



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTÉ DES SCIENCES - DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Par :

Mohammed Nor FRIOUI

Sur le thème

Étude mathématique de quelques modèles épidémiologiques structurés en âge.

Soutenue publiquement le jeudi 12 mars 2020 à Tlemcen devant le jury composé de :

M. S.E-H. MIRI.	Pr.	Université de Tlemcen.	Président
M. B. AINSEBA.	Pr.	Université de Bordeaux.	Examineur
M. M. HELAL.	MCA.	Université de Sidi bel abbès.	Examineur
M. B. ABDELLAOUI.	Pr.	Université de Tlemcen.	Examineur
M. T.M. TOUAOULA.	Pr.	Université de Tlemcen.	Directeur de thèse

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire & Mathématiques Appliquées

Dédicace

Je dédie cette thèse de doctorat à mes très chers parents qui m'ont toujours soutenus , et qui ont tout sacrifié pour mes études, tout le mérite leurs revient. Qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance et mon amour.

A mes deux chères sœurs.

A mes oncles, tantes, cousins, cousines paternelles et maternelles.

A ma grand-mère paternelle.

A mes chers amis et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir assisté pour réaliser ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur Monsieur Tarik Mohammed TOUAOULA, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction et d'avoir toujours fait tout ce qu'il pouvait pour faciliter le déroulement de ma thèse mais aussi pour sa gentillesse, sa modestie et ses précieux conseils.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Sofiane El-Hadi MIRI pour la littérature qu'il m'a procuré, son soutien continu et aussi pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Je prie Monsieur Mohamed Helal Maitre de conférence à université de Sidi Bel Abbès de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont ensuite à monsieur Bedreddine Ainseba qui a accepté d'examiner ce travail. Je le remercie également de m'avoir accueilli deux fois au sein de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et de m'avoir donné la possibilité de côtoyer des grands spécialistes dans le domaine des mathématiques, et aussi pour nos échanges et nos discussions.

J'adresse toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements au professeur Boumediane ABDELLAOUI pour son soutien et encouragement tout au long de ma formation doctorale et pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi aux membres du laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées de l'université de Tlemcen, que j'ai côtoyés pendant plus de trois ans et qui m'ont témoigné beaucoup de sympathie et d'encouragements

et aussi pour la bonne humeur qui règne dans ce bureau que nous avons partagé.

Je remercie professeur Enrique Zuazua qui a accepté de m'accueillir au sein de l'université Autonoma de Madrid dans le cadre d'un programme Erasmus+, je tiens aussi à le remercier pour les discussions que nous avons pu avoir, pour les conseils avisés qu'il m'a donné ainsi que pour sa gentillesse et sa sympathie. Je n'oublie pas non plus son équipe de recherche à DeustoTech université de Bilbao pour leur soutien et encouragement.

D'autres personnes, plus ou moins liées à cette thèse, ont croisé ma route durant ces trois dernières années, que ce soit lors de colloques ou d'écoles d'été ou bien durant les quelques moments qui n'ont pas été consacrés à la recherche. Je tiens ici à les remercier pour les bons moments que j'ai passés grâce à elles.

Il m'est agréable d'exprimer ma respectueuse gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu, de près ou de loin pour mener ce travail à terme.

Table des matières

Notations	12
1 Introduction	13
1.1 Modèle de transmission des virus	13
1.2 Modèles épidémiologiques	15
1.3 Présentation des travaux de la thèse	20
2 Modèle mathématique décrivant la dynamique des virus	23
2.1 Introduction	23
2.2 Attracteur global compact et trajectoires totales	26
2.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	30
2.4 Existence d'un état d'équilibre positif et la persistance uniforme	34
2.5 Stabilité globale et unicité de l'équilibre endémique	39
2.6 Quelques simulations numériques	44
3 Stabilité globale d'un modèle épidémique structuré en âge avec une fonction d'incidence générale	49
3.1 Introduction	49
3.2 Stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie	51
3.3 Existence du semi-flot et de l'attracteur global compact	56
3.4 Étude de la stabilité globale pour l'équilibre endémique	61
3.5 Simulations numériques	76
4 Analyse mathématique d'une population structurée en âge avec recherche	80
4.1 Introduction	80
4.2 Existence du semi-flot, attracteur global compact et trajectoire totale	83
4.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	92
4.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique	95

4.4.1	Persistence uniforme	97
4.5	Simulations numériques	104
Annexe		111
	Généralités sur les systèmes dynamiques	111
	La notion de persistance	115
	Théorèmes les plus utilisés dans cette thèse	116
	Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov	118
	Schéma Numérique	121
Publications		122
Bibliographie		123

Notations

- Ω : ensemble ouvert dans \mathbb{R} .
- $\mathbb{C}(\mathbb{R})$: espace des fonctions continues définies sur \mathbb{R} .
- $\mathbb{C}^k(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions continues dérivables et dont la $k^{\text{ème}}$ dérivée est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$: espace des fonctions bornées et uniformément continues de \mathbb{R}^+ à \mathbb{R}^+ .
- $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions bornées presque partout sur \mathbb{R}^+ , c'est à dire $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } M \text{ telle que } |f| \leq M \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^+\}$.
- $\mathbb{L}_+^\infty(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions positives dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$.
- $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R} , c'est à dire $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+) = \{f \text{ mesurable} / \int_0^{\infty} |f| < \infty\}$.
- $\mathbb{L}_+^1(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R}^+ , c'est à dire $\mathbb{L}_+^1(\mathbb{R}^+) = \{f \text{ mesurable positives} / \int_0^{\infty} f < \infty\}$.
- $\mathbb{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^1)$: espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^+ Dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+)$
- $\mathbb{C}^1([0, T]; X)$: espace des fonctions continument dérivable de $[0, T]$ dans X
- $\frac{\partial}{\partial \eta}$: dérivée normale .

Chapitre 1

Introduction

Le but principal de cette thèse est l'analyse mathématique de quelques modèles en épidémiologie. Notre travail est divisé en deux parties, nous commençons par considérer un modèle mathématique qui représente la dynamique des infections transmises par un virus. La deuxième partie nous proposons de nouveaux modèles mathématiques décrivant la dynamique d'une population touchée par une épidémie.

La modélisation de ce genre de phénomène est effectuée grâce à un système d'équations différentielles non-linéaires structurées en âge.

1.1 Modèle de transmission des virus

Durant ces dernières années, un nombre important de travaux mathématiques sont proposés pour étudier la dynamique des infections virales; nous invitons le lecteur à voir par exemple [3], [7], [9],[14], [15], [27], [29], [48], [50], [51], [61] ainsi que leurs bibliographies. Plus particulièrement, nous nous intéressons à des maladies infectieuses causées par un virus. Le modèle correspondant à la dynamique de cette épidémie est généralement divisé en trois classes : les cellules saines T , les cellules infectées i , et les particules virales V (voir Figure 1.1).

Afin d'établir un modèle décrivant la dynamique de la maladie VIH, de nombreux auteurs ont pris en compte l'âge d'infection a (le temps écoulé depuis l'infection de la cellule saine) dans leurs modèles, comme par exemple dans [11], [26], [49], [54], [63]. Ceci a été fait dans le but de faire la distinction entre les cellules infectées.

Un autre aspect important à prendre en compte est la fonction d'infection, qui représente l'interaction entre les virus et les cellules saines. Souvent, cette interaction est décrite par une fonction bilinéaire ou par d'autres fonctions classiques. Cependant, ce type de fonctions ne suffit pas pour décrire certains phénomènes complexes voir [21],

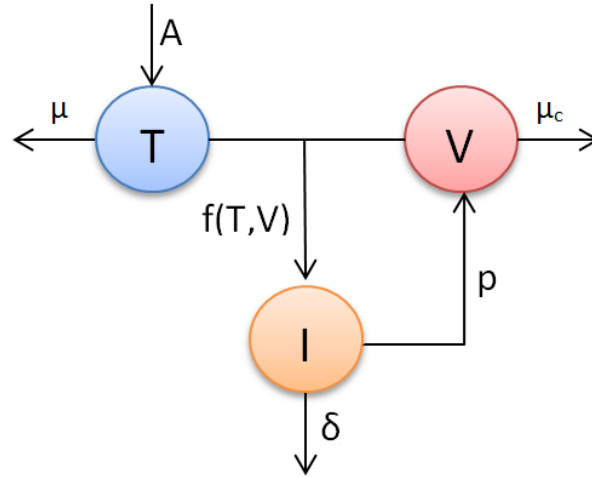


FIGURE 1.1 – Une représentation schématique de la dynamique du virus.

[22], [59].

Dans certains cas, le processus d'évolution pour ce genre d'épidémie est modélisé par des équations aux dérivées partielles. L'analyse mathématique globale des solutions n'est pas évidente dans la plupart du temps, voir [8], [39], [41], [42], [58].

L'un des premiers modèles structurés en âge qui décrit l'évolution de la maladie du VIH-1, est proposé par Nelson et al. [49],

$$\begin{cases} T'(t) = A - \mu T(t) - f(T(t), V(t)) & t > 0, \\ i_t(t, a) + i_a(t, a) = -\delta(a)i(t, a) & t > 0, \quad a > 0, \\ V'(t) = \int_0^\infty p(a)i(t, a)da - \mu_c V(t) & t > 0, \\ i(t, 0) = f(T(t), V(t)) & t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $f(T, V) = kTV$ une fonction d'infection bilinéaire (appelée aussi action de masse), k est le taux d'infection supposée constant. les auteurs ont pu montrer la stabilité locale des équilibres.

Plus récemment, Wang et al. [63], et Yang et al. [68] ont introduit un modèle d'infection par le VIH avec une fonction d'interaction non linéaire entre le virus et les cellules saines.

Dans [63], la fonction d'incidence considérée est de type $\frac{T(t)V(t)}{1 + \alpha V(t)}$. Dans [68], les

auteurs ont proposé une fonction f de type Beddington-DeAngelis, donnée par

$$\frac{T(t)V(t)}{1 + \alpha_1 T(t) + \alpha_2 V(t)}.$$

Dans ces deux articles, la stabilité asymptotique globale des deux équilibres est prouvée en utilisant des fonctions de Lyapunov appropriées.

1.2 Modèles épidémiologiques

Nous nous intéressons à l'étude mathématique des modèles épidémiologique décrivant la dynamique d'une population touchée par une maladie, le lecteur pourra consulter par exemple le livre de Diekmann [17] et le livre de Bacaer [4] pour plus d'informations.

En 1927, W.O. Kermack et A.G. McKendrick ont proposé un modèle de base en épidémiologie, ils supposent que la population est divisée en trois classes (ou compartiments),

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t), \end{cases}$$

en notant S la population des susceptibles, I la population des infectées et R la population des rétablis. Les paramètres β et α représentent respectivement le taux de transmission de la maladie et le taux de guérison.



FIGURE 1.2 – Une représentation schématique d'un modèle SIR .

L'étude qualitative de l'état d'équilibre pour ce genre de modèle SIR a été faite par un nombre important de chercheurs voir les références dans [17].

La stabilité globale des équilibres est déterminée suivant le paramètre \mathcal{R}_0 , tel que pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$, le système d'équations admet un seul équilibre sans maladie globalement asymptotiquement stable. Pour $\mathcal{R}_0 > 1$, le système admet un équilibre endémique positif globalement asymptotiquement stable, de plus, l'équilibre sans maladie devient instable (voir [17, 31]).

Le seuil \mathcal{R}_0 est appelé le taux de reproduction de base, par définition il représente le nombre d'individus infectés engendré par un seul individu infecté durant sa période infectieuse dans une population entièrement saine [17, 31].

Certains modèles épidémiologiques de type SIR structurés en âge sont décrits par un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaire. L'analyse mathématique de ces derniers est plus difficile par rapport aux modèles classiques (EDO) de type *SIR* qui ne dépendent pas de l'âge d'infection.

Récemment, Magal et al, [39] ont étudié le comportement asymptotique global du modèle *SIR* structuré en âge suivant

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a) da, \\ i_t(t, a) + i_a(t, a) = -\mu_i(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L_+^1(0, +\infty). \end{cases}$$

les auteurs ont obtenu la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie pour un $\mathcal{R}_0 \leq 1$, et la stabilité asymptotique globale de l'équilibre endémique pour un $\mathcal{R}_0 > 1$. L'idée de la preuve est basée sur l'existence d'un attracteur compact et la construction d'une fonction de Lyapunov, cette approche est utilisée pour l'étude mathématique de certains modèles décrivant la dynamique des virus [13, 37, 43, 62, 67].

Dans les modèles mathématiques classiques en épidémiologie, le taux d'incidence (nouveaux cas infectés) est souvent considéré sous une forme bilinéaire βSI , où $\beta > 0$ est le taux de transmission de la maladie et S, I représentent respectivement la population des individus susceptibles et la population des individus infectés. En réalité le nombre de contacts des susceptibles ne peut pas être modéliser tout le temps par une croissance linéaire par rapport à I .

Comme généralisation de ce modèle, Capasso et Serio [10] ont proposé un taux d'inci-

dence sous la forme $Sg(I)$,

$$\begin{cases} S'(t) = -S(t)g(I(t)), \\ I'(t) = S(t)g(I(t)) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$

où $g(\cdot)$ est une fonction continue bornée qui prend en considération le phénomène de saturation.

Ces dernières années, plusieurs modèles en épidémiologie ont été étudiés avec un taux d'incidence non linéaire [18, 21, 22, 23, 28, 30, 33, 34, 35, 38, 64]. Par exemple dans [30], les auteurs ont proposé un modèle à retard avec une fonction d'incidence sous la forme $f(S)g(i)$

$$\begin{cases} S'(t) = \mu - \mu S(t)f(S(t))g(i(t - \tau)), \\ i'(t) = f(S(t))g(i(t - \tau)) - (\mu + \sigma)i(t), \\ r'(t) = \sigma i(t) - \mu r(t) \end{cases}$$

Plus générale dans [6], les auteurs ont fait l'analyse mathématique d'un modèle SIR structuré en âge avec un taux d'incidence de la forme $f(S, I)$,

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)) \\ J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da, \end{cases}$$

Ils ont montré la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie, si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, ainsi que la stabilité globale asymptotique de l'équilibre endémique, si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Le but de notre étude est de proposer un nouveau modèle SIR. À cet effet, nous supposons que les individus rétablis peuvent retourner à la classe des individus infectés. Il existe un certains nombre de travaux en épidémiologie qui définissent ce phénomène comme étant une perte d'immunité contre la maladie ou simplement une rechute, voir par exemple [37, 67, 38, 64, 60]. On peut citer également certains modèles mathématiques qui décrivent la consommation de la drogue [18, 20, 47, 45, 66, 65].

À présent, l'analyse mathématique du modèle structuré en âge devient plus complexe

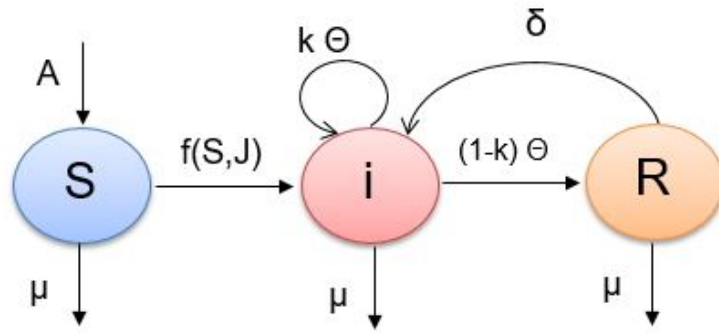


FIGURE 1.3 – Une représentation schématique de la dynamique du virus.

et nécessite l'utilisation de plus d'outils mathématiques.

Le système d'équations différentielles structuré en âge décrivant ce phénomène est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t), \end{array} \right.$$

Notre étude permet de montrer l'influence du taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 sur le comportement asymptotique de la population comme suit : si $\mathcal{R}_0 < 1$, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable, et si $\mathcal{R}_0 > 1$, l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Le quatrième chapitre de cette thèse est consacré à l'analyse mathématique d'un système d'équations différentielles structurées en âge avec une fonction d'incidence non-linéaire.

Dans la littérature, on trouve un certain nombre de travaux mathématiques sur la propagation d'une épidémie au sein d'une population souvent considérée comme étant homogène.

Dans cette partie, nous proposons un modèle épidémiologique correspondant à des maladies pour lesquelles la classe de quarantaine est très importante et joue un rôle central dans la propagation de cette dernière. Autrement dit, nous examinons l'influence des personnes misent en quarantaine, et leur participation à nouveau à la transmission

de l'infection.

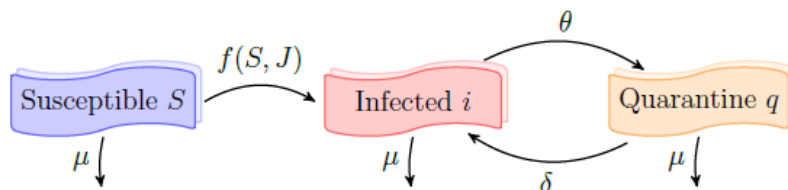


FIGURE 1.4 – Une représentation schématique d'un modèle épidémique avec quarantaine.

La maladie spécifique à laquelle nous pensons est le VIH / SIDA. Cependant, le modèle s'applique à toute maladie présentant les mêmes caractéristiques suivantes :

- Les individus contaminés par cette maladie deviennent infectés et contagieux, la réplication du virus dans le corps se stabilise à un niveau qui varie selon les individus, jusqu'à ce qu'ils soient identifiés comme porteurs de la maladie puis rejoignent la classe des mis en quarantaines. Dans cette phase, les individus soit restent inactifs soit meurent.
- Les individus infectés peuvent être identifiés comme porteurs du virus après avoir participer à un programme de dépistage.
- Une fois identifiés comme porteurs de la maladie, les individus infectés sont en partie mis dans un programme de quarantaine, c'est à dire réduire le nombre des infectés au sens qu'une partie d'entre eux n'est plus en contact avec les susceptibles (isolé).
- Les individus en quarantaine sont toujours infectés et la maladie est en cours d'évolution, par contre ces derniers ne participent pas à la transmission de la maladie tant que les symptômes sont présents. Une fois les signes de guérison apparaîtront les individus placer en classe quarantaine oublient qu'ils sont toujours porteurs du virus et commencent à se comporter comme des individus ordinaires. Cela conduit à leur retour dans la classe des infectées.
- Le processus décrit au-dessus dépend du temps écoulé depuis l'infection de telle sorte que l'efficacité de ce programme est relié à la progression des agents pathogènes en ce qui concerne les caractéristiques de la maladie.

L'évolution de la population est décrite par le système d'équations différentielles structurées en âge suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a) + \delta(a)q(t, a), \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = \theta(a)i(t, a) - (\mu + \delta(a))q(t, a), \\ J(t) = \int_0^{\infty} \beta(a)i(t, a)da, \end{array} \right.$$

1.3 Présentation des travaux de la thèse

Le travail réalisé dans cette thèse porte sur l'étude du comportement asymptotique d'une classe d'équations structurées en âge.

Le chapitre 1 est une introduction générale de quelques modèles infectieux connus de la littérature.

Le chapitre 2 est organisé de la manière suivante, dans un premier temps, nous cherchons l'existence d'un attracteur compact et les trajectoires totales du système (2.1). Nous montrons ensuite que si le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 \leq 1$ alors l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable, et lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$ alors le système admet un équilibre endémique positif globalement asymptotiquement stable.

La démonstration est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov indépendante de la fonction d'incidence f , ainsi les résultats de notre étude sont valables pour une large classe de fonctions non-linéaires f .

Dans le chapitre 3, nous avons considéré le système structuré en âge suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t), \end{array} \right.$$

avec une rechute dans la classe des infectés, nous montrons tout d'abord la stabilité locale et l'attractivité globale de l'équilibre sans maladie E_0 , cela conduit à la stabilité globale de l'équilibre E_0 pour un taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 < 1$. Ensuite, nous définissons le semi-flot généré par l'unique solution de notre problème et nous montrons l'existence d'un attracteur compact.

Après cela, nous prouvons l'existence et l'unicité de l'équilibre endémique E^* , avant d'entamer l'uniforme persistance du système. Par la suite, nous énonçons le Théorème de la stabilité globale de l'équilibre endémique E^* pour $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dans le chapitre 4, nous avons pris en compte les individus mis en quarantaine pour voir l'influence de cette classe sur le comportement asymptotique de la population. Nous avons proposé le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a) + \delta(a)q(t, a), \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = \theta(a)i(t, a) - (\mu + \delta(a))q(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)), \\ q(t, 0) = 0, \\ J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da, \end{array} \right.$$

les étapes de l'analyse mathématique du système précédent sont similaires à ceux proposées dans le premier chapitre, l'idée est de montrer l'existence d'un attracteur compact. De plus, s'assurer que le système est uniformément persistant. Par la suite, nous construisons deux fonctions de Lyapunov convenables pour chaque équilibre afin de prouver la stabilité globale des équilibres.

Dans la fin de chaque chapitre, nous proposons quelques simulations numériques pour

1.3. PRÉSENTATION DES TRAVAUX DE LA THÈSE

illustrer nos résultats théoriques.

L'annexe est constitué de paragraphes résumant les concepts, les outils et les théorèmes mathématiques utilisés dans cette thèse.

Chapitre 2

Modèle mathématique décrivant la dynamique des virus

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude mathématique d'un modèle structuré en âge décrivant la dynamique des infections virales (c-à-d infection causée par un virus), le contact entre virus et cellules saines est représenté par une fonction d'incidence non-linéaire de type général.

Le but de ce chapitre est d'étudier un modèle d'infection structuré en âge avec une fonction d'incidence non-linéaire.

2.1 Introduction

La dynamique de la population est décrite par le système d'équations différentielles structurées en âge suivant

$$\begin{cases} T'(t) = A - \mu T(t) - f(T(t), V(t)) & t > 0, \\ i_t(t, a) + i_a(t, a) = -\delta(a)i(t, a) & t > 0, \quad a > 0, \\ V'(t) = \int_0^\infty p(a)i(t, a)da - \mu_c V(t) & t > 0, \\ i(t, 0) = f(T(t), V(t)) & t > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

les conditions initiales du système (2.1)

$$\begin{cases} T(0) = T_0 \in \mathbb{R}^+, \quad V(0) = V_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1_+(\mathbb{R}^+). \end{cases} \quad (2.2)$$

Soient T et V respectivement la population des cellules saines et la charge virale à

l'instant t , on note aussi par i la population des cellules infectées structurées en temps t et en âge d'infection a . La dynamique des cellules saines est modélisée par un taux constant de production A et un taux de mortalité μ . Les virions sont produits par les cellules infectées à un taux p structurés en âge d'infection a et meurent à un taux c . δ est le taux de mortalité des cellules infectées structurées en âge.

L'originalité de ce travail, consiste en la construction d'une fonction de Lyapunov indépendante de la fonction d'incidence f qui est de la forme non-linéaire, pour montrer la stabilité globale des états d'équilibre.

Ce résultat nous permet de généraliser ce type de modèles pour différentes fonctions d'infection qui ne sont pas encore traitées dans la littérature (voir l'exemple donner dans la partie simulation numérique).

Nous supposons que la fonction $\delta(a) \geq \delta_0 > 0$ pour $a \geq 0$ et $\delta \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+)$. Soit la fonction $p \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$ et $p^{max} := \text{ess sup}_{a \in \mathbb{R}^+} p(a)$ pour tout $a \geq 0$. Les paramètres A , μ et μ_c sont des constantes positives.

Nous supposons également que la fonction f satisfait les hypothèses suivantes :

- la fonction $f(\cdot, V)$ est croissante par rapport à la première variable pour tout $V \geq 0$. De plus $f(0, V) = f(T, 0) = 0$ pour $T, V \geq 0$.
- la fonction f est concave par rapport à V .
- $\frac{\partial f(\cdot, 0)}{\partial V}$ est continue positive dans n'importe quel domaine borné.
- La fonction f est localement lipschitzienne i.e pour tout $C > 0$, il existe une constante $L_C > 0$ tel que

$$|f(T_2, V_2) - f(T_1, V_1)| \leq L_C(|T_2 - T_1| + |V_2 - V_1|),$$

avec $0 \leq T_1, T_2, V_1, V_2 \leq C$.

On considère l'espace fonctionnel $X := \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|(T, i, V)\|_X = |T| + \int_0^{+\infty} |i(a)| da + |V|, \quad T, V \in \mathbb{R} \text{ et } i \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

De plus, $X_+ = \mathbb{R}^+ \times L_+^1(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+$ est le cône positif de X . Dans le reste de ce chapitre, nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(s) ds}$$

la probabilité de survie d'une cellule infectée jusqu'à l'âge a . On note

$$N = \int_0^\infty p(a)\pi(a)da \quad (2.3)$$

le nombre total des virions produits par une cellule infectée durant sa durée de vie. Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 du système (2.1) est donné par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\mu_c} \frac{\partial f}{\partial V} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right), \quad (2.4)$$

ce dernier représente le nombre moyen d'infections secondaires causé par l'introduction d'une cellule infectée dans une population de cellules saines.

Le théorème suivant nous permet de conclure que notre problème initial admet une solution positive unique.

Théorème 1. *Supposons que la fonction f est lipschitzienne. Soit $(T_0, i_0(\cdot), V_0) \in X_+$, alors le problème (2.1)-(2.2) admet une solution positive unique $(T, i, V) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+)) \times C^1(\mathbb{R}^+)$. De plus, nous avons les estimations suivantes :*

$$T(t) + \int_0^\infty i(t, a)da \leq \max\left\{\frac{A}{\alpha}, \|i_0\|_1 + T_0\right\} := \theta,$$

$$V(t) \leq \max\left\{V_0, \frac{p^{max}}{c}\theta\right\},$$

pour tout $t \geq 0$, avec $\alpha := \min\{\mu, \delta_0\}$.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(T(t) + \int_0^\infty i(t, a)da \right) \leq \frac{A}{\mu},$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{p^{max} A}{\mu_c \alpha}.$$

Finalement,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) \geq \Lambda, \quad (2.5)$$

avec $\Lambda := \frac{A}{\mu + L}$, et L est la constante de Lipschitz.

Démonstration. L'idée de la preuve est d'utiliser le Théorème de Banach-Picard dans un espace de Banach approprié (voir [6, Théorème 2.2]). \square

2.2 Attracteur global compact et trajectoires totales

En premier lieu, en intégrant l'équation structurée en âge des cellules infectées le long des caractéristiques, on a

$$i(t, a) = \begin{cases} \Pi(a)f(T(t-a), V(t-a)), & t > a \geq 0, \\ \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}i_0(a-t), & a > t \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

On définit le semi-flot Φ par $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X_+ \rightarrow X_+$ tel que

$$\Phi(t, (T_0, i_0(\cdot), V_0)) = (T(t), i(t, \cdot), V(t)), \quad (2.7)$$

celui-ci est généré par l'unique solution de notre problème (2.1)-(2.2). De plus, le semi-flot Φ est continu, la preuve de la continuité du semi-flot Φ est basée sur le Théorème 1.

Théorème 2. *Le semi-flot Φ admet un attracteur compact A des ensembles bornés dans X_+ .*

Démonstration. La preuve de ce Théorème s'obtient par la vérification des trois conditions du Théorème 2.33 dans [55] et par le Théorème 1,

- (i) Φ est point dissipatif, s'il existe un sous-ensemble B de X_+ qui attire tous les points de X_+ .
- (ii) Φ est éventuellement borné.
- (iii) Φ est asymptotiquement régulier.

Le Théorème 1, nous permet d'avoir les deux premières propriétés (i) et (ii). Maintenant, pour la troisième propriété nous utilisons les mêmes arguments du Théorème 2.33 dans [55]. On pose

$$\Theta_1(t, (T_0, i_0(\cdot), V_0)) = (0, w_1(t, \cdot), 0), \quad \text{et} \quad \Theta_2(t, (T_0, i_0(\cdot), V_0)) = (T(t), w_2(t, \cdot), V(t)),$$

avec

$$w_1(t, a) = \begin{cases} 0, & t > a, \\ \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}i_0(a-t), & a > t, \end{cases} \quad (2.8)$$

et

$$w_2(t, a) = \begin{cases} \Pi(a)f(T(t-a), V(t-a)), & t > a, \\ 0, & a > t. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ainsi, on peut réécrire Φ comme

$$\Phi(t, (T_0, i_0(a), V_0)) = \Theta_1(t, (T_0, i_0(a), V_0)) + \Theta_2(t, (T_0, i_0(a), V_0)),$$

Pour la suite, soit C un sous-ensemble fermé borné de données initiales dans X . D'après le Théorème 1, on obtient

$$T(t) + \int_0^\infty i(t, a)da + V(t) \leq \tilde{M}, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

avec $\tilde{M} = \max\{\frac{A}{\alpha}, \|i_0\|_1 + T_0\} + \max\{V_0, \frac{p^{max}}{c} \max\{\frac{A}{\alpha}, \|i_0\|_1 + T_0\}\}$. Par conséquent, Θ_1 satisfait,

$$\begin{aligned} \|\Theta_1\| &\leq e^{-\delta_0 t} \|i_0\|_1, \\ &\leq \tilde{M} e^{-\delta_0 t}, \end{aligned}$$

alors $\Theta_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément pour toutes conditions initiales dans C .

Maintenant, nous avons besoin de montrer que $\Theta_2(C)$ est relativement compact dans X_+ . Les conditions (i), (ii), (iv) du critère de Fréchet-Kolmogorov sont trivialement vérifiées (voir annexe, [52]), il reste à prouver la troisième condition (iii) pour conclure la preuve. Soit

$$\begin{aligned} I_h &= \int_0^\infty |w_2(t+a+h) - w_2(t+a)|da, \\ &= \int_0^{t-h} |\Pi(a+h)f(T(t-a-h), V(t-a-h)) - \Pi(a)f(T(t-a), V(t-a))|da \\ &\quad + \int_{t-h}^t |\Pi(a)f(T(t-a), V(t-a))|da. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de montrer que $I_h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ uniformément pour toutes conditions initiales dans C . On peut observer que le deuxième terme de I_h tend vers 0 uniformément dans C . Pour simplifier l'écriture, on note

$$I_h^1 := \int_0^{t-h} |\Pi(a+h)f(T(t-a-h), V(t-a-h)) - \Pi(a)f(T(t-a), V(t-a))|da,$$

Rappelons que la fonction f est lipschitzienne, alors

$$I_h^1 \leq L \int_0^{t-h} \Pi(a+h) (|T(t-a-h) - T(t-a)| + |V(t-a-h) - V(t-a)|) da \\ + f^\infty \int_0^{t-h} |\Pi(a+h) - \Pi(a)| da,$$

avec $f(T, V) \leq f^\infty$ pour tout $(T, V) \in K$ où K est un compact. On remarque de (2.1) que

$$|T'(t)| \leq A + \mu \tilde{M} + f^\infty,$$

et

$$|V'(t)| \leq (p^{max} + \mu_c) \tilde{M},$$

pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, on conclut que I_h^1 tend uniformément vers 0 quand h tends vers 0 pour toutes conditions initiales dans C . \square

Nous allons a présent définir les trajectoires totales du système (2.1)-(2.2) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le prolongement de la solution du problème (2.1)-(2.2) sur tout \mathbb{R} nous permet d'avoir la stabilité asymptotique globale des équilibres.

On considère $\bar{\phi}$ la trajectoire totale telle que $\bar{\phi} = (T(t), i(t, \cdot), V(t))$. Nous allons suivre les mêmes étapes que dans [55, Chapitre 9], on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} T'(t) = A - \mu T(t) - f(T(t), V(t)), \\ i(t, a) = \Pi(a) f(T(t-a), V(t-a)), \\ V'(t) = \int_0^\infty p(a) i(t, a) da - \mu_c V. \end{cases} \quad (2.10)$$

Le lemme suivant, nous permet de relier les trajectoires totales et l'attracteur compact \mathbf{A} .

Lemme 3. *Pour tout $(T_0, i_0, V_0) \in \mathbf{A}$, nous avons les estimations suivantes*

$$T_0 + \int_0^\infty i_0(a) da + V_0 \leq \frac{A}{\alpha} \left(1 + \frac{p^{max}}{\mu_c}\right), \quad \text{avec } \alpha := \min \{\mu, \delta_0\}$$

$$i_0(a) \leq \Gamma \Pi(a),$$

$$T_0 \geq \Lambda, \quad \text{avec } \Lambda := \frac{A}{\mu + L},$$

où L est la constante de Lipschitz et Γ est une constante positive.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_0^\infty i(t, a) da = \int_0^\infty \Pi(a) f(T(t-a), V(t-a)) \\ &= \int_{-\infty}^t \Pi(t-\sigma) f(T(\sigma), V(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

En dérivant l'équation au-dessus et en utilisant la définition de Π , on obtient

$$I'(t) = f(T(t), V(t)) - \int_{-\infty}^t \delta(t-\sigma) \Pi(t-\sigma) f(T(\sigma), V(\sigma)) d\sigma.$$

On a $\delta(a) \geq \delta_0$, et d'après l'équation de T du système (2.10),

$$\begin{aligned} T'(t) + I'(t) &= A - \mu T(t) - \delta_0 \int_{-\infty}^t \Pi(t-\sigma) f(T(\sigma), V(\sigma)) d\sigma, \\ &\leq A - \mu T(t) - \delta_0 \int_0^\infty \Pi(\sigma) f(T(t-\sigma), V(t-\sigma)) d\sigma, \\ &\leq A - \mu T(t) - \delta_0 I(t), \\ &\leq A - \alpha(T(t) + I(t)), \end{aligned}$$

Rappelons que $\alpha := \min\{\mu, \delta_0\}$. En intégrant cette dernière équation sur l'intervalle (r, t) ,

$$(T(t) + I(t))e^{\alpha t} \leq (T(r) + I(r))e^{\alpha r} + \frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha r}).$$

Faisons tendre r vers $-\infty$,

$$T(t) + I(t) \leq \frac{A}{\alpha} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

D'après l'équation de V dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq p^{\max} I(t) - \mu_c V(t), \\ &\leq \frac{Ap^{\max}}{\alpha} - \mu_c V(t), \end{aligned}$$

Après intégration, on a

$$V(t) \leq \frac{Ap^{\max}}{\alpha\mu_c} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Par conséquent, faisons la somme des deux inégalités (2.11) et (2.12), on conclut

$$T(t) + I(t) + V(t) \leq \frac{A}{\alpha} \left(1 + \frac{p^{max}}{\mu_c}\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, les fonctions T et V appartiennent à un sous ensemble compact et f est une fonction continue alors il existe une constante positive Γ telle que

$$i(t, a) \leq \Gamma \Pi(a), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } a \in \mathbb{R}^+.$$

En utilisant le fait que la fonction T est bornée inférieurement, et la fonction f est lipschitzienne,

$$T'(t) \geq A - \mu T(t) - LT(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Finalement, après intégration de T' sur $(-\infty, t)$, on obtient

$$T(t) \geq \frac{A}{\mu + L} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

□

2.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité globale de l'équilibre sans maladie $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ lorsque le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 \leq 1$, l'idée consiste à construire une fonction de Lyapunov en faisant intervenir un attracteur compact et les trajectoires totales.

On remarque que le système d'équations (2.1) admet toujours un équilibre sans maladie E_0 .

Théorème 4. *Supposons que l'hypothèse de concavité de la fonction f est satisfaite. Alors, l'équilibre E_0 est globalement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 \leq 1$.*

Démonstration. On définit la fonction ψ

$$\psi(a) = \frac{1}{N\Pi(a)} \int_a^\infty p(\sigma)\Pi(\sigma)d\sigma,$$

solution du problème suivant

$$\begin{cases} \psi'(a) = \delta(a)\psi(a) - \frac{p(a)}{N}, & a > 0, \\ \psi(0) = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Donc, pour $x := (T_0, i_0(\cdot), V_0) \in \mathbf{A}$, on considère la fonction de Lyapunov suivante

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) + \frac{V_0}{N},$$

où

$$U_1(x) = T_0 - \int_{\frac{A}{\mu}}^{T_0} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(\eta, V)} d\eta - \frac{A}{\mu},$$

et

$$U_2(x) = \int_0^\infty \psi(a)i_0(a)da.$$

Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$, une trajectoire totale dans \mathbf{A} telle que $\chi(t) = (T(t), i(t, \cdot), V(t))$, $T(0) = T_0$, $i(0, a) = i_0(a)$, et $V(0) = V_0$ avec $(T(t), i(t, a), V(t))$ est solution du problème (2.10). La dérivée de U_1 par rapport à t est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_1(\chi(t)) &= \left(1 - \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T(t), V)}\right) (A - \mu T(t) - f(T(t), V(t))) \\ &= \mu \left(1 - \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T(t), V)}\right) \left(\frac{A}{\mu} - T(t)\right) - f(T(t), V(t)) \left(1 - \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T(t), V)}\right). \end{aligned}$$

D'après l'expression (2.10), on a

$$U_2(\chi(t)) = \int_0^\infty \phi_1(a)\xi(t-a)da,$$

avec

$$\xi(t) = f(T(t), V(t)), \quad \text{et} \quad \phi_1(a) = \psi(a)\Pi(a). \quad (2.14)$$

En utilisant les mêmes étapes de la preuve du [55, Lemme 9.18], on déduit que U_2 est absolument continue, ainsi

$$\frac{d}{dt}U_2(\chi(t)) = \phi_1(0)\xi(t) + \int_0^\infty \phi_1'(a)\xi(t-a)da,$$

Par conséquent, d'après (2.14), on a

$$\frac{d}{dt}U_2(\chi(t)) = \psi(0)f(T(t), V(t)) + \int_0^\infty (\psi'(a) - \delta(a)\psi(a))\Pi(a)f(T(t-a), V(t-a))da.$$

En combinant cette dernière équation et (2.13), on obtient

$$\frac{d}{dt}U_2(\chi(t)) = f(T(t), V(t)) - \int_0^\infty \frac{p(a)\Pi(a)}{N}f(T(t-a), V(t-a))da.$$

Rappelons que l'équation de U' est donnée par

$$U' := U'_1 + U'_2 + \frac{V'}{N}.$$

En utilisant les trajectoires totales (2.10), et en ajoutant et retranchant le terme $V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(\chi(t)) &= d(1 - \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T(t), V)}) (\frac{A}{\mu} - T(t)) + f(T(t), V(t)) \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T(t), V)} \\ &\quad - V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0) + V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{d}, 0) - c \frac{V}{N}, \end{aligned}$$

avec \mathcal{R}_0 est donnée dans (2.4),

$$\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0) = \frac{\mu_c \mathcal{R}_0}{N}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(\chi(t)) &= d(1 - \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{d}, V)}{f(T(t), V)}) (\frac{A}{d} - T(t)) + f(T(t), V(t)) \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{d}, V)}{f(T(t), V)} \\ &\quad - V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{d}, 0) + c \frac{V}{N}(\mathcal{R}_0 - 1). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f(T, V) \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T, V)} - V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0) &= f(T, V) \frac{\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0)}{\frac{\partial f}{\partial V}(T, 0)} - V \frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0) \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial V}(\frac{A}{\mu}, 0)}{\frac{\partial f}{\partial V}(T, 0)} (f(T, V) - V \frac{\partial f}{\partial V}(T, 0)). \end{aligned}$$

La concavité de la fonction f par rapport à V nous permet d'avoir

$$f(T, V) - V \frac{\partial f}{\partial V}(T, 0) \leq 0.$$

Donc, en utilisant l'hypothèse que $\frac{\partial f}{\partial V}(\cdot, 0)$ est une fonction positive continue sur n'importe quel ensemble compact K et que $\mathcal{R}_0 \leq 1$, on obtient

$$\frac{d}{dt}U(\chi(t)) \leq 0.$$

On remarque que $\frac{d}{dt}U(\chi(t)) = 0$ implique que $T(t) = \frac{A}{\mu}$. Soit Q le plus grand ensemble invariant tel que $\frac{d}{dt}U(\chi(t)) = 0$. Alors, l'ensemble Q vérifie $T(t) = \frac{A}{\mu}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En remplaçant $T(t) = \frac{A}{\mu}$ dans l'équation de T dans (2.10) on obtient $V(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, en utilisant l'équation de i dans (2.10), on a $i(t, \cdot) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, le plus grand ensemble invariant tel que $\frac{d}{dt}U(\chi(t)) = 0$ est $(\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ (principe d'invariance de LaSalle). La compacité de \mathbf{A} nous permet de conclure que $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont respectivement non-vides, compacts, invariants. De plus, $\chi(t)$ est attirée par $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.

Par définition U est constante sur les $\omega(x)$ et $\alpha(x)$, donc, $\omega(x) = \alpha(x) = \{(\frac{A}{\mu}, 0, 0)\}$. par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \chi(t) = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(\chi(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(\chi(t)) = U(\frac{A}{\mu}, 0, 0).$$

Alors $U(\chi(t))$ est une fonction décroissante par rapport au temps t , on obtient $U(\chi(t)) = U(\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et ainsi $\chi(t) = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particu-

lier, $(T_0, i_0(\cdot), V_0) = (T(0), i(0, \cdot), V(0)) = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$. Donc, l'attracteur \mathbf{A} est réduit au singleton formé par l'équilibre sans maladie $(\frac{A}{\mu}, 0, 0)$. D'après [55, Théorème 2.39], nous pouvons conclure que l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. \square

2.4 Existence d'un état d'équilibre positif et la persistance uniforme

Dans ce paragraphe, on commence par montrer l'existence de l'état d'équilibre positif (c-à-d la maladie persiste dans la population) dans le cas $\mathcal{R}_0 > 1$, on établit ensuite une condition suffisante pour avoir la persistance uniforme de la solution du problème (2.1)-(2.2).

Lemme 5. Soit $\lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, V)}{f(T, V)} > 1$ pour $T \in [0, \frac{A}{\mu})$. Alors, Si $\mathcal{R}_0 > 1$, le système d'équation (2.1)-(2.2) admet un état d'équilibre positif.

Un état d'équilibre positif est un point fixe du semi-flot Φ ,

$$\Phi(t, (T^*, i^*, V^*)) = (T^*, i^*, V^*), \quad \text{avec } i^* \neq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

D'après (2.6), on obtient

$$i^*(a) = \begin{cases} \Pi(a)f(T^*, V^*), & 0 < a < t, \\ \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}i^*(a-t), & a > t, \end{cases} \quad (2.15)$$

et

$$\begin{cases} A = \mu T^* + f(T^*, V^*), \\ \mu_c V^* = \int_0^\infty p(a)i^*(a) da. \end{cases} \quad (2.16)$$

Remarquons que si $i^*(a)$ est définie par la première expression pour $0 < a < t$ dans (2.15), elle satisfait aussi la deuxième expression. En effet, pour $t < a < 2t$, on a

$$i^*(a-t) = \Pi(a-t)f(T^*, V^*),$$

alors

$$\begin{aligned}
 i^*(a) &= \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} i^*(a-t), \\
 &= \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} \Pi(a-t) f(T^*, V^*), \\
 &= \Pi(a) f(T^*, V^*).
 \end{aligned}$$

On répète les mêmes arguments sur chaque intervalle $[kt, (k+1)t]$, $k = 1, 2, 3, \dots$, on conclut que

$$i^*(a) = \Pi(a) f(T^*, V^*), \quad \forall a \geq 0. \quad (2.17)$$

En combinant l'équation (2.16) et (2.17), on obtient

$$\begin{cases} A = \mu T^* + f(T^*, V^*), \\ \frac{N}{\mu_c} f(T^*, V^*) = V^*. \end{cases} \quad (2.18)$$

où N est définie dans (2.3). En utilisant les mêmes arguments donnés dans [33], [34], nous obtenons l'existence de l'état d'équilibre positif. On s'intéresse maintenant à la persistance uniforme des solutions, pour cela, on fait appel au [55, Théorème 5.2], voir aussi [25], [40], [55], [57]. Avant de commencer la preuve, on a besoin d'imposer sur la fonction f quelques hypothèses supplémentaires. On suppose qu'il existe un point d'équilibre positif (T^*, V^*) qui vérifie (2.18) tel que pour tout $T > 0$ on a

$$\begin{cases} \frac{x}{V^*} < \frac{f(T, x)}{f(T, V^*)} < 1, \text{ pour } 0 < x < V^*, \\ 1 < \frac{f(T, x)}{f(T, V^*)} < \frac{x}{V^*}, \text{ pour } x > V^*. \end{cases} \quad (2.19)$$

Il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $T \in [\frac{A}{d} - \varepsilon, \frac{A}{d} + \varepsilon]$, on a

$$\frac{f(T, V_1)}{V_1} \geq \frac{f(T, V_2)}{V_2}, \quad (2.20)$$

avec $0 < V_1 \leq V_2 \leq \eta$.

Finalement, on suppose que le choix des conditions initiales satisfait

$$V_0 + \int_0^\infty i_0(a)da > 0. \quad (2.21)$$

Remarque 6. Les hypothèses (2.19) et (2.20) sont vérifiées, si la fonction f est strictement croissante et concave par rapport à V .

Soit la fonction de persistance $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\rho(T_0, i_0(\cdot), V_0) = V_0 + \int_0^\infty i_0(a)da,$$

alors

$$\rho(\Phi(t, x)) = V(t) + \int_0^\infty i(t, a)da, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

avec $x = (T_0, i_0(\cdot), V_0)$.

Le lemme suivant nous permet d'affirmer que l'hypothèse (H1) dans [55, Théorème 5.2] est vérifiée.

Lemme 7. Supposons que la condition (2.21) est satisfaite, alors la fonction $\rho(\phi(t))$ est positive sur \mathbb{R} , avec ϕ une trajectoire totale définie dans (2.10).

Démonstration. Tout d'abord, on montre que $V(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec V est définie dans (2.10). En effet, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $V(t) = 0$ pour tout $t \leq r$. Alors pour $t > r$ on a

$$V'(t) = \int_r^t p(t - \sigma)\Pi(t - \sigma)f(T(\sigma), V(\sigma))d\sigma - \mu_c V(t).$$

Dans notre cas, on cherche à montrer que $V(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $V(t_1) = 0$, $V'(t_1) > 0$ et $V(t) = 0$ pour tout $t \leq t_1$.

Ainsi

$$0 < V'(t_1) = \int_r^{t_1} p(t_1 - \sigma)\Pi(t_1 - \sigma)f(T(\sigma), V(\sigma))d\sigma = 0,$$

implique que $V(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, en utilisant la définition de i dans (2.10) on obtient $V(t) + \int_0^\infty i(t, a)da = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après (2.21) ceci est une contradiction. Donc, il existe une suite $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow -\infty$ telle que $V(t_n) > 0$. De plus, après l'intégration de V sur (t_n, t) , on obtient

$$V(t)e^{ct} = V(t_n)e^{\mu_c t_n} + \int_{t_n}^t \int_{-\infty}^s e^{\mu_c s} p(s - \sigma)\Pi(s - \sigma)f(T(\sigma), V(\sigma))d\sigma ds.$$

Finalement, on conclut que $V(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

2.4. EXISTENCE D'UN ÉTAT D'ÉQUILIBRE POSITIF ET LA PERSISTANCE UNIFORME

Nous pouvons maintenant traiter la question de la persistance uniforme des solutions.

Théorème 8. *Supposons que les hypothèses (2.20), (2.21) sont vérifiées. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \varepsilon,$$

pour toutes solutions positives de (2.2) à condition que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Démonstration. En utilisant [55, Théorème 5.2] et le Lemme 7, la solution du problème (2.1)-(2.2) est uniformément persistante, si elle est faiblement persistante.

Pour la preuve, on suppose que la solution n'est pas persistante, alors il existe $\varepsilon > 0$ assez petit et arbitraire tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) < \varepsilon,$$

ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty i(t, a) da = 0.$$

Ensuite, on suppose que $\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_\infty$, et en utilisant la méthode de fluctuation (voir [56] pour plus de détails), il existe une suite $(t_k)_k$ telle que $\lim_{t_k \rightarrow \infty} T'(t_k) = 0$ et $\lim_{t_k \rightarrow \infty} T(t_k) = T_\infty$. La continuité de la fonction f nous permet d'avoir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(T(t), V(t)) = 0.$$

Ainsi, en utilisant la première équation dans (2.1) on obtient pour un t assez grand

$$0 \geq A - \mu T_\infty - \varepsilon,$$

donc,

$$T_\infty \geq \frac{A}{\mu} - \theta(\varepsilon),$$

avec $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu}$. Rappelons que $\mathcal{R}_0 > 1$, alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ assez petit et $\lambda := \lambda_{\varepsilon_1} > 0$ tel que

$$\frac{f(\frac{A}{\mu} - \theta(\varepsilon_1), \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \frac{1}{c} \int_0^\infty \Pi(a) p(a) e^{-\lambda a} da > 1.$$

2.4. EXISTENCE D'UN ÉTAT D'ÉQUILIBRE POSITIF ET LA PERSISTANCE UNIFORME

On pose

$$\alpha_{\varepsilon_1} := \frac{f(\frac{A}{\mu} - \theta(\varepsilon_1), \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \int_0^\infty \Pi(a)p(a)e^{-\lambda a} da - c > 0, \quad (2.22)$$

On considère le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \phi'(a) = (\delta(a) + \lambda)\phi(a) - p(a), \\ \phi(0) = \int_0^\infty \Pi(a)p(a)e^{-\lambda a} da, \end{cases} \quad (2.23)$$

la solution du problème ci-dessus est donnée par

$$\phi(a) = \int_a^\infty p(\sigma) e^{-\int_a^\sigma \delta(s) ds} e^{-\lambda(\sigma-a)} d\sigma.$$

On remarque que la fonction ϕ est uniformément bornée, c'est à dire

$$\phi(a) \leq \frac{\|p\|_\infty}{\delta_0 + \lambda}.$$

Nous analysons maintenant la dérivée de $I_1(t) := \int_0^\infty \phi(a)i(t, a)da + V(t)$, par un calcul direct et en utilisant (2.23), on a

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= i(t, 0)\phi(0) + \lambda \int_0^\infty (\phi'(a) - \delta(a)\phi(a))i(t, a)da + \int_0^\infty p(a)i(t, a)da - \mu_c V(t) \\ &= f(T(t), V(t))\phi(0) + \lambda \int_0^\infty \phi(a)i(t, a)da - \mu_c V(t). \end{aligned}$$

Comme la fonction f est croissante par rapport à T , on obtient pour un t assez grand

$$f(T(t), V(t)) \geq f(\frac{A}{d} - \theta(\varepsilon_1), V(t)).$$

D'un autre côté puisque $V(t) \leq \varepsilon_1$ et d'après (2.20), on a

$$\begin{aligned} \frac{f(T, V)}{V} &\geq \frac{f(\frac{A}{d} - \theta(\varepsilon_1), V)}{V}, \\ &\geq \frac{f(\frac{A}{d} - \theta(\varepsilon_1), \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_1'(t) &\geq \left(\frac{f(\frac{A}{d} - \theta(\varepsilon_1), \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \phi(0) - c \right) V(t) + \lambda \int_0^\infty \phi(a) i(t, a) da, \\ &\geq \alpha_{\varepsilon_1} V + \lambda \int_0^\infty \phi(a) i(t, a) da, \\ &\geq \beta_{\varepsilon_1} I_1(t), \end{aligned}$$

avec $\beta_{\varepsilon_1} = \min\{\alpha_{\varepsilon_1}, \lambda\}$ où α_{ε_1} est définie dans (2.22). Par conséquent,

$$I_1(t) \geq \left(\int_0^\infty \phi(a) i_0(a) da + V_0 \right) e^{\theta_{\varepsilon_1} t}.$$

Rappelons que $I_1(t) := \int_0^\infty \phi(a) i(t, a) da + V(t)$. Par (2.21) et la bornitude de la fonction ϕ , on conclut que

$$I_1(t) \rightarrow +\infty,$$

contradiction avec la bornitude de V et $I(t) := \int_0^\infty i(t, a) da$ (voir le Lemme 3). \square

Soit X_0 un sous ensemble défini par

$$X_0 = \{(T_0, i_0(\cdot), V_0) \in X_+; \int_0^\infty i_0(a) da + V_0 = 0\}.$$

Le Théorème 5.7 dans [55], nous permet d'avoir le résultat suivant.

Théorème 9. *Sous les hypothèses (2.20), (2.21), il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 de toutes les solutions qui ont une condition initiale appartenant à $X_+ \setminus X_0$. De plus, \mathbf{A}_1 est ρ -uniformément positif, c-à-d, il existe un $\gamma > 0$ tel que*

$$\int_0^\infty i_0(a) da + V_0 \geq \gamma \text{ pour tout } (T_0, i_0(\cdot), V_0) \in \mathbf{A}_1. \quad (2.24)$$

2.5 Stabilité globale et unicité de l'équilibre endémique

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale de l'équilibre endémique $(S^*, i^*(\cdot), v^*(\cdot))$ du système (2.10). Avant d'entamer la preuve, nous avons besoin de quelques estimations.

Proposition 10. *Supposons que (2.20), (2.21) sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives α et Γ telles que, pour toutes $(T_0, i_0(\cdot), V_0) \in \mathbf{A}_1$,*

$$V_0 > \alpha \text{ et } \frac{i_0(a)}{i^*(a)} \geq \Gamma, \quad a \geq 0.$$

Démonstration. D'après le Théorème 9, \mathbf{A}_1 est invariant, alors il existe une trajectoire totale $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$, $\Psi(t) = (T(t), i(t, \cdot), V(t))$ avec $T(0) = T_0$, $i(0, a) = i_0(a)$ et $V(0) = V_0$.

Supposons par l'absurde que $\liminf_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$, alors il existe une suite $(t_n)_n \rightarrow \pm\infty$ telle que $V(t_n) \rightarrow 0$. Soient $T_n(t) = T(t + t_n)$, $V_n(t) = V(t + t_n)$ et $i_n(t, \cdot) = i(t + t_n, \cdot)$. Nous pouvons supposer qu'il existe une sous suite telle que $(T_n(t), V_n(t), i_n(t, \cdot)) \rightarrow (\tilde{T}(t), \tilde{V}(t), \tilde{i}(t, \cdot))$ uniformément localement avec $((\tilde{T}(t), \tilde{V}(t), \tilde{i}(t, \cdot)))$ est une solution de (2.10) telle que $\tilde{V}(0) = 0$. Nous appliquons maintenant les mêmes arguments de la preuve du lemme 7, on obtient une contradiction avec (2.24). Puisque

$$i(t, a) = \Pi(a)f(T(t - a), V(t - a)),$$

d'après le Lemme 3, et (2.17) il existe $\Gamma > 0$ telle que,

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} := \frac{f(T(t - a), V(t - a))}{f(T^*, V^*)} \geq \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0,$$

□

Nous pouvons maintenant donner le théorème principal suivant.

Théorème 11. *Sous les hypothèses (2.19), (2.20), (2.21), le problème (2.10) admet un équilibre positif unique $(T^*, i^*(\cdot), V^*)$, qui est globalement asymptotiquement stable dans $X_+ \setminus X_0$.*

Démonstration. Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ est une trajectoire totale $\Psi(t) = (T(t), i(t, \cdot), V(t))$, $T(0) = T_0$, $i(0, a) = i_0(a)$, et $V(0) = V_0$, avec $(T(t), i(t, a), V(t))$ solution du problème (2.10). Soit H une fonction convexe,

$$H(y) = y - \ln(y) - 1,$$

et

$$\phi(a) = \frac{f(T^*, V^*)}{N} \int_a^\infty p(\sigma)\Pi(\sigma)d\sigma,$$

où N est définie dans (2.3). Pour $x := (T_0, i_0(\cdot), V_0) \in \mathbf{A}_1$, soit la fonction de Lyapunov $W : \mathbb{R}^+ \times L_+^1(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W(x) = W_1(x) + W_2(x) + W_3(x),$$

avec

$$W_1(x) = T_0 - T^* - \int_{T^*}^{T_0} \frac{f(T^*, V^*)}{f(\eta, V^*)} d\eta,$$

$$W_2(x) = \int_0^\infty H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

et

$$W_3(x) = \frac{f(T^*, V^*)}{\mu_c} H\left(\frac{V_0}{V^*}\right).$$

Nous allons calculer la dérivée de la fonction W le long des solutions (T, i, V) du système (2.10). Tout d'abord, on commence par analyser la dérivée du premier terme W_1 en utilisant l'expression de l'équilibre positif dans (2.18), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_1(\Psi(t)) &= \left(1 - \frac{f(T^*, V^*)}{f(T(t), V^*)}\right) (A - dT(t) - f(T(t), V(t))) \\ &= \mu \left(1 - \frac{f(T^*, V^*)}{f(T(t), V^*)}\right) (T^* - T) + \left(1 - \frac{f(T^*, V^*)}{f(T(t), V^*)}\right) (f(T^*, V^*) \\ &\quad - f(T(t), V(t))). \end{aligned}$$

En appliquant les mêmes arguments de la preuve du [55, Lemme 9.18], d'après le système (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_2(\Psi(t)) &= H\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)}\right) \phi(0) + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da, \\ &= H\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)}\right) f(T^*, V^*) \\ &\quad - \frac{f(T^*, V^*)}{N} \int_0^\infty H\left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)}\right) p(a) \Pi(a) da. \end{aligned}$$

Comme la fonction H est convexe, on a

$$\begin{aligned} H\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)}\right) &= \frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)} - \ln\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)}\right) - 1, \\ &= \frac{f(T(t), V(t))}{f(T^*, V^*)} - \ln\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)}\right) - \ln\left(\frac{f(T(t), V^*)}{f(T^*, V^*)}\right) - 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_2(\Psi(t)) &= f(T(t), V(t)) - f(T^*, V^*) \ln \left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)} \right) \\ &\quad - f(T^*, V^*) \ln \left(\frac{f(T(t), V^*)}{f(T^*, V^*)} \right) - f(T^*, V^*) \\ &\quad - \frac{f(T^*, V^*)}{N} \int_0^\infty H \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} \right) p(a) \Pi(a) da. \end{aligned}$$

la dérivée de W_3 est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_3(\Psi(t)) &= \frac{f(T^*, V^*)}{cV^*} \left(1 - \frac{V^*}{V(t)} \right) \left(\int_0^\infty p(a) i(t, a) da - \mu_c V \right), \\ &= \frac{f(T^*, V^*)}{cV^*} \left(1 - \frac{V^*}{V(t)} \right) \left(\int_0^\infty p(a) \Pi(a) f(T(t-a), V(t-a)) da - \mu_c V \right). \end{aligned}$$

Rappelons que $\mu_c V^* = N f(T^*, V^*)$ et d'après (2.18), on a

$$\frac{d}{dt}W_3(\Psi(t)) = f(T^*, V^*) \left(1 - \frac{V^*}{V(t)} \right) \int_0^\infty \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} - \frac{V}{V^*} \right) \frac{p(a) \Pi(a)}{N} da.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(\Psi(t)) &= d \left(1 - \frac{f(T^*, V^*)}{f(T(t), V^*)} \right) (T^* - T(t)) \\ &\quad + f(T^*, V^*) \left(- \ln \left(\frac{f(T(t), V^*)}{f(T^*, V^*)} \right) - \frac{f(T^*, V^*)}{f(T(t), V^*)} + 1 \right) \\ &\quad + f(T^*, V^*) \left\{ H \left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)} \right) - \int_0^\infty H \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} \right) \frac{p(a) \Pi(a)}{N} da \right\} \\ &\quad + f(T^*, V^*) \left(1 - \frac{V^*}{V(t)} \right) \int_0^\infty \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} - \frac{V}{V^*} \right) \frac{p(a) \Pi(a)}{N} da. \end{aligned}$$

Puisque $(-\ln(x) - \frac{1}{x} + 1) \leq 0$, pour tout $x > 0$, alors les deux premiers termes de l'équation précédente sont négatifs. Il reste à vérifier que le dernier terme est aussi

négatif. Soit la fonction D définie par

$$\begin{aligned} D(t) &:= H\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)}\right) - \int_0^\infty H\left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)}\right) \frac{p(a)\Pi(a)}{N} da \\ &+ \left(1 - \frac{V^*}{V(t)}\right) \int_0^\infty \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} - \frac{V}{V^*}\right) \frac{p(a)\Pi(a)}{N} da. \end{aligned}$$

On considère $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{V(t)}{V^*} < 1$, alors, d'après l'hypothèse (2.19), on a

$$\frac{V(t)}{V^*} < \frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)} < 1.$$

Rappelons que $H(1) = 0$ et que la fonction H est décroissante sur $(0, 1)$, donc,

$$H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) > H\left(\frac{f(T(t), V(t))}{f(T(t), V^*)}\right),$$

ainsi,

$$\begin{aligned} D(t) &\leq \int_0^\infty \left[H\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) - H\left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)}\right) \right. \\ &\quad \left. + H'\left(\frac{V(t)}{V^*}\right) \left(\frac{f(T(t-a), V(t-a))}{f(T^*, V^*)} - \frac{V(t)}{V^*}\right) \right] \frac{p(a)\Pi(a)}{N} da, \end{aligned}$$

puisque la fonction H est convexe, il s'ensuit immédiatement que

$$H(b) - H(a) + H'(b)(a - b) \leq 0, \quad \text{pour tout } a, b > 0,$$

par conséquent,

$$D(t) \leq 0.$$

On répète la même approche pour des valeurs de t qui vérifie $\frac{V(t)}{V^*} > 1$, en utilisant (2.19) et le fait que la fonction H est croissante sur $(1, \infty)$. On trouve $D(t) \leq 0$ également.

Finalement, on conclut que $D(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ implique que $T(t) = T^*$.

Il suffit maintenant de chercher le plus grand ensemble invariant Q tel que $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$. Dans l'ensemble Q on a $T(t) = T^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par un calcul direct de l'équation de T et l'expression de T^* dans (2.10) et (2.15) on a

$$V(t) = V^*, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

d'après (2.10), on a

$$i(t, \cdot) = i^*(\cdot), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour conclure il suffit de suivre les mêmes arguments utilisés dans la preuve du Théorème 4 pour avoir la stabilité asymptotique globale de l'état d'équilibre positif. L'unicité est une conséquence directe du fait que l'équation $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ est satisfaite seulement pour $T = T^*$. \square

2.6 Quelques simulations numériques

Le but de cette section est de faire quelques simulations numériques pour illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre. Pour cela, nous proposons deux modèles mathématiques décrivant la dynamique des virus avec deux fonctions d'infections différentes.

Exemple 1. Soit f_1 la fonction de Beddington-DeAngelis définie par

$$f_1(T, V) = \frac{\beta T V}{1 + \alpha_1 T + \alpha_2 V}.$$

Le système (2.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} T'(t) = A - dT(t) - \frac{\beta T(t)V(t)}{1 + \alpha_1 T(t) + \alpha_2 V(t)} \quad t \geq 0, \\ i_t(t, a) + i_a(t, a) = -\delta(a)i(t, a), \\ V'(t) = \int_0^\infty p(a)i(t, a)da - cV(t), \end{array} \right. \quad (2.25)$$

où β, α_1 et α_2 sont des constantes positives, on note par β le taux d'infection, α_1 et α_2 représentent les coefficients d'infection de la fonction Beddington-DeAngelis, pour plus de détails sur ce modèle nous invitons le lecteur à voir par exemple [68]. La fonction f_1 satisfait toutes les hypothèses définies dans la première partie. Ainsi, en utilisant les Théorèmes 4 et 11, on obtient :

2.6. QUELQUES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

- Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.
- Si $\mathcal{R}_0 > 1$, l'équilibre positif est globalement asymptotiquement stable.

Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 est défini par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{AN\beta}{c(d + \alpha_1 A)}.$$

Les valeurs des paramètres utilisés dans les simulations sont choisis de telles sortes que nous obtenons les deux états d'équilibres.

$$A = 4, \quad d = 0.04, \quad c = 1, \quad \delta = 0.2, \quad \beta = 0.1, \quad \alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.2.$$

$$p(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau, \\ 0.5 & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$T_0 = 50, \quad V_0 = 25, \quad i_0(t) = 10e^{-0.1t}.$$

Nous prenons différentes valeurs de τ pour avoir les différents cas possibles du comportement asymptotique des solutions du système (2.25).

Remarque 12. Dans les deux exemples nous avons choisi de prendre τ libre et discuter suivant ces différentes valeurs. On peut choisir de fixer τ et laisser tout autre paramètre libre, ceci nous mènera à la même conclusion à condition que $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ou $\mathcal{R}_0 > 1$.

Si $\tau = 6$ alors $\mathcal{R}_0 = 0.6676 < 1$, ou si $\tau = 1$, alors $\mathcal{R}_0 = 1.8146 > 1$.

Exemple 2. Soit la fonction h ,

$$h(x) = \frac{\beta x}{1 + \alpha x^n} \quad \text{avec } 0 \leq n \leq 1. \quad (2.26)$$

La fonction Holling I et Holling II sont des cas particuliers de la fonction h , respectivement, pour $n = 1$ et $n = 0$. Dans ce deuxième exemple nous considérons la fonction d'incidence suivante

$$f_2(T, V) = \frac{\beta TV}{(1 + \alpha V^n)}.$$

On remarque que toutes les conditions nécessaires dans les sections précédentes sont vérifiées par la fonction f_2 ,

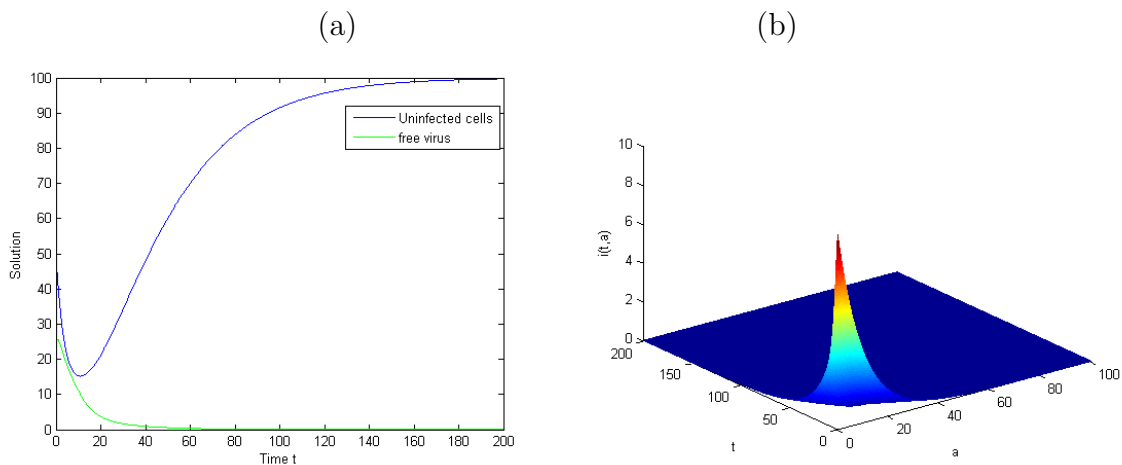


FIGURE 2.1 – (a) L'évolution des solutions T et V par rapport au temps t ; (b) L'évolution de la solution i par rapport à l'âge d'infection a et le temps t . La stabilité de l'équilibre sans maladie, l'extinction des cellules infectées et du virus pour un t assez grand.

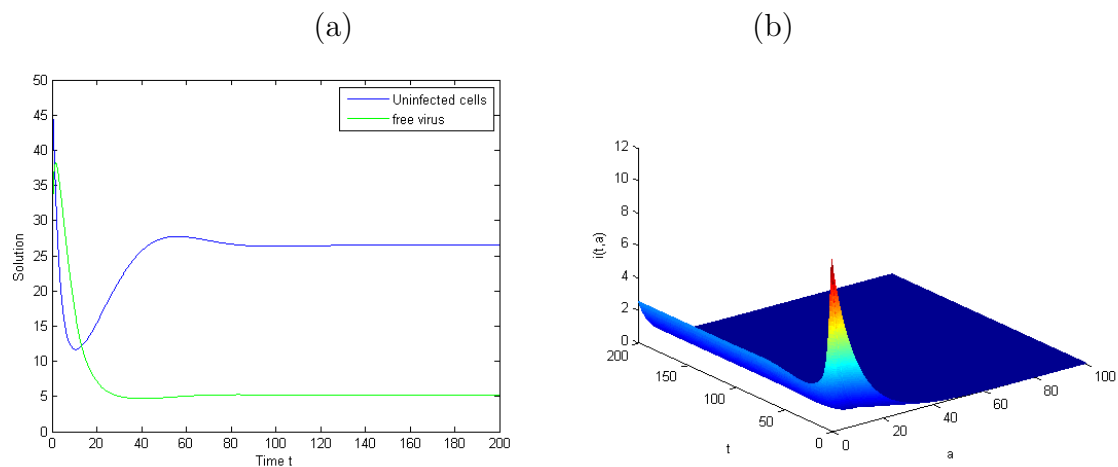


FIGURE 2.2 – (a) L'évolution des solutions T et V par rapport au temps t ; (b) L'évolution de la solution i par rapport à l'âge d'infection a et le temps t . La stabilité de l'équilibre endémique, la maladie persiste dans la population pour un t assez grand.

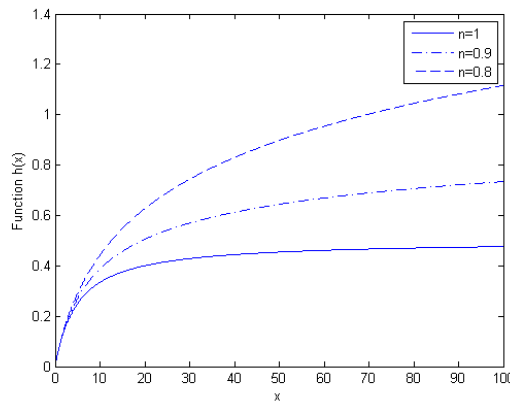


FIGURE 2.3 – La fonction h pour $\beta = 0.1$ et $\alpha = 0.2$.

- $f_2(\cdot, V)$ est croissante pour $V > 0$.
- la fonction $\frac{\partial f_2}{\partial V}(\cdot, 0)$ est continue positive sur chaque ensemble borné K .
- la fonction f_2 est localement lipschitzienne continue par rapport à T et V , avec une constante de Lipschitz $L > 0$,
- la fonction f_2 est concave par rapport à V et satisfait la dernière hypothèse (2.19).

Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 ,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{AN\beta}{cd}.$$

Les valeurs des paramètres $A = 2$, $d = 0.1$, $c = 1$, $\delta = 0.3$, $\beta = 0.1$, $\alpha_1 = 0.2$ et $n = 0.8$.

$$p(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau, \\ 0.5 & \text{si } t > \tau. \end{cases}$$

Les conditions initiales

$$T_0 = 10, \quad V_0 = 5, \quad i_0(t) = 3e^{-0.1t}.$$

Le choix des paramètres est adapté de telle sorte que $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ou $\mathcal{R}_0 > 1$. Tout d'abord, si $\tau = 5$, alors $\mathcal{R}_0 = 0.7162 < 1$,

Ensuite, si $\tau = 1$, alors $\mathcal{R}_0 = 2.3779 > 1$,

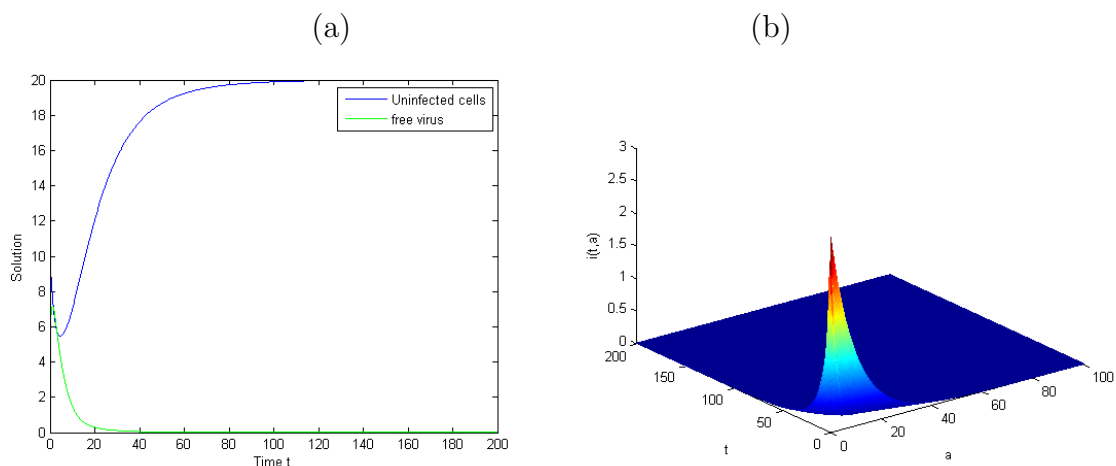


FIGURE 2.4 – (a) L'évolution des solutions T et V par rapport au temps t ; (b) L'évolution de la solution i par rapport à l'âge d'infection a et le temps t . Puisque $\mathcal{R}_0 < 1$, nous avons l'extinction de la maladie pour un t assez grand.

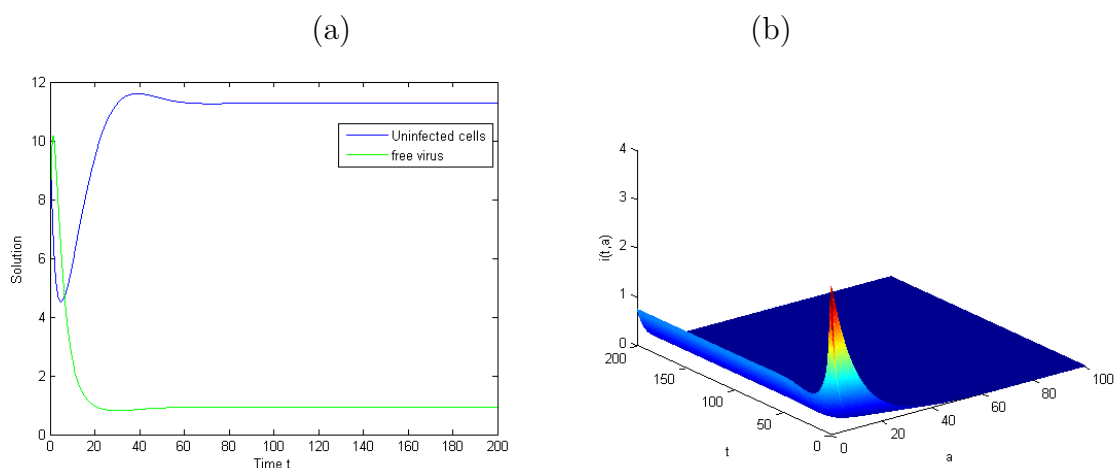


FIGURE 2.5 – (a) L'évolution des solutions T et V par rapport au temps t ; (b) L'évolution de la solution i par rapport à l'âge d'infection a et le temps t . Puisque $\mathcal{R}_0 > 1$, la maladie persiste dans la population.

Chapitre 3

Stabilité globale d'un modèle épidémique structuré en âge avec une fonction d'incidence générale

Ce chapitre est consacré à l'analyse mathématique d'un modèle épidémiologique avec incidence non linéaire. Nous proposons un modèle décrivant la dynamique d'une population divisée en trois classes; la population des individus susceptibles $S(t)$ à l'instant t , la population des individus infectés $i(t, a)$ à l'instant t et qui ont l'âge d'infection a et finalement la population des individus rétablis $R(t)$ à l'instant t .

3.1 Introduction

La dynamique de cette population est décrite par un système d'équations structurées en âge avec une fonction d'incidence de type général, pour $t > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t), \end{array} \right. \quad a > 0, \quad (3.1)$$

la fonction J représente les individus infectés à l'instant t et pour tout âge d'infection :

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da, \quad t > 0.$$

Ce système est complété par les conditions initiales suivantes,

$$\begin{cases} i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad R(0) = r_0 \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.2)$$

La fonction θ représente le taux des individus infectés qui quittent le compartiment i à l'âge a . Les paramètres μ , δ et k sont respectivement le taux de mortalité naturelle, le taux de rechute et la probabilité qu'un individu retourne directement au compartiment des individus infectés. Le paramètre A modélise un flux constant des individus sains rentrant dans la classe S . Toute au long de ce chapitre, nous supposons que

- La fonction $\beta \in C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, la fonction $\theta \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+)$.
- Les paramètres A et μ sont positifs. De plus, le taux $k \in [0, 1]$.

Nous supposons aussi que la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

(H0) La fonction $f(\cdot, J)$ est croissante pour $J > 0$ et $f(S, \cdot)$ est croissante pour $S > 0$ avec $f(0, J) = f(S, 0) = 0$ pour tout $S, J \geq 0$.

(H1) Pour tout $S > 0$, la fonction $f(S, J)$ est concave par rapport à J .

(H2) La fonction $\frac{\partial f}{\partial J}(\cdot, 0)$ est positive continue sur tout sous-ensemble borné $K \subset \mathbb{R}^+$.

(H3) La fonction f est continue et localement lipschitzienne par rapport à S et J c-à-d pour tout $C > 0$, il existe une constante de Lipschitz $L := L_C > 0$ telle que

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L(|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|), \quad (3.3)$$

avec $0 \leq S_2, S_1, J_2, J_1 \leq C$.

Remarque 13. Ces hypothèses sont vérifiées par les fonctions d'incidence classiques.

Soit l'espace fonctionnel $X := \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}$, la norme associée est définie comme suit

$$\|(S, i, R)\|_X = |S| + \int_0^{+\infty} |i(a)|da + |R|, \quad S, R \in \mathbb{R}, \quad i \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

On définit le cône positif de X par $X^+ := \mathbb{R}^+ \times L_+^1(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+$.

L'étude de l'existence, la positivité et l'unicité de la solution est classique, l'idée de la preuve est l'utilisation du Théorème du point fixe de Banach-Picard dans un espace approprié X (Voir [6, Théorème 2.2],[52]).

Théorème 14. *Supposons que $(S_0, i_0(\cdot), r_0) \in X^+$, alors le système (3.1) et (3.2) admet une solution unique positive $(S, i, R) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+)) \times C^1(\mathbb{R}^+)$.*

Soit $N(t) := S(t) + \int_0^\infty i(t, a)da + R(t)$. Alors, du système (3.1), on a pour tout $t > 0$,

$$N'(t) = A - \mu N(t).$$

Ainsi, pour tout $t > 0$

$$N(t) \leq \max \left\{ N(0), \frac{A}{\mu} \right\},$$

avec $N(0) = S_0 + \int_0^{+\infty} i_0(a)da + r_0$. Ce qui implique que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}. \quad (3.4)$$

De plus, on peut vérifier que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + L},$$

où L est la constante de Lipschitz donnée dans (3.3).

3.2 Stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie

Dans cette section, nous montrons la stabilité locale et globale de l'équilibre sans maladie. Tout d'abord, on commence par la stabilité asymptotique locale du système (3.1). On note par

$$\pi(a) = e^{-\int_0^a (\mu + \theta(s))ds}, \quad a \geq 0. \quad (3.5)$$

Nous pouvons estimer le taux de reproduction de base par l'équation de renouvellement, en utilisant le rayon spectral de la matrice de la prochaine génération, pour plus de détail nous invitons le lecteur à consulter le livre de Diekmann [17].

Le taux de reproduction de base du système (3.1) est donné comme suit

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da + \left(\frac{(1-k)\delta}{\mu + \delta} + k\right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da.$$

Par un calcul direct, on peut vérifier que le système (3.1) admet toujours un équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right) \in X^+$.

La linéarisation du système (3.1) au voisinage de l'équilibre E_0 est donnée par, pour tout $t > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\mu S(t) - S(t)\frac{\partial f}{\partial S}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) - J(t)\frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \quad a > 0, \\ i(t, 0) = S(t)\frac{\partial f}{\partial S}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) + J(t)\frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

L'équation caractéristique associée au système (3.6) s'écrit sous la forme

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \lambda + \mu + \frac{\partial}{\partial S}f\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) & P(\lambda) & 0 & \\ -\frac{\partial}{\partial S}f\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) & Q(\lambda) & -\delta & \\ 0 & G(\lambda) & \lambda + \mu + \delta & \end{array} \right| = 0,$$

avec

$$P(\lambda) := \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da,$$

$$Q(\lambda) := 1 - \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da - k \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da,$$

et

$$G(\lambda) := -(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant.

Théorème 15. *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ est localement asymptotiquement stable. Par contre, si $\mathcal{R}_0 > 1$, E_0 devient instable.*

Démonstration. L'équation caractéristique de E_0 est donnée par

$$(\lambda + \mu)H(\lambda) = 0, \quad (3.7)$$

avec

$$H(\lambda) = (\lambda + \mu + \delta) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda a} da - k \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda a} da \right) - \delta(1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda a} da.$$

On remarque directement que $-(\mu + \delta)$ est une racine négative de l'équation (3.7), les autres racines sont obtenues par l'équation $H(\lambda) = 0$. En premier lieu, supposons que $\mathcal{R}_0 < 1$, alors nous allons montrer que l'équation $H(\lambda) = 0$ n'admet pas de racine avec une partie réelle positive. On suppose par l'absurde qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda_0) \geq 0$, tel que $H(\lambda_0) = 0$, ainsi,

$$|\lambda_0 + \mu + \delta| = \left| \frac{\delta(1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da}{1 - \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) - k \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da} \right|.$$

Puisque $Re(\lambda_0) \geq 0$ et $\mathcal{R}_0 < 1$, alors

$$\mu + \delta \leq \frac{\left| \delta(1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right|}{\left| 1 - \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) - k \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right|},$$

il s'ensuit,

$$\begin{aligned} \frac{\delta(1 - k)}{\mu + \delta} & \left| \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right| \\ & \geq 1 - \left| \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) - k \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right|, \\ & \geq 1 - \left| \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \right| - k \left| \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right|, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\mathcal{R}_0 \geq \left| \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \right| + \left(k + \frac{\delta(1 - k)}{\mu + \delta} \right) \left| \int_0^{+\infty} \theta(a) \pi(a) e^{-\lambda_0 a} da \right| \geq 1,$$

donc, $\mathcal{R}_0 \geq 1$, ceci est une contradiction avec notre hypothèse $\mathcal{R}_0 < 1$. Donc, l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable pour $\mathcal{R}_0 < 1$. À présent supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$H(0) = (\mu + \delta)(1 - \mathcal{R}_0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H(\lambda) = +\infty,$$

cela conduit à l'existence d'une racine réelle positive de (3.7). Par conséquent, E_0 est instable pour $\mathcal{R}_0 > 1$. \square

Dans la suite de cette section nous nous intéressons à la stabilité globale de l'équilibre E_0 .

Tout d'abord, nous commençons par intégrer l'équation structurée en âge le long des caractéristiques afin d'obtenir un système d'équation intégrale de Volterra, on note $B(t) := i(t, 0)$ pour tout $t > 0$,

$$i(t, a) = \begin{cases} \pi(a)B(t-a), & a < t, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t), & a \geq t. \end{cases} \quad (3.8)$$

En utilisant (3.8), on obtient

$$B(t) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da + \int_t^\infty \theta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da + \delta R(t), \quad (3.9)$$

$$J(t) = \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a)da + \int_t^\infty \beta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da, \quad (3.10)$$

et

$$R'(t) = (1-k) \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da + (1-k) \int_t^\infty \theta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da - (\mu + \delta)R(t), \quad (3.11)$$

Le théorème suivant permet de conclure la stabilité globale de l'équilibre E_0 .

Théorème 16. *Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. D'après le Théorème 15, l'équilibre E_0 est localement asymptotiquement stable, donc, il suffit de prouver l'attractivité globale de ce dernier pour avoir la stabilité globale. Supposons que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (S(t), B(t), R(t)) = (S^\infty, B^\infty, R^\infty) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} J(t) = J^\infty.$$

En utilisant la méthode de fluctuation (voir [55, Lemme A.14]), il existe des suites $(t_n)_n, (s_n)_n, (r_n)_n$ qui tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini, telles que $S(t_n) \rightarrow$

3.2. STABILITÉ LOCALE ET GLOBALE DE L'ÉQUILIBRE SANS MALADIE

S^∞ , $S'(t_n) \rightarrow 0$, $B(s_n) \rightarrow B^\infty$ et $R(r_n) \rightarrow R^\infty$ et $R'(r_n) \rightarrow 0$. En remplaçant r_n dans (3.11), et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$R^\infty \leq \frac{(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da}{\mu + \delta} B^\infty. \quad (3.12)$$

De manière similaire, en utilisant (3.9), (3.10) et l'hypothèse (H0), on obtient

$$\begin{cases} B^\infty \leq f(S^\infty, J^\infty) + kB^\infty \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da + \delta R^\infty, \\ J^\infty \leq B^\infty \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da. \end{cases} \quad (3.13)$$

En combinant (3.12), (3.13) et le fait que $f(S^\infty, J) \leq f(\frac{A}{\mu}, J)$, on a

$$B^\infty \leq f(S^\infty, J^\infty) + kB^\infty \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da + \frac{\delta(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da}{\mu + \delta} B^\infty.$$

Comme $S^\infty \leq \frac{A}{\mu}$ et f est une fonction croissante par rapport à S , alors

$$B^\infty \leq f(\frac{A}{\mu}, J^\infty) + kB^\infty \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da + \frac{\delta(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da}{\mu + \delta} B^\infty. \quad (3.14)$$

D'après (H1), un simple calcul conduit à

$$f(\frac{A}{\mu}, J^\infty) \leq J^\infty \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{A}{\mu}, 0) \quad (3.15)$$

En combinant (3.14), (3.15) et la deuxième inégalité de (3.13), on obtient

$$B^\infty \leq \mathcal{R}_0 B^\infty.$$

Puisque $\mathcal{R}_0 < 1$, alors $B^\infty = 0$. Ceci implique $J^\infty = R^\infty = 0$ et d'après l'équation de S , nous obtenons que $S^\infty = \frac{A}{\mu}$. \square

3.3 Existence du semi-flot et de l'attracteur global compact

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence d'un attracteur compact pour tout sous ensemble borné de X^+ . Pour cela on commence par définir le semi-flot $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X^+ \rightarrow X^+$

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0)) = (S(t), i(t, \cdot), R(t)), \quad (S_0, i_0(\cdot), r_0) \in X^+. \quad (3.16)$$

Le semi-flot Φ est généré par l'unique solution de notre problème (3.1)-(3.2). De plus, le semi-flot Φ est continu.

Théorème 17. *Le semi-flot Φ admet un attracteur compact A des sous-ensembles bornés dans X_+ .*

Démonstration. L'idée de la preuve est similaire à celle du Théorème 2 du chapitre 1, on définit par

$$\Psi_1(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0)) = (0, u(t, \cdot), 0) \quad \text{et} \quad \Psi_2(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0)) = (S(t), v(t, \cdot), R(t)),$$

où

$$u(t, a) = \begin{cases} 0, & a < t, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i_0(a-t), & a > t, \end{cases}$$

et

$$v(t, a) = \begin{cases} \pi(a)B(t-a), & a < t, \\ 0, & a > t. \end{cases}$$

Soit C un sous-ensemble fermé borné, invariant par Φ pour toutes conditions initiales dans X . Supposons que

$$M_1 := \sup\{S_0 + \|i_0\|_{L^1} + r_0, (S_0, i_0, r_0) \in C\} \quad \text{et} \quad M_2 := \max\left\{M_1, \frac{A}{\mu}\right\}. \quad (3.17)$$

La preuve est basée sur les mêmes arguments du Théorème 2. On a $\Psi_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ uniformément pour toutes conditions initiales dans C . Il reste à montrer que Ψ_2 est relativement compacte dans X_+ . Pour cela, nous allons faire appel au [55, Théorème B2]. Nous vérifions juste la condition (iii) du Théorème B2 puisque les autres

3.3. EXISTENCE DU SEMI-FLOT ET DE L'ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT

conditions sont faciles à vérifier. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |v(t, a+h) - v(t, a)| da &= \int_0^{t-h} |\pi(a+h)B(t-a-h) - \pi(a)B(t-a)| da \\ &+ \int_{t-h}^t |\pi(a)B(t-a)| da. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Par ailleurs, pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |B(t)| &\leq f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a) da + \delta R(t), \\ &\leq f(M_2, \|\beta\|_\infty M_2) + k\|\theta\|_\infty M_2 + \delta M_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

pour toutes conditions initiales appartenant à C . Donc, nous remarquons que le deuxième terme de l'inégalité (3.18) tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ uniformément dans C . On définit

$$\begin{aligned} I_h &:= \int_0^{t-h} |\pi(a+h)B(t-a-h) - \pi(a)B(t-a)| da, \\ &\leq \int_0^{t-h} |\pi(a)(B(t-a-h) - B(t-a))| da + \int_0^{t-h} |B(t-a-h)(\pi(a+h) - \pi(a))| da. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En utilisant le système (3.1), pour $t \geq 0$, on a

$$|S'(t)| \leq A + \mu M_2 + f(M_2, \|\beta\|_\infty M_2), \quad (3.21)$$

et

$$|R'(t)| \leq (1-k)\|\theta\|_\infty M_2 + (\mu + \delta)M_2. \quad (3.22)$$

Notons que $A_h := |B(t-a-h) - B(t-a)|$ pour $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} A_h &\leq |f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - f(S(t-a), J(t-a))| \\ &+ k \left| \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a-h, \sigma) d\sigma - \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a, \sigma) d\sigma \right| \\ &+ \delta |R(t-a-h) - R(t-a)|. \end{aligned}$$

3.3. EXISTENCE DU SEMI-FLOT ET DE L'ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT

En utilisant le fait que la fonction f est lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned} A_h &\leq L|S(t-a-h) - S(t-a)| + L|J(t-a-h) - J(t-a)| \\ &\quad + k \left| \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a-h, \sigma)d\sigma - \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a, \sigma)d\sigma \right| \\ &\quad + \delta|R(t-a-h) - R(t-a)|. \end{aligned}$$

Par (3.21) et (3.22), on vérifie facilement que le premier et le dernier terme dans A_h tendent vers 0 quand h tend vers 0^+ uniformément pour des conditions initiales dans C . Il reste à analyser le deuxième terme de A_h . On pose

$$A_h^1 := L|J(t-a-h) - J(t-a)| + k \left| \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a-h, \sigma)d\sigma - \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(t-a, \sigma)d\sigma \right|. \quad (3.23)$$

Pour $t \geq 0$, supposons que $J(t) = J_1(t) + J_2(t)$, avec

$$J_1(t) = \int_0^t \beta(a)\pi(a)f(S(t-a), J(t-a))da \quad \text{et} \quad J_2(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a+t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}i_0(a)da, \quad (3.24)$$

Ainsi, pour $s, h \geq 0$,

$$|J(s+h) - J(s)| \leq |J_1(s+h) - J_1(s)| + |J_2(s+h) - J_2(s)|.$$

Par un changement de variable dans (3.24), on obtient

$$J_1(t) = \int_0^t \beta(t-\sigma)\pi(t-\sigma)f(S(\sigma), J(\sigma))d\sigma.$$

Donc, pour $s, h \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} &|J_1(s+h) - J_1(s)| \\ &\leq \int_s^{s+h} \beta(s+h-\sigma)\pi(s+h-\sigma)f(S(\sigma), J(\sigma))d\sigma \\ &\quad + \int_0^s |\beta(s+h-\sigma)\pi(s+h-\sigma) - \beta(s-\sigma)\pi(s-\sigma)|f(S(\sigma), J(\sigma))d\sigma, \\ &\leq \|\beta\|_\infty f(M_2, \|\beta\|_\infty M_2)h \\ &\quad + f(M_2, \|\beta\|_\infty M_2) \int_0^s |\beta(s+h-\sigma)\pi(s+h-\sigma) - \beta(s-\sigma)\pi(s-\sigma)|d\sigma, \end{aligned}$$

par conséquent, pour toutes conditions initiales appartenant à C , il est facile de vérifier que le dernier terme tend vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$ uniformément pour $s \geq 0$. D'autre part,

3.3. EXISTENCE DU SEMI-FLOT ET DE L'ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT

d'après la définition de J_2 dans (3.24), on a

$$\begin{aligned}
& |J_2(s+h) - J_2(s)| \\
& \leq \left| \int_0^{+\infty} \beta(a+s+h) \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a)} i_0(a) da - \int_0^{+\infty} \beta(a+s) \frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} i_0(a) da \right|, \\
& \leq \int_0^{+\infty} |\beta(a+s+h) - \beta(a+s)| \frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} i_0(a) da \\
& \quad + \int_0^{+\infty} \beta(a+s+h) i_0(a) \left| \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a)} - \frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} \right| da.
\end{aligned}$$

Comme le fonction β est uniformément continue et d'après (3.17), alors tous les termes ci-dessus tendent vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$ uniformément pour tout $s \geq 0$ et pour toutes données initiales dans C . Finalement, en utilisant les mêmes arguments précédents on prouve que

$$\left| \int_0^{+\infty} \theta(\sigma) i(t-a-h, \sigma) d\sigma - \int_0^{+\infty} \theta(\sigma) i(t-a, \sigma) d\sigma \right| \rightarrow 0,$$

quand $h \rightarrow 0^+$ uniformément pour toutes conditions initiales appartenant à C . \square

À présent on s'intéresse à la trajectoire totale du système (3.1). Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X^+$ une trajectoire totale définie comme, $\phi(t) = (S(t), i(t, \cdot), R(t))$. Donc, $\phi(t+r) = \Phi(t, \phi(r))$, $t \geq 0, r \in \mathbb{R}$. En répétant les mêmes arguments utiliser dans [55], on obtient le système suivant pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases}
S'(t) = A - \mu S - f(S(t), J(t)), \\
i(t, a) = \pi(a) B(t-a), \\
B(t) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da + \delta R(t), \\
R'(t) = (1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da - (\mu + \delta) R(t), \\
J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi(a) B(t-a) da.
\end{cases} \quad (3.25)$$

Le lemme suivant fournit quelques estimations sur la trajectoire totale.

Lemme 18. *Pour tout $(S_0, i_0(\cdot), r_0) \in \mathbf{A}$, nous avons les estimations suivantes*

$$S(t) > \frac{A}{\mu + L}, \quad S(t) + \int_0^{+\infty} i(t, a) da + R(t) \leq \frac{A}{\mu} \text{ et } i(t, a) \leq \xi \pi(a), \quad a \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.3. EXISTENCE DU SEMI-FLOT ET DE L'ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT

Avec $\xi := (L\|\beta\|_\infty + k\|\theta\|_\infty + \delta)\frac{A}{\mu}$ et L est la constante de Lipschitz de la fonction f dans (3.3).

Démonstration. Supposons que,

$$I(t) := \int_0^{+\infty} i(t, a)da = \int_0^{+\infty} \pi(a)B(t-a)da.$$

Après un changement de variable et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$I(t) = \int_{-\infty}^t \pi(t-a)B(a)da,$$

L'équation différentielle de I est donnée par

$$I'(t) = B(t) - \int_0^{+\infty} (\mu + \theta(a))\pi(a)B(t-a)da.$$

En combinant cette équation avec le système (3.25), on obtient

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) \leq A - \mu(S(t) + I(t) + R(t)),$$

par conséquent, pour $t \in \mathbb{R}$

$$S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu}. \quad (3.26)$$

De plus, l'équation de S dans (3.25) et l'hypothèse (H3) nous permettent d'avoir l'inégalité

$$S'(t) \geq A - \mu S - LS(t),$$

nous en déduisons que

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + L}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, la fonction f vérifie $f(S, 0) = 0$ pour $S > 0$, ainsi, en utilisant l'hypothèse (H3), on obtient

$$\begin{aligned} i(t, a) &= \pi(a)(f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t)), \\ &\leq \pi(a)(LJ(t) + k\|\theta\|_\infty I(t) + \delta R(t)), \end{aligned}$$

Finalement, d'après (3.26), on conclut que

$$i(t, a) \leq \xi \pi(a), \quad a > 0,$$

où $\xi := \frac{A}{\mu}(L\|\beta\| + k\|\theta\| + \delta)$. □

3.4 Étude de la stabilité globale pour l'équilibre endémique

Le but principal de cette section est d'étudier la stabilité globale de l'équilibre endémique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la persistance uniforme de la solution du problème (3.25). Le lemme suivant nous assure l'existence de l'équilibre positif du système (3.25).

Lemme 19. *Supposons que*

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} > 1, \quad \text{pour } S \in [0, A/\mu).$$

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le système (3.1) admet un équilibre endémique positif.

Démonstration. Notons par $E^* := (S^*, i^*(.), R^*)$ l'équilibre positif du système (3.25). Autrement dit, E^* est le point fixe du semi-flot Φ ,

$$\Phi(t, (S^*, i^*(.), R^*)) = (S^*, i^*(.), R^*), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

D'après (3.16) et (3.8), on a

$$i^*(a) = \begin{cases} \pi(a)i^*(0), & 0 < a < t, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i^*(a-t), & a > t, \end{cases} \quad (3.27)$$

et

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \int_0^{+\infty} \beta(a)i^*(a)da. \end{cases} \quad (3.28)$$

Il est important de remarquer que la première expression de $i^*(a)$ définie dans (3.27)

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

satisfait la deuxième expression dans (3.27). En effet, pour $t < a < 2t$, on obtient

$$\begin{aligned} i^*(a-t) &= \pi(a-t)i^*(0), \\ &= \frac{\pi(a-t)}{\pi(a)}i^*(a). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} i^*(a) &= \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i^*(a-t), \\ &= \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}\pi(a-t)i^*(0), \\ &= \pi(a)i^*(0). \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise une méthode itérative pour montrer le résultat suivant,

$$i^*(a) = \pi(a)i^*(0), \quad \text{pour tout } a \geq 0. \quad (3.29)$$

Les expressions (2.16) et (3.29) nous permettent d'écrire

$$i^*(0) = \frac{1}{D}f(S^*, J^*),$$

avec

$$D = 1 - \left(k + \frac{\delta(1-k)}{\mu + \delta} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da. \quad (3.30)$$

En conséquence,

$$i^*(a) = \frac{1}{D}f(S^*, J^*)\pi(a), \quad \forall a \geq 0. \quad (3.31)$$

De plus, d'après (3.28) et (3.31), on a

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \frac{M}{D}f(S^*, J^*), \end{cases} \quad (3.32)$$

où $M := \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da$ et D est définie dans (3.30). Suite aux mêmes arguments dans [33] et [34], nous montrons l'existence de l'équilibre endémique positif. \square

Lemme 20. *Supposons que pour tout $S > 0$, la fonction f est croissante et concave par rapport à J . Alors, nous avons les propriétés suivantes*

$$\frac{f(\cdot, J)}{J} \text{ est une fonction décroissante par rapport à } J. \quad (3.33)$$

et

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1, & \text{pour } 0 < x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*}, & \text{pour } x > J^*. \end{cases} \quad (3.34)$$

Nous nous intéressons maintenant à la persistance uniforme des solutions du problème (3.25). Pour cela, on définit

$$X_0 = \left\{ (S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in X^+ \mid R(0) + \int_0^\infty i_0(a)\bar{\theta}(a)da + \int_0^\infty i_0(a)\bar{\beta}(a)da > 0 \right\},$$

les deux fonctions $\bar{\theta}$ et $\bar{\beta}$ sont données par

$$\begin{cases} \bar{\theta}(a) := \int_0^\infty \theta(a+t) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} dt, & \text{pour } a > 0, \\ \bar{\beta}(a) := \int_0^\infty \beta(a+t) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} dt, & \text{pour } a > 0. \end{cases}$$

Lemme 21. *Si $(S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in X_0$. Alors il existe $t_0 > 0$ tel que $B(t) > 0$ pour tout $t > t_0$. De plus, si $(S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in X^+ \setminus X_0$, alors $B(t) := i(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Rappelons que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et on a

$$B(t) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t).$$

En intégrant la troisième équation du système (3.1) sur l'intervalle $(0, t)$, on obtient

$$R(t) = R(0)e^{-(\mu+\delta)t} + (1-k) \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(s-t)} \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(s, \sigma)d\sigma ds.$$

Ainsi, la fonction B peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} B(t) &= f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da \\ &+ \delta R(0)e^{-(\mu+\delta)t} + (1-k)\delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(s-t)} \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)i(s, \sigma)d\sigma ds, \end{aligned}$$

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Donc, en utilisant (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 B(t) &= f(S(t), J(t)) + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da \\
 &+ k \int_t^\infty \theta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da + \delta R(0)e^{-(\mu+\delta)t} \\
 &+ (1-k)\delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(s-t)} \left(\int_0^s \theta(\sigma)\pi(\sigma)B(s-\sigma)d\sigma + \int_s^\infty \theta(\sigma)\frac{\pi(\sigma)}{\pi(\sigma-s)}i_0(\sigma-s)d\sigma \right) ds.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Si $R(0) > 0$, il est clair que $B(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Ensuite, supposons maintenant que

$$\int_0^\infty i_0(a)\bar{\theta}(a)da > 0,$$

nous avons

$$I_0(t) := \int_t^\infty \theta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da = \int_0^\infty \theta(a+t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}i_0(a)da, \tag{3.36}$$

Par intégration de I_0 sur $[0, +\infty)$, on obtient

$$\int_0^\infty I_0(t)dt = \int_0^\infty i_0(a) \int_0^\infty \theta(a+t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}dt da = \int_0^\infty i_0(a)\bar{\theta}(a)da.$$

Dans la suite, nous utilisons une translation de la solution pour $r \geq 0$, on définit $S_r(t) = S(t+r)$, $J_r(t) = J(t+r)$, $I_r^0(t) = I_0(t+r)$ et $B_r(t) = B(t+r)$. D'après (3.35), (3.36), on obtient

$$B_r(t) \geq k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B_r(t-a)da + kI_r^0(t),$$

puisque $\int_0^\infty I_0(t)dt > 0$ alors pour $r > 0$ assez petit, I_r^0 n'est pas identiquement nulle sur $[r, \infty)$. Par conséquent, d'après [55, Corollaire B.6], il existe $t_0 > 0$ tel que $B(t) > 0$ pour tout $t > t_0$. Le cas $\int_0^\infty i_0(a)\bar{\beta}(a)da > 0$ se traite de la même manière.

D'autre part, si $(S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in X^+ \setminus X_0$, alors d'après les expressions (3.8) et (3.35), on a

$$\begin{aligned}
 B(t) &= f(S(t), J(t)) + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da + k \int_t^\infty \theta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i_0(a-t)da \\
 &+ (1-k)\delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(s-t)} \left(\int_0^s \theta(\sigma)\pi(\sigma)B(s-\sigma)d\sigma + \int_s^\infty \theta(\sigma)\frac{\pi(\sigma)}{\pi(\sigma-s)}i_0(\sigma-s)d\sigma \right) ds.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Par la définition de l'espace $X^+ \setminus X_0$ et le fait que la fonction f est localement lipschit-

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

zienne, on a

$$\begin{aligned} B(t) &\leq L \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a)da + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da \\ &\quad + (1-k)\delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(s-t)} \int_0^s \theta(\sigma)\pi(\sigma)B(s-\sigma)d\sigma ds, \end{aligned}$$

car $f(S, 0) = 0$ pour tout $S > 0$. En appliquant maintenant le Théorème de Fubini au dernier terme et d'après la définition des fonctions β et θ , on obtient

$$B(t) \leq \left(L\|\beta\|_\infty + \left(k + \frac{(1-k)\delta}{\mu + \delta} \right) \|\theta\|_\infty \right) \int_0^t B(a)da.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on conclut que $B(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. □

Soit la fonction de persistance $\rho : X^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\rho(S_0, i_0(\cdot), R(0)) = f(S_0, J_0) + \int_0^{+\infty} \theta(a)i_0(a)da + R(0),$$

ainsi

$$\rho(\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), R(0)))) = B(t).$$

Lemme 22. *Supposons que (3.33) est satisfaite et $\mathcal{R}_0 > 1$. Si $x \in X_0$, alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon,$$

pour toutes solutions de (3.1).

Démonstration. On suppose par l'absurde que ρ n'est pas une fonction de persistance, alors il existe un $\epsilon > 0$ assez petit tel que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) < \epsilon. \tag{3.38}$$

Par le Théorème 14, on a $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$, ainsi, d'après (3.38) il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} J(t) < \epsilon_0.$$

Soit $S_\infty = \liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t)$. Alors, il existe une suite $t_k \rightarrow +\infty$ telle que $S(t_k) \rightarrow S_\infty$ et $S'(t_k) \rightarrow 0$ quand $t_k \rightarrow +\infty$ (voir [55, Lemme A.14]). Par conséquent, la continuité de la fonction f nous permet de conclure que pour un t assez grand, on a

$$0 \geq A - \mu S_\infty - \epsilon.$$

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

d'où

$$S_\infty \geq \frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon),$$

avec $\psi(\epsilon) := \frac{\epsilon}{\mu}$. Comme $\mathcal{R}_0 > 1$, alors on peut choisir un $\epsilon_1 > 0$ assez petit tel que

$$h(\epsilon_1) = \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1} \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da + \left(k + \frac{(1-k)\delta}{\epsilon_1 + \mu + \delta} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da > 1. \quad (3.39)$$

L'équation de R dans le système (3.1) s'écrit pour tout $t \geq 0$,

$$R'(t) = (1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t,a)da - (\mu + \delta)R(t),$$

ainsi, pour $t \geq 0$,

$$R'(t) \geq (1-k) \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da - (\mu + \delta)R(t).$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\lambda \hat{R}(\lambda) - R(0) \geq (1-k)\hat{\theta}(\lambda)\hat{B}(\lambda) - (\mu + \delta)\hat{R}(\lambda),$$

En conclusion

$$\hat{R}(\lambda) \geq \frac{(1-k)\hat{\theta}(\lambda)}{\lambda + \mu + \delta} \hat{B}(\lambda), \quad (3.40)$$

où \hat{B} et $\hat{\theta}$ sont respectivement les transformées de Laplace de B et θ , définies pour $\lambda > 0$, par

$$\hat{B}(\lambda) = \int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}da \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da.$$

De plus, rappelons qu'il existe un $T > 0$ tel que $J(t) < \epsilon_0$ pour tout $t \geq T$, alors d'après l'hypothèse (3.33), on a

$$\frac{f(S, J)}{J} \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), J)}{J} \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), \epsilon_0)}{\epsilon_0}.$$

L'équation de B dans (3.25) peut s'écrire comme

$$B(t) \geq \frac{f(S(t), J(t))}{J(t)} J(t) + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da + \delta R(t),$$

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

ceci implique que, pour $t \geq T$,

$$B(t) \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), \epsilon_0)}{\epsilon_0} \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a)da + k \int_0^t \theta(a)\pi(a)B(t-a)da + \delta R(t).$$

D'une manière similaire, on applique la transformée de Laplace à cette dernière inégalité, on a

$$\hat{B}(\lambda) \geq \hat{\beta}(\lambda)\hat{B}(\lambda)\frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), \epsilon_0)}{\epsilon_0} + k\hat{\theta}(\lambda)\hat{B}(\lambda) + \delta\hat{R}(\lambda),$$

où $\hat{\beta}$ est la transformée de Laplace de β définie pour $\lambda > 0$, par

$$\hat{\beta}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da.$$

En utilisant l'inégalité (3.40), on obtient

$$\hat{B}(\lambda) \geq \hat{\beta}(\lambda)\hat{B}(\lambda)\frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), \epsilon_0)}{\epsilon_0} + \left(k + \frac{\delta(1-k)}{\lambda + \mu + \delta}\right)\hat{\theta}(\lambda)\hat{B}(\lambda),$$

puisque, $\hat{B}(\lambda) > 0$ (voir le Lemme 21), alors

$$1 \geq \hat{\beta}(\lambda)\frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_0), \epsilon_0)}{\epsilon_0} + \left(k + \frac{\delta(1-k)}{\lambda + \mu + \delta}\right)\hat{\theta}(\lambda).$$

On peut choisir $\lambda > 0$ de telle sorte que $\lambda = \epsilon_0$, ainsi

$$1 \geq h(\epsilon_0).$$

Ceci est une contradiction avec la condition (3.39). □

Pour démontrer l'uniforme persistance de ρ , nous allons utiliser le [55, Théorème 3.5]. Pour cela, nous avons besoin de montrer qu'il n'existe pas de trajectoire totale $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X_0^+$, avec ϕ définie dans (3.25), telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in \mathbb{R}^+$ (voir l'hypothèse (H1) dans [55, Chapitre 5]).

Lemme 23. *Si $\rho(\phi(t)) = 0$ pour tout $t \leq 0$, alors $\rho(\phi(t)) = 0$ $t > 0$.*

Démonstration. Supposons que $\rho(\phi(t)) = B(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$ avec $B(t)$ est définie dans (3.25). De manière similaire, en appliquant les mêmes arguments utilisés dans la preuve du lemme 21, on obtient

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

$$B(t) \leq L \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da \\ + \delta \int_0^t e^{(\mu+\delta)(s-t)} \int_0^{+\infty} \theta(\sigma)\pi(\sigma)B(s - \sigma)d\sigma ds,$$

puisque $B(t) = 0$ pour $t \leq 0$, alors

$$B(t) \leq L\|\beta\|_\infty \int_0^t B(a)da + k\|\theta\| \int_0^t B(a)da + \delta \int_0^t e^{(\mu+\delta)(s-t)} \int_0^s \theta(s-\sigma)\pi(s-\sigma)B(\sigma)d\sigma ds,$$

donc,

$$B(t) \leq L\|\beta\|_\infty \int_0^t B(a)da + k\|\theta\| \int_0^t B(a)da + \delta \int_0^t \theta(s - \sigma)\pi(s - \sigma)B(\sigma)e^{(\mu+\delta)(\sigma-t)} d\sigma.$$

Finalement, d'après le Théorème de Fubini, on a

$$B(t) \leq (L\|\beta\|_\infty + k\|\theta\|_\infty + \frac{\delta\|\theta\|_\infty}{\mu + \delta}) \int_0^t B(a)da.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que

$$B(t) = 0, \quad t > 0.$$

□

Lemme 24. *B satisfait les deux alternatives suivantes : soit B vaut 0 partout sur \mathbb{R} soit B est strictement positive sur \mathbb{R} .*

Démonstration. D'après le lemme 23, on peut déduire que pour n'importe quelle valeur de $r \in \mathbb{R}$, si $B(t) = 0$ pour tout $t \leq r$ alors $B(t) = 0$ pour tout $t \geq r$. Ceci signifie que soit $B(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ avec $B(t_n) > 0$.

On pose $B_n(t) := B(t + t_n)$, du lemme 18 et (3.35),

$$B_n(t) \geq k \int_0^\infty \theta(a)\pi(a)B_n(t - a)da.$$

Après un changement de variable, on a

$$B_n(t) \geq k \int_{-\infty}^t \theta(t - s)\pi(t - s)B_n(s)ds,$$

où $B_n(0) := B(t_n) > 0$.

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Supposons maintenant qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_n(\epsilon) = 0$ et $B_n(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \epsilon)$, ainsi, on obtient

$$0 = B_n(\epsilon) \geq k \int_{-\infty}^{\epsilon} \theta(\epsilon - s)\pi(\epsilon - s)B_n(s)ds.$$

Alors, $B_n(s) = 0$ pour tout $s \in [0, \epsilon)$, ceci est une contradiction. Donc, $B_n(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et puisque $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, $B(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Nous pouvons maintenant montrer la persistance uniforme forte de la maladie.

Théorème 25. *Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Alors, toute solution du système (3.1)-(3.2) est uniformément fortement ρ -persistante pour des données initiales appartenant à X_0 , cela veut dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t)x_0) > \epsilon$ à condition que $x_0 \in X_0$.*

Démonstration. On utilise les lemmes 22, 23 et 24, pour pouvoir appliquer le [55, Théorème 5.2] qui nous permet de conclure la persistance forte à travers la persistance faible. Autrement dit, Φ est uniformément fortement ρ -persistant. □

Le résultat suivant est une conséquence directe du [55, Théorème 5.7].

Théorème 26. *Le système dynamique (3.1)-(3.2) admet un attracteur global compact \mathbf{A}_1 . De plus, \mathbf{A}_1 est uniformément ρ -positif, c'est-à-dire il existe une constante positive Γ , telle que*

$$\rho(\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), R(0)))) \geq \Gamma, \quad \text{pour tout } (S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in \mathbf{A}_1. \quad (3.41)$$

Le lemme suivant fournit quelques estimations que nous serons nécessaires par la suite.

Lemme 27. *Pour tout $(S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in \mathbf{A}_1$, les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} > \Gamma_0, \quad a > 0, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad R(t) > \eta_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $\Gamma_0 = \Gamma D / f(S^*, J^*)$ et $\eta_2 = ((1 - k)\Gamma \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da) / (\mu + \delta)$.

Démonstration. Rappelons que l'attracteur compact des ensembles bornés est la réunion des trajectoires totales bornées, voir [55, Proposition 2.34].

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Ainsi, il existe une trajectoire totale $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$, $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot), R(t))$, $S(0) = S_0$, $i(0, a) = i_0(a)$. En utilisant (3.41), on obtient

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{\pi(a)B(t-a)}{\pi(a)f(S^*, J^*)} D > \frac{\Gamma D}{f(S^*, J^*)}.$$

De plus, d'après l'équation de R dans (3.25), et le Théorème 26,

$$R'(t) \geq (1-k)\Gamma \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da - (\mu + \delta)R(t).$$

Finalement, un calcul direct nous donne

$$R(t) \geq \eta_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $\eta_2 := \frac{(1-k)\Gamma \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da}{(\mu+\delta)}$. □

Nous énonçons maintenant le Théorème suivant qui établit la stabilité globale de l'unique équilibre endémique positif.

Théorème 28. *supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Le système d'équations (3.25) admet un unique équilibre endémique positif $E^* := (S^*, i^*(\cdot), R^*)$ qui est globalement asymptotiquement stable dans X_0 .*

Démonstration. Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ une trajectoire totale telle que $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot), R(t))$, $S(0) = S_0$, $i(0, \cdot) = i_0(\cdot)$, où $(S(t), i(t, a), R(t))$ est une solution du problème (3.25).

On pose, pour $a \geq 0$,

$$\phi(a) = \int_a^{+\infty} \left[\left(\frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a)i^*(a)da} + k \right) \theta(\sigma) + \frac{\beta(\sigma)}{J^*} f(S^*, J^*) \right] i^*(\sigma) d\sigma, \quad (3.42)$$

et pour $y > 0$,

$$H(y) = y - \ln(y) - 1.$$

Alors, pour $x := (S_0, i_0(\cdot), R(0)) \in \mathbf{A}_1$, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) := V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$$

avec

$$V_1(x) = S_0 - S^* - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)} d\eta,$$

$$V_2(x) = \int_0^{+\infty} H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

et

$$V_3(x) = \Omega H \left(\frac{r_0}{R^*} \right), \quad \text{avec} \quad \Omega := \frac{\delta R^{*2}}{(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}.$$

Dans un premier lieu, d'après l'équation de S dans (3.25), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(\Psi(t)) &= \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) (A - f(S(t), J(t)) - \mu S(t)), \\ &= \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\ &+ \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) (f(S^*, J^*) - f(S(t), J(t))). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du [55, Lemme 9.18], on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(\Psi(t)) &= H \left(\frac{i(t, 0)}{i^*(0)} \right) \phi(0) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(0)} \right) \phi'(a) da, \\ &= H \left(\Delta_1 \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} + \Delta_2 \frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} + \Delta_3 \frac{R(t)}{R^*} \right) \phi(0) \\ &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \phi'(a) da, \end{aligned}$$

où

$$\Delta_1 := \frac{f(S^*, J^*)}{i^*(0)}, \quad \Delta_2 := \frac{k \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}{i^*(0)} \quad \text{et} \quad \Delta_3 := \frac{\delta R^*}{i^*(0)}.$$

D'après la troisième équation dans (3.25), l'expression de $i^*(0)$ est donnée par,

$$i^*(0) = f(S^*, J^*) + k \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da + \delta R^*,$$

notons que $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1$, la convexité de la fonction H implique que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(\Psi(t)) &\leq \left[\Delta_1 H \left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} \right) + \Delta_2 H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} \right) + \Delta_3 H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \right] \phi(0) \\ &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \phi'(a) da, \end{aligned}$$

additionnons les deux expressions de V_1' et V_2' et faisons apparaître l'expression de la

fonction H , on obtient

$$\begin{aligned}
 (V_1 + V_2)'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) - f(S, J) + f(S^*, J^*) \frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(\frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} - \ln \frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} - 1\right) \\
 &+ \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\
 &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da.
 \end{aligned}$$

On peut réécrire le terme suivant sous la forme,

$$\ln \frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} = \ln \frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} + \ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)},$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
 &(V_1 + V_2)'(\Psi(t)) \\
 &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1\right) \\
 &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)}\right) + \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) \\
 &+ \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da.
 \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction V_3 est donnée par

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V_3(\Psi(t)) &= \frac{\Omega}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left((1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da - (\mu + \delta) R(t)\right) \\
 &= \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\
 &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da - \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da\right).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

En ajoutant le terme suivant aux deux membres de l'équation (3.43),

$$\frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da \frac{R(t)}{R^*},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_3(\Psi(t)) &= \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*}\right) da \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{R(t)}{R^*} - 1\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da. \end{aligned}$$

Par la suite, sommons V_1' , V_2' et V_3' , on obtient

$$\begin{aligned} V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1\right) \\ &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)}\right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da \\ &+ \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*}\right) da \\ &+ \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{R(t)}{R^*} - 1\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da. \end{aligned}$$

Comme $(\mu + \delta)R^* = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da$, alors les deux termes de la dernière ligne de l'inégalité ci-dessus vont disparaître. De plus, en appliquant l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) &= H \left(\int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} \frac{i(t, a)}{i^*(a)} da\right), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) da. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\frac{\Omega(1 - k)}{R^*} = \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da},$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1 \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \phi'(a) da \\
 &+ \Delta_2 i^*(0) \int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \\
 &+ \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H' \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) da.
 \end{aligned}$$

Par la suite, on choisit t tel que $J(t) < J^*$ d'après le lemme 20 et en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned}
 H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \right) &< H \left(\frac{J(t)}{J^*} \right), \\
 &= H \left(\int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \beta(a) i^*(a) da} \frac{i(t, a)}{i^*(a)} da \right), \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \beta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da, \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{J^*} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da.
 \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1 \right) \\
 &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \left[\phi'(a) + \frac{f(S^*, J^*)}{J^*} \beta(a) i^*(a) + k \theta(a) i^*(a) \right] da \\
 &+ \delta R^* H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \\
 &+ \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H' \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) da.
 \end{aligned}$$

3.4. ÉTUDE DE LA STABILITÉ GLOBALE POUR L'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Finalement, l'expression de ϕ' dans (3.42) nous permet de conclure

$$\begin{aligned}
 & V'(\Psi(t)) \\
 \leq & \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\
 + & f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1 \right) \\
 + & \int_0^{+\infty} \left[H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) - H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) + H' \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) \right] \frac{\delta R^* \theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} da.
 \end{aligned}$$

Puisque $-\ln(1/x) - x + 1 \leq 0$ et $H(b) - H(a) + (a - b)H'(b) \leq 0$ alors le deuxième et le troisième terme de l'inégalité sont négatifs. Donc,

$$V'(\Psi(t)) \leq 0.$$

On répète la même procédure pour un t qui vérifie $J(t) > J^*$, on conclut que

$$V'(\Psi(t)) \leq 0$$

Comme V est bornée sur Ψ , l'ensemble des points α -limite et des points ω -limite de Ψ doit être contenue dans le plus grand sous-ensemble invariant M .

Remarquons que $V'(\Psi(t)) = 0$, implique que $S(t) = S^*$, et $\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{R(t)}{R^*}$ (invariance Lasalle).

D'après (3.25) et le fait que $i^*(a) = \pi(a)i^*(0)$, on a

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{B(t - a)}{i^*(0)} = \frac{R(t)}{R^*}, \quad \forall a \geq 0, \quad (3.44)$$

cela implique que $B(t - a) = B(t)$ pour tout $a \geq 0$, ainsi, $i(t, a) = i(t, 0)$ pour tout $a \geq 0$.

D'après l'équation de S dans (3.25) et le fait que $S(t) = S^*$, on obtient

$$A - \mu S^* = f(S^*, J(t)).$$

De plus, l'équation de l'équilibre nous donne

$$A - \mu S^* = f(S^*, J^*),$$

donc, on obtient $f(S^*, J^*) = f(S^*, J(t))$. En utilisant la monotonie de la fonction f

et le système (3.25), on a $i(t, 0) \int_0^\infty \beta(a)\pi(a)da = i^*(0) \int_0^\infty \beta(a)\pi(a)da$, ainsi, $B(t) := i(t, 0) = i^*(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Finalement, d'après (3.44), on a $R(t) = R^*$ et $i(t, \cdot) = i^*(\cdot)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, l'ensemble M contient seulement l'équilibre endémique positif E^* .

Par la suite, comme \mathbf{A}_1 est compact, alors l'ensemble des points α -limite et l'ensemble des points ω -limite : sont différents de l'ensemble vide, et ils sont compacts et attirent $\Psi(t)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$ (voir la Définition 4).

D'un côté la fonction $V(\Psi(t))$ est décroissante par rapport à t , de plus V est constante sur les ensembles α -limite et ω -limite, et comme ces deux ensembles contiennent seulement l'équilibre endémique positif, alors $\Psi(t) \rightarrow (S^*, i^*(\cdot), R^*)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, par conséquent,

$$V(\Psi(t)) \rightarrow V(S^*, i^*(\cdot), R^*), \quad \text{quand } t \rightarrow \pm\infty.$$

D'un autre côté, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\Psi(t)) \leq V(\Psi(t)) \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\Psi(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc, $V(\Psi(t)) = V(S^*, i^*(\cdot), R^*)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi, $\Psi(t) = (S^*, i^*(\cdot), R^*)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Conclusion, l'attracteur compact \mathbf{A}_1 est réduit à l'équilibre endémique positif E^* . En appliquant le [55, Théorème 2.39] nous permet d'avoir la stabilité locale de l'équilibre E^* . □

3.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous illustrons nos résultats mathématiques obtenus dans ce chapitre.

Tout d'abord, nous considérons la fonction f de Beddington-Deangelis définie par

$$f(S, J) = \frac{SJ}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 J}.$$

Notons que cette fonction f satisfait toutes les hypothèses nécessaires annoncées dans la première section de ce chapitre afin de faire l'analyse asymptotique du système (3.1). Rappelons que le système (3.1) admet deux équilibres et la condition de stabilité est donnée par le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 . À présent, nous pouvons donner l'expression de \mathcal{R}_0 ,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{A}{\mu + \alpha_1 A} \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da + \left(\frac{(1-k)\delta}{\mu + \delta} + k \right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da.$$

Les paramètres utilisés pour la simulation sont :

$$A = 2.10^{-3}, \quad \mu = 1.10^{-2} \quad \text{et} \quad \delta = 1.10^{-2},$$

les conditions initiales

$$S_0 = 1.10^{-3}, \quad R(0) = 2.10^{-4} \quad \text{et} \quad i_0(a) = 8.10^{-4}e^{-0.1a}.$$

La fonction β et θ sont définies par

$$\beta(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq \tau_1, \\ 56.10^{-3}(a - \tau_1)^2 e^{-0.2(a-\tau_1)}, & \text{si } a > \tau_1, \end{cases}$$

et

$$\theta(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq \tau_2, \\ 3.10^{-2}(a - \tau_2)^2 e^{-0.15(a-\tau_2)}; & \text{si } a > \tau_2. \end{cases}$$

avec $\tau_1 = 10$ et $\tau_2 = 12$.

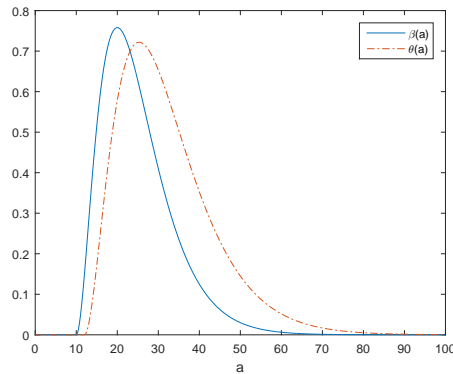


FIGURE 3.1 – les deux fonctions β et θ sont représentées par rapport à l'âge a .

Dans un premier lieu, on pose $k = 0.1$, cela nous permet de calculer le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 = 0.8624 < 1$. D'après le Théorème 16, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable (voir Figures 3.2 et 3.3).

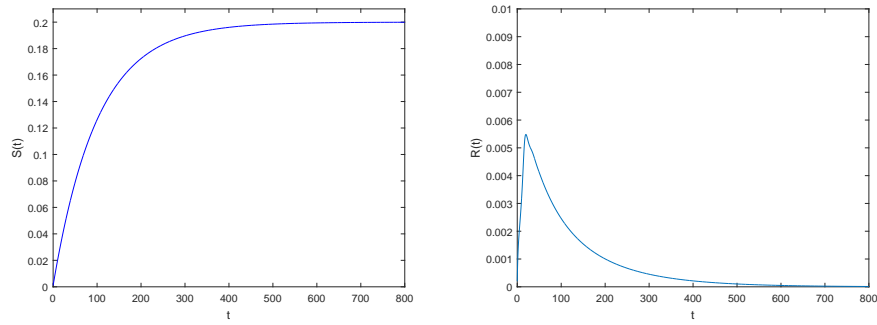


FIGURE 3.2 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) par rapport au temps t . Les courbes représentent le comportement asymptotique de l'équilibre E_0 avec $\mathcal{R}_0 = 0.8624 < 1$.

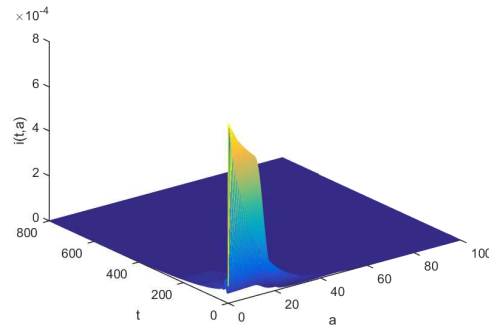


FIGURE 3.3 – L'évolution de la solution i par rapport au temps t et l'âge de l'infection a . Le cas $\mathcal{R}_0 = 0.8624 < 1$. La courbe de i représente l'extinction des individus infectés.

On pose $k = 0.9$, cela implique que $\mathcal{R}_0 = 1.1849 > 1$, ceci signifie que l'équilibre endémique positif est globalement asymptotiquement stable (voir Figures 3.4 et 3.5).

3.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

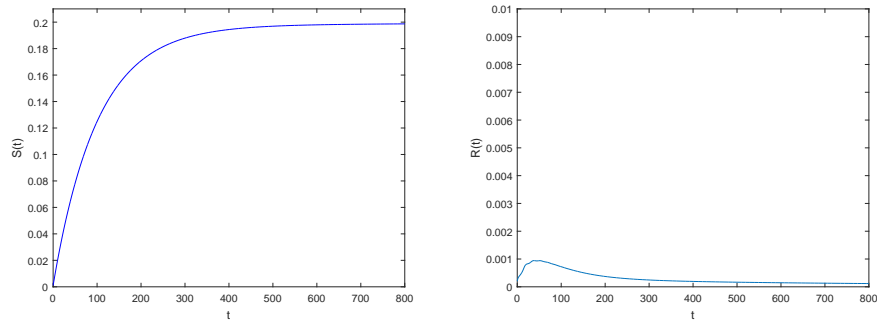


FIGURE 3.4 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) par rapport au temps t . Les courbes représentent le comportement asymptotique de l'équilibre E^* avec $\mathcal{R}_0 = 1.1849 > 1$.

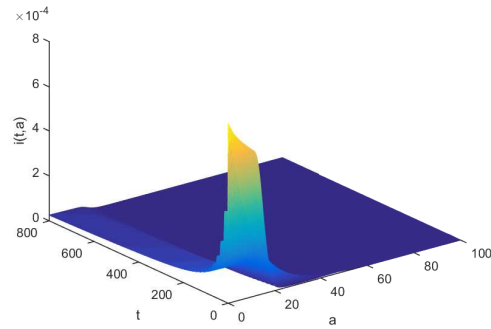


FIGURE 3.5 – L'évolution de la solution i par rapport au temps t et l'âge de l'infection a . Le cas $\mathcal{R}_0 = 1.1849 > 1$. On remarque que les individus infectés persistent à la limite.

Chapitre 4

Analyse mathématique d'une population structurée en âge avec rechute

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle mathématique de l'évolution d'une épidémie en considérant que la population est divisée en trois classes, les individus susceptible S , les individus infectés i et les individus en quarantaine q à l'instant $t \geq 0$ et d'âge $a \geq 0$. Nous allons maintenant présenter le système d'équations structurées en âge de classe générale suivant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), & t > 0, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a) + \delta(a)q(t, a), & t > 0, \quad a > 0, \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = \theta(a)i(t, a) - (\mu + \delta(a))q(t, a), & t > 0, \quad a > 0 \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)), & t > 0, \\ q(t, 0) = 0, & t > 0, \\ J(t) = \int_0^{\infty} \beta(a)i(t, a)da, & \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le système (4.1) est complété par les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ q(0, \cdot) = q_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+). \end{cases} \quad (4.2)$$

Les fonctions β , θ et δ représentent respectivement le taux de transmission de la maladie, le taux de quitter le compartiment i et le taux de rechute, nous supposons que ces trois fonctions dépendent de l'âge d'infection a .

Dans la classe S , le flux entrant des individus susceptibles est représenté par A . Le taux de mortalité naturelle de la population est défini par μ .

Nous notons par π la probabilité de quitter la classe des infectés,

$$\pi(a) = e^{-\int_0^a (\mu + \theta(s) + \delta(s)) ds}.$$

Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 du système (4.1) est donné par

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_0^\infty \beta(a) \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) da.$$

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à voir le livre de Diekmann [17].

Les hypothèses suivantes seront nécessaires tout au long de ce chapitre. La fonction β appartient à l'ensemble des fonctions bornées et uniformément continues de \mathbb{R}^+ à \mathbb{R}^+ (i.e $\beta \in C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$). Les fonctions $\theta, \delta \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+)$. Les paramètres A et μ sont positifs. La fonction d'incidence f est non linéaire et satisfait :

- $f(\cdot, J)$ est croissante pour $J > 0$ et $f(S, 0) = f(0, J) = 0$ pour tout S, J positives.
- La fonction $\frac{\partial f(\cdot, 0)}{\partial J}$ est continue positive sur tout sous-ensemble borné de K .
- La fonction f est localement Lipschitz continue par rapport à S et J , avec une constante de Lipschitz $L > 0$, i.e. pour tout $C > 0$ il existe un $L := L_C > 0$ tel que

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L(|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|), \quad (4.3)$$

quand $0 \leq S_2, S_1, J_2, J_1 \leq C$.

Soit l'espace fonctionnel $X := \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^+) \times L^1(\mathbb{R}^+)$ muni de la norme

$$\|(S, i, q)\|_X = |S| + \int_0^\infty |i(a)| da + \int_0^\infty |q(a)| da, \quad S \in \mathbb{R}, \quad i \text{ et } q \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

On note $X_+ = \mathbb{R}^+ \times L_+^1(\mathbb{R}^+) \times L_+^1(\mathbb{R}^+)$ le cône positif de X .

La population totale est définie par

$$N(t) := S(t) + \int_0^\infty i(t, a) da + \int_0^\infty q(t, a) da,$$

ainsi, d'après le système (4.1), on a

$$N'(t) = A - \mu N(t), \quad t > 0.$$

Théorème 29. *Supposons que les conditions initiales appartiennent à X_+ et que (4.3) est vérifiée. Alors le problème (4.1)-(4.2) admet une solution positive unique $(S, i, q) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+)) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+))$. En outre, nous avons l'estimation suivante*

$$N(t) \leq \max\left\{N(0), \frac{A}{\mu}\right\},$$

avec $N(0) = S_0 + \int_0^\infty i_0(a) da + \int_0^\infty q_0(a) da$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{A}{\mu}, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + L}.$$

avec L est la constante de Lipschitz définie dans (4.3).

La preuve est similaire à celle utilisée dans le premier chapitre et aussi dans [6, Théorème 2.2].

Dans le reste de ce chapitre, on pose $d(t, a) = i(t, a) + q(t, a)$, alors d'après le système (4.1), on déduit l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial d(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial d(t, a)}{\partial a} = -\mu d(t, a), & t > 0, \quad a > 0, \\ d(t, 0) = i(t, 0), & t > 0 \\ d(0, a) = d_0(a) = (i_0 + q_0)(a), & a > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

En remplaçant la troisième équation du système (4.1) par (4.4), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), & t > 0, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a) + \delta(a))i(t, a) + \delta(a)d(t, a), & t > 0, \quad a > 0 \\ \frac{\partial d(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial d(t, a)}{\partial a} = -\mu d(t, a), & t > 0, \quad a > 0 \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)), & t > 0 \\ d(t, 0) = f(S(t), J(t)), & t > 0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

les conditions initiales du système (4.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ d(0, \cdot) = (i_0 + q_0)(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \end{array} \right. \quad (4.6)$$

4.2 Existence du semi-flot, attracteur global compact et trajectoire totale

En utilisant la formulation de Volterra, on peut réécrire le problème (4.5)-(4.6) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \quad t > 0, \\ S(0) = S_0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$i(t, a) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) \pi(a) f(S(t-a), J(t-a)), & t > a, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i_0(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi(a)}{\pi(s+a-t)} ds (i_0 + q_0)(a-t), & t < a. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$d(t, a) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a)), & t > a, \\ e^{-\mu t} (i_0 + q_0)(a-t), & t < a. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET TRAJECTOIRE TOTALE

Par la suite, on définit le semi-flot continu $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ par

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot)), \quad t \geq 0, \quad (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X, \quad (4.10)$$

avec (S, i, d) est l'unique solution du système (4.1). La preuve d'existence du semi-flot est similaire à celle donnée dans [55].

Le théorème suivant garantit l'existence d'un attracteur compact des sous-ensembles bornés de X (le concept d'attracteur global est présenté dans [40], [55], [56]).

Théorème 30. *Le semi-flot Φ admet un attracteur compact des sous-ensembles bornés de X .*

Démonstration. On définit Φ comme

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = \Psi_1(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) + \Psi_2(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))).$$

avec

$$\Psi_1(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (0, u_1(t, \cdot), v_1(\cdot)),$$

$$\Psi_2(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (S(t), u_2(t, \cdot), v_2(\cdot)),$$

où

$$u_1(t, a) = \begin{cases} 0, & a < t \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i_0(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi(a)}{\pi(s+a-t)} ds (i_0 + q_0)(a-t), & a > t, \end{cases}$$

$$u_2(t, a) = \begin{cases} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) \pi(a) f(S(t-a), J(t-a)), & a < t \\ 0 & a > t, \end{cases}$$

et

$$v_1(t, a) = \begin{cases} 0, & a < t \\ e^{-\mu t}(i_0 + q_0)(a - t), & a > t, \end{cases}$$

$$v_2(t, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} f(S(t - a), J(t - a)), & a < t \\ 0 & a > t, \end{cases}$$

Soit C un sous ensemble fermé borné des données initiales dans X . D'après le Théorème 29, on remarque que

$$N(t) \leq \max\{S_0 + \|i_0\|_1 + \|q_0\|_1, \frac{A}{\mu}\}.$$

On pose

$$M_1 = \sup\{S_0 + \|i_0\|_1 + \|q_0\|_1, (S_0, i_0, q_0) \in C\} \quad \text{et} \quad M_2 = \max\{M_1, \frac{A}{\mu}\}. \quad (4.11)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\Psi_1\|_1 &= \int_0^\infty |u_1(t, a)| da + \int_0^\infty |v_1(t, a)| da \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} i_0(a) + \int_0^t \delta(s+a) e^{-\mu s} \frac{\pi(a+t)}{\pi(a+s)} ds (i_0 + q_0)(a) \right) da \\ &\quad + e^{-\mu t} \int_0^\infty (i_0 + q_0)(a) da \\ &= e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\int_a^{a+t} (\theta(s) + \delta(s)) ds} i_0(a) da \\ &\quad + e^{-\mu t} \int_0^\infty \int_0^t \delta(s+a) e^{-\int_a^{a+t-s} (\theta(\sigma) + \delta(\sigma)) d\sigma} ds (i_0 + q_0)(a) da \\ &\quad + e^{-\mu t} (\|i_0\|_1 + \|q_0\|_1). \end{aligned}$$

Après un calcul direct, nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|\Psi_1\|_1 &\leq e^{-\mu t} (3\|i_0\|_1 + 2\|q_0\|_1), \\ &\leq e^{-\mu t} (3M_2 + 2M_2), \end{aligned}$$

ainsi, $\Psi_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément pour toutes données initiales dans C . Par la suite, il reste à prouver que $\Psi_2(t, C)$ est relativement compacte. Nous devons vérifier

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET TRAJECTOIRE TOTALE

toutes les conditions du Théorème 3.1 dans [6], voir aussi [19]. Comme dans le chapitre précédent, il suffit juste de montrer que la troisième condition du Théorème 3.1 est satisfaite, les autres conditions sont trivialement vérifiées. On note par

$$\tilde{\pi}(a) = \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu(s)}}{\pi(s)} ds \right).$$

Soit

$$\begin{aligned} I_h &:= \int_0^\infty |u_2(t, a+h) - u_2(t, a)| da \\ &= \int_0^{t-h} |\tilde{\pi}(a+h)f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - \tilde{\pi}(a)f(S(t-a), J(t-a))| da \\ &\quad + \int_{t-h}^t |\tilde{\pi}(a)f(S(t-a), J(t-a))| da. \end{aligned}$$

Par conséquent, le second terme de I_h tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ uniformément dans C . Nous nous intéressons maintenant au premier terme

$$\begin{aligned} I_h^1 &:= \int_0^{t-h} |\tilde{\pi}(a+h)f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - \tilde{\pi}(a)f(S(t-a), J(t-a))| da \\ &\leq \int_0^{t-h} |\tilde{\pi}(a)(f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - f(S(t-a), J(t-a)))| da \\ &\quad + \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J(t-a-h))(\tilde{\pi}(a+h) - \tilde{\pi}(a))| da \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $f(S, 0) = 0$ pour tout $S \geq 0$, d'après (4.3) et (4.11), on trouve l'inégalité suivante

$$|f(S(t), J(t)) - f(S(t), 0)| \leq LJ(t) \leq L\|\beta\|_\infty M_2. \quad (4.12)$$

Par la suite, en appliquant (4.3), (4.11) et (4.12) à l'expression de I_h^1 , on obtient

$$\begin{aligned} I_h^1 &\leq \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(a) |S(t-a-h) - S(t-a)| da + \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(a) |J(t-a-h) - J(t-a)| da \\ &\quad + L\|\beta\|_\infty M_2 \int_0^{t-h} |\tilde{\pi}(a+h) - \tilde{\pi}(a)| da \end{aligned} \quad (4.13)$$

D'après le système (4.1), on a

$$|S'(t)| \leq A + \mu M_2 + L\|\beta\|_\infty M_2, \quad t \geq 0. \quad (4.14)$$

On peut facilement montrer que le premier terme et le troisième terme vont converger

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET
TRAJECTOIRE TOTALE

vers 0 quand h tend vers 0^+ uniformément pour toutes conditions initiales dans C . On pose

$$I_h^2 := \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(a) |J(t-a-h) - J(t-a)| da.$$

Après un changement de variable, l'expression I_h^2 devient

$$I_h^2 := \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(t-s-h) |J(s+h) - J(s)| ds.$$

La fonction J peut s'écrire sous la forme

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t)$$

où

$$J_1(t) = \int_0^t \beta(a) \tilde{\pi}(a) f(S(t-a), J(t-a)) da \quad (4.15)$$

et

$$J_2(t) = \int_0^\infty \beta(a+t) \left(i_0(a) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} + \int_0^t \delta(a+\sigma) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+t)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma (i_0 + q_0)(a) \right) da. \quad (4.16)$$

Par conséquent,

$$|J(s+h) - J(s)| \leq |J_1(s+h) - J_1(s)| + |J_2(s+h) - J_2(s)|$$

alors,

$$I_h^2 \leq \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(t-s-h) |J_1(s+h) - J_1(s)| ds + \int_0^{t-h} \tilde{\pi}(t-s-h) |J_2(s+h) - J_2(s)| ds.$$

En appliquant un changement de variable à J_1 dans (4.15), on obtient

$$J_1(t) = \int_0^t \beta(t-\sigma) \tilde{\pi}(t-\sigma) f(S(\sigma), J(\sigma)) d\sigma.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & |J_1(s+h) - J_1(s)| \\ & \leq \left| \int_s^{s+h} \beta(s+h-\sigma) \tilde{\pi}(s+h-\sigma) f(S(\sigma), J(\sigma)) d\sigma \right| \\ & \quad + \int_0^s |\beta(s+h-\sigma) \tilde{\pi}(s+h-\sigma) - \beta(s-\sigma) \tilde{\pi}(s-\sigma)| f(S(\sigma), J(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET TRAJECTOIRE TOTALE

Soit $\tilde{\beta} := \beta(a)\tilde{\pi}(a)$, alors, on observe que $\tilde{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, ainsi

$$\begin{aligned} & |J_1(s+h) - J_1(s)| \\ & \leq L\|\beta\|_\infty M_2 h + L\|\beta\|_\infty M_2 \int_0^s |\beta(s+h-\sigma)\tilde{\pi}(s+h-\sigma) - \beta(s-\sigma)\tilde{\pi}(s-\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

La fonction β est uniformément continue ce qui implique que le dernier terme de l'inégalité converge uniformément, pour $s \geq 0$, vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$, pour des données initiales dans C . Nous utilisons maintenant la définition de J_2 dans (4.16), on déduit que

$$\begin{aligned} & |J_2(s+h) - J_2(s)| \\ & \leq \left| \int_0^\infty \beta(a+s+h) i_0(a) \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a)} da \right. \\ & \quad + \int_0^\infty \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma (i_0+q_0)(a) da \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \beta(a+s) \left(i_0(a) \frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} + \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma (i_0+q_0)(a) \right) da \right|, \\ & \leq \left| \int_0^\infty \beta(a+s+h) \left(\frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a)} + \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right) i_0(a) da, \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \beta(a+s) \left(\frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} + \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right) i_0(a) da \right| \\ & \quad + \left| \int_0^\infty \beta(a+s+h) \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma q_0(a) da \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \beta(a+s) \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma q_0(a) da \right|, \\ & \leq L_1 + L_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

avec

$$\begin{aligned} L_1 & := \left| \int_0^\infty \beta(a+s+h) \left(\frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a)} + \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right) i_0(a) da \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \beta(a+s) \left(\frac{\pi(a+s)}{\pi(a)} + \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right) i_0(a) da \right|, \end{aligned}$$

et

$$L_2 := \left| \int_0^\infty \beta(a+s+h) \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma q_0(a) da \right. \\ \left. - \int_0^\infty \beta(a+s) \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma q_0(a) da \right|.$$

Nous nous concentrons maintenant sur L_2 ,

$$L_2 \leq \int_0^\infty \beta(a+s+h) \left| \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right. \\ \left. - \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right| q_0(a) da \quad (4.18) \\ + \int_0^\infty |\beta(a+s+h) - \beta(a+s)| \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma q_0(a) da.$$

Puisque β est uniformément continue, on peut déduire que le second terme de l'inégalité ci-dessus converge uniformément vers 0 quand h tend vers 0^+ pour des données initiales dans C et pour $s \geq 0$. Il reste maintenant à examiner le premier terme,

$$\left| \int_0^{s+h} \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma - \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} d\sigma \right| \\ \leq \|\delta\|_\infty h + \int_0^s \delta(\sigma+a) e^{-\mu\sigma} \left| \frac{\pi(a+s+h)}{\pi(a+\sigma)} - \frac{\pi(a+s)}{\pi(a+\sigma)} \right| d\sigma,$$

ce dernier converge uniformément vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$ pour des données initiales dans C et pour $s \geq 0$. De manière similaire, on montre que L_1 converge uniformément vers 0 pour des données initiales dans C . \square

Soit $\bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow X$ une trajectoire totale de Φ , telle que $\bar{\phi}(t) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot))$. On obtient le système d'équations suivant, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S - f(S(t), J(t)) \\ i(t, a) = \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) f(S(t-a), J(t-a)), \\ d(t, a) = e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a)), \\ d(t, 0) = i(t, 0) = f(S(t), J(t)), \\ J(t) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \end{cases} \quad (4.19)$$

Voir [6], [55], pour plus de détails.

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET TRAJECTOIRE TOTALE

Lemme 31. *Pour tout $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}$, nous avons les estimations suivantes,*

$$\begin{aligned}
 S_0 + \int_0^\infty d_0(a)da &\leq \frac{A}{\mu}, \\
 S_0 + \int_0^\infty i_0(a)da &\leq C_0 := \frac{A(\mu + \|\delta\|_\infty)}{\mu^2}, \\
 i_0(a) &\leq L\|\beta\|_\infty C_0 \|\delta\|_\infty a e^{-\mu a}, \quad d_0(a) \leq L\|\beta\|_\infty C_0 e^{-\mu a}, \\
 S_0 &\geq \frac{A}{\mu + L}
 \end{aligned}$$

avec L est la constante de Lipschitz de f .

Démonstration. Dans un premier lieu, on pose

$$\begin{aligned}
 D(t) &:= \int_0^\infty d(t, a)da = \int_0^\infty e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a))ds, \\
 &= \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-l)} f(S(l), J(l))dl,
 \end{aligned}$$

La dérivée de D est donnée par,

$$\begin{aligned}
 D'(t) &= f(S(t), J(t)) - \mu \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-l)} f(S(l), J(l))dl, \\
 &= f(S(t), J(t)) - \mu D(t).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

En assemblant (4.20) avec l'équation de S , on obtient

$$S'(t) + D'(t) = A - \mu(S(t) + D(t)).$$

Par intégration de l'équation ci-dessus entre r et t , on obtient

$$(S(t) + D(t))e^{\mu t} = (S(r) + D(r))e^{\mu r} + \frac{A}{\mu}e^{\mu t} - \frac{A}{\mu}e^{\mu r}.$$

En faisant tendre r vers $-\infty$, on a

$$S(t) + D(t) \leq \frac{A}{\mu}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

4.2. EXISTENCE DU SEMI-FLOT, ATTRACTEUR GLOBAL COMPACT ET
TRAJECTOIRE TOTALE

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième estimation,

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_0^\infty i(t, a) da = \int_0^\infty \tilde{\pi}(a) f(S(t-a), J(t-a)) da, \\ &= \int_{-\infty}^t \tilde{\pi}(t-l) f(S(l), J(l)) dl. \end{aligned}$$

On calcule la dérivée de I par rapport à t ,

$$\begin{aligned} I'(t) &= f(S(t), J(t)) - \int_{-\infty}^t (\mu + \theta(t-l) + \delta(t-l)) \tilde{\pi}(t-l) f(S(l), J(l)) dl \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \delta(t-l) e^{-\mu(t-l)} f(S(l), J(l)) dl. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &S'(t) + I'(t) \\ &= A - \mu S(t) - \int_{-\infty}^t (\mu + \theta(t-l) + \delta(t-l)) \tilde{\pi}(t-l) f(S(l), J(l)) dl \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \delta(t-l) e^{-\mu(t-l)} f(S(l), J(l)) dl \\ &\leq A - \mu S(t) - \mu \int_{-\infty}^t \tilde{\pi}(t-l) f(S(l), J(l)) dl + \|\delta\| \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-l)} f(S(l), J(l)) dl \\ &\leq A - \mu(S(t) + I(t)) + \|\delta\| D(t), \end{aligned}$$

par (4.21), on obtient

$$S'(t) + I'(t) \leq A - \mu(S(t) + I(t)) + \|\delta\| \frac{A}{\mu} \quad (4.22)$$

Après intégration de (4.22) entre r et t , on a

$$(S(t) + I(t)) e^{\mu t} \leq (S(r) + I(r)) e^{\mu r} + C_0 (e^{\mu t} - e^{\mu r})$$

avec $C_0 = \frac{A\mu + \|\delta\|_\infty A}{\mu^2}$, en faisant tendre à nouveau r vers $-\infty$,

$$S(t) + I(t) \leq C_0. \quad (4.23)$$

De plus, en utilisant le fait que la fonction f est lipschitzienne et que $f(S, 0) = 0$, on déduit de (4.19),

$$i(t, a) \leq L\|\beta\|_{\infty}C_0\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)$$

En utilisant l'expression de π , on trouve

$$\begin{aligned} i(t, a) &\leq L\|\beta\|_{\infty}C_0e^{-\mu a}\int_0^a \delta(s)e^{-\int_s^a(\theta(\sigma)+\delta(\sigma))d\sigma}ds, \\ &\leq L\|\beta\|_{\infty}C_0\|\delta\|_{\infty}ae^{-\mu a}. \end{aligned}$$

En conséquence on a aussi

$$d(t, a) \leq L\|\beta\|_{\infty}C_0e^{-\mu a}.$$

Finalement, en utilisant (4.3) et l'équation de S dans (4.19), on a

$$S'(t) \geq A - \mu S(t) - LS(t),$$

nous en déduisons que

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + L}.$$

□

4.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale de l'équilibre sans maladie $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$, appelé aussi l'équilibre trivial. Pour cela, on introduit l'hypothèse suivante sur la fonction f . **(H1)** La fonction f est concave par rapport à J .

Théorème 32. *On suppose que (H1) est vérifiée. Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors l'équilibre trivial E_0 est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Pour commencer, nous introduisons les deux fonctions tests suivantes

$$\begin{cases} \phi(a) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \frac{1}{\pi(a)} \int_a^{\infty} \beta(s)\pi(s)ds. \\ \psi(a) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_a^{\infty} \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} \int_s^{\infty} \beta(\sigma)\pi(\sigma)d\sigma ds. \end{cases}$$

Pour $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}$, nous proposons la fonction de Lyapunov suivante

$$V((S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = V_1(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) + V_2(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) + V_3(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$$

avec,

$$V_1(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = S_0 - \int_{\frac{A}{\mu}}^{S_0} \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(\eta, J)} d\eta - \frac{A}{\mu},$$

$$V_2(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \phi(a) i_0(a) da,$$

et

$$V_3(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \psi(a) d_0(a) da.$$

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$ une trajectoire totale définie par $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot))$, $(S(0), i(0, \cdot), d(0, \cdot)) = (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$ avec $(S(t), i(t, a), d(t, a))$ est solution du problème (4.19). La dérivée de la fonction V_1 le long des caractéristiques est donnée par,

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(\Psi(t))}{dt} &= \left(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)}\right) (A - \mu S - f(S, J)) \\ &= \left(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)}\right) \mu \left(\frac{A}{\mu} - S\right) - f(S, J) \left(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)}\right). \end{aligned}$$

Par le [55, Lemme 9.18], on remarque que la fonction V_2 est absolument continue, et

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty \phi_1(a) \xi(t - a) da,$$

avec

$$\phi_1(a) = \phi(a) \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right),$$

et

$$\xi(t) = f(S(t), J(t)).$$

Alors,

$$\frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} = \phi_1(0) \xi(t) + \int_0^\infty \phi_1'(a) \xi(t - a) da.$$

Pour (4.19), on a

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} &= \phi(0) f(S(t), J(t)) + \int_0^\infty (-\mu + \theta(a) + \delta(a)) \phi(a) \\ &\quad + \phi'(a) i(t, a) da + \int_0^\infty \phi(a) \delta(a) d(t, a) da. \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le calcul de la dérivée de V_2 , on obtient

$$\frac{dV_3(\Psi(t))}{dt} = \psi(0) f(S(t), J(t)) + \int_0^\infty (\psi'(a) - \mu \psi(a)) d(t, a) da.$$

Remarquons que,

$$\psi(0) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_0^\infty \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} \int_s^\infty \beta(\sigma) \pi(\sigma) d\sigma ds.$$

En appliquant le Théorème de Fubini à la dernière intégrale, on a

$$\psi(0) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_0^\infty \beta(\sigma) \pi(\sigma) \int_0^\sigma \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds d\sigma,$$

il s'ensuit que

$$\phi(0) + \psi(0) = \mathcal{R}_0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Psi(t))}{dt} &= \mu \left(\frac{A}{\mu} - S \right) \left(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} \right) - f(S, J) (1 - \mathcal{R}_0) \\ &\quad + f(S, J) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} - \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da. \end{aligned}$$

Notons que le premier terme et le second terme de cette dernière équation sont négatifs. Il reste donc à définir le signe du troisième terme. L'hypothèse **(H1)** nous permet d'avoir l'inégalité suivante

$$f(S, J) \leq J \frac{\partial f(S, 0)}{\partial J},$$

alors,

$$\begin{aligned} &f(S, J) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} - \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da \\ &= \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} (f(S, J) - J \frac{\partial f(S, 0)}{\partial J}) \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\partial V(\Psi(t))}{\partial t} \leq 0.$$

De plus, supposons que $\frac{dV(\Psi(t))}{dt} = 0$, alors $S(t) = \frac{A}{\mu}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (Principe de Lasalle). D'après (4.19), on a

$$f\left(\frac{A}{\mu}, J\right) = 0,$$

par la suite, $J = 0$, donc d'après l'expression de i dans (4.19), on a $i \equiv 0$. Par

conséquent, le plus grand ensemble invariant qui vérifie la propriété suivante $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ est $\{(\frac{A}{\mu}, 0, 0)\}$ (Principe de LaSalle).

Nous utilisons maintenant les mêmes arguments que dans la preuve du [6, Théorème 4.1], nous montrons que l'attracteur \mathbf{A} est réduit au singleton formé par l'équilibre sans maladie E_0 . Le [55, Théorème 2.39] nous permet de conclure que E_0 est globalement asymptotiquement stable. \square

4.4 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Cette section est consacrée à l'étude mathématique de la stabilité globale de l'équilibre endémique positif $E^* = (S^*, i^*(\cdot), d^*(\cdot))$. Pour cela, nous commençons par assurer l'existence de cet équilibre E^* , nous montrons aussi la persistance de chaque solution du système (4.19) avec une condition initiale $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$.

Lemme 33. *Soit $\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} > 1$ pour $S \in [0, \frac{A}{\mu}]$. Alors, si $\mathcal{R}_0 > 1$, le système (4.1) admet un équilibre endémique positif.*

Démonstration. Par définition, un point d'équilibre endémique est un point fixe du semi-flot ϕ ,

$$\Phi(t, (S^*, i^*, d^*)) = (S^*, i^*, d^*), \quad \text{avec } i^* \neq 0, d^* \neq 0, \text{ et } t \geq 0.$$

D'après (4.8)-(4.7) et (4.10), on obtient

$$i^*(a) = \begin{cases} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) \pi(a) f(S^*, J^*), & t > a, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i^*(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi(a)}{\pi(s+a-t)} ds d^*(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (4.24)$$

$$d^*(a) = \begin{cases} e^{-\mu a} f(S^*, J^*), & t > a, \\ e^{-\mu t} d^*(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (4.25)$$

On a aussi,

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da, \end{cases} \quad (4.26)$$

Remarquons que si $d^*(a)$ est donnée par la première expression dans (4.24), alors elle vérifie aussi la deuxième expression de (4.24). De plus, pour $t \leq a \leq 2t$ on a,

$$d^*(a-t) = e^{-\mu(a-t)} f(S^*, J^*).$$

Donc,

$$\begin{aligned} d^*(a) &= e^{-\mu t} d^*(a-t), \\ &= e^{-\mu t} e^{-\mu(a-t)} f(S^*, J^*), \\ &= e^{-\mu a} f(S^*, J^*). \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant une méthode itérative pour avoir le résultat suivant

$$d^*(a) = e^{-\mu a} f(S^*, J^*), \quad \forall a > 0.$$

En répétant les mêmes arguments utilisés plus haut pour i^* , on démontre que pour tout $a > 0$

$$i^*(a) = \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) f(S^*, J^*), \quad (4.27)$$

En combinant (4.26) et (4.27), on obtient

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = D f(S^*, J^*), \end{cases} \quad (4.28)$$

avec

$$D = \int_0^\infty \beta(a) \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) da.$$

En appliquant les mêmes arguments que dans [33], [34], on montre l'existence de l'équilibre endémique positif E^* . \square

Nous nous intéressons maintenant à la persistance uniforme de la solution (voir [25], [40], [55], [57]). Pour cela, nous allons appliquer le [55, Théorème 5.2].

Tout d'abord, nous supposons qu'il existe un équilibre positif E^* qui vérifie (4.28), tel que pour tout $S > 0$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1 & \text{pour } 0 < x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*} & \text{pour } x > J^*. \end{cases} \quad (4.29)$$

De plus, supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ et il existe un $\eta > 0$ tels que pour tout $S \in [\frac{A}{\mu} - \epsilon, \frac{A}{\mu} + \epsilon]$ on a

$$\frac{f(S, J_1)}{J_1} \geq \frac{f(S, J_2)}{J_2}, \quad (4.30)$$

pour tout $0 < J_1 \leq J_2 \leq \eta$.

On pose

$$k = \inf\{a : \int_a^\infty \beta(\sigma)d\sigma = 0\},$$

on note aussi X_0 un sous-ensemble de X défini par

$$X_0 = \{(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_+ \mid \int_0^k (i_0 + q_0)(a)da > 0\}.$$

Voir [6],[23],[12],[39].

4.4.1 Persistance uniforme

Le lemme suivant permet de montrer que l'hypothèse (H1) dans [55, Théorème 5.2] est vérifiée.

Lemme 34. *Supposons que $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$, alors la fonction J est positive pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Le système (4.19) nous permet d'écrire

$$J(t) = \int_0^\infty \beta(a)\tilde{\pi}(a)f(S(t-a), J(t-a))da,$$

avec $\tilde{\pi}(a) = \pi(a)(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)})$. Après un changement de variable, l'expression de J devient

$$J(t) = \int_{-\infty}^t \beta(t-s)\tilde{\pi}(t-s)f(S(s), J(s))ds.$$

Rappelons que $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$ cela implique que J n'est pas identiquement nulle. Supposons par l'absurde qu'il existe un $l \leq 0$ tel que $J(t) = 0$ pour tout $t \leq l$. Donc, comme $S(t) \leq \frac{A}{\mu}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et puisque la fonction f est croissante par rapport à S alors

$$J(t) \leq \int_l^t \beta(t-s)\tilde{\pi}(t-s)f\left(\frac{A}{\mu}, J(s)\right)ds.$$

Ensuite, en utilisant le fait que la fonction f est Lipschitzienne et comme $f(\frac{A}{\mu}, 0) = 0$, on a

$$J(t) \leq L\|\beta\|_\infty \int_l^t J(s)ds.$$

L'inégalité de Gronwall permet de conclure que J est identiquement nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci est en contradiction avec la positivité de J pour certaines valeurs de t . Alors il existe une suite $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et de plus $J(t_n) > 0$. On note par $J_n(t) := J(t + t_n)$ et $S_n(t) := S(t + t_n)$. Rappelons que $\eta = \inf_{\mathbb{R}} S(t) > 0$. D'après le système (4.19) et la monotonie de f par rapport à S nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \int_{-\infty}^t \beta(t-s)\tilde{\pi}(t-s)f(S_n(s), J_n(s))ds, \\ &\geq \int_{-\infty}^t \beta(t-s)\tilde{\pi}(t-s)f(\eta, J_n(s))ds, \end{aligned}$$

où, $J_n(0) := J(t_n) > 0$. Supposons maintenant qu'il existe $r > 0$ tel que $J_n(r) = 0$ et $J_n(t) > 0$ pour tout $t \in [0, r)$. Alors,

$$0 = J_n(r) \geq \int_{-\infty}^r \beta(r-s)\tilde{\pi}(r-s)f(\eta, J_n(s))ds,$$

implique que $J_n(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in (0, r)$, ceci est une contradiction. Finalement, $J_n(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et comme $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ alors $J(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. \square

On définit la fonction de persistance $\rho : X_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\rho(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \beta(a)i_0(a)da,$$

alors

$$\rho(\Phi(t, x)) = \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da,$$

avec $x = (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$.

D'après le lemme 34, on peut remarquer que la fonction de persistance ρ est positive pour tout $t \geq 0$ si et seulement si $x \in X_0$.

Lemme 35. *Supposons que $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$ et que (4.29)-(4.30) soient vérifiées, alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon$$

pour toute solution de (4.1) à condition que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Démonstration. Par le [55, Théorème 5.2], et d'après le Lemme 34, la solution du problème (4.5)-(4.6) est uniformément fortement persistante. Dans un premier temps,

on suppose que la fonction ρ n'est pas uniformément faiblement persistante, donc, il existe un $\epsilon > 0$ arbitraire assez petit tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) < \epsilon$$

ainsi, il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) < \epsilon_0.$$

Soit $S_\infty := \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t)$, il s'ensuit qu'il existe une suite $t_k \rightarrow \infty$ telle que $S(t_k) \rightarrow S_\infty$ et $S'(t_k) \rightarrow 0$. En utilisant la continuité et la monotonie de la fonction f , on a pour t assez grand

$$S_\infty \geq \frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon),$$

avec $\psi(\epsilon) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Dans un deuxième temps, puisque $\mathcal{R}_0 > 1$, alors il existe une constante positive ϵ_1 telle que

$$h(\epsilon_1) = \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1} \int_0^\infty \beta(a)\pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) e^{-\epsilon_1 a} da > 1. \quad (4.31)$$

On note par $B(t) := i(t, 0)$. Pour tout $\epsilon_0 > 0$, il existe un $T > 0$ tel que $J(t) < \epsilon_0$ pour tout $t \geq T$. Alors pour $\epsilon_0 = \epsilon_1$, et d'après l'expression (4.30), on a

$$\frac{f(S, J)}{J} \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), J)}{J} \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1},$$

la monotonie de la fonction f nous permet d'écrire,

$$B(t) = \frac{f(S, J)}{J} J \geq \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1} \int_0^t \beta(a)\pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) B(t-a) da.$$

En appliquant la transformée de Laplace à la dernière inégalité, on trouve

$$\hat{B}(\lambda) \geq \hat{\beta}(\lambda) \hat{B}(\lambda) \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1},$$

avec

$$\hat{B}(\lambda) = \int_0^\infty B(a) e^{-\lambda a} da,$$

et

$$\hat{\beta}(\lambda) = \int_0^\infty \beta(a)\pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) e^{-\lambda a} da.$$

Comme $\hat{B}(\lambda) > 0$, on obtient l'inégalité suivante

$$1 \geq \hat{\beta}(\lambda) \frac{f(\frac{A}{\mu} - \psi(\epsilon_1), \epsilon_1)}{\epsilon_1},$$

Cette dernière expression est vraie pour n'importe quel $\lambda \geq 0$, en particulier pour un $\lambda = \epsilon_1$. Cela implique

$$1 \geq h(\epsilon_1),$$

ceci est une contradiction avec (4.31). \square

D'après [55, Théorème 5.7], on a le résultat suivant.

Théorème 36. *Il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 qui attire n'importe quelle solution avec une condition initiale dans X_0 . De plus, \mathbf{A}_1 est ρ -persistente, autrement dit, il existe une constante positive \bar{C} , telle que*

$$\int_0^\infty \beta(a) i_0(a) da \geq \bar{C}, \quad \text{pour tout } (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_1.$$

Le Lemme suivant fournit quelques estimations utiles.

Lemme 37. *Il existe une constante positive C telle que, pour tout $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_1$,*

$$i_0(a) \geq C \tilde{\pi}(a), \quad a \geq 0,$$

$$d_0(a) \geq C e^{-\mu a}, \quad a \geq 0.$$

Démonstration. Le Lemme 31 et le Théorème 36, nous permettent d'écrire

$$i(t, a) \geq C \tilde{\pi}(a),$$

avec $C = f(\frac{A}{\mu+L}, \bar{C})$ and $L := L_C$. \square

En utilisant les deux Lemmes 35 et 37, on conclut le lemme suivant.

Lemme 38. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \geq \frac{\bar{C}}{f(S^*, J^*)}$$

$$\int_0^\infty \frac{i(t, a)}{i^*(a)} \frac{\beta(a) \tilde{\pi}(a)}{K} da \geq \frac{\bar{C}}{f(S^*, J^*)}.$$

et

$$f(S(t), J(t)) \geq f(\frac{A}{\mu+L}, \bar{C}).$$

Théorème 39. *Sous les mêmes hypothèses du lemme 35, le problème (4.19) admet un équilibre positif E^* qui est globalement asymptotiquement stable dans X_0 .*

Démonstration. Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ une trajectoire totale, telle que $\Psi(t) = (S(t), d(t, \cdot), i(t, \cdot))$, $(S(0), d(0, \cdot), i(0, \cdot)) = (S_0, d_0(\cdot), i_0(\cdot))$ avec $(S(t), d(t, \cdot), i(t, \cdot))$ est la solution du système (4.19). On définit $H(y) = y - 1 - \ln(y)$ et

$$\begin{cases} \phi(a) = f(S^*, J^*) D \int_a^\infty \beta(s) \pi(s) ds, \\ \psi(a) = f(S^*, J^*) D \int_a^\infty \beta(a) \pi(a) \int_0^a \delta(\sigma) \frac{e^{-\mu\sigma}}{\pi(\sigma)} d\sigma ds. \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\text{avec } D = \frac{1}{\int_0^\infty \beta(a) \pi(a) (1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds) da}.$$

Pour $x := (s_0, d_0, i_0) \in \mathbf{A}_1$, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante,

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$$

avec,

$$V_1(x) = S_0 - S^* - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)} d\eta,$$

$$V_2(x) = \int_0^\infty H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

et

$$V_3(x) = \int_0^\infty H\left(\frac{d_0(a)}{d^*(a)}\right) \psi(a) da.$$

Dans un premier temps, en utilisant l'équation de S dans (4.19),

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(\Psi(t))}{dt} &= \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) (A - \mu S - f(S, J)) \\ &= \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) (f(S^*, J^*) - f(S, J)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ensuite,

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

Les deux expressions de i et i^* nous permettent d'écrire

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty \phi(a) \xi(t - a) da,$$

$$\text{avec } \xi(t) = H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right).$$

En suivant maintenant le même raisonnement de la preuve du [55, Lemme 9.18], nous

pouvons montrer que V_2 est absolument continue et

$$\frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} = \phi(0)\xi(t) + \int_0^\infty \phi'(a)\xi(t-a)da.$$

Ainsi,

$$\frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} = \phi(0)H\left(\frac{i(t,0)}{i^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right)\phi'(a)da, \quad (4.34)$$

Pour V_3 , on répète les mêmes arguments au-dessus, on a

$$\frac{dV_3(\Psi(t))}{dt} = \psi(0)H\left(\frac{d(t,0)}{d^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{d(t,a)}{d^*(a)}\right)\psi'(a)da. \quad (4.35)$$

En faisant la somme des équations (4.33), (4.34) et (4.35), puis, en utilisant le système (4.19) et l'expression (4.27), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Psi(t))}{dt} &= \mu(S^* - S)\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right)(f(S^*, J^*) - f(S, J)) \\ &\quad + (\phi(0) + \psi(0))H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) \\ &\quad + \int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right)(\phi'(a) + \psi'(a))da. \end{aligned}$$

La fonction H peut s'écrire sous la forme,

$$\begin{aligned} H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) &= \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} - 1 - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right)\right) \\ &= \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} - 1 - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S, J^*)}\right)\right) - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J^*)}{f(S^*, J^*)}\right)\right). \end{aligned}$$

Notons que

$$\left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right) \leq 0,$$

de plus,

$$\phi(0) + \psi(0) = f(S^*, J^*).$$

En remplaçant maintenant l'expression de ϕ et ψ dans (4.32), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{dV(\Psi(t))}{dt} \\ &= \mu(S^* - S(t))\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) \\ & \quad - \ln\left(\frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)}\right)f(S^*, J^*) + f(S^*, J^*)H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \\ & \quad - f(S^*, J^*)D \int_0^\infty \left(\beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\right) H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right)da. \end{aligned}$$

On remarque que le premier et le deuxième terme de cette dernière équation sont négatifs, il reste donc à analyser le troisième terme. Pour cela, on pose

$$I := H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - D \int_0^\infty \left(\beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\right) da.$$

Alors, d'après (4.19), (4.28) et par un calcul direct, on vérifie que

$$H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) = H\left(\int_0^\infty \beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}da\right)$$

En utilisant à présent l'expression de D et l'inégalité de Jensen, on conclut que

$$I \leq H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right).$$

Donc, en suivant les mêmes arguments de la preuve du Théorème 32, voir aussi [6],[12], on obtient

$$\frac{\partial V(\Psi(t))}{\partial t} \leq 0.$$

De plus, supposons que $\frac{dV(\Psi(t))}{dt} = 0$, ceci implique que $S(t) = S^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$H\left(\frac{f(S^*, J)}{f(S^*, J^*)}\right) = \int_0^\infty \frac{f(S^*, J(t-a))}{f(S^*, J^*)} dm(a) \tag{4.36}$$

avec $m(a) = \frac{\beta(a)\pi(a)(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds)}{D}$. À partir du système (4.19), on a

$$A - \mu S^* = f(S^*, J(t)),$$

d'après l'expression (4.26), on obtient

$$f(S^*, J(t)) = f(S^*, J^*)$$

En appliquant ce résultat dans (4.36), on trouve

$$\int_0^\infty \frac{f(S^*, J(t-a))}{f(S^*, J^*)} dm(a) = 0,$$

cela conduit à $i(t, \cdot) = i^*(\cdot)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Finalement, en utilisant la même approche de la preuve du Théorème 32 dans la section précédente, on montre que l'équilibre positif endémique E^* est globalement asymptotiquement stable. L'unicité est donnée par le fait que $\frac{dV(\Psi(t))}{dt} = 0$ n'est vérifiée que sur la ligne $S = S^*$. \square

4.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous considérons la fonction d'incidence proposée par Beddington-DeAngelis pour illustrer nos différents résultats obtenus dans la section précédente. Soit la fonction

$$f(S, J) = \frac{SJ}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 J}.$$

Le système (4.1) devient

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - \frac{S(t)J(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 J(t)}, & t > 0, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a) + \delta(a)q(t, a), & t > 0, \quad a > 0, \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = \theta(a)i(t, a) - (\mu + \delta(a))q(t, a), & t > 0, \quad a > 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

On remarque que la fonction f satisfait toutes les hypothèses concernant l'existence et la stabilité de la solution définie dans la première section, ce qui signifie que le système (4.37) admet deux équilibres et la condition de stabilité est donnée par le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 ,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{A}{\mu + \alpha_1 A} \int_0^\infty \beta(a)\pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) da.$$

4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Comme conséquence directe des deux Théorèmes 32 et 39, nous avons les résultats suivants :

- Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, l'équilibre sans maladie $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.
- Si $\mathcal{R}_0 > 1$, l'équilibre positif endémique $E^* = (S^*, i^*(a), q^*(a))$ est globalement asymptotiquement stable.

Nous considérons maintenant les paramètres suivants :

$$A = 1, \quad \mu = 5.10^{-2}, \quad \alpha_1 = 1.10^{-1}, \quad \alpha_2 = 2.10^{-1}.$$

$$\beta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq \tau_1, \\ 2.10^{-2}(t - \tau_1)^2 e^{(-0.1(t-\tau_1))} & \text{si } a > \tau_1. \end{cases}$$

$$\theta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq \tau_2, \\ 6.10^{-2}(t - \tau_2)^2 e^{(-0.2(t-\tau_2))} & \text{si } a > \tau_2. \end{cases}$$

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq \tau_3, \\ 0 & \text{si } a > \tau_3. \end{cases}$$

Avec $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 15$ et $\tau_3 = 35$. Supposons pour $t = 0$, nous n'avons pas d'individus en quarantaine. On remarque que cette condition n'est pas nécessaire et n'influence pas le comportement asymptotique de notre système (4.37). On prend les conditions initiales suivantes

$$S_0 = 1, \quad i_0(a) = 6.10^{-1}e^{(-0.1a)}, \quad \forall a \geq 0, \quad q_0(a) \equiv 0, \quad \forall a \geq 0.$$

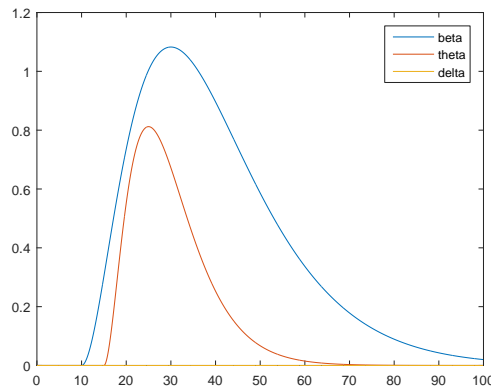


FIGURE 4.1 – Représentation graphique des fonctions β, θ et δ par rapport à l'âge a .

Dans le premier cas (voir Figure 4.2 et Figure 4.3), le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 est strictement inférieur à 1, alors l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

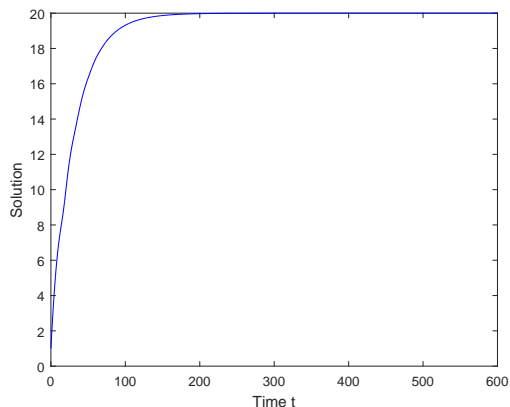


FIGURE 4.2 – L'évolution de la solution S par rapport t , pour $\mathcal{R}_0 < 1$.

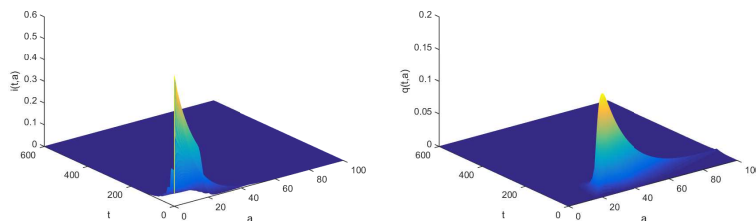


FIGURE 4.3 – L'évolution des solutions i et q par rapport au temps t et à l'âge a .

Dans le deuxième cas (voir Figure 4.5 et Figure 4.6), on choisit la fonction δ non identiquement nulle (voir Figure 4.4) telle que $\mathcal{R}_0 < 1$

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq \tau_1, \\ 2.10^{-3}(t - \tau_1)^2 e^{(-0.12(t-\tau_1))} & \text{si } a > \tau_1. \end{cases}$$

Dans le troisième cas (Voir Figure 4.8 et Figure 4.9), on propose la fonction δ de telle sorte que $\mathcal{R}_0 > 1$

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq \tau_1, \\ 28.10^{-3}(t - \tau_1)^2 e^{(-0.12(t-\tau_1))} & \text{si } a > \tau_1. \end{cases}$$

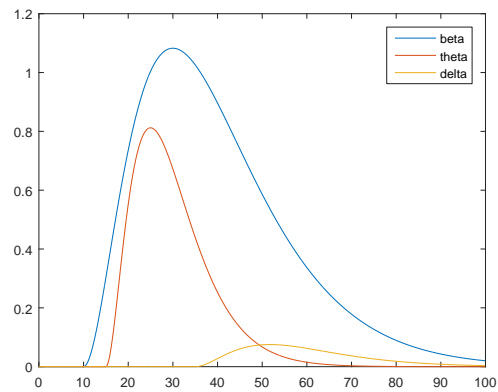


FIGURE 4.4 – Les fonctions β , θ et δ par rapport à l'âge a .

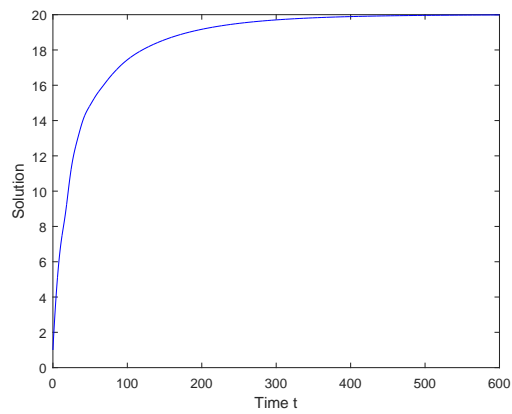


FIGURE 4.5 – L'évolution de la fonction S par rapport au temps t .

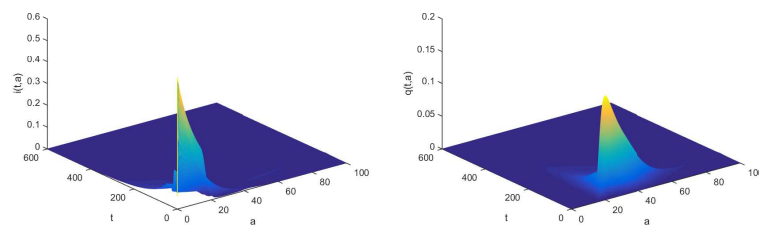


FIGURE 4.6 – Les solutions i et q par rapport au temps t et à l'âge a .

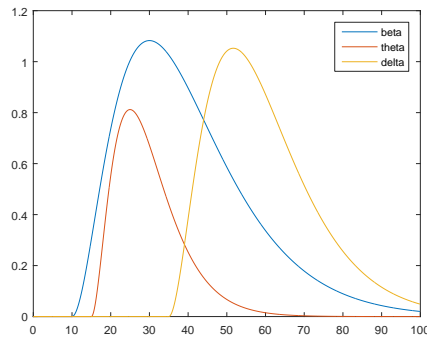


FIGURE 4.7 – Les fonctions β , θ et δ par rapport à l'âge a .

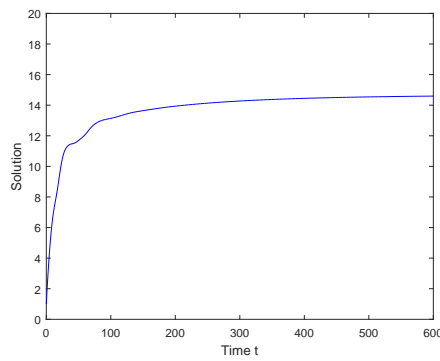


FIGURE 4.8 – L'évolution de la solution S par rapport au temps t .

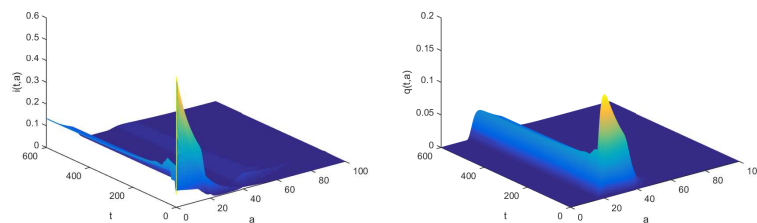


FIGURE 4.9 – Les solutions i et q par rapport au temps t et à l'âge a .

4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

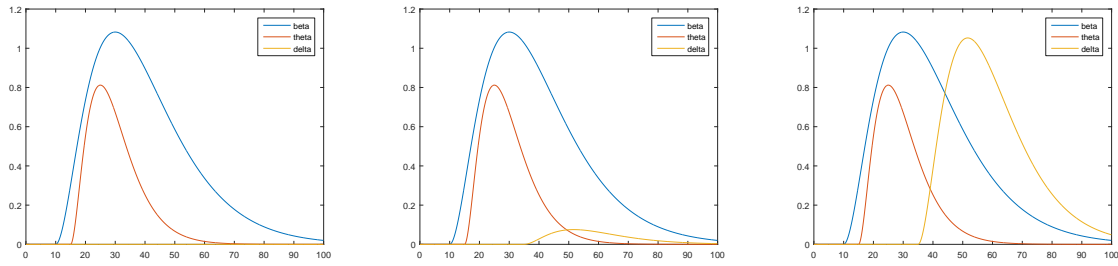


FIGURE 4.10 – Les fonctions β, θ et δ par rapport à l'âge a : $\delta \equiv 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$, $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$ et $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 > 1$.

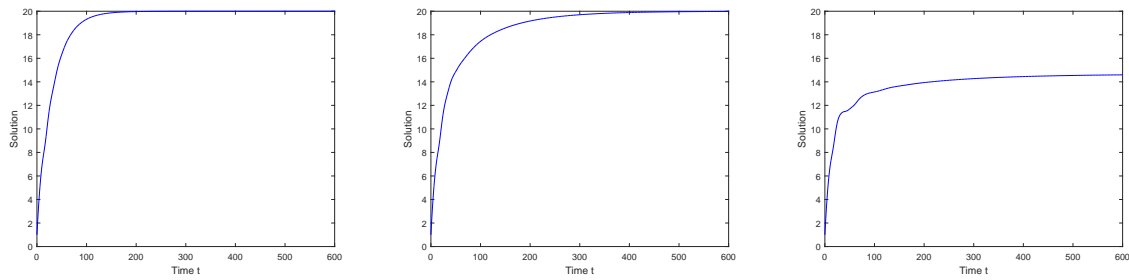


FIGURE 4.11 – L'évolution des individus susceptibles S à l'instant t : $\delta \equiv 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$, $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$ et $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 > 1$.

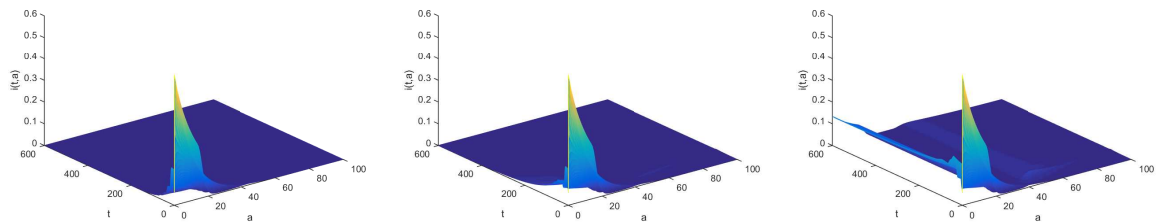


FIGURE 4.12 – L'évolution des individus infectés i à l'instant t et à l'âge a : $\delta \equiv 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$, $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$ et $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 > 1$.

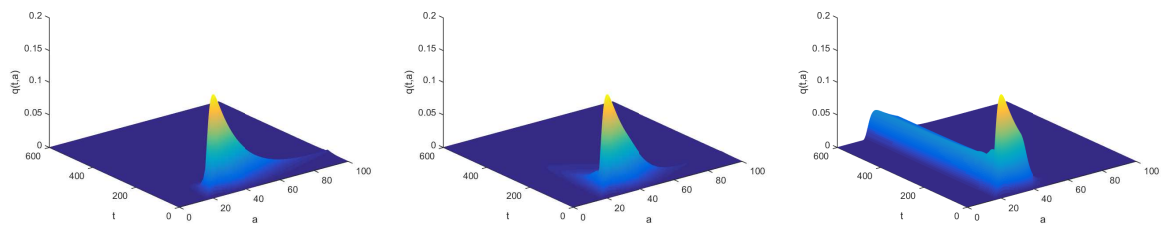


FIGURE 4.13 – L'évolution des individus en quarantaine q à l'instant t et l'âge a : $\delta \equiv 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$, $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 < 1$ et $\delta \neq 0$ telle que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Annexe

Généralités sur les systèmes dynamiques

L'étude réalisée dans cette thèse porte sur l'analyse mathématiques des systèmes dynamiques. Ces systèmes pouvant être différentiels, discrets ou à dérivées partielles. Ce travail s'insère dans le cadre général de l'étude de la dynamique de populations, les systèmes différentiels étudiés sont non linéaires.

Nous allons présenter certains outils mathématiques qui ont été utilisés dans ce travail.

Définition 1. Flot

Le flot est un concept utilisé en géométrie différentielle. Il est associé à la notion de champ de vecteurs, c'est-à-dire à une application f , qui, à un point x d'un ouvert Ω d'un espace de Banach E , associe un vecteur de E . Un tel champ définit une équation différentielle du type $\Phi'(t) = f(\Phi(t))$. Si la fonction f est localement lipschitzienne, pour chaque point x de U , il existe un intervalle réel maximal et une fonction g , définie sur l'intervalle maximal, la solution avec la condition dite de Cauchy $g(0) = x$. Vue comme une fonction de deux variables, t et x , l'application g est appelée le flot du champ f de vecteurs.

Définition 2. *Un flot sur \mathbb{R}^n est une application continue*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\rightarrow \Phi(t, x),\end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\Phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$,
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$, pour $t, s \in \mathbb{R}$.

Définition 3. *Semi-flot associé à une EDO*

On appelle le semi-flot de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ à l'instant t , l'appli-

Annexe

ation $(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n : \Phi(t, (t_0, x_0))$, avec $\Phi_t(x_0)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(x_0) = f(\Phi_t(x_0)), \\ \Phi_{t_0}(x_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 4. Ensemble limite

Soit x un point dont la courbe intégrale maximale est définie sur \mathbb{R} . L'ensemble ω -limite de x , noté $\omega(x)$ est l'intersection des adhérences des sections finissantes de l'image de la courbe intégrale maximale vérifiant la condition de Cauchy $\Phi(0, x) = x$.

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Cet ensemble est encore invariant par le flot, il correspond à la zone limite parcourue par la trajectoire si t devient très grand.

La même définition s'applique dans le cas où t devient très petit, on parle d'ensemble α -limite.

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Définition 5. Fonction contractante f est dite contractante (ou une contraction) s'il existe une constante k telle que,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|, \quad k \in (0, 1).$$

Définition 6. Théorème de point fixe

Toute application contractante d'un espace de Banach dans lui même admet un unique point fixe.

Définition 7. Bassin d'attraction d'un point d'équilibre

Soit x^* est un point d'équilibre du système

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{4.38}$$

- On appelle bassin d'attraction d'un point x^* l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

- On appelle bassin de répulsion d'un point x^* , l'ensemble des éléments $x \in X$ tels

que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

Soit X l'espace de phases associé à $\Phi(t, x)$ tel que $\Phi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$,

Définition 8. *Trajectoire, orbite*

- La fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ est appelée une trajectoire totale (de Φ), si $\phi(t + r) = \Phi(t, \phi(r))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $r \in \mathbb{R}$.
- L'orbite associée à une trajectoire totale est définie par : $\{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.
- L'orbite d'un point x de K est dite périodique si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$ pour tout $t \geq 0$. On dit alors que T est la période de l'orbite périodique considérée.
- Si Φ est induite par la solution de $x'(t) = f(x)$, la trajectoire totale est la solution x sur \mathbb{R} avec $x(t_0) = x_0$.

Définition 9. *Ensemble absorbant*

Supposons que le système $x'(t) = f(x(t))$ admet des solutions de classe C^1 et que K est un ouvert de R . Un sous ensemble D de K est dit absorbant si tout sous ensemble borné D_1 de K satisfait $\Phi(t, D_1) \subset D$ pour tout temps t suffisamment grand. De même, D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $T \geq 0$ tel que $\Phi_t(x_0) \in D$ pour tout $t > T$.

Définition 10. *Ensemble invariant*

Un sous ensemble D de K est dit positivement (respectivement négativement) invariant à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ si $\Phi(t, D) \subset D$ pour tout $t > 0$ (respectivement $t < 0$). D est un ensemble invariant si seulement si $\Phi(x, D) = D$ pour tout t .

Définition 11. *Point fixe*

Un point x^* est appelé point fixe du semi-flot Φ , si $\Phi_t(x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Définition 12. *Attracteur compact*

Soit (X, d) un espace métrique et $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ le semi-flot associé au système $x'(t) = f(x(t))$. K est appelé attracteur de M , si K est invariant et attire M . K est appelée attracteur compact de M , de plus K est compact.

Définition 13. *compacité*

Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. L'application Φ est dite asymptotiquement compacte sur M , si pour toutes les suites (t_i) dans \mathbb{R}^+ , $(t_i) \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, et (x_i) dans M , $(\Phi(t_i, x_i))$ admet une sous suite convergente .

Définition 14. *Dissipatif, asymptotiquement régulier, éventuellement borné*

Soit $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu.

- Φ est appelé point dissipatif s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tous les points dans X .
- Φ est appelé asymptotiquement régulier si Φ est asymptotiquement compact sur chaque ensemble positivement invariant borné fermé.
- Φ est appelé éventuellement borné sur un ensemble $M \subset X$ si $\Phi(J_r \times M)$, $J_r = J \cap [r, \infty)$, est borné pour $r \in J_r$.

Persistence

Soit X un ensemble non vide et $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ et soit J un ensemble de temps.

Définition 15. *la persistence faible*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -faiblement persistant, si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 16. *la persistence forte*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement persistant, si

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 17. *ρ -uniformément faiblement persistant*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -uniformément faiblement persistant, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 18. *ρ -uniformément fortement persistante*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement uniformément persistant, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 19. Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement dissipatif, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 20. *ρ -faiblement dissipatif*

Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -faiblement dissipatif, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Quelques théorèmes

Théorème 21. *Inégalité de Jensen*

Soient $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables, avec Ω est ouvert de \mathbb{R}^n .

Nous supposons :

$g \geq 0$ p.p. sur Ω , $\int_{\Omega} g(x)dx = 1$, fg et $H(f)g \in L^1(\Omega)$, nous avons

$$H\left(\int_{\Omega} f(x)g(x)dx\right) \leq \int_{\Omega} H(f(x))g(x)dx.$$

Théorème 22. *Inégalité de Gronwall*

Soit f, g et k sont des fonctions continues à valeurs positives tels que :

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\sigma)d\sigma, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(\sigma)k(\sigma) \exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)d\sigma, \quad \forall t \in [a, b].$$

Théorème 23. *Méthode de fluctuation, [55]*

Soit $f : [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et différentielle. Alors il existe des suites $(t_k), (s_k)$ telles que

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f(s_k) \rightarrow f_{\infty}, & \lim_{k \rightarrow \infty} f'(s_k) \rightarrow 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) \rightarrow f^{\infty}, & \lim_{k \rightarrow \infty} f'(t_k) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Théorème 24. *Corollaire B.6, [55]*

Soient w, g des fonctions non-négatives et localement intégrables

$$w(t) \geq \int_0^t k(\sigma)w(t - \sigma)d\sigma + g(t).$$

Supposons que k est une fonction strictement positive, alors il existe une constante $b > 0$ qui ne dépend que de k , telle que $w(t) > 0$ pour tout $t > b$ avec $\int_0^{t-b} g(s)ds$.

En particulier, si g est continue à 0 et $g(0) > 0$, alors $w(t) > 0$ pour tout $t > b$.

Théorème 25. *Théorème des fonctions implicites "version locale"*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k ($k \geq 1$), soit $(x^*, y^*) \in U$ tel que $f(x^*, y^*) = c$ si $Dyf(x^*, y^*)$ est inversible, alors il existe un ouvert V de U et une fonction $\Psi : V \rightarrow V$ unique de classe C^k , telle que $f(x, \Psi(x)) = c \forall x \in V$.

Théorème 26. *théorème 2.33, [55]*

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- Il existe un attracteur compact des ensembles bornés.
- Φ est point dissipatif, asymptotiquement régulier, et éventuellement borné sur chaque ensemble borné dans X .

Théorème 27. *Théorème 2.39, [55]*

Soit Φ un semi-flot continu, et A est un sous ensemble compact positivement invariant de X qui attire tous les sous ensembles compacts de voisinage de lui même (i.e. un attracteur local des ensembles compacts). Alors A est stable.

Théorème 28. *Soit X un sous ensemble fermé de l'espace de Banach E , J un ensemble de temps et $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu. Alors Φ est asymptotiquement régulier s'il y a des applications $\Psi, \Theta : J \times X \rightarrow X$ telles que*

$$\Phi(t, x) = \Theta(t, x) + \Psi(t, x),$$

et les affirmations suivantes sont vérifiées pour n'importe quel ensemble C borné fermé :

1. $\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam} \Theta_t(C) = 0$,
2. il existe r_C tel que $\Psi(C)$ est à fermeture compacte pour tout $t \in J$, $t \geq r_C$.

le résultat suivant prend le rôle du théorème de Lasalle.

Théorème 29. *Théorème 2.53, [55] Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu, A un ensemble invariant et compact dans X , et soit $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue. Supposons que ; pour toute trajectoire totale $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que $V'(\phi(t))_+ \leq 0$ ou sur \mathbb{R} . En outre, supposons que $\tilde{A} \subset A$, V est constante sur \tilde{A} et que $\phi(\mathbb{R}) \subset \tilde{A}$ pour n'importe quelle Φ -trajectoire totale avec $V'(\phi(t)) \equiv 0$. Alors $A = \tilde{A}$.*

Théorème 30. *Théorèmes 5.1;5.2, [55]*

Soit X un espace métrique. Supposons que $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu, $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et non nulle.

Nous supposons

(H_1) Φ a un attracteur compact A des ensembles bornés.

(H_2) il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in J$.

Nous posons,

$$X_0 = \{x \in X; \forall x, t \in J : \rho(\Phi(t, x)) = 0\},$$

- Si $X_0 = \emptyset$, alors $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in A$ et il existe $\eta > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) \geq \eta$ pour tout $x \in X$.

Annexe

- Si $X_0 \neq \emptyset$, et $\rho \circ \phi$ est continue et Φ est ρ -uniformément faiblement persistant, alors Φ est ρ -uniformément fortement persistant.

Théorème 31. *Théorème 5.7, [55] Supposons que $X_0 \neq \emptyset$, $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ est ρ -uniformément fortement persistant, $\rho(\Phi)$ est continue, et*

(H₁) il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in J$.

Alors l'attracteur A est l'union disjointe

$$A = A_0 \cup C \cup A_1$$

de trois ensembles A_0 , C et A_1 . les deux ensembles A_0 et A_1 sont des compacts et nous avons les affirmations suivantes.

1. $A_0 = A \cap X_0$ est l'attracteur compact de sous ensembles de X_0 , c'est-à-dire, tout sous ensemble compact K de X_0 a un voisinage dans X_0 qui est attiré par A_0 .
2. A_1 est ρ -uniformément positif et A_1 est l'attracteur compact de voisinage des ensembles compacts dans $X \setminus X_0$ et Φ est ρ -uniformément positif. En particulier, A_1 est stable.
3. Si $x \in X \setminus A_1$ et Φ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_0$ pour $t \rightarrow -\infty$.
Si $x \in X \setminus A_0$ et ϕ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_1$ pour $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, l'ensemble C contient ces points $x \in A$ tel qu'il existe une trajectoire totale $\phi(t)$ avec $\phi(-t) \rightarrow A_0$ et $\phi(t) \rightarrow A_1$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème 32. *Le critère de Fréchet-Kolmogorov, [55]*

Soit K est un sous ensemble de $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$. Alors K est à fermeture compacte si seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

- (i) $\sup_{t \in K} \int_0^\infty |f(a)|^p da < \infty$,
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^\infty |f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in K$,
- (iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |f(a+h) - f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in K$,
- (iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h |f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in K$.

Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov

Définition 33. *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathbb{C}^1 ,*

1) V est dite définie positive si :

$$\begin{cases} V(0) = 0, \\ V(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$$

2) V est dite définie négative, si $(-V)$ est définie positive.

3) V est dite semi-définie positive si :

$$\begin{cases} V(0) = 0, \\ V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$$

4) V est dite semi-définie négative si $(-V)$ est semi-définie positive.

Théorème 34. *Stabilité au sens de Lyapunov*

Soit x solution du système d'équation (4.38). Soit V une fonction de classe \mathbb{C}^1 définie positive sur Ω un voisinage de $x^* = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

- (i) Si $\frac{dV}{dt} \leq 0$ alors x^* est stable. Donc, la fonction de Lyapunov est dite faible.
- (ii) Si $\frac{dV}{dt} < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable. Donc, la fonction de Lyapunov est dite stricte.

Théorème 35. *Théorème d'invariance de LaSalle, [53]*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert positivement invariant pour le système (4.38) en x^* .

Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (A.2) en x telle que :

- $\frac{dV}{dt} \leq 0$ sur Ω .
- Soit $E = \{x \in \Omega : \frac{dV(x(t))}{dt} = 0\}$ et P est le plus grand ensemble invariant par Φ et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans E tend vers l'ensemble P lorsque le temps tend vers l'infini.

Corollaire 36. *Lasalle, [36]* Supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $x^* \in \Omega$. Soit V une fonction définie positive et de classe \mathbb{C}^1 telle que $\frac{dV}{dt} \leq 0$ sur U . Soit $E = \{x \in \Omega : \frac{dV(x(t))}{dt} = 0\}$; supposons que P le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E est réduit au point x^* . Alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (4.38).

Si ces conditions sont satisfaites pour $U = \Omega$ si de plus V est propre sur Ω , c'est à dire si $\lim V(x) = +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$, alors toutes les trajectoires sont bornées pour tout $t \geq 0$. x^* est un point d'équilibre globalement stable pour le système (4.38).

Corollaire 37. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble P est réduit au point x^* , alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (4.38) défini sur Ω .*

Schéma Numérique

La méthode numérique utilisée pour la résolution du système d'équation (2.1) est basée sur un schéma aux différences finies pour l'équation de transport appelé schéma explicite décentré amont consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

C'est un schéma usuel pour une équation de transport linéaire qui est stable sous la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). les équations différentielles ordinaires sont résolues par un schéma explicite d'Euler.

Considérons un maillage régulier pour la discrétisation du domaine,

$$a_j = j\Delta a, \quad j = 0, \dots, N, \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, \dots, M.$$

avec Δa : pas d'âge et Δt : pas du temps.

On note T^n , i_j^n et V^n respectivement des approximations associées à $T(t_n)$, $i(t_n, a_j)$ et $V(t_n)$ au temps t_n et l'âge a_j avec (T, i, V) solution du problème (2.25) , de plus,

$$\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_n \simeq \frac{i_j^{n+1} - i_j^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial a}\right)_j \simeq \frac{i_j^n - i_{j-1}^n}{\Delta a}.$$

Le schéma numérique de l'équation des infectées i est donné par

$$i_j^{n+1} = (1 - \lambda)i_j^n + \lambda i_{j-1}^n + \Delta t \delta(a_j) i_j^n, \quad n = 0, \dots, M - 1, \text{ et } j = 0, \dots, N.$$

avec $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta a}$. La condition CFL ($\lambda \leq 1$) est satisfaite, pour toutes les simulations numériques réalisées dans cette thèse.

Publications

Les publications suivantes contiennent tous les résultats obtenus dans cette thèse :

1. M.N. Frioui, S.E. Miri, T.M. Touaoula, *Unified Lyapunov functional for an age-structured virus model with very general nonlinear infection response*. J. Appl. Math. Comput. 58 :47–73, 2018.
2. A. Chekroun, M. N. Frioui, T. Kuniya, T. M. Touaoula, *Global stability of an age-structured epidemic model with general Lyapunov functional*, Math. Biosci. Eng. , (2019) 1525-1553.
3. M.N. Frioui, T.M. Touaoula, B. Ainseba *Global dynamics of an age-structured model with relapse*. DCDS-B, 2019.

Bibliographie

- [1] B. Aïnseba, Z. Feng , M. Iannelli, F. A. Milner *Control Strategies for TB Epidemics*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 77(1) (2017), 82–107.
- [2] B.E. Aïnseba, M. Iannelli, *Optimal screening in structured SIR epidemics*, Math. Modelling of Natural Phenomena, Vol. 7, Issue 3 (2012), 12-27.
- [3] C. L. Althaus, R. J. De Boer, *Dynamics of immune escape during HIV/SIV infection*, PloS Comput. Biol., 4, 2008, e10000103, 9pp.
- [4] N. Bacaër, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, London, UK, 2011.
- [5] B. Balachandran, T. Kalmar-Nagy and D.E. Gilsin. Delay Differential Equations : recent advances and new direction. Springer-verlag 2009
- [6] S. Bentout, T. M. Touaoula, *Global analysis of an infection age model with a class of nonlinear incidence rates*, J. Math. Anal. Appl. 434, 2016, 1211-1239.
- [7] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York, 2000.
- [8] F. Brauer, Z. Shuai and P. van den Driessche *Dynamics of an age of infection cholera model*, Math Bioscience and Engineering, V 10, N 5 and 6, 2013 pp 1335-1349.
- [9] L. Cai, M. Martcheva, X.-Z. Li, *Epidemic models with age of infection, indirect transmission and incomplete treatment*, Discr. Contin. Dyn. Syst. B, 18, 2013, 2239-2265.
- [10] V. Capasso, G. Serio, *A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model*. Math. Biosci. 42 :43–61, 1978.
- [11] C. Castillo-Chavez, H. W. Hethcote, V. Andreasen, S.A. Levin, W. M. Liu *Epidemiological models with age structure, proportionate mixing and cross-immunity*, J. Math. Biol. 27 1989, 240-260.

Bibliographie

- [12] A. Chekroun, M. N. Frioui, T. Kuniya, T. M. Touaoula, *Global stability of an age-structured epidemic model with general Lyapunov functional*, Math. Biosci. Eng. , (2019) 1525-1553.
- [13] Y. Chen, S. Zou, J. Yang, *Global analysis of an SIR epidemic model with infection age and saturated incidence*. Nonlinear Anal. RWA. 30 :16–31, 2016.
- [14] R. V Culshaw, S. Ruan, *A delay-differential equation model of HIV infection of CD4⁺ T-cells*, Math. Biosci., 165, 2000, 27-39.
- [15] P. De leenheer, H. L. Smith, *Virus dynamics : A global analysis*, SIAM J. Appl. Math., 63, 2003, 1313-1327.
- [16] R. D. Demass, A. Ducrot, *An age-structured within-host model for multistrain malaria infections*, SIAM. J. Appl. Math., 73, 2013, 572-593.
- [17] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases : Model building, analysis and interpretation*. Wiley, Chichester, UK, 2000.
- [18] S. Djilali, T.M. Touaoula, S.E.H. Miri, *A heroin epidemic model : very general non linear incidence, treat-age, and global stability*. Acta Applicandae Mathematicae, 152 :171–194, 2017.
- [19] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience Publishers, New York, 1971.
- [20] B. Fang, X.Z. Li, M. Martcheva, L.M. Cai, *Global asymptotic properties of a heroin epidemic model with treat-age*. Appl. Math. Comput. 263 :315–331, 2015.
- [21] Z. Feng, H. R. Thieme, *Endemic Models With Arbitrarily Distributed Periods of Infection I : Fundamental Properties of The Model* SIAM J. APPL. Math., 61, No.3, 2000, pp.803-833.
- [22] Z.Feng, H.R.Thieme, *Endemic Models With Arbitrarily Distributed Periods of Infection II : Fast disease dynamics and permanent recovery*, SIAM J. Appl. Math., 61, No.3, 2000, pp.983-1012.
- [23] M.N. Frioui, S.E. Miri, T.M. Touaoula, *Unified Lyapunov functional for an age-structured virus model with very general nonlinear infection response*. J. Appl. Math. Comput. 58 :47–73, 2018.
- [24] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel *Introduction to functional differential equations..* 1993.
- [25] J. Hale, P. Waltman, *Persistence in infinite dimensional systems*, SIAM J. Math. Anal. 20, 1989, 388-395.

Bibliographie

- [26] G. Huang, X. Liu, Y. Takeuchi, *Lyapunov functions and global stability for age-structured HIV infection model*, SIAM J. Appl. Math., 72, 2012, 25-38.
- [27] G. Huang, W. Ma, Y. Takeuchi, *Global properties for virus dynamics model with Beddington-DeAngelis functional response*, Appl. Math. Lett., 22, 2009, 1690-1693.
- [28] G. Huang, Y. Takeuchi, *Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence*. J. Math. Biol. 63 :125–139, 2011.
- [29] G. Huang, Y. Takeuchi, W. Ma, *Lyapunov functionals for delay differential equations model of viral infections*, SIAM J. Appl. Math., 70, 2010, 2693-2708.
- [30] G. Huang, Y. Takeuchi, W. Ma, D. Wei, *Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate*. Bull. Math. Biol. 72 :1192–1207, 2010.
- [31] H. Inaba, *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*. Springer, Singapore, 2017.
- [32] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics - I*. Proc. R. Soc. 115 :700–721, 1927.
- [33] A. Korobeinikov, *Lyapunov functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with non-linear transmission*. Bull Math Biol, 68, 2006, 615-626.
- [34] A. Korobeinikov, *A. Global Properties of Infectious Disease Models with Nonlinear Incidence*. Bull Math Biol, 69, 2007, 1871-1886.
- [35] A. Korobeinikov, P.K. Maini, *Nonlinear incidence and stability of infectious disease models*. Math. Med. Biol. 22 :113–128, 2005.
- [36] J.P. LaSalle, *The stability of dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976.
- [37] L. Liu, J. Wang, X. Liu, *Global stability of an SEIR epidemic model with age-dependent latency and relapse*. Nonlinear Anal. RWA. 24 :18–35, 2015.
- [38] S. Liu, S. Wang, L. Wang, *Global dynamics of delay epidemic models with nonlinear incidence rate and relapse*. Nonlinear Anal. RWA. 12 :119–127, 2011.
- [39] P. Magal, C.C. McCluskey, G.F. Webb, *Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model*. Applicable Anal, 89, No 7, 2010, 1109-1140.
- [40] P. Magal, X.-Q. Zhao, *Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems*, SIAM J. Math. Anal., 37 (2005), 251-275.
- [41] C. C. McCluskey *Complete global stability for a SIR epidemic model with delay-distributed or discrete*, Nonlinear Anal, 11,2010,55-59.

Bibliographie

- [42] C. C. McCluskey *Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay*. Math. Biosci. Eng. 6, 2009,603-610.
- [43] C.C. McCluskey, *Global stability for an SEI epidemiological model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes*. Math. Biosci. Eng. 9 :819–841, 2012.
- [44] C. C. McCluskey *Global stability for an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence*, Math. Biosci. Eng., 7 (2010), 837–850.
- [45] G. Mulone, B. Straughan, *A note on heroin epidemics*. Math. Biosci. 218 :138–141, 2009.
- [46] P. Munz, I. Hudea, J. Imad, R.J. Smith, *When zombies attack! : mathematical modelling of an outbreak of zombie infection*. In : J.M. Tchuenche, C. Chiyaka (eds.), Infectious Disease Modelling Research Progress, New York, Nova Science Publishers, 2009, pp.133–150.
- [47] Y. Muroya, H. Li, T. Kuniya, *Complete global analysis of an SIRS epidemic model with graded cure and incomplete recovery rates*. J. Math. Anal. Appl. 410 :719–732, 2014.
- [48] P. W. Nelson, A. S. Perelson, *Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection*, Math. Biosc., 179, 2002, 73-94.
- [49] P. W. Nelson, M. A. Gilchrist, D. Coombs, J.M. Hyman, A. S. Perelson, *An age-structured model of HIV infection that allows for variations in the production rate of viral particles and the death rate of productively infected cells*, Math. Biosci. Eng., 1, 2004, 267-288.
- [50] M. A. Nowak, R. M. May, *Virus dynamics : Mathematical principles of immunology and virology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [51] A. S. Perelson, P. W. Nelson, *Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo*, SIAM Rev., 41, 1999, 3-44.
- [52] B. Perthame, *Transport Equations in Biology*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [53] H. Reinhard, *équation différentielles Fondement et applications*, 1982, BORDAS.
- [54] L. Rong, Z. Feng, A. S. Perelson, *Mathematical analysis of age-structured HIV-1 dynamics with combination antiretroviral therapy*, SIAM. J. Appl. Math., 67, 2007, 731-756.
- [55] Hal L. Smith, Horst R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*, Graduate Studies in Mathematics V. 118, AMS, 2011.

Bibliographie

- [56] H. R. Thieme, *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton 2003.
- [57] H. R. Thieme, *Uniform persistence and permanence for nonautonomous semiflows in population biology*, Math. Biosci. 166, 2000, 173-201.
- [58] H. R. Thieme, *Global stability of the endemic equilibrium in infinite dimension : Lyapunov functions and positive operators* J. Differential Equations. 250, 2011, 3772-3801.
- [59] H. R. Thieme, C. Castillo-Chavez, *How may infection-age-dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS ?* SIAM. J. Appl. Math. 53 1993, pp 1447-1479.
- [60] P. van den Driessche, X. Zou, *Modeling relapse in infectious diseases*. Math. Biosci. 207 :89–103, 2007.
- [61] C. Vargas-De-Leon, L. Esteva, Korobeinikov, A. *Age-dependency in host-vector models : the global analysis*, Appl. Math. Comput., 243, 2014, 969-981.
- [62] C. Vargas-De-Leon, *Global stability properties of age-dependent epidemic models with varying rates of recurrence*. Math. Meth. Appl. Sci. 39 :2057–2064, 2016.
- [63] J. Wang, R. Zhang, T. Kuniya, *Mathematical analysis for an age-structured HIV infection model with saturation infection rate*, Elect. J. Diff. Eq., 33, 2015, 1-19.
- [64] J. Wang, J. Pang, X. Liu, *Modelling diseases with relapse and nonlinear incidence of infection : a multi-group epidemic model*. J. Biol. Dyn. 8 :99–116, 2014.
- [65] I.M. Wangari, L. Stone, *Analysis of a heroin epidemic model with saturated treatment function*. J. Appl. Math. 2017.
- [66] E. White, C. Comiskey, *Heroin epidemics, treatment and ODE modelling*. Math. Biosci. 208 :312–324, 2007.
- [67] J. Yang, Y. Chen, T. Kuniya, *Threshold dynamics of an age-structured epidemic model with relapse and nonlinear incidence*. IMA J. Appl. Math. 82 :629–655, 2017.
- [68] Y. Yang, S. Ruan, D. Xiao, *Global stability of an age-structured virus dynamics model with Beddington-DeAngelis infection function*, Math. Biosci. Eng., 12, 4, 2015, 859-877.