

## 2.1 Introduction :

Les vibrations des plaques sont étudiées par deux théories essentielles approchées, la première est celle des plaques minces (dite théorie de plaques de Kirchhoff), la seconde est celle des plaques épaisses (dite théorie de plaques de Mindlin).

Donc une plaque peut être soit une plaque mince ou une plaque épaisse. Le domaine de validité de chacune d'entre elles dépend de ses caractéristiques géométriques [11].

$$\rightarrow \text{Théorie de Kirchhoff (plaque mince)} : \frac{H}{L} < \frac{1}{20}$$

$$\rightarrow \text{Théorie de Mindlin (plaque épaisse)} : \frac{1}{20} \leq \frac{H}{L} \leq \frac{1}{4}$$

Où  $L$  est une dimension caractéristique de la plaque dans le plan ( $xy$ ).

## 2.2 Théorie des contraintes planes :

Ce cas s'applique aux structures planes minces qui ne sont sollicitées que par des charges agissant dans leur plan. Conventionnellement, le plan de la structure est  $xOy$ . L'épaisseur de la structure, très petite par rapport à ses deux autres dimensions, est symétriquement répartie de part et d'autre du plan  $xOy$  qui s'appelle *plan moyen* (figure 2.1).

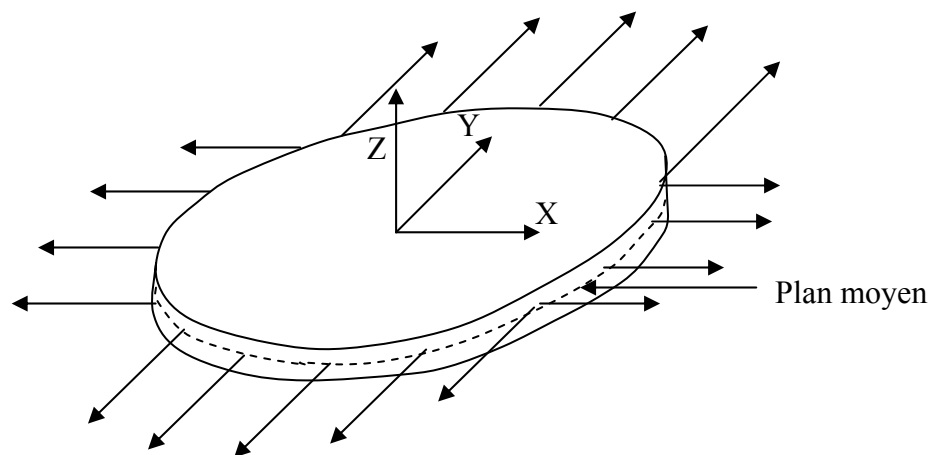


FIG 2.1 : Etat plan de contrainte

Ce type de comportement mécanique est, par exemple, applicable dans le cas d'un disque mince sollicité dans son plan ou d'une éprouvette de traction pour peu qu'elle soit suffisamment mince. Les hypothèses faites sur le chargement impliquent la nullité en tout point de trois des six contraintes :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.1)$$

Les contraintes de cisaillement transversal et la contrainte normale suivant z sont nulles. En reportant ces contraintes dans les relations constitutives pour un matériau isotrope, nous obtenons :

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0 \quad (2.2)$$

Sous l'action des charges appliquées dans son plan, la structure change d'épaisseur, la déformation transversale se calculant a posteriori à partir des contraintes existant dans le plan de la structure : le problème est bidimensionnel. Les déplacements  $u$  et  $v$  d'un point quelconque du plan de coordonnées  $x$  et  $y$ , ne dépendent que de  $x$  et de  $y$ .

Les relations déformations-déplacements sont données par [25]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

La loi de Hooke s'écrit dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Nous pouvons aussi à partir de la loi constitutive 3D, imposer que la contrainte  $\sigma_{zz}$  soit nulle, en déduire la déformation  $\varepsilon_{zz}$  que nous injectons dans la loi constitutive et nous trouvons la relation ci-dessus.

### 2.3 Théorie des plaques minces :

Il est connu que pour la théorie des plaques minces, les hypothèses suivantes sont posées [11] :

- les forces extérieures (forces données et réactions des appuis) peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen.
- La contrainte normale  $\sigma_z$  sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.
- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque.
- Une normale au plan moyen se transforme après une déformation en une normale au plan moyen déformé.

### 2.3.1 Théorie de Kirkchoff :

La théorie de Kirkchoff se base sur les deux points suivants :

- Etat de contrainte approximativement plan.
- Les fibres normales à la surface indéformée de référence restent droites, normales et inextensibles( pas de changement de longueur) durant la déformation.

### 2.3.2 Equations des efforts et moments :

Les équations exprimant les relations entre contraintes et sollicitations (forces et moments extérieurs) sont :

$$N_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_{xx} dz \quad N_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_{yy} dz \quad (2.5)$$

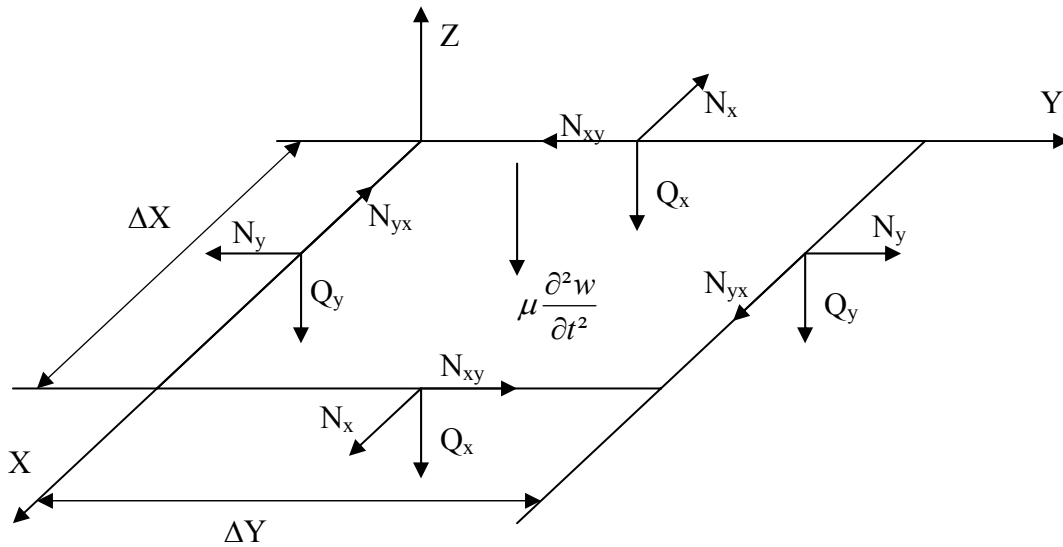
$$N_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz \quad N_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{yx} dz \quad (2.6)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.7)$$

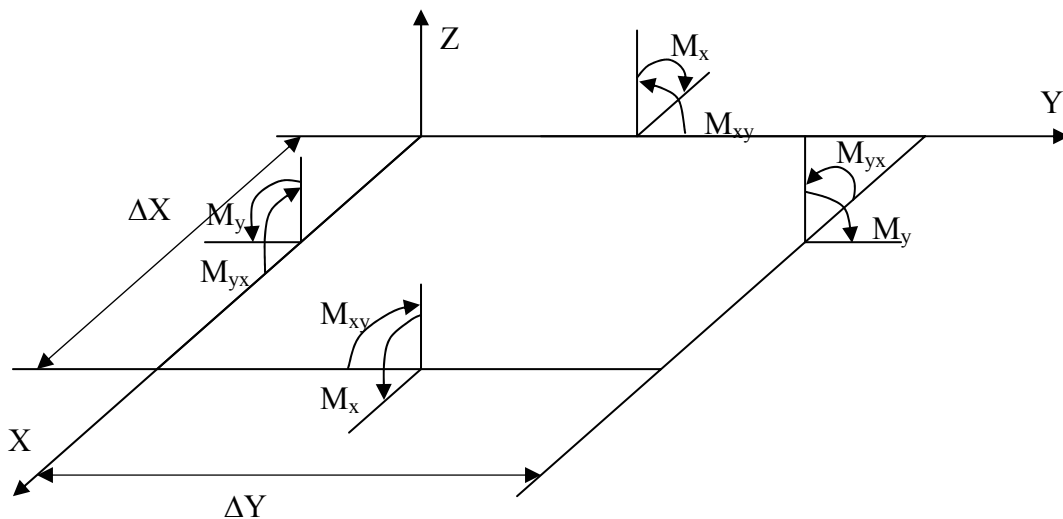
$$M_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_{xx} .z dz \quad M_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_{yy} .z dz \quad (2.8)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{xy} .z dz \quad M_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \tau_{yx} .z dz \quad (2.9)$$

Ces forces et ces moments sont appliqués sur un élément infinitésimal de plaque et représentés, respectivement, dans les figures (Fig 2.2 et Fig 2.3).



**FIG 2.2** : Efforts appliqués à un élément infinitésimal de plaque.



**FIG 2.3** : Moments appliqués à un élément infinitésimal de plaque.

**2.3.3 Champ de déplacement :**

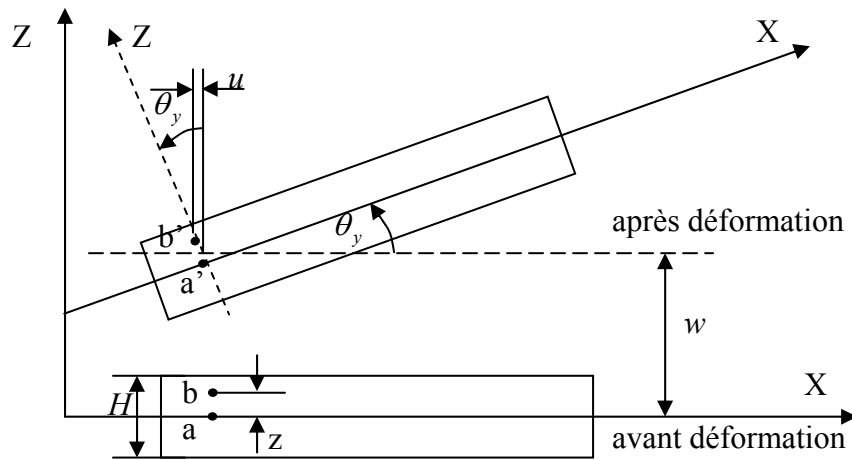
Les composantes du champ de déplacements pour le cas de la théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \tag{2.10}$$

$$v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \tag{2.11}$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \tag{2.12}$$

Où  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère Cartésien ;  $t$  est le temps ;  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  sont les rotations par rapport aux axes  $x$  et  $y$ , respectivement. Le déplacement  $u$  d'un point quelconque dans un élément infinitésimal est montré dans la figure (2.4).



**FIG 2.4 :** Déplacement  $u$  d'un point dans un élément infinitésimal

**2.3.4 Relations déformations-déplacements :**

Les relations déformations-déplacements sont données par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \tag{2.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

En remplaçant, respectivement, les rotations  $\theta_x, \theta_y$  dans les équations (2.13), (2.14), (2.15) nous obtenons :

$$\varepsilon_{xx} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{yy} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.18)$$

### 2.3.5 Relations contraintes-déformations:

Cas de contraintes planes :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}) \quad (2.19)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.21)$$

En remplaçant  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  dans (2.18), (2.19) et (2.20) nous obtenons :

$$\sigma_{xx} = \frac{E \cdot z}{(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.22)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E \cdot z}{(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E \cdot z}{(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

## 2.4 Théorie des plaques épaisses :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirkchoff, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

### 2.4.1 Théorie de Mindlin :

La théorie de Mindlin se base sur les quatre hypothèses suivantes :

- La déformation transversale  $\varepsilon_{zz}$  est nulle (pas de variation d'épaisseur).
- La contrainte normale  $\sigma_{zz}$  est négligeable devant les autres composantes.
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclu.

### 2.4.2 Champs de déplacements :

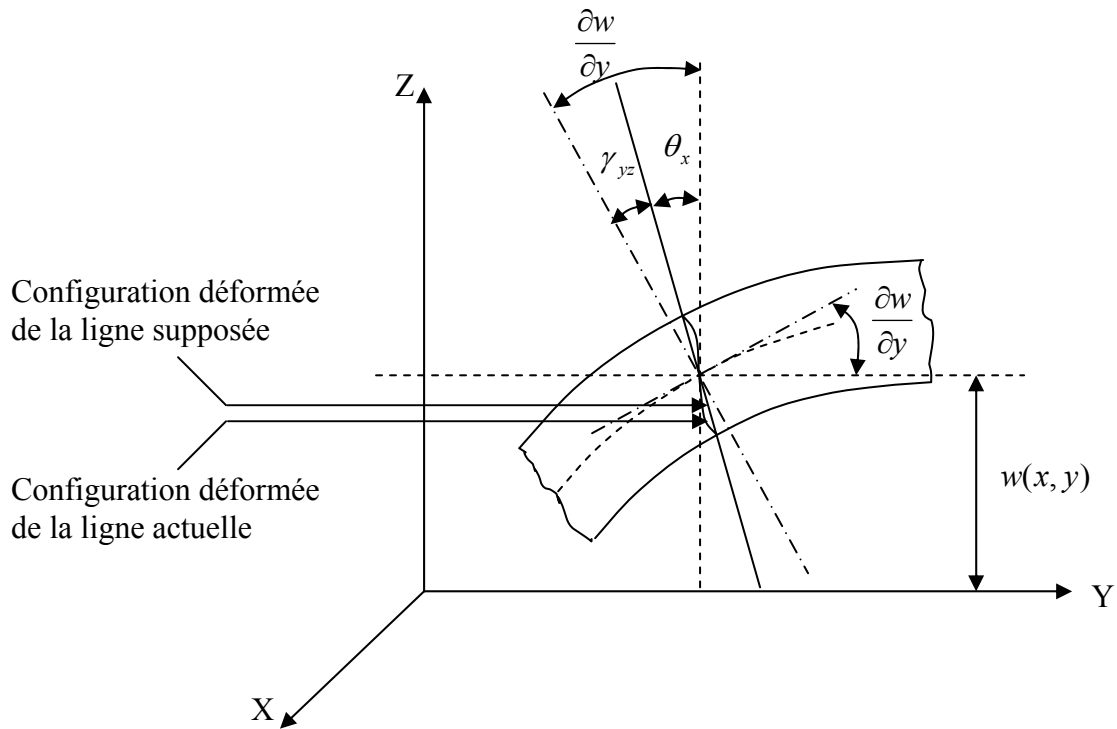
Dans la théorie des plaques de Mindlin, les composantes du champ de déplacements (figure2.5) sont données par :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \quad (2.25)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \quad (2.26)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.27)$$

Où  $u$ ,  $v$  sont les déplacements membranaires dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement ;  $w$  est le déplacement transversal ;  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  sont les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.



**FIG2.5** : Définition de l'état supposé de la déformée dans la direction Y

**2.4.3 Relations déformation-déplacements :**

Les relations déformations-déplacements [11] s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{2.28a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \tag{2.28b}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.28c}$$

$$\gamma_{xy} = z \cdot \left( -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \tag{2.28d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \tag{2.28e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \tag{2.28f}$$



Les équations (2.28) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = -z \cdot \{\chi\} \quad (2.29)$$

et

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

où

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

#### 2.4.4 Relations contraintes-déformations :

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}) = \frac{E \cdot z}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu \cdot \chi_y) \quad (2.32a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) = \frac{E \cdot z}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu \cdot \chi_x) \quad (2.32b)$$

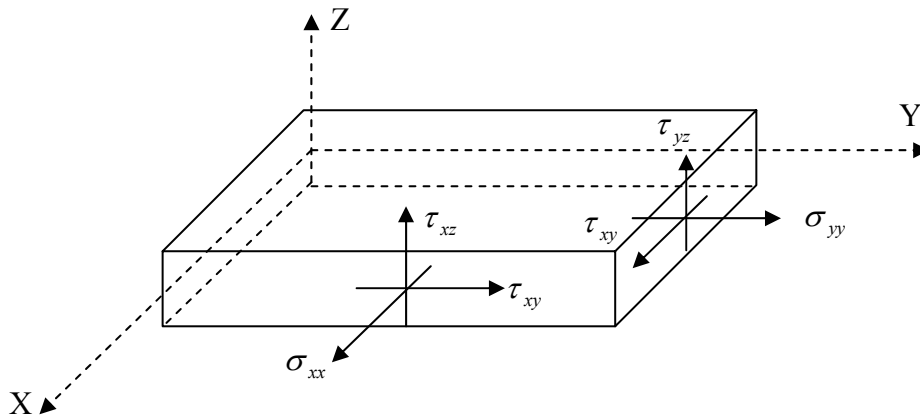
$$\sigma_{zz} = 0 \quad (2.32c)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot z \cdot \chi_{xy} \quad (2.32d)$$

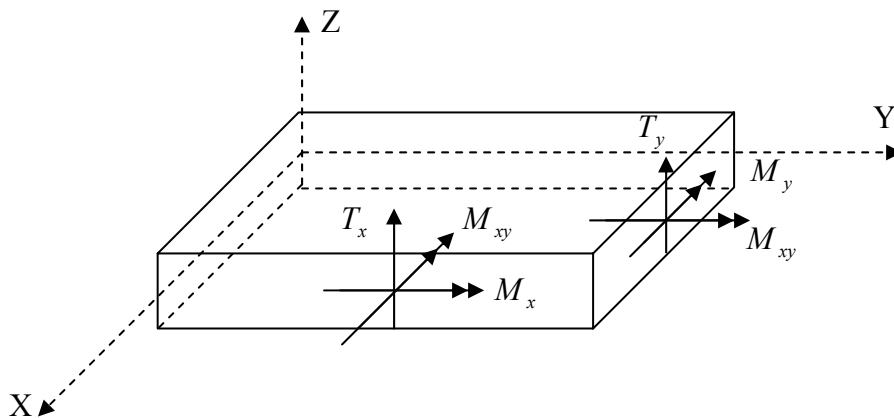
$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (2.32e)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad (2.32f)$$

Les contraintes, moments de flexion et de torsion et efforts de cisaillement sont représentés dans les figures (2.6) et (2.7).



**FIG2.6** : Contraintes dans une plaque



**FIG2.7** : Moments de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque

Les relations entre les efforts et les courbures sont obtenues en intégrant les équations (2.31) :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x \cdot z dz \\ \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_y \cdot z dz \\ \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy} \cdot z dz \\ \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xz} dz \\ \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{yz} dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(\chi_x + \nu \cdot \chi_y) \\ D(\chi_y + \nu \cdot \chi_x) \\ D \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy} \\ k \cdot G \cdot H \cdot \chi_{xz} \\ k \cdot G \cdot H \cdot \chi_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

où  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont les moments de flexion par unité de longueur,  $T_x$  et  $T_y$  sont les efforts dus au cisaillement transversal par unité de longueur,  $k$  facteur de correction du cisaillement transversal,  $H$  épaisseur de la plaque,  $D$  rigidité de flexion de la plaque donnée par :

$$D = \frac{E \cdot H^3}{12(1 - \nu^2)}$$