

3.1 Introduction :

L'étude des vibrations des plaques, entraîne l'utilisation de la version $h-p$ de la méthode des éléments finis. Cette version est une combinaison de la version h (version classique) et la version p (hiérarchique). L'avantage de la version $h-p$ est de pouvoir varier h et p simultanément. Un autre avantage est son utilisation efficace dans les structures complexes.

Une fois les matrices de rigidité et masse sont déterminées à partir des équations des énergies, il reste le choix de l'élément et ses fonctions de forme à utiliser dans la formulation. Ces fonctions de forme sont construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés tel que les polynômes de Legendre, polynômes d'Hermite, ..., ou à partir des fonctions trigonométriques.

Pour la modélisation des plaques de nouvelles fonctions de forme sont exprimées à partir de polynôme de Legendre déplacés. Elles ont été développées pour la première fois par Houmat [10], pour l'analyse des vibrations libre des membranes par la version $h-p$ de la MEF.

3.2 Choix de l'élément :

Vu que les plaques prennent de nombreuses formes complexes nous avons choisi l'élément pentaèdre (figure (3.1)) qui s'adapte avec la plupart de ces formes.

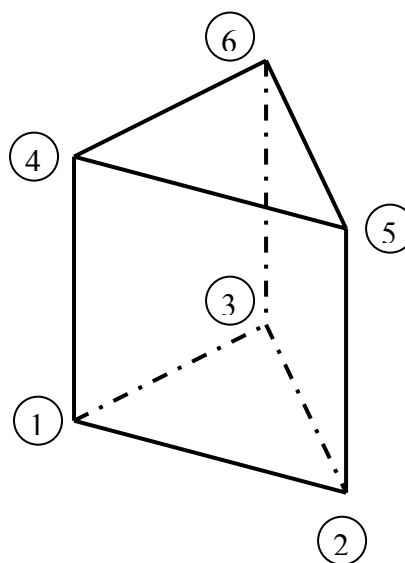


FIG 3.1 : Élément pentaèdre de référence

Les fonctions de forme du pentaèdre de référence (figure 3.1) sont obtenues en combinant les fonctions de forme de l'élément triangulaire et celles de l'élément unidimensionnel.

3.2.1 Changement de base :

Les coordonnées locales utilisées sont montrées dans la figure (3.2).

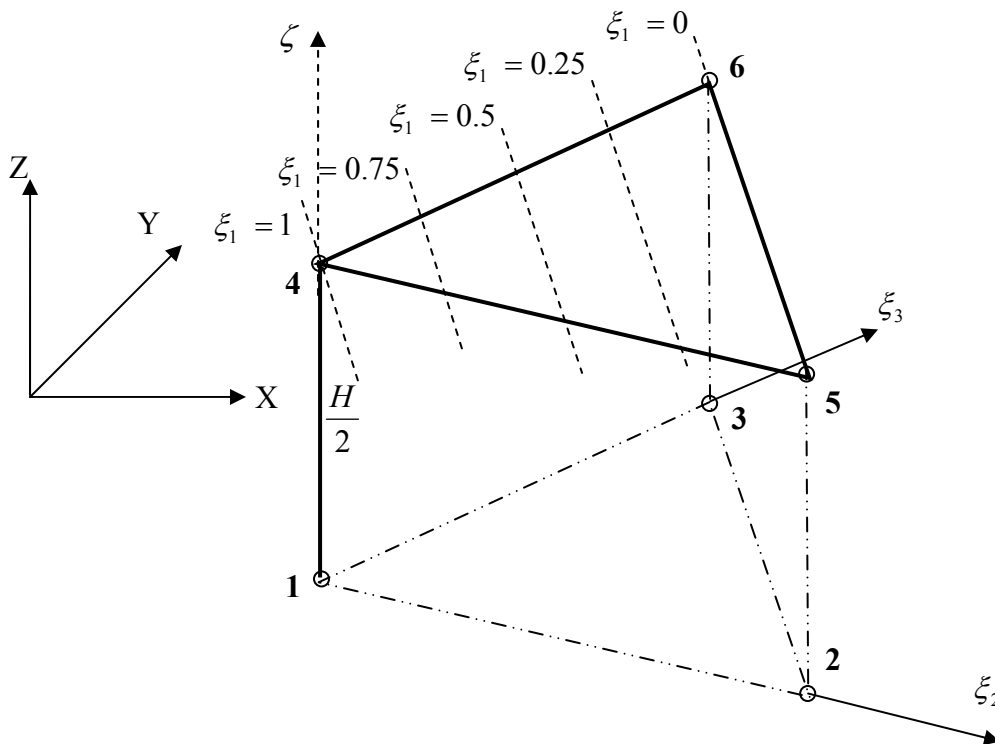


FIG 3.2 : Coordonnées locales du pentaèdre

Le système de coordonnées utilisé dans le pentaèdre est relié au système de coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$x = x_1 \cdot \xi_1 + x_2 \cdot \xi_2 + x_3 \cdot \xi_3 \quad , \quad y = y_1 \cdot \xi_1 + y_2 \cdot \xi_2 + y_3 \cdot \xi_3 \quad \text{et} \quad z = \frac{H}{2} \zeta \quad (3.1)$$

où

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

et A est l'aire du triangle (123) donné par :

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

nous posons :

$$\left. \begin{array}{lll} a_1 = x_3 - x_2 & ; & a_2 = x_1 - x_3 & ; & a_3 = x_2 - x_1 \\ b_1 = y_2 - y_3 & ; & b_2 = y_3 - y_1 & ; & b_3 = y_1 - y_2 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Les dérivées partielles par rapport à x et y deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (3.6)$$

Puisque

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (3.7)$$

alors

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 + \xi_3 \quad (3.8)$$

donc ξ_1 dépend seulement de ξ_2 et ξ_3 .

Le volume d'un élément différentiel infinitésimal est donné par :

$$dV = dx dy dz = dAdz \quad (3.9)$$

où

$$dA = 2Ad\xi_2 d\xi_3 \quad \text{et} \quad dz = \frac{H}{2} d\xi \quad (3.10)$$

L'équation (3.9) devient :

$$dV = AH.d\xi_2.d\xi_3.d\xi \quad (3.11)$$

3.3 Sélection des fonctions de forme :

Pour un modèle dynamique admissible, le champ des déplacements doit être continu. Par conséquent, les fonctions de forme doivent l'être aussi. Pour faciliter les traitements numériques, il faut choisir des fonctions relativement simples, par exemple des polynômes. De plus, pour réduire l'erreur numérique, il faut que le système d'équations soit bien conditionné, surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Toutes ces conditions impliquent le choix des fonctions de forme construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés d'orthogonalité telles que les polynômes de Legendre déplacés.

3.3.1 Polynôme de Legendre déplacés

Les fonctions de forme utilisées pour le pentaèdre sont construites à partir des polynômes de Legendre déplacés (shifted) utilisés pour la première fois par **Houmat [10]**.

La seule différence entre le polynôme de Legendre déplacé et le polynôme de Legendre, c'est que le dernier est défini dans $[-1, 1]$, et le premier est défini dans $[0, 1]$. L'intérêt particulier de l'utilisation du polynôme de Legendre déplacé pour un pentaèdre réside dans le fait que ce dernier est défini dans le même intervalle que les coordonnées d'aire ou barycentriques.

La forme récurrente des polynômes de Legendre déplacés est la suivante :

$$P_0^*(\xi) = 1, \quad P_1^*(\xi) = 2\xi - 1$$

et

$$P_{i+1}^*(\xi) = \frac{1}{(i+1)} \left[(-2i-1 + (4i+2)\xi) P_i^*(\xi) - i P_{i-1}^*(\xi) \right], \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

3.3.2 Espaces polynomiaux

Pour le domaine carré $\Pi = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$, il existe trois espaces polynomiaux.

a) Espace ou famille "Serendipity" S^p (figure (3.3))

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec et $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i+j=0, 1, \dots, p$. Avec en plus, si $p = 1$, le monôme $\xi \eta$ et, si $p \geq 2$ les monômes $\xi^p \eta$ et $\xi \eta^p$. Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré sur les côtés de l'élément de référence. Cet espace est généralement utilisé dans la méthode des éléments finis hiérarchiques.

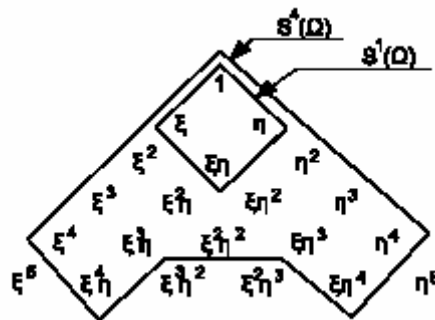


FIG 3.3 : Famille " Serendipity "

b) Espace ou famille de "Lagrange" $S^{p,q}$ (figure (3.4))

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec et $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i, j = 0, 1, \dots, q$

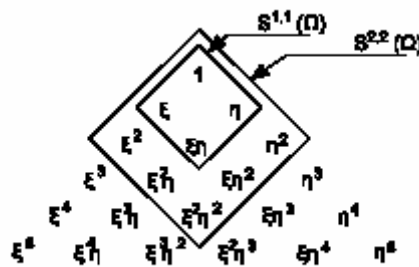


FIG 3.4 : Famille " Lagrange "

c) Espace ou famille mixte : $\bar{S}^{p,q}$

Il est composé de l'ensemble des monômes communs aux deux espaces polynomiaux précédents formellement $\bar{S}^{p,q} = S^p \cap S^{p,q}$.

Pour la formulation du pentaèdre les fonctions de forme sont choisies dans l'espace de Serendipity.

3.3.3 fonctions de forme hiérarchiques :

Les fonctions de forme du pentaèdre sont obtenues en combinant les fonctions de forme de l'élément triangulaire et celles de l'élément unidimensionnel.

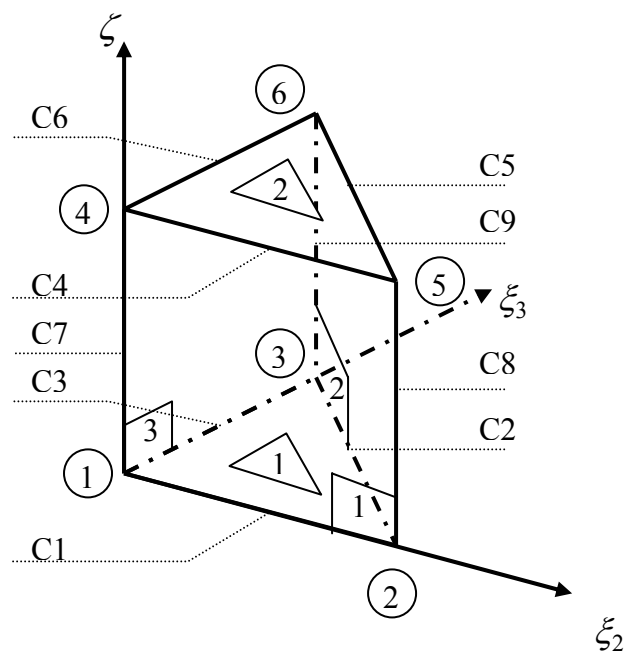


FIG 3.5 : Représentation des nœuds, cotés, faces triangulaires et rectangulaires du pentaèdre,

* *Fonctions de forme nodales :*

$$\begin{aligned} g_i &= (1 - \zeta) * \xi_i & i = 1, \dots, 3 \\ g_{i+3} &= \zeta * \xi_i & i = 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

où ξ_i sont les coordonnées barycentriques de la face triangulaire de base.

* *Fonctions de forme de côté :*

$$\begin{aligned} g_{i-1}^{(m,n)} &= (1-\zeta) * \xi_m * \xi_n * P_i^*(\xi_k) \\ g_{i-1}^{(m+3,n+3)} &= \zeta * \xi_m * \xi_n * P_i^*(\xi_k) \\ g_{i-1}^{(m,m+3)} &= \xi_m * N_i(\zeta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Où P_i^* sont les polynômes de Legendre déplacés et $N_i(\zeta)$ sont les fonctions de forme unidimensionnelles $N_1 = (1-\zeta)$, $N_2 = \zeta$ et ; $i = 2, 3, \dots, p$; $m, n = 1, 2, 3$; $k = \max [m, n]$.

• *Fonctions de forme de face :*

Elles apparaissent sur les faces triangulaires lorsque le degré p de l'élément est supérieur ou égal à 3 et sur les faces quadrangulaires lorsque p est supérieur ou égal à 4. Leur nombre est donc égal à $(p-1)(p-2)+3(p-2)(p-3)/2$. L'expression générale pour une face triangulaire (par exemple la face 1) est la suivante :

$$g_m^{(1,2,3)} = (1-\zeta) * \xi_1 * \xi_2 * \xi_3 * P_i^*(\xi_2) * P_j^*(\xi_3) \quad (3.15)$$

où $i, j = 0, 1, \dots, p-3$; $i + j = 0, 1, \dots, p-3$; P_i^* et P_j^* étant des polynômes de Legendre déplacés.

L'expression générale pour une face quadrangulaire (par exemple la face 1) est la suivante:

$$g_m^{(1)} = \xi_1 * \xi_2 * P_i^*(\xi_2) * N_j(\zeta) \quad (3.16)$$

où $i, j = 0, 1, \dots, p-4$; $i+j = 0, 1, \dots, p-4$; $N_j(\zeta)$ sont les fonctions de forme unidimensionnelles. Les modes relatifs aux autres faces s'obtiennent d'une manière similaire.

* *Fonctions de forme internes :*

$$g_m = \xi_1 * \xi_2 * \xi_3 * P_i^*(\xi_2) * P_j^*(\xi_3) * N_k(\zeta) \quad (3.17)$$

où $i, j, k = 0, 1, \dots, p-5$; $i+j+k = 0, 1, \dots, p-5$; $p \geq 5$; $m = 1, \dots, \frac{1}{6}(p-2)(p-3)(p-4)$

3.4 Modélisation de la plaque :

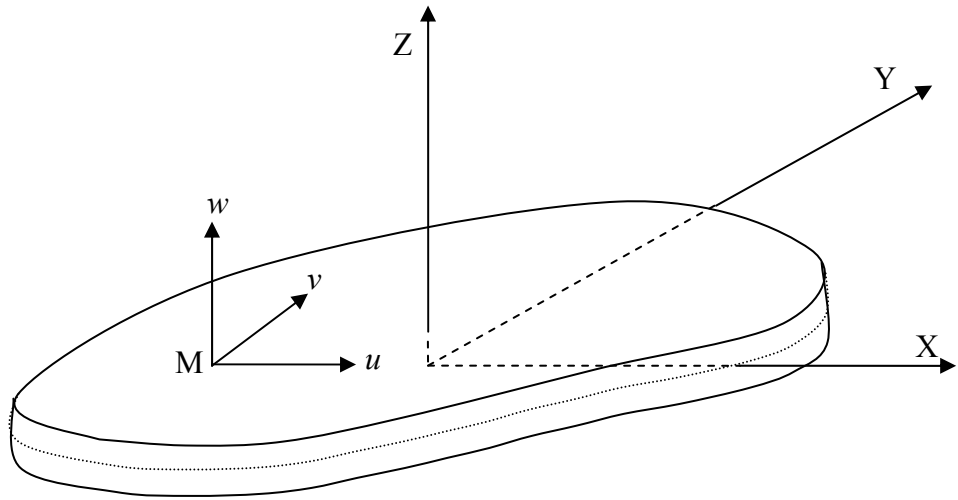


FIG 3.6 : Représentation du champ de déplacement d'un point quelconque de la plaque

Le champ de déplacement dans la plaque (figure (3.6)) peut être approximativement représenté par une série finie de modes hiérarchiques précédemment assumés dans les directions $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta$:

$$\begin{cases} u(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta) \\ v(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta) \\ w(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m X_i g_i \\ \sum_{i=1}^m Y_i g_i \\ \sum_{i=1}^m Z_i g_i \end{cases} \quad (3.18)$$

où $m = 6 + 9(p-1) + (p-1)(p-2) + 3(p-2)(p-3)/2 + (p-2)(p-3)(p-4)/6$, p est le degré du polynôme d'interpolation, et X_i, Y_i, Z_i sont les coordonnées généralisées du problème.

L'équation (3.18) peut être écrite plus succinctement dans la notation matricielle tel que :

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (3.19)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des déplacements donné par la relation (1.39)

et \mathbf{N} est la matrice des fonctions de forme donné par :

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \dots, \mathbf{N}_i, \dots, \mathbf{N}_{m^2} \right]^T \quad (3.20)$$

\mathbf{N}_i sont des sous matrices carrées (3x3) de la matrice \mathbf{N} .

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Où \mathbf{g}_i sont les fonctions de forme du pentaèdre décrites dans le paragraphe 3.3.3.

3.5 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire :

Le remplacement de l'équation (3.19) dans les relations déformations-déplacements (1.37) donne :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad (3.22)$$

L'injection de (3.22) dans l'équation de l'énergie de déformation (1.39) donne :

$$E_d = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_V (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}) dV \mathbf{q} \quad (3.23)$$

Et la matrice de rigidité élémentaire sera :

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} dV \quad (3.24)$$

nous avons montré précédemment que :

$$dV = AH \cdot d\xi_2 \cdot d\xi_3 \cdot d\xi \quad (3.25)$$

Donc l'équation de la matrice de rigidité élémentaire finale sera :

$$\mathbf{K}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \int_0^{\xi_2} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot A \cdot h \cdot d\xi_2 d\xi_3 d\xi \quad (3.26)$$

3.6 Détermination de la matrice masse élémentaire :

L'expression de l'énergie cinétique (1.45), peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_V \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{U} \cdot dV \quad (3.27)$$

où $\dot{\mathbf{U}}$ est le vecteur des vitesses généralisées :

$$\dot{\mathbf{U}} = \{\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}\}^T \quad (3.28)$$

$\dot{\mathbf{U}}$ peut être défini en fonction du vecteur des vitesses généralisées par :

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \rho \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot dV \dot{\mathbf{q}} \quad (3.30)$$

La matrice masse élémentaire sera donc :

$$\mathbf{M}^e = \rho \cdot \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot dV \quad (3.31)$$

Le remplacement de (3.25) dans (3.31) donne la matrice masse élémentaire :

$$\mathbf{M}^e = \rho \cdot A \cdot H \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \int_0^{\xi_2} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot d\xi_2 d\xi_3 d\xi \quad (3.32)$$

3.7 Formes des matrices élémentaires :

Dans ce travail nous avons fait appel à MATLAB (logiciel de calcul mathématique), pour calculer symboliquement les fonctions de forme et leurs dérivées, les différentes intégrales, et les coefficients des matrices masse et de rigidité élémentaires.

* *Forme de la matrice de rigidité élémentaire :*

La forme obtenue de la matrice de rigidité élémentaire dans le paragraphe précédent est :

$$\mathbf{K}^e = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{N} A.H. d\xi_2 d\xi_3 d\xi \quad (3.33)$$

où \mathbf{L} est un opérateur différentiel et la matrice \mathbf{C} est donnée par (3.34) :

$$\text{Nous posons } D_1 = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \text{ et } D_2 = \frac{2\nu}{(1-2\nu)}$$

La matrice d'élasticité \mathbf{C} devient

$$\mathbf{C} = G \cdot \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

où G est le module de cisaillement.

Puisque La taille de la matrice \mathbf{N} (matrice des fonctions de forme) dépend du degré du polynôme p , nous avons utilisé les composantes N_i de cette matrice.

En injectant les matrices \mathbf{C} , \mathbf{L} , et les composantes N_i dans la matrice de rigidité élémentaires nous trouvons la sous matrice $\mathbf{K}_{i,j}$:

$$\mathbf{K}_{i,j} = G \cdot \begin{bmatrix} K_{3i-2,3j-2} & K_{3i-2,3j-1} & K_{3i-2,3j} \\ K_{3i-1,3j-2} & K_{3i-1,3j-1} & K_{3i-1,3j} \\ K_{3i,3j-2} & K_{3i,3j-1} & K_{3i,3j} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Après développement nous trouvons:

$$\begin{aligned}
 K_{3i-2,3j-2} &= \frac{D_1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_{\alpha} b_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} a_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{4.A}{H^2} IZZ_{(i,j)} \\
 K_{3i-2,3j-1} &= \frac{D_2}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_{\alpha} a_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} b_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} \\
 K_{3i-2,3j} &= \frac{D_2}{H} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} .IXZ_{(i,j)}^{\alpha} + \frac{1}{H} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} .IZX_{(i,j)}^{\alpha} \\
 K_{3i-1,3j-2} &= \frac{D_2}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} b_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_{\alpha} a_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} \\
 K_{3i-1,3j-1} &= \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_{\alpha} b_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{D_1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} a_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{4.A}{H^2} IZZ_{(i,j)} \\
 K_{3i-1,3j} &= \frac{D_2}{H} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} .IXZ_{(i,j)}^{\alpha} + \frac{1}{H} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} .IZX_{(i,j)}^{\alpha} \\
 K_{3i,3j-2} &= \frac{D_2}{H} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} .IZX_{(i,j)}^{\alpha} + \frac{1}{H} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} .IXZ_{(i,j)}^{\alpha} \\
 K_{3i,3j-1} &= \frac{D_2}{H} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} .IZX_{(i,j)}^{\alpha} + \frac{1}{H} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} .IXZ_{(i,j)}^{\alpha} \\
 K_{3i,3j} &= \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_{\alpha} b_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{4.A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha} a_{\beta} IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} + \frac{4.D_1 .A}{H^2} IZZ_{(i,j)}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

et $IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)}$, $IZZ_{(i,j)}$, $IXZ_{(i,j)}^{(\alpha)}$, $IZX_{(i,j)}^{(\alpha)}$ sont les intégrales données par :

$$\begin{aligned}
 IXX_{(i,j)}^{(\alpha,\beta)} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} d\xi_2 d\xi_3 d\xi \\
 IZZ_{(i,j)} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} d\xi_2 d\xi_3 d\xi \\
 IXZ_{(i,j)}^{(\alpha)} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} d\xi_2 d\xi_3 d\xi \\
 IZX_{(i,j)}^{(\alpha)} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\alpha}} d\xi_2 d\xi_3 d\xi
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

La forme de la matrice de rigidité élémentaire est :

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{K}_{1,m} \\ & \cdot & \mathbf{K}_{i,j} & & \dots \\ & & \cdot & & \dots \\ & sym & & \cdot & \dots \\ & & & & \mathbf{K}_{m,m} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La matrice \mathbf{K}^e est de dimension $(3 \times m) \cdot (3 \times m)$.

où $m = 6 + 9(p-1) + (p-1)(p-2) + 3(p-2)(p-3)/2 + (p-2)(p-3)(p-4)/6$

* *Forme de la matrice masse élémentaire :*

La sous matrice $\mathbf{M}_{i,j}$ en fonction des composantes de la matrice des fonctions de forme est :

$$\mathbf{M}_{i,j} = \rho \cdot A \cdot H \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \int_0^{1-\xi_2} N_i \cdot N_j \cdot d\xi_2 \cdot d\xi_3 \cdot d\xi \quad (3.39)$$

En posant :

$$\text{Im}_{(i,j)} = \rho \cdot A \cdot H \int_0^1 \int_0^{1-\xi_3} \int_0^{1-\xi_2} N_i \cdot N_j \cdot d\xi_2 \cdot d\xi_3 \cdot d\xi \quad (3.40)$$

alors $\mathbf{M}_{i,j}$ devient :

$$\mathbf{M}_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{Im}_{(i,j)} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Im}_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Im}_{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La forme de la matrice masse élémentaire est:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{M}_{1,m} \\ & \cdot & \mathbf{M}_{i,j} & & \dots \\ & & \cdot & & \dots \\ & \text{sym} & & \cdot & \dots \\ & & & & \mathbf{M}_{m,m} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

La matrice \mathbf{M}^e est de dimension $(3 \times m) \cdot (3 \times m)$.