\nu+\int_\Omega\int_\Omega u^2(y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,d\nu\\ &\quad +2\int_\Omega\int_\Omega u(y)\varphi(x)(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu\\ &= J_1+J_2+2J_3.\end{aligned}$$

On a

$$J_1\leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\,d\nu.$$

Pour estimer J_2, en utilisant le fait que Ω est un domaine borné, on arrive à

$$J_2\leqslant C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\frac{u^2(y)}{|x-y|^{d+2s-2}}dxdy\leqslant C(\Omega)\int_\Omega u^2(y)\,dy\int_{|\xi|\leqslant R}\frac{1}{|\xi|^{d+2s-2}}\,d\xi.$$

Remarquons que $\int_{|\xi|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{|\xi|^{d+2s-2}}\,d\xi<\infty$, par l'inégalité de Poincaré, Proposition 3.4, on obtient

$$J_2\leqslant C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega u^2(y)dy\leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\,d\nu.$$

Utilisons à présent l'inégalité de Young, on obtient que

$$|J_3|\leqslant C_1J_1+C_2J_2\leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\,d\nu.$$

Par suite, en combinant les estimations obtenues ci-dessus, on conclut que

$$\int_\Omega\int_\Omega(u(x)\varphi(x)-u(y)\varphi(y))^2\,d\nu\leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\,d\nu.$$

Revenons à (3.3.10), et utilisons (3.3.11), (3.3.12), on obtient

$$\int\limits_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx\leqslant C(\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\,d\nu.$$

Par conséquent $\Lambda_N>0$ et le résultat est démontré. Maintenant, comme $H^s_0(\Omega)\subset\mathbb{E}^s(\Omega,D)$, il en résulte que $\Lambda_N \leqslant \Lambda$. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de donner le résultat principal de cette section.

Théorème 3.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier, supposons que $0 \in \Omega$. Soient N, D deux ouverts de $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ tels que $N \cap D = \emptyset$ et $\overline{N} \cup \overline{D} = \mathbb{R}^d \backslash \Omega$, alors Λ_N est atteinte si et seulement si $\Lambda_N < \Lambda$.

Démonstration. La preuve est structurée en deux étapes.

Étape 1. Supposons que $\Lambda_N < \Lambda$ et montrons que Λ_N atteinte. Soit $\{u_n\}_n \subset \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ une suite minimisante de la constante Λ_N définie en (3.3.9) avec $\displaystyle\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}}\, dx = 1$, alors $\{u_n\}_n$ est borné dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, et

$$\frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u_n(x) - u_n(y)|^2 \, d\nu \to \Lambda_N.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u_n \geqslant 0$ pour tout n, par suite il existe $\bar{u} \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ et, modulo une sous suite, $u_n \to \bar{u}$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < 2_s^*$ et $u_n \to \bar{u}$ p.p. dans Ω. Nous affirmons que $\bar{u} \neq 0$. En effet, par l'absurde, supposons que $\bar{u} = 0$, soit $R > 0$ tel que $B_{4R}(0) \subset \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi \equiv 1$ dans $B_R(0)$ et $\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}^d \backslash B_{2R}(0)$. Posons $w_n = \varphi u_n$, alors $w_n \in H_0^s(\Omega)$ et

$$\Lambda \leqslant \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2} \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |w_n(x) - w_n(y)|^2 \, d\nu}{\displaystyle\int_\Omega \frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\, dx}, \tag{3.3.13}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\, dx &= \int_\Omega \frac{u_n^2 \varphi^2}{|x|^{2s}}\, dx = \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}}\, dx + \int_\Omega \frac{u_n^2(\varphi^2 - 1)}{|x|^{2s}}\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}}\, dx + \int_{B_R(0)} \frac{u_n^2(\varphi^2 - 1)}{|x|^{2s}}\, dx + \int_{\Omega \backslash B_R(0)} \frac{u_n^2(\varphi^2 - 1)}{|x|^{2s}}\, dx \\
&= 1 + \int_{\Omega \backslash B_R(0)} \frac{u_n^2(\varphi^2 - 1)}{|x|^{2s}}\, dx \\
&= 1 + o(1).
\end{aligned}$$

Notons que

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |w_n(x) - w_n(y)|^2 \, d\nu = \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_n(x)\varphi(x) - u_n(y)\varphi(y)|^2 \, d\nu$$

Comme

$$\begin{aligned}(u_n(x)\varphi(x)-u_n(y)\varphi(y))^2 &= \Big((u_n(x)-u_n(y))\varphi(x)+u_n(y)(\varphi(x)-\varphi(y))\Big)^2\\ &= (u_n(x)-u_n(y))^2\varphi^2(x)+u_n^2(y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\\ &+ 2u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y)),\end{aligned}$$

il en découle que

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|w_n(x)-w_n(y)|^2\,d\nu &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|u_n(x)\varphi(x)-u_n(y)\varphi(y)|^2\,d\nu\\ &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\varphi^2(x)\,d\nu+\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}u_n^2(y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,d\nu\\ &+ 2\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu\\ &= I_1(n)+I_2(n)+2I_3(n).\end{aligned}$$

Commençons par l'estimation de $I_2(n)$. Rappelons que $d\nu=\dfrac{dx\,dy}{|x-y|^{d+2s}}$, alors

$$\begin{aligned}I_2(n) &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu\\ &= \int_\Omega\int_\Omega(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu+\int_\Omega\int_{\Omega^c}(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu\\ &+ \int_{\Omega^c}\int_\Omega(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu\\ &= I_2^1(n)+I_2^2(n)+I_2^3(n).\end{aligned}$$

Utilisons le fait que $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $(\varphi(x)-\varphi(y))^2\leqslant C(\Omega)|x-y|^2$, on obtient

$$I_2^1(n)\leqslant C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\frac{u_n^2(y)}{|x-y|^{d+2s-2}}dxdy\leqslant C(\Omega)\int_\Omega u_n^2(y)\,dy\int_{|\xi|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{|\xi|^{d+2s-2}}\,d\xi.$$

Comme $\int_{|\xi|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{|\xi|^{d+2s-2}}\,d\xi<\infty$, alors $I_2^1(n)=o(1)$.
Nous estimons maintenant $I_2^2(n)$. On a

$$\begin{aligned}I_2^2(n) &= \int_\Omega\int_{\Omega^c}(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu=\int_\Omega\int_{\Omega^c}\varphi^2(y)u_n^2(y)\,d\nu\\ &= \int_\Omega\varphi^2(y)u_n^2(y)\int_{\Omega^c}\frac{1}{|x-y|^{d+2s}}\,dx\,dy=\int_{|y|\leqslant 2R}\varphi^2(y)u_n^2(y)\int_{|x|\geqslant 4R}\frac{1}{|x|^{d+2s}}\,dx\,dy\\ &= o(1).\end{aligned}$$

Finalement, nous estimons $I_3(n)$.

$$\begin{aligned}
I_3(n) &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu \\
&= \int_\Omega\int_\Omega u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))d\nu \\
&+ \int_\Omega\int_{\Omega^c} u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu \\
&+ \int_{\Omega^c}\int_\Omega u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu \\
&= I_3^1(n)+I_3^2(n)+I_3^3(n).
\end{aligned}$$

On commence par le premier terme. Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
I_3^1(n) &= \int_\Omega\int_\Omega u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu \\
&\leqslant \Big(\int_\Omega\int_\Omega (u_n(x)-u_n(y))^2\varphi^2(x)\,d\nu\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega\int_\Omega(\varphi(y)-\varphi(x))^2u_n^2(y)\,d\nu\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant CI_2^1(n)=o(1).
\end{aligned}$$

Maintenant, comme $\varphi(x)=0$ si $x\in\Omega^c$, alors $I_3^2(n)=0$. En combinant les estimations précédentes, on arrive à

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|w_n(x)-w_n(y)|^2\,d\nu=\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\varphi^2(x)\,d\nu+I_2^3(n)+2I_3^3(n)+o(1). \quad (3.3.14)$$

Notons que

$$\begin{aligned}
I_2^3(n)+2I_3^3(n) &= \int_N\int_\Omega(\varphi(x)-\varphi(y))^2u_n^2(y)\,d\nu \\
&+2\int_N\int_\Omega u_n(y)\varphi(x)(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,d\nu \\
&= \int_N\int_\Omega \varphi^2(x)u_n^2(y)\,d\nu+2\int_N\int_\Omega u_n(y)\varphi^2(x)(u_n(x)-u_n(y))\,d\nu \\
&= \int_N\int_\Omega \varphi^2(x)u_n^2(y)\,d\nu+\int_N\int_\Omega 2u_n(y)u_n(x)\varphi^2(x)\,d\nu-2\int_N\int_\Omega u_n^2(y)\varphi^2(x)\,d\nu \\
&= -\int_N\int_\Omega \varphi^2(x)u_n^2(y)\,d\nu+\int_N\int_\Omega 2u_n(y)u_n(x)\varphi^2(x)\,d\nu
\end{aligned}$$

Utilisons à présent l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2^3(n)+2I_3^3(n) &\leqslant -\int_N\int_\Omega\varphi^2(x)u_n^2(y)\,d\nu+\varepsilon\int_N\int_\Omega u_n^2(y)\varphi^2(x)\,d\nu+C_\varepsilon\int_N\int_\Omega u_n^2(x)\varphi^2(x)\,d\nu \\
&\leqslant (\varepsilon-1)\int_N\int_\Omega\varphi^2(x)u_n^2(y)\,d\nu+C_\varepsilon\int_N\int_\Omega u_n^2(x)\varphi^2(x)\,d\nu
\end{aligned}$$

Choisissons ε suffisamment petit, on aura

$$\begin{aligned} I_2^3(n) + 2I_3^3(n) &\leqslant C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{4R}(0)} \int_{B_{2R}(0)} u_n^2(x)\varphi^2(x)\, d\nu \\ &\leqslant C(R,\varepsilon) \int_{B_{2R}(0)} u_n^2(x)\, dx = o(1). \end{aligned}$$

Par suite, par (3.3.14), il en résulte que

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |w_n(x) - w_n(y)|^2\, d\nu \leqslant \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_n(x) - u_n(y))^2 \varphi^2(x)\, d\nu + o(1). \tag{3.3.15}$$

Revenons à (4.3.48), on déduit que

$$\begin{aligned} \Lambda_N < \Lambda &\leqslant \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |w_n(x) - w_n(y)|^2\, d\nu}{\displaystyle\int_\Omega \frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\, dx} \leqslant \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^2\, d\nu}{1 + o(1)} \\ &= \Lambda_N + o(1), \end{aligned}$$

on arrive à une contradiction avec l'hypothèse $\Lambda_N < \Lambda$. Par conséquent $\bar{u} \neq 0$ est l'affirmation en découle. Pour montrer que Λ_N est atteinte nous utilisons le principe variationnel d'Ekeland, alors

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_n = \Lambda_N \dfrac{u_n}{|x|^{2s}} + o(1) & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u_n = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d\setminus\Omega, \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Soit $\varphi \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, par dualité

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u_n \varphi \to \int_\Omega (-\Delta)^s \bar{u}\varphi \text{ et } \int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^{2s}} \to \int_\Omega \frac{\bar{u}\varphi}{|x|^{2s}} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Ainsi $\bar{u}$ est solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \bar{u} = \Lambda_N \dfrac{\bar{u}}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ \bar{u} \in \mathbb{E}^s(\Omega, D), \bar{u} \geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s \bar{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d\setminus\Omega. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Choisissons $\bar{u}$ comme fonction test dans (3.3.17), on obtient

$$\Lambda_N = \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2 \, d\nu}{\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{\bar{u}^2}{|x|^{2s}}\, dx},$$

d'ou le résultat.

Étape 2. Supposons maintenant que $\Lambda_N = \Lambda$ et montrons que Λ_N n'est pas atteinte. Par l'absurde, supposons que Λ_N est atteinte dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, alors il existe $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \Lambda_N \dfrac{u}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D), u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{cases}$$

Soit $B_r(0) \subset\subset \Omega$, on définit v comme étant l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ v &= v_0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash B_r(0), \end{cases}$$

où

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \backslash B_r(0), \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{cases}$$

il est clair que $u \geqslant v$. Posons $w = u - v$ alors $w \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^d$, $w \in H^s(\Omega)$, de plus w est solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w &= \Lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} = \Lambda \dfrac{w}{|x|^{2s}} + \Lambda \dfrac{v}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ w &\geqslant 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{cases}$$

Par le fait que $w(x) \geqslant C_1 |x|^{-\frac{d-2s}{2}}$, $x \in B_{r_0}(0) \subset\subset B_r(0)$, voir [7], il résulte que

$$\infty = C_1 \int_{B_{r_0}(0)} |x|^{-d}\, dx = C_1 \int_{B_{r_0}(0)} |x|^{-2_s^* \frac{d-2s}{2}}\, dx \leqslant \int_{B_{r_0}(0)} w^{2_s^*}\, dx < \infty$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $w \in H^s(\Omega)$. Ainsi le résultat est démontré. □

3.3.1 Le cas $\Lambda_N = \Lambda$

Dans ce qui suit, nous étudions Λ_N lorsque $\Lambda_N = \Lambda$ c'est-à-dire la non atteignabilité de la constante de Hardy et nous présentons quelques conditions géométriques pour avoir cette condition. Commençons tout d'abord par une inégalité de Hardy améliorée qui sera utile par la suite.

Théorème 3.4. Supposons que $\Lambda_N = \Lambda$ et que l'ensemble N est borné. Supposons de plus que l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. $s \in (0,1)$ et $\text{dist}(N,\Omega) > 0$
2. $s \in (0,\frac{1}{2})$ et $\text{dist}(N,\Omega) \geqslant 0$.

Soit $w(x) = |x|^{-\alpha_0}$ avec $\alpha_0 = \frac{d-2s}{2}$, posons $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$ où $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, alors il existe une constante $C = C(\Omega, N) > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, on a

$$\begin{aligned} H_{s,N}(u) \ &\equiv \ \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy - \Lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\, dx \\ &\geqslant \ C(N,\Omega)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy. \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Pour démontrer le Théorème 3.4, nous utilisons les Lemmes techniques suivants.

Lemme 3.1. Supposons que Ω est un ouvert borné tel que $0 \in \Omega$. Supposons que $\text{dist}(N,\Omega) > 0$ ou $\text{dist}(N,\Omega) = 0$ et $s \in (0,\frac{1}{2})$, alors il existe une constante $C = C(\Omega, N) > 0$, telle que pour tout $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, on a

$$C\int_N \frac{u^2}{|x|^{d+2s}} dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy.$$

Démonstration. Posons $g(x) = \dfrac{1}{|x|^{d+2s}}$, comme $N \subset I\!R^d \backslash B_r(0)$, alors $g \in L^1(N)$. On définit ζ comme étant l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s \zeta &=& 0 & \text{dans } \Omega, \\ \zeta &=& 0 & \text{dans } D, \\ \mathcal{N}_s \zeta &=& g & \text{dans } N, \end{array} \right.$$

Notons que l'existence de ζ se déduit en utilisant un argument variationnel. De plus $\zeta > 0$ dans $\Omega \cup N$. Nous affirmons que $\zeta(x) \leqslant C$ pour tout $x \in N$. Par la méthode de Stampacchia $\zeta \in L^\infty(\Omega)$.

Soit $x \in N$, on a

$$\zeta(x) \leqslant \frac{g(x)}{\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+2s}} dy} + ||\zeta||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.3.19}$$

Supposons que N est borné, alors si $\text{dist}(N, \Omega) > 0$ ou $\text{dist}(N, \Omega) = 0$ et $s \in (0, \frac{1}{2})$ on obtient

$$\frac{g(x)}{\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+2s}} dy} \leqslant C(\Omega, N),$$

et l'affirmation en découle. Si N est non borné, fixons $R >> 1$ de sorte que $\Omega \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$, notons $N_R = N \cap B_R(0)$. De la même que précédemment on obtient $\zeta(x) \leqslant C(N, R)$ pour tout $x \in N_R$. Nous traitons maintenant l'estimation dans $N \backslash N_R$. Par (3.3.19) et en utilisant le fait que $|x - y| \leqslant 2|x|$, il en résulte que

$$\zeta(x) \leqslant C(\Omega) + ||\zeta||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.3.20}$$

et l'affirmation est démontrée. Maintenant, soit $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, par l'inégalité de Picone, 3.1, on obtient

$$\int_N \frac{u^2}{\zeta} \mathcal{N}_s \zeta \, dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x) - u(y))^2 \, d\nu.$$

Ainsi

$$\int_N \frac{g(x)}{\zeta(x)} u^2(x) \, dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x) - u(y))^2 \, d\nu.$$

Donc

$$C \int_N \frac{u^2(x)}{|x|^{d+2s}} \, dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x) - u(y))^2 \, d\nu,$$

d'ou le résultat. □

Maintenant, posons $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$ où $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, alors on a l'inégalité de trace suivante.

Lemme 3.2. Sous les mêmes notations comme ci-dessus, on a

$$C(\Omega, N) \int_N \frac{v^2}{|x|^{d+2s}} w(x) dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int \int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{d+2s}} w(x) w(y) dx dy.$$

Démonstration. Pour la preuve, nous allons adapter les mêmes arguments utilisées dans la preuve du Lemme 3.1 en travaillant dans des espaces de Sobolev fractionnaires avec poids comme ceux introduits dans [7], pour la commodité du lecteur, nous incluons ici quelques détails.

Posons $d\mu = \dfrac{w(x)w(y)dxdy}{|x - y|^{d+2s}}$ on définit l'espace $\mathbb{E}^s_w(\Omega, D)$ de la même manière que $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$

en remplaçant $d\nu$ par $d\mu$. Il est clair que $\mathbb{E}^s_w(\Omega, D)$ muni en norme

$$||v||^2_{\mathbb{E}^s_w(\Omega,D)} = \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy = \langle L_{\alpha_0} u, u\rangle,$$

est un espace de Hilbert, où

$$L_{\alpha_0} v := a_{N,s} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+2s}} w(x)w(y)dy. \tag{3.3.21}$$

Dans ce cas, la dérivée normale non locale est donnée par

$$\mathcal{N}_{s,w}u(x) = a_{d,s} \int_\Omega \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}. \tag{3.3.22}$$

De plus, pour tout $u, v \in \mathbb{E}^s_w(\Omega, D)$ on a

$$\int_\Omega v\, L_{\alpha_0} u\, dx = \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\, d\mu - \int_N v\mathcal{N}_{s,w} u\, dx.$$

Ainsi, si ζ_w est l'unique solution de

$$\begin{cases} L_{\alpha_0}\zeta_w &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \zeta_w &= 0 & \text{dans } D, \\ \mathcal{N}_{s,w}\zeta_w(x) &= \frac{1}{|x|^{N+2s+\alpha_0}} & \text{dans } N, \end{cases}$$

alors, comme dans le Lemme précédent, on peut montrer que ζ_w est bornée. Par suite le résultat s'en découle en appliquant l'inégalité de Picone. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un résultat principal pour montrer l'inégalité de Hardy améliorée.

Lemme 3.3. Soit Ω un domaine borné, supposons que $0 \in \Omega$ et que N est borné. Si $\text{dist}(N, \Omega) > 0$ ou $\text{dist}(N, \Omega) = 0$ et $s \in (0, \frac{1}{2})$, alors il existe une constante $C = C(\Omega, N) > 0$, telle que pour tout $v \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ on a

$$C \int_N u^2 dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}\, dx\, dy - \Lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\, dx.$$

Démonstration. Rappelons que

$$H_{s,N}(u) = \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x) - u(y)|^2 \, d\nu - \Lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}} dx.$$

Posons

$$M_{\lambda,N} \quad = \inf_{\{u \in \mathbb{E}^s(\Omega,D), u \neq 0\}} \frac{H_{s,N}(u)}{\displaystyle\int_N u^2 dx}, \tag{3.3.23}$$

il suffit alors de montrer que $M_{\lambda,N} > 0$. Nous considérons deux cas.

Le premier cas : N est borné et dist$(N,\Omega) > 0$. Par l'absurde, supposons que $M_{\lambda,N} = 0$, il existe alors une suite $\{u_n\}_n \subset \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que

$$H_{s,N}(u_n) \leqslant \frac{1}{n} \int_N u_n^2 dx.$$

Posons $v_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{w(x)}$, alors, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u_n \geqslant 0$ et

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy = 1 \text{ pour tout } n.$$

Comme N est borné, alors par le Lemme 3.2, on obtient

$$H_{s,N}(u_n) \leqslant \frac{1}{n} \int_N u_n^2 dx \leqslant \frac{C}{n}.$$

Par suite, modulo une sous suite, on a $v_n \rightharpoonup v_0$ faiblement dans l'espace de Sobolev $\mathbb{E}^s_w(\Omega, D)$. Posons $u_0 = w(x)v_0$ donc $\dfrac{u_n}{|x|^{2s}} \to \dfrac{u_0}{|x|^{2s}}$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et $u_n \to u_0$ p.p dans Ω. Nous affirmons que $u_0 \equiv 0$. Sinon, en utilisant le principe variationnel d'Ekeland, on peut montrer que u_0 est une solution faible, au sens défini dans [63], du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u &=& \Lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ T_k(u) \in \mathbb{E}^s(\Omega, D), u &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{array} \right. \tag{3.3.24}$$

avec $v_0 = \dfrac{u_0}{w(x)} \in \mathbb{E}^s_w(\Omega, D)$. Comme $\Lambda_N = \Lambda$, alors nous arrivons à une contradiction avec le résultat du Théorème 3.3. Ainsi $u_0 = 0$. Donc, modulo une sous suite, $u_n \to 0$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $u_n \to 0$ p.p. dans Ω. Soit $\psi \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ une fonction cut-off telle que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ et

$\psi = 1$ dans $B_{\rho/4}(0)$ pour $\rho > 0$ suffisamment petit. Nous affirmons que

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_n(x) - u_n(y))^2 \, d\nu \geqslant \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |(\psi u_n)(x) - (\psi u_n)(y)|^2 \, d\nu + o(1). \tag{3.3.25}$$

Pour montrer (3.3.25), posons $u_n = \psi u_n + (1-\psi)u_n = u_{1n} + u_{2n}$, alors

$$\begin{aligned}(u_n(x) - u_n(y))^2 &= (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))^2 + (u_{2n}(x) - u_{2n}(y))^2 \\ &+ 2(u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_n(x) - u_n(y))^2 d\nu &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))^2 d\nu + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_{2n}(x) - u_{2n}(y))^2 d\nu \\ &+ 2\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)) d\nu.\end{aligned}$$

On commence par l'estimation de la dernière intégrale. on obtient

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)) d\nu &= \int_\Omega\int_\Omega (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)) d\nu \\ &\quad +2\int_{\Omega^c}\int_\Omega (u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)) d\nu \\ &= K_{1n} + K_{2n}.\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}(u_{1n}(x) - u_{1n}(y))(u_{2n}(x) - u_{2n}(y)) &= \psi(1-\psi)(u_n(x) - u_n(y))^2 \\ &+ (1 - 2\psi(x))u_n(y)(u_n(x) - u_n(y))(\psi(x) - \psi(y)) \\ &- u_n^2(y)(\psi(x) - \psi(y))^2,\end{aligned}$$

En prenant en considération le fait que la suite est $\{u_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ et par l'utilisation de l'inégalité de Hölder, On conclut que

$$K_{1n} \geqslant -C\left(\int_\Omega\int_\Omega u_n^2(y)(\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu\right)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega\int_\Omega u_n^2(y)(\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu.$$

Notons que

$$\int_\Omega\int_\Omega u_n^2(y)(\psi(x)-\psi(y))^2 d\nu \leqslant C\int_\Omega\int_\Omega \frac{u_n^2(y)}{|x-y|^{d+2s-2}}dxdy \leqslant C\int_\Omega u_n^2(y)dy,$$

où on a utilisé $\sup_{\{x\in\Omega\}}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+2s-2}}dx \leqslant C(\Omega)$. Comme $u_n \to 0$ fortement dans $L^2(\Omega)$, on obtient $K_{1n} \geqslant o(1)$. Nous estimons maintenant K_{2n}. On a

$$\begin{aligned} K_{2n} &= \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)u_n(x)\Big((1-\psi(x))u_n(x)-u_n(y)\Big)d\nu \\ &= \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)(1-\psi(x))u_n^2(x)d\nu - \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)u_n(x)u_n(y)d\nu \end{aligned}$$

Comme $\sup_{\{x\in B_{2\rho}(0)\}}\int_{\Omega^c}\frac{dy}{|x-y|^{d+2s}} \leqslant C(\Omega, B_{2\rho}(0))$, alors

$$\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)(1-\psi(x))u_n^2(x)d\nu \to 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)u_n(x)u_n(y)d\nu \leqslant \left(\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi^2(x)u_n^2(x)d\nu\right)^{\frac12}\left(\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} u_n^2(y)d\nu\right)^{\frac12},$$

et comme $u_n^2(y) \leqslant 2(u_n(x)-u_n(y))^2 + 2u_n^2(x)$, on arrive à

$$\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi(x)u_n(x)u_n(y)d\nu \leqslant C\left(\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)} \psi^2(x)u_n^2(x)d\nu\right)^{\frac12} = o(1).$$

Ainsi $K_{2n} \geqslant o(1)$. En combinant les estimations obtenues jusque là on arrive à montrer (3.3.25). De plus

$$\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}} = \int_\Omega \frac{(\psi u_n)^2}{|x|^{2s}}dx + o(1).$$

Donc

$$\begin{aligned} H_{s,N}(u_n) &\geqslant \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |(\psi u_n)(x)-(\psi u_n)(y)|^2\, d\nu - \Lambda_N\int_\Omega \frac{(\psi u_n)^2}{|x|^{2s}}dx \\ &+ \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_{2n}(x)-u_{2n}(y)|^2\, d\nu + o(1). \end{aligned}$$

Comme $\psi u_n \equiv u_{1n} \in H_0^s(\Omega)$, et par l'inégalité de Hardy améliorée, voir [9], il en découle

$$H_{s,N}(u_n) \geqslant C\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_{1n}(x)-v_{1n}(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_{2n}(x)-u_{2n}(y)|^2\,d\nu + o(1).$$

Comme

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_{2n}(x)-v_{2n}(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy \leqslant C(\Omega,N)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_{2n}(x)-u_{2n}(y)|^2\,d\nu,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
1 &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy \\
&\leqslant C\Big[\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_{1n}(x)-v_{1n}(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_{2n}(x)-v_{2n}(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy\Big] \\
&\leqslant C\Big[\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|v_{1n}(x)-v_{1n}(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}} w(x)w(y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_{2n}(x)-u_{2n}(y)|^2\,d\nu\Big] \\
&\leqslant H_{s,N}(u_n) \leqslant \frac{C}{n}.
\end{aligned}$$

ce qui donne une contradiction. Par conséquent $M_{s,N} > 0$. □

Preuve du Théorème 3.4. Rappelons que $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$, alors

$$|v(x)-v(y)|^2\,w(x)w(y) = |u(x)-u(y)|^2 + u^2(x)\Big(\frac{w(y)}{w(x)}-1\Big) + u^2(y)\Big(\frac{w(x)}{w(y)}-1\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |v(x)-v(y)|^2\,(w(x))(w(y))\,d\nu &= \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^2\,d\nu + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} u^2(x)\frac{(w(y)-w(x))}{w(x)}\,d\nu \\
&+ \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} u^2(y)\frac{(w(x)-w(y))}{w(y)}\,d\nu.
\end{aligned}$$

La symétrie des deux derniers termes de l'inégalité ci-dessus, nous ramène à

$$\begin{aligned}
\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |v(x)-v(y)|^2\,(w(x))(w(y))\,d\nu &= \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^2\,d\nu \\
&-\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \left(\frac{u^2(x)}{w(x)} - \frac{u^2(y)}{w(y)}\right)(w(y)-w(x))\,d\nu.
\end{aligned}$$

Estimons, tout d'abord, le dernier terme. On a

$$\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\left(\frac{u^2(x)}{w(x)}-\frac{u^2(y)}{w(y)}\right)(w(y)-w(x))\,d\nu=\int_\Omega\frac{u^2(x)}{w(x)}(-\Delta)^s w\,dx+\int_N\frac{u^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\,dx.$$

Donc

$$\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\left(\frac{u^2(x)}{w(x)}-\frac{u^2(y)}{w(y)}\right)(w(x)-w(y))\,d\nu=\Lambda\int_\Omega\frac{u^2(x)}{|x|^{2s}}dx+\int_N\frac{u^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\,dx.$$

Alors

$$\begin{aligned}H_{\lambda,N}(u) &= \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|u(x)-u(y)|^2\,d\nu-\Lambda\int_\Omega\frac{u^2(x)}{|x|^{2s}}dx\\ &= \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|v(x)-v(y)|^2\,(w(x))(w(y))\,d\nu+\int_N\frac{u^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\,dx.\end{aligned}$$

Pour finir, il suffit de montrer que

$$\int_N\frac{u^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\,dx\leqslant C(\Omega,N)H_{\lambda,N}(u). \tag{3.3.26}$$

Nous affirmons que

$$\left|\frac{\mathcal{N}_s w(x)}{w(x)}\right|\leqslant C(\Omega,N)\text{ pour tout }x\in N.$$

Selon l'hypothèse faite sur N, nous considérons deux cas :

Le premier cas : N est borné et dist$(N,\Omega)>0$. Fixons $B_r(0)\subset\subset\Omega$ de sorte que $N\subset\mathbb{R}^d\backslash B_{2r}(0)$, soit $x\in N$ alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathcal{N}_s w(x)}{w(x)}\right| &\leqslant |x|^{\alpha_0}\int_{B_r(0)}\frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{d+2s}}\,dy+|x|^{\alpha_0}\int_{\Omega\backslash B_r(0)}\frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{d+2s}}\,dy\\ &= L_1+L_2.\end{aligned}$$

Pour estimer L_1, posons $y=|y|y'$ et $x=|x|x'$, on a

$$\begin{aligned}L_1 &= |x|^{\alpha_0}\int_{B_r(0)}\frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{d+2s}}\,dy=|x|^{\alpha_0}\int_{B_r(0)}\frac{\Big||x|^{-\alpha}-|y|^{-\alpha}\Big|}{|x-y|^{d+2s}}\,dy\\ &= |x|^{\alpha_0}\int_0^r\Big||x|^{-\alpha}-\rho^{-\alpha}\Big|\rho^{d-1}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{||x|x'-\rho y'|^{d+2s}}\right)d\rho\end{aligned}$$

où $\rho = |y|$. Soit $\sigma = \frac{\rho}{|x|}$, en utilisant le même calcul radial présenté dans [49], on obtient

$$L_1 = \frac{1}{|x|^{2s}} \int_0^{\frac{r}{|x|}} (1 - \sigma^{\alpha_0}) \sigma^{d-1-\alpha_0} K(\sigma) d\sigma$$

où

$$K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{d-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{d+ps}} = 2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{d-2}(\theta)}{(1 - 2\sigma\cos(\theta) + \sigma^2)^{\frac{d+2s}{2}}} d\theta.$$

Comme $|x| > 2r$, alors $L_1 \leqslant \frac{C}{r^{2s}}$. Estimons maintenant L_2, on a

$$\begin{aligned} L_2 &= C(N, \Omega, r) \int_{\Omega \backslash B_r(0)} \frac{1}{|x-y|^{d+2s-1}} dy \leqslant \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{d+2s}} dy \\ &\leqslant C(N, \Omega, r). \end{aligned}$$

Donc $\left|\frac{\mathcal{N}_s w(x)}{w(x)}\right| \leqslant C$, ce qui montre l'affirmation dans ce cas.

Le deuxième cas : N est borné et dist$(N, \Omega) = 0$. Il suffit d'estimer L_2. On a

$$L_2 \leqslant C(N, \Omega, r) \int_{\Omega \backslash B_r(0)} \frac{1}{|x-y|^{d+2s-1}} dy \leqslant \int_{B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{d+2s}} dy$$

où $R > 0$, donc

$$L_2 \leqslant C(N, \Omega, r) \int_0^{|x|} \sigma^{-2s} d\sigma \leqslant \frac{C(N, \Omega, r)}{1 - 2s} |x|^{1-2s} \leqslant C(N, \Omega, r, s).$$

Par conséquent, dans tous les cas, nous avons prouvé que $\left|\frac{\mathcal{N}_s w(x)}{w(x)}\right| \leqslant C$.

Revenons maintenant au Lemme 3.3, par le fait que N est borné, on déduit (3.3.26).

■

Remarque 3.1. Par conséquent, nous concluons également que le problème (0.1.12) n'admet pas de solution.

Le résultat suivant donne une condition géométrique pour assurer que $\Lambda_N = \Lambda$.

Théorème 3.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de $\mathbb{R}^N$tel que $0 \in \Omega$. Posons $w(x) = |x|^{-\frac{d-2s}{2}}$ et supposons que $\mathcal{N}_s w(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in N$, alors $\Lambda_N = \Lambda$. De plus, le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u &=& \Lambda_N \dfrac{u}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega, \\ u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D), u &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{array} \right. \tag{3.3.27}$$

n'admet pas de solution.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{N}_s w(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in N$ et que $\Lambda_N < \Lambda$. Alors par le Théorème 3.3 il existe $u_1 \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ une solution positive du problème (3.3.27). Posons $v_1(x) = \dfrac{u_1(x)}{w(x)}$ alors, comme dans la preuve du Théorème 3.4, On aura

$$\begin{aligned}&\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |v_1(x)-v_1(y)|^2\, w(x)w(y)\, d\nu + \int_N \frac{u_1^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\, dx\\ &\qquad= \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_1(x)-u_1(y)|^2\, d\nu - \Lambda\int_\Omega \frac{u_1^2(x)}{|x|^{2s}}dx.\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_1(x)-u_1(y)|^2\, d\nu = \Lambda_N\int_\Omega \frac{u_1^2(x)}{|x|^{2s}}dx,$$

Par suite, on déduit que

$$\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |v_1(x)-v_1(y)|^2\, w(x)w(y)\, d\nu + \int_N \frac{u_1^2(x)}{w(x)}\mathcal{N}_s w(x)\, dx = 0.$$

Ainsi si $\mathcal{N}_s(w(x)) \geqslant 0$ pour tout $x \in N$ on obtient $v_1 = 0$ ce qui donne une contradiction. Le résultat est démontré. $\square$

Dans ce qui suit, nous donnons des exemples explicites vérifiant la condition géométrique du Théorème 3.5. Notons par $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ où

$$\Omega_1 = B_\varepsilon(0),\ \Omega_2 = \Big\{x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon \leqslant x_1 \leqslant A \text{ et } |(x_2, x_3, ..., x_d)| < \varepsilon\Big\},\ \Omega_3 = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| > A\Big\}.$$

et considérons

$$\begin{aligned} D &= \Big\{x \in \mathbb{R}^d\backslash\Omega, \varepsilon < |x| < \eta\Big\} \cup \Big\{x \in \mathbb{R}^d, \eta \leqslant x_1 \leqslant A \text{ et } \varepsilon < |(x_2, x_3, ..., x_d)| < m\Big\}\\ &\cup \Big\{x \in \mathbb{R}^d\, |x| > \beta\Big\},\end{aligned}$$

et

$$N = \Big\{x \in \mathbb{R}^d\backslash\{\Omega \cup D\}, \eta < |x| < A\Big\}.$$

Remarquons que $N \cap D = \emptyset$ et $\overline{N} \cup \overline{D} = \mathbb{R}^d\backslash\Omega$. Notre objectif est de montrer que $\Lambda_N = \Lambda$, pour ce faire, nous allons montrer l'existence d'un ε_0 de sorte que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, alors $\mathcal{N}_s w(x) \geqslant 0$

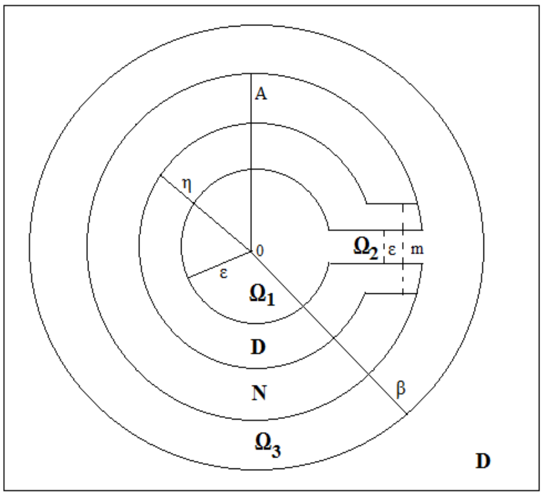

FIGURE 3.1 – Exemple 1

pour tout $x \in N$. Notons que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_s w(x) &= \int_{\Omega} \frac{(w(x)-w(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \int_{\Omega_1} \frac{(w(x)-w(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dy + \int_{\Omega_2} \frac{(w(x)-w(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dy + \int_{\Omega_3} \frac{(w(x)-w(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dy \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

L'idée principale est de choisir ε suffisamment petit pour avoir la condition. Comme $x \in N$, alors $\eta \leqslant |x| \leqslant A$.

On commence par l'estimation de J_1. Posons $y = |y|y'$ et $x = |x|x'$, on obtient

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\Omega_1} \frac{(w(x)-w(y))}{|x-y|^{d+2s}}\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{|x|^{-\alpha_0} - |y|^{-\alpha_0}}{|x-y|^{d+2s}}\,dy \\
&= \int_0^{\varepsilon} (|x|^{-\alpha_0} - \rho^{-\alpha_0})\rho^{d-1} \left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{||x|x' - \rho y'|^{d+2s}} \right) d\rho
\end{aligned}$$

où $\rho = |y|$. Let $\sigma = \frac{\rho}{|x|}$, alors, par le calcul radial présenté dans [49], on arrive à

$$J_1 = \frac{1}{|x|^{2s+\alpha_0}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{|x|}} (1 - \sigma^{-\alpha_0})\sigma^{d-1} K(\sigma)\,d\sigma$$

où

$$K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{d-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{d+ps}} = 2\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{d-2}(\theta)}{(1 - 2\sigma\cos(\theta) + \sigma^2)^{\frac{d+2s}{2}}}\,d\theta.$$

En choisissant $\varepsilon << \eta$, il en résulte que $\frac{\varepsilon}{|x|} \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta} << 1$, ainsi

$$|J_1| = \frac{1}{|x|^{\alpha_0+2s}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{|x|}} (1-\sigma^{\alpha_0})\sigma^{d-\alpha_0-1}K(\sigma)d\sigma = o(\varepsilon).$$

Nous traitons maintenant J_2. Sans perte de généralité, nous supposerons que $\varepsilon < \min\{\frac{\eta}{4}, \frac{m}{4}\}$, fixons $\varrho = \min\{\frac{\eta}{3}, \frac{m}{3}\}$ alors pour tout $x \in N$ et tout $y \in \Omega_2$ on a $|x-y| \geqslant \varrho$. Par suite

$$|J_2| \leqslant \int_{\Omega_2 \cap |x-y| \geqslant \varrho} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{d+2s}} dy \leqslant \frac{C}{\varrho^{d+2s}} \int_{\Omega_2} \Big| \eta^{-\alpha_0} - |y|^{-\alpha_0} \Big| dy.$$

Comme $|y|^{-\alpha_0} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, par le Théorème de convergence dominée on déduit que $|J_2| = o(\varepsilon)$.

Pour l'estimation de J_3, par le même calcul radial utilisé pour estimer J_1, on obtient

$$J_3 = \frac{1}{|x|^{\alpha_0+2s}} \int_{\frac{A}{|x|}}^{\beta} (\sigma^{\alpha_0}-1)\sigma^{d-\alpha_0-1}K(\sigma)d\sigma \geqslant \frac{1}{A^{\alpha_0+2s}} \int_2^{\beta} (\sigma^{\alpha_0}-1)\sigma^{d-\alpha_0-1}K(\sigma)d\sigma.$$

En choisissant $\beta >> 2$ et en combinant les estimations précédentes on conclut que

$$\mathcal{N}_s(w(x)) \geqslant \frac{1}{A^{\alpha_0+2s}} \int_2^{\beta} (\sigma^{\alpha_0}-1)\sigma^{d-\alpha_0-1}K(\sigma)d\sigma - o(\varepsilon).$$

d'ou le résultat.

Un deuxième exemple est le suivant.

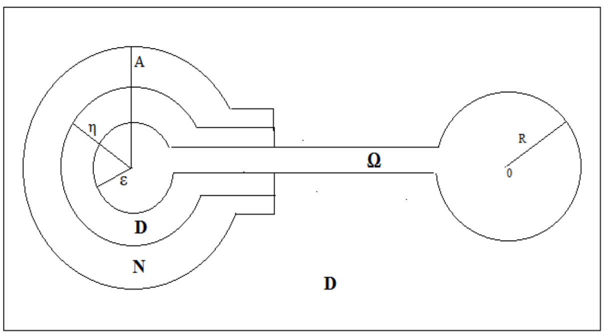

FIGURE 3.2 – Exemple 2

3.3.2 Le cas $\Lambda_N < \Lambda$

Dans ce qui suit, nous allons étudier le cas $\Lambda_N < \Lambda$, ainsi Λ_N est atteinte et se comporte comme une valeur propre. Commençons par donner quelques cas où la constante Λ_N est atteinte. On dit que Ω est un domaine admissible si Ω est de classe $C^{1,1}$ et satisfait la condition de la sphère extérieure. Maintenant, on considère une suite d'ensemble ouvert $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $N_k \cap D_k = \emptyset$ et $\overline{N_k} \cup \overline{D_k} = \mathbb{R}^d \backslash \Omega$. En utilisant les mêmes arguments que ceux présentés dans [62], on obtient.

Théorème 3.6. Soit Ω un domaine admissible, $0 < s < \frac{1}{2}$. Supposons que pour tout $R > 0$ on a $\lim\limits_{k\to\infty} |D_k \cap B_R| = 0$. Alors $\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda_k = 0$ et, par conséquent, il existe $k_0 \in I\!N$ tel que Λ_k est atteinte pour tout $k \geqslant k_0$.

Démonstration. Pour $\rho > 0$ fixé, on définit

$$\lambda_{\rho,k} = \inf_{\{u\in E^s(\Omega,D),||u||\neq 0\}} \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^2\,d\nu}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}+\rho}dx},$$

Il est clair $\Lambda_k \leqslant \lambda_{\rho,k}$ pour tout $\rho > 0$. De plus, on sait que, voir [62], $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{\rho,k} = 0$ et le résultat en découle. $\square$

Dans le cas $\frac{1}{2} \leqslant s < 1$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.7. Supposons que $s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ et que les hypothèses du Théorème 3.6 sont satisfaites. Supposons de plus que pour tout $\delta > 0$, on a $dist(D_k, \Omega) > \delta$, $\forall k \geqslant k_0$,. Alors $\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda_k = 0$.

Notons $\bar{u} \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$, le minimum de (3.3.9) normaliser de sorte que $\int\limits_\Omega \frac{\bar{u}^2}{|x|^{2s}}dx = 1$, alors $\bar{u}$ est solution du problème au valeurs propres

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} \quad \text{dans } \Omega, \\ u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D), u &> 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

avec $\lambda = \Lambda_N$. Le résultat suivant montre que Λ_N est une valeur propre simple isolée.

Théorème 3.8. Supposons que $\Lambda_N < \Lambda$, alors

1. Si v est une solution du problème (3.3.28) avec $\lambda = \Lambda_N$, alors $v = C\bar{u}$.

2. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (\Lambda_N, \Lambda_N + \varepsilon)$, le problème (3.3.28) n'admet pas de solution non triviale.

Démonstration. Nous commençons par prouver le premier point. Supposons que v est une solution telle que $v \neq \bar{u}$. Si $v \geqslant 0$, alors par l'inégalité de Picone, Théorème 3.1, on déduit que $v = C\bar{u}$ pour une constante $C \geqslant 0$.

Supposons maintenant que v changer de signe, alors en utilisant v_+ (resp. v_-) comme fonction test dans l'équation satisfaite par v, on obtient

$$\Lambda_N \int_\Omega \frac{v_\pm^2(x)}{|x|^{2s} + \varepsilon} dx \leqslant \frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |v \pm (x) - v \pm (y)|^2 \, d\nu.$$

Par suite, $v\pm$ (resp. v_-) est un minimum de (3.3.9), ainsi une solution de (3.3.28) avec $\lambda = \Lambda_N$. Alors il existe une constante $C_\pm \geqslant 0$ tel que $v_\pm = C_\pm \bar{u}$ par conséquent $v = v_+ - v_- = (C_+ - C_-)\bar{u}$.

Montrons que Λ_N est isolé. Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\}_n \subset (\Lambda_N, \infty) \times \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que $\lambda_n \downarrow \Lambda_N$ et u_n est solution du problème (3.3.28) avec $\lambda = \lambda_n$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\int\limits_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}} dx = 1$ et $\lambda_n < \Lambda_0 < \Lambda_N$ pour tout n. Ainsi

$$\frac{a_{d,s}}{2} \int\int_{D_\Omega} (u_n(x) - u_n(y))^2 d\nu = \lambda_n \leqslant \Lambda.$$

Comme $\{u_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ il existe $\hat{u} \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ tel que $u_n \rightharpoonup \hat{u}$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, $u_n \to \hat{u}$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < 2^*$ et p.p. dans $\Omega \cup D$. On peut montrer aisément que $\hat{u}$ est solution de (3.3.28) avec $\lambda = \Lambda_N$. En utilisant l'étape précédente, nous obtenons l'existence d'une constante $\hat{C}$ tel que $\hat{u} = \hat{C}\bar{u}$.

Maintenant, en utilisant $\bar{u}$ comme fonction test dans l'équation satisfaite par u_n on obtient

$$\int\limits_\Omega \frac{u_n \bar{u}}{|x|^{2s}} dx = 0 \text{ pour tout } n, \tag{3.3.29}$$

Par suite

$$\int\limits_\Omega \frac{\hat{u}\bar{u}}{|x|^{2s}} dx = 0. \tag{3.3.30}$$

Comme $\hat{u} = \hat{C}\bar{u}$, il en résulte que $\hat{C} = 0$, ainsi $\hat{u} = 0$.

Utilisons u_n comme fonction test, par l'inégalité de Kato on obtient

$$(-\Delta)^s |u_n| \leqslant \lambda_n \frac{|u_n|}{|x|^{2s}} \text{ dans } \Omega.$$

Comme $\lambda_n \leqslant \Lambda_0$, on déduit que, voir [7],

$$|u_n(x)| \leqslant C|x|^{-\alpha} \text{ dans } B_\eta(0) \subset\subset \Omega, \text{ pour tout } n, \tag{3.3.31}$$

où $\alpha_0 > 0$ et Λ_0 satisfont

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(\alpha_0) = \frac{2^{2s}\,\Gamma(\frac{N+2s+2\alpha_0}{4})\Gamma(\frac{N+2s-2\alpha_0}{4})}{\Gamma(\frac{N-2s+2\alpha_0}{4})\Gamma(\frac{N-2s-2\alpha_0}{4})}. \tag{3.3.32}$$

Comme $\Lambda_0 < \Lambda$, alors $\alpha_0 < \frac{N-2s}{2}$, par suite $\dfrac{|u_n|^2}{|x|^{2s}} \leqslant C|x|^{-2\alpha_0-2s} \in L^1(B_\eta(0))$. Par le Théorème de convergence dominée on obtient

$$1 = \int\limits_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}} dx \to \int\limits_\Omega \frac{\hat{u}^2}{|x|^{2s}} dx,$$

une contradiction avec le fait que $\hat{u} = 0$, ce qui donne le résultat. $\square$

3.4 Problème mixte semi-linéaire avec un poids de Hardy

Dans cette section, nous allons étudier comme conséquence directe des propriétés de Λ_N, quelques problèmes elliptiques semi-linéaires avec un terme de Hardy. Plus précisément, nous considérons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} + u^p & \text{dans } \Omega, \\ u &> 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.4.33}$$

où $1 < p \leqslant 2^* - 1$ et $\lambda < \Lambda_N$.

3.4.1 Problèmes sous-critiques, $1 < p < 2^* - 1$

Le résultat suivant est une conséquence direct d'un résultat classique de bifurcation dû a Rabinowitz, voir [67]

Théorème 3.9. Supposons que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées. Alors le problème (3.4.33) admet une branche non bornée Σ de solution positive qui bifurque de $(0, \Lambda_N)$.

Supposons maintenant que $\lambda \in (\Lambda_N, \Lambda)$. On définit par

$$I_{\lambda,p} \quad = \quad \inf_{\{\phi\in\mathbb{E}^s(\Omega,D),\phi\neq 0\}} \frac{\dfrac{a_{d,s}}{2}\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |\phi(x)-\phi(y)|^2\,d\nu - \lambda\int_\Omega \frac{\phi^2}{|x|^{2s}}\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\phi|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}}}, \tag{3.4.34}$$

où $p \in (1, 2_s^* - 1)$, on a $I_{\lambda,p} < 0$ et nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.10. Supposons que $\lambda \in (\Lambda_N, \Lambda)$ et $1 < p < 2_s^* - 1$. Alors $I_{\lambda,p}$ est finie et atteinte. Ainsi le problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} (-\Delta)^s u + u^p &=& \lambda\dfrac{u}{|x|^{2s}} & \text{dans } \Omega,\\ u &>& 0 & \text{dans } \Omega,\\ \mathcal{B}_s u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d\backslash\Omega, \end{array}\right. , \tag{3.4.35}$$

admet une solution positive.

Démonstration. La démonstration est structurée en deux étapes.

La première étape : $|I_{\lambda,p}| < \infty$.

Soit $u \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que $\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx = 1$, soit $\psi \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ une fonction cut-off telle que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ et $\psi = 1$ dans $B_{\rho/4}(0)$ pour un $\rho > 0$ suffisamment petit, alors $u = \psi u + (1-\psi)u = u_1 + u_2$. Comme $p + 1 > 2$, alors

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}dx = \int_\Omega \frac{u_1^2}{|x|^{2s}}dx + C(\Omega). \tag{3.4.36}$$

D'autre part on a

$$\begin{array}{rcl} (u(x)-u(y))^2 &=& (u_1(x)-u_1(y))^2 + (u_2(x)-u_2(y))^2\\ &+& 2(u_1(x)-u_1(y))(u_2(x)-u_2(y)). \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2 d\nu &=& \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_1(x)-u_1(y))^2 d\nu + \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_2(x)-u_2(y))^2 d\nu\\ &+& 2\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_1(x)-u_1(y))(u_2(x)-u_2(y))d\nu. \end{array} \tag{3.4.37}$$

Nous commençons par estimer la dernière intégrale. Par un calcul direct on obtient

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_1(x)-u_1(y))(u_2(x)-u_2(y))d\nu &= \int_\Omega\int_\Omega(u_1(x)-u_1(y))(u_2(x)-u_2(y))d\nu\\ &\quad +2\int_{\Omega^c}\int_\Omega(u_1(x)-u_1(y))(u_2(x)-u_2(y))d\nu\\ &= K_1+K_2.\end{aligned}$$

Prenons en considération le fait que

$$\begin{aligned}\Big(u_1(x)-u_1(y)\Big)\Big(u_2(x)-u_2(y)\Big) &= \psi(x)\Big(1-\psi(x)\Big)\Big(u(x)-u(y)\Big)^2\\ &\quad +\Big(1-2\psi(x)\Big)u(y)\Big(u(x)-u(y)\Big)\Big(\psi(x)-\psi(y)\Big)\\ &\quad -u^2(y)\Big(\psi(x)-\psi(y)\Big)^2,\end{aligned}$$

l'inégalité de Young donne alors

$$K_1 \geqslant -\varepsilon\int_\Omega\int_\Omega(u(x)-u(y))^2d\nu - C(\varepsilon)\int_\Omega\int_\Omega u^2(y)(\psi(x)-\psi(y))^2d\nu.$$

Notons que

$$\int_\Omega\int_\Omega u^2(y)(\psi(x)-\psi(y))^2d\nu \leqslant C\int_\Omega\int_\Omega \frac{u^2(y)}{|x-y|^{d+2s-2}}dxdy \leqslant C\int_\Omega u^2(y)dy \leqslant C(\Omega),$$

où on a utilisé le fait que $\sup_{\{x\in\Omega\}}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+2s-2}}dx \leqslant C(\Omega)$. Ainsi

$$K_1 \geqslant -C(\Omega,\varepsilon) - \varepsilon\int_\Omega\int_\Omega(u(x)-u(y))^2d\nu. \tag{3.4.38}$$

Nous estimons maintenant K_2. On a

$$\begin{aligned}K_2 &= \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi(x)u(x)\Big((1-\psi(x))u(x)-u(y)\Big)d\nu\\ &= \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi(x)(1-\psi(x))u^2(x)d\nu - \int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi(x)u(x)u(y)d\nu\end{aligned}$$

Comme

$$\sup_{\{x\in B_{2\rho}(0)\}}\int_{\Omega^c}\frac{dy}{|x-y|^{d+2s}}\leqslant C(\Omega, B_{2\rho}(0)), \tag{3.4.39}$$

alors

$$\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi(x)(1-\psi(x))u^2(x)d\nu\leqslant C\int_{B_{2\rho}(0)}u^2(x)dx\leqslant C(\Omega, B_{2\rho}(0)).$$

Maintenant, par l'inégalité de Young et (3.4.39), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi(x)u(x)u(y)d\nu &\leqslant \varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}u^2(y)d\nu + C(\varepsilon)\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}\psi^2(x)u^2(x)d\nu\\ &\leqslant \varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}u^2(y)d\nu + C(\Omega, B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned}$$

Comme $u^2(y)\leqslant 2(u(x)-u(y))^2+2u^2(x)$, alors

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}u^2(y)d\nu &\leqslant 2\varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}(u(x)-u(y))^2\,d\nu + 2\varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}u^2(x)d\nu\\ &\leqslant 2\varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}(u(x)-u(y))^2\,d\nu + C(\Omega, B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned}$$

Ainsi

$$K_2\geqslant -2\varepsilon\int_{\Omega^c}\int_{B_{2\rho}(0)}(u(x)-u(y))^2\,d\nu - C(\Omega, B_{2\rho}(0),\varepsilon). \tag{3.4.40}$$

En combinant les estimations (3.4.36), (3.4.37), (3.4.38) et (3.4.40), on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx &\geqslant \left(\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_1(x)-u_1(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{u_1^2}{|x|^{2s}}\,dx\right)\\ &\quad+\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_2(x)-u_2(y))^2\,d\nu\\ &\quad-3\varepsilon\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu - C(\Omega, B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned}$$

Comme $u_1\in H^s_0(\Omega)$ et $\lambda<\Lambda$, alors

$$\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx\geqslant(\Lambda-\lambda)\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu \quad &- \quad \lambda\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx \\ &\geqslant C(\lambda,\Lambda)\Big(\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_2(x)-u_2(y))^2\,d\nu+\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_1(x)-u_1(y))^2\,d\nu\Big)\\ &-3\varepsilon\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu - C(\Omega,B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned}$$

En choisissant ε suffisamment petit, il en résulte que

$$\begin{aligned}\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu \quad &- \quad \lambda\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^{2s}}\,dx \\ &\geqslant C(\lambda,\Lambda,\varepsilon)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u(x)-u(y))^2\,d\nu - C(\Omega,B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

Par conséquent $|I_{\lambda,p}|<\infty$.

La deuxième étape : $I_{\lambda,p}$ est atteinte. On définit

$$I_{\lambda,n}=\inf_{\{\phi\in\mathbb{E}^s(\Omega,D),\phi\neq0\}}\frac{\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}|\phi(x)-\phi(y)|^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{\phi^2}{|x|^{2s}+\frac{1}{n}}\,dx}{\Big(\int_\Omega|\phi|^{p+1}dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}},$$

donc $I_{\lambda,n}\downarrow I_{\lambda,p}$ quand $n\to\infty$, par suite $I_{\lambda,n}<0$ pour $n\geqslant n_0$. Comme $p+1<2^*_s$, alors en utilisant un argument variationnel, nous obtenons que $I_{\lambda,n}$ est atteinte. Par suite, il existe une suite $u_n\in\mathbb{E}^s(\Omega,D)$ vérifiant

$$(P_n)\equiv\left\{\begin{array}{rcll}(-\Delta)^s u_n+\lambda\dfrac{u_n}{|x|^{2s}+\frac{1}{n}} &=& I_{\lambda,n}u_n^p & \text{dans }\Omega,\\ u_n &\geqslant& 0 & \text{dans }\Omega,\\ \mathcal{B}_s u_n &=& 0 & \text{dans }\mathbb{R}^d\backslash\Omega,\end{array}\right.$$

avec $\|u_n\|_{L^s(\Omega)}=1$ Nous affirmons que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{E}^s(\Omega,D)$. En effet, comme

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{u_n^2}{|x|^{2s}+\frac{1}{n}}\,dx \;\geqslant\; \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{u_n^2}{|x|^{2s}}\,dx,$$

alors, par (3.4.41), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu \quad &- \quad \lambda\int\limits_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}+\frac{1}{n}}\,dx \\ &\geqslant \quad C(\lambda,\Lambda,\varepsilon)\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu - C(\Omega,B_{2\rho}(0),\varepsilon).\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu \leqslant C$ pour tout n et l'affirmation est démontrée.

Par conséquent, nous obtenons l'existence de $u_0\in\mathbb{E}^s(\Omega,D)$ telle que $u_n\rightharpoonup u_0$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega,D)$ et fortement dans $L^{p+1}(\Omega)$. Alors $\|u_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1$ et donc $u_0\not\equiv 0$. Notons, de plus, que u_0 est solution faible de (3.4.35).

Nous affirmons maintenant que $\dfrac{u_n^2}{|x|^{2s}}\to\dfrac{u_0^2}{|x|^{2s}}$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Posons $w_n=u_n-u_0$ alors $w_n\rightharpoonup 0$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega,D)$ et que $w_n\to 0$ fortement dans $L^{p+1}(\Omega)$.

Comme dans l'étape précédente, on a

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(w_n(x)-w_n(y))^2\,d\nu \geqslant \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big((\psi w_n)(x)-(\psi w_n)(y)\Big)^2\,d\nu+o(1)$$

et

$$\int\limits_\Omega\frac{w_n^2}{|x|^2+\frac{1}{n}}dx=\int\limits_\Omega\frac{(\psi w_n)^2}{|x|^2+\frac{1}{n}}dx+o(1).$$

En prenant en considération le fait que $w_n\in H_0^s(\Omega)$ et en rappelant les équations satisfaites par u_0 et u_n, on obtient

$$\begin{aligned} o(1) \quad &\geqslant \quad \frac{a_{d,s}}{2}\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(w_n(x)-w_n(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\,dx \\ &\geqslant \quad \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}((\psi w_n)(x)-(\psi w_n)(y))^2\,d\nu-\lambda\int\limits_\Omega\frac{(\psi w_n)^2}{|x|^{2s}+\frac{1}{n}}dx+o(1) \\ &\geqslant \quad (\Lambda-\lambda)\int\limits_\Omega\frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\,dx+o(1).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int\limits_\Omega\frac{w_n^2}{|x|^{2s}}\,dx=o(1)$ et l'affirmation en découle. En combinant les estimations ci-dessus, nous obtenons $u_n\to u_0$ fortement dans $\mathbb{E}^s(\Omega,D)$, par suite $I_{\lambda,p}$ est atteinte par u_0. Par conséquent, cu_0 est solution du problème (3.4.35), où c est une constante positive, et le Théorème est démontré. $\square$

3.4.2 Problème doublement critique

Dans cette section, nous étudions l'existence et la non existence du problème doublement critique suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &=& \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} + u^{2_s^*-1} & \text{dans } \Omega, \\ u &>& 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.4.42}$$

où $\lambda \in (0, \Lambda_N)$. Si $\Omega = I\!R^d$, le problème (3.4.42) est lié à la constante suivante

$$S_\lambda = \inf_{\{u \in H^s(\mathbb{R}^d), ||u|| \neq 0, \, ||u||_{2_s^*}=1\}} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^2 \, d\nu - \lambda \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}} dx. \tag{3.4.43}$$

On sait que, voir [46], la constante S_λ est indépendante de Ω et elle est atteinte si et seulement si $\Omega = I\!R^d$. De la même manière, nous considérons la constante $T_{\lambda,N}$ définie par

$$T_{\lambda,N} = \inf_{\{u \in E^s(\Omega,D), ||u|| \neq 0, \, ||u||_{2_s^*}=1\}} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^2 \, d\nu - \lambda \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}} dx, \tag{3.4.44}$$

alors si $T_{\lambda,N}$ est atteinte alors le problème (3.4.42) possède une solution non triviale. Nous allons montrer le résultat suivant

Théorème 3.11. Supposons que $T_{\lambda,N} < \min\{S_\lambda, S_N\}$, alors $T_{\lambda,N}$ est atteinte. De plus, le problème (3.4.42) admet une solution non triviale.

Démonstration. Rappelons que la constante de Sobolev S_N est définie dans la Proposition 3.5. Comme $\lambda < \Lambda_N$, alors $T_{\lambda,N} \geqslant (1 - \frac{\lambda}{\Lambda_N}) S_N > 0$.

Soit $\{u_n\}_n \subset \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ une suite minimisante de $T_{\lambda,N}$ telle que $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^{2_s^*} dx = 1$, alors $\{u_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, et

$$\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^2 \, d\nu - \lambda \int_\Omega \frac{u_n^2(x)}{|x|^{2s}} dx \to T_{\lambda,N}.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons choisir $u_n \geqslant 0$ dans $I\!R^d$. Ainsi, nous obtiendrons l'existence de $\bar{u} \in \mathbb{E}^s(\Omega, D)$ telle que $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ et, modulo une sous suite, $u_n \to \bar{u}$ fortement dans $L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < 2_s^*$ et $u_n \to \bar{u}$ p.p. dans Ω. En utilisant le principe variationnel d'Ekeland on obtient

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_n - \lambda \dfrac{u_n}{|x|^{2s}} &=& T_{\lambda,N} \, u_n^{2_s^*-1} + o(1) & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}_s u_n &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.4.45}$$

Comme $\bar{u} \neq 0$, alors $\bar{u}$ est solution de (3.4.42). Montrons que $\bar{u} \neq 0$. En effet, supposons que $\bar{u} = 0$ et soit $\psi \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ une fonction telle que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ et $\psi = 1$ dans $B_{\rho/4}(0)$ pour $\rho > 0$ suffisamment petit. Nous affirmons que

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u_n\, u_n \psi^2 dx = \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \Big((\psi u_n)(x) - (\psi u_n)(y) \Big)^2 d\nu + o(1). \tag{3.4.46}$$

Notons que

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u_n\, u_n \psi^2 dx = \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_n(x) - u_n(y)) \Big((\psi^2 u_n)(x) - (\psi^2 u_n)(y) \Big) d\nu + o(1),$$

et comme

$$\begin{aligned}
(u_n(x) - u_n(y))\,((\psi u_n)(x) - (\psi u_n)(y)) \quad &- \quad ((\psi u_n)(x) - (\psi u_n)(y))^2 \\
&= \quad -u_n(x) u_n(y) (\psi(x) - \psi(y))^2,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-\Delta)^s u_n\, u_n \psi^2 dx \quad &= \quad \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \Big((\psi u_n)(x) - (\psi u_n)(y) \Big)^2 d\nu \\
&- \quad \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} u_n(x) u_n(y) (\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu.
\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} u_n(x) u_n(y) (\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu \quad &= \quad \int_\Omega \int_\Omega u_n(x) u_n(y) (\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu \\
&+ \quad 2 \int_{\Omega^c} \int_\Omega u_n(x) u_n(y) (\psi(x) - \psi(y))^2 d\nu = K_{1n} + 2K_{2n}.
\end{aligned}$$

Nous commençons par l'estimation de K_{1n}.

$$\begin{aligned}
K_{1n} \quad &= \quad C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{u_n(x) u_n(y)}{|x - y|^{d+2s-2}} dx dy \\
&\leqslant \quad 2C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{u_n^2(x)}{|x - y|^{d+2s-2}} dx dy + 2C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{u_n^2(y)}{|x - y|^{d+2s-2}} dx dy.
\end{aligned}$$

Comme $\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{d+2s-2}} \leqslant C(\Omega)$ et $\sup_{y\in\Omega} \int_\Omega \frac{dx}{|x-y|^{d+2s-2}} \leqslant C(\Omega)$, on obtient

$$K_{1n} \leqslant 4C(\Omega) \int_\Omega u_n^2(x) dx = o(1).$$

Maintenant, nous traitons K_{2n}. On a

$$\begin{aligned} K_{2n} &= \int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n(x)u_n(y)\psi^2(x)d\nu \\ &\leqslant \left(\int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n^2(x)d\nu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n^2(y)d\nu\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

or $\displaystyle\int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n^2(x)d\nu = o(1)$ alors en utilisant le fait que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$ et que $u^2(y) \leqslant 2(u(x)-u(y))^2 + 2u^2(x)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n^2(y)d\nu &\leqslant 2\int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)}(u_n(x)-u_n(y))^2\,d\nu + 2\int_{\Omega^c}\int_{B_\rho(0)} u_n^2(x)d\nu \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

Par conséquent $K_{2n} = o(1)$. En combinant l'estimation ci-dessus et en revenant à (3.4.47), il en découle que (3.4.46) est vérifiée, ce qui montre l'affirmation. Par suite en utilisant $u_n\psi^2$ comme fonction test dans (3.4.45) on déduit que

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big((\psi u_n)(x)-(\psi u_n)(y)\Big)^2 d\nu - \int_\Omega \frac{(\psi u_n)^2}{|x|^{2s}}dx &= T_{\lambda,N}\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi^2 dx + o(1) \\ &\leqslant T_{\lambda,N}\left(\int_\Omega (\psi\, u_n)^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} + o(1). \end{aligned}$$

Posons $u_{1n} = u_n\psi$, alors $u_{1n} \in H_0^s(\Omega)$. Si pour une sous suite de $\{u_n\}_n$, on a $\int_\Omega u_{1n}^{2_s^*}dx \geqslant C$, alors

$$S_\lambda \leqslant \frac{\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega}(u_{1n}(x)-u_{1n}(y))^2\,d\nu - \int_\Omega \frac{u_{1n}^2}{|x|^{2s}}dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_{1n}^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}}} \leqslant T_{\lambda,N} + o(1).$$

Donc $S_\lambda \leqslant T_{\lambda,N}$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse principale. Par suite $\displaystyle\int_\Omega u_{1n}^{2_s^*}dx \to 0$ quand $n\to\infty$ et donc $\displaystyle\int_\Omega u_n^{2_s^*}(1-\psi)^{2_s^*}dx \to 1$ quand $n \to \infty$. Posons $\varrho = 1-\psi$, on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u_n\, u_n \varrho^2 dx = \int\int_{\mathcal{D}_\Omega}\Big((\varrho^2 u_n)(x) - (\varrho^2 u_n)(y)\Big)^2 d\nu + o(1), \tag{3.4.48}$$

et

$$\int\limits_{\Omega} \frac{(\varrho u_n)^2}{|x|^{2s}} dx = o(1).$$

En utilisant $u_n \varrho^2$ comme fonction test dans (3.4.45) on déduit que

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} \Big((\varrho^2 u_n)(x) - (\varrho^2 u_n)(y) \Big)^2 d\nu &= T_{\lambda,N} \int\limits_{\Omega} u_n^{2_s^*} \varrho^2 dx + o(1) \\
&\leqslant T_{\lambda,N} \Big(\int\limits_{\Omega} (\varrho\, u_n)^{2_s^*} dx \Big)^{\frac{2}{2_s^*}} + o(1).
\end{aligned}$$

Posons $u_{2n} = u_n \varrho$, il en résulte que

$$S_N \leqslant \frac{\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_\Omega} (u_{2n}(x) - u_{2n}(y))^2\, d\nu}{\Big(\displaystyle\int\limits_{\Omega} u_{2n}^{2_s^*} dx \Big)^{\frac{2}{2_s^*}}} \leqslant T_{\lambda,N} + o(1).$$

Ainsi $S_N \leqslant T_{\lambda,N}$ ce qui est une contradiction. Par conséquent, $u_0 \neq 0$ et u_0 est solution du problème (3.4.42). Montrons maintenant que $T_{\lambda,N}$ est atteinte par u_0. En effet, soit

$$Q_{\lambda,N}(u) \equiv \int\int_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x) - u(y)|^2\, d\nu - \lambda \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}} dx,$$

comme $\lambda < \Lambda_N$, alors $Q_{\lambda,N}$ définie une norme équivalente de $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, il suffit donc de montrer que $Q_{\lambda,N}(u_n - u_0) \to 0$ quand $n \to \infty$. Rappelons que $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $\mathbb{E}^s(\Omega, D)$, alors

$$Q_{\lambda,N}(u_n) = Q_{\lambda,N}(u_0) + Q_{\lambda,N}(u_n - u_0) + o(1). \tag{3.4.49}$$

De la même manière, en utilisant le Lemme de Brezis-Lieb, on obtient

$$||u_n||_{L^{2_s^*}(\Omega)} = ||u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)} + ||u_n - u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)} + o(1).$$

Comme $Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)\geqslant S_{\lambda,N}||u_n-u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)}^{\frac{2}{2_s^*}}$, alors

$$\begin{aligned}\frac{Q_{\lambda,N}(u_0)}{||u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)}^{\frac{2}{2_s^*}}} &= \frac{Q_{\lambda,N}(u_n)-Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)+o(1)}{\left(||u_n||_{L^{2_s^*}(\Omega)}-||u_n-u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)}^{\frac{2}{2_s^*}}\right)^{\frac{2}{2_s^*}}}\\ &\leqslant S_{\lambda,N}\frac{Q_{\lambda,N}(u_n)-Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)+o(1)}{\left(Q_{\lambda,N}^{\frac{2_s^*}{2}}(u_n)-Q_{\lambda,N}^{\frac{2_s^*}{2}}(u_n-u_0)+o(1)\right)^{\frac{2}{2_s^*}}}.\end{aligned} \tag{3.4.50}$$

Si $\limsup_{n\to\infty}Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)\neq 0$, par (3.4.49), on arrive à

$$\limsup_{n\to\infty}Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)=S_{\lambda,N}-Q_{\lambda,N}(u_0).$$

revenons à (3.4.50), il en résulte

$$S_{\lambda,N}\leqslant\frac{Q_{\lambda,N}(u_0)}{||u_0||_{L^{2_s^*}(\Omega)}^{\frac{2}{2_s^*}}}<S_{\lambda,N},$$

une contradiction. Par conséquent $\limsup\limits_{n\to\infty}Q_{\lambda,N}(u_n-u_0)=0$ et alors u_0 est un minimum $T_{\lambda,N}$. □

Chapitre 4

Sur la conjecture de Lazer-McKenna fractionnaire

Ce chapitre est le développement de l'article [4]

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème de type Ambrosetti-Prodi dans un cadre fractionnaire. Autrement dit, nous considérons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= g(u) - \sigma\phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \text{ P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \qquad s \in (0,1), \tag{4.1.2}$$

avec

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}, \tag{4.1.3}$$

est une constante de normalisation, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine Lipschitzien borné, $\sigma > 0$ et ϕ_1 la première fonction propre positive du Laplacien fractionnaire avec condition de Dirichlet, g est continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = \mu > \lambda_1 > \lim_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{t} = \eta.$$

Notre objectif est de comprendre la structure de l'ensemble de solutions quand σ est assez grand. Nos résultats donnent une réponse affirmative à une conjecture dû a Lazer et Mackenna, un résultat qui montre l'existence d'une infinité de solutions lorsque $\sigma \to \infty$. Nous étudions dans ce qui suit le cas où $g(u) = |u|^p$ avec $p \in (1, 2*_s - 1)$ avec $2^*_s = \frac{2N}{N-2s}$. Autrement dit, nous considérons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= |u|^p - \sigma\phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Posons $w_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ et $\varepsilon^{2s} = \sigma^{-\frac{p-1}{p}}$, alors w_ε est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s w_\varepsilon + w_\varepsilon^p &= \phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Les résultats de ce chapitre sont les suivants :

Un premier résultat d'existence

Théorème 4.1. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $p \in (1, 2^*_s - 1)$, le problème (4.1.5) possède une solution unique w_ε de sort que $0 < w_\varepsilon < \phi_1^{\frac{1}{p}}$, de plus, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $w_{\varepsilon_2} \leqslant w_{\varepsilon_1}$.

Une description exacte du comportement asymptotique de w_ε quand ε tend vers 0.

Théorème 4.2. Soit w_ε la solution de (4.1.5) obtenu ci-dessus, alors nous avons

$$w_\varepsilon \to \phi_1^{\frac{1}{p}} \text{ quand } \varepsilon \to 0 \tag{4.1.6}$$

uniformément sur chaque compact de Ω et

$$w_\varepsilon = \phi_1^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{2s} \frac{-(-\Delta)^s \phi_1^{\frac{1}{p}}}{\phi^{\frac{p-1}{p}}} + o(\varepsilon^{2s}) \tag{4.1.7}$$

où $\varepsilon^{-2s} o(\varepsilon^{2s}) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ uniformément sur chaque compact de Ω.

Un résultat de multiplicité de solutions qui donne une réponse positive à la conjecture de Lazer-Mackenna dans le cas fractionnaire. Soit u une solution du problème (4.1.4), posons $\breve{u}_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ avec $\varepsilon^{2s} = \sigma^{-\frac{p-1}{p}}$, alors $\breve{u}_\varepsilon$ est solution du problème (4.1.5). Posons maintenant

$v = w_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon$, alors v satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p w_\varepsilon^{p-1} v &= f_\varepsilon(x,v) \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

où

$$f_\varepsilon(x,t) = |t - w_\varepsilon|^p - w_\varepsilon^p + p w_\varepsilon^{p-1} t. \tag{4.1.9}$$

Le problème (4.1.8) admet une structure variationnelle dont la fonctionnelle d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(v) : &= \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v|^2 \, dx + p \int_\Omega w_\varepsilon^{p-1} v^2 dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x,v) dx \\ &= \frac{\varepsilon^{2s} a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy + p \int_\Omega w_\varepsilon^{p-1} v^2 dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x,v) dx, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

où

$$F_\varepsilon(x,t) := \int_0^t f_\varepsilon(x,r) dr = \frac{1}{p+1} |t - w_\varepsilon|^p (t - w_\varepsilon) + \frac{1}{p+1} w_\varepsilon^{p+1} - w_\varepsilon^p t + \frac{p}{2} w_\varepsilon^{p-1} t^2. \tag{4.1.11}$$

Théorème 4.3. Soit $k > 0$ un entier positif. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ le problème (4.1.8) admet une solution qui s'écrit sous la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi},$$

où $w_{\varepsilon,\xi} \in H_0^s(\Omega)$ satisfait

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon = o(1) \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

et $\dfrac{|\xi_{\varepsilon,i} - \xi_{\varepsilon,j}|}{\varepsilon} \to \infty$ quand $\xi_{\varepsilon,j}, \xi_{\varepsilon,i} \to \xi_j^* \in \Omega$ avec $\phi_1(\xi_j^*) = \max_{z \in \Omega} \phi_1(z)$.
où

$$\|u\|_\varepsilon = \sqrt{\langle u, u \rangle_\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \langle u, v \rangle_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon^{2s} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v + p w_\varepsilon^{p-1} uv \right) dx. \tag{4.1.12}$$

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.2 on démontre deux résultats importants, à savoir le Théorème 4.1 qui donne l'existence des solutions négatives dont l'existence est cruciale pour la constructions des solutions multi-pics et le Théorème 4.2 qui donne le comportement asymptotique des solutions négatives. La section 4.3 sera consacrée à la démonstration du Théorème 4.3. Nous donnons dans un premier temps certaines propriétés du profil limite et de l'opérateur linéarisé autour du profil. Ensuite, nous montrons quelques lemmes techniques dans la sous-section 4.3.3, et dans la section 4.3.5 nous développons la méthode de réduction et nous complétons la preuve du Théorème 4.3. Finalement, en appendice, nous prouvons quelques propriétés utiles du profil U, solution du problème (4.3.19), comme l'unicité et la non-dégénérescence.

4.2 Preuve du Théorème 4.1 et 4.2

Rappelons que le problème que nous allons étudier est le suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= |u|^p - \sigma\phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.2.13}$$

où $\sigma > 0$ et $1 < p < 2_s^* - 1$. Posons $w_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ et $\varepsilon^{2s} = \sigma^{-\frac{p-1}{p}}$, alors w_ε est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s w_\varepsilon + w_\varepsilon^p &= \phi_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.2.14}$$

4.2.1 Preuve du Théorème 4.1

Pour montrer l'existence, nous allons utiliser un argument de sur et sous solution. il est clair que $\underline{\vartheta} \equiv 0$ est une sous solution stricte du problème(4.2.14). Posons $\overline{\vartheta} \equiv \phi_1^{\frac{1}{p}}$, alors, comme $p > 1$, En utilisant une inégalité de type de Kato, voir [35], [33], nous obtenons

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \phi_1^{\frac{1}{p}} &\geqslant \varepsilon^{2s}\frac{1}{p}\phi_1^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta)^s\phi_1 \\ &\geqslant \frac{\lambda_1}{p}\varepsilon^{2s}\phi_1^{\frac{1}{p}} \geqslant 0 = \phi_1 - (\phi_1^{\frac{1}{p}})^p. \end{aligned}$$

Par suite

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s(\phi_1^{\frac{1}{p}}) + (\phi_1^{\frac{1}{p}})^p \geqslant \phi_1.$$

Ainsi $\overline{\vartheta}$ est une sur-solution du problème (4.2.14) et $\underline{\vartheta} < \overline{\vartheta}$ dans Ω. Posons $\mathcal{H}(x,s) = \phi_1(x) - s^p$, alors $\mathcal{H}$ et décroissante sur l'ensemble $[0, \phi_1^{\frac{1}{p}}]$ et par un argument de sous et sur-solution nous obtenons l'existence d'une solution w_ε de (4.2.14) de plus $0 < w_\varepsilon < \phi_1^{\frac{1}{p}}$. Nous affirmons que cette solution est unique. En effet, si w_1, w_2 sont deux solutions de (4.2.14), alors $w_1 - w_2$ est solution de

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s(w_1 - w_2) + w_1^p - w_2^p = 0, \;\; w_1 - w_2 \in H_0^s(\Omega).$$

En utilisant $(w_1 - w_2)_+$ comme fonction test, il en résulte que $(w_1 - w_2)_+ = 0$, de la même manière $(w_2 - w_1)_+ = 0$. Ce qui montre l'affirmation. Remarquons de plus que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, alors w_{ε_1} est une sur-solution de (4.2.14) avec $\varepsilon = \varepsilon_2$, ainsi $w_{\varepsilon_2} \leqslant w_{\varepsilon_1}$ par construction. Notons que w_ε est un point critique de la fonctionnelle J_ε définie par

$$J_\varepsilon(w) = \frac{\varepsilon^{2s} a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy - \int_\Omega H(x, w) dx$$

où $H(x,t) = \int_0^t h(x,\tau) d\tau$ et

$$h(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \geqslant \phi_1^{\frac{1}{p}}, \\ \phi_1(x) - t^p & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \phi_1^{\frac{1}{p}}, \\ \phi_1(x) & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Plus précisément w_ε est un minimum global de J_ε. Notons aussi que $\phi_1^{\frac{1}{p}}$ est un "falling zero" de h dans le sens où $h(x, \phi_1^{\frac{1}{p}}) = 0$ et la dérivée à gauche de h par rapport à t au point $\phi_1^{\frac{1}{p}}$ est négative.

4.2.2 Preuve du Théorème 4.2

Comme $0 \leqslant w_\varepsilon \leqslant \phi_1^{\frac{1}{p}}$ et du fait que la suite $\{w_\varepsilon\}_\varepsilon$ est croissante quand $\varepsilon \downarrow 0$, nous pouvons montrer que $w_\varepsilon \to \phi_1^{\frac{1}{p}}$ quand $\varepsilon \searrow 0$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$. De plus, comme $||w_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C$, où C est une constante indépendante de ε et par les mêmes arguments que ceux introduits dans [55], il en découle que w_ε converge, quand ε tend vers 0, vers $\phi_1^{\frac{1}{p}}$ uniformément sur tout compact de Ω.
Fixons maintenant $x_0 \in \Omega$ et soit $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que $B_\delta(x_0) \subset\subset \Omega$. Soit $\tilde{w} \in H_0^s(\Omega)$ telle que $\tilde{w} - w_\varepsilon \in H_0^s(B_\delta(x_0))$, alors $\tilde{w} = w_\varepsilon$ dans $\mathbb{R}^N \backslash B_\delta(x_0)$. Comme w_ε est un minimum global de J_ε, alors $J_\varepsilon(w_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(\tilde{w})$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{2s} a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|w_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy \quad &- \quad \textstyle\int_{B_\delta(x_0)} H(x, w_\varepsilon) dx \\ &\leqslant \quad \tfrac{\varepsilon^{2s} a_{N,s}}{2} \textstyle\iint_{D_\Omega} \frac{|\tilde{w}(x) - \tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x, \tilde{w}) dx. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Remarquons que

$$D_\Omega = D_{B_\delta(x_0)} \cup A \cup B \cup C,$$

avec

$$A = \Omega \setminus B_\delta(x_0) \times \Omega \setminus B_\delta(x_0), \;\; B = \Omega \setminus B_\delta(x_0) \times \mathcal{C}\Omega$$

et

$$C = \mathcal{C}\Omega \times \Omega \setminus B_\delta(x_0).$$

par suite

$$\begin{aligned}\iint_{D_\Omega} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy &= \iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &\quad + \iint_{D_\Omega\setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &= \iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &\quad + \iint_{D_\Omega\setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy &- \int_{B_\delta(x_0)} H(x,w_\varepsilon)dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &\quad -\int_{B_\delta(x_0)} H(x,\tilde{w})dx.\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Posons $v_\varepsilon = w_\varepsilon - \phi_1^{\frac{1}{p}}$ et $w = \tilde{w} - \phi_1^{\frac{1}{p}}$, alors $v_\varepsilon = w$ dans $\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(x_0)$. Par (4.2.16), nous aurons

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &+\varepsilon^{2s}a_{N,s}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,v_\varepsilon+\phi_1^{\frac{1}{p}})dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\ &+\varepsilon^{2s}a_{N,s}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(w(x)-w(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,w+\phi_1^{\frac{1}{p}})dx,\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy &= \iint_{D_\Omega} \frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\
&- \iint_{D_\Omega\setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \\
&= \int_\Omega v_\varepsilon(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}\,dx \\
&- \iint_{D_\Omega\setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(w(x)-w(y))(\phi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\phi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

alors en utilisant (4.2.17), il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy + \varepsilon^{2s} - \int_{B_\delta(x_0)}\left(H(x,v_\varepsilon+\phi_1^{\frac{1}{p}})dx - \varepsilon^{2s}v_\varepsilon(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}\right)dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \int_{B_\delta(x_0)}\left(H(x,w+\phi_1^{\frac{1}{p}})dx - \varepsilon^{2s}w(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}\right)dx.
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Ainsi v_ε est un minimum de la fonctionnelle

$$\tilde{J}_\varepsilon(w) = \frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \int_\Omega\left(H(x,w+\phi_1^{\frac{1}{p}})dx - \varepsilon^{2s}w(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}\right)$$

sur l'ensemble $\left\{w\in H_0^s(\Omega) : w-v_\varepsilon\in H_0^s(B_\delta(x_0))\right\}$. Posons $h_1(x,t)=h(x,t+\phi_1^{\frac{1}{p}})-\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}$, alors par le même argument de [37], h_1 admet un "falling zero" t_ε avec

$$t_\varepsilon = \left(\phi_1-\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} - \phi_1^{\frac{1}{p}} = \varepsilon^{2s}\left(\frac{-(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}}{\phi^{\frac{p-1}{p}}}+o(1)\right).$$

On conclut alors que

$$v_\varepsilon = \varepsilon^{2s}\left(\frac{-(-\Delta)^s\phi_1^{\frac{1}{p}}}{\phi^{\frac{p-1}{p}}}+o(1)\right)$$

ce qui montre le résultat.

4.3 Preuve du Théorème 4.3

Dans cette section, nous allons démontrer le Théorème 4.3. Nous allons commencer par donner quelques propriétés du profile limite U et de l'opérateur linéarisé en U. Nous prouvons ensuite quelques lemmes techniques qui seront utilisés par la suite pour démontrer le Théorème 4.3. Rappelons tout d'abord quelques inégalités algébriques très utiles qui seront utilisées dans le reste du chapitre, voir [19] et [40] pour la preuve.

Lemme 4.1. Soit $\alpha > 0$, alors il existe une constante $C \equiv C(\alpha) > 0$, telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|(a+b)^\alpha - a^\alpha - \alpha a^{\alpha-1} b| \leqslant C(b^2 + a^{\alpha-2} \inf(a^2, b^2)),$$
$$|a^\alpha - b^\alpha| \leqslant |a-b|^{\min(\alpha,1)}.$$

Lemme 4.2. Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C \equiv C(\alpha, n) > 0$, telle que pour tout $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big| |\sum_{j=1}^{n} a_i|^\alpha - \sum_{j=1}^{n} |a_i|^\alpha \Big| \leqslant C\Big(\sum_{i \neq j} |a_i|^{\alpha-1} \inf(|a_i|, |b_j|)\Big).$$

4.3.1 Propriétés du profile limite

Cette sous-section sera consacrée à donner quelques propriétés de la solution du problème limite suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U &= |U-1|^p - 1, \ U > 0 \quad \text{dans} \mathbb{R}^N, \\ U(0) &= \max_{y \in \mathbb{R}^N} U(y), \\ U &\in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{4.3.19}$$

Nous donnons d'abord la définition d'une solution d'état fondamental.

Définition 4.1. On dit que $0 \lneqq U_s \in H^s(\mathbb{R}^N)$ est un état fondamental du problème (**??**) si U_s est solution de (**??**) et l'opérateur linéarisé en U_s, $L := (-\Delta)^s - p|U_s - 1|^{p-2}(U_s - 1)$, admet un indice de Morse égal à 1 ; autrement dit L admet une seul valeur propre strictement négative.

Dans le théorème suivant nous donnons l'existence, l'unicité (modulo une translation) et la non-dégénérescence des solutions du problème (4.3.19).

Théorème 4.4. Soit $1 < p < 2_s^* - 1$, alors le problème (4.3.19) admet un état fondamental unique U radial et strictement décroissant par rapport a $|x|$. De plus, $U \in H^s(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ pour un $\gamma \in (0,1)$ et satisfait

$$|U(x)| \leqslant \frac{C}{1 + |x|^{N+2s}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.3.20}$$

De plus, U est non dégénéré dans le sens où l'opérateur linéaire défini par

$$L := (-\Delta)^s - p|U-1|^{p-2}(U-1) \tag{4.3.21}$$

satisfait

$$\ker L \cap L^2(\mathbb{R}^N) = \text{Span}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial U}{\partial x_N}\right\}.$$

La preuve du Théorème 4.4 est donnée en appendice. Nous utiliserons les mêmes arguments développés dans [52]. Cependant, nous devons surmonter plusieurs difficultés techniques dues à la non homogénéité de la non-linéarité. Posons $U_{\varepsilon,x}(y) := U(\frac{y-x}{\varepsilon})$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ et fixons $\xi \in \Omega^k$, définissons les fonctions Z_{ji} par

$$Z_{ji} = \frac{\partial U_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}, \text{ où } i = 1, ..., N \text{ et } j = 1, ...k. \tag{4.3.22}$$

Nous avons alors les résultats suivants.

Lemme 4.3. Il existe une constante positive C tel que, pour tout $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ...k$

$$|Z_{ji}| \leqslant C\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{-\mu_1} \qquad \text{avec } \left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right| \geqslant 1, \tag{4.3.23}$$

où $\mu_1 = \min\{N+2s+1,\, p(N+2s)\}$.

Démonstration. Notons $U_{\xi_j}(x) = U(x-\xi_j)$, alors

$$U_{\varepsilon,\xi_j}(x) = U_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Utilisons (4.3.22), nous obtenons

$$Z_{ji}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial U_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}}{\partial \xi_{ji}}(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Maintenant, par les mêmes arguments que ceux de [40], on obtient

$$|Z_{ji}| \leqslant C\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{-\min\{N+2s+1,\, p(N+2s)\}}.$$

D'où le résultat. □

En utilisons les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du lemme 5.3 de [40], nous pouvons aussi démontrer le lemme,

Lemme 4.4. Il existe une constante positive C telle que , pour tout $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ...k$

$$|\nabla Z_{ji}| \leqslant C\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{-\mu_2} \qquad \text{avec } \left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right| \geqslant 1, \tag{4.3.24}$$

où $\mu_2 = \min\{N + 2s + 2,\, p(N + 2s)\}$.

En utilisant la définition de U_{ε,ξ_j} et Z_{ji}, nous pouvons démontrer la propriété d'orthogonalité suivante, voir par exemple Lemme 5.5 dans [40] et [39].

Lemme 4.5. Pour tout $i, m = 1, ..., N$et $j, l = 1, ...k$, les fonctions Z_{ji} satisfont,

$$\int_{\mathbb{R}^N} Z_{ji} Z_{lm} = \varepsilon^{N-2} \alpha \delta_{jl} \delta_{im}, \tag{4.3.25}$$

où α est une constante positive indépendante de ε.

Par conséquent, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.1. Pour tout $i, m = 1, ..., N$ et $j, l = 1, ...k$, les fonctions Z_{ji} satisfait

$$\int_{\Omega} Z_{ji} Z_{lm} = \varepsilon^{N-2} \alpha \delta_{jl} \delta_{im} + O(\varepsilon^{\nu}), \tag{4.3.26}$$

où $\nu = 2\nu_1$ avec $\nu_1 = \min\{N + 2s,\, p(N + 2s) - 1\}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} Z_{ji} Z_{lm} &= \int_{\mathbb{R}^N} Z_{ji} Z_{lm} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} Z_{ji} Z_{lm} \\ &= \varepsilon^{N-2} \alpha \delta_{jl} \delta_{im} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} Z_{ji} Z_{lm}.\end{aligned}$$

Ainsi, par (4.3.23), la dernière intégrale peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} Z_{ji} Z_{lm}\right| &\leqslant C\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{-\mu_1}\left|\frac{x-\xi_l}{\varepsilon}\right|^{-\mu_1} \\ &\leqslant C\varepsilon^{\nu}.\end{aligned}$$

Cela donne le résultat désiré. $\square$

4.3.2 Construction de la solution approximante

Soit U l'unique solution radiale du problème (4.3.19). Posons

$$U_{\varepsilon,\xi_j}(y) = U(\frac{y-\xi_j}{\varepsilon})$$

et $\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}$ la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + pu &= |U_{\varepsilon,\xi_j} - 1|^p - 1 + pU_{\varepsilon,\xi_j}, \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.27}$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques estimations sur la solution approximative, $\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}$, qui seront utiles lors de l'application de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt.

Lemme 4.6. Posons $\eta_{\varepsilon,\xi_j} = U_{\varepsilon,\xi_j} - \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}$, on a

$$|\eta_{\varepsilon,\xi_j}(x)| \leqslant C\varepsilon^{N+2s} \tag{4.3.28}$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. On peut voir facilement qu'à partir de (4.3.19) et (4.3.27), η_{ε,ξ_j} satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \eta_{\varepsilon,\xi_j} + p\eta_{\varepsilon,\xi_j} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \eta_{\varepsilon,\xi_j} &= U_{\varepsilon,\xi_j} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.29}$$

En utilisant 4.3.20, on obtient $|\eta_{\varepsilon,\xi_j}| = |U_{\varepsilon,\xi_j}| \leqslant C\varepsilon^{N+2s}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Ainsi, par le principe de maximum, $|\eta_{\varepsilon,\xi_j}| \leqslant C\varepsilon^{N+2s}$ dans $\mathbb{R}^N$. □

Lemme 4.7. L'estimation suivante est vérifiée. Pour tout $x \in \Omega$

$$\left| \frac{\partial U_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}(x) - \frac{\partial \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}(x) \right| \leqslant C\varepsilon^{\nu_1} \tag{4.3.30}$$

où C est une constante strictement positive et $\nu_1 = \min\{N+2s,\, p(N+2s)-1\}$.

Démonstration. En utilisant les mêmes notations que dans le lemme 4.6, $\dfrac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}$ satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \dfrac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}} + p\dfrac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}} &= -\dfrac{\partial U_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.31}$$

Par suite, par (4.3.23), on obtient $\left|\dfrac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}\right| \leqslant C\varepsilon^{\nu_1}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Le principe de maximum nous donne,

$$\left|\frac{\partial \eta_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}\right| \leqslant C\varepsilon^{\nu_1} \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 4.2.

$$\langle \frac{\partial \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}, \frac{\partial \bar{u}_{\varepsilon,\xi_l}}{\partial \xi_{lm}} \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{N-2} C \delta_{jl}\delta_{im} + O(\varepsilon^{\nu}), \tag{4.3.32}$$

où ν est comme dans le corollaire 4.1.

Démonstration. Notons, pour simplifier les notations, par

$$\bar{z}_{ji}(x) = \frac{\partial \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}(x).$$

Par (4.3.27), il découle que $\bar{z}_{ji}$ est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \bar{z}_{ji} + p\bar{z}_{ji} &= p|U_{\varepsilon,x} - 1|^{p-1} Z_{ji} - 1 + pZ_{ji}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \bar{z}_{ji} &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.33}$$

Utilisons $\bar{z}_{lm}$ comme fonction test dans l'équation précédente, on obtient

$$\langle \bar{z}_{ji}, \bar{z}_{lm} \rangle_\varepsilon = \int_\Omega \left(|U_{\varepsilon,\xi_j} - 1|^{p-1} Z_{ji}\bar{z}_{lm} + p(1 + w_\varepsilon^{p-1}) Z_{ji}\bar{z}_{lm} \right) dx.$$

Maintenant, en utilisant (4.3.26) et (4.3.30) on déduit,

$$\langle \bar{z}_{ji}, \bar{z}_{lm} \rangle_\varepsilon = C\varepsilon^{N-2}\delta_{jl}\delta_{im} + O(\varepsilon^{\nu}),$$

où C est une constante positive indépendante de ε. □

En utilisant les mêmes notations que dans la preuve précédente, nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 4.8. Pour tout $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ...k$, l'estimation suivante est vérifiée. Pour tous $x \in \Omega$

$$|\nabla Z_{ji}(x) - \nabla \bar{z}_{ji}(x)| \leqslant C\varepsilon^{\nu_2} \tag{4.3.34}$$

où C est une constante positive et $\nu_2 = \min\{N + 2s,\, p(N + 2s) - 2\}$.

La preuve utilise les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.7, en utilisant (4.3.24) au lieu de (4.3.23).

Corollaire 4.3. Pour tout $i, m = 1, ..., N$ et $j = 1, ...k$, on a

$$\left\| \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right\|_{\varepsilon} = o(\varepsilon^{\min\{N-4,\, \nu_2\}}). \tag{4.3.35}$$

Démonstration. Par (4.3.33), on remarque que $\dfrac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}}$ est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \dfrac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p\dfrac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} = p\dfrac{\partial}{\partial \xi_{jm}}(|U_{\varepsilon,x} - 1|^{p-1} Z_{ji}) + p\dfrac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}}, & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.36}$$

Utilisons $\dfrac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}}$ comme fonction test dans l'équation précédente et rappelons (4.3.34), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p\frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}}^2 \right) dx &= \int_\Omega \left(p\frac{\partial}{\partial \xi_{jm}}(|U_{\varepsilon,x} - 1|^{p-1} Z_{ji}) + p\frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right) \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}}\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p\left(\frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right)^2 \right) dx + o(\varepsilon^{\nu_2}) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p\left(\frac{\partial Z_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right)^2 \right) dx + o(\varepsilon^{\nu_2}) \\ &= \varepsilon^{N-4} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon^{2-2s}(-\Delta)^s \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \right. \\ &\quad \left. + p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \right)^2 \right) dy + o(\varepsilon^{\nu_2}) \\ &\leqslant \varepsilon^{N-4} \int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta)^s \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \right. \\ &\quad \left. + p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_m} \right)^2 \right) dy + o(\varepsilon^{\nu_2}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variable $y = \frac{x - \xi_j}{\varepsilon}$ dans les deux dernières étapes. Par conséquent

$$\int_\Omega \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p\left(\frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right)^2 dx \leqslant C\varepsilon^{N-4} + o(\varepsilon^{\nu_2}). \tag{4.3.37}$$

Maintenant rappelons que $w_\varepsilon \leqslant \phi_1^{\frac{1}{p}}$ et par le fait que $\max_{x\in\Omega} \phi(x) = 1$, il en découle,

$$\left\| \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right\|_\varepsilon \leqslant \int_\Omega \left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} + p \left(\frac{\partial \bar{z}_{ji}}{\partial \xi_{jm}} \right)^2 \right) dx = o(\varepsilon^{\min\{N-4,\,\nu_2\}}),$$

ce qui donne le résultat. □

La preuve du Théorème 4.3 sera obtenue en combinant plusieurs Lemmes et estimations techniques.

4.3.3 Quelques lemmes techniques

Dans ce qui suit nous montrons quelques résultats techniques qui seront très utiles par la suite. Le résultat suivant est utilisé pour montrer l'existence des solutions avec un pic au voisinage d'un point intérieur, un point maximum local de ϕ_1, de Ω.

Lemme 4.9. Soit w_ε l'unique solution positive du problème (4.2.14), on considère le problème de valeur propre suivant

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p w_\varepsilon^{p-1} v &= \lambda v \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.38}$$

Posons

$$\lambda_1 = \inf_{\{\varphi \in H_0^s(\Omega)\}} \frac{\varepsilon^{2s}||\varphi||^2_{H_0^s(\Omega)} + p\displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi^2 dx},$$

alors $\lambda_1 \geqslant C(p) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Rappelons que $w_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ est solution de (4.2.14), que $w_\varepsilon^p \leqslant \phi_1$ et $w_\varepsilon \to \phi_1^{\frac{1}{p}}$ quand $\varepsilon \to 0$ uniformément sur chaque compact de Ω. Ainsi

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon^{2s}||\varphi||^2_{H_0^s(\Omega)} + p\displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi^2 dx}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, en utilisant le fait que $w_\varepsilon > 0$ et l'inégalité Picone, voir Lemme 1.1, on obtient

$$\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \geqslant \int_\Omega \frac{\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s w_\varepsilon}{w_\varepsilon}\varphi^2 dx.$$

Par suite

$$\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy+\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2dx \geqslant \int_\Omega \frac{\phi_1}{w_\varepsilon}\varphi^2dx.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy+p\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2dx &\geqslant (p-1)\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2dx+\int_\Omega\frac{\phi_1}{w_\varepsilon}\varphi^2dx\\ &\geqslant \int_\Omega\left((p-1)w_\varepsilon^{p-1}+\frac{1}{w_\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\varphi^2dx.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$(p-1)a^{p-1}+\frac{1}{a^{\frac{p-1}{p}}}\geqslant \min_{\{\sigma>0\}}\left\{(p-1)\sigma^{p-1}+\frac{1}{\sigma^{\frac{p-1}{p}}}\right\}=C(p)>0,$$

Il en découle

$$\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy+p\int_\Omega w_\varepsilon^{p-1}\varphi^2dx\geqslant C(p)\int_\Omega\varphi^2dx.$$

Par conséquent $\lambda_1 \geqslant C(p)$, ce qui donne le résultat. □

Remarque. Le résultat démontré dans le lemme précédent est plus fort que celui obtenu dans [37], où il a été prouvé que la constante C dépend aussi de ε.

Rappelons que

$$\langle u,v\rangle_\varepsilon=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+pw_\varepsilon^{p-1}uv\right)dx,\qquad \text{et}\qquad \|u\|_\varepsilon=\sqrt{\langle u,u\rangle_\varepsilon},$$

On définit l'espace de configuration par,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\varepsilon,k} = \Big\{&\xi=(\xi_1,...,\xi_k)\in\Omega^k : 1-\phi_1(\xi_j)\leqslant\varepsilon^\tau, j=1,...,k, \text{ et}\\ &U\big(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\big)\leqslant\varepsilon^\tau,\ i\neq j\Big\}\end{aligned}\tag{4.3.39}$$

où $\tau=\frac{q}{2(k+1)}$ et $q=\min(1,p-1)$. Notons $\mathbb{H}$ le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\,.\,\|_\varepsilon$ définie dans (4.1.12). Notons que pour tout $u,v\in\mathbb{H}$, on a

$$\int_\Omega\left(\varepsilon^{2s}v(-\Delta)^s u+pw_\varepsilon^{p-1}uv\right)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+pw_\varepsilon^{p-1}uv\right)dx.$$

Ainsi

$$\int_\Omega \left(\varepsilon^{2s}u(-\Delta)^s u + pw_\varepsilon^{p-1}uu\right)dx = ||u||_\varepsilon^2,$$

cela justifie en quelque sorte notre choix de la norme $\| \,.\, \|_\varepsilon$. Définissons maintenant l'espace

$$E_{\varepsilon,\xi,k} = \left\{ w \in \mathbb{H} : \langle w, \frac{\partial \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{j,l}}\rangle_\varepsilon = 0, l = 1, ..., N,\ \ j = 1, ..., k \right\}. \tag{4.3.40}$$

Lemme 4.10. Posons

$$L_{\varepsilon,\xi}(w) = \sum_{j=1}^k \langle \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}, w\rangle_\varepsilon - \int_\Omega f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j})w\,dx. \tag{4.3.41}$$

Alors $L_{\varepsilon,\xi}$ est une forme linéaire continue sur de $E_{\varepsilon,\xi,k}$. De plus,

$$\|L_{\varepsilon,\xi}\| = \varepsilon^{\frac{N}{2}} O\left(\sum_{j=1}^k (1-\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j))^q + \sum_{j\neq i} U^q(\frac{|\xi_i - \xi_j|}{\varepsilon}) + \varepsilon^{2s}\right),$$

où $q = \min(1, p-1)$. En particulier, il existe $l_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ telle que

$$L_{\varepsilon,\xi}(w) = \langle l_{\varepsilon,\xi}, w\rangle_\varepsilon, \quad \forall w \in E_{\varepsilon,\xi,k}.$$

Démonstration. Posons

$$\bar{f}(t) = |t-1|^p - 1 + pt, \tag{4.3.42}$$

en utilisant (4.3.27), on obtient

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,\xi}(\omega) &= p\sum_{j=1}^k \int_\Omega (w_\varepsilon^{p-1} - 1)\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\omega - \int_\Omega \left(f_\varepsilon\Big(y, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\Big) - \sum_{j=1}^k \bar{f}(U_{\varepsilon,x_j})\right)\omega \\ &= L^1_{\varepsilon,\xi}(\omega) - L^2_{\varepsilon,\xi}(\omega). \end{aligned}$$

On commence par estimer $L^1_{\varepsilon,\xi}(\omega)$. Par (4.1.7) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,\xi}(\omega) &= p\sum_{j=1}^k \int_\Omega (\phi_1^{\frac{p-1}{p}} - 1)\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\omega + \varepsilon^{\frac{N}{2}} O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega \omega^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &= p\sum_{j=1}^k \Big[\int_\Omega (\phi_1^{\frac{p-1}{p}} - 1)^2 \bar{u}^2_{\varepsilon,\xi_j}\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_\Omega \omega^2\Big]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{N}{2}} O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega \omega^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 4.1 avec $a = \phi_1^{\frac{1}{p}}$, $b = 1$ et en rappelant le Lemma 4.6, il en découle que

$$
\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\xi}(\omega) &= p\sum_{j=1}^{k}\Big[\int_\Omega(\phi_1^{\frac{1}{p}}-1)^{2\min(p-1,1)}U^2_{\varepsilon,\xi_j}\Big]^{\frac12}\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}\\
&= p\varepsilon^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{k}\Big[\int_{\Omega_{\varepsilon,\xi}}(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\varepsilon y+\xi_j)-1)^{2q}U(y)^2\,dy\Big]^{\frac12}\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12},
\end{aligned}
$$

où $x=\varepsilon y+\xi_j$, $\Omega_{\varepsilon,\xi}=\frac{\Omega-\xi_j}{\varepsilon}$ et $q=\min(p-1,1)$. Par suite

$$
\begin{aligned}
L^1_{\varepsilon,\xi}(\omega) &= p\varepsilon^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{k}\Big[(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)^{2q}\int_{\mathbb{R}^N}U(y)^2\,dy\Big]^{\frac12}\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}\\
&= \varepsilon^{\frac{N}{2}}O\Big(\sum_{j=1}^{k}(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)^{q}+\varepsilon^{2s}\Big)\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}\\
&= \varepsilon^{\frac{N}{2}}O\Big(\sum_{j=1}^{k}(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)^{q}+\varepsilon^{2s}\Big)\|\omega\|_2.
\end{aligned}
$$

Nous estimons maintenant $L^2_{\varepsilon,\xi}(\omega)$. En utilisant (4.3.28) on obtient

$$
L^2_{\varepsilon,\xi}(\omega)=\int_\Omega(f_\varepsilon(y,\sum_{j=1}^{k}U_{\varepsilon,\xi_j})-\sum_{j=1}^{k}\bar f(U_{\varepsilon,x_j}))\omega\,dx+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\Big[\int_\Omega\omega^2\Big]^{\frac12}.
$$

Par le Lemme 4.1 et le Lemme 4.2, on arrive à

$$
\begin{aligned}
L^2_{\varepsilon,\xi}(\omega) &= C\int_\Omega\Big((\sum_{j=1}^{k}U_{\varepsilon,\xi_j})^p-\sum_{j=1}^{k}U^p_{\varepsilon,\xi_j}+(\sum_{j=1}^{k}U_{\varepsilon,\xi_j})^2-\sum_{j=1}^{k}U^2_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\omega\,dx+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\|\omega\|_2\\
&= C\sum_{j\neq i}\int_\Omega\Big((U^{p-1}_{\varepsilon,\xi_j}+U_{\varepsilon,\xi_j})\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j})\Big)\omega\,dx+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\|\omega\|_2\\
&= C\sum_{j\neq i}\Big[\int_\Omega\Big((U^{p-1}_{\varepsilon,\xi_j}+U_{\varepsilon,\xi_j})\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j})\Big)^2dx\Big]^{\frac12}\|\omega\|_2+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\|\omega\|_2\\
&= C\sum_{j\neq i}\Big[\int_\Omega U^{2\min(1,(p-1))}_{\varepsilon,\xi_j}U^2_{\varepsilon,\xi_i}\,dx\Big]^{\frac12}\|\omega\|_2+\varepsilon^{\frac{N}{2}}O(\varepsilon^{2s})\|\omega\|_2\\
&= \varepsilon^{\frac{N}{2}}O\bigg(\sum_{j\neq i}U^{\min(1,p-1)}(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon})+\varepsilon^{2s}\bigg)\|\omega\|_2.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\|L_{\varepsilon,\xi}(\omega)\|_\varepsilon=\varepsilon^{\frac{N}{2}}O\bigg(\sum_{j=1}^{k}(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)^{\min(1,p-1)}+\sum_{j\neq i}U^{\min(1,p-1)}(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon})+\varepsilon^{2s}\bigg)\|\omega\|_2
$$

En appliquant 4.9 il en résulte que

$$\|L_{\varepsilon,\xi}(\omega)\|_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{N}{2}} O\bigg(\sum_{j=1}^{k} (\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j) - 1)^q + \sum_{j\neq i} U^{\min(1,p-1)}(\frac{|\xi_i - \xi_j|}{\varepsilon}) + \varepsilon^{2s} \bigg) \|\omega\|_\varepsilon$$

et le Lemme est démontré. □

Lemme 4.11. Posons

$$Q_{\varepsilon,\xi}(\omega,\eta) = \langle \omega, \eta\rangle_\varepsilon - \int_\Omega f'_\varepsilon\Big(x, \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\, \omega\eta \, dx. \tag{4.3.43}$$

Alors

$$|Q_{\varepsilon,\xi}(\omega,\eta)| \leqslant C\|\omega\|_\varepsilon \|\eta\|_\varepsilon.$$

En particulier, il existe un opérateur linéaire borné $A_{\varepsilon,\xi} \in \mathcal{L}(E_{\varepsilon,\xi,k})$ tel que

$$Q_{\varepsilon,\xi}(\omega,\eta) = \langle A_{\varepsilon,\xi}\omega, \eta\rangle_\varepsilon, \quad \forall \omega,\ \eta \in E_{\varepsilon,\xi,k}.$$

Démonstration. On a

$$|\langle \omega, \eta\rangle_\varepsilon| \leqslant \|\omega\|_\varepsilon \|\eta\|_\varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}) \omega\eta \, dx &\leqslant C\Big[\int_\Omega \omega^2\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_\Omega \eta^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C\|\omega\|_\varepsilon \|\eta\|_\varepsilon, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 4.9 dans la dernière étape. Le résultat est démontré. □

Nous montrons dans ce qui suit que l'opérateur $A_{\varepsilon,\xi}$ est coercive dans $E_{\varepsilon,\xi,k}$. Plus précisément nous avons,

Lemme 4.12. Il existe une constante positive C, indépendant de ε et $\xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}$ telle que

$$\|A_{\varepsilon,\xi} w\|_\varepsilon \geqslant C\|w\|_\varepsilon, \quad \forall w \in E_{\varepsilon,\xi,k}, \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}. \tag{4.3.44}$$

Démonstration. Nous utilisons le même argument que dans [37], [38] et [39]. Par l'absurde,supposons qu'il existe $\varepsilon_n \to 0$, $\xi_{j,n} \in \Lambda_{\varepsilon,k}$, $\xi_{j,n} \to \xi_j \in \Lambda_{\varepsilon,k}$ et $w_n \in E_{\varepsilon_n,\xi_n,k}$ tel que,

$$\|w_n\| = \varepsilon_n^{\frac{N}{2}} \text{ and } \|A_{\varepsilon_n,\xi_n} w_n\| = o(\varepsilon_n^{\frac{N}{2}}). \tag{4.3.45}$$

Nous affirmons que pour tout $R > 0$ fixé et tout $j = 1, ..., k$,

$$\int_{B_{\varepsilon_n R}(\xi_{j,n})} |w|^2 \, dx = \varepsilon_n^N o(1). \tag{4.3.46}$$

En effet, Notons

$$\widehat{w}_{j,n}(y) = w_n(\varepsilon_n y + \xi_{j,n}),\ \Omega_n = \{y : \varepsilon_n y + \xi_{j,n} \in \Omega\},$$

$$\widehat{u}_{j,n}(y) = \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_n}(\varepsilon_n y + \xi_{j,n}),\ \overline{w}_{\varepsilon,n} = w_\varepsilon(\varepsilon_n y + \xi_{j,n}),$$

et $\widehat{z}_{il}(y) = \dfrac{\partial \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{i,n}}}{\partial \xi_{i,l}}(\varepsilon_n y + \xi_{j,n})$. Remarquons que

$$\|\widehat{w}_{j,n}\|_n = \varepsilon_n^{-\frac{N}{2}} \|w_n\|_{\varepsilon_n} = 1, \tag{4.3.47}$$

où

$$\|\widehat{w}_{j,n}\|_n^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \left(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \widehat{w}_{j,n}|^2 + p\overline{w}_{\varepsilon,n}^{p-1} \widehat{w}_{j,n}^2 \right) dx.$$

Alors, il existe $w_j \in H^s(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\widehat{w}_{j,n} \rightharpoonup \widehat{w}_j \text{ dans } H^s(\mathbb{R}^N),$$

$$\widehat{w}_{j,n} \to \widehat{w}_j \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Montrons que

$$(-\Delta)^s \widehat{w}_j - p|U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N. \tag{4.3.48}$$

Ceci est équivalent à prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s \widehat{w}_j \eta - p \int_{\mathbb{R}^N} |U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j \eta = 0, \quad \text{pour tout } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.3.49}$$

Par le Lemme 4.11, on a

$$\langle A_{\varepsilon_n,\xi_n} \widehat{w}_{j,n}, \hat{\eta} \rangle = o(1)\|\hat{\eta}\|_n \text{ for all } \hat{\eta} \in \hat{E}_n,$$

où

$$\|\hat\eta\|_n^2=\int_{\mathbb{R}^N}\left(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\hat\eta|^2+p\overline{w}_{\varepsilon,n}^{p-1}\hat\eta^2\right)dx$$

et

$$\hat E_n=\left\{\eta\in H_0^s(\Omega_n):\int_{\mathbb{R}^N}\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}}\eta(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\hat z_{jl}+p\overline{w}_{\varepsilon,n}^{p-1}\eta\hat z_{jl}\right)dx=0, l=1,...,N,\ j=1,...,k\right\}.$$

Par suite, on obtient

$$\int_{\Omega_n}(-\Delta)^s\widehat{w}_{j,n}\hat\eta\,dx-\int_{\Omega_n}f_\varepsilon'(x,\sum_{j=1}^k\widehat{u}_{j,n})\widehat{w}_{j,n}\hat\eta\,dx=o(1)\|\hat\eta\|_n,\ \text{for all }\hat\eta\in\hat E_n. \tag{4.3.50}$$

Maintenant, pour tout $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on peut avoir $a_{j,l,n}$ de sorte que

$$\hat\eta=\eta-\sum_{j=1}^k\sum_{l=1}^N a_{j,l,n}\widehat{z}_{jl}\ \in\hat E_n.$$

En remplaçant $\hat\eta$ dans (4.3.50) et en faisant tendre $n\to\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^s\widehat{w}_j\eta\,dx-p\int_{\mathbb{R}^N}|U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j\eta\,dx=&\sum_{l=1}^N a_{j,l}\int_{\mathbb{R}^N}\Bigg((-\Delta)^s\widehat{w}_j\frac{\partial U}{\partial x_l}\\&-p\int_{\mathbb{R}^N}|U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j\frac{\partial U}{\partial x_l}\Bigg)dx,\end{aligned}$$

où $a_{j,l}=\lim_{n\to\infty}a_{j,l,n}$. D'autre part, par le Théorème 4.4 on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^s\widehat{w}_j\frac{\partial U}{\partial x_l}dx-p\int_{\mathbb{R}^N}|U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j\frac{\partial U}{\partial x_l}dx=0,$$

ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^s\widehat{w}_j\eta\,dx-p\int_{\mathbb{R}^N}|U-1|^{p-2}(U-1)\widehat{w}_j\eta\,dx=0,\ \text{ pour tout }\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent (4.3.48) est satisfaite. Maintenant, en utilisant à nouveau Théorème 4.4, on obtient

$$\widehat{w}_j=\sum_{l=1}^N b_l\frac{\partial U}{\partial x_l},\ \text{ avec } b_l\in\mathbb{R}. \tag{4.3.51}$$

Rappelons que pour tout $w_n\in E_{\varepsilon_n,\xi_n,k}$, on a $\widehat{w}_{j,n}\in\hat E_n$, ainsi par (4.3.51), on déduit que $w_j=0$

et l'affirmation (4.3.46) est démontrée. Observons maintenant que,

$$\begin{aligned}
o(\varepsilon_n^N) &\geqslant |\langle A_{\varepsilon_n,\xi_n} w_{j,n}, w_{j,n}\rangle_\varepsilon| \\
&\geqslant \|w_n\|_n^2 - \int_\Omega f'_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{j,n}}) w_n^2\, dx \\
&= \|w_n\|_n^2 - \int_{\cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(\xi_{j,n})} f'_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{j,n}}) w_n^2\, dx \\
&\quad - \int_{\Omega \setminus \cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(\xi_{j,n})} f'_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{j,n}}) w_n^2\, dx \\
&= \|w_n\|_n^2 - I_1 - I_2,
\end{aligned}$$

où f_ε est définie dans (4.1.9). Nous commençons par estimer I_1. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j=1}^k \int_{B_{\varepsilon_n R}(\xi_{j,n})} f'_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{j,n}}) w_n^2\, dx \\
&= \sum_{j=1}^k \int_{B_{\varepsilon_n R}(\xi_{j,n})} f'_\varepsilon(x, \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{j,n}} + \sum_{i\neq j}^k \bar{u}_{\varepsilon_n,\xi_{i,n}}) w_n^2\, dx.
\end{aligned}$$

Par le Lemme 4.6 et le changement de variable $y = \frac{x-\xi_j}{\varepsilon_n}$ et en utilisant (4.3.46), (4.3.20) on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \varepsilon_n^N \sum_{j=1}^k \int_{B_R(0)} f'_\varepsilon(x, U(y) + \sum_{i\neq j}^k U(y + \frac{\xi_j - \xi_i}{\varepsilon_n})) w_n^2\, dx + o(\varepsilon_n^{N+2s}) \\
&= o(\varepsilon_n^N).
\end{aligned}$$

De la même manière on obtient que

$$I_2 = \varepsilon_n^N o_R(1), \qquad \text{où } o_R(1) \to 0 \text{ quand } R \to \infty.$$

En remplaçant, on déduit que

$$o(\varepsilon_n^N) \geqslant \|w_n\|_n^2 - o(\varepsilon_n^N) - \varepsilon_n^N o_R(1),$$

contradiction avec (4.3.45). $\square$

Posons dans ce qui suit

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(w) &= -\int_\Omega \Big[F_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w) - F_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}) - f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j})w \\ &\quad -\frac{1}{2} f'_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j})w^2 \Big] dx, \end{aligned} \tag{4.3.52}$$

où F_ε (la primitive de f_ε) est donnée dans (4.1.11). On a alors les estimations suivantes sur R_ε.

Lemme 4.13. Pour tout $w \in \mathbb{H}$, on a

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(w) &= O(\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})})\|w\|_\varepsilon^{\min\{p+1,3\}}, \\ R'_\varepsilon(w)(\eta) &= O(\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})})\|w\|_\varepsilon^{\min\{p,2\}}\|\eta\|_\varepsilon, \\ R''_\varepsilon(w)(\eta_1,\eta_2) &= O(\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})})\|w\|_\varepsilon^{\min\{p-1,1\}}\|\eta_1\|_\varepsilon\|\eta_2\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

La preuve est une adaptation des mêmes arguments que dans [37], [38] et [39]. Nous montrons dans la suite le résultat important suivant

Proposition 4.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, il existe un unique $w_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ tel que

$$I'_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}) \in E^\perp_{\varepsilon,\xi,k},$$

autrement dit

$$\langle I'_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}), \eta\rangle_\varepsilon = 0, \quad \forall \eta \in E_{\varepsilon,\xi,k}, \tag{4.3.53}$$

où I_ε est définie dans (4.1.10). De plus, on a

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{N}{2}} O(\varepsilon), \quad \forall \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}, \tag{4.3.54}$$

et l'application $w : \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k} \mapsto w_{\varepsilon,\xi}$, est de classe C^1 par rapport a ξ.

Démonstration. Posons

$$\mathcal{J}(\xi, w) = I_\varepsilon(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w), \quad \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k},\ w \in E_{\varepsilon,\xi,k}. \tag{4.3.55}$$

Un développement de Taylor $\mathcal{J}$ au voisinage de $w = 0$, nous donne

$$\mathcal{J}(\xi, w) = I_\varepsilon(\sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}) + L_{\varepsilon,\xi}(w) + \frac{1}{2}\langle A_{\varepsilon,\xi} w, w\rangle + R_\varepsilon(w).$$

et donc (4.3.53) est équivalente à déterminer un point critique de $\mathcal{J}(\xi, .)$ dans $E_{\varepsilon,\xi,k}$. Par le Lemme 4.12 on déduit que $A_{\varepsilon,\xi}$ est inversible dans $E_{\varepsilon,\xi,k}$ et il existe une constante C indépendant de ε et ξ, telle que

$$\|A_{\varepsilon,\xi}^{-1}\| \leqslant C.$$

Ainsi la recherche des points critiques de $\mathcal{J}$ in $E_{\varepsilon,\xi,k}$ se réduit à

$$L_{\varepsilon,\xi} + A_{\varepsilon,\xi} w + R'_\varepsilon(w) = 0. \tag{4.3.56}$$

Où, d'une manière équivalente, $w = -A_{\varepsilon,\xi}^{-1}(L_{\varepsilon,\xi} + R'_\varepsilon(w))$. Posons

$$G(w) = -A_{\varepsilon,\xi}^{-1}(L_{\varepsilon,\xi} + R'_\varepsilon(w)), \quad \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k},\ w \in E_{\varepsilon,\xi,k}. \tag{4.3.57}$$

Pour toutes w_1, $w_2 \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ avec $\|w_1\|_\varepsilon$, $\|w_2\|_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{\frac{N}{2}+1}$, par le Lemme 4.13, on obtient

$$\begin{aligned}
\|G(w_1) - G(w_2)\|_\varepsilon &\leqslant C\|R'_\varepsilon(w_1) - R'_\varepsilon(w_2)\|_\varepsilon \\
&\leqslant C\|\int_0^1 R''_\varepsilon(tw_1 + (1-t)w_2)(w_1 - w_2)dt\|_\varepsilon \\
&\leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|R''_\varepsilon(tw_1 + (1-t)w_2)\|_\varepsilon \|(w_1 - w_2)\|_\varepsilon \\
&\leqslant C\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})} \|tw_1 + (1-t)w_2\|_\varepsilon \|(w_1 - w_2)\|_\varepsilon \\
&\leqslant C\varepsilon^{\min\{p-1,1\}} \|(w_1 - w_2)\|_\varepsilon.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\min\{p-1, 1\} > 0$, on peut choisir γ telle que

$$\|G(w_1) - G(w_2)\|_\varepsilon \leqslant C\varepsilon^\gamma \|(w_1 - w_2)\|_\varepsilon, \tag{4.3.58}$$

c'est-à-dire que G est une contraction. D'autre part, pour tout $w \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ avec $\|w\| \leqslant \varepsilon^{\frac{N}{2}+1}$,

$$\begin{aligned}
\|G(w)\|_\varepsilon &\leqslant C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\|R'_\varepsilon(w)\|_\varepsilon \\
&\leqslant C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})}\|w\|_\varepsilon^{\min\{p,2\}} \\
&\leqslant C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{N(1-\frac{\min\{p+1,3\}}{2})}\varepsilon^{\min\{p,2\}(\frac{N}{2}+1)} \\
&\leqslant C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{N}{2}}\varepsilon^{\min\{p,2\}}.
\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant le Lemme 4.10, on obtient

$$\|G(w)\|_\varepsilon \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}+1}. \tag{4.3.59}$$

Par (4.3.58) et (4.3.59), on déduit que G est une contraction de $E_{\varepsilon,\xi,k} \cap B(0,\varepsilon^{\frac{N}{2}+1})$ dans lui-même. Par le Théorème de contraction de Banach, il existe un unique point fixe $w_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k} \cap B(0,\varepsilon^{\frac{N}{2}+1})$, tel que

$$w_{\varepsilon,\xi} = G(w_{\varepsilon,\xi})$$

De plus, par (4.3.59) on obtient

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon \leqslant C\varepsilon^{\frac{N}{2}+1}.$$

Montrons maintenant que $\xi \mapsto w_{\varepsilon,\xi}$ est de classe C^1. Pour ce faire, notons par

$$\mathcal{H}(\varepsilon,\xi,\omega) = \omega - G(\omega), \quad \omega \text{ dans } E_{\varepsilon,\xi,k}.$$

Alors, $\mathcal{H}(\varepsilon,\xi,w_{\varepsilon,\xi}) = 0$. D'autre part,

$$\partial_\omega\mathcal{H}(\varepsilon,\xi,0)(\eta) = \eta + A_{\varepsilon,\xi}^{-1}(R''_\varepsilon(\omega)\eta).$$

Par le Lemme 4.12 et le Lemme 4.13, on déduit que $\partial_\omega\mathcal{H}(\varepsilon,\xi,0)$ est, pour ε suffisamment petit, inversible comme perturbation de l'identité. Par conséquent, le résultat se déduit en appliquant le Théorème des fonctions implicites. □

4.3.4 Réduction variationnelle

Rappelons que nous recherchons une solution sous la forme

$$u_\xi = \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}.$$

On définit la fonctionnelle $J_\varepsilon : \Lambda_{\varepsilon,k} \to \mathbb{R}$ par

$$J_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}\Big), \text{ pour tout } \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}$$

où $w_{\varepsilon,\xi}$ est l'unique élément déterminé dans la proposition 4.1.

Lemme 4.14. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors ξ^* est un point critique de J_ε si et seulement si u_{ξ^*} est un point critique de la fonctionnelle I_ε définie dans (4.1.10).

Démonstration. Soit $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k) \in \Lambda_{\varepsilon,\xi}$, on dérive J_ε par rapport à ξ_{ji}, qu'on note $\partial_{ji} J_\varepsilon$, pour tout $j = 1, .., k$ et $i = 1, .., N$.

$$\partial_{ji} J_\varepsilon(\xi) = I'_\varepsilon(\partial_{ji} u_\xi),$$

Par suite, par la Proposition 4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{ji} J_\varepsilon(\xi) &= \sum_{j,i} c_{l,m} \langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} u_\xi \rangle_\varepsilon \\ &= \sum_{l,m} c_{l,m} \langle \bar{z}_{l,m}, \sum_{j=1}^{k} \partial_{ji} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon \\ &= \sum_{l,m} c_{l,m} \langle \bar{z}_{l,m}, \bar{z}_{ji} \rangle_\varepsilon + \sum_{l,m} \sum_{j=1}^{k} c_{l,m} \langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nous estimons tout d'abord,

$$|\langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon|.$$

Rappelons que $w_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k}$, alors

$$\langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon = -\langle \partial_{ji} \bar{z}_{l,m}, w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon.$$

Ainsi

$$|\langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon| \leqslant \|\partial_{ji} \bar{z}_{l,m}\|_\varepsilon \|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon.$$

En utilisant (4.3.35) et (4.3.54), on obtient

$$\langle \bar{z}_{l,m}, \partial_{ji} w_{\varepsilon,\xi} \rangle_\varepsilon = o(1), \text{ où } o(1) \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

de la même manière, par (4.3.32), il en découle

$$\langle \bar{z}_{l,m}, \bar{z}_{ji} \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{N-2} C \delta_{jl} \delta_{im} + o(1)$$

par conséquent,

$$\partial_{ji} J_\varepsilon(\xi) = C \varepsilon^{N-2} \sum_{l,m} c_{l,m} \delta_{l,m} \delta_{j,i} + o(1).$$

Ceci définit un système linéaire presque orthogonal, pour ε suffisamment petit, en les $c_{l,m}$ et le Lemme en découle. □

Proposition 4.2. Pour tout entier positif k, on a

$$I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \Big) = \varepsilon^N k \mathcal{A} - \varepsilon^N \sum_{j=1}^k (1 - \phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)) \mathcal{B} - c' \varepsilon^N \sum_{i<j} U\Big(\frac{|\xi_i - \xi_j|}{\varepsilon} \Big)$$

$$+ \varepsilon^N O\Big(\varepsilon^{2s} + \sum_{j=1}^k |\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j) - 1|^q + \sum_{i<j} U^2\Big(\frac{|\xi_i - \xi_j|}{\varepsilon} \Big) \Big),$$

c' est une constante positive, $q = \min(p-1, 1)$ et

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}(U) U \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{F}(U) \, dx, \quad \mathcal{B} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|U-1|^p - 1 + pU \Big) > 0,$$

où $\bar{F}$ est la primitive de $\bar{f}$ définie dans (4.3.42).

Démonstration. On a

$$I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \Big) = \sum_{j=1}^k I_\varepsilon\Big(\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \Big) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^k \langle \bar{u}_{\varepsilon,\xi_i}, \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \rangle_\varepsilon - \int_\Omega \Big(F_\varepsilon\Big(y, \sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \Big) - \sum_{j=1}^k F_\varepsilon(\bar{u}_{\varepsilon,x_j}) \Big) \, dx.$$

Tout d'abord, nous estimons

$$I_\varepsilon\Big(\bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} \Big) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}|^2 + p w_\varepsilon^{p-1} \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}^2 dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x, \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}) dx.$$

Par l'estimation 4.3.28 et (4.3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon\Big(\bar u_{\varepsilon,\xi_j}\Big) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,x_j})\bar u_{\varepsilon,\xi_j}\,dx - \int_\Omega F_\varepsilon(y,\bar u_{\varepsilon,\xi_j})\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p(w_\varepsilon^{p-1}-1)|\bar u_{\varepsilon,\xi_j}|^2\,dx\\
&= \varepsilon^N I_\varepsilon(U) - \int_\Omega \Big(F_\varepsilon(y,U_{\varepsilon,\xi_j}) - F_\varepsilon(U_{\varepsilon,\xi_j})\Big)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p(w_\varepsilon^{p-1}-1)|\bar u_{\varepsilon,\xi_j}|^2\,dx + O(\varepsilon^{N+2s})\\
&= \varepsilon^N I_\varepsilon(U) - \int_\Omega \Big(\frac{1}{p+1}|U_{\varepsilon,\xi_j}-w_\varepsilon|^p(U_{\varepsilon,\xi_j}-w_\varepsilon) + \frac{1}{p+1}w_\varepsilon^{p+1} - w_\varepsilon^p U_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\,dx\\
&\quad + \int_\Omega \Big(\frac{1}{p+1}|U_{\varepsilon,\xi_j}-1|^p(U_{\varepsilon,\xi_j}-1) + \frac{1}{p+1} - U_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\,dx + O(\varepsilon^{N+2s})\\
&= \varepsilon^N I_\varepsilon(U) - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Big(-|U_{\varepsilon,\xi_j}-1|^p + 1 - pU_{\varepsilon,\xi_j}\Big)(w_\varepsilon(x)-1) + \varepsilon^N O(|w_\varepsilon(x)-1|^2)\Big)\,dx\\
&+ O(\varepsilon^{N+2s}).
\end{aligned}$$

Par un développement de Taylor et (4.1.7),

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon\Big(\bar u_{\varepsilon,\xi_j}\Big) &= \varepsilon^N I_\varepsilon(U) + \varepsilon^N(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)\int_{\mathbb{R}^N}\Big(-|U-1|^p + 1 - pU\Big)\,dx + \varepsilon^N O(|\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1|^2 + \varepsilon^{2s})\\
&= \varepsilon^N I_\varepsilon(U) + \varepsilon^N B(\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1) + \varepsilon^N O(|\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1|^2 + \varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Nous estimons maintenant le terme $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^k \langle \bar u_{\varepsilon,\xi_i}, \bar u_{\varepsilon,\xi_j}\rangle_\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\langle \bar u_{\varepsilon,\xi_i}, \bar u_{\varepsilon,\xi_j}\rangle_\varepsilon &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})\bar u_{\varepsilon,\xi_j}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^k\int_\Omega p(w_\varepsilon^{p-1}-1)\bar u_{\varepsilon,\xi_i}\bar u_{\varepsilon,\xi_j}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_\Omega p(w_\varepsilon^{p-1}-1)(U^2_{\varepsilon,\xi_i} + U^2_{\varepsilon,\xi_j})\,dx + O(\varepsilon^{2(N+2s)})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j} + \varepsilon^N O\Big(|\phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1|^q + \varepsilon^{2s} + \sum_{i<j}U^2\Big(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Pour estimer le terme $\displaystyle\int_\Omega\left(F_\varepsilon\Big(y,\sum_{j=1}^k \bar u_{\varepsilon,\xi_j}\Big) - \sum_{j=1}^k F_\varepsilon(\bar u_{\varepsilon,x_j})\right)dx$ on utilise les inégalités algébriques données dans le Lemme 4.2, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(F_\varepsilon\Big(y,\sum_{j=1}^k \bar u_{\varepsilon,\xi_j}\Big)-\sum_{j=1}^k F_\varepsilon(\bar u_{\varepsilon,\xi_j})\Big)\,dx &\leqslant C\int_\Omega \Big((\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^{p+1}-\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^{p+1}+(\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^2 \\
&\qquad -\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^2\Big)\,dx \\
&\leqslant C\int_\Omega \Big((\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^{p+1}-\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^{p+1} \\
&\qquad +(\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^2-\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^2\Big)\,dx \\
&\qquad -\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,x_i})U_{\varepsilon,\xi_j}\,dx+\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= C\int_\Omega \Big((\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^{p+1}-\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^{p+1}+(\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j})^2-\sum_{j=1}^k U_{\varepsilon,\xi_j}^2\Big) \\
&\quad -\sum_{i\neq j}\int_\Omega (U_{\varepsilon,\xi_i}^p+U_{\varepsilon,\xi_i}^2)U_{\varepsilon,\xi_j}\,dx+\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j}.
\end{aligned}$$

Par le Lemme 4.1,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(F_\varepsilon\Big(y,\sum_{j=1}^k \bar u_{\varepsilon,\xi_j}\Big)-\sum_{j=1}^k F_\varepsilon(\bar u_{\varepsilon,\xi_j})\Big)\,dx &\leqslant C\sum_{i\neq j}\int_\Omega \Big(U_{\varepsilon,\xi_j}^p\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j})+U_{\varepsilon,\xi_j}\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j}) \\
&\quad -U_{\varepsilon,\xi_i}^pU_{\varepsilon,\xi_j}-U_{\varepsilon,\xi_i}^2U_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\,dx+\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j} \\
&\leqslant C\sum_{i\neq j}\int_{B(\xi_i,\varepsilon)\cup B(\xi_j,\varepsilon)} \Big(U_{\varepsilon,\xi_j}^p\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j}) \\
&\quad +U_{\varepsilon,\xi_j}\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j})-U_{\varepsilon,\xi_i}^pU_{\varepsilon,\xi_j}-U_{\varepsilon,\xi_i}^2U_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\,dx \\
&\quad +\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j}\,dx \\
&\quad +\sum_{i\neq j}\int_{\Omega\setminus(B(\xi_i,\varepsilon)\cup B(\xi_j,\varepsilon))} \Big(U_{\varepsilon,\xi_j}^p\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j}) \\
&\quad +U_{\varepsilon,\xi_j}\inf(U_{\varepsilon,\xi_i},U_{\varepsilon,\xi_j})-U_{\varepsilon,\xi_i}^pU_{\varepsilon,\xi_j}-U_{\varepsilon,\xi_i}^2U_{\varepsilon,\xi_j}\Big)\,dx \\
&\quad +\sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= \sum_{i\neq j}\int_\Omega \bar f(U_{\varepsilon,\xi_i})U_{\varepsilon,\xi_j}+\varepsilon^N O(\varepsilon^{2s}).
\end{aligned}$$

En combinant les inégalités ci-dessus le Lemme en découle. □

4.3.5 Preuve du Théorème 4.3

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème principal de cette section 4.3. Nous allons montrer le résultat fondamental suivant, le problème

$$\max_{\xi\in\Lambda_{\varepsilon,k}} J_\varepsilon(\xi) \tag{4.3.60}$$

admet un point maximum $\xi^* = (\xi_1^*, ..., \xi_k^*)$ intérieur à $\Lambda_{\varepsilon,k}$. En effet, par continuité, $J_\varepsilon(\xi)$ admet un point maximum $\xi^* \in \bar{\Lambda}_{\varepsilon,k}$. Par la Proposition 4.2, le Lemme 4.10 et Lemme 4.11,

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\xi) &= I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}\Big)\\
&= I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\Big) + O(\|L_{\varepsilon,\xi}\|\|w_{\varepsilon,\xi}\| + \|w_{\varepsilon,\xi}\|^2 + R_\varepsilon(w_{\varepsilon,\xi}))\\
&= I_\varepsilon\Big(\sum_{j=1}^k \bar{u}_{\varepsilon,\xi_j}\Big) + O(\varepsilon^{N+qs})\\
&= \varepsilon^N kA - \varepsilon^N kB\sum_{j=1}^k (1-\phi_1^{\frac{1}{p}}) - c'\varepsilon^N \sum_{i<j} U\Big(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon^{N+qs}).
\end{aligned}$$

Soit $\bar{\xi} \in \Lambda_{\varepsilon,k}$ tel que

$$d(\bar{\xi}, S) = \varepsilon^{\beta s}, \quad |\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_j| \geqslant \varepsilon^{\beta s},$$

où $\beta = \frac{q}{2k}$, alors $1-\phi(\bar{\xi}_j)^{\frac{1}{p}} \leqslant Cd^2(\bar{\xi}_j, S) \leqslant C\varepsilon^{2\beta s}$. Par les Propositions 4.1, 4.2 on obtient,

$$J_\varepsilon(\bar{\xi}) = \varepsilon^N kA - \varepsilon^N kB\sum_{j=1}^k (1-\phi_1^{\frac{1}{p}}(\bar{\xi}_j)) - c'\varepsilon^N \sum_{i<j} U\Big(\frac{|\bar{\xi}_i-\bar{\xi}_j|}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon^{N+qs}).$$

Par suite

$$J_\varepsilon(\bar{\xi}) = \varepsilon^N kA - \varepsilon^N kB\varepsilon^{2\beta s} - c\varepsilon^N\varepsilon^{2\beta s} + O(\varepsilon^{N+qs}). \tag{4.3.61}$$

En utilisant le fait que, $\beta < \frac{q}{2}$, on arrive à

$$J_\varepsilon(\bar{\xi}) = \varepsilon^N kA + O(\varepsilon^{N+qs}). \tag{4.3.62}$$

Comme $J_\varepsilon(\bar{\xi}) \leqslant J_\varepsilon(\xi^*)$, (4.3.61), (4.3.62) et rappelons que $\tau = \frac{q}{2(k+1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} 1 - \phi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j^*) &\leqslant O(\varepsilon^{2\beta s}) < O(\varepsilon^{\tau s}), \\ U\Big(\frac{|\xi_i^* - \xi_j^*|}{\varepsilon}\Big) &\leqslant O(\varepsilon^{2\beta s}) < O(\varepsilon^{\tau s}). \end{aligned}$$

Par conséquent, ξ^* est un point intérieur de $\Lambda_{\varepsilon,k}$. Finalement par le Lemme 4.14, u_{ξ^*} est un point critique de I_ε et donc une solution du problème (4.1.8) et le Théorème 4.3 est démontré.

4.4 Appendice

L'objectif principal de cet appendice est de prouver le Théorème 4.4. Pour ce faire, nous adaptons les arguments de [52] en prenant en considération le fait que la non linéarité dans notre cas est non homogène, ce qui produit plusieurs difficultés. Nous commençons par donner un résultat important qui sera utilisé par la suite.

Proposition 4.3. Soient $0 < \lambda < N$, $1 \leqslant p < \ell < \infty$. Supposons que $\dfrac{1}{\ell} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\lambda}{N}$. Pour tout $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$J_\lambda(h)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(y)}{|x-y|^\lambda} dy.$$

a) J_λ est bien défini dans le sens où l'intégrale converge absolument pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

b) Si $p > 1$, alors $||J_\lambda(h)||_\ell \leqslant c_{p,q}||h||_p$, où $c_{p,q}$ est une constante positive.

c) Si $p = 1$, alors $\Big|\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, J_\lambda(h)(x) > \sigma\}\Big| \leqslant \Big(\dfrac{A||h||_1}{\sigma}\Big)^\ell$.

Voir la section 1.2 du chapitre V dans [76] pour la démonstration.

4.4.1 Preuve du Théorème 4.4

La démonstration est structurée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Existence d'un état fondamental radial.

En prenant en considération la structure de l'équation, nous prouverons l'existence d'une solution radiale. Il est clair que si U est une solution radiale du problème (4.3.19), alors U

vérifiée

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^s U + p\,U &=& |U-1|^p + p(U-1) + p - 1,\ U > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\
U(0) &=& \max\limits_{y\in\mathbb{R}^N} U(y). \\
U &\in& H^s(\mathbb{R}^n).
\end{cases} \tag{4.4.63}
$$

Posons $f(\sigma) = |\sigma - 1|^p + p(\sigma-1) + p - 1$, alors $f(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \in I\!R$. maintenant si $f_1(\sigma) = f(\sigma_+)$, alors

$$
f_1(\sigma) = \begin{cases}
0 & \text{si} \quad \sigma < 0, \\
(1-\sigma)^p - (1 - p\,\sigma) & \text{si} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \\
(\sigma-1)^p + (p\,\sigma - 1) & \text{si} \quad \sigma > 1,
\end{cases} \tag{4.4.64}
$$

Si U est une solution non triviale de

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^s U + p\,U \;=\; f_1(U) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\
U \in H^s(\mathbb{R}^n).
\end{cases} \tag{4.4.65}
$$

alors, en utilisant U_- comme fonction test dans (4.4.65), on obtient $||U_-||_{H^s(I\!R^N)} = 0$, par suite $U \geqslant 0$. Par le principe du maximum il en résulte que $U > 0$ dans $\mathbb{R}^N$ et alors U est solution de (4.4.63). Ainsi, pour obtenir le résultat désiré, nous allons montrer que le problème (4.4.65) admet une solution radiale décroissante. Notons par

$$
H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \equiv \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) :\ u \text{ radial } \},
$$

alors, voir [42], pour tout $u \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$
|u(x)| \leqslant C|x|^{-\frac{N-2s}{2}} ||u||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} \tag{4.4.66}
$$

où $C = C(N,s)$ est une constante positive qui ne dépend que de N et s. Les solutions du problème (4.4.65) sont des points critiques de la fonctionnelle J définie par

$$
J(u) = \frac{a_{N_s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_1(u)dx,
$$

où $F_1(\sigma) = \int_0^\sigma f_1(t)dt$ est donnée par

$$F_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma < 0, \\ \frac{1}{p+1}[1-(1-\sigma)^{p+1}] + \frac{p}{2}\sigma^2 - \sigma & \text{si} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \\ \frac{1}{p+1}(\sigma-1)^{p+1} + \frac{p}{2}\sigma^2 - \sigma + \frac{1}{p+1} & \text{si} \quad \sigma > 1, \end{cases}$$

Nous affirmons que J admet la géométrie du "mountain pass". En effet, on a $J(0) = 0$. De plus, comme $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{F_1(\sigma)}{\sigma^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, on obtient l'existence de $u_1 \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$||u_1||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} >> 1 \quad \text{et} \quad J(u_1) << 0.$$

D'autre part, comme $\lim_{\sigma\to 0^+} \dfrac{F_1(\sigma)}{\sigma^2} = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut avoir une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$F_1(\sigma) \leqslant \varepsilon\sigma^2 + C(\varepsilon)|\sigma|^{p+1}.$$

Par suite

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}||u||^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} - \varepsilon||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C(\varepsilon)||u||^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Choisissons ε suffisamment petit, il en découle que

$$J(u) \geqslant C_1(\varepsilon)||u||^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} - C(\varepsilon)||u||^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $2 < p+1 < 2^*_s$, il en résulte que $||u||^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2||u||^{p+1}_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)}$ et donc

$$J(u) \geqslant C_1(\varepsilon)||u||^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} - \bar{C}(\varepsilon)||u||^{p+1}_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)}.$$

On peut alors conclure à l'existence d'un $0 < \rho < 1$ et $\alpha(\rho) > 0$ tels que, si $||u||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} = \rho$, alors $J(u) \geqslant \alpha(\rho)$. Par conséquent J admet une géométrie de "mountain pass" et l'affirmation est démontrée.

On définit le niveau critique

$$C = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)) \text{ tel que } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}.$$

On a $C > 0$ donc par le théorème du "mountain pass" , nous obtenons l'existence d'une suite

$\{u_n\}_n \subset H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$J(u_n) \to C \text{ et } ||J'(u_n)||_{(H^s_{rad}(\mathbb{R}^N))'} \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{4.4.67}$$

Nous affirmons que la suite $\{u_n\}_n$ est bornée dans $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Montrons tout d'abord qu'il existe un $\theta \in (2, \theta^*)$ tel que

$$\theta^* = \min\left\{2 + \frac{1}{2(p-1)},\ 2 + \frac{2}{p},\ \frac{p+3}{2}\right\},$$

et que

$$l(\sigma) = \frac{1}{\theta}\sigma f_1(\sigma) - F_1(\sigma) \geqslant 0 \text{ for all } \sigma \in I\!R, \tag{4.4.68}$$

c'est-à-dire que f_1 satisfait la condition de Ambrosetti-Rabinowitz. Clairement (4.4.68) est vérifiée pour tout $\sigma \leqslant 0$. Pour montrer l'affirmation, nous considérons séparément les deux cas, $\sigma \geqslant 1$ et $\sigma < 1$.

Le cas : $\sigma \geqslant 1$. On a

$$l(\sigma) \;=\; \frac{p+1-\theta}{\theta(p+1)}(\sigma-1)^{p+1} + \frac{1}{\theta}(\sigma-1)^p - \frac{p(\theta-2)}{2\theta}\sigma^2 + \frac{\theta-1}{\theta}\sigma - \frac{1}{p+1}.$$

et

$$\begin{aligned}\theta l'(\sigma) &= (p+1-\theta)(\sigma-1)^p + p(\sigma-1)^{p-1} - p(\theta-2)\sigma + (\theta-1)\\ &= (p+1-\theta)(\sigma-1)^p + p(\sigma-1)^{p-1} - p(\theta-2)(\sigma-1) + (\theta-1) - p(\theta-2).\end{aligned}$$

Pour $\theta > 2$, par l'inégalité de Young, on obtient

$$p(\theta-2)(\sigma-1) \leqslant (\theta-2)(\sigma-1)^p + (\theta-2)(p-1).$$

Choisissons $\theta \in (2, \theta^*)$, on obtient $(\theta-2)(p-1) \leqslant (\theta-1)-p(\theta-2)$ et $(\theta-2) \leqslant (p+1-\theta)$. Ainsi $l'(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \in (1, \infty)$. Prenons en considération le fait que $l(1) = \frac{p-1}{\theta}(1 - \frac{p\theta}{2(p+1)}) > 0$ si $\theta \in (0, \theta^*)$, on déduit que $l(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \geqslant 1$.

Le cas : $\sigma \in (0,1)$. En utilisant la définition de f_1 et F_1 on obtient

$$l(\sigma) \;=\; -\frac{p+1-\theta}{\theta(p+1)}(1-\sigma)^{p+1} + \frac{1}{\theta}(1-\sigma)^p + \frac{\theta-1}{\theta}\sigma - \frac{p(\theta-2)}{2\theta}\sigma^2 - \frac{1}{p+1}.$$

Donc

$$\theta l'(\sigma) = (p+1-\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + ((\theta-1) - p(\theta-2)) - p(\theta-2)(1-\sigma).$$

Comme $\theta \in (2, \theta^*)$, il en découle, par l'inégalité de Young,

$$p(\theta-2)(1-\sigma) \leqslant (\theta-2)(1-\sigma)^p + (\theta-2)(p-1).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\theta l'(\sigma) &\geqslant (p+1-\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + ((\theta-1) \\ &\quad -p(\theta-2)) - (\theta-2)(1-\sigma)^p - (\theta-2)(p-1) \\ &\geqslant (p+3-2\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + 2(2p-1-\theta(p-1)).\end{aligned}$$

Comme $\theta < \theta^*$, on obtient

$$p+3-2\theta \text{ et } 2p-1-\theta(p-1) > 0.$$

Ainsi $l'(\sigma) > 0$ pour tout $\sigma \in (0,1)$. En utilisant le fait que $l(0) = 0$, on obtient $l(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \in (0,1)$.

Par conséquent $l(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$.

Maintenant, par (4.4.67) on arrive à

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle \leqslant \overline{C} + o(1)||u_n||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)},$$

Par suite

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})||u_n||^2_{H^s_r(\mathbb{R}^N)} \leqslant \overline{C} + o(1)||u_n||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)}.$$

Ainsi $||u_n||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C$ ce qui montre l'affirmation.

D'après ce qui précède, on conclut à l'existence de $\overline{u} \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$ telle que, modulo une sous suite, $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ faiblement dans $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to \overline{u}$ fortement $L^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha < 2^*_s$ et $u_n \to \overline{u}$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$. Clairement $\overline{u}$ est une solution faible de (4.4.65). Montrons pour terminer, que $u > 0$. En effet, en utilisant l'estimation (4.4.66) et le Lemme de Vitali, il en découle que $u_n \to \overline{u}$ fortement dans $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ pour tout $2 < \alpha < 2^*_s$. En particulier $u_n \to \overline{u}$ fortement dans $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$.

Comme $\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{\sigma f_1(\sigma)}{\sigma^3} = 0$ et $\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\sigma f_1(\sigma)}{\sigma^{p+1}} = 1$, on obtient l'existence de $2 < \beta < \max\{3, 2_s^*\}$ tel que

$$\sigma f(\sigma) \leqslant c_1 \sigma_+^{\beta} + c_2 \sigma_+^{p+1}.$$

Par le Théorème de la convergence dominée, on obtient

$$u_n f(u_n) \to \overline{u} f(\overline{u}) \quad \text{fortement dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent, comme $||J'(u_n)||_{(H^s_{rad}(\mathbb{R}^N))'} \to 0$ quand $n \to \infty$, il en résulte que

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{fortement dans } H^s_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Ainsi $J(\overline{u}) = C > 0$ ce qui donne que $\overline{u} > 0$. Maintenant, comme la solution est radiale et par (4.4.66), on arrive à montrer que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^{2s+1}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 4.1. Comme $f \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(I\!R)$ par la méthode des plans mobiles, voir [64], (voir aussi [46] où l'argument des plans mobiles est utilisé pour montrer la symétrie d'un problème avec un potentiel singulier), on peut démontrer que toute solution positive du problème (4.4.65) est radiale par rapport à un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Nous montrons maintenant l'estimation (4.3.20). Pour ce faire, remarquons que U est solution de

$$(-\Delta)^s U - \frac{pU + |U-1|^p - 1}{U} U = -pU, \ U > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Donc, en posant $V(x) = -\frac{pU + |U-1|^p - 1}{U}$ et en utilisant le fait que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^{2s+1}(\mathbb{R}^N)$, on obtient que $V \in L^\infty$ et $V \to 0$ quand $|x| \to \infty$. Par conséquent, par le Lemme C2 dans [52] on obtient

$$|U(x)| \leqslant \frac{C}{1 + |x|^{N+2s}}, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Montrons maintenant que U admet plus de régularité, par la Proposition B1 de [52], il résulte que $U \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ pour une constante $\alpha \in (0,1)$. Utilisons le fait que $f \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(I\!R)$ et le Lemme 4.4 dans [30], il en découle que $U \in \mathcal{C}^{2,\beta}(\mathbb{R}^N)$ pour un $\beta \in (0,1)$.

Finalement, montrons que l'indice de Morse de U égal à un. En effet, rappelons que l'opérateur linéarisé L est donné par

$$L \equiv (-\Delta)^s - p|U-1|^{p-2}(U-1),$$

ainsi, par un calcul direct on obtient,

$$L(U) = -\Big((p-1)|U-1|^p + p|U-1|^{p-2}(U-1) + 1\Big) < 0.$$

Rappelons également que la solution obtenue ci-dessus est une solution de type "Mountain Pass", ainsi par [59], (voir aussi [14], Remark 2.2), il en résulte que l'indice Morse de U est au plus un. Comme $L(U) < 0$, on déduit qu'il est égal à un.

Étape 2 : La non-dégénérescence.

Nous montrons par la suite que si U est un état fondamental radial positif de (4.4.63), alors U est non-dégénéré.

Comme l'opérateur linéarisé $L \equiv (-\Delta)^s + V$ avec $V \equiv -p|U-1|^{p-2}(U-1)$ et du fait que le potentiel V satisfait les mêmes conditions que ceux présentés dans [52], alors, en utilisant les mêmes arguments il suffit de montrer que

$$\ker L \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{0\}.$$

En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe $v \in \ker L \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^N)$ telle que $v \neq 0$ donc 0 est la deuxième valeur propre de l'opérateur linéarisé L. Comme dans [52], il en résulte que v change de signe une seule fois. Par suite il existe $r^* > 0$ tel que $v > 0$ dans $[0, r^*)$ et $v < 0$ dans (r^*, ∞). Notons que par un calcul direct, nous obtenons

$$L(U) = -\Big((p-1)|U-1|^p + p|U-1|^{p-2}(U-1) + 1\Big)$$

et

$$L(rU') = 2s\Big(|U-1|^p - 1\Big) \text{ où } U' = \frac{dU}{dr}.$$

Donc

$$L(rU' + \frac{2s}{p-1}U) = -2sp'\Big(|U-1|^{p-2}(U-1) + 1\Big).$$

Posons

$$V_1 = (p-1)|U-1|^p + p|U-1|^{p-2}(U-1) + 1 \text{ et } V_2 = |U-1|^{p-2}(U-1) + 1,$$

alors $V_1, V_2 \in \operatorname{Im} L$ et $V_1(r), V_2(r) > 0$ pour tout $r \in [0, \infty)$. ainsi $v \perp (V_1 - \mu V_2)$ pour tout

$\mu \in \mathbb{R}$.

Choisissons $\mu^* = \frac{V_1(r^*)}{V_2(r^*)}$ et posons $D(r) = V_1(r) - \mu^* V_2(r)$ alors $D(r^*) = 0$.

Nous affirmons que $D > 0$ dans $(0, r^*)$ et $D < 0$ dans (r^*, ∞). En effet il suffit de montrer que $\dfrac{V_1(r)}{V_2(r)}$ est strictement décroissante. On a

$$\left(\frac{V_1(r)}{V_2(r)}\right)' = U'(r)\frac{(p-1)|U-1|^{p-2}\Big(|U-1|^p + p(U-1) + p - 1\Big)}{V_2^2(r)}.$$

Rappelons que $U > 0$ dans $\mathbb{R}^N$, par l'inégalité de Young nous obtenons que $|U-1|^p + p(U-1) + p-1 > 0$. Comme $U' < 0$, alors l'affirmation en découle. Par suite, $v(r)(V_1(r) - \mu^* V_2(r)) \geqslant 0$ pour tout $r \in (0, \infty)$, ce qui contredit le fait que $v \perp (V_1 - \mu V_2)$. Par conséquent $\ker L \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{0\}$. Maintenant, la preuve de la non-dégénérescence suit les mêmes arguments utilisés dans la preuve du Théorème 3.3 dans [52].

Étape 3 : Estimations A priori.

Fixons $s_0 \in (0,1)$ et considérons $s \in [s_0, 1)$, si U_s est une solution de (4.4.63), alors par l'identité de Pohozaev, voir [70], on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + p \int_{\mathbb{R}^N} U_s^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(U_s) U_s dx.$$

et

$$\frac{N-2s}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^N} U_s^2 = N \int_{\mathbb{R}^N} F(U_s) dx.$$

Rappelons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon)$ telles que, pour tout $\sigma \geqslant 0$,

$$f(\sigma)\sigma \leqslant \varepsilon \sigma^2 + C(\varepsilon)\sigma^{p+1}$$

$$f(\sigma)\sigma \geqslant C(\varepsilon)\sigma^{p+1} - \varepsilon\sigma^2$$

et que $F(\sigma) \leqslant \frac{1}{\theta}\sigma f(\sigma)$, posons

$$M_s = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2, T_s = \int_{\mathbb{R}^N} U_s^2, K_s = \int_{\mathbb{R}^N} U_s^{p+1}$$

alors, en utilisant le fait que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} U_s^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_s^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geqslant S(p,s) \equiv \inf_{w \in H^s(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} w^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} > 0,$$

on obtient que $M_s \sim T_s \sim K_s \geqslant C$. Notons que $a \sim b$ signifie que

$$a \leqslant C_1 b \text{ et } b \leqslant C_2\, a,$$

où $C_1 = C_1(N, s_0, U_{s_0})$ et $C_2 = C_2(N, s_0, U_{s_0})$ sont des constantes positives.

Rappelons que $f(\sigma) = |\sigma - 1|^p + p(\sigma - 1) + p - 1$, soit $0 < t < s_0$, que nous choisirons plus tard, alors

$$||(-\Delta)^t U_s||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||\frac{(-\Delta)^t}{(-\Delta)^s + p} f(U_s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant ||(-\Delta)^{t-s} f(U_s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $t < s$, alors l'opérateur $(-\Delta)^{t-s}$ est donnée comme une convolution avec le poids $|x|^{-(N-2(s-t))}$.

Utilisons le fait que $0 \leqslant f(\sigma) \leqslant \varepsilon|\sigma|^\gamma + C(\varepsilon)\sigma^p$, pour tout $\gamma \in (1, 2)$, on obtient

$$||(-\Delta)^{t-s} f(U_s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||(-\Delta^{t-s})U_s^\gamma||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C_2||(-\Delta)^{t-s} U_s^p||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

où C_1, C_2 sont indépendantes de U_s.

Posons $h_1 = ((-\Delta)^{t-s} U_s^\gamma)$, $h_2 = ((-\Delta)^{t-s} U_s^{p+1})$ et choisissons $t = s - \frac{(p-1)N}{2(p+1)}$, par la Proposition (4.3), on arrive à

$$||(-\Delta)^t U_s||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||U_s^p||^2_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)} + C_2||U_s^\gamma||^2_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)}$$

Choisissons maintenant $\gamma = \frac{2p}{p+1}$, on déduit que

$$||(-\Delta)^t U_s||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||U_s||^{2p}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} + C_2||U_s||^{\frac{4p}{p+1}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1 K_s^{\frac{2p}{p+1}} + T_s^{\frac{2p}{p+1}}.$$

Par le fait que $K_s \sim T_s$, il en résulte que

$$||(-\Delta)^t U_s||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_3 K_s^{\frac{2p}{p+1}}, \quad t = s - \frac{(p-1)N}{2(p+1)}. \tag{4.4.69}$$

Pour conclure cette étape, montrons que $K_s \leqslant C$ pour tout $s \in [s_0, 1)$. Pour ce faire nous adaptons à notre cas les mêmes arguments présentés dans [52]. Rappelons que

$$L(U_s) = f(U_s) - f'(U_s)U_s = -g(U_s)$$

où

$$g(\sigma) = (p-1)|\sigma - 1|^p + p|\sigma - 1|^{p-2}(\sigma - 1) + 1.$$

Posons $G(\sigma) = \int_0^\sigma g(t)dt$ et $Y_s = \int_{\mathbb{R}^N} G(U_s)dx$, alors

$$\frac{dY_s}{ds} = \int_{\mathbb{R}^N} g(U_s)\frac{dU_s}{ds}dx = -\langle L(U_s), \frac{dU_s}{ds}\rangle = -\langle L(\frac{dU_s}{ds}), U_s\rangle.$$

Comme $L(\frac{dU_s}{ds}) = -(-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s)$, il en résulte que

$$\frac{dY_s}{ds} = \langle(-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}\rangle.$$

Pour $t = s - \frac{(p-1)N}{2(p+1)}$ défini ci-dessus dans (4.4.69), on obtient pour tout $R > 0$,

$$\langle(-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}\rangle \leqslant 2(\log R)M_s + 2R^{2s-4t}\log(R)\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{4t}|\widehat{U_s}|^2 d\xi$$

Encore une fois par (4.4.69), en utilisant le fait que $M_s \sim K_s$ et en choisissant

$$R^{4t-2s} = CK_s^{\frac{2p}{p+1}-1} > e^{\frac{1}{4t-2s}},$$

il en découle que

$$\frac{dY_s}{ds} = \langle(-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}\rangle \leqslant C(1 + (\log K_s))K_s.$$

Comme pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|\sigma|^{p+1} \leqslant \varepsilon|\sigma|^2 + C(\varepsilon)G(\sigma)$, on déduit que $K_s \sim Y_s$. Ainsi

$$\frac{dY_s}{ds} \leqslant C(1 + (\log Y_s))Y_s.$$

L'intégration de l'inégalité différentielle ci-dessus pour $s \in (s_0, 1)$ donne $Y_s \leqslant C$ pour tout $s \in [s_0, 1)$. D'où le résultat.

Étape 4 : Unicité de la solution radiale.

Nous montrerons que l'argument de continuation présenté dans [52] peut être généralisé à notre cas. Notons que si $s = 1$, le résultat de l'unicité est bien connu dans la littérature.

Posons

$$E = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \text{ avec } u \text{ radiale}\},$$

et fixons $s_0 \in (0, 1)$, alors pour $s \in [s_0, 1)$ on note par $U_s \in E$ une solution positive du problème (4.4.63) au sens faible. On a $U \in H^{2s+1} \cap \mathcal{C}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que U est radiale décroissante.

En utilisant la non-dégénérescence obtenue ci-dessus et par le Théorème des fonctions implicites, on peut montrer que si U_{s_0} est une solution non dégénérée du problème (4.4.63), alors il existe $\delta > 0$ est une application $T \in \mathcal{C}^1([s_0, s_0 + \delta), E)$ telle que

1. Si $s \in [s_0, s_0 + \delta)$, alors $T(s) \equiv U_s$ est une solution problème (4.4.63).
2. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que dans $\{u \in E : ||u - U_{s_0}|| < \varepsilon\}$, le problème (4.4.63) admet une solution unique U_s pour tout $s \in [s_0, s_0 + \delta)$.

Posons

$$s^* = \sup\Big\{\overline{s} \in [s_0, 1) \text{ tel que les propriétés (1) et (2) sont satisfaites dans } [s_0, \overline{s})\Big\}.$$

L'idée principale est de montrer que si U_{s_0} est une solution, état fondamental, positive du problème (4.4.63), alors $s^* = 1$.

Notons que par le Lemme 8.3 dans [52], on déduit que si $U_{s_0} > 0$, alors $U_s > 0$ dans $\mathbb{R}^N$ pour tout $s \in [s_0, s^*)$.

Maintenant, en tenant compte des estimations a priori obtenues dans la troisième étape et par l'argument de continuation utilisé dans [52], on montre que si $U_{s_0}, \tilde{U}_{s_0}$ sont deux solutions de (4.4.63) tel que $U_{s_0} \neq \tilde{U}_{s_0}$, alors $s^* = \tilde{s}^* = 1$. Où $\tilde{s}^*$ est défini comme s^* en remplaçant U_s par $\tilde{U}_s$. En utilisant le résultat d'unicité, pour $s = 1$, voir [52] on obtient une contradiction. Ainsi le résultat d'unicité est démontré. ■

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, R. Bentifour, *Caffarelli-Kohn-Nirenberg Type Inequalities of Fractional Order and Applications.* J. Funct. Anal. 272 (2017), no.10, 3998-4029.

[2] B. Abdellaoui, A. Dieb, E. Valdinoci, *A nonlocal concave-convex problem with nonlocal mixed boundary data.* To appear in Comm. on Pure Appl. Analysis. 2017. ArXiv 1611.09902.

[3] B. Abdellaoui,A. Attar, A. Dieb, I. Peral, *Attainability of the fractional hardy constant with nonlocal mixed boundary conditions : Applications.* DCDS. 2018, 38(12) : 5963-5991

[4] B. Abdellaoui, A. Dieb, F. Mahmoudi,*On the fractional Lazer-McKenna conjecture with superlinear potential.* Calc. Var. (2019) 58 : 7.

[5] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, *Some remarks on elliptic equations with singular potential and mixed boundary conditions* Advanced Nonlinear Studies 4 (2004), 503-533.

[6] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, *Effect on the boundary conditions in the behaviour of the optimal constant of some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. Application to some doubly critical nonlinear elliptic problems* Advances in Differential Equations 11 (2006), 667-720.

[7] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *A note on the effect of the Hardy potential in some Calderon-Zygmund properties for the fractional Laplacian,* J. Differential Equations 260 (2016), no. 11, 8160-8206.

[8] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *Optimal results for the fractional heat equation involving the Hardy potential.* Nonlinear Anal. 140 (2016), 166-207.

[9] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *A remark on the fractional Hardy inequality with a remainder term*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 299-303.

[10] S. Alama, *Semilinear elliptic equation with sublinear indefinite nonlinearities*, Adv. Differential Equation 4 (6) (1999), 813-842.

[11] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems.* Mem. Soc. Math. France (N.S.) 49 (1992), 1-139.

[12] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (2) (1994), 519-543.

[13] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[14] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Progress in Mathematics 240, Birkhäuser, Basel, 2006.

[15] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, S. Secchi, *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Arch. Ration. Mech. Anal. **159** (2001), 253-271.

[16] A. Ambrosetti, G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **93** (1972), 231-246.

[17] D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus (2nd edn)*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 116 (Cambridge University Press, 2009).

[18] J. G. Azorero, I. Peral. *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term.* Trans. Am. Math. Soc. 323 (1991), 877-895.

[19] A. Bahri, *Critical points at infinity in some variational problems*, Research Notes in Mathematics, 182, Longman-Pitman, London, 1989.

[20] B. Barrios, E. Colorado, R. Servadei, F. Soria, *A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32 (2015), no. 4, 875-900.

[21] B. Barrios, M. Medina, *Strong maximum principles for fractional elliptic and parabolic problems with mixed boundary conditions*, ArXiv 1607.01505.

[22] B. Barrios, M. Medina, I. Peral, *Some remarks on the solvability of non-local elliptic problems with the Hardy potential.* Commun. Contemp. Math. 16 (2014), no. 4, 1350046, 29 pp.

[23] W. Beckner, *Pitt's inequality and the uncertainty principle*, Proceedings of the American Mathematical Society, **123** (1995), no. 6, 1897–1905.

[24] B. Breuer, P.J. McKenna, and M. Plum, *Multiple solutions for a semilinear boundary value problem : a computational multiplicity proof*, J. Differential Equations, 195 (2003), 243-269.

[25] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta Math. 74 (1992), 87-106.

[26] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), no. 4, 437-477.

[27] C. Bucur, M. Medina, *A fractional elliptic problem in* $\mathbb{R}^n$ *with critical growth and convex nonlinearities*, ArXiv 1609.01911.

[28] C. Bucur, E. Valdinoci, *Nonlocal diffusion and applications*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 20. Springer ; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016. xii+155 pp. ISBN : 978-3-319-28738-6 ; 978-3-319-28739-3.

[29] X. Cabré, J. Tan,*Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian*, Adv. Math., 224(5), (2010), 2052-2093.

[30] X. Cabré, Y. Sire, *Nonlinear equations for fractional Laplacians I : Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates*, Annales. Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, **31**, (2014), No. 1, 23-53

[31] L. Caffarelli, L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*. Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 7-9, 1245-1260.

[32] L. Caffarelli, L. Silvestre, *Regularity results for nonlocal equations by approximation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 200 (2011), no. 1, 59-88.

[33] H. Chen, L. Veron, *Semilinear fractional elliptic equations involving measures*, J. Differential Equations 257 (2014) 1457-1486.

[34] E. Colorado, I. Peral, *Semilinear elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions*. J. Funct. Anal. 199 (2003), no. 2, 468-507.

[35] A. Cordoba, D. Cordoba, *A pointwise estimate for fractionary derivatives with applications to partial differential equations*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 100 (26) (2003), 15316-15317.

[36] M. Cozzi, *Qualitative Properties of Solutions of Nonlinear Anisotropic PDEs in Local and Nonlocal Settings*. PhD thesis, 2015.

[37] E.N. Dancer, Shusen Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Differential Equations **210** (2005), 317-351.

[38] E. N. Dancer, S. Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture : Part II*, Comm. in Partial Diferential Equations, **30** (2005), 1331-1358.

[39] E. N. Dancer, S. Santra, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture : the nonhomogeneous case*, Adv. Diferential Equations, **12** (2007), 961-993.

[40] J. Dávila, M. Del Pino, S. Dipierro, E. Valdinoci, *Concentration phenomena for the nonlocal Schrödinger equation with Dirichlet datum*, ANALYSIS & PDE, **8**, (2015), no. 5, 1165-1235

[41] J. Dávila, M. del Pino, and J. Wei, *Concentrating standing waves for the fractional nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **256** (2014), No.2, 858-892.

[42] P. L. De Nápoli, I. Drelichman, *Elementary Proofs of Embedding Theorems for Potential Spaces of Radial Functions* Chapter Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory Birkhäuser pages : 115-137.

[43] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. 136 (2012), no. 5, 521-573.

[44] S. Dipierro, M. Medina, I. Peral, E. Valdinoci, *Bifurcation results for a fractional elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta Math. doi :10.1007/s00229-016-0878-3

[45] S. Dipierro, M. Medina, E. Valdinoci, *Fractional elliptic problems with critical growth in the whole of* $\mathbb{R}^N$. Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes.Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]. Edizioni della Normale, Pisa.

[46] S. Dipierro, L. Montoro, I. Peral, D. Sciunzi, *Qualitative properties of positive solutions to nonlocal critical problems involving the Hardy-Leray potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), no. 4, No. 99, 29 pp.

[47] S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci, *Nonlocal problems with Neumann boundary conditions*, to appear in Rev. Mat. Iberoam.

[48] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. Vol 47 (1974), 324-353.

[49] F. Ferrari, I. Verbitsky, *Radial fractional Laplace operators and Hessian inequalities*, J. Differential Equations **253**, (2012), no. 1, 244-272.

[50] R. Frank, E. H. Lieb, R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators,* J. Amer. Math. Soc. **20**, (2008), No. 4, 925-950.

[51] R. L. Frank, E. Lenzmann, *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in* $I\!R$, Acta Math. **210** (2013), No. 2, 261-318.

[52] R. L. Frank, E. Lenzmann, L.Silvestre, *Uniqueness of radial solutions for the fractional Laplacian*, Comm. Pure Appl. Math., **69**, (2016), 1671-1726.

[53] R.L. R. Frank, R. Seiringer, *Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities*, Journal of Functional Analysis 255 (2008) 3407-3430.

[54] N. Ghoussoub, D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire 6 (5) (1989), 321-330.

[55] L. Gongbao, Y. Jianfu, S. Yan, *Solutions with boundary layer and positive peak for an elliptic Dirichlet problem.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect. A, **134**, (2004), 515-536.

[56] M. Grossi, F. Pacella, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent and mixed boundary conditions.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 116 (1990), no. 1-2, 23-43.

[57] G. Grubb, *Local and nonlocal boundary conditions for ţ-transmission and fractional order elliptic pseudodifferential operators,* to appear in Anal. PDE.

[58] I. W. Herbst, *Spectral theory of the operator* $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Commun. math. Phys., **53** (1977), 285-294.

[59] H. Hofer, *A note on the topological degree at a critical point of mountain pass type,* Proc. A.M.S. **3** (1984), 309-315.

[60] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1972) x+424 pp.

[61] A. Lazer and P.J. McKenna, *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **95** (1983), 275-283.

[62] T. Leonori, M.Medina, I. Peral, A. Primo and F.Soria, *Principal eigenvalue of mixed problem for the fractional Laplacian involving the boundary conditions* Arxiv :1702.07644v2.

[63] T. Leonori, I. Peral, A. Primo, F. Soria, *Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), no. 12, 6031-6068.

[64] L. Ma, L. Zhao, *Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. **195** (2010), no. 2, 455-467.

[65] G. Molica Bisci, V. Radulescu, R. Servadei, *Variational methods for nonlocal fractional problems.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 162. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[66] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, Measures and Capacities.* Tracts in Mathematics 23, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2016.

[67] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Analysis 7 (1971), 487-513.

[68] X. Ros-Oton, *Nonlocal elliptic equations in bounded domains : A survey.* Publ. Mat. 60 (2016), 3-26.

[69] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian : regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. 101 (2014), 275-302.

[70] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Pohozaev Identity for the Fractional Laplacian.* Archive for Rational Mechanics and Analysis **213**, 2014, No. 2, 587-628

[71] R. Servadei, E. Valdinoci, *Mountain pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), no. 2, 887-898.

[72] R. Servadei, E. Valdinoci, *Variational methods for non-local operators of elliptic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 5, 2105-2137.

[73] R. Servadei, E. Valdinoci, *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian,* Trans. Amer. Math. Soc. **367**,(2015), 67-102

[74] R. Servadei, E. Valdinoci, *Weak and viscosity solutions of the fractional Laplace equation*, Publ. Mat. 58 (2014), 133-154.

[75] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 15 (1965), 189-258.

[76] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, Princeton N.J. 1970.

[77] E. M. Stein, G. Weiss, *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space.* J. Math. Mech., **7** (1958), 503-514.

[78] M. Struwe, *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

[79] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Differential Equations **1** (1996), no. 2, 241-264.

[80] D. Yafaev, *Sharp constants in the Hardy-Rellich inequalities.* J. Functional Analysis, **168** (1999), no. 1, 121–144.

Résumé :

Dans cette thèse on s'intéresse à étudier des problèmes elliptiques semi linéaires non local avec des conditions extérieurs de Dirichlet ou Dirichlet-Neumann. Notre objectif est généralisé le même type de résultat d'existence et de multiplicités déjà connus dans le cas du Laplacien, au cas du Laplacien fractionnaire.

Mot clé :

Problèmes elliptiques semilinéaires fractionnaires, opérateur non local, inégalité de Hardy fractionnaire, conditions de Dirichlet-Neumann non locale, conjecture Lazer-McKenna fractionnaire.

Abstract

In this thesis, we are interested in studying non-local semi linear elliptic problems with Dirichlet or Dirichlet-Neumann external boundary conditions. Our objective is to generalize the same type of existence and multiplicity results, known in the case of the Laplacian, in the case of the fractional Laplacian.

Keyword :

Fractional semilinear elliptic problems, non-local operator, fractional Hardy inequality, non-local Dirichlet-Neumann conditions, fractional Lazer-McKenna conjecture.

الملخص:

في هذه الرسالة، نقوم بدراسة المشكلات الإهليجية شبه المحلية غير الخطية مع معطيات خارجية من نوع ديريشليت أو ديريشليت-نيومان. هدفنا الرئيسي يتمثل في تعميم نتائج وحدانية الحلول وتعددها المعروفة في حالة مؤثر لبلاس إلى مؤثرات لبلاس الكسرية.

كلمات مفتاحية :

المشاكل الإهليجية الكسرية شبه الجزئية، المؤثرات غير المحلية، متراجحة هاردي الكسرية، معطيات ديريشليت-نيومان غير المحلية، مبرهنة لازر-ماكنة الكسرية.