



République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Abou Bakr Belkaid-Tlemcen
Faculté De Technologie
Département De Génie Electrique Et Electronique

Thèse de Doctorat en Génie Industriel et Productique

Intitulée :

Investigations sur l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels

Présentée par :

HAMZAOUI Mohammed Adel

Président :

HADJ SLIMANE Djamila Professeur Université de Tlemcen-Algérie

Examineurs :

HACHEMI Khalid Professeur Université d'Oran-Algérie

KOULOUGHLI Sihem M.C.A. Université de Tlemcen-Algérie

YALAOUI Farouk Professeur Université de Technologie de Troyes-France

Thèse réalisée sous la direction de :

SARI Zaki, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences Appliquées de Tlemcen (ESSAT)

Table des matières

Table des matières	2
Remerciements	5
Liste des figures	7
Liste des tableaux	9
Introduction générale	10
Chapitre 1 : Introduction aux systèmes automatisés de stockage/déstockage	12
1.1 Introduction :	13
1.2 Définition d'un système de stockage automatisé AS/RS, sa fonction, ses avantages et inconvénients :	14
1.2.1 Définition :	14
1.2.2 Fonction :	14
1.2.3 Composants d'un AS/RS :	14
1.2.4 Terminologie :	15
1.2.5 Avantages d'un AS/RS :	18
1.2.6 Inconvénients :	19
1.3 Différents types d'AS/RS :	19
1.3.1 Les AS/RS à charge unitaire :	19
1.3.2 Les AS/RS multi allées :	20
1.3.3 Les AS/RS à racks glissants :	20
1.3.4 Les AS/RS à mini charge :	21
1.3.5 Les AS/RS à carrousel :	21
1.3.6 Les AS/RS à personne embarquée :	22
1.3.7 Les AS/RS à étagères profondes :	22
1.3.8 Les AS/RS à convoyeurs gravitationnels :	23
1.3.9 Les AVS/RS :	23
1.3.10 L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à une seule machine :	24
1.3.11 L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels ou le bi-directional flow-rack AS/RS :	25
1.4 Etat de l'art :	26
1.4.1 Introduction :	26
1.4.2 Design physique et configuration initiale :	28
1.4.3 Contrôle :	32
1.5 Conclusion :	34

Chapitre 2 : Développement de modèles mathématiques du temps de cycle	36
2.1 Introduction :	37
2.2 Développement des modèles mathématiques :	37
2.2.1 Simple cycle de stockage/déstockage :	37
□ Modélisation discrète du temps de cycle :	37
□ Modélisation continue du temps de cycle :	42
2.2.2 Etude numérique :	45
2.2.3 Doubles cycles :	51
□ Modélisation discrète du temps de cycle moyen :	53
□ Modélisation continue du temps de cycle moyen :	57
2.2.4 Etude numérique :	59
2.3 Conclusion :	64
Chapitre 3 : Développement de modèles mathématiques du temps de cycle en tenant compte de l'accélération/décélération des machines	65
3.1 Introduction :	66
3.2 Développement des modèles mathématiques :	66
3.2.1 Simples cycles :	67
3.2.2 Double cycle :	82
3.3 Evaluation de la précision des modèles :	93
3.4 Conclusion :	96
Chapitre 4 : Optimisation du design de l'AS/RS pour un temps de cycle minimal	97
4.1 Introduction :	98
4.2 Description du problème et objectif :	98
4.3 L'optimisation du design des AS/RS dans la littérature :	98
4.4 Optimisation des dimensions de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bi-directionnels (temps de cycle continu) :	100
4.4.1 Formalisation et résolution du problème :	100
4.4.1.1 Notation :	100
4.4.1.2 Résolution du problème d'optimisation :	100
4.4.1.3 Résultats et interprétations :	104
4.4.2 Limites de la méthode :	108
4.5 Nouvelle méthode d'optimisation des dimensions de l'AS/RS (temps de cycle discret) :	108
4.5.1 Temps de cycles discrets des trois systèmes étudiés :	109
4.5.2 Etude du problème d'optimisation :	110
4.5.2.1 Formulation des problèmes d'optimisation :	110
4.5.2.2 Complexité des problèmes considérés :	111

4.5.2.3	Propriétés de dominances :.....	112
4.5.2.4	Algorithme de résolution :.....	117
4.5.2.5	Etude numérique :	120
4.6	Conclusion :.....	121
Conclusion générale	122
Références	124
Annexes	132
Résumé	141
Abstract	141
ملخص	142

Remerciements

Ainsi s'achèvent trois autres années de ma vie, presque comme elles avaient commencé, entouré par les gens que j'aime et qui me sont chers. Ici, dans ce laboratoire de productique, j'ai découvert une deuxième famille, dont les membres m'ont chaleureusement accueilli depuis le premier jour, et su me mettre à l'aise dès le début, dont les conseils avisés et éclairés m'ont toujours permis d'avancer.

Je remercie tout particulièrement et en tout premier lieu, mon cher professeur et directeur de thèse, le Pr Sari Zaki, sans qui je ne serai jamais arrivé jusqu'ici. Ce professeur de renom, qui a dédié une grande partie de sa vie à la réussite de la filière dans laquelle j'ai été formé, et grâce à qui des centaines d'étudiants ont pu trouver leurs voies dans le monde du travail ou de la recherche. Le Pr Sari m'a toujours sagement conseillé, orienté avec tant de prévoyance, et écouté avec attention et bienveillance depuis plus de huit ans, et cela à plusieurs étapes importantes de ma vie. Il a toujours répondu à mes sollicitations quelle que soit sa charge de travail, ce qui n'est guère étonnant pour un homme qui a toujours mis l'intérêt de ses étudiants par-dessus toute considération. Je le remercie chaleureusement et affectueusement, et j'espère que ce travail sera à la hauteur de ses attentes.

Je remercie aussi le Professeur Yalaoui Farouk ainsi que le Docteur Arbaoui Taha qui m'ont très chaleureusement accueilli au sein du Laboratoire d'Optimisation des Systèmes Industriels pendant mon séjour à Troyes. Le professeur Yalaoui qui trouvait à chaque fois le temps et la patience de m'écouter, m'orienter, me conseiller et me guider, et auprès de qui j'ai énormément appris, et aussi surtout compris ce que c'était que l'excellence, les exigences de haut niveau, et ce qu'était encore une fois que de côtoyer un professeur de renommée mondiale. Et que dire du docteur Arbaoui, qui m'a mis à l'aise dès le premier jour et qui m'a si amicalement et chaleureusement accueilli. Et avec qui les réunions hebdomadaires m'ont permis de me familiariser avec bon nombre de concepts qui m'étaient inconnus, et dont la gentillesse et l'amabilité n'ont d'égales que son excellence et sa maîtrise. Il a tout fait pour que dans un pays étranger je puisse me sentir comme chez moi, et la vingtaine d'attentions, d'invitations, et de petits plats qu'il m'a offerts n'en sont que les témoins.

Par ailleurs, pendant ces trois années, au-delà de l'acquis scientifique que j'ai engrangé, l'expérience humaine et l'échange profond que j'ai eu avec mes amis, camarades et collègues est pour moi inestimable. La filière productique, étant une filière nationale, j'ai eu la chance de connaître des personnes venant des quatre coins du pays, ce qui m'a permis de nouer des liens, de casser des barrières et de m'ouvrir aux gens de différents horizons. Je tiens par ailleurs à remercier tous mes amis de toutes parts, qui m'ont permis de faire partie de leurs vies, et dont la présence à mes côtés dans la mienne n'a fait que me rendre plus fort, qui m'ont soutenu et épaulé, et qui ont enjolivé chacun des plus beaux moments que j'ai vécu, vaincu l'insipidité de tant d'autres et tranché avec la morosité de ceux qui restent, je les remercie de tout mon cœur, eux qui ont fait que le chemin soit plus agréable que la destination.

Cela dit, les personnes à qui je dois absolument tout, depuis toujours et à tout jamais, ce sont mes adorables parents. Ces deux anges aptères, qui m'ont protégé, aidé, défendu, conseillé et réconforté, qui ont tant sacrifié pour me voir réussir. Mes parents m'ont toujours soutenu et poussé à donner le meilleur de moi-même, ont toujours mis tous les moyens à ma disposition, quoi que cela puisse leur coûter. Depuis mon jeune âge, la douceur de leurs caresses et la chaleur de leurs bras, ont forgé l'homme que

je suis devenu, je leur suis éternellement redevable, les nuits qu'ils ont veillées à mon chevet et les milliers de goûtes qu'ils ont suées sont tout simplement inestimables, seul Dieu tout puissant saura comment les combler, et je ne pourrai jamais leur rendre tout ce qu'ils m'ont donné. Je n'oublierai pas mes frères et ma petite sœur, avec qui dans l'étroitesse nous avons vécu, et dont la chaleur familiale nous a soudés, nous avons partagé tant de moments de fraternité qui resteront figés dans le temps à tout jamais, qu'ils soient de joie, de tristesse, de sérieux ou de profonde émotion, je n'aurais jamais pu rêver de meilleur foyer, et vivre à leurs côtés a été pour moi merveilleux. Je remercie aussi toute ma grande famille, qui l'est par le nombre mais aussi par le cœur, toutes mes tantes et oncles, tous mes cousins et cousines, ainsi que mes deux grands-mères adorées et adorables, source de sagesse et dont l'infinie douceur a toujours été distributrice de sourires.

Je voudrais aussi rendre hommage à deux personnes qui ne sont malheureusement plus là pour partager ce moment avec moi, il s'agit de mes deux grands-pères. Je n'ai pas eu la chance de connaître mon grand-père paternel Ahmed Hamzaoui, mais dont les centaines de descriptions élogieuses qui me sont parvenues font que j'ai l'impression de l'avoir toujours connu. Cet homme d'honneur, qui fut juge à Tlemcen, et qui a fait régner la justice d'une main de fer, aussi bien que les gens qui le connaissent ont créé un adjectif à son nom, tellement il inspirait l'irréprochabilité et la droiture. Puis que dire de mon grand-père maternel, qui fut et est toujours mon modèle. Mohammed Bemrah mathématicien de renom au cursus scolaire incroyablement brillant, qui malgré avoir été orphelin de jeune âge, a parcouru le monde à la recherche du savoir, puis occupa des postes supérieurs aux seins de différents ministères du pays. Mon grand-père décédé le 4 novembre 2010, m'a continuellement encouragé à donner le meilleur de moi-même et à viser toujours plus haut, et je sais qu'il aurait été très fier de moi à ce moment.

Je dédie ce mémoire particulièrement à mon très cher ami et frère Abderrahmah Bensmail paix à son âme, qui nous a quittés beaucoup trop tôt. Abderrahman fut la première personne à me souhaiter la bienvenue au laboratoire de productique après la réussite de mon concours de doctorat. J'ai partagé avec lui plein de projets professionnels et universitaires, ses conseils fraternels ont toujours su raisonner dans mon esprit et me toucher dans mon cœur, j'ai partagé avec lui tellement de moments de joie et de bonheur, à chacune des étapes importantes de nos vies respectives. Sa gentillesse n'avait d'égale que sa grandeur d'âme, son irréprochabilité et son intégrité n'étaient égalées que par sa droiture, le vide qu'il a laissé ne pourra jamais être comblé, et l'éclat de gaité qu'il apportait chaque jour dans nos vies avec son grand sourire chaleureux me restera gravé dans mes souvenirs à tout jamais. Puisse Dieu dans sa grande miséricorde l'accueillir dans son vaste paradis.

Enfin, je remercie tous les membres du jury, d'avoir accepté d'évaluer mon travail, et d'avoir pris la peine d'apporter leurs expertises pour l'appréciation de cette thèse de doctorat. C'est un très grand honneur et immense privilège pour moi que mon travail puisse être jugé par ces chercheurs et professeurs de renom dont les remarques et réflexions ne feront qu'ajouter de la valeur à ce dernier.

Je remercie Dieu, de m'avoir donné la force d'arriver jusque-là et d'avoir fait en sorte que mes songes puissent se matérialiser, nous ne pouvons qu'emboîter le pas à notre destinée, je remercie Dieu de m'avoir dédié pareil destin.

HAMZAOUI Mohammed Adel

Liste des figures

Figure 1.1 : Casier de stockage

Figure 1.2 : Colonnes de casier (au premier plan)

Figure 1.3 : Racks ou rangées de stockage

Figure 1.4 : Une allée séparant deux racks de stockage

Figure 1.5 : Une machine de stockage/déstockage

Figure 1.6 : Schéma explicatif du temps de cycle

Figure 1.7 : AS/RS à charge unitaire

Figure 1.8 : Vue de dessus d'un AS/RS multi-allées

Figure 1.9 : Schéma en 3D d'un AS/RS à racks glissants

Figure 1.10 : AS/RS à mini charge

Figure 1.11 : AS/RS à carrousel

Figure 1.12 : AS/RS à personne embarquée

Figure 1.13 : AS/RS à étagères profondes

Figure 1.14 : AS/RS à convoyeur gravitationnel

Figure 1.15 : AVS/RS avec en bleu et jaune les ascenseurs

Figure 1.16 : Configuration d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel à une seule machine (vue de haut, une série de casiers superposés et un schéma en 3D)

Figure 1.17 : Configuration du bi-directional flow-rack AS/RS

Figure 1.18 : Relation entre les principaux axes de recherches

Figure 2.1 : Pourcentage d'erreur en fonction du taux de charge

Figure 2.2 : Pourcentage d'erreur en fonction du taux de charge

Figure 3.1 : Deux cas de figure de la vitesse de déplacement de la machines

Figure 3.2 : Zonage de la face du rack selon les différents cas possible des vitesses de la machine

Figure 3.3 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 600

Figure 3.4 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 3000

Figure 3.5 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 1000

Figure 4.1 : Illustration de l'ensemble des contraintes

Figure 4.2 : Les dimensions (en temps) optimales t_h^* , t_v^* et t_p^* en fonction des tailles du système pour un taux de charge de 75%

Figure 4.3 : Comparaison du temps de calcul des deux méthodes

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Résultats de la simulation pour un système à 600

Tableau 2.2 : Résultats de la simulation pour un système à 3000

Tableau 2.3 : Résultats de la simulation pour un système à 20000

Tableau 2.4 : Résultats de la simulation pour un système à 20000

Tableau 2.5 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 600)

Tableau 2.6 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 3000)

Tableau 2.7 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 20000)

Tableau 2.8 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 20000)

Tableau 2.9 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 600)

Tableau 2.10 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 3000)

Tableau 2.11 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 20000)

Tableau 2.12 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 20000)

Tableau 4.1 : Résumé des données extraites de l'analyse des résultats numériques

Tableau 4.2 : Formules approchées des dimensions optimales

Tableau 4.3 : Ratios entre les différentes dimensions optimales

Tableau 4.4 : Résultats et comparaison entre la méthode proposée et l'énumération complète

Introduction générale

Depuis aussi longtemps que l'être humain existe, il n'a cessé d'évoluer à travers son intellect, en essayant d'améliorer son niveau de vie et son confort au quotidien. Depuis la guerre du feu et de la chasse en groupe, au vaccin de Pasteur et Youri Gagarine contemplant la planète bleue au milieu du froid intersidéral clairsemé d'étoiles à des milliers d'années lumière de distance...le chemin parcouru par l'homme est énorme.

Après que la civilisation arabo-musulmane eu développé considérablement la médecine et les mathématiques, et que vinrent De Vinci et ses pairs génies de la renaissance mettre en évidence la beauté de l'art et faire sortir ce que l'homme avait de plus beau au fond de lui sans pour autant qu'il puisse l'exprimer, le moteur à combustion d'Étienne Lenoir vient donner une nouvelle tournure à l'histoire du monde en amorçant la révolution industrielle. On s'aperçoit clairement que les hommes et femmes de toutes parts et horizons, malgré la différence de leurs visions, de leurs pensées, de leurs cultes et de leurs origines, ne peuvent faire face à cette envie impulsive, de vouloir créer, construire, avancer, laisser sa trace, apprendre et déchiffrer le monde qui nous entoure.

La nouvelle ère dans laquelle on se trouve donc, est celle de la technologie, de l'efficience, de la précision, de la pertinence, la tendance maintenant est de tourner la nature à l'avantage de l'homme, en l'étudiant, la comprenant, et la poussant à agir de la manière que l'on désire. Même si cette entreprise dangereuse qui vise des résultats localement, a du mal à gérer les retombées globales, mais cela est un autre débat. Dans cette quête au développement et au confort, les avancées industrielles restent la clé de voute par laquelle le passage est obligé. Les pays se concurrencent, les multinationales se tirent la couverture et les consommateurs n'ont que l'embarrât du choix entre nécessité et superficialité, nous sommes dans l'ère de la surconsommation où les marchés sont inondés de produits, et où, si on ne se démarque pas on disparaît. La pérennité est donc la finalité pour toute entreprise, au moment où le déséquilibre flagrant entre offre et demande n'a jamais été aussi important. Chaque entreprise, chaque compagnie, chaque organisme, essaye de faire preuve d'ingéniosité et de ruse afin de sortir du lot, et de prendre la plus grande part de marché possible. Il y en a qui tablent sur des avantages de marketing, d'image, de réseau, d'exclusivité technologique, ou de logistique performante. Des facteurs de performances il en existe des centaines, ils ont tous leur importance relative, cela dit, en ce qui nous concerne nous avons choisi de nous intéresser à un facteur particulier.

Cette thèse de doctorat s'intéresse à un élément très important de n'importe quelle entreprise, cet élément est le stock. Que ce soit un stock de matière première, de produits finis, d'outillage ou de produits en transit, il représente une importance capitale. Une bonne gestion des stocks peut à elle seule faire la différence et cela pour plusieurs raisons. Premièrement il ne faut pas oublier qu'un stock représente une immobilisation de capital, puisqu'il s'agit d'un fond financier dormant, qui peut à tout moment disparaître, puisqu'il peut se détériorer ou se périmer, ou bien même que le produit en question ne trouve plus preneur pour une raison ou pour une autre. Deuxièmement, une bonne gestion des stocks pour un fournisseur par exemple, lui permet d'élargir son réseau de clientèle, car des livraisons conformes et dans de courts délais représentent des facteurs importants pour le choix d'un fournisseur. D'autre part la maîtrise de bonnes politiques de gestion des stocks peut offrir la possibilité de diversifier ses produits, et de ce fait s'attaquer à plusieurs marchés en parallèle. Tout cela pour ne souligner que de manière brève l'étendue de l'importance que cette partie de l'entreprise représente. Cela a poussé les chercheurs et ingénieurs du monde, à imaginé des solutions technologiques permettant de rendre cette tâche plus efficiente. L'une de ses solutions est le système de stockage automatisé ou AS/RS pour Automated Storage and Retrieval System. Ces systèmes permettent à travers une automatisation et une informatisation des tâches de la gestion des stocks, qu'elles soient physiques ou relatives à la gestion,

de faciliter ces dernières, les rendre plus rapides, diminuer les risques d'erreur et gagner en espace. Ces systèmes il en existe de plusieurs sortes, chacun d'eux aillant ses avantages et inconvénients.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous allons définir de manière plus formelle ce qu'un AS/RS, avant d'exposer en détail les différents genres existant. Nous présenterons aussi les principaux composants qui les constituent, puis nous parlerons de leurs avantages et inconvénients le tout illustré par des images et schémas. Pour finir, une riche revue de la littérature viendra clôturer ce chapitre, en exposant les principaux travaux dont les AS/RS ont été le sujet.

Le second chapitre exposera les différents modèles mathématiques du temps de cycle que nous avons développés. Il s'agit de formules mathématiques traduisant le temps moyen que le système étudié met à satisfaire une requête de stockage/déstockage. Ces modèles du temps de cycles ont été calculés selon deux approches différentes. La première dite « discrète » se base sur un maillage de la face du rack, de telle sorte que chaque élément de la matrice obtenue représente un casier du rack. De ce fait, et suivant une loi de distribution adaptée à la politique de stockage choisie, un temps de cycle moyen est calculé. La seconde approche est dite « continue », et qui est basée sur une approximation de la face du rack en la considérant comme étant une infinité de points, où chaque point peut être le siège d'une opération de stockage ou de déstockage. Par ailleurs, des modèles du temps de cycle suivant les deux approches ont été développées pour le simple et le double cycle. Par la suite une étude comparative a été effectuée afin d'évaluer le gap existant entre les deux types de modélisation. Pour cela une simulation a été conduite via un programme Matlab que nous avons spécialement développé.

Dans le troisième chapitre, nous exposerons de nouveaux modèles du temps de cycle, pour le simple et le double cycle. Cependant ces modèles-là diffèrent de ceux présentés en chapitre 2. Ces modèles prennent en considération les caractéristiques opérationnelles du fonctionnement des machines, telles que l'accélération/décélération et la vitesse maximale. Ces caractéristiques-là influent considérablement sur la fiabilité qu'offrent les modèles du temps de cycle en général par rapport à la réalité du terrain. C'est pour cela que nous avons décidé de nous pencher sur la question, afin de développer des modèles qui reproduisent de la manière la plus fidèle possible le comportement réel du système. Par la suite nous procédons à une analyse de la précision de ces modèles, via une simulation grâce à un second programme Matlab qui génère différentes transactions de stockage/déstockage et doubles cycles pour différentes instances et pour différentes tailles du système et en faisant varier plusieurs paramètres opérationnels.

Enfinement le dernier chapitre traitera de l'optimisation du design du système étudié. L'optimisation de ce dernier a été effectuée de deux manières différentes. La première a été faite suivant la méthode communément utilisée dans la littérature pour ce type de problème, et cela en utilisant le temps de cycle continu, afin de trouver des ratios optimaux entre les différentes dimensions spatiales du rack. La seconde méthode, est une méthode totalement originale et que nous proposons pour la première fois dans cette thèse. Nous avons décidé d'utiliser le temps de cycle discret grâce à l'avantage de précision qu'il offre, cependant la contrainte du temps de calcul devait être surmontée. Par conséquent nous avons identifié des propriétés mathématiques qui nous ont permis d'établir des propriétés de dominance, grâce auxquels nous avons développé une méthode de résolution 10 fois plus rapide que la méthode d'énumération, seule méthode exacte utilisée pour ce type de problème à ce jour. Cette méthode nous a d'une part permis d'obtenir des résultats précis et d'autre part en un temps très rapide.

Chapitre 1 :
Introduction aux systèmes automatisés de
stockage/déstockage

Chapitre 1 :

Introduction aux systèmes automatisés de stockage/déstockage

1.1 Introduction :

Avant de parler de profit, de chiffre d'affaire ou de cote boursière, chaque entreprise doit assurer sa pérennité, son existence au milieu de l'arène, s'affirmer au centre de l'économie mondiale aujourd'hui sans pitié, au moment où toutes les entreprises tirent la couverture à elles seules, chacune doit tirer son épingle du jeu. Par conséquent pour qu'une entreprise puisse se faire une place au soleil, elle doit combiner entre efficacité, efficience, clairvoyance, vision stratégique et performance opérationnelle.

Tout cela est vite dit, car arriver à incarner tous ces facteurs de compétitivités, même avec de la volonté et de l'huile de coude risque d'être compliqué. C'est pour cela que les chercheurs, innovent sans cesse de nouvelles techniques de gestion, de nouvelles machines, de nouveaux systèmes et de nouvelles méthodes organisationnelles qui font converger chaque entreprise, qui le veuille bien, vers ses objectifs. Parmi ces machines et systèmes révolutionnaires, les systèmes de stockage et de déstockage automatisés ou AS/RS (Automated Storage and Retrieval System).

Tout bon producticien vous dira relativement que le stock est à éliminer par tous les moyens, que cette entité est néfaste pour l'entreprise, et qu'un stock important est le syndrome révélateur de la mauvaise gestion d'une entreprise. Ceci est vrai, à une certaine mesure, puisque le stock est qualifié le plus souvent comme étant un « mal nécessaire », car celui-ci permet d'assurer une continuité dans les approvisionnements de produits, outils ou pièces de rechanges, palier aux pénuries, créer une certaine synchronisation entre les différentes machines ou ateliers, quand il existe un décalage de taux de production entre ces derniers, à cause de caractéristiques techniques, ou encore permettre le stockage de produits finis dans l'attente de leur livraison ou vente. De l'autre côté, comme on peut s'y attendre, le stockage comporte beaucoup d'inconvénients, il s'agit tout d'abord d'un investissement important que de mettre en place un stock, sans parler de l'argent immobilisé par ce dernier, de son coût d'entretien, du risque de péremption ou de dépassement technique des produits stockés...etc.

Dans ce cas, comment faire pour minimiser d'une part les inconvénients de détenir un stock, et d'autre part augmenter ses effets avantageux ? Et bien la solution est entre autres l'acquisition d'un système de stockage et de déstockage automatisé. C'est pour cette raison que nous avons pris la décision de centrer notre travail sur cet élément particulier de toute entreprise industrielle moderne à la pointe de l'industrie 4.0.

Dans ce chapitre, vont être présentées les différentes fonctions d'un AS/RS, en plus de ses composants les plus importants, après avoir défini cet équipement industriel particulier, et avant de parler de ses avantages et inconvénients sans oublier les différents types d'AS/RS cités dans la littérature

et existants dans l'industrie. Par la suite, ce chapitre donnera les différentes caractéristiques de l'AS/RS choisi pour ce travail, ce qui a fait que le choix se porte sur ce dernier, et ce qui le rend si peu commun.

1.2 Définition d'un système de stockage automatisé AS/RS, sa fonction, ses avantages et inconvénients :

1.2.1 Définition :

(Tompkins & White, 1984) définissent dans leur livre "Facilities Planning" un AS/RS comme ceci : « Automated storage and retrieval systems (AS/RS) are a combination of equipment and controls which automatically handles, stores and retrieves materials with great speed and accuracy »

D'autre part le "Material Handling Institute" (Material Handling Institute, 1977) a le même avis concernant la définition de cet équipement : « A combination of equipment and controls which handles, stores, and retrieves materials with precision, accuracy, and speed under a defined degree of automation. »

Ces deux définitions veulent dire pratiquement la même chose, et toutes les deux définissent un système automatisé de stockage et de déstockage comme étant :

« Une combinaison d'équipements et de systèmes de contrôle qui prend en charge, stocke et déstocke des produits avec précision, exactitude et célérité sous un certain degré d'automatisation » (Sari, 2003).

1.2.2 Fonction :

L'AS/RS a été conçu dans le but de diminuer l'intervention humaine au maximum dans les opérations de manutention des produits, pièces de rechanges, palettes, matières premières ou même outillage, mis en stock. Permettant de cette manière de réduire considérablement le risque d'erreurs, de manipulations maladroites, ou d'interventions humaines en milieu dangereux. En fonctionnement, un AS/RS reçoit des entités à stocker à un point de dépôt, les identifie et les transporte à l'endroit où ils doivent être stockés, ou bien les déstocke et les livre à une station de livraison.

Un système de stockage automatisé, doit être capable, sous supervision et commande humaines, de :

- Récupérer un article au point de dépôt pour un stockage.
- Transporter de manière automatisée l'article à stocker à l'endroit qui lui a été dédié selon la politique de stockage adoptée.
- Déstocker un produit à la demande de l'utilisateur, et le livrer à la station de livraison de manière automatisée.

Le tout régit par un système informatisé de commande et de supervision, assurant le bon fonctionnement du système, et son suivi.

1.2.3 Composants d'un AS/RS :

Il existe différents genres d'AS/RS cités dans la littérature ou implantés dans le milieu industriel, où chacun à sa composante particulière. Cela dit l'AS/RS « classique » dispose de composants qu'on retrouve dans la majorité des AS/RS, à quelques éléments près, en voici donc les plus importants :

- Un ensemble d'allées parallèles délimitées par des étagères de stockage de part et d'autre.
- Des machines de stockage/déstockage, nécessaires à la manutention des articles au sein de l'AS/RS.
- Des points d'entrées/sorties, pour le dépôt des articles à stocker et la récupération des articles déstockés.

- Un système de contrôle, de supervision et de commande, assurant le bon fonctionnement du système en plus de l'interfaçage homme-machine, très important à ce niveau d'automatisation.

1.2.4 Terminologie :

Si on considérait la productique comme une spécialité à part entière dans l'ingénierie, on pourrait dire que la manutention est elle aussi une sous-spécialité assez vaste ayant une terminologie particulière, d'où le besoin de citer au moins quelques-uns des termes les plus utilisés dans son jargon pour que les sections suivantes soient les plus claires et compréhensibles possible.

- Casier : c'est l'espace tridimensionnel alloué au stockage d'une charge unitaire ou d'un ensemble de charges (Figure 1.1).



Figure 1.1 : Casier de stockage

- Colonne : l'ensemble de casiers superposés les uns sur les autres, forme ce qu'on appelle une colonne (Figure 1.2).



Figure 1.2 : Colonnes de casier (au premier plan)

- Rangée : la rangée est constituée de plusieurs colonnes placées les unes derrière les autres, formant par conséquent un ensemble de casiers qui vont délimiter les allées de l'AS/RS (Figure 1.3).



Figure 1.3 : Racks ou rangées de stockage

- Allée : suite à ce qui a été dit précédemment, l'allée est l'espace apparent entre deux rangées parallèles, nécessaire au déplacement de la machine de stockage/déstockage (Figure 1.4).



Figure 1.4 : Une allée séparant deux racks de stockage

- Modules de stockage : ce sont des palettes ou des containers de formes et tailles standardisées qui sont placés dans les casiers, et dans lesquels les articles à stocker sont déposés, afin qu'ils soient manipulables par les machines de stockage/déstockage. Les containers peuvent être des boîtes en carton, en plastique ou même en file de fer...
- Machine S/D : la machine de stockage/déstockage (Storage/Retrieval machine, S/R machine) est l'appareil qui procède aux opérations physiques de stockage/déstockage. Dans la majorité des cas la machine dispose de deux degrés de liberté qui lui permettent de se déplacer verticalement et horizontalement afin d'atteindre tous les casiers de la rangée (le plus généralement suivant un déplacement de Tchebychev) (Figure 1.5), un mécanisme de saisie ou un troisième degré de liberté est généralement ajouté afin que les manœuvres de stockage/déstockage puissent être réalisées. Le nombre et le type de machines S/D diffèrent d'un genre de système à un autre.



Figure 1.5 : Une machine de stockage/déstockage

- Les stations d'entrées/sorties : les stations d'entrée/sorties ou stations de dépôt/livraison (Pickup/Delivery stations) sont les points par lesquels transitent les articles entrant et sortant de l'AS/RS, c'est en quelque sorte des points « d'interactions » avec le système de transfert externe. La station de dépôt étant le point par lequel une entité à stocker accède à l'AS/RS, et la station de livraison est par contre le point où l'article déstocké est livré. Il se peut selon les cas que ces deux points soient sous forme de deux stations distinctes ou bien qu'ils soient combinés en une seule station.
- Temps de cycle moyen : c'est l'intervalle de temps moyen séparant l'émanation d'une demande de transaction de stockage/déstockage ou double cycle et la satisfaction de cette demande (stockage ou livraison du produit) voir Figure 1.6.

Deux principaux types de cycles peuvent être distingués, les simples et les doubles cycles. Les simples cycles sont les opérations pendant lesquelles l'AS/RS procède à une transaction de stockage ou déstockage, par contre un double cycle, est un cycle pendant lequel une opération de stockage et une autre de déstockage sont combinées afin d'éviter un retour vide inutile de la machine S/D à la station D/L. Il est à noter que des quadruples ou sextuples cycles peuvent être générés lorsque la machine S/D dispose de deux ou trois emplacements pour les produits ou encore pour les AS/RS à personne embarquée par exemple.

Le calcul du temps de cycle moyen se fait de plusieurs manières différentes, soit numériquement via simulation, soit à travers des modèles mathématiques. Le développement mathématique des modèles de temps de cycle représente une part importante des problématiques traitées dans la littérature comme nous allons le voir dans l'état de l'art qui va suivre. Cela dit, les modèles mathématiques du temps de cycle sont élaborés en fonction la politique de stockage à adopter en régime permanent : stockage dédié ou aléatoire (loi de distribution uniforme) ou bien un stockage par classe (loi de distribution triangulaire pour trois classes). D'avantage de précisions seront données dans la section dédiée à la revue de la littérature.

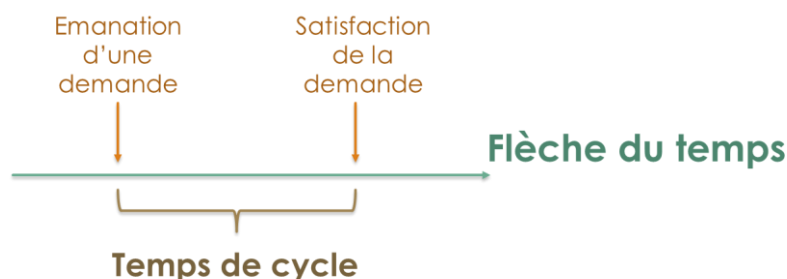


Figure 1.6 : Schéma explicatif de la notion de temps de cycle

1.2.5 Avantages d'un AS/RS :

- **Efficienc**e en espace : le système de stockage automatisé est plus efficace en espace qu'un stockage classique, de cette manière le gain se fait soit dans l'espace (utilisation de cet espace pour l'ajout de nouvelles chaînes de production par exemple) soit dans le nombre d'articles à stocker (sans l'ajout de locaux supplémentaires).
- **Amélioration** de la gestion des stocks : le système de contrôle et de gestion permet d'avoir en continu et à chaque instant des informations concernant le nombre d'articles qui se trouvent dans l'AS/RS en plus de leurs dates de réceptions, de l'endroit où ils sont stockés et même leurs dates de péremption si elles existent, permettant ainsi que les opérations d'inventaire et de recensement puissent se faire plus rapidement.
- **Temps de réponse** moins important : comme les transactions de stockage/déstockage sont faites de manière automatisée, dès que l'utilisateur lance l'une de ces deux opérations, le système de commande fait en sorte que les temps de cycles soient les plus courts possible à la faveur de sa connaissance de toutes les informations relatives aux produits.
- **Réduction** des stocks : vu que le système de gestion et de contrôle permet une connaissance précise de tous les articles se trouvant à l'intérieur du système ainsi que de toutes les informations qui leur sont relatives, il est possible de combiner ces connaissances avec celles relatives aux commandes et à l'activité de l'entreprise, ce qui permettra de trouver un nombre optimal d'articles (selon une tolérance donnée) qui d'une part protège d'une rupture de stock et d'autre part nous évite un sur-stockage.
- **Réduction** de la main d'œuvre : il est clair que l'utilisation d'un système de stockage/déstockage disposant d'un degré plus ou moins élevé d'automatisation diminue considérablement la main d'œuvre, puisque les tâches autrefois faites par des ouvriers, techniciens ou employés en général, vont être faites par des machines automatisées.
- **Diminution** des coûts de fonctionnement : le fait de disposer de ce type de système décroît de manière considérable les coûts liés à la possession du stock, et cela est dû à la réduction du personnel (comme vu plus haut), la diminution des charges relatives à ce dernier (paye, assurance, congés payés, air conditionné...etc.), diminution des coûts liés à l'erreur humaine.
- **Augmentation** de la sécurité : le fait de minimiser l'intervention humaine dans les aires de stockage diminue considérablement les risques d'accidents et d'erreurs de manipulation, de plus ces systèmes se présentent sous forme d'aires autonomes et fermées, augmentant ainsi la sécurité des installations environnantes, et permettant le stockage de produits dits dangereux de manière plus sûre.
- **Réduction** de la détérioration : l'AS/RS disposant de systèmes de contrôle et de logiciels performants permet une grande diminution des déficiences de la gestion classique en rendant les péremptions des produits et leur dépassement technique très rares, en plus de réduire les risques de casse des articles pendant leur manipulation par les employés dans un système non automatisé.
- **Grande flexibilité** de fonctionnement : le système de contrôle dont dispose chaque AS/RS permet à son utilisateur de gérer la grande diversité de produits qui y sont stockés, puisqu'il sait à chaque instant où se situe chaque article, sa date de réception, son lieu de stockage voire même sa date de péremption, ce qui alloue la possibilité de traiter différents produits sans risque d'erreur, d'où la très grande flexibilité qui qualifie ce genre de système.

1.2.6 Inconvénients :

Nonobstant le fait que les AS/RS disposent d'un grand nombre d'avantages, dont les plus importants ont été cités plus haut, ils affichent quelques lacunes liées à leur caractère « méga-structurel » par rapport aux unités classiques de production.

- Les AS/RS restent des équipements difficilement modifiables, du fait de leur grande complexité et de la rigidité de leur structure.
- L'investissement initial est très élevé, aussi bien que le coût d'un système à 10000 casiers, 5 machines de stockage/déstockage et un convoyeur de 60m, coûterait entre 2 et 3 millions de Dollars US, et qu'un système de contrôle pour AS/RS vaudrait environ 100000 Dollars US (Maleki, 1991).

1.3 Différents types d'AS/RS :

Il existe dans la littérature une multitude d'AS/RS, évoqués dans les différents travaux effectués par la communauté scientifique, et appuyés par l'établissement effectif de ces systèmes dans l'industrie d'aujourd'hui. Cette pluralité de systèmes est due à leur différence architecturale, structurelle, et à leurs domaines d'applications. Dans ce qui suit nous allons en recenser les plus connus :

1.3.1 Les AS/RS à charge unitaire :

Les AS/RS à charge unitaire (Figure 1.7) sont des systèmes de stockage conçus pour stocker et déstocker des charges contenues dans des palettes ou des containers standardisés, dont le poids est généralement supérieur à 250 kg. Ce système dispose d'appareils de manutention appelés machines S/R ou machines de stockage/déstockage, ce qui lui permet de manipuler les charges unitaires en son sein, et de les stocker dans les casiers qui leurs sont dédiés après les avoir récupérés dans les stations d'entrées (station de dépôt), ou bien de les déstocker et de les livrer à la station de sortie (station de livraison). Ces machines sont placées sur des rails fixés au sol et au plafond, en plus d'un cadre perpendiculaire à ces rails, sur ce cadre se trouve un plateau, qui lui, peut se déplacer verticalement sur ce cadre, et ce même cadre a la possibilité de se déplacer horizontalement grâce aux rails. La combinaison de ces deux mouvements offre la possibilité au plateau (donc à la machine S/R) de se déplacer dans le sens vertical et horizontal, de la même manière qu'une imprimante matricielle, chose qui permettra à ces appareils de manutention d'accéder aux différents casiers qui leur sont alloués. D'un autre côté les mécanismes de saisie des charges unitaires par les machines S/R diffèrent d'un système à un autre, on peut en citer :

- Le système à plateau coulissant : c'est le même principe que le transpalette.
- Le système à ventouse : la charge est accrochée en créant un vide dans des ventouses.
- Le système à aimant : approprié pour les produits en fer et acier (Sari, 2003).

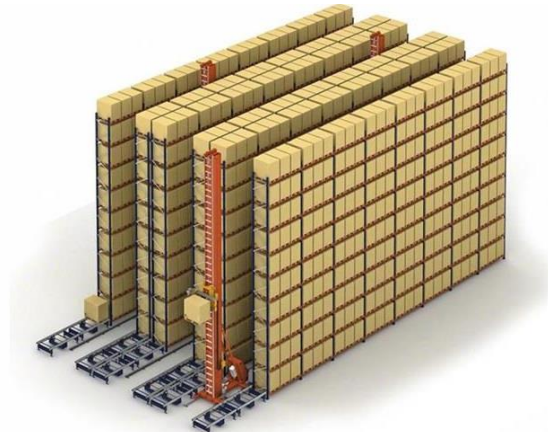


Figure 1.7 : AS/RS à charge unitaire

1.3.2 Les AS/RS multi allées :

Ce type d'AS/RS (Figure 1.8) est une variation de l'AS/RS à charge unitaire. Il s'agit toujours de la même architecture, basée sur des allées parallèles délimitées de part et d'autre par des rangées de casiers à travers lesquelles circule la machine S/R. On note toutefois l'apparition d'une allée supplémentaire commune, reliant toutes les allées, dite allée transversale, qui permet à cette machine S/R de changer d'allée au besoin.

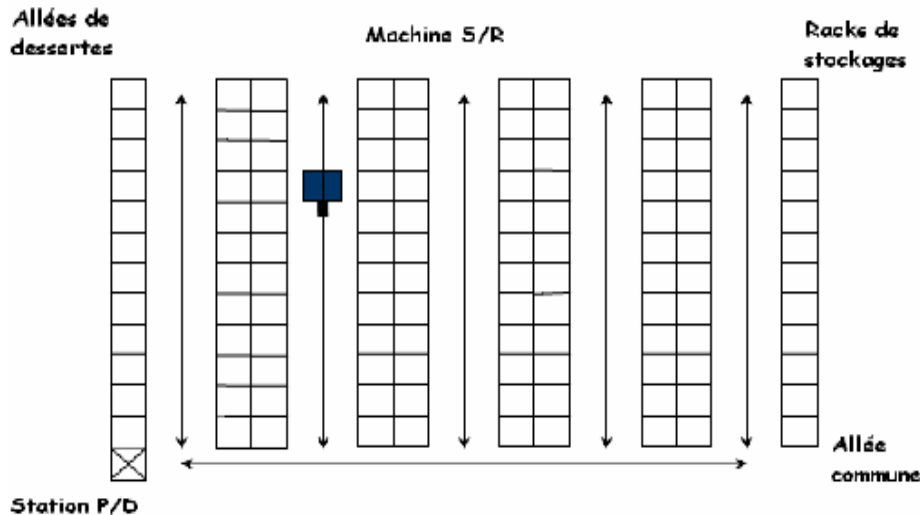


Figure 1.8 : Vue de dessus d'un AS/RS multi-allées

1.3.3 Les AS/RS à racks glissants :

Les AS/RS à racks glissant (Figure 1.9) sont similaires aux AS/RS multi allées, sauf qu'ils ne disposent que d'une seule allée de service, cette dernière pouvant se déplacer afin d'offrir un accès à tous les racks du système. Techniquement ce sont les racks qui se déplacent et non pas l'allée de service, puisque ce système –comme son nom l'indique- dispose de racks glissants, qui coulissent de manière à libérer un espace entre deux casiers mitoyens, ce qui permettra à la machine S/R d'accéder au rack désiré.



Figure 1.9 : Schéma en 3D d'un AS/RS à racks glissants

1.3.4 Les AS/RS à mini charge :

Ce type de système (Figure 1.10) est utilisé pour stocker de petites charges, telles que les pièces détachées ou les outils. Les charges se présentent sous forme de containers qui contiennent plusieurs petits articles, similaires ou non. Lorsque l'utilisateur manifeste son besoin pour un article ou bien au contraire qu'il veuille le stocker, c'est tout le container qui est manipulé par la machine S/R, et qui est présenté à l'utilisateur, soit pour prendre l'article désiré qui se trouve dedans ou bien y placer l'entité devant être stockée. Ce type de système est utilisé le plus souvent pour le traitement des articles légers, et où l'espace alloué aux aires de stockage est assez réduit, de plus il convient parfaitement lorsque le nombre de transactions de stockage/déstockage n'est ni trop élevé pour nécessiter l'installation d'un AS/RS à charge unitaire, et ni trop faible au point de procéder au stockage manuel, tout en présentant un coût d'investissement relativement faible (Sari, 2003).



Figure 1.10 : AS/RS à mini charge

1.3.5 Les AS/RS à carrousel :

Ces systèmes (Figure 1.11) représentent une architecture assez spécifique, la différence majeure qu'ils représentent, c'est que les casiers qui constituent les racks sont en mouvement. Dans chaque rack, les différents casiers sont montés en carrousel, ce qui leur permet de se déplacer d'une telle manière à

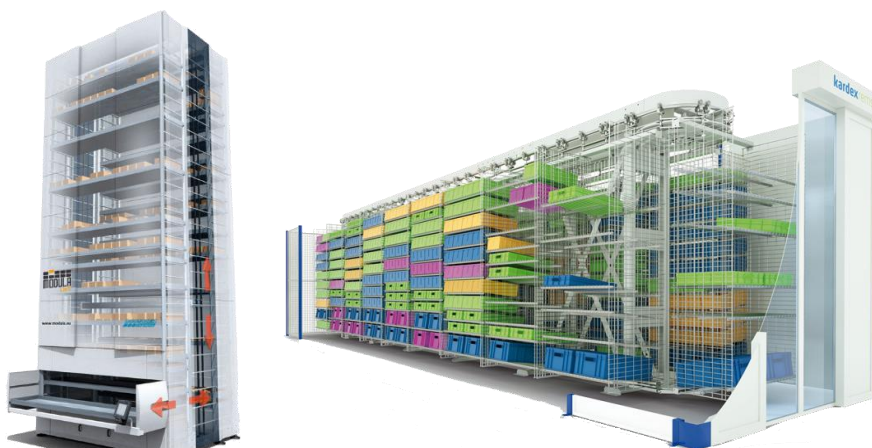


Figure 1.11 : AS/RS à carrousel

ce que tous les casiers puissent arriver chacun à son tour, à l'extrémité du rack via un déplacement horizontal ou vertical, et où l'opération de stockage/déstockage sera réalisée par l'utilisateur.

1.3.6 Les AS/RS à personne embarquée :

Les AS/RS à personne embarquée (Figure 1.12) sont des systèmes qui permettent de stocker plusieurs petits produits dans le même casier, ainsi que de faire plusieurs opérations de stockage ou de déstockage en même temps, ce qui entraîne un gain de temps conséquent. Ces systèmes disposent d'une plate-forme mobile sur laquelle un opérateur peut prendre place et manipuler les différents articles à traiter. Vu que c'est une personne qui procède aux opérations de stockage/déstockage, il peut y en avoir plusieurs en une seule manœuvre, puisqu'après avoir déstocké les articles correspondants, l'opérateur les charge en une seule fois sur la machine S/R pour livraison. De plus la plate-forme sur laquelle se déplace l'opérateur peut contenir des systèmes de levage automatiques permettant de charger/décharger des produits lourds.



Figure 1.12 : AS/RS à personne embarquée

1.3.7 Les AS/RS à étagères profondes :

Ces systèmes (Figure 1.13) représentent eux aussi une variation des systèmes de stockage/déstockage automatisés à charge unitaire, à la différence près que ces derniers disposent de casiers qui sont capables de contenir plusieurs charges à la fois, et qui par conséquent ont la même adresse. Cette caractéristique permet à ce type de système de contenir un grand nombre de produits dans chaque casier (jusqu'à 10 charges (Sari, 2003)), ce qui lui offre une grande densité de stockage du fait de son utilisation maximale de l'espace disponible. De cette manière le stockage se fait d'un côté du casier, alors que le déstockage se fait de l'autre. La machine S/R peut accéder aux produits qui se trouvent en profondeur à l'intérieur d'un casier grâce à des plateaux mobiles qui se déplacent de la machine S/R à l'entrée du casier, permettant par la même occasion un déplacement en profondeur des produits. La machine S/R est quasiment la même que celle utilisée dans les AS/RS à charge unitaire, sauf que cette dernière dispose de quelques fonctions en plus, relatives au contrôle des plateaux mobiles.

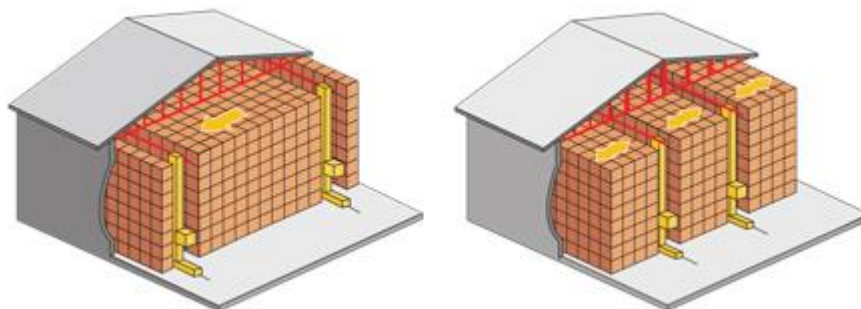


Figure 1.13 : AS/RS à étagères profondes

1.3.8 Les AS/RS à convoyeurs gravitationnels :

L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels (Figure 1.14) est un système assez élaboré du point de vue technique, puisqu'il dispose d'une architecture caractéristique combinant haute densité de stockage, facilité d'accès à tous les articles et un nombre relativement restreint de machine S/D (seulement 2 machines). Il s'agit d'une variante de l'AS/RS à étagère profonde, puisque ce système est composé d'une multitude de racks profonds distribués verticalement et horizontalement, et qui disposent de convoyeurs gravitationnels inclinés en leur sein. Le stockage se fait par l'une des deux faces de l'AS/RS alors que le déstockage se fait par l'autre face, chaque face dispose d'une machine dédiée, soit au stockage ou au déstockage uniquement, en plus d'un convoyeur de restockage. Chaque produit stocké par la face dédiée au stockage via la machine concernée, glisse à l'intérieur du casier d'un bout à l'autre jusqu'à trouver le produit stocké avant lui ou bien la fin du casier. Alors que lorsqu'on désire atteindre un article qui se trouve en profondeur à l'intérieur d'un casier, il suffit de déstocker un à un les produits qui sont devant lui grâce à la machine de déstockage, de les mettre sur le convoyeur de restockage pour qu'ils atteignent la machine de stockage, afin qu'ils soient restockés encore une fois, faisant glisser à chaque fois les articles vers l'extrémité du casier, la répétition de cette opération conduira à ce que le produit désiré soit accessible pour la machine de déstockage et qu'il soit ainsi déstocké.

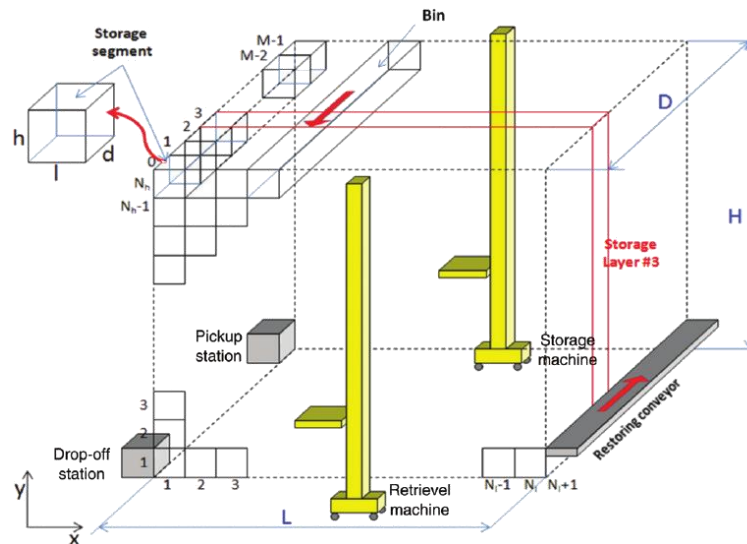


Figure 1.14 : AS/RS à convoyeur gravitationnel

1.3.9 Les AVS/RS :

Ce sont des variations des AS/RS classiques, sauf que pour ces derniers, les appareils de stockage/déstockage ne sont pas des grues ou des transstockeurs mais des véhicules autonomes. L'architecture globale ou l'ossature d'un tel système prend la forme dans la majorité des cas d'un AS/RS multi-allées, dans lequel circulent des véhicules autonomes, et qui grâce à des ascenseurs parviennent à atteindre les étages supérieurs du système de stockage. Comme pour les AS/RS, ce type de système dispose de stations de dépôt/livraison et d'un système de contrôle (Figure 1.15).

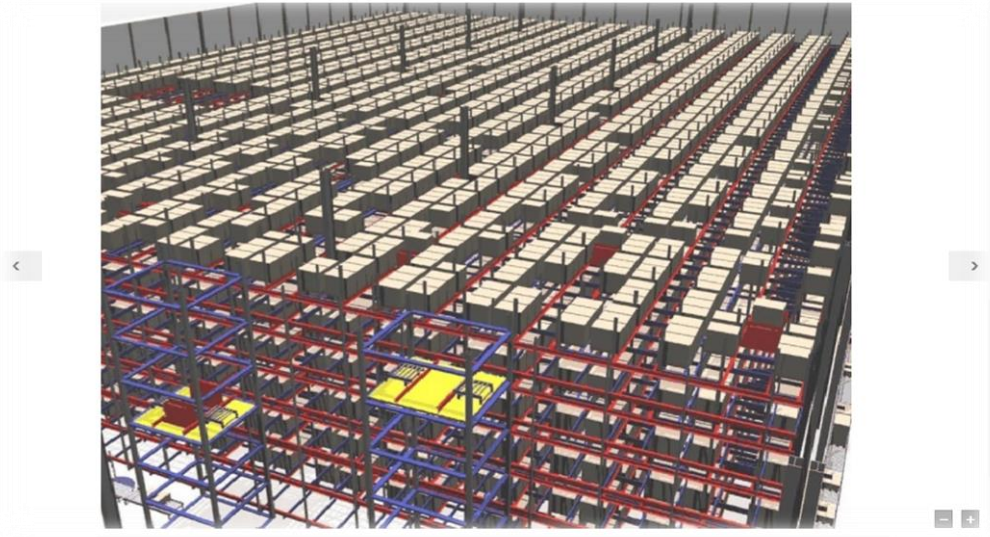


Figure 1.15 : AVS/RS avec en bleu et jaune les ascenseurs

1.3.10 L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à une seule machine :

Cette variante (Figure 1.16) de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à deux machines, a été introduite dans le domaine des systèmes de stockage automatisés par (Sari & Bessenouci, 2012). La caractéristique principale de ce système, est que ses casiers ne sont pas de forme parallélépipédique, mais ont plutôt la forme d'un U. De plus chaque casier est constitué de deux bacs reliés à leur extrémité assurant cette forme-là. De telle sorte que les opérations de stockage se font par le bac dédié au stockage

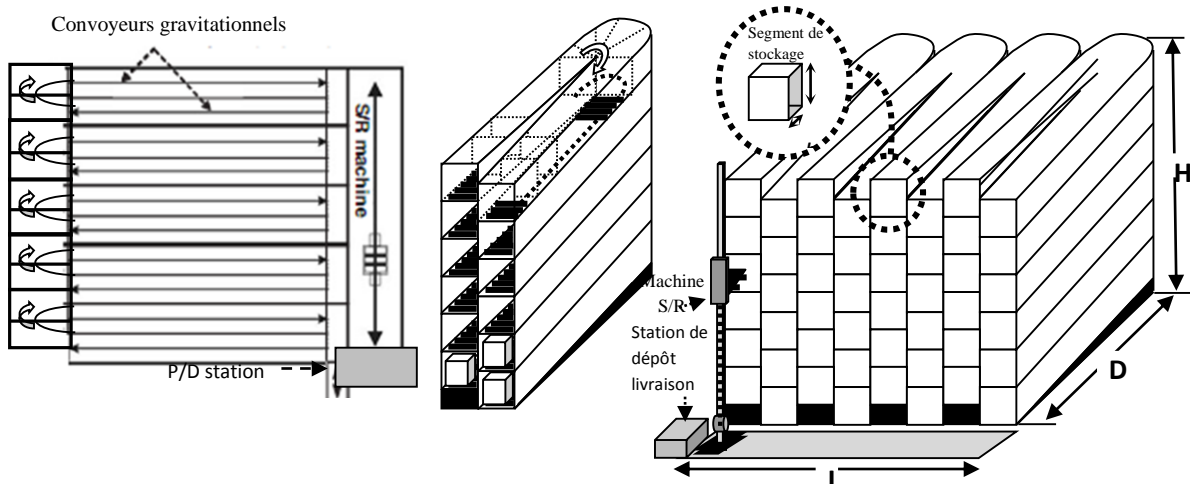


Figure 1.16 : Configuration d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel à une seule machine (vue de haut, une série de casiers superposés et un schéma en 3D)

et que le déstockage se fait par l'autre bac. Cette structure particulière permet aux articles stockés, de glisser à travers le bac de stockage grâce au convoyeur gravitationnel, de changer de direction une fois arrivés au fond du casier, puis de glisser à nouveau à travers le bac de déstockage jusqu'à rencontrer le produit stocké auparavant ou bien la fin du bac (c'est-à-dire la face du rack dans ce cas-là).

Cette architecture ingénieuse permet le stockage d'une grande diversité d'articles puisque tous sont accessibles d'une manière ou d'une autre, de plus il ne nécessite pas obligatoirement une politique de stockage déterministe puisqu'une politique de stockage aléatoire permet l'utilisation de tout l'espace

disponible au stockage tout en équilibrant les charges dans tout le volume du système. Autre propriété intéressante, c'est la réduction du nombre de machines S/D de deux à une seule en plus de la suppression du convoyeur de restockage, diminuant par conséquent considérablement le coût d'investissement initial et les coûts de fonctionnement et maintenance.

1.3.11 L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels ou le bi-directional flow-rack AS/RS :

Le dernier système que nous allons exposer est le bi-directional flow-rack, il s'agit justement de l'AS/RS que nous avons choisi d'étudier à travers cette thèse de doctorat.

Dans la même famille des AS/RS compacts, on retrouve l'une des toutes dernières innovations en matière de structure de ces systèmes, et qui est le bi-directional flow-rack. Inventé et breveté récemment par (Southeast University, 2013) et présenté dans la littérature pour la première fois par (Chen, et al., 2015).

Le système en question, mixe entre les deux systèmes à convoyeurs gravitationnels précédemment cités, puisqu'il dispose d'un ensemble de casiers superposés, mis côte à côte, et penchés par alternance vers l'une ou l'autre des faces du rack tout en utilisant deux machines différentes de part et d'autre (Figure 1.17). Cette approche architecturale, permet d'une part de garder l'avantage d'un casier en U tout en éliminant le virage en épingle, difficile à réaliser de manière performante d'un point de vue mécanique (glissement délicat du produit), car le déplacement de l'article d'un casier vers celui qui lui est appareillé (changement de direction) est effectué par la machine -qui selon les cas est-secondaire.

Cette modification de l'orientation des casiers, et l'élimination du convoyeur de restockage, en comparaison avec un AS/RS à convoyeur gravitationnel classique, lui permet de le surpasser largement au niveau des performances (temps de cycle) et du coût (acquisition et utilisation), ce qui a été mis en évidence par (Chen, et al., 2015) à travers des modélisations continues du système en introduisant des équations du nombre moyen d'articles bloquants pour un déstockage. Par contre en comparaison avec le système à convoyeur gravitationnel à une seule machine, l'évaluation est plus délicate, puisqu'il s'agit de comparer deux quantités de natures différentes, qui sont coût et temps, mais dont la correspondance peut tout de même être approchée. Car l'avantage du nouveau système est qu'il est plus rapide, mais son inconvénient est qu'il dispose de deux machines contrairement à son prédécesseur (flow-rack à une seule machine). Il faudra alors élaborer des modélisations mathématiques traduisant le gain du temps en une grandeur financière afin qu'elle puisse être comparée à la charge d'acquisition et d'utilisation (énergie, maintenance...etc.) d'une seconde machine S/R, chose qui n'a pas été faite dans ce travail, laissant place à d'autres formes de prospection concernant ce système, et qui seront plus détaillées dans les sections qui vont suivre.

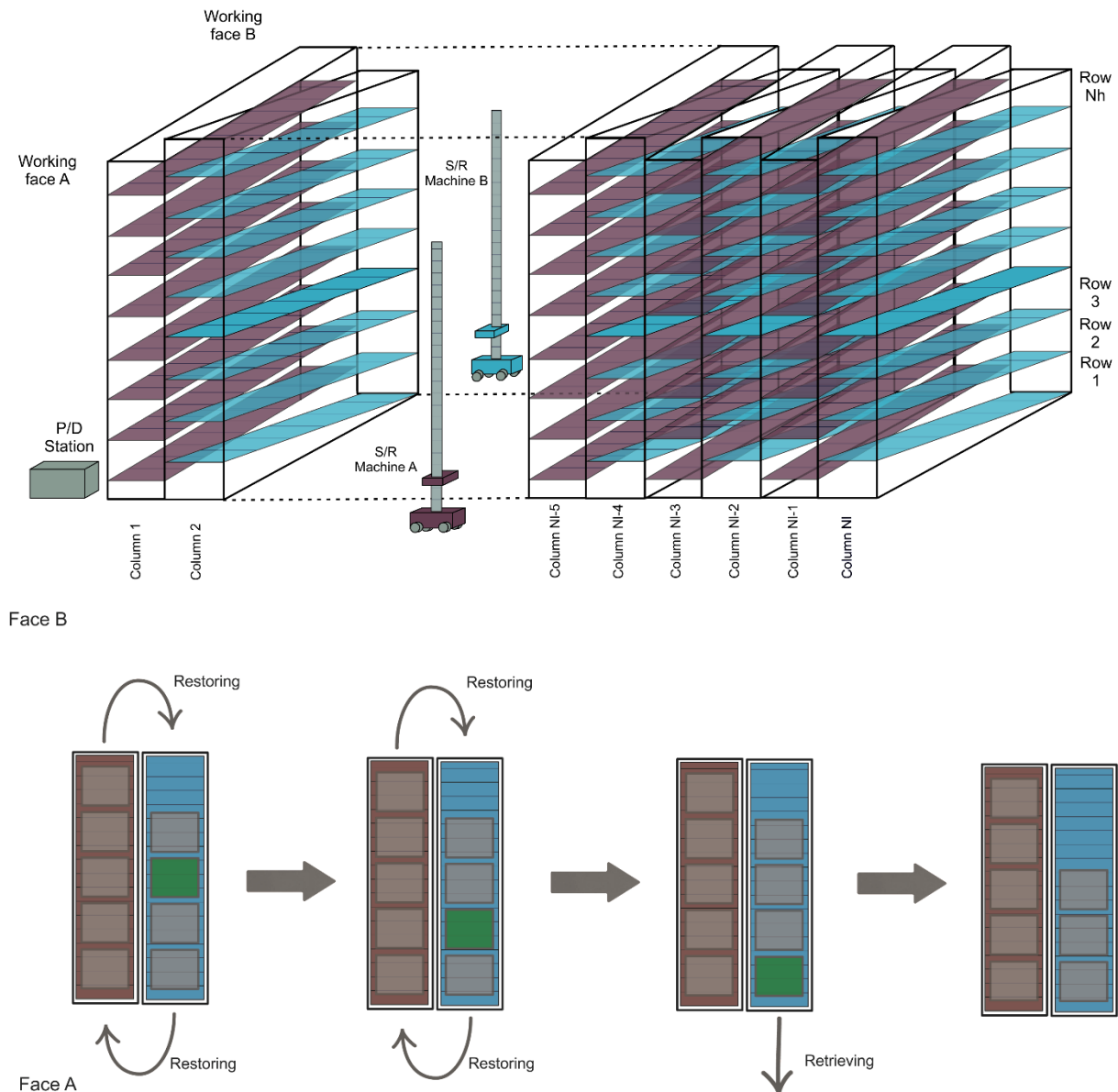


Figure 1.17 : AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels

1.4 Etat de l'art :

1.4.1 Introduction :

Au même titre que tous les domaines et secteurs, l'industrie emboîte elle aussi le pas au développement technologique et à la modernisation des activités de l'homme. Ceci s'illustre par le développement de nouveaux outils, nouvelles méthodes ou de nouveaux équipements, qui ont tous pour objectif commun d'améliorer les performances, l'efficacité et l'efficacité tout en facilitant les activités liées à l'industrie. Comme présenté plus haut, les AS/RS font partie de ces nouveaux équipements technologiques qui visent à améliorer les performances des entreprises pour les activités liées à la manutention, le stockage et l'entrepasage. La création, le développement, l'installation et l'utilisation de ces systèmes sont étudiés suivant des méthodes scientifiques rigoureuses et des outils mathématiques, logiciels ou d'expérimentation adaptés.

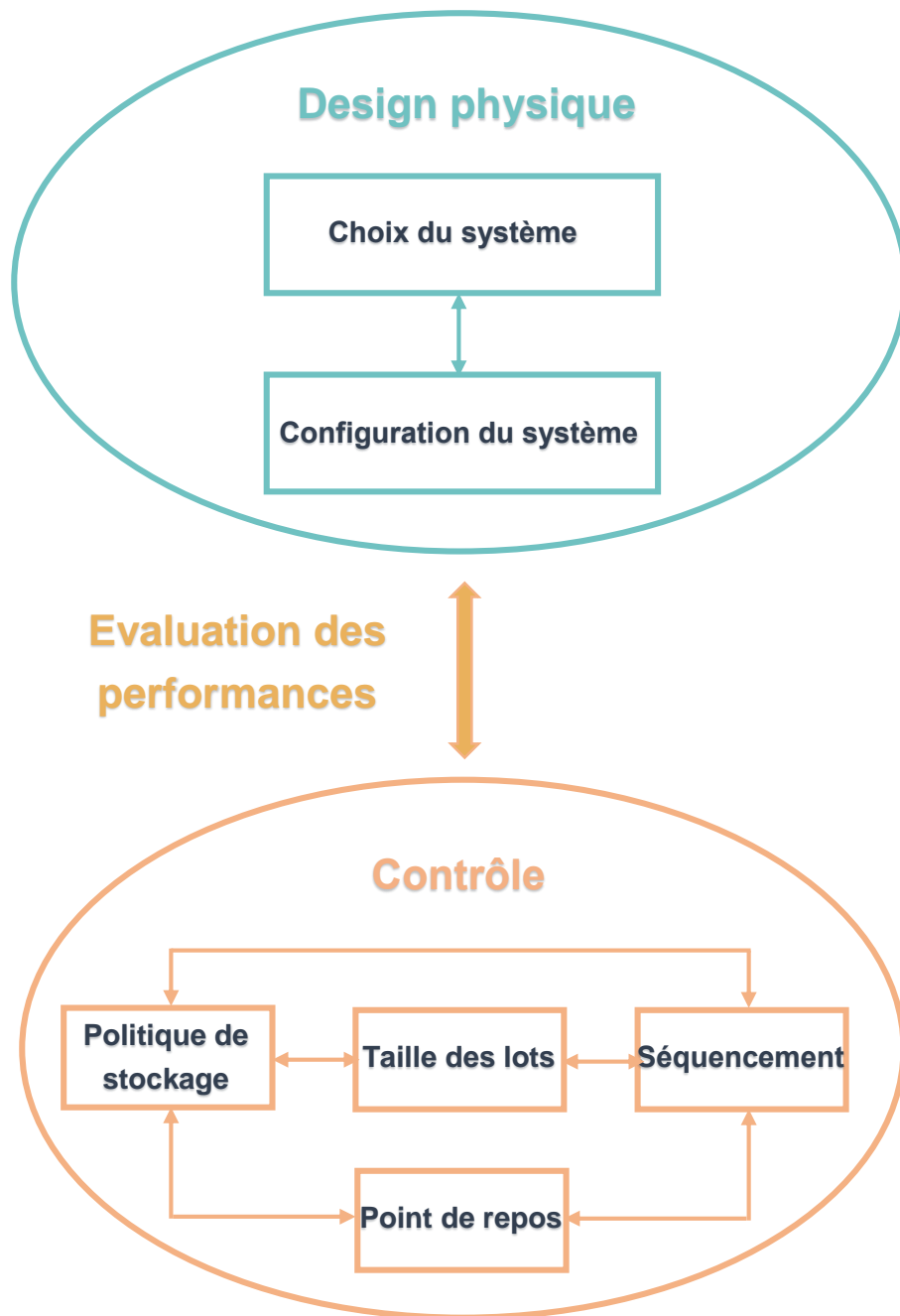


Figure 1.18: Relation entre les principaux axes de recherches

Les travaux scientifiques traitants de l'étude des AS/RS tentent de répondre aux questions que peuvent se poser les décideurs dans l'industrie lorsqu'il s'agit d'acquérir, installer ou utiliser un AS/RS. Le cheminement procédural technique que doivent suivre ces derniers afin de s'assurer de la viabilité de l'acquisition et l'utilisation d'un tel système se divisent en deux grandes étapes, la première concerne les décisions qui doivent être prises en amont de l'installation du système, et la seconde concerne celles qui sont prise pendant son utilisation (Roodbergen & Vis, 2009) Figure 1.18.

De la même manière, nous pouvons identifier deux grands axes de recherches, le premier regroupe les travaux scientifiques qui s'intéressent à l'étude des facteurs qui impactent le fonctionnement du système sur le long terme et qui sont liés à des décisions prises en amont de l'installation du système (décisions stratégiques). Le second axe s'intéresse aux facteurs qui influencent le fonctionnement du système

pendant son utilisation, c'est-à-dire à un niveau tactique et opérationnel. Dans ce qui va suivre nous allons exposer les différents travaux scientifiques qui traitent de l'étude des AS/RS suivant cette logique de classification.

1.4.2 Design physique et configuration initiale :

Les recherches concernant le design physique des systèmes de stockage automatisés s'intéressent au développement de nouveaux AS/RS performants, à la configuration des systèmes avant leur installation (nombre de machines, dimensions spatiales, nombre et emplacement des points de repos), ainsi qu'à la proposition d'outils d'aide à la décision et d'évaluation des performances sur le long terme. (Heskett, et al., 1973) ont décrit les principaux aspects de la conception des entrepôts de stockage sous trois grandes rubriques : la détermination des exigences, la conception des systèmes de manutention et l'élaboration de l'aménagement. (Firth, et al., 1988), (Hatton, 1990) et (Mulcahy, 1994) ont suivi une approche similaire à celle des auteurs précédents, mais intègrent également des caractéristiques supplémentaires, telles que la reconnaissance de l'entrepôt dans l'ensemble du réseau de distribution et la comparaison d'approches alternatives.

En plus des caractéristiques clés fournies par ces derniers une liste plus aboutie a été proposée par (Oxley, 1994). Il commence par définir les exigences globales de la chaîne logistique, en incluant des facteurs comme le taux de service et les contraintes temporelles. Tout en mettant l'accent sur l'importance de la collecte et l'analyse de données, en plus de prendre en considération les équipements de manutention à utiliser ainsi que les modes opératoires à adopter. (Hassan, 2002) présente une base de travail sous forme d'une procédure pour le design et la configuration des entrepôts de stockage, afin d'organiser et de faciliter le processus du design et de mettre en évidence les principales difficultés auxquelles peuvent faire face les décideurs, ce qui leur permettra de prendre des décisions réfléchies. L'objectif est de disposer d'une procédure permettant d'élaborer un aménagement (configuration) qui présente plusieurs caractéristiques telles que la modularité, l'adaptabilité, la compacité, l'accessibilité, la souplesse et la répartition des mouvements pour lui permettre de s'adapter aux conditions changeantes, d'améliorer l'utilisation de l'espace et de réduire la congestion et les déplacements inutiles. (Dallari, et al., 2009) ont développé une méthodologie d'aide à la décision pour le choix du système d'entreposage et de manutention le mieux adapté. Et cela en développant une nouvelle classification de ces derniers, via une enquête approfondie menée sur plus de 68 centres de distribution récemment construits en Italie. Les résultats de l'analyse critique ont permis d'élaborer une méthodologie de conception pour choisir l'OPS (Order Picking System) le plus appropriée. Cette méthodologie a été intégrée dans la procédure structurée de conception des OPS, développée par (Yoon & Sharp, 1996). Enfin, une étude de cas numérique est présentée pour illustrer l'application de la méthodologie de conception proposée.

(Thomas & Meller, 2014) se sont intéressés à l'impact de la forme géométrique de l'entrepôt et l'emplacement des portes de quai sur son fonctionnement à long terme, en proposant un modèle mathématique adapté. (Bozer & White, 1984) furent parmi les premiers à procéder à des modélisations mathématiques des AS/RS. Ils ont proposé deux approches de modélisations, discrète et continue, puis ont développé des modèles des temps de cycle pour l'AS/RS à charge unitaire. (De Koster, 2007) s'est intéressé à l'AS/RS à rack 3D compact afin de définir les ratios optimaux entre les trois dimensions spatiales du système. En d'autres termes l'auteur a calculé les dimensions optimales de l'AS/RS qui assure un fonctionnement performant sur le long terme du point de vue du temps de cycle, et pour se faire un modèle mathématique du temps du simple cycle a été développé. (Yang, et al., 2014) ont eux aussi développé des modèles de temps de cycle puis procédé à l'optimisation du design du système étudié (AS/RS à étagère profonde) et cela afin de déterminer les ratios entre les différentes dimensions optimales. Cependant, les modèles des temps de cycle développés considèrent

l'accélération/décélération des machines S/R ainsi que leurs vitesses maximales. (Manzini, et al., 2005) ont présenté un modèle dynamique multiparamétrique d'un système de stockage pour une politique de stockage par classes. Des milliers de scénarios ont été simulés afin de mesurer l'impact de designs et configurations alternatifs sur les performances du système afin d'identifier les facteurs critiques et les combinaisons de facteurs qui affectent le plus le temps de réponse du système. Toujours en considérant un stockage par classe (Gamberi, et al., 2012) ont développé des modèles du temps de cycle adaptés, alors que (Xu, et al., 2018) ont modélisé le temps de cycle puis optimisé les dimensions d'un AS/RS à étagère profonde. Dans (Lee, et al., 2005) un modèle pour un AS/RS à cellules modulaires a été proposé, qui a été par la suite utilisé afin de déterminer les dimensions optimales de ces cellules, ce qui offre un avantage de flexibilité très important par rapport aux systèmes à cellules de taille fixe. (Ekren, et al., 2010) ont mis en place un modèle de simulation afin d'évaluer l'impact des paramètres de configuration du système (données d'entrées) sur certains facteurs de performances (données de sortie). Le système de stockage étudié est un AVS/RS, et les paramètres de configuration du système sont le nombre d'ascenseurs et de véhicules, les taux d'arrivées, points de repos, règle d'ordonnancement et d'entrelacement ainsi que les emplacements des Entrées/Sorties, alors que les facteurs de performances étaient le temps de cycle moyen ainsi que les taux d'utilisation des ascenseurs et véhicules. (Takakuwa, 1993) ont étudié un entrepôt muni d'un AS/RS ainsi qu'un système de convoyage. L'efficacité du système est étudiée en fonction de ces spécifications initiales, comme le nombre de véhicules autoguidés, nombre de convoyeurs rentrants et sortants ainsi que la taille des buffers. Une analyse du coût est effectuée avant de passer à une analyse de sensibilité afin de trouver le système optimal du point de vue économique et de la performance. Dans (Ekren, 2011) une évaluation des performances d'un AVS/RS a été conduite, et suivant différents scénarios du design prédéfinis. Les scénarios générés sont fonctions des configurations de base du rack, c'est-à-dire le nombre d'allées, de colonnes et d'étages, ainsi que le nombre de véhicule et d'ascenseurs. D'un autre côté les mesure de performances étaient le temps de cycle moyen, les taux d'utilisations des véhicules et ascenseurs, ainsi que les temps d'attente moyens et le nombre de transactions en attente dans les files d'attente des véhicules et des ascenseurs, tout en prenant en considération le coût total engendré. (Sari & Bessenouci, 2012) ont présenté un nouveau système de stockage automatisé, qui est une variante de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels. De plus ils ont présenté différents modèles du temps de cycle, pour le stockage, déstockage et double cycle tout en considérant deux politiques du point de repos pour la machine. (Kouloughli & Sari, 2015) se sont intéressés à l'AS/RS multi-allées, en proposant des modèles mathématiques du temps de cycle, à partir desquels une optimisation des dimensions du système a pu être effectuée, afin d'une part trouver les ratios optimaux entre les trois dimensions spatiales du système et d'autre part de mettre en évidence une région utile où un changement minime dans les dimensions n'impacte pas de manière considérable les performances du système en terme de temps de cycle. D'autre part (Malmborg, 2003) a développé des modèles mathématiques pour un AS/RS à base de véhicules sur rails intelligents. Ces modèles permettent de calculer les performances et le coût d'un tel système en fonction de sa configuration initiale (le nombre d'allées ainsi que leur profondeur et hauteur, en plus de la taille de la flotte de véhicules et ascenseurs). Toujours pour le même type de système (Kuo, et al., 2007) ont proposé de nouveaux modèles plus efficaces computationnellement. Un temps de service moyen est généré en utilisant les temps de déplacements des véhicules et ascenseurs en plus de la probabilité de distribution de 12 scénarios selon des hypothèses de fonctionnement réalistes. (Chen, et al., 2015) ont présenté un nouveau type de système, qui regroupe les avantages d'un AS/RS à convoyeurs gravitationnels classique et celles d'un système à convoyeurs gravitationnels à une seule machine présenté par (Sari & Bessenouci, 2012). Ce système (l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels) a été étudié dans le papier en question et des modèles du temps de déplacement des machines ont été calculés. Pour le même système, (Hamzaoui, et al., 2019) ont proposé deux méthodes d'optimisation du design en utilisant deux modèles différents. En considérant une politique de stockage par classe, (Kuo, et al., 2008)

ont proposé des modèles du temps de cycle pour l'AVS/RS comme outils mathématiques pour l'aide à la décision au niveau du design. En étudiant le même système, (Ekren & Heragu, 2010) ont procédé à une analyse de régression via simulation sur Arena 12. L'objectif était de développer des fonctions mathématiques de la configuration du rack pour un AVS/RS qui reflète la relation entre les sorties (mesures de performances) et les entrées (configuration initiale du système). (Sari, et al., 2005) se sont intéressés à l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels, où ils ont présenté des modèles du temps de cycle suivant deux approches de modélisations, l'une continue et l'autre discrète, avant de procéder à une évaluation du gap entre les deux via simulation. (Sari & Hamzaoui, 2013) ont procédé à l'optimisation des dimensions d'un AS/RS à convoyeurs gravitationnels à une machine pour des temps de cycles minimaux, en utilisant les modèles développés dans (Sari & Bessenouci, 2012). Par la suite (Hamzaoui & Sari, 2015) ont proposé un modèle paramétrique général pour le même système par extension au travail de (Hamzaoui & Sari, 2013), puis ont défini des régions d'optimalité. Toujours pour le même système, (Ghomri & Sari, 2017) ont développé des modèles du temps de cycle qui tiennent compte de la variété des produits se trouvant dans le système. (Metahri & Hachemi, 2018) ont quant à eux étudié l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à chute libre, largement utilisé dans l'industrie pharmaceutique. Ces derniers ont développés des modèles de temps de cycles continus avant de valider leur précision en les comparant à des modèles discrets. Après avoir procédé à l'optimisation du design de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à une seule machine en utilisant un modèle continu général dans (Hamzaoui & Sari, 2013), (Sari & Hamzaoui, 2016) ont développé des modèles du temps de cycle discrets pour le même système. Il s'agissait de modèles pour les simples et doubles cycles ainsi qu'un modèle général. Alors que (Ouhoud, et al., 2016) ont procédé à une étude comparative entre les modèles discrets et continus du temps de cycle. (Manzini, et al., 2007) ont développé un modèle analytique ainsi qu'un modèle dynamique multiparamétrique permettant d'estimer rapidement la distance parcourue au cours d'un cycle de déstockage. L'analyse factorielle de plusieurs scénarios de simulation a révélé quels facteurs et combinaisons de facteurs sont les plus importants pour influencer la réponse du système. (De Koster, et al., 2008) ont développé des modèles du temps de cycle pour l'AS/RS à rack 3D compact, puis ont procédé à l'optimisation du design de ce système afin de déterminer les ratios optimaux entre ses trois dimensions spatiales. (Xu, et al., 2018a) ont développé de nouveaux modèles du temps de cycles pour le même système, mais en considérant que le point de repos de la machine soit en bas au milieu de la face du rack. Puis ils ont procédé à l'optimisation des dimensions du rack. Etudiant le même système, (Yang, et al., 2017) ont développé des modèles du temps de cycle en tenant compte de l'accélération et décélération de la machine S/R, puis ont procédé à l'optimisation du rack du système pour un temps de cycle moyen minimal. D'autres chercheurs se sont intéressés à l'étude de l'AS/RS multi-allées, comme (Lerher, et al., 2010) qui ont développé des modèles du temps de cycle en prenant en considération les caractéristiques opérationnelles du fonctionnement des machines S/R, comme l'accélération/décélération et la vitesse maximale. (Ghomri, et al., 2009) ont présenté des modèles du double cycle pour l'AS/RS multi-allées. (Gagliardi, et al., 2015) ont quant à eux évalué la pertinence de l'hypothèse communément acceptée, qui est de modéliser un multi-allées à m allées comme étant m systèmes à une allée, ce qui a révélé des écarts relativement importants. (Eldemir, et al., 2004) ont présenté des modèles du temps de cycle et de l'évaluation de l'espace comme outil d'aide à la conceptualisation initiale d'un AS/RS. En plus des systèmes de stockage dits classiques, les chercheurs du domaine se sont penchés sur l'analyse et l'étude des nouvelles technologies qui font leurs apparitions dans la manutention, comme c'est le cas pour les SBS/RS (Shuttle Based Storage/Retrieval Systems), une revue de la littérature intéressante leur est dédiée dans (Kosanić, et al., 2018). (Lerher, et al., 2015) ont développé des modèles analytiques du temps de cycle pour ces systèmes, tout en considérant les caractéristiques opérationnelles des ascenseurs et chariots, comme l'accélération/décélération et la vitesse maximale. (Ekren, et al., 2018) ont développé un outil informatique d'évaluation des performances d'un SBS/RS, en terme de temps de cycle moyen, de variance, ainsi qu'en consommation énergétique. Dans (Ekren, et al., 2015)

une analyse via simulation a été effectuée afin d'évaluer les performances d'un SBS/RS. Alors que (D'Antonio, et al., 2018) ont présenté des modèles du temps de cycle pour l'AVS/RS à étagère profonde, tout en considérant les caractéristiques opérationnelles d'un tel système. (Marchet, et al., 2013) ont proposé une méthode heuristique pour la résolution du problème d'optimisation du design d'un AVS/RS afin de minimiser son coût. (Lerher & Šraml, 2012) ont procédé à l'optimisation du design d'un AS/RS à charge unitaire pour un coût minimal, en utilisant un algorithme génétique comme méthode de résolution. (Borovinšek, et al., 2017) se sont penchés sur l'optimisation multi-objectifs du design du SBS/RS. Trois critères étaient considérés dans la conception du design ; la minimisation du temps de cycle moyen, la quantité d'énergie consommée et le coût d'investissement total. (Rajković, et al., 2017) ont eux aussi étudié le design des AS/RS en multi-objectifs, en considérant le temps de cycle, le coût et l'empreinte carbone comme critères à optimiser.

Comme indiqué auparavant, les AS/RS peuvent être utilisés dans différents secteurs, (Chen, et al., 2003) se sont intéressés à l'utilisation des systèmes de stockage dans les terminaux portuaires pour la manutention des conteneurs. Ces derniers ont développé des modèles du temps de cycle, et ont confirmé leur faisabilité en termes de performance en débit. (Liu, et al., 2002) se sont eux aussi intéressés aux terminaux portuaires automatisés, mais en utilisant d'autres méthodes d'investigations. Ils ont développé un modèle de simulation afin de déterminer les caractéristiques optimales d'un terminal portuaire. Le but est de générer différents scénarios possible et de déterminer les caractéristiques optimales qui minimisent le coût d'utilisation à long terme ainsi que les performances opérationnelles de ce dernier. (Vasili, et al., 2008) ont aussi étudié le système automatisé de manutention d'un terminal portuaire, sous la forme d'un SP-AS/RS (Split-Platform AS/RS). Ils ont par ailleurs développé des modèles mathématiques du temps de cycle moyen, dont la précision a été par la suite validée via une simulation basée sur la méthode de Monte Carlo.

Par ailleurs, la position du point de repos de la machine S/D influence grandement les performances du système sur le long terme. L'impact de cet élément du design a été étudié par plusieurs chercheurs. (Egbelu, 1991) a traité le problème de minimisation du temps de cycle en considérant l'emplacement du point de repos comme une variable de décision du design via programmation linéaire. En utilisant deux politiques du point de repos proposées par (Egbelu, 1991) et quatre autre proposées par (Bozer & White, 1984), (Egbelu & Wu, 1993) ont effectué une étude comparative via simulation. (Park, 2001) a proposé une méthode pour la détermination du point de repos optimal. Le cas considéré est celui d'une distribution non uniforme à travers le rack, l'idée principale était de développer des formules analytiques basées sur la probabilité du type d'opération à venir (stockage ou déstockage). (Van den Berg, 2002) a lui aussi présenté des formules analytiques permettant de déterminer les points de repos optimaux, et cela suivant un stockage aléatoire ou par classe. (Peters, et al., 1996) ont pu arriver à la conclusion que le meilleur point de repos pour la machine est au centre du rack, et cela après avoir développé une formule analytique en fonction de la position du point de repos sous une pluralité de configurations d'AS/RS. S'intéressant à l'AS/RS multi-allées, (Chang & Egbelu, 1997) ont développé deux algorithmes permettant la détermination du point de repos optimal. Le premier algorithme génère le meilleur point de repos permettant de minimiser le temps de la prochaine transaction, alors que le second permet de trouver le point de repos qui minimise le temps de cycle moyen (l'ensemble des opérations). (Xu, et al., 2019) ont étudié la meilleure politique de l'emplacement des entrées/sorties pour l'AS/RS à rack compact 3D. Les auteurs ont proposé quatre politiques différentes, et après l'étude des performances de chacune, ils sont arrivés à la conclusion que le point E/S surélevé au milieu du rack donne de meilleures performances que celui au milieu bas de 6,07%. Tout en sachant que ce dernier surpasse les deux autres politiques proposées.

1.4.3 Contrôle :

Comme expliqué plus haut, par opposition à la partie configuration, la partie contrôle regroupe l'ensemble des activités visant à améliorer le fonctionnement du système et à optimiser ses performances au cours de son utilisation, c'est-à-dire à un niveau tactique et opérationnel, il existe beaucoup de travaux qui s'orientent vers cet axe là et qui visent à solutionner un certain nombre de problèmes qui se posent et auxquels font face les décideurs à ce niveau. L'un des problèmes qui peut se poser à un niveau opérationnel est celui de l'ordonnancement des transactions de stockage/déstockage. (Eben-Chaïme & Pliskin, 1996) et (Eben-Chaïme & Pliskin, 1997) ont pu démontrer que les AS/RS qui fonctionnent en régime hybride (simples et doubles cycles) atteignent plus facilement une stabilité de la file d'attente et nécessitent moins de machines. D'autre part (Bozer, et al., 1990) met en évidence le fait que l'ordonnancement des transactions en double cycle est analogue au problème du voyageur, et qui est connu comme étant un problème NP-complet. (Lee & Schaefer, 1996) ont proposé un algorithme d'entrelacement, afin de générer des doubles cycles de manière efficace à partir des demandes de stockage et déstockage dans un AS/RS à charges unitaires. (Han, et al., 1987) affirment que le problème d'ordonnancement des requêtes de stockage/déstockage est NP-difficile en raison du fait que l'ensemble des emplacements de stockage dépend des stockages et déstockage précédents, cependant, certains cas particuliers peuvent être résolus en un temps polynomial.

(Elsayed & Lee, 1996) ont étudié le fonctionnement d'un AS/RS lorsque les ordres de déstockage sont à dates connues. Ils ont développé une méthode pour l'association des ordres de stockage et de déstockage pour former des doubles cycles, puis d'ordonner ces doubles cycles afin de minimiser le retard global des ordres de déstockage. Cependant lorsqu'il s'agit d'ordonnancement dynamique, plusieurs études ont été conduites, telles que des études par simulation afin de comparer les performances de plusieurs heuristiques utilisées en association avec plusieurs stratégies d'affectation de stockage (Linn & Wysk, 1987). (Han, et al., 1987) ont démontré que l'heuristique du plus proche voisin donne de bons résultats, puisqu'elle offre généralement un temps de cycle global inférieur à celui de la règle premier arrivé premier servi. Cependant, dans un environnement de forte incertitude, des méthodes plus élaborées peuvent être appliquées, telles que les algorithmes génétiques (Krishnaiah Chetty & Sarveswar Reddy, 2003), les réseaux de neurones (Wang & Yih, 1997), l'intelligence artificielle (Seidmann, 1988) et les systèmes experts (Linn & Wysk, 1990a) et (Linn & Wysk, 1990b). Par ailleurs ces méthodes ont l'avantage d'être capable de s'adapter aux fluctuations et d'apprendre des événements passés et de l'historique d'utilisation. En outre, dans les systèmes de stockage dotés de machines pouvant prendre plus d'une charge, en plus des doubles cycles, il devient possible d'effectuer des quadruples cycles, sextuples cycles etc. Dans cette optique, (Van Oudheusden, et al., 1988), (Goetschalckx & Ratliff, 1988) et (Hwang & Song, 1993) se sont intéressés à l'ordonnancement des transactions de stockage/déstockage pour l'AS/RS à personne embarquée, en proposant des heuristiques adaptées, tandis que (Abdel-Malek & Tang, 1994) et (Hwang, Kim, & Ko, 1999) ont étudiés l'AS/RS à carrousel.

Certaines caractéristiques d'AS/RS particuliers génèrent des contraintes supplémentaires pour le même problème ou au contraire une simplification de celui-ci. Dans un AS/RS à mini charge par exemple, les demandes de déstockage actuelles se transforment en demandes de stockage futures puisque les charges doivent être retournées au système après le déstockage de la mini-charge. (Mahajan, et al., 1998) se sont justement intéressés à ce système, en proposant que les demandes de déstockage soient réarrangées de telle sorte que les demandes successives soient situées les unes à côté des autres. Le stockage et le déstockage qui sont proches l'un de l'autre peuvent être couplés par une heuristique du plus proche voisin. (Bozer & White, 1996) ont développé, pour ce même système, un algorithme permettant de déterminer le nombre minimum d'opérateurs au bout de l'allée. L'élaboration de cet algorithme est basée sur un modèle analytique approximé du taux d'utilisation des opérateurs.

(Hu, et al., 2019) se ont penché sur le problème d'ordonnement des transactions de déstockage pour les AS/RS. Ces derniers ont formulé ce problème sous forme d'un modèle de programmation linéaire en nombre entiers. Afin de résoudre le problème, un algorithme génétique a été utilisé. L'algorithme semble donner de bons résultats, puisqu'il est plus performant qu'une politique FCFS de 8,36%, tout en sachant que la déviation de la solution obtenue par rapport à la borne inférieure calculée est de 2,00% en moyenne. (Wen, et al., 2018) ont proposé un modèle de programmation linéaire stochastique, afin de traiter le problème d'ordonnement avec panne des navettes autonomes dans un AS/RS. Par la suite une étude numérique a été conduite afin de valider la robustesse des solutions obtenues pour faire face à l'incertitude liée aux pannes des navettes. (Yang, et al., 2019) se sont penchés sur le problème d'ordonnement des requêtes de stockage/déstockage dans les AS/RS. Ils ont proposé une variante hybride de l'algorithme génétique basée sur la théorie des ensembles polychromatiques, et cela afin de surmonter les inconvénients des phénomènes de convergence précoce (vers des optimums locaux) et du manque de stabilité de l'AG. La matrice contour des ensembles polychromatiques est utilisée pour générer une population initiale de bonne qualité. Puis durant la partie itérative, le recuit simulé est utilisé afin d'éviter les optimums locaux dans le but d'obtenir une solution satisfaisante. (Cinar, et al., 2017) ont eux aussi étudié l'ordonnement des commandes de déstockage dans un AS/RS, en modélisant ce dernier comme un job shop flexible. Où les commandes étaient considérées comme étant les jobs, les palettes de chaque commande comme étant des opérations, et les transstockeurs comme étant des machines. L'objectif était de minimiser le temps de déstockage maximal, un algorithme génétique a été implémenté pour y parvenir.

D'autre part, l'étude des politiques de stockage fait l'objet d'une grande attention de la part de la communauté scientifique. L'élaboration de politiques de stockages efficaces permet d'améliorer les performances du système à moyen et long terme. Les décisions relatives aux politiques de stockage relèvent du niveau tactique, il faut donc trouver des solutions qui permettent d'offrir des réponses relativement rapidement, tout en ayant un degré d'adaptabilité et de flexibilité important.

Tout d'abord, le mode de stockage aléatoire a été largement considéré dans la littérature (Hausman, et al., 1976), (Bozer & White, 1984) (Lee & Elsayed, 2005) et (De Koster, et al., 2008). Cependant, il a été démontré que le stockage par classe demeure plus performant qu'un stockage dédié ou un stockage aléatoire. Parmi les premiers à s'être intéressés au stockage par classe on retrouve (Hausman, et al., 1976). Ces derniers ont étudié l'AS/RS à charges unitaires, en comparant trois politiques de stockage ; le stockage par classe, le stockage aléatoire, et le stockage dédié. (Graves, et al., 1977) ont pu démontrer que même pour un AS/RS à rack carré, un stockage par classe avec des régions en forme de L n'est pas nécessairement le choix optimal. D'autres chercheurs se sont intéressés à la forme des zones des différentes classes dans un AS/RS, (Guenov & Raeside, 1992) ont étudié l'AS/RS à charge unitaire et ont conclu que la configuration de ces zones dépend de la position du point E/S. D'un autre côté, (Rosenblatt & Eynan, 1989), en cherchant à déterminer le nombre de classes optimal pour un AS/RS en utilisant la méthode de (Hausman, et al., 1976) ont déduit que les temps de cycle les plus bas sont obtenus lorsque l'AS/RS dispose de relativement peu de zones de stockage. (Eynan & Rosenblatt, 1994), ont considéré trois type de classes puis ont modélisé leur temps de cycle. Ils ont pu confirmer les résultats précédents en montrant que les meilleures performances sont obtenues avec un petit nombre de classes. L'étude des politiques de stockage, du nombre et de la taille des classes, ainsi que leurs performances, concerne aussi bien les simples que les doubles cycles. Cependant, en raison de la complexité du problème, les cas concernant les doubles cycles sont étudiés généralement que de manière numérique. En considérant les cas non carrés, (Park, 2006) a pu déterminer la moyenne et la variance des temps de simples et doubles cycles avec deux classes de stockage. Par la suite il a analysé l'impact des paramètres d'asymétrie sur le rendement du système, mais sans donner la taille de la région optimale.

(Jarvis & McDowell, 1991), (Tang & Chew, 1997) ont calculé de temps de cycle moyen dans un entrepôt lorsqu'un stockage par classe est adopté. Outre l'AS/RS à charges unitaires, d'autres systèmes ont été étudiés, comme c'est le cas pour l'AS/RS à mini-charges, où (Park., et al., 2003), se sont penché sur l'analyse de ses performances lorsqu'un stockage par classes à deux zones est utilisé. (Kouvelis & Papanicolaou, 1995) ont considéré un AS/RS rectangulaire en temps à deux classes. Ils ont mis en évidence des relations explicites pour les limites optimales des régions ainsi que pour le temps de transport du simple cycle. (Ashayeri, et al., 2002) ont quant à eux développé un algorithme offrant des solutions pour le stockage par classe. Cet algorithme permet d'obtenir, le nombre de classes, leurs tailles ainsi que leurs dispositions dans le rack. Afin de comparer les performances d'un AS/RS lorsque le stockage par classe ou le stockage aléatoire est utilisé (Muppani & Adil, 2008) ont développé un modèle non-linéaire en nombre entiers, qui a été par la suite résolu en utilisant un algorithme de type Branch & Bound. Ceci a permis de montrer que le stockage par classe offre plus d'avantages, même si le stockage dédié et aléatoire restent très couramment utilisés. (Hamzaoui, et al., 2014) ont développé une interface homme/machine pour l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels à une seule machine, permettant de traiter les transactions de stockage soit en stockage dédié ou aléatoire, tout en procédant à des déstockage intelligents en choisissant toujours le produit de la même famille le plus rapide à déstocker ou dont l'échéance de péremption est la plus proche. (Hamzaoui & Baba Ahmed, 2016) ont fait de même pour l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels tout en procédant à sa réalisation physique en taille semi-industrielle afin de procéder à l'évaluation de ses performances en situation réelle.

Dans (Gaouar, et al., 2010) les auteurs ont présenté les résultats d'une étude comparative réalisée par simulation entre un stockage par classes, un stockage purement aléatoire et un stockage par une heuristique développée dans un papier antérieur (Gaouar, 2004). (Bessenouci & Ghomri, 2012) ont utilisé deux métaheuristiques (la recherche tabou et le recuit simulé) pour le contrôle de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels, et cela afin de minimiser le temps de déstockage. Par ailleurs, (Ma & Cao, 2019) ont proposé une politique de stockage à deux classe pour le SP-AS/RS (Split-Platform). Ces derniers ont par la suite comparé les performances de cette méthode avec celles d'une politique de stockage aléatoire. Les résultats numérique ont montré que la méthode proposé pouvait significativement réduire le temps moyen de déstockage, jusqu'à 63,92% pour les instances testées. (Roshan, et al., 2019) ont présenté un modèle multi-objectif d'optimisation pour la mise en place d'une politique d'allocation performante et écologique. (Ramtin & Pazour, 20015) ont étudié l'impact des allocations des positions des produits sur le débit global du système pour différentes politiques opératoires. Par la suite ils ont proposé un algorithme efficace de complexité $O(n \log(n))$ qui donne l'allocation des emplacements des produits qui minimise le temps de déstockage moyen.

1.5 Conclusion :

Ce chapitre avait pour but, d'introduire au domaine des AS/RS ainsi que de se familiariser avec les différents termes et concepts de ce jargon particulier. Une multitude de définitions ont été exposées, les différents types d'AS/RS les plus répandus présentés, et leurs principaux éléments constitutifs énumérés. La revue de la littérature à la fin du chapitre est venue synthétiser de manière globale les différentes contributions scientifiques apportées à ce domaine et cela en traitant différents axes de recherche, afin de mieux situer les principales contributions scientifiques produites et exposées dans cette thèse, et qui seront présentées dans les trois chapitres suivants.

Dans le chapitre qui va suivre, des modélisations mathématiques du système étudié vont être développées. Ce sont des équations mathématiques qui expriment le temps moyen théorique que met ce système afin d'effectuer des transactions de stockage, de déstockage ou de double cycle. Deux approches

de modélisation ont été utilisées afin d'y parvenir, les modèles issus de ces deux approches vont être comparés via un programme codé sous Matlab, et dont les résultats vont être exposés, analysés et commentés.

Chapitre 2 :
Développement de modèles mathématiques du
temps de cycle

Chapitre 2 :

Développement de modèles mathématiques du temps de cycle

2.1 Introduction :

Dans ce second chapitre nous allons présenter les différents modèles mathématiques du temps de cycle que nous avons développés pour l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels. Il s'agit de formules mathématiques traduisant le temps moyen que le système étudié met à satisfaire une requête de stockage/déstockage. Ces modèles du temps de cycles ont été calculés selon deux approches différentes. La première dite « discrète » se base sur un maillage de la face du rack, de telle sorte que chaque élément de la matrice obtenue représente un casier du rack. De ce fait, et suivant une loi de distribution adaptée à la politique de stockage choisie, un temps de cycle moyen est calculé. La seconde approche est dite « continue », et qui est basée sur une approximation de la face du rack en la considérant comme étant une infinité de points, où chaque point peut être le siège d'une opération de stockage ou de déstockage. Par ailleurs, des modèles du temps de cycle suivant les deux approches ont été développées pour le double et les simples cycles (le calcul des modèles simples cycles ont fait l'objet d'une publication internationale (Hamzaoui & Sari, 2019)). Par la suite une étude comparative a été effectuée afin d'évaluer le gap existant entre les deux types de modélisation. Pour cela une simulation a été conduite via un programme Matlab que nous avons spécialement développé.

2.2 Développement des modèles mathématiques :

Comme expliqué dans le chapitre précédent, il existe différents types de cycles qui peuvent être effectués par l'AS/RS (suivant le type du système et la capacité de la, ou les machines S/D) ainsi que deux principaux types de méthodes de modélisation. Nous considérons dans ce qui suit deux types de cycles, simple et double, ainsi que les deux méthodes de modélisation basées sur les travaux de (Bozer & White, 1984).

2.2.1 Simple cycle de stockage/déstockage :

➤ Modélisation discrète du temps de cycle :

Afin de procéder à la modélisation du temps de cycle du système, il est nécessaire de modéliser le temps de déplacement des machines S/R, chose qui n'est possible qu'une fois leurs déplacements clairement définis et identifiés. Dans ce type de modélisation chaque casier du rack est considéré de manière ponctuelle dans chacune des deux faces du rack, de ce fait pour un rack de dimensions fixes, l'ensemble des casiers atteignables par les machines S/R dans chacune des deux faces du rack est borné et dénombrable. Ce qui nous permet comme dans (Bozer & White, 1984) de considérer toutes les transactions possibles (stockage/déstockage) afin de calculer un temps de cycle moyen de tout le système. Ce calcul du temps de cycle moyen dépendra aussi d'un ensemble de facteurs ; mode de fonctionnement du système, nombre de machines S/R, points de repos des machines S/R, politique de stockage considérée, etc.

- **Déplacements des machines S/R :**

Afin d'effectuer une transaction de stockage ou de déstockage, chacune des machines S/R procède à une certaine séquence de déplacements. De ce fait nous avons pour la machine concernée par la transaction :

- a) Stockage :
 - Un aller de la station E/S vers l'emplacement de stockage.
 - Un retour de l'emplacement de stockage vers la station E/S.
- b) Déstockage :
 - Un aller du point de repos vers l'emplacement du produit à déstocker.
 - Restockage des produits bloquants (uniquement lorsque le produit à déstocker ne se trouve pas en première position).
 - Un retour du casier de déstockage vers la station E/S.

- **Fonctionnement global du système :**

Comme expliqué dans la section dédiée à la description du système considéré, ce dernier dispose de deux machines, qui selon le type de transaction à effectuer, travaillent indépendamment l'une de l'autre ou en collaboration, ce qui influe directement sur le débit du système. Le mode de fonctionnement est assujéti au type d'opération (stockage/déstockage) et à la position du produit concerné dans le casier. Lorsqu'il s'agit d'un stockage, les deux machines fonctionnent de manière totalement indépendante, c'est-à-dire que chacune d'elles procède aux opérations de stockages parallèlement l'une de l'autre, le système peut à ce moment-là être assimilé à *une unité à deux machines parallèles*. Par contre quand l'AS/RS traite des requêtes de déstockage, le mode de fonctionnement est fonction de l'emplacement du produit à déstocker dans le casier, et cela à cause des opérations de restockage qui nécessitent l'utilisation des deux machines en même temps pour la même opération. A ce moment-là le système est assimilable à *une unité à une seule machine* dont le temps opératoire est celui de la machine S/D qui procède au déstockage du produit considéré (ceci a été expliqué plus en détails dans section dédiée à la description du système, voir Figure 1.17).

- **Développement des modèles :**

Afin de procéder au calcul des modèles mathématiques, nous avons considéré un certain nombre d'hypothèses. Ces dernières ont été déterminées suivant les caractéristiques opérationnelles du système telles que décrites dans (Chen, Li, & Gupta, 2015) et la simplification de certains phénomènes physiques, comme la considération de vitesses constantes sans accélérations/décélérations.

Hypothèses :

A₁-Machine 1 stocke dans les colonnes impaires et déstocke dans les colonnes paires (inversement pour la machine 2).

A₂-Le système dispose de deux modes de fonctionnement pour le déstockage, puisque les machines fonctionnent en collaboration ou indépendamment l'une de l'autre comme expliqué plus haut.

A₃-Les emplacements de stockage/déstockage sont uniformément distribués (politique de stockage aléatoire).

A₄-Les points de repos des machines sont confondus aux stations d'entrée/sortie. Ces derniers sont situés au coin inférieur du rack, l'une en face de l'autre.

A₅-Les vitesses des machines sont considérées comme étant constantes sans accélération/décélération.

A₆-Les machines se déplacent dans le plan selon un déplacement de Tchebychev.

Notation :

ERC^D	Temps de déstockage moyen (Modèle discret)
ERC^C	Temps de déstockage moyen (Modèle continu)
ESC^D	Temps de stockage moyen (Modèle discret)
ESC^C	Temps de stockage moyen (Modèle continu)
AS/RS	Automated Storage and Retrieval System (Système automatisé de stockage/déstockage)
D/L	Dépôt/Livraison
S/D	Stockage/Déstockage
t'_h	Temps nécessaire pour le déplacement unitaire entre deux casiers adjacents (Horizontalement)
t'_v	Temps nécessaire pour le déplacement unitaire entre deux casiers adjacents (Verticalement)
t_v	Hauteur en temps du rack
t_h	Largeur en temps du rack
M	Nombre d'emplacements de charges unitaires dans chaque casier
N_h	Nombre de casiers en hauteur
N_l	Nombre de casiers en largeur
T	Facteur de normalisation, $T = \max(t_v, t_h)$
b	Facteur de forme, $b = \frac{\min(t_v, t_h)}{\max(t_v, t_h)}$
$m_{i,j}$	Nombre de produits stockés dans le casier ($i; j$)
h	Distance séparant verticalement la station de D/L du casier le plus bas.
l	Distance séparant horizontalement la station de D/L du casier le plus proche.
t'_p	Temps de déplacement nécessaire entre deux casiers appareillés.
N	Nombre d'emplacements de charges unitaires dans tout le système
ρ	Taux de charge

Afin de procéder à une modélisation discrète de notre système, nous considérons les deux faces du rack de notre système comme étant deux matrices où chaque élément représente un casier du rack. Les deux indices de la matrice représentent de ce fait les coordonnées verticales et horizontales de chaque casier. De plus, les stations de D/L (qui représentent par la même occasion dans notre cas les points de repos des machines) sont considérées comme étant du même côté du rack pour les deux machines (l'une en face de l'autre). De cette manière, le casier le plus proche pour la machines 1 est utilisé pour le stockage, alors que pour la machines 2 ce même casier est utilisé pour le déstockage.

A-Stockage :

Le système comprend deux machines S/D, qui dans le cas d'un stockage, fonctionnent de manière totalement indépendante l'une de l'autre, ce qui est équivalent à une station à deux machines parallèles (comme expliqué plus haut). Dans notre cas les pannes et indisponibilités des machines ne sont pas considérés, de ce fait les différentes méthodes de remplacement (Ignall & Silver, 1977), (Ancelin & Semery, 1987) et (Patchong & Willaëys, 2001), etc.) sont équivalentes, et stipulent que dans ce cas-là, la capacité (débit) de tout le système est tout simplement la somme des capacités des deux machines :

$$CSC^D = CSC_{Machine\ 1}^D + CSC_{Machine\ 2}^D \quad \dots(2.1)$$

Donc le temps de cycle moyen de stockage de tout le système sera :

$$ESC^D = \frac{ESC_{Machine\ 1}^D \cdot ESC_{Machine\ 2}^D}{ESC_{Machine\ 1}^D + ESC_{Machine\ 2}^D} \quad \dots(2.2)$$

D'un autre côté (Annexe A):

$$ESC_{Machine\ 1}^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2 \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \quad \dots(2.3)$$

$$ESC_{Machine\ 2}^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2 \max(2it'_h; jt'_v) \quad \dots(2.4)$$

Finalement :

$$ESC^D = \frac{4}{N_h \cdot N_l} \left(\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v) \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v)}{\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v)} \right) \quad \dots(2.5)$$

B-Déstockage :

Pour le déstockage, les deux machines peuvent fonctionner en collaboration ou indépendamment l'une de l'autre, selon l'emplacement du produit à déstocker. Lorsque le produit à déstocker se trouve en première position, la machine S/D se déplace jusqu'au casier concerné et déstocke le produit ciblé directement puis revient à la station E/S. Cependant, lorsque le produit à déstocker ne se trouve pas en première position, les deux machines travaillent en collaboration ; l'une procède au déstockage proprement dit du produit (en plus du déplacement des produits bloquant), alors que la seconde procède au transfert des produits du casier adjacent vers le casier d'où le produit concerné est déstocké (dans l'autre face du rack), et cela afin de garder l'équilibre du nombre de produits dans tous les casiers du système. De cette manière-là, le produit désiré peut être accessible pour la machines S/D. Nous identifions donc les deux modes opératoires comme ceci :

OP1 : Les deux machines fonctionnent indépendamment (Produit en première position).

OP2 : Les deux machines travaillent en collaboration (Produit ne se trouvent pas en première position).

Lorsqu'il s'agit du mode OP1, comme pour le stockage, le système est analogue à une station à deux machines en parallèles, nous utilisons donc comme pour précédemment, une méthode de remplacement. Cependant pour le mode OP2, le temps opératoire de tout le système est égal tout simplement au temps opératoire de la machine qui procède au déstockage.

De ce fait, le mode opératoire du système ne dépend que de la position du produit à déstocker. Le calcul du temps moyen en régime permanent nécessite donc la connaissance de la proportion de fonctionnement selon le premier ou second mode. Dans chaque casier nous avons M emplacements de stockage, et pour un taux de charge de ρ , nous avons en moyenne en régime permanent ρM produits

stockés dans chaque casier. Puisque la politique de stockage utilisée est celle d'un stockage aléatoire, tous les emplacements de produits ont la même chance d'être choisis pour un déstockage, de ce fait la probabilité pour que le produit se trouvant en première position soit choisi pour le déstockage est $\frac{1}{M\rho}$.

En d'autres termes le système fonctionne sur le mode OP1 dans $\frac{1}{M\rho}$ des cas, et fonctionne sur le mode OP2 le reste du temps. Par conséquent, le temps de cycle moyen du système pour un déstockage en régime permanent peut être calculé de cette manière :

$$ERC^D = \frac{1}{\rho M} ERC_{OP1}^D + \left(1 - \frac{1}{\rho M}\right) ERC_{OP2}^D \quad \dots(2.6)$$

Concernant le premier mode opératoire, comme il a été expliqué plus haut, ce cas est similaire à celui d'un stockage, donc :

$$ERC_{OP1}^D = \frac{ERC_{OP1/Machine1}^D \cdot ERC_{OP1/Machine2}^D}{ERC_{OP1/Machine1}^D + ERC_{OP1/Machine2}^D} \quad \dots(2.7)$$

D'un autre côté, lorsqu'il s'agit du second mode opératoire, comme mentionné auparavant, les deux machines ont la même probabilité d'être utilisées comme machine principale, et le temps nécessaire au déstockage pour tout le système est égale au temps opératoire de la machine procédant au déstockage.

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{2} (ERC_{OP2/Machine1}^D + ERC_{OP2/Machine2}^D) \quad \dots(2.8)$$

De plus, les temps moyens de déstockage pour chacune des machines sont (Annexe B):

$$ERC_{OP1/Machine1}^D = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} 2\max(2it'_h; jt'_v) \quad (2.9)$$

$$ERC_{OP1/Machine2}^D = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} 2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) \quad \dots(2.10)$$

$$ERC_{OP2/Machine1}^D = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j}\max(t'_h; t'_v)) \quad \dots(2.11)$$

$$ERC_{OP2/Machine2}^D = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) + m_{2i-1,j}\max(t'_h; t'_v)) \quad \dots(2.12)$$

Donc en remplaçant (2.9) et (2.10) dans (2.7) :

$$ERC_{OP1}^D = \frac{4}{Nh \cdot Nl} \left(\sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} \max(2it'_h; jt'_v) \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} \max((2i-1)t'_h; jt'_v)}{\sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} \max(it'_h; jt'_v)} \right) \quad \dots(2.13)$$

D'autre part via l'Annexe C :

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max(it'_h; jt'_v) + m_{i,j}\max(t'_h; t'_v)) \quad \dots(2.14)$$

Par conséquent en remplaçant (2.13) et (2.14) dans (2.6) :

$$\begin{aligned}
 ERC^D = \frac{1}{N_h N_l} & \left(\left(\frac{4}{\rho M} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)}{\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v)} \right) \right. \\
 & \left. + \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(it'_h; jt'_v) + m_{i,j} \max(t'_h; t'_v)) \right) \right) \quad \dots(2.15)
 \end{aligned}$$

$$\text{where } \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} m_{ij} = [\rho.N] \approx \rho.N$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 ERC^D = \frac{1}{\rho M N_h N_l} & \left(\left(4 \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)}{\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v)} \right) \right. \\
 & \left. + (\rho M - 1) \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(it'_h; jt'_v) + m_{i,j} \max(t'_h; t'_v)) \right) \right) \quad \dots(2.16)
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 ERC^D = \frac{1}{\rho N} & \left(\left(4 \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)}{\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v)} \right) \right. \\
 & \left. + (\rho M - 1) \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(it'_h; jt'_v) + m_{i,j} \max(t'_h; t'_v)) \right) \right) \quad \dots(2.17)
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} m_{ij} = [\rho.N] \approx \rho.N$$

➤ Modélisation continue du temps de cycle :

Comme expliqué plus haut, la modélisation discrète est plus fidèle au comportement réel du système comparée à la modélisation continue, car cette dernière s'appuie sur quelques approximations, dont la considération de la face du rack comme étant une surface d'une infinité de points, ce qui la rend moins précise. Cependant, cette méthode est aussi utilisée pour la modélisation de ce type de systèmes, car elle permet l'obtention de formules moins complexes et qui peuvent être plus facilement utilisées pour des études plus poussées (évaluation de performance, optimisation, comparaison des systèmes et alternatives technologiques...).

Dans cette approche, les deux faces du rack sont considérées comme étant une surface regroupant une infinité de points, où chaque point, peut être un emplacement de stockage/déstockage. Chacune des faces opérationnelles de notre système peut être assimilée à un AS/RS à charge unitaire, en nous basant sur les travaux de (Bozer & White, 1984), le temps moyen nécessaire à la machine S/D afin d'aller de la station E/S (l'un des quatre coins du rack) vers n'importe quel point de la face du rack est égale à :

$$E(V_1) = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.18)$$

A-Le stockage :

Dans le cas d'un stockage simple, les mouvements effectués par la machine S/D sont ceux d'un aller-retour entre la station E/S et le casier où le produit est stocké (voir section précédente).

Notre système comprend deux machines S/D identiques, qui dans le cas d'un stockage fonctionnent de manière totalement indépendante. De ce fait comme pour précédemment, le système est équivalent à une station à deux machines parallèles, et de la même manière nous avons :

$$CSC^C = CSC_{Machine\ 1}^C + CSC_{Machine\ 2}^C \quad \dots(2.19)$$

Donc le temps moyen de stockage pour tout le système en régime permanent sera :

$$ESC^C = \frac{ESC_{Machine\ 1}^C \cdot ESC_{Machine\ 2}^C}{ESC_{Machine\ 1}^C + ESC_{Machine\ 2}^C} \quad \dots(2.20)$$

D'un autre côté nous avons (Annexe D):

$$ESC_{Machine\ 1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.21)$$

$$ESC_{Machine\ 2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.22)$$

Finalement :

$$ESC^C = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.23)$$

B-Le déstockage:

Contrairement aux opérations de stockage, un déstockage nécessite des mouvements supplémentaires afin d'être effectué, particulièrement lorsque le produit à déstocker ne se trouve pas en première position. De plus, chacune des machines n'est pas sollicitée uniquement lorsque le déstockage la concerne principalement, mais aussi pour effectuer le restockage des produits dans le casier appareillé. D'autre part, en plus de l'aller-retour effectué par la machine principale, le restockage des produits bloquants par cette dernière est aussi un temps d'utilisation qui doit être comptabilisé (comme expliqué plus haut). Nous pouvons donc écrire que le temps moyen de déplacement de la machine 1 pour effectuer un déstockage est :

$$ERC_{Machine\ 1}^C = E(RT) + E(V_2) \quad \dots(2.24)$$

Où RT est la variable aléatoire représentant le temps nécessaire pour un aller-retour, et V_2 celle représentant le temps nécessaire pour procéder au restockage des produits bloquants (atteindre le produit désiré dans le casier).

Comme pour le stockage, un aller-retour est égal à :

$$E(RT) = 2E(V_1) \quad \dots(2.25)$$

Cependant, contrairement à OP2, dans OP1 uniquement un aller-retour est nécessaire afin de déstocker le produit désiré (car celui-ci est accessible par la machine directement puisqu'il se trouve en première position dans le casier), nous avons donc :

$$ERC_{OP1/Machine\ 1}^C = 2E(V_1) \quad \dots(2.26)$$

$$ERC_{OP2/Machine\ 1}^C = 2E(V_1) + E(V_2) \quad \dots(2.27)$$

D'un autre côté, la position du produit à déstocker dans le casier, détermine le nombre de restockage des produits bloquants à effectuer, afin que ce dernier soit accessible par la machine. Puisque nous considérons une politique de stockage aléatoire, tous les produits ont la même probabilité d'être déstockés, et dans ce cas-là le calcul du temps moyen nécessaire pour procéder au restockage des produits bloquants en régime permanent peut être calculé simplement par une moyenne arithmétique de tous les temps nécessaires au restockage pour tous les emplacements des produits à l'intérieur du casier (toutes les possibilités) :

- Pour un produit se trouvant en première position (ce cas n'est pas pris en considération dans le calcul de la moyenne, car nous considérons uniquement le mode OP2), le temps nécessaire :

$$T(\text{Restockage}) = 0$$

- Pour un produit se trouvant en deuxième position, le temps nécessaire est :

$$T(\text{Restockage}) = 2t'_p$$

- Pour un produit se trouvant en troisième position, le temps nécessaire est :

$$T(\text{Restockage}) = 4t'_p$$

- Pour un produit se trouvant en m^{ème} position, le temps nécessaire est :

$$T(\text{Restockage}) = 2(m - 1)t'_p$$

- Le temps moyen nécessaire :

$$E(V_2) = \frac{1}{(M' - 1)} \sum_{m=2}^{M'} 2(m - 1)t'_p \quad \dots(2.28)$$

Où M' est le nombre de produits dans le casier considéré.

Nous avons donc :

$$E(V_2) = \frac{2t'_p}{(M' - 1)} \sum_{m=2}^{M'} (m - 1) \quad \dots(2.29)$$

$$E(V_2) = \frac{2t'_p}{(M' - 1)} \sum_{m=1}^{M'-1} m \quad \dots(2.30)$$

Puisqu'il s'agit de la somme d'une suite arithmétique :

$$E(V_2) = \frac{2t'_p(M' - 1)M'}{2(M' - 1)} \quad \dots(2.31)$$

Finalement :

$$E(V_2) = M't'_p \quad \dots(2.32)$$

En remplaçant (2.18) et (2.32) dans (2.26) et (2.27) :

$$ERC_{OP1/Machine\ 1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.33)$$

$$ERC_{OP2/Machine\ 1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M't'_p \quad \dots(2.34)$$

En suivant les mêmes étapes pour la machine 2 :

$$ERC_{OP1/Machine\ 2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M't'_p \quad \dots(2.35)$$

$$ERC_{OP2/Machine\ 2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M't'_p \quad \dots(2.36)$$

Maintenant nous nous intéressons au fonctionnement holistique du système, en considérant ses deux modes de fonctionnement afin d'avoir un temps moyen globale en régime permanent pour les transactions de déstockage. De la même manière que pour la modélisation discrète, nous pouvons écrire :

$$ERC^C = \frac{1}{M'} ERC_{OP1}^C + \left(1 - \frac{1}{M'}\right) ERC_{OP2}^C \quad \dots(2.37)$$

Pour les mêmes raisons mentionnées plus haut, nous avons pour le mode OP1 :

$$CRC_{OP1}^C = CRC_{OP1/Machine\ 1}^C + CRC_{OP1/Machine\ 2}^C \quad \dots(2.38)$$

Avec :

$$CRC_{OP1/Machine\ 1}^C = \frac{1}{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C} \text{ (Produit par unité de temps)} \quad \dots(2.39)$$

$$CRC_{OP1/Machine\ 2}^C = \frac{1}{ERC_{OP1/Machine\ 2}^C} \text{ (Produit par unité de temps)} \quad \dots(2.40)$$

Le temps moyen nécessaire pour tout le système en mode OP1 :

$$ERC_{OP1}^C = \frac{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C \cdot ERC_{OP1/Machine\ 2}^C}{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C + ERC_{OP1/Machine\ 2}^C} \quad \dots(2.41)$$

Et nous avons finalement (Annexe D) :

$$ERC_{OP1}^C = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad \dots(2.42)$$

De la même manière que pour la modélisation discrète, concernant le second mode opératoire OP2, nous avons :

$$ERC_{OP2}^C = \frac{1}{2} (ERC_{OP2/Machine\ 1}^C + ERC_{OP2/Machine\ 2}^C) \quad \dots(2.43)$$

En remplaçant (2.34) et (2.36) dans (2.43) :

$$ERC_{OP2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M' t'_p \quad \dots(2.44)$$

En remplaçant (2.42) et (2.44) dans (2.37) :

$$ERC^C = \frac{1}{M'} \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{M'}\right) (T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M' t'_p) \quad \dots(2.45)$$

Après simplifications (Annexe E) :

$$ERC^C = \frac{T}{\rho M} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2\rho M - 1}{2} \right) + (\rho M - 1) t'_p \quad \dots(2.46)$$

Comme mentionné auparavant, les modèles continus (2.23) et (2.46) peuvent être utilisés pour faire des études plus poussés (évaluation de performances, optimisation, comparaison des systèmes...) du fait de leur simplicité comparés aux modèles discrets. Alors que les modèles discrets (2.5) et (2.17) sont plus précis mais offrent des perspectives d'études plus limitées. Cependant, dans cette thèse nous avons décidé de procéder à une comparaison entre ces deux types de modélisations, afin de connaître la précision de nos modèles continus dans le but de leur utilisation future. Pour se faire nous avons procédé à une simulation du fonctionnement de notre système, en faisant varier la taille, le facteur de forme et le taux de charge, plus de détails vont être présentés dans la section correspondante.

2.2.2 Etude numérique :

Comme mentionné dans la section précédente, les modèles continus vont être comparés aux modèles discrets afin d'évaluer leur précision. Puisque le développement des modèles continu est basé sur un ensemble d'approximations, ces derniers sont moins précis que ceux développés en utilisant l'approche discrète, c'est pourquoi nous procédons à cette comparaison afin de savoir à quel point ces derniers sont

précis afin de les utiliser dans des travaux futurs. Pour ce faire nous avons développé un programme de simulation sous Matlab, afin d'évaluer l'écart entre les deux modèles, et dont le principe de fonctionnement peut être présenté comme suit :

A-Principe de fonctionnement :

➤ Données d'entrée :

Afin de procéder à notre simulation, nous avons besoin d'un certain nombre de données d'entrée, qui vont déterminer les caractéristiques opérationnelles de notre système.

Dans notre cas les données nécessaires sont les dimensions du système (N_i ; N_h ; M), les vitesses des machines ainsi que le taux de charge. Concernant les dimensions du système, nous avons décidé d'étudier plusieurs tailles du système en faisant varier son facteur de forme. Nous avons choisi trois tailles de système avec un pourcentage de tolérance ; $600 \pm 1\%$ (Tableau 2.1), $3000 \pm 1\%$ (Tableau 2.2), $20000 \pm 1\%$ (Tableau 2.3 et 2.4) et pour chacun d'eux différentes configurations des dimensions qui varient le facteur de forme, de petit jusqu'à carré en temps ($b \approx 1$), tout en faisant varier la profondeur des casiers. Nous nous retrouvons donc avec les 28 configurations qui apparaissent dans les Tableaux 1-4. De plus, en ce qui concerne les vitesses des machines, nous affectons les valeurs 1 à t'_h et t'_v , ce qui veut dire que les machines se déplacent horizontalement et verticalement entre deux casiers adjacents en une unité de temps. Finalement, nous faisons varier le taux charge d'une valeur basse (0.3) à son maximum (1.0). Cependant il est nécessaire de savoir que *la zone opératoire utile* est définie dans l'intervalle $\rho \in [0.7; 0.85]$ (Sari, Saygin, & Ghouali, 2005).

➤ Traitement :

Cela représente la partie principale de la simulation. Cette dernière est effectuée afin de comparer entre les résultats obtenus via les deux approches de modélisation (continus et discrets). Les modèles discrets tiennent compte de toutes les opérations possibles afin de calculer un temps de cycle moyen, alors que les modèles discrets n'ont besoin que d'un nombre limité de paramètres pour donner un temps de cycle moyens (en l'occurrence les données d'entrée précédemment cités). C'est pour cette raison que notre simulation va générer un ensemble de demandes de transactions (stockage/déstockage) réalisables en fonction des données d'entrée.

Le programme en question considère une taille de système selon les dimensions fournies en entrée, puis ce dernier est rempli jusqu'à atteindre son taux de charge opérationnel, suivant une loi de distribution uniforme sur les emplacements de stockage (politique de stockage aléatoire). Grâce à toutes les transactions de stockage/déstockage générées, les temps de cycles moyens sont calculés en utilisant les différents modèles. Cette opération est répétée sur 10000 instances.

➤ Données de sortie :

A la fin de la simulation, les résultats obtenus via les deux modèles sont comparés, et un pourcentage d'écart calculé. Afin de confirmer que notre programme fonctionne correctement, nous avons commencé par le tester sur de petites instances dont on peut calculer les résultats à la main, avant de passer aux grandes instances. Après plusieurs jours de calculs nous avons obtenu les résultats présentés dans les Tableaux 2.1-2.4. Il est à noter que l'erreur relative à ESC ne nécessite qu'une seule ligne (en bas de chaque tableau). Ceci est dû au fait que les opérations de stockage ne dépendent pas du taux de charge du système, puisque le stockage d'un produit dans n'importe quel casier du système prend la même durée de temps quel que soit le taux de charge du système. De ce fait les variations changent

uniquement lorsque le facteur de forme ou la profondeur - pour une taille de système donnée- changent, ou en d'autres terme un changement de la configuration (dimensions) du système.

D'un autre côté, le calcul du gap pour les différents modèles du temps de cycle du déstockage est nécessaire lorsque le taux de charge change, il apparait clairement que le temps de déstockage d'un produit n'est pas le même lorsque le système est plein ou vide.

Tableau 2.1: Résultats de la simulation pour un système à 600

		Ecart en pourcentage							
M		6				9			
(NI;Nh)		(4;25)	(6;16)	(12;8)	(10;10)	(16;4)	(6;11)	(10;7)	(8;8)
b	ρ	0,16	0,375	0,66	1	0,25	0,55	0,7	1
1		2,738	3,055	0,526	1,357	0,015	2,673	0,537	1,261
0.9		2,764	3,095	0,533	1,378	0,016	2,730	0,548	1,290
0.85		2,791	3,136	0,540	1,399	0,017	2,789	0,560	1,319
0.8		2,819	3,179	0,548	1,421	0,018	2,852	0,572	1,351
0.75		2,847	3,223	0,555	1,444	0,019	2,917	0,585	1,384
0.7		2,876	3,268	0,563	1,467	0,020	2,985	0,598	1,418
0.6		2,905	3,315	0,571	1,491	0,022	3,057	0,611	1,454
0.5		2,966	3,412	0,586	1,541	0,026	3,212	0,640	1,533
0.4		3,030	3,517	0,600	1,594	0,032	3,383	0,671	1,619
0.3		3,099	3,630	0,612	1,650	0,041	3,575	0,702	1,715
Error(SC)→		3,307	3,985	0,536	1,766	0,263	4,367	0,644	2,009

Tableau 2.2 : Résultats de la simulation pour un système à 3000

		Ecart en pourcentage							
M		15				45			
(NI;Nh)		(50;4)	(8;25)	(10;20)	(14;14)	(22;3)	(14;5)	(6;11)	(8;8)
b	ρ	0,08	0,32	0,5	1	0,136	0,357	0,545	1
1		0,008	1,839	1,705	0,841	0,014	0,026	1,000	0,453

0,9	0,008	1,873	1,741	0,859	0,015	0,027	1,041	0,472
0,85	0,008	1,908	1,777	0,879	0,015	0,028	1,085	0,493
0,8	0,008	1,945	1,815	0,900	0,016	0,029	1,133	0,515
0,75	0,009	1,983	1,855	0,921	0,017	0,030	1,186	0,540
0,7	0,009	2,023	1,897	0,944	0,017	0,031	1,243	0,567
0,6	0,009	2,064	1,941	0,968	0,018	0,033	1,307	0,597
0,5	0,009	2,152	2,035	1,019	0,020	0,036	1,455	0,667
0,4	0,010	2,248	2,138	1,076	0,022	0,040	1,642	0,756
0,3	0,011	2,353	2,253	1,140	0,025	0,044	1,884	0,873
Erreur(SC)→	0,044	2,828	2,784	<u>1,399</u>	0,205	0,181	4,367	<u>2,009</u>

Tableau 2.3 : Résultats de la simulation pour un système à 20000

		Ecart en pourcentages							
M		8				50			
(Ni;Nh)		(80;15)	(50;25)	(30;40)	(36;36)	(40;5)	(10;20)	(12;16)	(14;14)
b ρ		0,187	0,5	0,75	1	0,125	0,5	0,75	1
1		0,008	0,119	0,863	0,557	0,004	0,878	0,660	0,415
0.9		0,008	0,119	0,870	0,561	0,004	0,909	0,684	0,431
0.85		0,008	0,120	0,876	0,565	0,004	0,943	0,711	0,448
0.8		0,007	0,121	0,882	0,570	0,004	0,980	0,739	0,466
0.75		0,007	0,122	0,889	0,574	0,004	1,019	0,771	0,486
0.7		0,007	0,122	0,895	0,578	0,005	1,062	0,804	0,507
0.6		0,007	0,123	0,902	0,582	0,005	1,108	0,841	0,530
0.5		0,007	0,124	0,916	0,591	0,005	1,215	0,926	0,584
0.4		0,007	0,126	0,930	0,600	0,006	1,343	1,030	0,650
0.3		0,007	0,127	0,945	0,609	0,006	1,503	1,161	0,733
Error(SC)→		0,003	0,118	0,991	0,633	0,060	2,784	2,260	1,399

Tableau 2.4: Résultats de la simulation pour un système à 20000

		Ecart en pourcentages			
M		100			
(Nl;Nh)		(20;5)	(14;7)	(8;12)	(10;10)
b ρ		0,25	0,5	0,667	1
	1	0,002	0,047	0,438	0,237
	0.9	0,003	0,049	0,458	0,248
	0.85	0,003	0,051	0,480	0,260
	0.8	0,003	0,053	0,504	0,273
	0.75	0,003	0,056	0,530	0,287
	0.7	0,003	0,059	0,560	0,304
	0.6	0,003	0,063	0,593	0,322
	0.5	0,004	0,071	0,673	0,365
	0.4	0,004	0,082	0,778	0,422
	0.3	0,004	0,096	0,922	0,501
	Error(SC)→	0,154	0,116	3,340	1,766

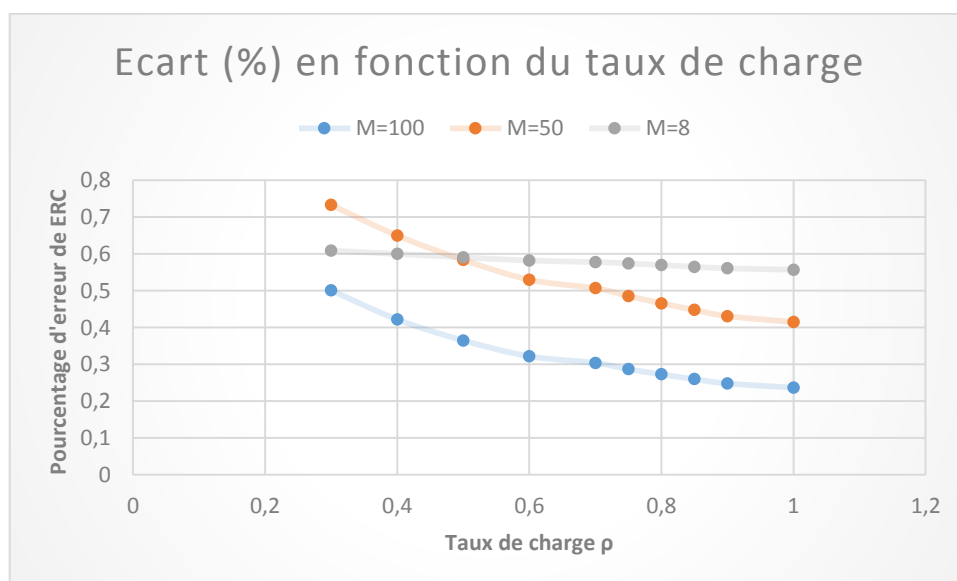


Figure 2.3 : Ecart (%) en fonction du taux de charge pour le même b

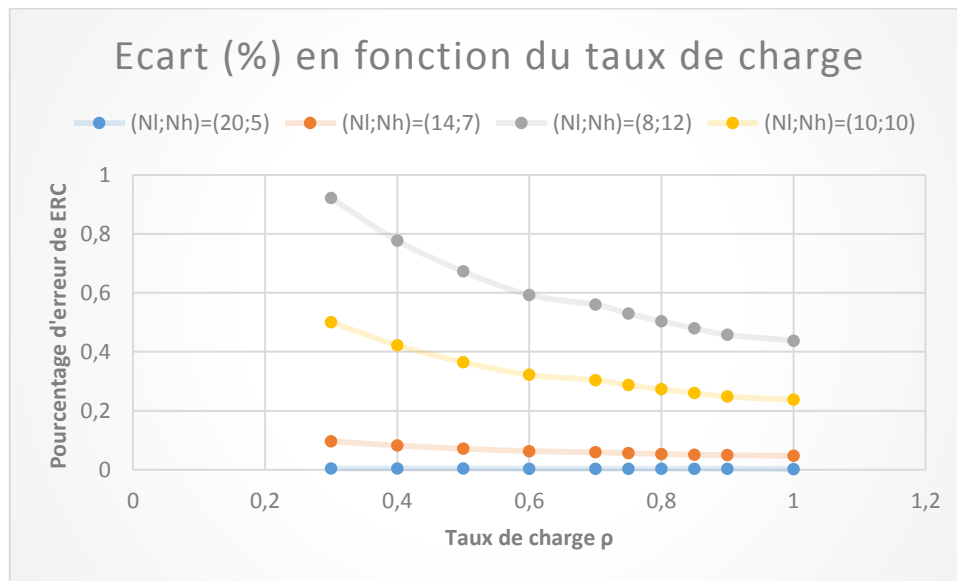


Figure 2.4 : Ecart (%) en fonction du taux de charge pour le même M

B-Résultats et interprétations :

Concernant le stockage, nous remarquons dans un premier temps que plus M diminue plus l'erreur diminue, ce qui est équivalent à dire que plus la face du rack est large plus les modèles discrets et continus donnent des résultats rapprochés. Ce qui était prévisible, car plus la surface du rack augmente, plus son assimilation à une surface d'une infinité de points est pertinente. Ceci s'illustre bien en regardant par exemple 1,399% et 2,009% (Tableau 2.2, quatrième et dernière colonne, dernière ligne), qui pour la même taille et le même facteur de forme mais avec une profondeur M différente donnent des résultats différents.

En outre, il est à noter que pour les configurations avec un petit facteur de forme associé à des cas où N_l est plus grand que N_h cette erreur diminue considérablement. On peut remarquer ça dans la Figure 2.2, puisque pour la même taille du système et pour la même valeur de M, l'erreur diminue lorsque N_l est plus grand que N_h . Ceci est dû au fait que dans chaque face du rack une colonne sur deux est dédiée au stockage ou au déstockage et inversement pour la face opposée. Par conséquent, plus la valeur de N_l augmente plus l'approximation sur laquelle les modèles continus sont basés est pertinente.

D'un autre côté s'agissant des modèles du temps de cycle du déstockage, concernant les petits systèmes (Tableau 2.1), l'erreur semble être plus importante, et augmente lorsque le taux de charge baisse, puisque plus le système est vide plus l'approximation $M \cdot \rho \approx M'$ est moins précise. Ce qui veut dire que plus la taille du système augmente moins la variation de ρ affecte négativement la concordance entre les deux types de modèles. Ceci est illustré dans les Figure 2.1 et 2.2, où l'erreur de ERC diminue lorsque le taux de charge augmente. Un autre point mérite d'être mis en avant, puisque contrairement aux modèles de stockage, ceux du déstockage donnent des résultats plus rapprochés (entre les modèles continus et discrets) lorsque M augmente, car cela contrebalance l'effet de la diminution du taux de charge dans l'approximation mentionnée plus haut (Tableau 2.3 en comparaison avec le Tableau 2.4). Cette variation apparaît clairement dans la Figure 2.1, où pour la même taille du système, lorsque M diminue l'erreur augmente.

De manière générale, les modèles continus ont montré une bonne précision comparés aux modèles discrets, et cela en dépit de la variation des différents paramètres influents sur la disparité des résultats obtenus à travers les deux approches de modélisations, L'ensemble des points soulevés peut être résumé comme ceci :

-Le gap dans la plupart des cas est assez petit (le maximum atteint pour le plus petit système et pour un taux de charge très bas est 3,630% (déstockage) et 4,367% (stockage), pour un système à 600 emplacements de stockage et $\rho = 0,3$).

-Pour les transactions de stockage, plus M diminue plus l'erreur diminue, même si le facteur de forme reste le même.

-Quand N_i est plus grand que N_h , le gap diminue considérablement.

-Pour le déstockage, plus le système est petit, plus la variation est importante. Cependant, ces petits systèmes n'existent que rarement dans l'industrie.

-En comparant les modèles du déstockage, il apparait clairement que l'erreur augmente lorsque le taux de charge diminue.

-Contrairement aux modèles du stockage, ceux du déstockage donnent des résultats plus proches lorsque M augmente, et cela en contrebalançant l'effet de la diminution du taux de charge.

Selon les points relevés plus haut, il ressort que suivant les deux approches de modélisation nous avons pu développer des modèles qui donnent de manière générale des résultats très similaires. Par ailleurs, les cas où l'écart entre les résultats obtenus augmente sont des cas qui ont peu de chance d'exister pratiquement (de tels petits systèmes n'existent que très rarement dans l'industrie et en régime permanent un AS/RS fonctionne à un taux de charge entre 0,7 et 0,85, dite zone opérationnelle utile (Sari, Saygin, & Ghouali, 2005))

Finalement, nous pouvons dire que les modèles continus présentés offrent plus de facilité à être utilisés dans de futures études nécessitant des calculs mathématiques plus poussés comparés aux modèles discrets. De plus ces derniers sont beaucoup plus pratiques en termes de temps de calcul, car les modèles discrets requièrent un temps de calcul plus important surtout lorsque la taille du système augmente. Ces modèles ont diverses applications quant à l'étude pratique de ce type d'installations industrielles qui sont les AS/RS, puisque ces derniers peuvent être utilisés dans : (1) l'élaboration de standards de performances pour les AS/RS existants, (2) conduire des études comparatives pour différents types d'AS/RS dans des conditions opérationnelles similaires, (3) évaluation des performances en terme de débit et de capacité pour des designs alternatifs ou différentes caractéristiques techniques (vitesse des machines par exemple), et (4) comparaison des politiques de stockage pour l'amélioration des performances du système, etc.

2.2.3 Doubles cycles :

Comme pour les simples cycles de stockage et déstockage, nous allons procéder à une modélisation discrète et continue du temps de double cycle. Cependant, nous identifions deux type de double cycle, le premier lorsque le stockage et le déstockage sont effectués dans deux casiers adjacents, et le second lorsqu'ils sont effectués dans des casiers quelconques. Par ailleurs, dans ce qui va suivre, en plus des notations précédentes nous ajoutons :

$EDC1^D$ Temps moyen de double cycle dans des casiers adjacents (Modèle discret)

$EDC1^C$ Temps moyen de double cycle dans des casiers adjacents (Modèle continu)

$EDC2^D$ Temps moyen de double cycle dans des casiers quelconques (Modèle discret)

$EDC2^C$ Temps moyen de double cycle dans des casiers quelconques (Modèle continu)

Hypothèses :

Les mêmes hypothèses posées dans la modélisation des simples cycles restent en vigueur.

• **Vue globale du système :**

Comme il a été expliqué précédemment, lorsque le système procède à un déstockage, les machines peuvent fonctionner de manière indépendante ou travailler ensemble, et cela dépend de la position du produit à déstocker dans le casier, ce qui a un impact direct sur la capacité (débit) global du système. Puisqu'une opération de double cycle est composée d'une opération de stockage et d'une autre de déstockage, le mode de fonctionnement du système dépend uniquement du type de déstockage à effectuer (voir les deux types de déstockage).

Par conséquent, pour les mêmes raisons énoncées et expliquées précédemment (simples cycles) concernant le fonctionnement global du système, le temps de cycle moyen global pour un double cycle est :

$$EDC = \frac{1}{\rho M} \left(\frac{EDC_{M1/Op1} EDC_{M2/Op1}}{EDC_{M1/Op1} + EDC_{M2/Op1}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) (EDC_{M1/Op2} + EDC_{M2/Op2}) \dots (2.47)$$

Avec $EDC_{i/j}$ le temps de double cycle (de manière générale sans distinction entre les modèles discrets ou continus, ni entre les deux types de doubles cycles que nous allons voir par la suite) pour la machine i pour le mode j .

• **Vue détaillée du système :**

Nous regardons à présent le comportement des machines à part. Lors d'un double cycle du type 1 (casiers adjacents), les mouvements effectués par la (les) machine(s) S/D sont :

- Un aller de la station D/L vers le casier de stockage.
- Un déplacement intermédiaire entre le casier de stockage et celui du déstockage (casiers appareillés).
- Déstockage et restockage des produits bloquants le produit désiré (dans le mode 2 du déstockage uniquement).
- Un retour du casier de déstockage jusqu'à la station D/L.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la machine 1, et puis par symétrie l'expression relative à la machine 2 pourra être déduite. Nous posons les notations suivantes :

Soient D_1 , D_2 et D_3 respectivement les temps moyens de déplacement de la station D/L vers le casier de stockage, le restockage des produits bloquants, et le retour du casier de déstockage à la station D/L. D'un autre côté nous avons que le temps nécessaire pour de déplacement entre deux casiers appareillés est constant et est égale à t'_p par définition. Par conséquent nous pouvons écrire :

$$EDC1_{M1/Op1} = D_1 + t'_p + D_3$$

$$EDC1_{M1/Op2} = D_1 + t'_p + D_2 + D_3$$

Par ailleurs lorsqu'il s'agit d'un double cycle du type 2 (casiers quelconques), les mouvements de la machines restent les mêmes sauf pour le déplacement entre les casiers appareillés, car il s'agit d'un double cycle entre deux casiers quelconques, par conséquent le déplacement intermédiaire n'est pas égale à t'_p , mais c'est la moyenne de tous les déplacements possibles que l'on notera D_4 , nous aurons donc :

$$EDC2_{M1/Op1} = D_1 + D_4 + D_3$$

$$EDC2_{M1/Op2} = D_1 + D_4 + D_2 + D_3$$

A présent nous allons procéder aux deux types de modélisations selon les approches discrète et continue. On identifiera les expressions continues et discrètes grâce aux exposants C et D respectivement.

➤ **Modélisation discrète du temps de cycle moyen :**

Nous savons qu'un stockage simple se compose d'un aller-retour (entre la station D/L et le casier de stockage), et D_1 est un aller simple, donc via l'Annexe A :

$$D_1^D = \frac{E(X)}{2} = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v)$$

Nous savons qu'un déstockage simple (mode OP1) se compose d'un aller-retour (entre la station D/L et le casier de déstockage), et D_3 est un retour simple, donc via les Annexes A et B :

$$D_3^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)$$

Enfin, idem que pour le simple cycle de déstockage (mode OP2), le temps moyen pour le restockage des produits bloquant a été calculé en Annexe B :

$$D_2^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i,j} t'_p$$

Nous avons donc :

$$EDC1_{M1/Op1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) + t'_p + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)$$

$$EDC1_{M1/Op2}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) + t'_p + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i,j} t'_p$$

$$+ \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v)$$

Après simplifications :

$$EDC1_{M1/Op1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + t'_p$$

$$EDC1_{M1/Op2}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \left(1 + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i,j} \right) t'_p$$

Par symétrie nous obtenons les temps de cycles moyens de la machine 2 :

$$EDC1_{M2/Op1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + t'_p$$

$$EDC1_{M2/Op2}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \left(1 + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i-1,j} \right) t'_p$$

D'un autre côté, le temps de déplacement intermédiaire moyen entre un casier de stockage et un casier de déstockage quelconques peut être calculé comme suit :

Soit L une variable aléatoire définie sur l'ensemble des éventualités de distances possibles des différentes combinaisons possibles (casier de stockage-casier de déstockage) :

$$Sup(L) = \left\{ V_{(i,j)}^{(i';j')} / i, i' \in \left\{ 1 \dots \frac{N_l}{2} \right\} \text{ et } j, j' \in \{ 1 \dots N_h \} \right\}$$

$(i; j)$ et $(i'; j')$ représentent respectivement les casiers de stockage et de déstockage concernés (et non pas leurs coordonnées).

Nous associons à la face du rack un repère cartésien dont l'origine est superposée à la station D/L par conséquent suivant l'hypothèse A_6 nous avons :

$$V_{(i,j)}^{(i';j')} = \max(|x - x'|t'_h; |y - y'|t'_v)$$

Avec $(x; y)$ et $(x'; y')$ les coordonnées cartésiennes de respectivement le casier de stockage et du casier de déstockage concernés et selon A_1 :

$$x = 2i - 1$$

$$y = j$$

$$x' = 2i'$$

$$y' = j'$$

Par ailleurs puisque c'est un stockage aléatoire qui est considéré (hypothèse A_3), toutes les combinaisons ont la même probabilité d'occurrence, et donc :

$$E(L) = \frac{1}{\text{Card}(\text{Sup}(L))} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} W_{(i,j)}^{(i';j')}$$

$$\text{Card}(\text{Sup}(L)) = \text{Card}(\text{Sup}(i))\text{Card}(\text{Sup}(j))\text{Card}(\text{Sup}(i'))\text{Card}(\text{Sup}(j'))$$

Par conséquent :

$$E(L) = \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} V_{(i,j)}^{(i';j')}$$

Finalement :

$$D_4^D = \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v)$$

Et donc on obtient :

$$\begin{aligned} EDC2_{M1/op1}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \\ &+ \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \\ &+ \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} \max(2it'_h; jt'_v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EDC2_{M1/op2}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \\ &+ \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \\ &+ \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} m_{2i,j} t'_p + \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} \max(2it'_h; jt'_v) \end{aligned}$$

Après simplifications :

$$\begin{aligned}
 EDC2_{M1/op1}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \\
 &\quad + \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \\
 EDC2_{M1/op2}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \\
 &\quad + \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \\
 &\quad + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i,j} t'_p
 \end{aligned}$$

Par symétrie nous obtenons pour la machine 2 :

$$\begin{aligned}
 EDC2_{M2/op1}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \\
 &\quad + \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|2i - (2i'-1)|t'_h; |j-j'|t'_v) \\
 EDC2_{M2/op2}^D &= \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \\
 &\quad + \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|2i - (2i'-1)|t'_h; |j-j'|t'_v) \\
 &\quad + \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} m_{2i-1,j} t'_p
 \end{aligned}$$

Par conséquent suivant l'équation (2.47) le temps de cycle moyen global est :

$$\begin{aligned}
 EDC1^D &= \frac{1}{\rho M N_l N_h} \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \frac{N_l N_h t'_p}{2} \right) \\
 &\quad + \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) \left(\frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \left(1 + \frac{1}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} m_{i,j} \right) t'_p \right)
 \end{aligned}$$

Nous savons que $\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} m_{i,j} = \rho N$, alors :

$$\begin{aligned}
 EDC1^D &= \frac{1}{\rho N} \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \frac{N_l N_h t'_p}{2} \right) \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) \left(\frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) + \left(1 + \frac{\rho N}{N_l N_h} \right) t'_p \right) \dots (2.48)
 \end{aligned}$$

D'un autre côté remarquons que :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \\
 &= \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i - (2i' - 1))t'_h; |j - j'|t'_v)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 EDC2^D &= \frac{1}{\rho N} \left(\sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \right. \\
 &+ \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) \left. \right) \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) \left(\frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} \max(it'_h; jt'_v) \right. \\
 &+ \frac{4}{N_l^2 N_h^2} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i'=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j'=1}^{N_h} \max(|(2i-1) - 2i'|t'_h; |j-j'|t'_v) + \frac{\rho N}{N_l N_h} t'_p \left. \right) \dots (2.49)
 \end{aligned}$$

➤ **Modélisation continue du temps de cycle moyen :**

Nous savons qu'un stockage simple se compose d'un aller-retour (entre la station D/L et le casier de stockage), et D_1 est un aller simple, donc via l'Annexe D :

$$D_1^C = E(V_1) = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right)$$

Nous avons qu'un déstockage simple (mode OP1) se compose d'un aller-retour (entre la station D/L et le casier de déstockage), et D_3 est un retour simple, qui dans le cas continu est égale à l'aller, et donc :

$$D_3^C = E(V_1) = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right)$$

Enfin, idem que pour le simple cycle de déstockage (mode OP2), le temps moyen pour le restockage des produits bloquant a été calculé dans la modélisation continue du simple cycle de déstockage :

$$D_2^C = \rho M t'_p$$

Nous avons donc :

$$EDC1_{M1/Op1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + t'_p$$

$$EDC1_{M1/Op2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + (\rho M + 1) t'_p$$

D'un autre côté, le temps de déplacement intermédiaire moyen entre un casier de stockage et un casier de déstockage quelconques est le même que pour un AS/RS à charges unitaires classique, est selon (Bozer & White, 1984) :

$$D_4^C = T \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{30} \right)$$

Et donc on obtient :

$$EDC2_{M1/Op1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + T \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{30} \right)$$

$$EDC2_{M1/Op2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + T \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{30} \right) + \rho M t'_p$$

Dans le cas de la modélisation continue (comme pour le simple cycle), les temps de cycle des deux machines sont identiques, et donc :

$$EDC2_{M2/Op1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + T \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{30} \right)$$

$$EDC2_{M2/Op2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + T \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{30} \right) + \rho M t'_p$$

Par conséquent le temps de cycle moyen global est :

$$EDC1^c = \frac{T}{2\rho M} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) (2\rho M - 1) + \left(\frac{2\rho^2 M^2 - 1}{2\rho M} \right) t'_p \dots (2.50)$$

$$EDC2^c = \frac{T}{2\rho M} \left(\frac{4}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{30} \right) + (2\rho M - 1) + (\rho M - 1)t'_p \dots (2.51)$$

2.2.4 Etude numérique :

Comme pour les modèles du simple cycle, les modèles continus (2.50) et (2.51) vont être comparés aux modèles discrets (2.48) et (2.49) afin d'évaluer leur précision. Nous procédons de la même manière que précédemment, et nous obtenons les résultats présentés dans les Tableaux 2.5-2.13

Tableau 2.5 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 600)

Ecart en pourcentages								
M	6				9			
(Nl;Nh)	(4;25)	(6;16)	(12;8)	(10;10)	(16;4)	(6;11)	(10;7)	(8;8)
b ρ	0,16	0,375	0,66	1	0,25	0,55	0,7	1
1	2,654	2,928	0,514	1,299	0,004	2,555	0,521	1,207
0,9	2,033	2,434	0,023	0,742	0,214	2,465	0,309	1,092
0,85	1,627	2,057	0,421	0,376	0,411	2,333	0,199	0,943
0,8	1,172	1,641	0,857	0,017	0,641	2,266	0,027	0,765
0,75	0,686	1,196	1,320	0,453	0,909	2,073	0,197	0,558
0,7	0,167	0,819	1,684	0,889	1,115	1,849	0,492	0,427
0,6	0,860	0,104	2,621	1,762	1,848	1,389	1,115	0,175
0,5	1,671	0,799	3,296	2,351	2,793	0,627	1,910	0,968
0,4	1,633	0,472	2,981	2,067	3,736	0,064	2,783	1,654
0,3	1,172	2,533	0,078	1,132	4,297	0,145	3,091	1,918

Tableau 2.6 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 3000)

Ecart en pourcentages								
M	15				45			
(Nl;Nh)	(4;50)	(8;25)	(10;20)	(14;14)	(22;3)	(14;5)	(6;11)	(8;8)
b ρ	0,08	0,32	0,5	1	0,136	0,357	0,545	1

1	0,007	1,796	1,661	0,818	0,013	0,026	0,983	0,446
0,9	0,117	1,769	1,641	0,770	0,022	0,022	1,060	0,479
0,85	0,187	1,745	1,621	0,735	0,013	0,034	1,119	0,498
0,8	0,266	1,714	1,594	0,693	0,030	0,019	1,152	0,520
0,75	0,354	1,673	1,559	0,642	0,021	0,032	1,220	0,543
0,7	0,459	1,621	1,512	0,579	0,040	0,015	1,262	0,568
0,6	0,733	1,457	1,361	0,393	0,054	0,008	1,394	0,627
0,5	1,186	1,134	1,057	0,054	0,078	0,006	1,555	0,696
0,4	2,001	0,476	0,424	0,606	0,125	0,040	1,748	0,772
0,3	3,454	0,794	0,795	1,831	0,244	0,135	1,958	0,831

Tableau 2.7 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 20000)

		Ecart en pourcentages							
M	(Ni;Nh)	8				50			
		(80;15)	(50;25)	(30;40)	(36;36)	(40;5)	(10;20)	(12;16)	(14;14)
b	ρ	0,187	0,5	0,75	1	0,125	0,5	0,75	1
1		0,008	0,118	0,849	0,548	0,004	0,866	0,650	0,410
0,9		0,438	0,312	0,438	0,133	0,012	0,924	0,695	0,436
0,85		0,738	0,603	0,157	0,153	0,016	0,956	0,720	0,451
0,8		1,083	0,936	0,169	0,479	0,020	0,992	0,747	0,467
0,75		1,472	1,313	0,538	0,852	0,024	1,030	0,777	0,485
0,7		1,908	1,735	0,954	1,269	0,028	1,072	0,810	0,505
0,6		2,928	2,729	1,930	2,248	0,040	1,165	0,883	0,548
0,5		4,124	3,888	3,075	3,395	0,061	1,273	0,967	0,596
0,4		5,304	5,027	4,197	4,512	0,103	1,391	1,059	0,643
0,3		5,622	5,281	4,408	4,730	0,205	1,497	1,136	0,661

Tableau 2.8 : Pourcentage d'erreur EDC1 après simulation (système à 20000)

		Ecart en pourcentages			
M		100			
(Nl;Nh)		(20;5)	(14;7)	(8;12)	(10;10)
b	ρ	0,25	0,5	0,667	1
1		0,003	0,046	0,434	0,235
0,9		0,002	0,050	0,474	0,257
0,85		0,002	0,052	0,498	0,269
0,8		0,001	0,054	0,524	0,283
0,75		0,001	0,057	0,552	0,299
0,7		0,001	0,060	0,585	0,316
0,6		0,000	0,067	0,662	0,358
0,5		0,002	0,076	0,761	0,411
0,4		0,007	0,085	0,896	0,483
0,3		0,020	0,094	1,084	0,582

Tableau 2.9 : Pourcentage d'erreur pour EDC2 après simulation (système à 600)

		Ecart en pourcentages							
M		6				9			
(Nl;Nh)		(4;25)	(6;16)	(12;8)	(10;10)	(16;4)	(6;11)	(10;7)	(8;8)
b	ρ	0,16	0,375	0,66	1	0,25	0,55	0,7	1
1		2,021	2,043	0,688	0,125	1,029	1,614	0,644	0,061
0,9		1,352	1,478	1,291	0,507	1,288	1,454	0,918	0,129
0,85		0,915	1,059	1,721	0,914	1,507	1,285	1,068	0,316
0,8		0,426	0,599	2,193	1,351	1,762	1,172	1,325	0,536
0,75		0,097	0,106	2,694	1,827	2,054	0,936	1,538	0,786

0,7	0,651	0,328	3,108	2,312	2,299	0,664	1,870	0,974
0,6	1,745	1,353	4,137	3,288	3,090	0,083	2,581	1,678
0,5	2,626	2,162	4,922	4,004	4,105	0,808	3,490	2,587
0,4	2,693	1,981	4,775	3,885	5,149	1,668	4,495	3,441
0,3	0,024	0,826	1,962	0,958	5,851	1,985	5,001	3,933

Tableau 2.10 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 3000)

		Ecart en pourcentages							
M		15				45			
(NI;Nh)		(50;4)	(8;25)	(10;20)	(14;14)	(22;3)	(14;5)	(6;11)	(8;8)
b ρ		0,08	0,32	0,5	1	0,136	0,357	0,545	1
1		0,408	1,315	1,091	0,122	0,447	0,458	0,672	0,024
0,9		0,530	1,256	1,034	0,034	0,484	0,498	0,719	0,021
0,85		0,607	1,214	0,993	0,023	0,493	0,508	0,759	0,019
0,8		0,692	1,164	0,944	0,088	0,525	0,544	0,775	0,017
0,75		0,787	1,104	0,886	0,163	0,535	0,556	0,822	0,016
0,7		0,898	1,030	0,814	0,252	0,571	0,598	0,841	0,014
0,6		1,187	0,819	0,608	0,494	0,628	0,664	0,919	0,007
0,5		1,656	0,440	0,238	0,898	0,702	0,751	1,010	0,006
0,4		2,492	0,294	0,484	1,638	0,809	0,876	1,108	0,039
0,3		3,978	1,655	1,808	2,971	1,003	1,088	1,184	0,130

Tableau 2.11 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 20000)

		Ecart en pourcentages							
M		8				50			
(NI;Nh)		(80;15)	(50;25)	(30;40)	(36;36)	(40;5)	(10;20)	(12;16)	(14;14)
b ρ		0,187	0,5	0,75	1	0,125	0,5	0,75	1

1	0,274	0,277	0,396	0,109	0,319	0,611	0,341	0,066
0,9	0,730	0,721	0,037	0,326	0,344	0,645	0,359	0,064
0,85	1,035	1,020	0,330	0,622	0,357	0,665	0,369	0,064
0,8	1,386	1,362	0,668	0,960	0,371	0,686	0,380	0,063
0,75	1,780	1,748	1,049	1,344	0,385	0,708	0,392	0,063
0,7	2,223	2,179	1,477	1,772	0,399	0,733	0,405	0,063
0,6	3,256	3,194	2,480	2,777	0,434	0,786	0,434	0,061
0,5	4,466	4,378	3,655	3,953	0,481	0,842	0,461	0,052
0,4	5,666	5,548	4,816	5,109	0,553	0,895	0,480	0,027
0,3	6,015	5,852	5,086	5,383	0,691	0,912	0,458	0,051

Tableau 2.12 : Pourcentage d'erreur EDC2 après simulation (système à 20000)

		Ecart en pourcentages			
M		100			
(Nl;Nh)		(20;5)	(14;7)	(8;12)	(10;10)
b	p	0,25	0,5	0,667	1
1		0,250	0,204	0,264	0,026
0,9		0,272	0,223	0,288	0,027
0,85		0,285	0,234	0,301	0,028
0,8		0,298	0,246	0,316	0,030
0,75		0,313	0,259	0,333	0,031
0,7		0,329	0,274	0,351	0,032
0,6		0,368	0,309	0,395	0,035
0,5		0,418	0,354	0,450	0,039
0,4		0,484	0,416	0,522	0,042
0,3		0,581	0,509	0,618	0,040

A travers les résultats obtenus après simulation, nous constatons que les mêmes remarques que pour les simples cycles sont à relever.

Les écarts entre les modèles discrets et continus sont sensiblement bas puisqu'ils dépassent à peine les 6% au maximum.

Par ailleurs, de manière générale, plus le taux de charge augmente plus l'écart diminue, et cela pour les mêmes raisons évoquées pour le simple cycle de déstockage.

De manière générale, lorsque le taux de charge diminue, une grande profondeur du casier contrebalance l'effet de cette diminution par rapport à l'écart entre les deux modèles. Tout en remarquant que pour les cas où N_l est supérieur à N_h le gap est sensiblement plus bas, pour les mêmes raisons évoquées pour le simple cycle de déstockage.

Au final, nous pouvons conclure que de manière générale, les modèles continus (2.50) et (2.51) sont relativement précis en comparaison avec les modèles discrets (2.48) et (2.49), et au vu de leur compacité et simplicité, peuvent être utilisés pour de futures investigations.

2.3 Conclusion :

A travers ce second chapitre, nous avons exposé les premières contributions scientifiques de cette thèse, qui sont les modèles du temps de cycle. Ces derniers présentent l'avantage d'être systémiques contrairement aux autres modèles se trouvant dans la littérature. Car ces derniers prennent en considération le fonctionnement réel du système en tenant compte de ses différents modes de fonctionnement, ce qui offre la possibilité d'obtenir des résultats beaucoup plus proches de la réalité. De plus, le gap entre les deux modèles continus et discrets est assez faible, malgré les variations du taux de charge et de la taille du système, ce qui prouve leur robustesse. Cependant, cette partie reste toujours sujette à l'amélioration et à l'extension, il serait intéressant par exemple de recalculer d'autres modèles mathématiques en :

- Faisant varier les politiques du point de repos de la machine.
- Changeant de politique de stockage (stockage par classe par exemple).
- Prenant en considération l'accélération et décélération des machines (Chapitre 3).

Chapitre 3 :
Développement de modèles mathématiques du
temps de cycle en tenant compte de
l'accélération/décélération des machines

Chapitre 3 :

Développement de modèles mathématiques du temps de cycle en tenant compte de l'accélération/décélération

3.1 Introduction :

Dans les sections précédentes il était question de développer des modèles du temps de cycle moyens pour l'AS/RS étudié, ces derniers ont été développés en tenant compte de l'aspect holistique du système afin de proposer des temps de cycles permettant d'évaluer les performances du système dans sa globalité en régime permanent. Cependant, ces temps de cycle ont été développés en suivant un nombre d'hypothèses qui ne tiennent pas compte du fonctionnement opérationnel réel du système, de ce fait, les écarts qui peuvent en déduire peuvent être plus ou moins importants. Ce qui est entendu par fonctionnement opérationnel du système, sont les caractéristiques opérationnelles des machines de stockage/déstockage, qui sont l'accélération/décélération et la vitesse maximale.

Nous nous proposons ici de développer de nouveaux modèles des temps de cycle pour le système en question, en considérant d'une part l'aspect holistique de son fonctionnement et d'autre part les caractéristiques opérationnelles des machines.

3.2 Développement des modèles mathématiques :

L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels possède deux machines de stockage/déstockage identiques, une machine pour chaque face du rack. Ces dernières peuvent fonctionner de manière indépendante ou en collaboration. Avant de procéder à la modélisation, nous énonçons les hypothèses et notations suivantes :

Hypothèses :

A₁-La machine 1 stocke dans les colonnes impaires et déstocke dans les colonnes paires (inversement pour la machine 2).

A₂-Le système dispose de deux modes de fonctionnement pour le déstockage, puisque les machines fonctionnent en collaboration ou indépendamment l'une de l'autre comme énoncé plus haut (comme expliqué dans le descriptif du système dans le chapitre 1).

A₃-Les emplacements de stockage/déstockage sont uniformément distribués (politique de stockage aléatoire).

A₄-Les points de repos des machines sont confondus aux stations d'entrée/sortie. Ces derniers sont situés au coin inférieur du rack, l'une en face de l'autre.

A₅-Les vitesses des machines sont considérées comme étant variables, avec accélération/décélération et vitesses maximales.

A₆-La hauteur et largeur du rack sont assez grandes pour permettre aux machines d'atteindre leurs vitesses maximales le cas échéant.

A₇-Les machines se déplacent selon un déplacement de Tchebychev.

Notations :

<i>ESC_{M1}</i>	Temps moyen de stockage pour la machine 1
<i>ESC_{M2}</i>	Temps moyen de stockage pour la machine 2
<i>CSC_{M1}</i>	Capacité moyenne de stockage pour la machine 1
<i>CSC_{M2}</i>	Capacité moyenne de stockage pour la machine 2
<i>CSC</i>	Capacité moyenne de stockage pour tout le système
<i>ESC</i>	Temps moyen de stockage pour tout le système
<i>ERC_{M1/Op1}</i>	Temps moyen de déstockage pour la machine 1 selon le mode opératoire 1
<i>ERC_{M2/Op1}</i>	Temps moyen de déstockage pour la machine 2 selon le mode opératoire 1
<i>ERC_{M1/Op2}</i>	Temps moyen de déstockage pour la machine 1 selon le mode opératoire 2
<i>ERC_{M2/Op2}</i>	Temps moyen de déstockage pour la machine 2 selon le mode opératoire 2
<i>ERC_{Op1}</i>	Temps moyen de déstockage pour tout le système selon le mode opératoire 1
<i>ERC_{Op2}</i>	Temps moyen de déstockage pour tout le système selon le mode opératoire 2
<i>CRC_{M1/Op1}</i>	Capacité moyenne de déstockage pour la machine 1 selon le mode opératoire 1
<i>CRC_{M2/Op1}</i>	Capacité moyenne de déstockage pour la machine 2 selon le mode opératoire 1
<i>ERC</i>	Temps moyen de déstockage pour tout le système

-Nous introduirons dans ce chapitre d'autres notations au besoin, au fur et à mesure de l'avancement du calcul.

3.2.1 Simples cycles :

- **Vue globale du système :**

A-Le stockage :

Lors d'un stockage, chaque machine travaille indépendamment de l'autre. Par conséquent le système est assimilable à un atelier à deux machines en parallèle, et de ce fait, la capacité du système dans sa globalité est égale à la somme des capacités des deux machines (pour les mêmes raisons évoquées dans le chapitre 2).

Soient ESC_{M1} et ESC_{M2} les temps moyens pour effectuer un stockage pour la machine 1 et 2 respectivement. Les capacités des machines 1 et 2 seront :

$$CSC_{M1} = \frac{1}{ESC_{M1}} \dots (3.1)$$

$$CSC_{M2} = \frac{1}{ESC_{M2}} \dots (3.2)$$

Par conséquent la capacité du système dans sa globalité sera :

$$CSC = CSC_{M1} + CSC_{M2} = \frac{1}{ESC_{M1}} + \frac{1}{ESC_{M2}} \dots (3.3)$$

Et donc son temps de cycle moyen sera :

$$ESC = \frac{ESC_{M1}ESC_{M2}}{ESC_{M1} + ESC_{M2}} \dots (3.4)$$

B-Le déstockage :

Lorsqu'il s'agit d'un déstockage, deux cas de figures se présentent. S'il s'agit du déstockage d'un produit se trouvant en première position dans le casier de stockage, la machine concernée peut procéder à son déstockage sans l'aide de la seconde machine. Par contre, si le produit à déstocker n'est pas en première position, les deux machines travaillent en collaboration.

Par conséquent, dans le premier cas, le système est assimilable à une station à deux machines en parallèle (idem que pour le stockage), cependant pour le deuxième cas les deux machines sont réquisitionnées, et le temps opératoire global est celui de la machine qui procède au déstockage.

Soient $ERC_{M1/op1}$ et $ERC_{M2/op1}$ les temps moyens pour effectuer un déstockage pour la machine 1 et 2 respectivement dans le premier cas de figure. Les capacités des machines 1 et 2 seront :

$$CRC_{M1/op1} = \frac{1}{ERC_{M1/op1}} \dots (3.5)$$

$$CRC_{M2/op1} = \frac{1}{ERC_{M2/op1}} \dots (3.6)$$

Par conséquent la capacité du système dans ce cas de figure sera :

$$CRC_{Op1} = CRC_{M1/op1} + CRC_{M2/op1} = \frac{1}{ERC_{M1/op1}} + \frac{1}{ERC_{M2/op1}} \dots (3.7)$$

Et son temps de cycle dans ce cas de figure sera :

$$ERC_{Op1} = \frac{ERC_{M1/op1}ERC_{M2/op1}}{ERC_{M1/op1} + ERC_{M2/op1}} \dots (3.8)$$

D'autre part, concernant le deuxième cas, puisque c'est une politique de stockage aléatoire qui est considérée, les deux machines ont la même probabilité d'être sollicitées pour un déstockage. De plus, le temps de déstockage pour le système dans sa globalité dans le deuxième cas est égal à celui de la machine qui procède au déstockage. Par conséquent le temps moyen en régime permanent pour tout le système est égal à la moyenne des temps de déstockage des deux machines :

$$ERC_{Op2} = \frac{1}{2}(ERC_{M1/Op2} + ERC_{M2/Op2}) \dots (3.9)$$

Maintenant il s'agit de déterminer les proportions d'occurrence de chacun des deux cas afin de calculer un temps de déstockage moyen global pour le système.

Soit M le nombre d'emplacements de stockage dans chaque casier, et soit m une variable aléatoire discrète qui à chaque transaction associe l'emplacement du produit à déstocker. Puisqu'une politique de stockage aléatoire est adoptée, m suit une loi de probabilité uniforme discrète et son support est $\{1, \dots, M'\}$ où $M' = \rho M$ le nombre moyen de produits dans chaque casier en régime permanent. Par conséquent :

$$P(m = 1) = \frac{1}{\rho M} \quad \text{et} \quad P(m \neq 1) = 1 - \frac{1}{\rho M} \dots (3.10)$$

On note bien que la probabilité pour que le produit à déstocker se trouve dans la première position ou non est la même pour qu'il s'agisse du cas 1 ou 2, et donc le temps moyen de déstockage global pour tout le système est :

$$ERC = P(m = 1)ERC_{Op1} + P(m \neq 1)ERC_{Op2} \dots (3.11)$$

Donc grâce à (3.8), (3.9) et (3.10) :

$$ERC = \frac{1}{\rho M} \left(\frac{ERC_{M1/Op1}ERC_{M2/Op1}}{ERC_{M1/Op1} + ERC_{M2/Op1}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) (ERC_{M1/Op2} + ERC_{M2/Op2}) \dots (3.12)$$

- **Vue détaillée du système :**

Maintenant que nous avons exprimé le temps de cycle global en fonction des temps de déplacements des machines selon les différents cas de figures, il s'agit maintenant de justement déterminer ces différents temps de déplacement des machines en tenant compte de leurs caractéristiques opérationnelles.

A-Le stockage :

Pour le système considéré, un stockage est en fait un aller-retour entre la station de dépôt/livraison et l'emplacement de stockage, de ce fait :

$$ESC_{M1} = 2E_{M1} \dots (3.13)$$

Où E_{M1} est le temps moyen nécessaire à la machine 1 pour aller de la station de dépôt/livraison vers n'importe quel casier de stockage et inversement. Idem pour la machine 2.

B-Le déstockage :

Pour le système considéré, un déstockage se présente sous la forme suivante :

- Un aller de la station D/L au casier de déstockage.
- Déstockage et restockage des produits bloquants le produit désiré.
- Un retour du casier de déstockage vers la station D/L.

Cependant, la deuxième étape n'arrive que lorsqu'il s'agit du cas 2 énoncé précédemment. De ce fait nous avons :

$$ERC_{M1/Op1} = 2E_{M1} \dots (3.14)$$

$$ERC_{M1/Op2} = 2E_{M1} + ER_{M1} \dots (3.15)$$

Où ER_{M1} est le temps moyen nécessaire à la machine 1 pour déstocker et restocker les produits bloquants afin d'atteindre le produit souhaité. Idem pour la machine 2.

- Détermination des temps de déplacement des machines :

Maintenant il nous faut déterminer les temps de déplacement des machines (E_{M1}, E_{M2}, ER_{M1} et ER_{M2}) afin de calculer les différents temps de cycles pour tout le système.

Puisque les deux machines sont identiques, nous traitons le cas général puis transposons les résultats aux deux machines. Nous devons calculer les temps moyens de deux déplacements différents, le premier étant le déplacement des machines de la station D/L au casier de stockage et inversement (noté E), et le second est le temps nécessaire à l'opération de restockage (noté ER).

-Temps de déplacement entre la station D/L et le casier de stockage E :

Dans ce qui va suivre nous considérons deux caractéristiques physiques de la machine S/D et qui sont l'accélération/décélération et la vitesse maximale selon chacun des deux axes de déplacement. En nous basant sur les travaux de (Hwang & Lee, 1990) nous calculons les différents temps de déplacement des machines pour le système étudié.

Supposons dans un premier temps que la machine se déplace sur l'un des deux axes de manière rectiligne, nous serons en face de deux cas de figure :

Cas 1 : La machine ne peut pas atteindre sa vitesse maximale avant d'arriver à sa destination.

Cas 2 : La machine atteint sa vitesse maximale avant d'arriver à sa destination.

Ces deux cas sont illustrés dans la Figure 3.1, avec :

a : le taux d'accélération/décélération de la machine S/D.

$v(t)$: la vitesse de la machine à l'instant t .

v_{max} : la vitesse maximale de la machine S/D.

$d(t)$: la distance parcourue jusqu'à l'instant t .

t_{vmax} : le temps nécessaire pour atteindre la vitesse maximale (et pour s'arrêter à partir de la vitesse maximale).

t_f : le temps nécessaire pour atteindre la destination finale.

-Pour le cas 1, la vitesse est exprimée par l'équation suivante :

$$v(t) = \begin{cases} at & t \in [0; t_{vmax}] \\ -a(t - t_f) & t \in [t_{vmax}; t_f] \end{cases} \dots (3.16)$$

D'autre part la distance parcourue jusqu'à la destination finale (c'est-à-dire à l'instant t_f) se calcule comme suit :

$$d(t_f) = \int_0^{t_f} v(t)dt = \frac{a}{2} t_f^2 \dots (3.17)$$

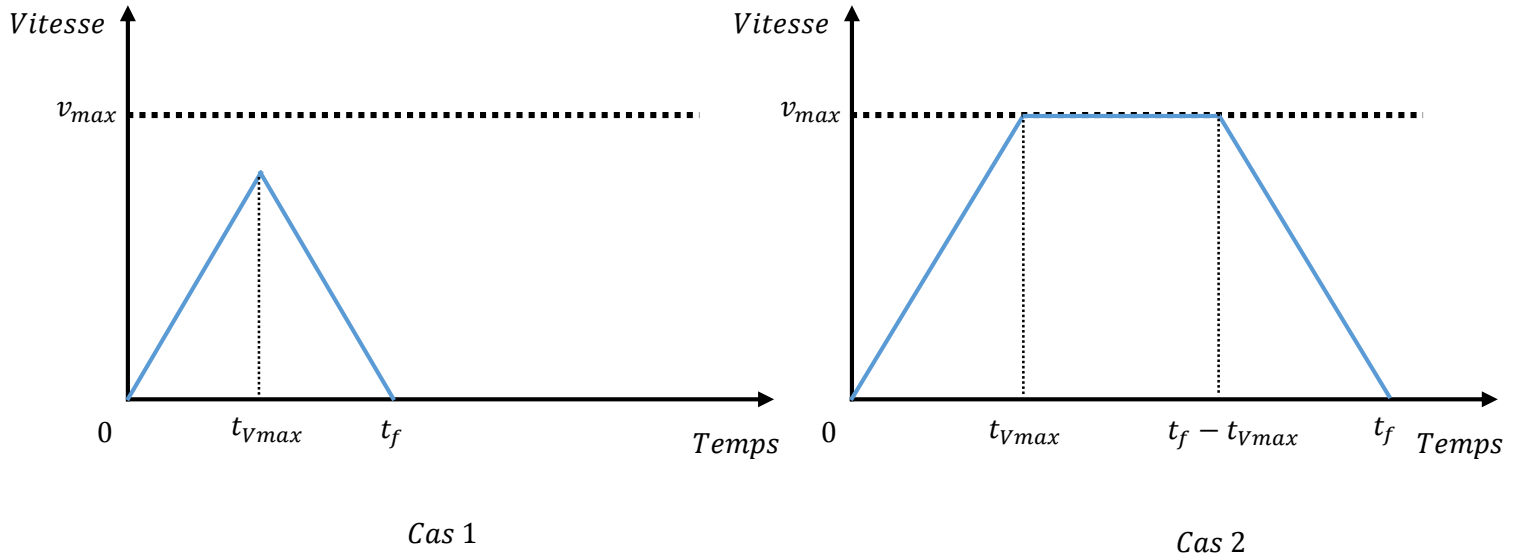


Figure 3.1: Deux cas de figure de la vitesse de déplacement de la machines

Idem pour le cas 2 nous avons :

$$v(t) = \begin{cases} at & t \in [0; t_{vmax}] \\ v_{max} & t \in [t_{vmax}; t_f - t_{vmax}] \\ -a(t - t_f) & t \in [t_f - t_{vmax}; t_f] \end{cases} \dots (3.18)$$

Et :

$$d(t_f) = \int_0^{t_f} v(t)dt = v_{max} t_f - \frac{v_{max}^2}{a} \dots (3.19)$$

On définit d comme étant la distance minimale parcourue par la machine afin d'atteindre sa vitesse maximale puis ralentir pour s'arrêter complètement. Ce qui veut dire que nous serons dans le cas où $t_f = 2t_{vmax}$ et $v_{max} = v(t_{vmax}) = at_{vmax}$, et donc :

$$d = \int_0^{t_f} v(t)dt = \int_0^{2t_{vmax}} v(t)dt = \frac{v_{max}^2}{a} \dots (3.20)$$

Nous considérons maintenant les deux axes sur lesquels se déplace notre machine. Nous divisons notre rack en quatre zones distinctes, où dans chacune la machine se déplace verticalement et horizontalement selon le cas 1 ou 2. Nous notons $Z_{i,j}$ la zone où la machine se déplace horizontalement selon le cas i et verticalement selon le cas j (Figure 3.2).

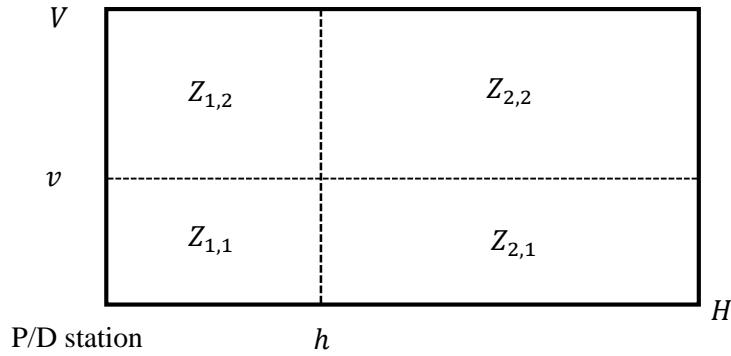


Figure 3.2: Zonage de la face du rack selon les différents cas possible des vitesses de la machine

Nous introduisons les notations suivantes :

a_H : Accélération/décélération de la machine sur l'axe horizontal

a_V : Accélération/décélération de la machine sur l'axe vertical.

v_H : Vitesse maximale de la machine pour l'axe horizontal.

v_V : Vitesse maximale de la machine pour l'axe vertical.

H : Dimension horizontal du rack (largeur du rack).

V : Dimension verticale du rack (hauteur du rack).

h : Distance horizontale minimum pour atteindre v_H (puis s'arrêter complètement).

v : Distance verticale minimum pour atteindre v_V (puis s'arrêter complètement).

t_{Vmax}^H : Temps minimum nécessaire pour atteindre la vitesse maximale horizontalement.

t_{Vmax}^V : Temps minimum nécessaire pour atteindre la vitesse maximale verticalement.

t_H : Temps nécessaire pour traverser tout le rack horizontalement.

t_V : Temps nécessaire pour traverser tout le rack verticalement.

t_h : Temps minimum nécessaire pour atteindre la vitesse maximale (puis s'arrêter complètement) horizontalement ($t_h = 2t_{Vmax}^H$).

t_v : Temps minimum nécessaire pour atteindre la vitesse maximale (puis s'arrêter complètement) verticalement ($t_v = 2t_{Vmax}^V$).

Nous associons à la face du rack un repère cartésien de telle sorte que notre station D/L soit de coordonnées (0; 0).

Soit l'emplacement à atteindre par la machine à partir de la station D/L représenté par $(x; y)$ où $0 \leq x \leq H$ et $0 \leq y \leq V$.

Nous notons $t_{(x;y)}$ le temps nécessaire à la machine pour atteindre l'emplacement $(x; y)$. Puisque la machine se déplace dans le plan selon une distance de Tchebychev (Hypothèse A7) nous avons $t_{(x;y)} = \max(t_x; t_y)$ où t_x est le temps de déplacement horizontal pour atteindre x et t_y le temps de déplacement vertical pour atteindre y .

Via les équations (3.17) et (3.19) nous obtenons :

$$t_x = \begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{a_H}} & \text{pour } 0 \leq x \leq h \text{ (cas 1)} \\ \frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} & \text{pour } h \leq x \leq H \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.21)$$

$$t_y = \begin{cases} \sqrt{\frac{4y}{a_V}} & \text{pour } 0 \leq y \leq v \text{ (cas 1)} \\ \frac{y}{v_V} + \frac{v_V}{a_V} & \text{pour } v \leq y \leq V \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.22)$$

Soit $G_{t_{(x;y)}}(z)$ la probabilité pour que le temps de déplacement entre la station D/L et le point $(x; y)$ soit inférieur ou égal à z , nous avons donc $\forall 0 \leq x \leq H$ et $\forall 0 \leq y \leq V$:

$$G_{t_{(x;y)}}(z) = P(t_{(x;y)} \leq z) = P(\max(t_x; t_y) \leq z) \dots (3.23)$$

Donc :

$$G_{t_{(x;y)}}(z) = P(t_x \leq z)P(t_y \leq z) \dots (3.24)$$

On peut remarquer que :

$$P(t_x \leq z) = P(t_x \leq z, \quad 0 \leq x \leq h) + P(t_x \leq z, \quad h \leq x \leq H) \dots (3.25)$$

Nous avons d'un côté :

$$P(t_x \leq z, \quad 0 \leq x \leq h) = \begin{cases} P(t_x \leq z)P(t_x = \sqrt{4x/a_H}) & \text{pour } 0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H} \\ P(t_x = \sqrt{4x/a_H})P(\sqrt{4x/a_H} \leq \sqrt{4h/a_H}) & \text{pour } z > \sqrt{4h/a_H} \end{cases} \dots (3.26)$$

Pour $0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H}$ nous avons $P(t_x = \sqrt{4x/a_H}) = 1$ (Cas 1)

Pour $z > \sqrt{4h/a_H}$ nous avons $P(t_x = \sqrt{4x/a_H}) = 0$ (Cas 2)

Avec $P(\sqrt{4x/a_H} \leq \sqrt{4h/a_H}) = 1 \quad \forall 0 \leq x \leq h$

Et d'un autre côté :

$$P(t_x \leq z, \quad h \leq x \leq H) = \begin{cases} P(t_x \leq z)P(t_x = \sqrt{4x/a_H}) & \text{pour } 0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H} \\ P(t_x \leq z)P\left(t_x = \frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } \sqrt{\frac{4h}{a_H}} \leq z \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \quad \dots (3.27) \\ P\left(t_x = \frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}\right)P\left(\frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \leq z \end{cases}$$

Dans ce cas $P(t_x = \sqrt{4x/a_H}) = 0$ et $P\left(t_x = \frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}\right) = 1$

Avec $P\left(\frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}\right) = 1 \quad \forall \quad h \leq x \leq H$

Par conséquent pour $0 \leq x \leq H$ nous avons :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} P(\sqrt{4x/a_H} \leq z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H} \\ P\left(\frac{x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \leq z\right) & \text{pour } \sqrt{\frac{4h}{a_H}} \leq z \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \quad \dots (3.28) \\ 1 & \text{pour } z \geq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \end{cases}$$

Donc :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} P(x \leq \frac{z^2 a_H}{4}) & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4} \leq h \\ P\left(x \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H\right) & \text{pour } h \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \leq H \quad \dots (3.29) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \geq H \end{cases}$$

Rappelons que la politique de stockage considérée est celle d'un stockage aléatoire, ce qui veut dire que tous les emplacements de stockage ont la même probabilité d'être choisis pour un stockage/déstockage. Par conséquent x suit une loi de distribution uniforme sur $[0; H]$.

Soit F_x la fonction de répartition de x , de ce fait on peut écrire :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} F_x\left(\frac{z^2 a_H}{4}\right) & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4} \leq h \\ F_x\left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H\right) & \text{pour } h \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \leq H \quad \dots (3.30) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \geq H \end{cases}$$

Puisque x suit une loi uniforme sur $[0; H]$, nous avons dans le cas général :

$$F_x(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 0 \\ \frac{\alpha}{H} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq H \quad \dots (3.31) \\ 1 & \text{si } \alpha \geq H \end{cases}$$

Donc :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4} \leq h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) & \text{pour } h \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) v_H \leq H \dots (3.32) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) v_H \geq H \end{cases}$$

Ou encore :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } 0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H} \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) & \text{pour } \sqrt{\frac{4h}{a_H}} \leq z \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \dots (3.33) \\ 1 & \text{pour } z \geq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \end{cases}$$

D'autre part nous avons t_h, t_v, t_H et t_V les temps nécessaires à la machines S/R pour atteindre h, v, H et V à partir de la station D/L, grâce à (3.17) et (3.19) nous avons :

$$t_H = \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}, t_V = \frac{V}{v_V} + \frac{v_V}{a_V}, t_h = \sqrt{4h/a_H} = \frac{2v_H}{a_H} \text{ et } t_v = \sqrt{4v/a_V} = \frac{2v_V}{a_V},$$

Par conséquent :

$$P(t_x \leq z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \dots (3.34) \\ 1 & \text{pour } z \geq t_H \end{cases}$$

De la même manière nous obtenons :

$$P(t_y \leq z) = \begin{cases} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \dots (3.35) \\ 1 & \text{pour } z \geq t_V \end{cases}$$

$G_{t(x,y)}(z)$ dépend des valeurs des paramètres t_h, t_v, t_H et t_V . De ce fait nous pouvons identifier 6 cas différents :

Cas 1 : $t_h \leq t_v \leq t_H \leq t_V$

Cas 2 : $t_v \leq t_h \leq t_H \leq t_V$

Cas 3 : $t_h \leq t_v \leq t_V \leq t_H$

Cas 4 : $t_h \leq t_H \leq t_v \leq t_V$

Cas 5 : $t_v \leq t_V \leq t_h \leq t_H$

Cas 6 : $t_v \leq t_h \leq t_V \leq t_H$

Soit $G_{t(x,y)}^k(z)$ la fonction de distribution de $t_{(x,y)}$ pour le cas k tel que $k = 1..6$, nous avons donc suivant l'équation (3.24) :

$$G_{t(x,y)}^1(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \end{cases} \dots (3.36)$$

$$G_{t(x,y)}^2(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \frac{v_{max}^V}{V} \left(z - \frac{v_{max}^V}{a_V}\right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \end{cases} \dots (3.37)$$

$$G_{t(x,y)}^3(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } t_V \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.38)$$

$$G_{t(x,y)}^4(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.39)$$

$$G_{t(x,y)}^5(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \\ \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.40)$$

$$G_{t(x,y)}^6(z) = \begin{cases} \frac{a_H z^2}{4H} \frac{a_V z^2}{4V} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{a_H z^2}{4H} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \frac{v_V}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \frac{v_H}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.41)$$

Soit $g_{t(x,y)}^k(z)$ la fonction de densité de $t_{(x,y)}$ pour le cas k tel que $k = 1..6$, nous avons donc :

$$g_{t(x,y)}^1(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{a_V v_H z (-2v_H + 3a_H z)}{4a_H HV} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \frac{v_H v_V (a_V (2a_H z - v_H) - a_H v_V)}{a_H a_V HV} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \\ \frac{v_V}{V} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.42)$$

$$g_{t(x,y)}^2(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{a_H v_V z (-2v_V + 3a_V z)}{4a_V HV} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H v_V (a_V (2a_H z - v_H) - a_H v_V)}{a_H a_V HV} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \frac{v_V}{V} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.43)$$

$$g_{t(x,y)}^3(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{a_V v_H z (-2v_H + 3a_H z)}{4a_H HV} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \frac{v_H v_V (a_V (2a_H z - v_H) - a_H v_V)}{a_H a_V HV} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \\ \frac{v_H}{H} & \text{pour } t_V \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.44)$$

$$g_{t(x,y)}^4(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \frac{a_V v_H z(-2v_H + 3a_H z)}{4a_H HV} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \frac{a_V z}{2V} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \\ \frac{v_V}{V} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.45)$$

$$g_{t(x,y)}^5(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{a_H v_V z(-2v_V + 3a_V z)}{4a_V HV} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \\ \frac{a_H z}{2H} & \text{pour } t_V \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H}{H} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.46)$$

$$g_{t(x,y)}^6(z) = \begin{cases} \frac{a_H a_V z^3}{4HV} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \frac{a_H v_V z(-2v_V + 3a_V z)}{4a_V HV} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \frac{v_H v_V (a_V (2a_H z - v_H) - a_H v_V)}{a_H a_V HV} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_V \\ \frac{v_H}{H} & \text{pour } t_V \leq z \leq t_H \end{cases} \dots (3.47)$$

Maintenant nous pouvons déduire le temps moyen nécessaire à la machine pour aller de la station D/L jusqu'au point (x; y) grâce à l'espérance mathématique selon chacun des 6 cas. Nous notons E^k ce temps de déplacement moyen pour le cas k.

$$E^k = \int_0^{\max(t_H; t_V)} z g_k^{t(x,y)}(z) dz \dots (3.48)$$

Nous avons donc :

$$E^1 = -\frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 HV} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} + \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 HV} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} - \frac{v_H^3 v_V^2}{2a_H^2 a_V HV} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} + \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_H a_V^2 HV} - \frac{v_H v_V^4}{3a_V^3 HV} \dots (3.49)$$

$$E^2 = \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 HV} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} + \frac{v_H^3 v_V^2}{6a_H^2 a_V HV} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 HV} \dots (3.50)$$

$$E^3 = \frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} - \frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 H V} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} + \frac{v_V^2 v_H}{2a_V^2 H} + \frac{v_H^2 v_V^3}{6a_H a_V^2 H V} - \frac{v_H v_V^4}{6a_V^3 H V} \dots (3.51)$$

$$E^4 = \frac{a_V H^3}{48v_H^3 V} + \frac{a_V H^2}{12a_H v_H V} + \frac{a_V v_H H}{8a_H^2 V} + \frac{a_V v_H^3}{12a_H^3 V} - \frac{11a_V v_H^5}{240a_H^4 H V} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} - \frac{v_V^3}{6a_V^2 V} \dots (3.52)$$

$$E^5 = \frac{a_H H^2}{6v_H^3} - \frac{v_H}{2a_H} + \frac{v_H V}{a_V H} - \frac{v_H^3}{3a_H^2 H} + \frac{8a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} + \frac{v_H V^2}{2v_V^2 H} - \frac{3v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{v_H v_V^2}{2a_V^2 H} + \frac{4v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{4a_H v_V^3}{3a_V^3 H} + \frac{5a_H v_V^5}{3a_V^4 H V} \dots (3.53)$$

$$E^6 = \frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^4 v_V}{3a_H^3 H V} + \frac{v_H^4 v_V^2}{a_V^2 H} + \frac{2v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{v_H^2 v_V^3}{2a_V^2 a_H H V} + \frac{v_V^4 v_H}{6a_V^3 H V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 H V} \dots (3.54)$$

-Temps moyen de restockage ER :

Comme expliqué précédemment, lors d'un déstockage, si le produit à déstocker ne se trouve pas en première position la machine S/R doit déstocker et restocker les produits bloquants (Cas 2). Le nombre de produits bloquants dépend de la taille du casier et du taux de charge du système.

Soit t'_p le temps nécessaire à la machine S/R pour se déplacer entre deux casiers adjacents (pour procéder au restockage). Soit R_k le temps nécessaire pour restocker les produits bloquants afin de déstocker un produit se trouvant à la $k^{ème}$ position :

$$R_k = 2(k - 1)t'_p \dots (3.55)$$

D'autre part pour un système où la taille des casiers est de M (nombre de produits pouvant être stockés dans chaque casier), et un taux de charge de ρ , pour une politique de stockage aléatoire (comme énoncé précédemment) le nombre moyen de produits se trouvant dans chaque casier est $M' = \rho M$, par conséquent le temps moyen nécessaire au restockage des produits bloquants pour déstocker un produit :

$$ER = \frac{1}{M' - 1} \sum_{k=2}^{M'} 2(k - 1)t'_p \dots (3.56)$$

Donc :

$$ER = M't'_p \dots (3.57)$$

- Temps moyen d'un stockage/déstockage pour chaque machine S/R :

A-Le stockage :

Selon l'équation (3.13), nous avons pour chacun des 6 cas précédemment étudiés :

$$ESC_{M1}^k = 2E_{M1}^k \dots (3.58)$$

$$ESC_{M2}^k = 2E_{M2}^k \dots (3.59)$$

B-Le déstockage :

Selon les équations (3.14) et (3.15), nous avons pour chaque cas k=1..6 :

Type 1 :

$$ERC_{M1/Op1}^k = 2E_{M1}^k \dots (3.60)$$

$$ERC_{M2/Op1}^k = 2E_{M2}^k \dots (3.61)$$

Type 2 :

$$ERC_{M1/Op2}^k = 2E_{M1}^k + ER \dots (3.62)$$

$$ERC_{M2/Op2}^k = 2E_{M2}^k + ER \dots (3.63)$$

Puisque les deux machines S/R sont identiques, nous avons pour chaque cas k=1..6 :

$$E_{M1}^k = E_{M2}^k = E^k \dots (3.64)$$

- Temps de cycle global du système :

A-Le stockage :

Suivant l'équation (3.4) nous avons pour chacun des k cas :

$$ESC^1 = -\frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 HV} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} + \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 HV} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} - \frac{v_H^3 v_V^2}{2a_H^2 a_V HV} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} + \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_H a_V^2 HV} - \frac{v_H v_V^4}{3a_V^3 HV} \dots (3.65)$$

$$ESC^2 = \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 HV} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} + \frac{v_H^3 v_V^2}{6a_H^2 a_V HV} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 HV} \dots (3.66)$$

$$ESC^3 = \frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} - \frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 HV} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} + \frac{v_V^2 v_H}{2a_V^2 H} + \frac{v_H^2 v_V^3}{6a_H a_V^2 HV} - \frac{v_H v_V^4}{6a_V^3 HV} \dots (3.67)$$

$$ESC^4 = \frac{a_V H^3}{48v_H^3 V} + \frac{a_V H^2}{12a_H v_H V} + \frac{a_V v_H H}{8a_H^2 V} + \frac{a_V v_H^3}{12a_H^3 V} - \frac{11a_V v_H^5}{240a_H^4 HV} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} - \frac{v_V^3}{6a_V^2 V} \dots (3.68)$$

$$ESC^5 = \frac{a_H H^2}{6v_H^3} - \frac{v_H}{2a_H} + \frac{v_H V}{a_V H} - \frac{v_H^3}{3a_H^2 H} + \frac{8a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} + \frac{v_H V^2}{2v_V^2 H} - \frac{3v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{v_H v_V^2}{2a_V^2 H} + \frac{4v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{4a_H v_V^3}{3a_V^3 H} + \frac{5a_H v_V^5}{3a_V^4 H V} \dots (3.69)$$

$$ESC^6 = \frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^4 v_V}{3a_H^3 H V} + \frac{v_H v_V^2}{a_V^2 H} + \frac{2v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{v_H^2 v_V^3}{2a_V^2 a_H H V} + \frac{v_V^4 v_H}{6a_V^3 H V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 H V} \dots (3.70)$$

B-Le déstockage :

Grâce à l'équation (3.12) nous avons :

$$ERC^1 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(-\frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 H V} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} + \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 H V} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} - \frac{v_H^3 v_V^2}{2a_H^2 a_V H V} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} + \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_H a_V^2 H V} - \frac{v_H v_V^4}{3a_V^3 H V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.71)$$

$$ERC^2 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(\frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} + \frac{v_V H}{2a_H V} + \frac{v_V H^2}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_V}{2a_H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V}{6a_H^3 H V} - \frac{v_V^2 H}{2a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2}{a_H a_V V} + \frac{v_H^3 v_V^2}{6a_H^2 a_V H V} + \frac{v_V^3}{2a_V^2 V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 H V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.72)$$

$$ERC^3 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(\frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} - \frac{a_V v_H^5}{15a_H^4 H V} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} + \frac{v_V^2 v_H}{2a_V^2 H} + \frac{v_H^2 v_V^3}{6a_H a_V^2 H V} - \frac{v_H v_V^4}{6a_V^3 H V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.73)$$

$$ERC^4 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(\frac{a_V H^3}{48v_H^3 V} + \frac{a_V H^2}{12a_H v_H V} + \frac{a_V v_H H}{8a_H^2 V} + \frac{a_V v_H^3}{12a_H^3 V} - \frac{11a_V v_H^5}{240a_H^4 H V} + \frac{V}{2v_V} + \frac{v_V}{a_V} - \frac{v_V^3}{6a_V^2 V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.74)$$

$$ERC^5 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(\frac{a_H H^2}{6v_H^3} - \frac{v_H}{2a_H} + \frac{v_H V}{a_V H} - \frac{v_H^3}{3a_H^2 H} + \frac{8a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} + \frac{v_H V^2}{2v_V^2 H} - \frac{3v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{v_H v_V^2}{2a_V^2 H} + \frac{4v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{4a_H v_V^3}{3a_V^3 H} + \frac{5a_H v_V^5}{3a_V^4 H V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.75)$$

$$ERC^6 = \left(2 - \frac{1}{M'}\right) \left(\frac{H}{2v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{v_H V}{2a_V H} + \frac{v_H^3}{2a_H^2 H} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} - \frac{v_H^2 V}{2a_H v_V H} - \frac{v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^4 v_V}{3a_H^3 H V} + \frac{v_H^4 v_V^2}{a_V^2 H} + \frac{2v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} - \frac{v_H^2 v_V^3}{2a_V^2 a_H H V} + \frac{v_V^4 v_H}{6a_V^3 H V} - \frac{a_H v_V^5}{15a_V^4 H V} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.76)$$

Les modèles des temps de cycle présentés plus haut suffisent parfaitement lorsqu'il s'agit d'évaluation des performances d'un système existant, ou afin de comparer différentes alternatives de type de système, de configuration ou de paramètres de fonctionnement. Cependant, afin que ces modèles puissent être utilisés en amont de l'installation du système, c'est-à-dire pendant la phase du design, il est nécessaire de considérer les contraintes architecturales du système, c'est-à-dire de prendre en considération le fait que ce dernier doit comporter un nombre entier de casiers et d'emplacements de stockage, de ce fait nous introduisons simplement les notations suivantes :

N_V : Nombre de casiers verticalement.

N_H : Nombre de casiers horizontalement.

c_V : Dimension de chaque casier verticalement.

c_H : Dimension de chaque casier horizontalement.

Donc en posant $H = c_H N_H$ et $V = c_V N_V$ nous pourrions avoir nos modèles du temps de cycle en fonction du nombre de casiers et de leurs tailles, ces derniers pourront être utilisés pour de l'optimisation en nombre entier par exemple, lorsqu'il s'agira d'optimiser en amont le design du système afin de minimiser le temps de cycle global.

3.2.2 Double cycle :

- **Vue globale du système :**

Comme il a été expliqué précédemment, lorsque le système procède à un déstockage, les machines peuvent fonctionner de manière indépendante ou travailler ensemble, et cela dépend de la position du produit à déstocker dans le casier, ce qui a un impact direct sur la capacité (débit) global du système. Puisqu'une opération de double cycle est composée d'une opération de stockage et de déstockage, le mode de fonctionnement du système dépend uniquement du type de déstockage à effectuer (voir les deux types de déstockage en 3.2.1).

Par conséquent, pour les mêmes raisons énoncées et expliquées dans 3.2.1 concernant le fonctionnement global du système, le temps moyen global pour un double cycle est :

$$EDC = \frac{1}{\rho M} \left(\frac{EDC_{M1/Op1} EDC_{M2/Op1}}{EDC_{M1/Op1} + EDC_{M2/Op1}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho M} \right) (EDC_{M1/Op2} + EDC_{M2/Op2}) \dots (3.77)$$

Avec $EDC_{i/j}$ le temps de double cycle pour la machine i pour le cas j (les deux cas sont présentés dans 3.2.1).

- **Vue détaillée du système :**

Nous regardons à présent le comportement de chaque machine à part. Lors d'un double cycle, les mouvements effectués par la machine S/R sont :

- Un aller de la station D/L vers le casier de stockage.
- Un déplacement intermédiaire entre le casier de stockage et celui du déstockage.
- Déstockage et restockage des produits bloquant le produit désiré.
- Un retour du casier de déstockage jusqu'à la station D/L.

Dans 3.2.1 le temps moyen de déplacement de la machine de la station D/L vers n'importe quel casier du rack (et inversement) a été noté E_{M1} pour la machine 1. On note le temps moyen d'un déplacement entre deux casiers quelconques du rack ET_{M1} pour la machine 1. Il est à noter que l'opération de l'étape 3 (restockage des produits bloquants) n'arrive que lorsqu'il s'agit du deuxième cas de déstockage (les deux cas sont présentés dans 3.2.1), le temps moyen de restockage des produits bloquants a été noté ER_{M1} pour la machine 1.

Nous aurons donc pour le cas 1 et 2 respectivement :

$$EDC_{M1/op1} = 2E_{M1} + ET_{M1} \dots (3.78)$$

$$EDC_{M1/op2} = 2E_{M1} + ET_{M1} + ER_{M1} \dots (3.79)$$

Les temps moyens E_{M1} et ER_{M1} ont été calculés dans 3.2.1, il nous reste à calculer ET_{M1} .

Comme précédemment nous associons à la face du rack un repère cartésien de telle sorte que notre station D/L soit de coordonnées $(0; 0)$.

Soit l'emplacement du casier de stockage représenté par $(x_1; y_1)$ et celui du déstockage par $(x_2; y_2)$ où $0 \leq x_1 \leq H, 0 \leq y_1 \leq V, 0 \leq x_2 \leq H$ et $0 \leq y_2 \leq V$.

Soient x'_1, x'_2, y'_1 et y'_2 telles que $x'_1 = \frac{x_1}{H}, x'_2 = \frac{x_2}{H}, y'_1 = \frac{y_1}{V}, y'_2 = \frac{y_2}{V}$ où $0 \leq x'_1 \leq 1, 0 \leq x'_2 \leq 1, 0 \leq y'_1 \leq 1$ et $0 \leq y'_2 \leq 1$.

Soient les distances w_x, w_y, w'_x et w'_y telles que $w_x = |x_1 - x_2|, w_y = |y_1 - y_2|, w'_x = |x'_1 - x'_2|$ et $w'_y = |y'_1 - y'_2|$.

Notons $t_{(w_x; w_y)}$ le temps nécessaire à la machine pour aller de $(x_1; y_1)$ à $(x_2; y_2)$. Puisque la machine se déplace dans le plan selon une distance de Tchebychev nous avons $t_{(w_x; w_y)} = \max(t_{w_x}; t_{w_y})$ où t_{w_x} est le temps de déplacement horizontal pour aller de x_1 à x_2 et t_{w_y} le temps de déplacement vertical pour aller de y_1 à y_2 .

Via les équations (3.17) et (3.19) nous obtenons :

$$t_{w_x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{4w_x}{a_H}} & \text{pour } 0 \leq w_x \leq h \text{ (cas 1)} \\ \frac{w_x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} & \text{pour } h \leq w_x \leq H \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.80)$$

$$t_{w_y} = \begin{cases} \sqrt{\frac{4w_y}{a_V}} & \text{pour } 0 \leq w_y \leq v \text{ (cas 1)} \\ \frac{w_y}{v_V} + \frac{v_V}{a_V} & \text{pour } v \leq w_y \leq V \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.81)$$

Nous pouvons écrire aussi :

$$t_{w_x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{4Hw'_x}{a_H}} & \text{pour } 0 \leq w'_x \leq \frac{h}{H} \text{ (cas 1)} \\ \frac{Hw'_x}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} & \text{pour } \frac{h}{H} \leq w_x \leq 1 \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.82)$$

$$t_{w_y} = \begin{cases} \sqrt{\frac{4Vw'_y}{a_V}} & \text{pour } 0 \leq w'_y \leq \frac{v}{V} \text{ (cas 1)} \\ \frac{Vw'_y}{v_V} + \frac{v_V}{a_V} & \text{pour } \frac{v}{V} \leq w'_y \leq 1 \text{ (cas 2)} \end{cases} \dots (3.83)$$

Soit $L_{t_{(w_x;w_y)}}(z)$ la probabilité pour que le temps de déplacement entre $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ soit inférieur ou égale à z , nous avons donc $\forall 0 \leq w_x \leq H$ et $\forall 0 \leq w_y \leq V$.

:

$$L_{t_{(w_x;w_y)}}(z) = P(t_{(w_x;w_y)} \leq z) = P(\max(t_{w_x}; t_{w_y}) \leq z) \dots (3.84)$$

Donc :

$$L_{t_{(w_x;w_y)}}(z) = P(t_{w_x} \leq z)P(t_{w_y} \leq z) \dots (3.85)$$

De la même manière que dans 3.2.1 on trouve :

$$P(t_{w_x} \leq z) = \begin{cases} P(w_x \leq \frac{z^2 a_H}{4}) & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4} \leq h \\ P\left(w_x \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H\right) & \text{pour } h \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \leq H \dots (3.86) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) v_H \geq H \end{cases}$$

D'autre part nous avons $w_x = Hw'_x$, et donc :

$$P(t_{w_x} \leq z) = \begin{cases} P\left(w'_x \leq \frac{z^2 a_H}{4H}\right) & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4H} \leq \frac{h}{H} \\ P\left(w'_x \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_H}{H}\right) & \text{pour } \frac{h}{H} \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_H}{H} \leq 1 \dots (3.87) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_H}{H} \geq 1 \end{cases}$$

Rappelons que la politique de stockage considérée est celle d'un stockage aléatoire, ce qui veut dire que tous les emplacements de stockage ont la même probabilité d'être choisis pour un stockage/déstocage. Par conséquent x_1 et x_2 suivent une loi de distribution uniforme sur $[0; H]$, et donc x'_1 et x'_2 suivent une loi de distribution uniforme sur $[0; 1]$.

Nous avons $w'_x = |x'_1 - x'_2|$ avec x'_1 et x'_2 qui suivent une loi de distribution uniforme sur $[0; 1]$, par conséquent w'_x qui représente l'écart absolu, suit une loi de distribution triangulaire dont la fonction de répartition $J_{w'_x}(\alpha)$ est définie comme suit avec $a = 0, b = 1$ et $c = 0$:

$$J_{w'_x}(\alpha) = \begin{cases} \frac{(\alpha - a)^2}{(b - a)(c - a)} & \text{pour } a < \alpha < c \\ 1 - \frac{(b - \alpha)^2}{(b - a)(b - c)} & \text{pour } c < \alpha \leq b \\ 1 & \text{pour } \alpha > b \end{cases}$$

Par conséquent nous aurons :

$$J_{w'_x}(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - \alpha^2 & \text{pour } 0 < \alpha \leq 1 \\ 1 & \text{pour } \alpha > 1 \end{cases}$$

Donc en remplaçant dans (3.87) :

$$P(t_{w_x} \leq z) = \begin{cases} \frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2} & \text{pour } 0 \leq \frac{z^2 a_H}{4H} \leq \frac{h}{H} \\ \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} & \text{pour } \frac{h}{H} \leq \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_H}{H} \leq 1 \dots (3.88) \\ 1 & \text{pour } \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{v_H}{H} \geq 1 \end{cases}$$

Donc :

$$P(t_{w_x} \leq z) = \begin{cases} \frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2} & \text{pour } 0 \leq z \leq \sqrt{4h/a_H} \\ \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} & \text{pour } \sqrt{\frac{4h}{a_H}} \leq z \leq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \dots (3.89) \\ 1 & \text{pour } z \geq \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H} \end{cases}$$

D'autre part nous avons t_h, t_v, t_H et t_V les temps nécessaires à la machines S/R pour parcourir les distances h, v, H et V , grâce à (3.17) et (3.19) nous avons :

$$t_H = \frac{H}{v_H} + \frac{v_H}{a_H}, t_V = \frac{V}{v_V} + \frac{v_V}{a_V}, t_h = \sqrt{4h/a_H} = \frac{2v_H}{a_H} \text{ et } t_v = \sqrt{4v/a_V} = \frac{2v_V}{a_V},$$

Par conséquent :

$$P(t_{w_x} \leq z) = \begin{cases} \frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \dots (3.90) \\ 1 & \text{pour } z \geq t_H \end{cases}$$

De la même manière nous obtenons :

$$P(t_{w_y} \leq z) = \begin{cases} \frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2} & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_V \dots (3.91) \\ 1 & \text{pour } z \geq t_V \end{cases}$$

$L_{t_{(w_x;w_y)}}(z)$ dépend des valeurs des paramètres t_h, t_v, t_H et t_V . De ce fait nous pouvons identifier 6 cas différents :

Cas 1 : $t_h \leq t_v \leq t_H \leq t_V$

Cas 2 : $t_v \leq t_h \leq t_H \leq t_V$

Cas 3 : $t_h \leq t_v \leq t_V \leq t_H$

Cas 4 : $t_h \leq t_H \leq t_v \leq t_V$

Cas 5 : $t_v \leq t_V \leq t_h \leq t_H$

Cas 6 : $t_v \leq t_h \leq t_V \leq t_H$

Soit $L_{t_{(w_x;w_y)}}^k(z)$ la fonction de distribution de $t_{(w_x;w_y)}$ pour le cas k tel que $k = 1..6$, nous avons donc :

$$L_{t_{(w_x;w_y)}}^1(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.92)$$

$$L_{t_{(w_x;w_y)}}^2(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_V \end{cases} \dots (3.93)$$

$$L_{t(w_x;w_y)}^3(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \end{cases} \quad \dots (3.94)$$

$$L_{t(w_x;w_y)}^4(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \end{cases} \quad \dots (3.95)$$

$$L_{t(w_x;w_y)}^5(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \end{cases} \quad \dots (3.96)$$

$$L_{t(w_x;w_y)}^6(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) \left(\frac{z^2 a_V}{2V} - \frac{z^4 a_V^2}{16V^2}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V}\right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V}\right)^2 \frac{v_V^2}{V^2}\right) \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H}\right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H}\right)^2 \frac{v_H^2}{H^2}\right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \end{cases} \quad \dots (3.97)$$

Soit $l_{t(w_x;w_y)}^k(z)$ la fonction de densité de $t(w_x;w_y)$ pour le cas k tel que $k = 1..6$, nous avons donc :

$$l_{t(w_x;w_y)}^1(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) \left(\frac{2v_H - 2v_H^2}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \right) + \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) \left(\frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} \right) + \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} \right) \left(\frac{2v_H}{H} - 2 \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \\ \frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \end{cases} \quad \dots (3.98)$$

$$l_{t(w_x;w_y)}^2(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) \left(\frac{2v_V - 2v_V^2}{V} \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) \left(\frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} \right) + \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} \right) \left(\frac{2v_H}{H} - 2 \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \end{cases} \quad \dots (3.99)$$

$$l_{t(w_x;w_y)}^3(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) \left(\frac{2v_H - 2v_H^2}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \right) + \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) \left(\frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} \right) + \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} \right) \left(\frac{2v_H}{H} - 2 \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \\ \frac{2v_H}{H} - 2 \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{v_H^2}{H^2} & \text{pour } t_v \leq z \leq t_H \end{cases} \quad \dots (3.100)$$

$$l_{t(w_x;w_y)}^4(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_h \\ \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) \left(\frac{2v_H - 2v_H^2}{H} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \right) + \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \\ \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) & \text{pour } t_H \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \end{cases} \quad \dots (3.101)$$

$$l_{t(w_x;w_y)}^5(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_V - z^4 a_V^2}{2V - 16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{2v_V}{V} - 2 \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{v_V^2}{V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H - z^4 a_H^2}{2H - 16H^2} \right) + \left(\frac{za_V - z^3 a_V^2}{V - 4V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_V}{a_V} \right) \frac{2v_V}{V} - \left(z - \frac{v_V}{a_V} \right)^2 \frac{v_V^2}{V^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{za_H - z^3 a_H^2}{H - 4H^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\frac{2v_H}{H} - 2 \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_H \end{cases} \quad \dots (3.102)$$

$$l_{t(w_x;w_y)}^6(z) = \begin{cases} \left(\frac{za_v}{V} - \frac{z^3 a_v^2}{4V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2} \right) + \left(\frac{za_H}{H} - \frac{z^3 a_H^2}{4H^2} \right) \left(\frac{z^2 a_v}{2V} - \frac{z^4 a_v^2}{16V^2} \right) & \text{pour } 0 \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{2v_v}{V} - 2 \left(z - \frac{v_v}{a_v} \right) \frac{v_v^2}{V^2} \right) \left(\frac{z^2 a_H}{2H} - \frac{z^4 a_H^2}{16H^2} \right) + \left(\frac{za_v}{V} - \frac{z^3 a_v^2}{4V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_v}{a_v} \right) \frac{2v_v}{V} - \left(z - \frac{v_v}{a_v} \right)^2 \frac{v_v^2}{V^2} \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \\ \left(\left(z - \frac{v_v}{a_v} \right) \frac{2v_v}{V} - \left(z - \frac{v_v}{a_v} \right)^2 \frac{v_v^2}{V^2} \right) \left(\frac{2v_H}{H} - \frac{2v_H^2}{H^2} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \right) + \left(\frac{2v_v}{V} - 2 \left(z - \frac{v_v}{a_v} \right) \frac{v_v^2}{V^2} \right) \left(\left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \frac{2v_H}{H} - \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right)^2 \frac{v_H^2}{H^2} \right) & \text{pour } t_h \leq z \leq t_v \\ \left(\frac{2v_H}{H} - \frac{2v_H^2}{H^2} \left(z - \frac{v_H}{a_H} \right) \right) & \text{pour } t_v \leq z \leq t_h \end{cases} \quad \dots (3.103)$$

Maintenant nous pouvons déduire le temps moyen nécessaire à la machine pour aller du point $(x_1; y_1)$ jusqu'à $(x_2; y_2)$ grâce à l'espérance mathématique, selon chacun des 6 cas. Nous notons ET^k ce temps de déplacement moyen pour le cas k.

$$ET^k = \int_0^{\max(t_H; t_V)} z l_{t(w_x;w_y)}^k(z) dz \dots (3.104)$$

Nous avons donc :

$$ET^1 = -\frac{4a_v v_H^5}{15a_H^4 HV} + \frac{4a_v^2 v_H^7}{105a_H^6 HV^2} + \frac{4a_v v_H^7}{105a_H^5 H^2 V} - \frac{4a_v^2 v_H^9}{315a_H^7 H^2 V^2} + \frac{V}{3v_v} + \frac{v_v}{a_v} + \frac{2v_v H}{3a_H V} + \frac{H^2 v_v}{6v_H^2 V} \\ + \frac{v_H^2 v_v}{a_H^2 V} + \frac{2v_H^4 v_v}{3a_H^3 HV} + \frac{v_H^6 v_v}{6a_H^4 H^2 V} - \frac{v_v^2 H^3}{30V^2 v_H^3} - \frac{v_v^2 H^2}{6a_H v_H V^2} - \frac{2v_v^2 H}{3a_v v_H V} - \frac{v_H v_v^2 H}{3a_H^2 V^2} \\ - \frac{2v_H v_v^2}{a_H a_v V} - \frac{v_H^3 v_v^2}{3a_H^3 V^2} - \frac{2v_H^3 v_v^2}{a_H^2 a_v HV} - \frac{v_H^5 v_v^2}{6a_H^4 HV^2} - \frac{2v_H^5 v_v^2}{3a_H^3 a_v H^2 V} - \frac{v_H^7 v_v^2}{30a_H^5 H^2 V^2} + \frac{2v_v^3 H}{3a_H a_v V^2} \\ + \frac{v_v^3}{a_v^2 V} + \frac{v_v^3 H^2}{6a_v v_H^2 V^2} + \frac{v_H^2 v_v^3}{a_H^2 a_v V^2} + \frac{8v_H^2 v_v^3}{3a_v^2 a_H HV} + \frac{2v_H^4 v_v^3}{3a_H^3 a_v HV^2} + \frac{4v_H^4 v_v^3}{3a_H^2 a_v^2 H^2 V} \\ + \frac{v_H^6 v_v^3}{6a_H^4 a_v H^2 V^2} - \frac{v_v^4 H}{3a_v^2 v_H V^2} - \frac{v_H v_v^4}{a_H a_v^2 V^2} - \frac{4v_H v_v^4}{3a_v^3 HV} - \frac{v_H^3 v_v^4}{a_H^2 a_v^2 HV^2} - \frac{4v_H^3 v_v^4}{3a_H a_v^3 H^2 V} \\ - \frac{v_H^5 v_v^4}{3a_H^3 a_v^2 H^2 V^2} + \frac{v_v^5}{3a_v^3 V^2} + \frac{8v_H^2 v_v^5}{15a_H a_v^3 HV^2} + \frac{8v_H^2 v_v^5}{15a_v^4 H^2 V} + \frac{4v_H^4 v_v^5}{15a_H^2 a_v^3 H^2 V^2} \\ - \frac{8v_H^2 v_v^7}{105a_v^5 H^2 V^2} \dots (3.105)$$

$$ET^2 = \frac{V}{3v_v} + \frac{v_v}{a_v} + \frac{2v_v H}{3a_H V} + \frac{H^2 v_v}{6v_H^2 V} + \frac{v_H^2 v_v}{a_H^2 V} - \frac{2v_H^4 v_v}{3a_H^3 HV} + \frac{v_H^6 v_v}{6a_H^4 H^2 V} - \frac{v_v^2 H^3}{30V^2 v_H^3} - \frac{v_v^2 H^2}{6a_H v_H V^2} - \frac{2v_v^2 H}{3a_v v_H V} \\ - \frac{v_H v_v^2 H}{3a_H^2 V^2} - \frac{2v_H v_v^2}{a_H a_v V} - \frac{v_H^3 v_v^2}{3a_H^3 V^2} + \frac{2v_H^3 v_v^2}{3a_H^2 a_v HV} + \frac{11v_H^5 v_v^2}{30a_H^4 HV^2} - \frac{2v_H^5 v_v^2}{15a_H^3 a_v H^2 V} \\ - \frac{23v_H^7 v_v^2}{210a_H^5 H^2 V^2} + \frac{2v_v^3 H}{3a_H a_v V^2} + \frac{v_v^3}{a_v^2 V} + \frac{v_v^3 H^2}{6a_v v_H^2 V^2} + \frac{v_H^2 v_v^3}{a_H^2 a_v V^2} - \frac{2v_H^4 v_v^3}{3a_H^3 a_v HV^2} \\ + \frac{v_H^6 v_v^3}{6a_H^4 a_v H^2 V^2} - \frac{v_v^4 H}{3a_v^2 v_H V^2} - \frac{v_H v_v^4}{a_H a_v^2 V^2} + \frac{v_H^3 v_v^4}{3a_H^2 a_v^2 HV^2} - \frac{v_H^5 v_v^4}{15a_H^3 a_v^2 H^2 V^2} + \frac{v_v^5}{3a_v^3 V^2} \\ - \frac{4a_H v_v^5}{15a_v^4 HV} + \frac{4a_H v_v^7}{105a_v^5 HV^2} + \frac{4a_H^2 v_v^7}{105a_v^6 H^2 V} - \frac{4a_H^2 v_v^9}{315a_v^7 H^2 V^2} \dots (3.106)$$

$$\begin{aligned}
 ET^3 = & \frac{H}{3v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{2v_H V}{3a_V H} + \frac{v_H^3}{a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{3a_H a_V H^2} + \frac{v_H^5}{3a_H^3 H^2} - \frac{4a_V v_H^5}{15a_H^4 H V} + \frac{4a_V^2 v_H^7}{105a_H^6 H V^2} + \frac{4a_V v_H^7}{105a_H^5 H^2 V} \\
 & - \frac{4a_V^2 v_H^9}{315a_H^7 H^2 V^2} - \frac{v_H^2 V^3}{30v_V^3 H^2} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} + \frac{v_H^3 V^2}{6a_H v_V^2 H^2} - \frac{2v_H^2 V}{3a_H v_V H} - \frac{v_H^2 V^2}{6a_V v_V H^2} - \frac{V v_H^4}{3a_H^2 v_V H^2} \\
 & - \frac{2v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^2 v_V V}{3a_V^2 H^2} - \frac{v_H^4 v_V}{a_H^2 a_V H^2} + \frac{v_V^2 v_H}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} - \frac{v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} + \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_H a_V^2 H V} \\
 & + \frac{v_H^4 v_V^3}{3a_H^2 a_V^2 H^2 V} - \frac{2v_V^4 v_H}{3a_V^3 H V} - \frac{2v_V^4 v_H^3}{3a_H a_V^3 H^2 V} - \frac{2v_H^2 v_V^5}{15a_H a_V^3 H V^2} + \frac{11v_H^2 v_V^5}{30a_V^4 H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V^5}{15a_H^2 a_V^3 H^2 V^2} \\
 & + \frac{v_H v_V^6}{6a_V^4 H V^2} + \frac{v_H^3 v_V^6}{6a_H a_V^4 H^2 V^2} - \frac{23v_H^2 v_V^7}{210a_V^5 H^2 V^2} \dots (3.107)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ET^4 = & -\frac{a_V^2 H^5}{1680v_H^5 V^2} - \frac{a_V^2 H^4}{240a_H v_H^3 V^2} + \frac{a_V H^3}{60v_H^3 V} - \frac{a_V^2 H^3}{80a_H^2 v_H V^2} + \frac{a_V H^2}{12a_H v_H V} - \frac{a_V^2 v_H H^2}{48a_H^3 V^2} + \frac{a_V v_H H}{6a_H^2 V} \\
 & - \frac{a_V^2 v_H^3 H}{48a_H^4 V^2} + \frac{a_V v_H^3}{6a_H^3 V} - \frac{a_V^2 v_H^5}{80a_H^5 V^2} - \frac{11a_V v_H^5}{60a_H^4 H V} + \frac{19a_V^2 v_H^7}{560a_H^6 H V^2} + \frac{23a_V v_H^7}{420a_H^5 H^2 V} \\
 & - \frac{67a_V^2 v_H^9}{5040a_H^7 H^2 V^2} + \frac{V}{3v_V} + \frac{v_V}{a_V} - \frac{v_V^3}{3a_V^2 V} + \frac{v_V^5}{15a_V^3 V^2} \dots (3.108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ET^5 = & -\frac{a_H^2 H^3}{20v_H^5} + \frac{a_H H^2}{12v_H^3} + \frac{H}{6v_H} - \frac{v_H}{2a_H} + \frac{2v_H V}{a_V H} - \frac{11v_H^3}{12a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{a_H a_V H^2} - \frac{23v_H^5}{60a_H^3 H^2} + \frac{32a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} \\
 & - \frac{24a_V^2 v_H^7}{7a_H^6 H V^2} - \frac{24a_V v_H^7}{7a_H^5 H^2 V} + \frac{16a_V^2 v_H^9}{9a_H^7 H^2 V^2} - \frac{2v_H^2 V^3}{3v_V^3 H^2} + \frac{v_H V^2}{v_V^2 H} + \frac{v_H^3 V^2}{a_H v_V^2 H^2} - \frac{2v_H^2 V^2}{a_V v_V H^2} \\
 & - \frac{2v_H^2 v_V}{a_V^2 H^2} - \frac{12v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{20v_H^5 v_V}{3a_H^4 H^2 V} + \frac{v_V^2 v_H}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} + \frac{16v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} + \frac{64v_H^5 v_V^2}{5a_H^4 H V^2} \\
 & - \frac{16v_H^5 v_V^2}{5a_H^3 a_V H^2 V} - \frac{48v_H^7 v_V^2}{7a_H^5 H^2 V^2} - \frac{8a_H v_V^3}{3a_V^3 H} - \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} - \frac{12v_H^4 v_V^3}{a_H^3 a_V H V^2} + \frac{20v_H^6 v_V^3}{3a_H^4 a_V H^2 V^2} \\
 & + \frac{8v_H^3 v_V^4}{3a_H^2 a_V^2 H V^2} - \frac{8v_H^5 v_V^4}{5a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} + \frac{8a_H^2 v_V^5}{5a_V^5 H^2} + \frac{20a_H v_V^5}{3a_V^4 H V} - \frac{52a_H v_V^7}{15a_V^5 H V^2} - \frac{52a_H^2 v_V^7}{15a_V^6 H^2 V} \\
 & + \frac{188a_H^2 v_V^9}{105a_V^7 H^2 V^2} \dots (3.109)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ET^6 = & \frac{H}{3v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{2v_H V}{3a_V H} + \frac{v_H^3}{a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{3a_H a_V H^2} + \frac{v_H^5}{3a_H^3 H^2} - \frac{v_H^2 V^3}{30v_V^3 H^2} + \frac{v_H V^2}{6Hv_V^2} + \frac{v_H^3 V^2}{6a_H v_V^2 H^2} \\
 & - \frac{2v_H^2 V}{3a_H v_V H} - \frac{v_H^2 V^2}{6a_V v_V H^2} - \frac{v_V H^4}{3a_H^2 v_V H^2} - \frac{2v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^2 v_V V}{3a_V^2 H^2} - \frac{v_H^4 v_V}{a_H^2 a_V H^2} - \frac{4v_H^4 v_V}{3a_H^3 H V} \\
 & + \frac{v_H v_V^2}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} + \frac{8v_H^3 v_V^2}{3a_H^2 a_V H V} + \frac{8v_H^5 v_V^2}{15a_H^4 H V^2} + \frac{8v_H^5 v_V^2}{15a_H^3 a_V H^2 V} - \frac{8v_H^7 v_V^2}{105a_H^5 H^2 V^2} \\
 & - \frac{v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} - \frac{2v_H^2 v_V^3}{a_H a_V^2 H V} - \frac{4v_H^4 v_V^3}{3a_H^3 a_V H V^2} - \frac{v_H^4 v_V^3}{a_H^2 a_V^2 H^2 V} + \frac{2v_H v_V^4}{3a_V^3 H V} + \frac{4v_H^3 v_V^4}{3a_H^2 a_V^2 H V^2} \\
 & + \frac{2v_H^3 v_V^4}{3a_H a_V^3 H^2 V} + \frac{4v_H^5 v_V^4}{15a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} - \frac{4a_H v_V^5}{15a_V^4 H V} - \frac{2v_H^2 v_V^5}{3a_H a_V^3 H V^2} - \frac{v_H^2 v_V^5}{6a_V^4 H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V^5}{3a_H^2 a_V^3 H^2 V^2} \\
 & + \frac{v_H v_V^6}{6a_V^4 H V^2} + \frac{v_H^3 v_V^6}{6a_H a_V^4 H^2 V^2} + \frac{4a_H v_V^7}{105a_V^5 H V^2} + \frac{4a_H^2 v_V^7}{105a_V^6 H^2 V} - \frac{v_H^2 v_V^7}{30a_V^5 H^2 V^2} \\
 & - \frac{4a_H^2 v_V^9}{315a_V^7 H^2 V^2} \dots (3.110)
 \end{aligned}$$

Et finalement nous obtenons les temps de double cycle du système grâce aux équations (3.77), (3.78) et (3.79) pour chacun des six cas :

$$\begin{aligned}
 EDC^1 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(-\frac{2a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} + \frac{4a_V^2 v_H^7}{105a_H^6 H V^2} + \frac{4a_V v_H^7}{105a_H^5 H^2 V} - \frac{4a_V^2 v_H^9}{315a_H^7 H^2 V^2} + \frac{4V}{3v_V} + \frac{3v_V}{a_V} + \frac{5v_V H}{3a_H V} \right. \\
 & + \frac{H^2 v_V}{2v_H^2 V} + \frac{2v_H^2 v_V}{a_H^2 V} + \frac{v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{v_H^6 v_V}{6a_H^4 H^2 V} - \frac{v_V^2 H^3}{30V^2 v_H^3} - \frac{v_V^2 H^2}{6a_H v_H V^2} - \frac{5v_V^2 H}{3a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2 H}{3a_H^2 V^2} \\
 & - \frac{4v_H v_V^2}{a_H a_V V} - \frac{v_H^3 v_V^2}{3a_H^3 V^2} - \frac{3v_H^3 v_V^2}{a_H^2 a_V H V} - \frac{v_H^5 v_V^2}{6a_H^4 H V^2} - \frac{2v_H^5 v_V^2}{3a_H^3 a_V H^2 V} - \frac{v_H^7 v_V^2}{30a_H^5 H^2 V^2} + \frac{2v_V^3 H}{3a_H a_V V^2} \\
 & + \frac{2v_V^3}{a_V^2 V} + \frac{v_V^3 H^2}{6a_V v_H^2 V^2} + \frac{v_H^2 v_V^3}{a_H^2 a_V V^2} + \frac{4v_H^2 v_V^3}{a_V^2 a_H H V} + \frac{2v_H^4 v_V^3}{3a_H^3 a_V H V^2} + \frac{4v_H^4 v_V^3}{3a_H^2 a_V^2 H^2 V} \\
 & + \frac{v_H^6 v_V^3}{6a_H^4 a_V H^2 V^2} - \frac{v_V^4 H}{3a_V^2 v_H V^2} - \frac{v_H v_V^4}{a_H a_V^2 V^2} - \frac{42v_V^4}{a_V^3 H V} - \frac{v_H^3 v_V^4}{a_H^2 a_V^2 H V^2} - \frac{4v_H^3 v_V^4}{3a_H a_V^3 H^2 V} \\
 & - \frac{v_H^5 v_V^4}{3a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} + \frac{v_V^5}{3a_V^3 V^2} + \frac{8v_H^2 v_V^5}{15a_H a_V^3 H V^2} + \frac{8v_H^2 v_V^5}{15a_V^4 H^2 V} + \frac{4v_H^4 v_V^5}{15a_H^2 a_V^3 H^2 V^2} \\
 & \left. - \frac{8v_H^2 v_V^7}{105a_V^5 H^2 V^2} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.111)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDC^2 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(\frac{4V}{3v_V} + \frac{3v_V}{a_V} + \frac{5v_V H}{3a_H V} + \frac{H^2 v_V}{2v_H^2 V} + \frac{2v_H^2 v_V}{a_H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{v_H^6 v_V}{6a_H^4 H^2 V} - \frac{v_V^2 H^3}{30V^2 v_H^3} \right. \\
 & - \frac{v_V^2 H^2}{6a_H v_H V^2} - \frac{5v_V^2 H}{3a_V v_H V} - \frac{v_H v_V^2 H}{3a_H^2 V^2} - \frac{4v_H v_V^2}{a_H a_V V} - \frac{v_H^3 v_V^2}{3a_H^3 V^2} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H^2 a_V H V} + \frac{11v_H^5 v_V^2}{30a_H^4 H V^2} \\
 & - \frac{2v_H^5 v_V^2}{15a_H^3 a_V H^2 V} - \frac{23v_H^7 v_V^2}{210a_H^5 H^2 V^2} + \frac{2v_V^3 H}{3a_H a_V V^2} + \frac{2v_V^3}{a_V^2 V} + \frac{v_V^3 H^2}{6a_V v_H^2 V^2} + \frac{v_H^2 v_V^3}{a_H^2 a_V V^2} \\
 & - \frac{2v_H^4 v_V^3}{3a_H^3 a_V H V^2} + \frac{v_H^6 v_V^3}{6a_H^4 a_V H^2 V^2} - \frac{v_V^4 H}{3a_V^2 v_H V^2} - \frac{v_H v_V^4}{a_H a_V^2 V^2} + \frac{v_H^3 v_V^4}{3a_H^2 a_V^2 H V^2} - \frac{v_H^5 v_V^4}{15a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} \\
 & \left. + \frac{v_V^5}{3a_V^3 V^2} - \frac{2a_H v_V^5}{5a_V^4 H V} + \frac{4a_H v_V^7}{105a_V^5 H V^2} + \frac{4a_H^2 v_V^7}{105a_V^6 H^2 V} - \frac{4a_H^2 v_V^9}{315a_V^7 H^2 V^2} \right) \\
 & + (M' - 1)t'_p \dots (3.112)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDC^3 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(\frac{H}{3v_H} + \frac{v_H}{a_H} + \frac{2v_H V}{3a_V H} + \frac{v_H^3}{a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{3a_H a_V H^2} + \frac{v_H^5}{3a_H^3 H^2} - \frac{4a_V v_H^5}{15a_H^4 H V} + \frac{4a_V^2 v_H^7}{105a_H^6 H V^2} \right. \\
 & + \frac{4a_V v_H^7}{105a_H^5 H^2 V} - \frac{4a_V^2 v_H^9}{315a_H^7 H^2 V^2} - \frac{v_H^2 V^3}{30v_V^3 H^2} + \frac{v_H V^2}{6v_V^2 H} + \frac{v_H^3 V^2}{6a_H v_V^2 H^2} - \frac{2v_H^2 V}{3a_H v_V H} \\
 & - \frac{v_H^2 V^2}{6a_V v_V H^2} - \frac{V v_H^4}{3a_H^2 v_V H^2} - \frac{2v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^2 v_V V}{3a_V^2 H^2} - \frac{v_H^4 v_V}{a_H^2 a_V H^2} + \frac{v_V^2 v_H}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} \\
 & - \frac{v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} + \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_H a_V^2 H V} + \frac{v_H^4 v_V^3}{3a_H^2 a_V^2 H^2 V} - \frac{2v_H^4 v_V}{3a_V^3 H V} - \frac{2v_V^4 v_H^3}{3a_H a_V^3 H^2 V} - \frac{2v_H^2 v_V^5}{15a_H a_V^3 H V^2} \\
 & \left. + \frac{11v_H^2 v_V^5}{30a_V^4 H^2 V} - \frac{v_H^4 v_V^5}{15a_H^2 a_V^3 H^2 V^2} + \frac{v_H v_V^6}{6a_V^4 H V^2} + \frac{v_H^3 v_V^6}{6a_H a_V^4 H^2 V^2} - \frac{23v_H^2 v_V^7}{210a_V^5 H^2 V^2} \right) \\
 & + (M' - 1)t'_p \dots (3.113)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDC^4 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(-\frac{a_V^2 H^5}{1680v_H^5 V^2} - \frac{a_V^2 H^4}{240a_H v_H^3 V^2} + \frac{7a_V H^3}{120v_H^3 V} - \frac{a_V^2 H^3}{80a_H^2 v_H V^2} + \frac{a_V H^2}{4a_H v_H V} - \frac{a_V^2 v_H H^2}{48a_H^3 V^2} \right. \\
 & + \frac{5a_V v_H H}{12a_H^2 V} - \frac{a_V^2 v_H^3 H}{48a_H^4 V^2} + \frac{a_V v_H^3}{3a_H^3 V} - \frac{a_V^2 v_H^5}{80a_H^5 V^2} - \frac{11a_V v_H^5}{40a_H^4 H V} + \frac{19a_V^2 v_H^7}{560a_H^6 H V^2} + \frac{23a_V v_H^7}{420a_H^5 H^2 V} \\
 & \left. - \frac{67a_V^2 v_H^9}{5040a_H^7 H^2 V^2} + \frac{4V}{3v_V} + \frac{3v_V}{a_V} - \frac{2v_V^3}{3a_V^2 V} + \frac{v_V^5}{15a_V^3 V^2} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.114)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDC^5 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(-\frac{a_H^2 H^3}{20v_H^5} + \frac{5a_H H^2}{12v_H^3} + \frac{H}{6v_H} - \frac{3v_H}{2a_H} + \frac{4v_H V}{a_V H} - \frac{19v_H^3}{12a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{a_H a_V H^2} - \frac{23v_H^5}{60a_H^3 H^2} \right. \\
 & + \frac{48a_V v_H^5}{5a_H^4 H V} - \frac{24a_V^2 v_H^7}{7a_H^6 H V^2} - \frac{24a_V v_H^7}{7a_H^5 H^2 V} + \frac{16a_V^2 v_H^9}{9a_H^7 H^2 V^2} - \frac{2v_H^2 V^3}{3v_V^3 H^2} + \frac{2v_H V^2}{v_V^2 H} + \frac{v_H^3 V^2}{a_H v_V^2 H^2} \\
 & - \frac{2v_H^2 V^2}{a_V v_V H^2} - \frac{2v_H^2 v_V V}{a_V^2 H^2} - \frac{18v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{20v_H^6 v_V}{3a_H^4 H^2 V} + \frac{2v_V^2 v_H}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} + \frac{8v_H^3 v_V^2}{a_H^2 a_V H V} \\
 & + \frac{64v_H^5 v_V^2}{5a_H^4 H V^2} - \frac{16v_H^5 v_V^2}{5a_H^3 a_V H^2 V} - \frac{48v_H^7 v_V^2}{7a_H^5 H^2 V^2} - \frac{16a_H v_V^3}{3a_V^3 H} - \frac{2v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} - \frac{12v_H^4 v_V^3}{a_H^3 a_V H V^2} \\
 & + \frac{20v_H^6 v_V^3}{3a_H^4 a_V H^2 V^2} + \frac{8v_H^3 v_V^4}{3a_H^2 a_V^2 H V^2} - \frac{8v_H^5 v_V^4}{5a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} + \frac{8a_H^2 v_V^5}{5a_V^5 H^2} + \frac{10a_H v_V^5}{a_V^4 H V} - \frac{52a_H v_V^7}{15a_V^5 H V^2} \\
 & \left. - \frac{52a_H^2 v_V^7}{15a_V^6 H^2 V} + \frac{188a_H^2 v_V^9}{105a_V^7 H^2 V^2} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EDC^6 = & \left(1 - \frac{1}{2M'}\right) \left(\frac{4H}{3v_H} + \frac{3v_H}{a_H} + \frac{5v_H V}{3a_V H} + \frac{2v_H^3}{a_H^2 H} + \frac{2v_H^3 V}{3a_H a_V H^2} + \frac{v_H^5}{3a_H^3 H^2} - \frac{v_H^2 V^3}{30v_V^3 H^2} + \frac{v_H V^2}{2Hv_V^2} \right. \\
 & + \frac{v_H^3 V^2}{6a_H v_V^2 H^2} - \frac{5v_H^2 V}{3a_H v_V H} - \frac{v_H^2 V^2}{6a_V v_V H^2} - \frac{v_V H^4}{3a_H^2 v_V H^2} - \frac{4v_H^2 v_V}{a_H a_V H} - \frac{v_H^2 v_V V}{3a_V^2 H^2} - \frac{v_H^4 v_V}{a_H^2 a_V H^2} \\
 & - \frac{2v_H^4 v_V}{a_H^3 H V} + \frac{2v_H v_V^2}{a_V^2 H} + \frac{v_H^3 v_V^2}{a_H a_V^2 H^2} + \frac{4v_H^3 v_V^2}{a_H^2 a_V H V} + \frac{8v_H^5 v_V^2}{15a_H^4 H V^2} + \frac{8v_H^5 v_V^2}{15a_H^3 a_V H^2 V} \\
 & - \frac{8v_H^7 v_V^2}{105a_H^5 H^2 V^2} - \frac{v_H^2 v_V^3}{3a_V^3 H^2} - \frac{3v_H^2 v_V^3}{a_H a_V^2 H V} - \frac{4v_H^4 v_V^3}{3a_H^3 a_V H V^2} - \frac{v_H^4 v_V^3}{a_H^2 a_V^2 H^2 V} + \frac{v_H v_V^4}{a_V^3 H V} \\
 & + \frac{4v_H^3 v_V^4}{3a_H^2 a_V^2 H V^2} + \frac{2v_H^3 v_V^4}{3a_H a_V^3 H^2 V} + \frac{4v_H^5 v_V^4}{15a_H^3 a_V^2 H^2 V^2} - \frac{2a_H v_V^5}{5a_V^4 H V} - \frac{2v_H^2 v_V^5}{3a_H a_V^3 H V^2} - \frac{v_H^2 v_V^5}{6a_V^4 H^2 V} \\
 & - \frac{v_H^4 v_V^5}{3a_H^2 a_V^3 H^2 V^2} + \frac{v_H v_V^6}{6a_V^4 H V^2} + \frac{v_H^3 v_V^6}{6a_H a_V^4 H^2 V^2} + \frac{4a_H v_V^7}{105a_V^5 H V^2} + \frac{4a_H^2 v_V^7}{105a_V^6 H^2 V} - \frac{v_H^2 v_V^7}{30a_V^5 H^2 V^2} \\
 & \left. - \frac{4a_H^2 v_V^9}{315a_V^7 H^2 V^2} \right) + (M' - 1)t'_p \dots (3.116)
 \end{aligned}$$

De la même manière que pour le simple cycle, en posant $H = c_H N_H$ et $V = c_V N_V$ nous obtenons les modèles du temps de double cycle en fonction du nombre de casiers et de leurs dimensions.

Nous avons donc, développé des modèles mathématiques des différents temps de cycle du système ; les simples cycles de stockage et de déstockage et le double cycle. Et contrairement aux modèles présentés dans le chapitre 2, ces derniers ont été modélisés avec l'hypothèse de vitesses variables, c'est-à-dire en prenant en considération l'accélération/décélération des machines ainsi que la vitesse maximale. Cependant, afin d'évaluer la précision de ces modèles nous devons procéder à des simulations du fonctionnement du système afin d'établir numériquement l'aptitude de nos modèles à procurer en amont une estimation précise des performances du système.

3.3 Evaluation de la précision des modèles :

Afin d'arriver à nos fins, nous procédons à une simulation du fonctionnement du système. Pour ce faire, nous avons développé un programme sous Matlab qui va reproduire virtuellement le comportement de notre AS/RS en fonction des requêtes de stockage/déstockage et de double cycle qui lui parviennent. Par la suite les temps de déplacement des machines pour chaque transaction sont calculés, avant le calcul qu'un temps moyens global pour le stockage, le déstockage et le double cycle.

A-Principe de fonctionnement :

➤ Données d'entrée :

Afin de procéder à notre simulation, nous avons besoin d'un certain nombre de données d'entrée, qui vont déterminer les caractéristiques opérationnelles de notre système.

Dans notre cas les données nécessaires sont les dimensions du système (H; V; M), les vitesses maximales des machines et leurs accélérations, ainsi que le taux de charge. Concernant les dimensions du système, nous avons décidé d'étudier plusieurs taille du système en faisant varier son facteur de forme. Nous avons choisi trois tailles de système avec un pourcentage de tolérance ; $600 \pm 1\%$ (Figure 3.3), $3000 \pm 1\%$ (Figure 3.4) et $10000 \pm 1\%$ (Figure 3.5) et pour chacun d'eux, différentes configuration des dimensions

qui varie le facteur de forme, de petit jusqu'à carré en temps ($b \approx 1$), tout en faisant varier la profondeur des casiers. Nous nous retrouvons donc avec les 28 configurations, dont tous les résultats peuvent être retrouvés en Annexe F. De plus, en ce qui concerne les vitesses maximales des machines et leurs accélérations, elles ont été générées aléatoirement tout en restant dans l'intervalle des vitesses et accélérations existantes dans l'industrie. Finalement, nous faisons varier le taux charge d'une valeur basse (0.3) à son maximum (1.0), tout en sachant que la zone opératoire utile est définie dans l'intervalle $\rho \in [0.7; 0.85]$ (Sari, Saygin, & Ghouali, 2005).

➤ Traitement :

Le programme en question considère une taille de système selon les dimensions fournies en entrée, puis ce dernier est rempli jusqu'à atteindre son taux de charge opérationnel, suivant une loi de distribution uniforme sur les emplacements de stockage (politique de stockage aléatoire). Suivant les requêtes de stockage, de déstockage ou de double cycle qui arrivent au système, des temps de déplacement des machines sont calculés en fonction des opérations effectuées et des emplacements des produits concernés, tout en se basant sur les hypothèses des caractéristiques opérationnelles précédemment formulées. Avant de calculer à la fin (après 10000 transactions et 10000 instances), les temps moyens de stockage, déstockage et de double cycle.

➤ Données de sortie :

A la fin de la simulation, les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec les modèles développés. Nous calculons le gap existant entre la simulation et les modèles mathématiques pour tous les cas considérés et selon les variations des différents paramètres de fonctionnement du système énoncés plus haut, ces résultats sont disponibles en Annexe F. Cependant, puisque les résultats numériques sont trop volumineux, nous présentons dans ce chapitre nos résultats sous forme de graphiques, pour des gaps moyens calculés après simulation (Figure 3.3-3.5).

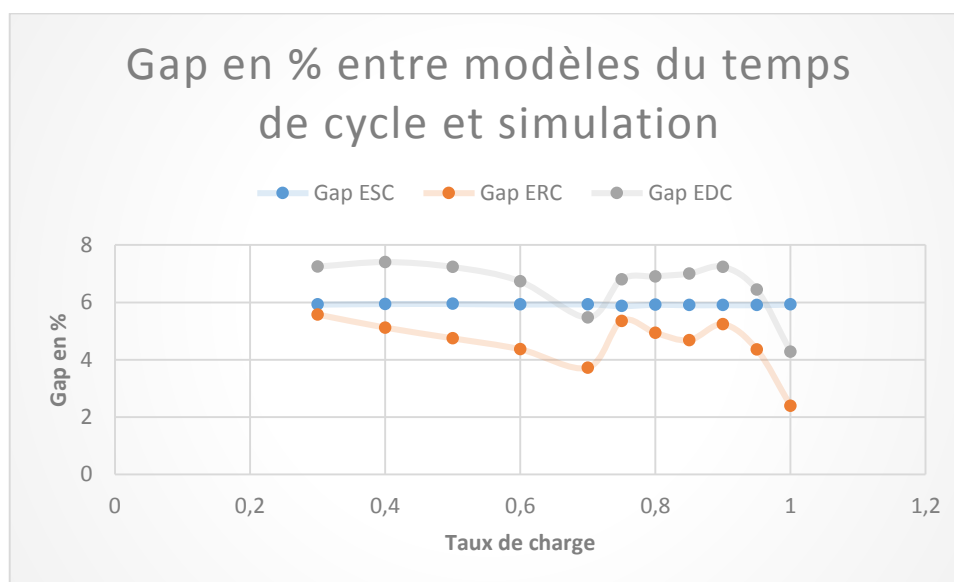


Figure 3.3 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 600

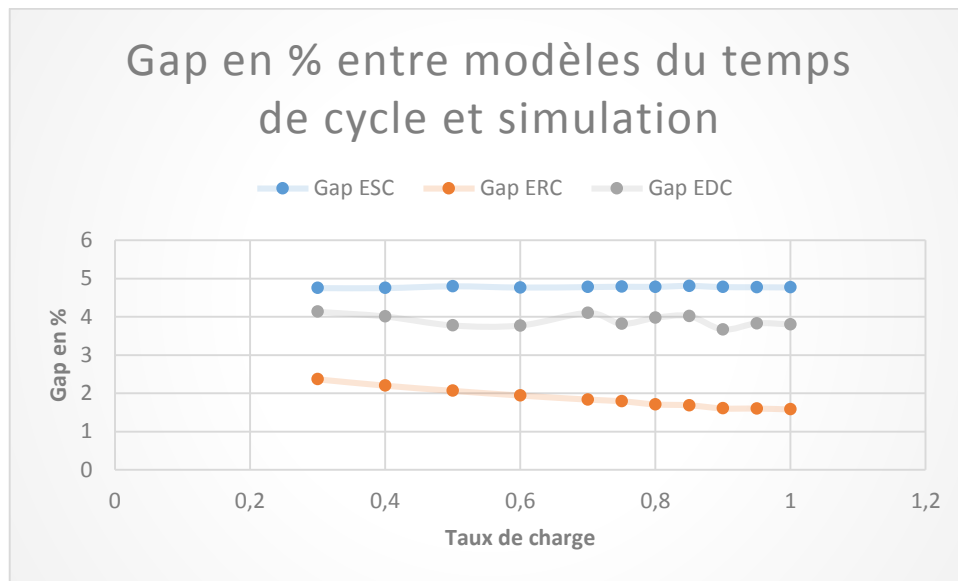


Figure 3.4 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 3000

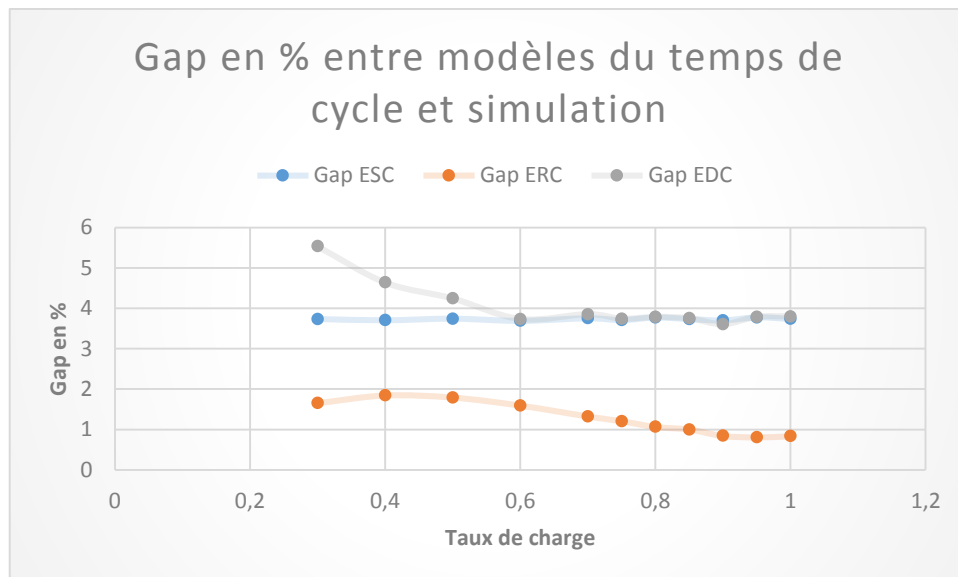


Figure 3.5 : Ecart en pourcentage entre les modèles mathématiques et le temps de cycle moyen calculé par simulation en fonction du taux de charge pour un système à 10000

B-Interprétation des résultats :

Les résultats de l'étude comparative ont été synthétisés et illustrés par les Figures 3.3-3.5. La première chose que nous pouvons remarquer c'est que dans le pire des cas, l'écart ne dépasse pas les 7,5% (Figure 3.3), où il s'agit du système le plus petit. Tout en remarquant que plus le système étudié grandit plus l'écart diminue, 5.706% d'écart moyen pour le système à 600, 3.509% pour le système à 3000 et 3.014% pour le système à 10000. La diminution de l'écart est logique est attendue, puisque plus le système est grand, plus l'aire (en casiers de stockage) de ses deux faces opératoires est grande, et plus l'assimilation à deux surfaces d'une infinité de points est pertinente.

Par ailleurs, on remarque que plus le taux de charge augmente, plus la tendance générale est à la baisse pour les écarts des trois cycles. Ce qui peut être expliqué par le fait que plus le taux de charge augmente, plus le système est rempli de manière homogène, et plus l'approximation $M' \approx M\rho$ est précise (nombre moyen de produits dans chaque casier). En outre, il est à noter que le changement du taux de charge n'affecte pas l'écart lié au simple cycle de stockage, puisque ce dernier n'est pas fonction du taux de charge, car le temps nécessaire à un stockage pour un produit donné reste le même quel que soit le taux de remplissage du système.

Au final, nous pouvons dire que les modèles développés sont assez précis, et peuvent être utilisés afin d'évaluer les performances du système en amont de son installation, et en faisant varier les différents paramètres concernant son fonctionnement opérationnel. Ainsi que pour effectuer des comparaisons de performances entre différents types de systèmes ou différentes alternatives technologiques, ou même pour l'optimisation du design de l'AS/RS à installer. Ces modèles offrent l'avantage de fournir des résultats précis de manière rapide, ce qui représente un atout majeur lors de la prise de décisions stratégiques concernant l'acquisition ou l'installation de ce type de systèmes.

3.4 Conclusion :

Nous avons dans ce chapitre présenté de nouveaux modèles mathématiques basés sur des hypothèses différentes concernant le fonctionnement opérationnel du système. L'idée était de développer des formules qui traduisent de manière plus fidèle le comportement du système, même si cela impliquait de se retrouver avec des formules plus complexes.

Ce qui rompt avec les modèles précédents est l'hypothèse émise sur les vitesses. Dans le second chapitre des vitesses constantes étaient considérées, cependant ce n'est pas le cas dans la réalité, et ceci peut engendrer des écarts significatifs par rapport aux données réelles. C'est pour cela que nous avons pris la décision de prendre en compte l'accélération/décélération ainsi que la vitesse maximale des machines S/D. De ce fait nous avons pu calculer des modèles holistiques pour les simples et doubles cycles du système considéré, des modèles dont la précision a pu être évaluée par simulation. Cependant là aussi des améliorations peuvent être mises en perspective, et dont le point de départ peut être la contribution présentée dans ce chapitre :

- Trouver le moyen de regrouper les formules des six cas étudiés en une seule formule compacte.
- Faire une étude comparative entre les modèles développés en chapitre 2 et ceux du chapitre 3.
- Evaluer les performances de ce système par rapport à ceux des autres systèmes pour lesquels des formules similaires du temps de cycle sont disponibles dans la littérature.

Chapitre 4 :
Optimisation du design de l'AS/RS pour un
temps de cycle minimal

Chapitre 4 :

Optimisation du design de l'AS/RS pour un temps de cycle minimal

4.1 Introduction :

Ce dernier chapitre traitera de l'optimisation du design des AS/RS, et plus particulièrement du système étudié dans cette thèse. L'optimisation de ce dernier va être effectuée de deux manières différentes. La première suivant une méthode communément utilisée dans la littérature pour ce type de problème, et cela en utilisant le modèle continu du temps de cycle, afin de trouver les ratios optimaux entre les différentes dimensions spatiales du rack. La seconde méthode, est une méthode totalement nouvelle que nous proposons pour la première fois dans cette thèse. Dans cette méthode nous utilisons le modèle discret du temps de cycle, et cela car il offre d'une part l'avantage d'être plus précis, et d'autre part nous avons réussi à trouver le moyen de surmonter la contrainte du temps de calcul pour les modèles discrets et des méthodes d'optimisation exactes utilisées.

4.2 Description du problème et objectif :

Le problème qui se pose est celui de la détermination des dimensions spatiales du système qui, en régime permanent, lui permettent d'avoir des performances optimales en terme de temps de cycle. Comme nous avons pu le voir dans le premier chapitre, les AS/RS se composent d'un ensemble de segments ou emplacements de stockage standardisés afin d'accueillir les charges unitaires devant être stockées. Ces emplacements de stockage sont de dimensions prédéterminées suivant l'utilisation futur du système (mini-conteneur pour les AS/RS à mini-charges, « pallet-sized » pour la majorité des AS/RS, ou encore de formes et tailles spécifiques selon le besoin). De ce fait la détermination des dimensions du système se fait en unités « d'emplacement de stockage » et non pas en unités de longueur, en d'autres termes, au final les dimensions à déterminer doivent être en nombre entiers, qui seront le nombre d'emplacements de stockage en hauteur, largeur et profondeur dans le système. Par conséquent le problème se présente comme un problème d'optimisation avec le temps de cycle comme fonction objectif et les dimensions du système comme variables de décision.

4.3 L'optimisation du design des AS/RS dans la littérature :

Ce problème a été étudié par plusieurs chercheurs en s'intéressant à différents types d'AS/RS ou de fonctions objectif.

La détermination du design initial de l'AS/RS fait partie des décisions stratégiques qui affectent le fonctionnement du système sur le long terme. On peut trouver différents problèmes de décisions qui en découlent et qui ont été étudiés dans la littérature. L'objectif est de déterminer la forme optimale du système afin d'optimiser un ou plusieurs critères. Les problèmes d'optimisation du design les plus

étudiés sont ceux qui s'intéressent au temps de cycle comme fonction objectif. De manière générale, les méthodes de résolution utilisées se basent sur les modèles continus du temps de cycle, où on cherche à déterminer les différents ratios entre les dimensions spatiales du système, ou une formule mathématique mettant en relation les dimensions optimales avec les caractéristiques techniques du système (taille, taux de charge, vitesses des machines, etc.) (De Koster, Le-Duc, & Yugang, 2008), (Xu, et al., 2018), (Kouloughli & Sari, 2015), (Yang, Miao, Xue, & Qin, 2014) et (Hamzaoui, Arbaoui, Sari, & Yalaoui, 2019), ou encore d'identifier des régions utiles (Kouloughli & Sari, 2015). Cela est fait grâce à la résolution du problème d'optimisation posé en déterminant les points critiques qui satisfont les conditions de Kuhn-Tucker, et cela en résolvant les systèmes d'équations obtenus en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les extrémums sont par la suite identifiés et les solutions optimales déterminées. Cependant, il est à noter que les variables de décisions utilisées dans la littérature lors de l'utilisation de cette méthode, ne sont plus le nombre d'emplacements de stockage en hauteur, largeur et profondeur (nombres entiers) mais plutôt des distances en temps, c'est-à-dire la hauteur, largeur et profondeur en temps du système. En d'autres termes, la durée nécessaire à la machines S/D pour traverser le système en hauteur, largeur et profondeur, mais cela sans tenir compte de la condition d'intégralité du problème, ce qui implique de facto une relaxation linéaire du problème, ce point n'a -à notre connaissance- jamais été relevé dans la littérature. Par conséquent la recherche de l'obtention de solutions entières via cette méthode ne donne aucune garantie sur l'optimalité des solutions trouvées. Dans d'autres papiers, des méthodes heuristiques ont été utilisées pour la résolution de ce problème, comme dans (Marchet, Melacini, Perotti, & Tappia, 2013), où il a été question d'optimiser le coût d'un AVS/RS. Les auteurs ont proposé une méthode pour trouver un nombre d'allées, d'étages et de colonnes qui minimisent le coût, tout en ayant une contrainte de débit à atteindre. (Lerher & Šraml, 2012) se sont intéressés à l'optimisation du design d'un AS/RS multi-allées. Ils ont présenté un modèle mathématique d'optimisation où l'objectif était de déterminer la meilleure configuration pour un coût total minimal. Puis ils ont implémenté un algorithme génétique pour résoudre ce problème d'optimisation. (Pandit & Palekar, 1993) ont quant à eux utilisé un solveur commercial pour résoudre le problème d'optimisation d'un AS/RS à véhicules autonomes, mais sans pour autant donné d'indications sur l'algorithme de fonctionnement du solveur en question ni du temps d'exécution. D'autre part l'énumération complète a elle aussi été utilisée comme méthode exacte de résolution étant donnée l'absence de méthode adaptée (Hamzaoui & Sari, 2015), (Xu, Zhao, Zou, & Li, 2018))

Par ailleurs, on trouve aussi des travaux qui se sont intéressés à l'optimisation multi-objectifs, comme dans (Borovinšek, Ekren, Burinskienė, & Lerher, 2017) où un modèle d'optimisation multi-objectif pour l'SBS/RS a été présenté et où le débit, la consommation énergétique et le coût total étaient les critères à minimiser en trouvant son design optimal. La résolution de ce problème a été faite en implémentant un NSGA II. (Rajković, Zrnić, Kosanić, Borovinšek, & Lerher, 2017) et (Accorsi, Bortolini, Gamberi, Manzini, & Pilati, 2017) ont considéré le temps de cycle, l'empreinte carbone et le coût comme critères, les premiers ont utilisé un NSGA II alors que les seconds ont proposé leur propre heuristique.

A travers ce qui a été présenté plus haut, on remarque qu'hormis l'énumération complète, aucune des méthodes utilisées pour l'optimisation du design n'assure l'optimalité des solutions trouvées. La méthode la plus utilisée qui se base sur l'utilisation des modèles continus du temps de cycle continus n'offre elle non plus pas de garantie, et cela pour les raisons citées plus haut. Cependant nous allons dans un premier temps utilisé la même méthode et cela afin d'avoir des résultats qui peuvent être comparés à ceux obtenus pour d'autre types d'AS/RS.

4.4 Optimisation des dimensions de l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bi-directionnels (temps de cycle continu) :

Dans cette section nous allons utiliser la méthode précédemment citée afin d'optimiser les dimensions de notre système pour un temps de cycle de déstockage minimal. Nous nous intéressons donc au modèle de temps de cycle de déstockage développé dans le chapitre 2. Par la suite nous allons mettre en évidence les ratios entre les trois dimensions optimales du système, afin d'avoir une idée sur sa forme optimale (carré en temps, cubique en temps, etc.) afin de savoir si sa forme optimale se rapproche de celle d'un des AS/RS précédemment étudiés dans la littérature ou de la famille des AS/RS à rack compacts par exemple. Dans un second temps nous essayerons d'établir une formule approchée mettant en relation les dimensions optimales du système et ses caractéristiques techniques (taille du système, taux de charge, vitesses des machines, etc.).

4.4.1 Formalisation et résolution du problème :

4.4.1.1 Notation :

ERC^C	Temps de déstockage moyen (Modèle continu)
t'_h	Temps nécessaire pour le déplacement unitaire entre deux casiers adjacents (Horizontalement)
t'_v	Temps nécessaire pour le déplacement unitaire entre deux casiers adjacents (Verticalement)
t_h	Largeur en temps du rack
t_v	Hauteur en temps du rack
M	Nombre d'emplacements de charges unitaires dans chaque casier
N_h	Nombre de casiers en hauteur
N_l	Nombre de casiers en largeur
T	Facteur de normalisation, $T = \max(t_v, t_h)$
b	Facteur de forme, $b = \frac{\min(t_v, t_h)}{\max(t_v, t_h)}$
t'_p	Temps de déplacement nécessaire entre deux casiers appareillés.
N	Nombre d'emplacements de charges unitaires dans tout le système
ρ	Taux de charge

4.4.1.2 Résolution du problème d'optimisation :

Comme il a été mentionné plus haut, nous sommes en présence d'un problème d'optimisation, où l'objectif est de minimiser le temps de cycle, et nos variables de décision sont les dimensions du système. Nous allons nous intéresser uniquement au temps de simple cycle de déstockage avec vitesse constante, c'est-à-dire le temps moyen de déstockage calculé dans le chapitre 2 :

$$ERC^C = \frac{T}{\rho M} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2\rho M - 1}{2} \right) + (\rho M - 1)t'_p \dots (4.1)$$

Nous savons que pour un système donné le nombre d'emplacements de stockage reste constant quelle que soit sa configuration (hauteur, largeur, profondeur), par conséquent nous pouvons écrire :

$$N_h N_l M = N = cste \dots (4.2)$$

D'autre part nous avons par définition :

$$T = \max(t_h, t_v) = \max(N_l t'_h, N_h t'_v) \dots (4.3)$$

$$b = \frac{\min(t_h, t_v)}{\max(t_h, t_v)} = \frac{\min(N_l t'_h, N_h t'_v)}{\max(N_l t'_h, N_h t'_v)} \dots (4.4)$$

Dans (4.2) nous pouvons écrire :

$$N_h t'_v N_l t'_h M = N t'_v t'_h = cste$$

$$t_v t_h M = N t'_v t'_h = cste$$

Avec $t_v = N_h t'_v$, $t_h = N_l t'_h$, $t_p = M t'_p$ et $t_{p,\rho} = \rho M t'_p$

Et donc en posant $V = N t'_v t'_h t'_p$ par souci de lisibilité :

$$M = \frac{V}{t_v t_h t'_p} \dots (4.5)$$

En remplaçant (4.3), (4.4) et (4.5) dans (4.1) :

$$ERC^c = \frac{\max(t_h, t_v) t_v t_h t'_p}{\rho V} \left(\frac{\min(t_h, t_v)^2}{3 \max(t_h, t_v)^2} + 1 \right) \left(\frac{2\rho \frac{V}{t_v t_h t'_p} - 1}{2} + \left(\rho \frac{V}{t_v t_h t'_p} - 1 \right) t'_p \right)$$

$$ERC^c = \frac{\max(t_h, t_v) t_v t_h t'_p}{\rho V} \left(\frac{\min(t_h, t_v)^2 + 3 \max(t_h, t_v)^2}{3 \max(t_h, t_v)^2} \right) \left(\frac{2\rho V - t_v t_h t'_p}{2 t_v t_h t'_p} \right) + \left(\frac{\rho V - t_v t_h t'_p}{t_v t_h t'_p} \right) t'_p \dots (4.6)$$

On pose $x = \max(t_h, t_v)$ et $y = \min(t_h, t_v)$ avec $y \leq x$:

$$ERC^c = \frac{x^2 y t'_p}{\rho V} \left(\frac{y^2 + 3x^2}{3x^2} \right) \left(\frac{2\rho V - x y t'_p}{2 x y t'_p} \right) + \left(\frac{\rho V - x y t'_p}{x y t'_p} \right) t'_p \dots (4.7)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} y \leq x \\ x \geq \max(t'_h, t'_v) \\ y \geq \min(t'_h, t'_v) \\ x \leq N \max(t'_h, t'_v) \end{cases}$$

On veut donc minimiser la fonction deux fois différentiable $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sur $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \forall i = 1..4 \ g_i(x, y) \leq 0 \}$ avec $\forall i = 1..4 \ g_i$ de classe C^1 .

- Nous définissons f_1 et $\forall i = 1..4 \ g_i$ comme suit :

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 y t'_p}{\rho V} \left(\frac{y^2 + 3x^2}{3x^2} \right) \left(\frac{2\rho V - x y t'_p}{2 x y t'_p} \right) + \left(\frac{\rho V - x y t'_p}{x y t'_p} \right) t'_p \dots (4.8)$$

$$g_1(x, y) = y - x \dots (4.9)$$

$$g_2(x, y) = \max(t'_h, t'_v) - x \dots (4.10)$$

$$g_3(x, y) = \min(t'_h, t'_v) - y \dots (4.11)$$

$$g_4(x, y) = x - N\max(t'_h, t'_v) \dots (4.12)$$

- Nous sommes donc en présence d'un problème d'optimisation avec contraintes de type inégalité :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Minimiser } f_1(x, y) \\ g_1(x, y) \leq 0 \\ g_2(x, y) \leq 0 \\ g_3(x, y) \leq 0 \\ g_4(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des contraintes C est fermé et borné comme on peut le voir sur la Figure 4.1. De ce fait nous savons qu'il existe au moins une solution au problème (P1), et cela selon deux cas possibles (ou les deux en même temps pour un cas particulier):

- Le minimum recherché $(x^*, y^*) \in C$ se trouve à l'intérieur de C et non à sa frontière, nous aurons donc $\nabla f_1(x^*, y^*) = 0$ et aucune des contraintes ne sera saturée en ce point.
- Le minimum recherché $(x^*, y^*) \in C$ se trouve à la frontière de C où une ou plusieurs contraintes seront saturées.

Nous allons vérifier la condition nécessaire d'optimalité de Kuhn-Tucker en posant le Lagrangien du problème :

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = f_1(x, y) + \mu_1 g_1(x, y) + \mu_2 g_2(x, y) + \mu_3 g_3(x, y) \text{ avec } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}^+$$

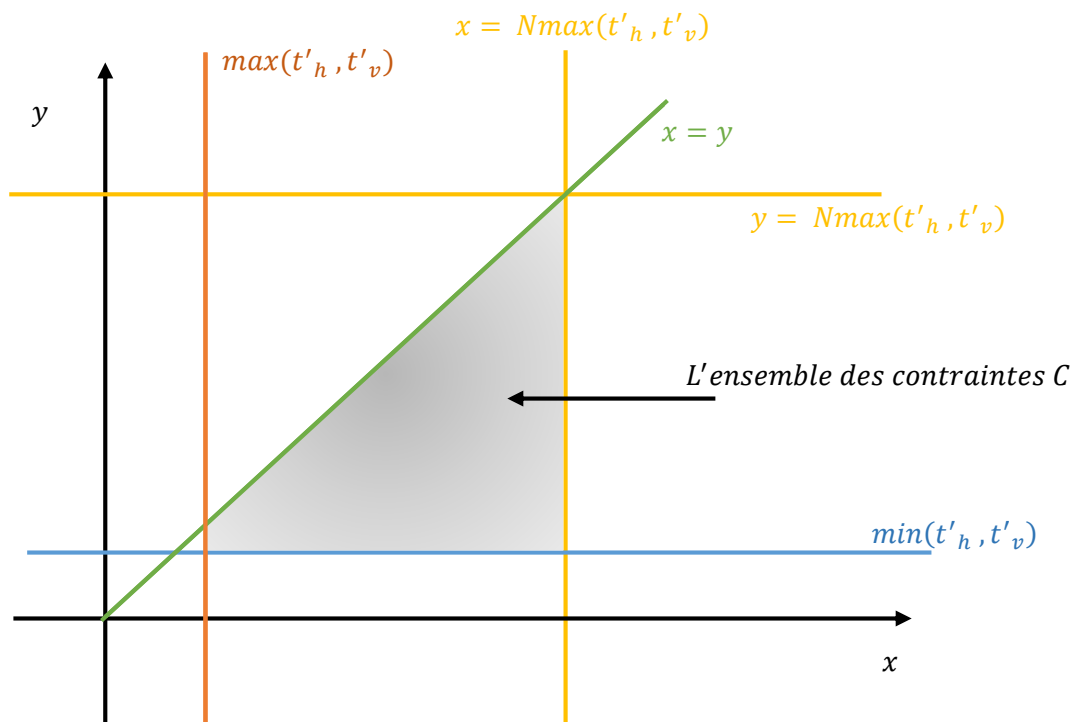


Figure 4.1: Illustration de l'ensemble des contraintes

Nous allons donc chercher nos points candidats qui satisfont notre condition d'optimalité, nous passons donc d'un problème d'optimisation à un système d'équations non linéaires :

$$(S_1) \begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, y) = 0 \\ \mu_1 g_1(x, y) = 0 \\ \mu_2 g_2(x, y) = 0 \\ \mu_3 g_3(x, y) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= \frac{x^2 y t'_p}{\rho V} \left(\frac{y^2 + 3x^2}{3x^2} \right) \left(\frac{2\rho V - x y t'_p}{2x y t'_p} \right) + \left(\frac{\rho V - x y t'_p}{x y} \right) + \mu_1 (y - x) \\ &+ \mu_2 (\max(t'_h, t'_v) - x) + \mu_3 (\min(t'_h, t'_v) - y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\nabla \mathcal{L}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3V\rho x^2 - 3yx^3 t'_p - V\rho y^2}{3V\rho x^2} - \frac{V\rho}{yx^2} - \mu_1 - \mu_2 \\ \frac{4V\rho y - 3xy^2 t'_p - 3x^3 t'_p}{6V\rho x} - \frac{V\rho}{xy^2} + \mu_1 - \mu_3 \end{pmatrix} \dots (4.13)$$

Par conséquent en remplaçant (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) et (4.13) dans (S₁) :

$$(S_1) \begin{cases} \frac{3V\rho x^2 - 3yx^3 t'_p - V\rho y^2}{3V\rho x^2} - \frac{V\rho}{yx^2} - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \frac{4V\rho y - 3xy^2 t'_p - 3x^3 t'_p}{6V\rho x} - \frac{V\rho}{xy^2} + \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1 (y - x) = 0 \\ \mu_2 (\max(t'_h, t'_v) - x) = 0 \\ \mu_3 (\min(t'_h, t'_v) - y) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

Après calculs :

$$(S_1) \begin{cases} 3V\rho x^2 y - V\rho y^3 - 3t'_p x^3 y^2 - 3V^2 \rho^2 - \mu_1 3V\rho x^2 y = 0 \\ 4V\rho y^3 - 3y^4 x t'_p - 3y^2 x^3 t'_p - 6V^2 \rho^2 + \mu_1 6V\rho y^2 x = 0 \\ \mu_1 (y - x) = 0 \\ \mu_2 (\max(t'_h, t'_v) - x) = 0 \\ \mu_3 (\min(t'_h, t'_v) - y) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nous pouvons aussi écrire $V' = \rho.V$, par conséquent nos équations se simplifient en :

$$(S_1) \begin{cases} 3V'x^2y - V'y^3 - 3t'_p x^3 y^2 - 3V'^2 - \mu_1 3V'x^2y = 0 \\ 4V'y^3 - 3y^4 x t'_p - 3y^2 x^3 t'_p - 6V'^2 + \mu_1 6V'y^2x = 0 \\ \mu_1(y - x) = 0 \\ \mu_2(\max(t'_h, t'_v) - x) = 0 \\ \mu_3(\min(t'_h, t'_v) - y) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

D'autre part concernant les vitesses des machines, nous allons normaliser nos vitesses par rapport à la vitesse la plus grande (verticalement/horizontalement), nous avons donc :

$$\frac{\min(t'_v, t'_h)}{\max(t'_v, t'_h)} = c \quad \text{et} \quad \max(t'_v, t'_h) = 1$$

De plus nous avons par définition $t'_p = \max(t'_v, t'_h)$, donc $t'_p = 1$

$$(S_1) \begin{cases} 3V'x^2y - V'y^3 - 3x^3y^2 - 3V'^2 - \mu_1 3V'x^2y = 0 \\ 4V'y^3 - 3y^4x - 3y^2x^3 - 6V'^2 + \mu_1 6V'y^2x = 0 \\ \mu_1(y - x) = 0 \\ \mu_2(1 - x) = 0 \\ \mu_3(c - y) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

Afin de résoudre (S_1) nous devons traiter les 8 cas possibles selon les valeurs de μ_1 , μ_2 et μ_3 . De plus ce dernier est composé d'équations non linéaires avec paramètres, et il n'existe pas à ce jour de méthode mathématique analytique permettant la résolution de ce type d'équations. Par conséquent nous développons un programme sur Mathematica 11.0 qui va résoudre numériquement ce système d'équations, et donc par la suite résoudre le problème d'optimisation traité. Cependant nous devons d'abord affecter des valeurs numériques à nos différents paramètres (V , ρ et c), et par la suite à partir des résultats numériques, construire une formule analytique approchée en fonction de nos paramètres.

Premièrement concernant le taux de charge ρ , nous allons choisir quatre valeurs différentes :

- $\rho = 1$ qui représente un système rempli à 100% (Un système ne fonctionne que pendant un temps très réduit à 100% au risque de provoquer une saturation du système)
- $\rho = 0.85$ et $\rho = 0.75$ ce qui représente le taux de charge moyen de fonctionnement d'un système en régime permanent et la région utile comme démontré par (Sari, Saygin, & Ghoulali, 2005).
- $\rho = 0.5$ ce qui veut dire que le système est remplis à moitié, c'est une situation qui n'arrive que rarement.

Concernant les différentes tailles de systèmes étudiées (V , volume du système en temps), nous avons choisi 1000 tailles de systèmes, allant de 100 jusqu'à 100000, tout en faisant varier le paramètre c dans l'intervalle $]0; 1]$. Nous implémentons donc un algorithme de résolution sur Mathematica 11.0 et récupérons directement les données sur Excel.

4.4.1.3 Résultats et interprétations :

Comme mentionné plus haut, nous avons implémenté notre algorithme de résolution sur Mathematica 11.0. L'algorithme en question résout numériquement le système (S_1) afin d'identifier les différents points critiques qui satisfont les conditions nécessaires d'optimalité. Par la suite ces mêmes points seront triés et certain d'entre eux éliminés selon les cas où la matrice hessienne sera définie positive, négative ou ni l'une ni l'autre.

Les résultats obtenus après ce traitement sont disponibles dans l'Annexe G, étant donnée la grande quantité de données dont la présentation n'est pas pertinente, à ce niveau nous nous contentons d'illustrer ces derniers par la Figure 4.2, qui montre les résultats obtenus pour un taux de charge de 75%.

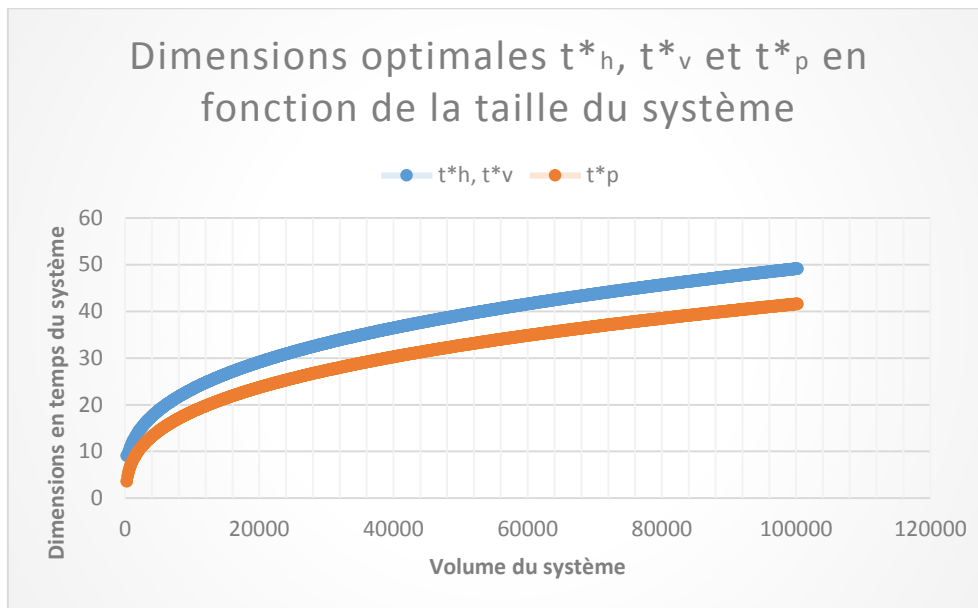


Figure 4.2 : Les dimensions (en temps) optimales t^*_h , t^*_v et t^*_p en fonction des tailles du système pour un taux de charge de 75%.

Tout d'abord, ce qui est à noter c'est que pour toutes les solutions optimales nous avons $x^* = y^*$ (quand la contrainte g_1 est saturée), c'est-à-dire $t^*_h = t^*_v$, par conséquent la valeur du paramètre c n'a pas d'importance puisque la configuration optimale doit être obligatoirement carrée en temps. Par ailleurs, les valeurs de t^*_h et t^*_v , ainsi que celles de t^*_p suivent une tendance particulière par rapport à la taille du système, nous voyons que la courbe formée par ces points en fonction du volume du système considéré suit la tendance d'une fonction racine cubique. En partant de cette première remarque, nous souhaitons développer une formule approchée mettant en relation les dimensions optimales du système (t^*_h ; t^*_v ; t^*_p) et son volume V . Il est à noter que la formule approchée que nous voulons obtenir, ne s'appuie que sur des données numériques et sur une cohérence dimensionnelle. De ce fait elle n'est vérifiée que dans l'intervalle de taille de systèmes étudiés et quand les mêmes conditions sont réunies (saturation de la contrainte g_1).

Nous décidons d'utiliser l'analyse dimensionnelle comme méthode nous permettant de déterminer *a priori* la forme de notre équation à partir des hypothèses sur les grandeurs qui gouvernent notre système. L'objectif est donc de trouver une formule approchée, certes « intuitive », mais qui est cohérente du point de vue dimensionnel et des résultats numériques obtenus.

Nous avons :

$$[t_v] = [t_h] = [t_p] = [N_h t'_v] = [N_l t'_h] = [M t'_p] = [N_h][t'_v] = [N_l][t'_h] = [M][t'_p]$$

Avec : $[N_l] = [N_h] = [M] = L$ et $[t'_h] = [t'_v] = [t'_p] = \frac{T}{L}$

Par conséquent : $[t_v] = [t_h] = [t_p] = T$

(T dimension de la grandeur de temps et L dimension de la grandeur de distance).

Nous passons maintenant aux données d'entrée, qui sont la taille du système ainsi que son taux de charge. Comme mentionné auparavant nous parlons d'un volume en temps :

$$V = N \cdot t'_v \cdot t'_h \cdot t'_p = N_h \cdot N_l \cdot M \cdot t'_v \cdot t'_h \cdot t'_p = t_v \cdot t_h \cdot t_p$$

$$[V] = [t_v][t_h][t_p] = T^3$$

D'autre part puisque le taux de charge ρ est une grandeur adimensionnelle et qu'il est possible de remplacer nos deux paramètres (V et ρ) par un seul (V') dans nos systèmes d'équations :

$$[V'] = [\rho V] = T^3$$

Par conséquent la relation qui relie les dimensions optimales (inconnues des systèmes d'équation) et nos données d'entrée (paramètres des systèmes d'équation) pourrait être de la forme suivante :

$$t^*_v = c_1 f_v(\rho) \sqrt[3]{V'}, t^*_h = c_2 f_h(\rho) \sqrt[3]{V'} \text{ et } t^*_p = c_3 f_p(\rho) \sqrt[3]{V'} \\ \text{et où } f_v(\rho) \cdot f_h(\rho) \cdot f_p(\rho) \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 1$$

A travers l'analyse des résultats numériques obtenus, nous allons essayer d'affirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

Premièrement, lorsqu'on regarde les nuages de point des dimensions optimales (Figure 4.1) nous pouvons remarquer qu'ils tracent une forme se rapprochant d'une fonction racine cubique en fonction du volume du système. De plus dans (De Koster, Le-Duc, & Yugang, 2008) et (Xu, et al., 2018) il a été question d'optimiser un 3D compact-rack AS/RS, et qui ressemble sensiblement au système étudié, car tous les deux disposent d'un rack à haute densité. Dans ces deux études les dimensions optimales du rack pouvaient s'écrire sous la forme d'une fonction racine cubique du volume du système, cela dit la variation du taux de charge n'était pas prise en compte dans ces papiers.

A travers notre étude numérique nous avons pu remarquer que les dimensions t^*_h et t^*_v pouvaient s'écrire de cette manière :

$$t^*_v = t^*_h = 1.175 \sqrt[3]{V'}$$

Donc $c_1 = c_2 = 1.175$ et par conséquent $f_v(\rho) = f_h(\rho) = 1$

D'autre part nous avons que $t_v \cdot t_h \cdot t_p = V = \frac{V'}{\rho}$ et en particulier $t^*_v \cdot t^*_h \cdot t^*_p = V = \frac{V'}{\rho}$ et $t^*_v = t^*_h = c_1 \sqrt[3]{V'}$, donc :

$$t^*_p = \frac{V}{(c_1 \sqrt[3]{V'})^2} = \frac{V'}{\rho (c_1 \sqrt[3]{V'})^2} \\ t^*_p = \frac{\sqrt[3]{V'}}{\rho c_1^2}$$

Et donc nous trouvons :

$$t^*_p = 0.725 \frac{\sqrt[3]{V'}}{\rho}$$

Donc $c_3 = 0.725$ et $f_p(\rho) = \frac{1}{\rho}$

Et où $c_3 = 0.725$ et $f_p(\rho) = \frac{1}{\rho}$ ont aussi été vérifié numériquement après l'analyse des données issues de l'optimisation numérique (Tableau 4.1).

Tableau 4.1: Résumé des données extraites de l'analyse des résultats numériques

ρ	c_1, c_2			c_3		
	Moyenne	Ecart Type	CDV(%)	Moyenne	Ecart Type	CDV(%)
1	1,17156031	0,01615929	1,37929617	0,72894824	0,01820155	2,49696085
0,85	1,17331884	0,01800616	1,53463496	0,72684656	0,019801	2,72423384
0,75	1,1748054	0,02020353	1,71973461	0,72510732	0,02144555	2,95756926
0,5	1,1794056	0,02101678	1,78198091	0,71952227	0,02277904	3,16585636
Moyenne	1,174773			0,725106		
Ecart Type	0,0029111			0,0034989		
CDV(%)	0,2478009			0,4825423		
Pour tout l'échantillon						
Moyenne	1,174775768			0,725102173		
Ecart Type	0,019158675			0,020916644		
CDV(%)	1,63083674			2,884647835		

Dans le Tableau 4.1 sont résumées les données les plus importantes extraites de la résolution numérique de nos différents systèmes comme énoncé précédemment. Nous pouvons y lire les différentes valeurs des moyennes de c_1 , c_2 et c_3 (en bleu) qui ont été calculées pour les 1000 systèmes selon les différents taux de charge, ainsi que les écarts types et les coefficients de variation. Et l'on peut remarquer que le coefficient de variation est très faible, puisque dans les pires cas il dépasse légèrement les 3%, alors qu'en moyenne il tourne autour des 2%. D'autre part nous pouvons y trouver les moyennes de nos constantes calculée par rapport aux variations du taux de charge (en rouge) ainsi que leurs écarts types et coefficients de variation, qui sont aussi très faibles (0.25% et 0.48%). En plus des deux moyennes calculées pour l'ensemble de l'échantillon variant taille du système et taux de charge, ainsi que leurs écarts types et coefficients de variation d'une valeur de 1.63% et 2.88% pour c_1 (ou c_2) et c_3 respectivement.

Finalement, nous avons pu établir des formules approchées de nos dimensions optimales en fonction de la taille du système et de son taux de charge, et cela à partir d'une résolution numérique des équations que nous avons obtenues grâce à une méthode d'optimisation analytique Tableau 4.2-4.3 :

Tableau 4.2 : Formules approchées des dimensions optimales

$t^*_v, t^*_h =$		$t^*_p =$	
$1.175 \sqrt[3]{V'}$	$1.175 \sqrt[3]{\rho N t'_v t'_h t'_p}$	$0.725 \frac{\sqrt[3]{V'}}{\rho}$	$0.725 \frac{\sqrt[3]{\rho N t'_v t'_h t'_p}}{\rho}$

Tableau 4.3 : Ratios entre les différentes dimensions optimales

$\frac{t^*_h}{t^*_v} =$	$\frac{t^*_v}{t^*_p} =$	$\frac{t^*_h}{t^*_p} =$
1	1.62ρ	1.62ρ

On en déduit que notre système est carré en temps quel que soit son volume ou taux de charge, par contre il n'est pas cubique en temps, de plus le ratio de sa profondeur par rapport aux deux autres dimensions définissant la face du rack (largeur et hauteur) est fonction de son taux de charge, ce qui était prévisible, car plus le taux de charge sera important plus la profondeur optimale aura tendance à être petite.

4.4.2 Limites de la méthode :

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'objectif pratique de l'optimisation du design d'un AS/RS est d'obtenir ses trois dimensions spatiales en unités d'emplacements de stockage qui nous permettent d'atteindre un temps de cycle optimal en régime permanent. Et la méthode utilisée telle que décrite dans les sections précédentes ne nous permet pas d'avoir des solutions entières, ou du moins si on venait à les obtenir via une heuristique d'arrondi par exemple, nous n'aurons aucune garantie sur l'optimalité des solutions obtenues, tout simplement parce que cette méthode n'est pas adaptée pour de l'optimisation en nombre entiers.

Par conséquent, même si cette méthode offre beaucoup d'avantages et nous permet d'avoir un certain nombre d'informations sur l'existence de solutions optimales, de ratios optimaux ou de régions utiles, elle n'est pas efficace lorsqu'il s'agit d'obtenir les dimensions entières optimales du système, ce qui représente l'objectif pratique final. C'est pour cette raison là que nous nous intéressons à la mise en place d'une méthode d'optimisation adaptée et efficace pour ce problème, et qui sera présentée dans les sections suivantes.

4.5 Nouvelle méthode d'optimisation des dimensions de l'AS/RS (temps de cycle discret) :

Etant données les limites de la méthode précédemment citée, dans cette section nous nous proposons de mettre en place une nouvelle méthode d'optimisation exacte adaptée au problème considéré. Comme il a été relevé plus haut la complexité du problème en question n'a jamais été étudiée, et l'on sait uniquement que l'énumération complète (méthode exacte) nécessite un temps de calcul important. Et même si le choix du design d'un AS/RS relève de la décision stratégique, l'utilisation d'une telle méthode consommatrice de temps et de ressources reste non raisonnable et semble archaïque. (Metahri, 2019) a utilisé une méthode (exacte) qu'il a appelé « méthode d'optimisation discrète » mais dont l'algorithme de résolution n'a pas été présenté, et où uniquement les résultats numériques ont été comparés à ceux d'une énumération complète.

Ce que nous proposons dans ce qui suit, c'est d'étudier tout d'abord la complexité du problème, puis de proposer une méthode de résolution exacte adapté à ce dernier. Cette méthode sera basée principalement sur des propriétés de dominance que nous allons démontrer mathématiquement. Par ailleurs, nous n'allons pas nous intéresser uniquement à l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels, mais à deux autres systèmes de stockage, l'AS/RS multi-allées et l'AS/RS à racks glissants, une brève

description de ces derniers a été donnée dans le premier chapitre. Les trois systèmes choisis font donc partie de trois de familles d'AS/RS différentes, à haute densité, basse densité et densité moyenne.

De plus, nous allons nous intéresser aux modèles discrets du temps de cycle, car ces derniers comme expliqué dans les chapitres précédents, sont plus précis que leurs équivalents continus mais sont plus contraignants à utiliser pour les méthodes d'optimisation communément utilisées, mais qu'en est-il d'une nouvelle méthode d'optimisation adaptée ?

4.5.1 Temps de cycles discrets des trois systèmes étudiés :

Nous nous intéressons donc à trois types de systèmes qui sont l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels (haute densité), le multi-allées (faible densité) et l'AS/RS à rack glissants (moyenne densité), dont les temps de cycle moyens discrets se présentent comme suit :

-Notation :

ERC1	Temps moyen de déstockage pour l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels
ERC2	Temps moyen de déstockage pour l'AS/RS multi-allées
ERC3	Temps moyen de déstockage pour l'AS/RS à racks glissants
(H; V; M)	Nombre d'emplacements de stockage, horizontalement, verticalement et en profondeur respectivement
t'_p	Temps de déplacement entre deux casiers adjacents dans l'allée transversale
t'_r	Temps nécessaire au déplacement des racks glissants
t'_h	Temps de déplacement entre deux casiers adjacents horizontalement
t'_v	Temps de déplacement entre deux casiers adjacents verticalement
N	Nombre d'emplacements de stockage dans tout le système
ρ	Taux de charge

-L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels, dont le temps de cycle a été présenté dans le chapitre 2, nous donne pour $M > \frac{1}{\rho}$ le temps moyen de déstockage pour le système :

$$ERC1 = \frac{1}{\rho N} \left(\frac{4}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}} + (\rho M - 1)(2(S_1 + S_2) + \rho N \cdot \max(t'_h; t'_v)) \right) \dots (4.14)$$

Avec :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i - 1)t'_h; jt'_v) \dots (4.15)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \max(2it'_h; jt'_v) \dots (4.16)$$

-L'AS/RS multi-allées, dont le temps de cycle moyen de déstockage a été présenté dans (Ghomri, Sari, Guezzen, & Sari, 2009) :

$$ERC2 = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^V \max((it'_h + kt'_p); jt'_v) \dots (4.17)$$

-L'AS/RS à racks glissants, dont le temps de cycle a été présenté dans (Guezzen, Sari, Castagna, & Cardin, 2013) :

$$ERC3 = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^V \max(it'_h + \max(t'_r; kt'_p); jt'_v) + \max((it'_h + kt'_p); jt'_v) \dots (4.18)$$

Nous allons maintenant formuler mathématiquement notre problème d'optimisation du design de l'AS/RS, avec comme fonction objectif le temps de cycle moyen de déstockage. Par la suite, nous allons identifier des propriétés de dominance qui nous permettront d'établir une méthode de résolution exacte efficace en temps.

4.5.2 Etude du problème d'optimisation :

4.5.2.1 Formulation des problèmes d'optimisation :

Nous considérons les trois problèmes d'optimisation suivants (P1), (P2) et (P3) pour l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels, le multi-allées, et l'AS/RS à rack glissants respectivement.

D'autre part, pour (P1), (P2) et (P3), $(H; V; M)$ est la représentation des variables de décision, ou largeur, hauteur et profondeur (en emplacements de charges unitaires) sont représentées respectivement.

Problème (P1) :

$$\text{Minimiser } ERC1 \dots (4.19)$$

$$SC: \begin{cases} H \cdot V \cdot M = N \quad \forall (H, V, M) \in \{1, 2, \dots, N\}^3 \dots (4.20) \\ M > \frac{1}{\rho} \dots (4.21) \\ H = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \dots (4.22) \\ H > 1, V > 1, M > 1 \dots (4.23) \\ (H; V; M) \in \mathbb{N}^{*3} \dots (4.24) \end{cases}$$

Dans le problème (P1) nous avons : (4.19) est la fonction objectif à minimiser pour une taille de système donnée et délimitée par la contrainte (4.20), cette dernière fixe le nombre total d'emplacements d'unités de stockage. (4.21) est la condition pour laquelle la formule du temps de cycle peut être utilisée. Les contraintes architecturales du système sont assurées par (4.22) et (4.23), puisque (4.22) garantie que les

nombre de colonnes soit toujours paire, alors que (4.23) fixe les bornes inférieures des trois dimensions. Finalement (4.24) est la contrainte d'intégrité.

Problème (P2) :

Minimiser ERC2 ... (4.25)

$$SC: \begin{cases} H \cdot V \cdot M = N \quad \forall (H, V, M) \in \{1, 2, \dots, N\}^3 \dots (4.26) \\ H > 1, V > 1, M > 1 \dots (4.27) \\ (H; V; M) \in \mathbb{N}^{*3} \dots (4.28) \end{cases}$$

Dans le problème (P2) nous avons : (4.25) est la fonction objectif à minimiser pour une taille de système donnée et délimitée par la contrainte (4.26), cette dernière fixe le nombre total d'emplacements d'unités de stockage. (4.27) fixe les bornes inférieures des trois dimensions. Finalement (4.28) est la contrainte d'intégrité.

Problème (P3) :

Minimiser ERC3 ... (4.29)

$$SC: \begin{cases} H \cdot V \cdot M = N \quad \forall (H, V, M) \in \{1, 2, \dots, N\}^3 \dots (4.30) \\ H > 1, V > 1, M > 1 \dots (4.31) \\ M = 2q \text{ Avec } q \in \mathbb{Z}^* \dots (4.32) \\ (H; V; M) \in \mathbb{N}^{*3} \dots (4.33) \end{cases}$$

Dans le problème (P3) nous avons : (4.29) est la fonction objectif à minimiser pour une taille de système donnée et délimitée par la contrainte (4.30), cette dernière fixe le nombre total d'emplacements d'unités de stockage. Les contraintes architecturales du système sont assurées par (4.31) et (4.32), puisque (4.32) garantie que le nombre de colonnes soit toujours paire, alors que (4.31) fixe les bornes inférieures des trois dimensions. Finalement (4.33) est la contrainte d'intégrité.

4.5.2.2 Complexité des problèmes considérés :

Nous avons vu auparavant que même si le problème de l'optimisation du design des AS/RS fut traité de différentes manières et en utilisant différentes méthodes de modélisation et de résolution, aucune étude de complexité n'a été effectuée. Nous nous proposons d'en effectuer une avant d'aller plus loin dans nos recherches, nous nous intéressons au problème (P1) dans un premier temps, mais nous verrons que les trois problèmes appartiennent à la même classe de problème.

Tout d'abord, le but est de trouver le triplet (H, V, M) qui minimise la fonction objectif ERC1 (temps de cycle). Nous savons d'une part que chaque solution peut être testée en un temps polynomial qui est au maximum égale à $O\left(\frac{N}{2}\right)$ (Voire les sommes S_1 et S_2), ce qui veut dire que le problème appartient à la classe NP.

D'autre part via (4.20) on remarque qu'essayer tous les cas possibles nécessite $O(N^3)$, ce qui veut dire que la solution optimale peut être obtenue au maximum en $O\left(\frac{N^4}{2}\right)$, et par conséquent que le problème est polynomial (appartient à la classe P). En suivant le même raisonnement, on obtient que les problèmes (P2) et (P3) appartiennent aussi à la classe P.

Malgré le fait que le problème soit polynomial en $O(\frac{N^4}{2})$, le temps d'exécution d'une énumération complète devient trop contraignant lorsqu'il s'agit de systèmes de grandes tailles.

Question : Pouvons-nous trouver un algorithme qui permette de résoudre ce problème de manière plus efficace ? En d'autres termes, est-il possible de trouver un algorithme de résolution polynomial avec un degré inférieur à 4 ?

4.5.2.3 Propriétés de dominances :

Dans ce qui va suivre, nous voulons identifier des propriétés de dominance afin de réduire notre espace de recherche, et par la suite proposer une méthode de résolution, qui en se basant sur ces propriétés mathématiques résout ces problèmes de manière efficace et rapide.

Pour les trois problèmes considérés, via (4.20), (4.26) et (4.30) nous pouvons voir que la variable M peut être déduite des deux autres variables restantes, ce qui veut dire que (P1), (P2) et (P3) peuvent être réduits à des problèmes d'optimisation à deux variables. Ainsi, une solution peut être représentée par un couple formé des deux variables restantes. Soit $(H; V)$ une représentation de la solution où le rack a une largeur de H et hauteur de V emplacement de stockage. Si nous considérons $(H; V)$ et $(V; H)$ comme deux solutions candidates, **est ce que l'une de ces solutions domine l'autre ? En d'autres termes pouvons-nous savoir à l'avance si une solution domine l'autre systématiquement ?**

Puisque c'est le déplacement de Tchebychev qui est considéré ici, lorsque $t'_h \neq t'_v$ la réponse intuitive à cette question est qu'associer la plus grande distance avec le temps de déplacement le plus petit (et inversement) serait la combinaison la plus avantageuse. Ce qui veut dire que lorsque $t'_h < t'_v$ ($max(H; V); min(H; V)$) dominerait ($min(H; V); max(H; V)$) et inversement quand $t'_h > t'_v$. Cette intuition est toujours vérifiée pour l'AS/RS à charge unitaire classique voir Annexe H. Cependant, ceci n'est pas systématiquement vrai pour les trois systèmes considérés ici, c'est pour cette raison là que nous allons mettre en évidence des propriétés mathématiques représentant pratiquement des caractéristiques techniques, qui doivent être vérifiées pour que cette affirmation soit vraie.

Remarquons aussi que pour le problème (P1), si l'une ou les deux dimensions V et H sont impaires, l'une ou les deux solutions candidates sera ou seront directement éliminées (à cause de la contrainte (4.22)). Par conséquent l'interrogation précédemment posée n'a de sens que lorsque les V et H sont toutes deux paires.

A-L'AS/RS à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels (problème (P1)) :

Nous posons les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers paires et $t'_h < t'_v$.

Si $min(H; V) \geq \frac{t'_h}{t'_v - t'_h} - 1$ alors :

$$(max(H; V); min(H; V)) \text{ domine } (min(H; V); max(H; V))$$

Propriété 2 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers paires et $t'_h > t'_v$.

Si $\min(N_l; N_h) \geq \frac{t'_v}{t'_h - t'_v} - 1$ alors :

$$(\min(H; V); \max(H; V)) \text{ domine } (\max(H; V); \min(H; V))$$

Démonstrations des propriétés 1 et 2 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers paires et $t'_h \neq t'_v$.

Nous voulons effectuer une comparaison entre $ERC1$ et $ERC1'$ (Fonction objectif pour la solution $(V; H)$) avec :

$$ERC1' = \frac{1}{\rho N} \left(\frac{4}{\frac{1}{S_1'} + \frac{1}{S_2'}} + (\rho M - 1)(2(S_1' + S_2') + \rho N \cdot \max(t'_h; t'_v)) \right) \dots (4.34)$$

Et :

$$S_1' = \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^H \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \dots (4.35)$$

$$S_2' = \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^H \max(2it'_h; jt'_v) \dots (4.36)$$

Il est évident que le cas $H = V$ ne soit pas considéré. De plus comparer $(H; V)$ et $(V; H)$ pour $V < H$ est équivalent à comparer $(V; H)$ et $(H; V)$ pour $H < V$, **donc uniquement le cas $V < H$ est étudié.**

Cas 1 : $V < H$:

Afin de comparer entre $ERC1$ et $ERC1'$ nous comparons d'une part S_1 et S_1' et d'autre part S_2 et S_2' .

$S_1 - S_1'$:

$$\begin{aligned} S_1 - S_1' &= \sum_{i=1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i-1)t'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^H \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \\ S_1 - S_1' &= \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i-1)t'_h; jt'_v) + \sum_{i=\frac{V}{2}+1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i-1)t'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=V+1}^H \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \end{aligned}$$

$$S_1 - S'_1 = \sum_{i=\frac{V}{2}+1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max((2i-1)t'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=V+1}^H \max((2i-1)t'_h; jt'_v)$$

On pose $i' = \frac{2i-V}{2}$ et $j' = j - V$

$$S_1 - S'_1 = \sum_{i'=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j'=1}^V \max((V+2i'-1)t'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j'=1}^{H-V} \max((2i-1)t'_h; (V+j')t'_v)$$

$$\begin{aligned} S_1 - S'_1 &= \sum_{i'=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{V}{2}} (\max((V+2i'-1)t'_h; (2j-1)t'_v) + \max((V+2i'-1)t'_h; 2jt'_v)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j'=1}^{\frac{H-V}{2}} (\max((2i-1)t'_h; (V+2j'-1)t'_v) + \max((2i-1)t'_h; (V+2j')t'_v)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_1 - S'_1 &= \sum_{i=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{V}{2}} \max((V+2i-1)t'_h; (2j-1)t'_v) + \max((V+2i-1)t'_h; 2jt'_v) \\ &\quad - \max((2j-1)t'_h; (V+2i-1)t'_v) - \max((2j-1)t'_h; (V+2i)t'_v) \dots (4.37) \end{aligned}$$

$S_2 - S'_2$:

$$S_2 - S'_2 = \sum_{i=1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max(2it'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^H \max(2it'_h; jt'_v)$$

$$\begin{aligned} S_2 - S'_2 &= \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^V \max(2it'_h; jt'_v) + \sum_{i=\frac{V}{2}+1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max(2it'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=1}^V \max(2it'_h; jt'_v) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=V+1}^H \max(2it'_h; jt'_v) \end{aligned}$$

$$S_2 - S'_2 = \sum_{i=\frac{V}{2}+1}^{\frac{H}{2}} \sum_{j=1}^V \max(2it'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j=V+1}^H \max(2it'_h; jt'_v)$$

On pose $i' = \frac{2i-V}{2}$ et $j' = j - V$

$$S_2 - S'_2 = \sum_{i'=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j=1}^V \max((V + 2i')t'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j'=1}^{H-V} \max(2it'_h; (V + j')t'_v)$$

$$\begin{aligned} S_2 - S'_2 &= \sum_{i'=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{V}{2}} (\max((V + 2i')t'_h; (2j - 1)t'_v) + \max((V + 2i')t'_h; 2jt'_v)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\frac{V}{2}} \sum_{j'=1}^{\frac{H-V}{2}} (\max(2it'_h; (V + 2j' - 1)t'_v) + \max(2it'_h; (V + 2j')t'_v)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_2 - S'_2 &= \sum_{i=1}^{\frac{H-V}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{V}{2}} \max((V + 2i)t'_h; (2j - 1)t'_v) + \max((V + 2i)t'_h; 2jt'_v) \\ &\quad - \max(2jt'_h; (V + 2i - 1)t'_v) - \max(2jt'_h; (V + 2i)t'_v) \dots (4.38) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

Cas 1.1 $t'_h < t'_v$ (Propriété 1):

Si $\min(H; V) \geq \frac{t'_h}{t'_v - t'_h} - 1$ alors :

Nous avons :

$$V + 2i - 1 > V + 1 \quad \forall i = 1.. \frac{H-V}{2}$$

$$2j < V \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

$$\text{Par transitivité : } V + 2i - 1 > 2j \quad \forall i = 1.. \frac{H-V}{2} \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

Donc :

$$V + 2i > V + 2i - 1 > 2j > 2j - 1 \quad \forall i = 1.. \frac{H-V}{2} \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

Par conséquent : $\forall i = 1.. \frac{H-V}{2}$ et $\forall j = 1.. \frac{V}{2}$

$$\max((2j - 1)t'_h; (V + 2i - 1)t'_v) > \max((V + 2i - 1)t'_h; (2j - 1)t'_v) \dots (4.39)$$

Et

$$\max((2j - 1)t'_h; (V + 2i)t'_v) > \max((V + 2i - 1)t'_h; 2jt'_v) \dots (4.40)$$

Finalement, grâce à (4.37), (4.39) et (4.40) nous avons :

$$S_1 - S'_1 < 0 \dots (4.41)$$

D'un autre côté nous avons :

$$V + 2i - 1 \geq V + 1 \quad \forall i = 1.. \frac{H - V}{2}$$

$$2j < V \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

$$\text{Par transitivité : } V + 2i - 1 > 2j \quad \forall i = 1.. \frac{H - V}{2} \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

Donc :

$$V + 2i > V + 2i - 1 > 2j > 2j - 1 \quad \forall i = 1.. \frac{H - V}{2} \quad \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

$$\text{Donc : } \forall i = 1.. \frac{H - V}{2} \text{ et } \forall j = 1.. \frac{V}{2}$$

$$\max(2jt'_h; (V + 2i)t'_v) > \max((V + 2i)t'_h; 2jt'_v) \dots (4.42)$$

Et

$$\max(2jt'_h; (V + 2i - 1)t'_v) \geq \max((V + 2i)t'_h; (2j - 1)t'_v) \dots (4.43)$$

Finalement, grâce à (4.38), (4.42) et (4.43) on peut déduire :

$$S_2 - S'_2 < 0 \dots (4.44)$$

Conclusion 1:

Grâce à (4.41) et (4.44), $(H; V)$ domine $(V; H)$, qui veut dire dans ce cas que : $(\max(H; V); \min(H; V))$ domine $(\min(H; V); \max(H; V))$ C.Q.F.D.

Cas 1.2 $t'_h > t'_v$ (Propriété 2) :

Ce cas peut être étudié de la même manière que le Cas 1.1 et nous conduit à la Conclusion 2.

Conclusion 2:

$(V; H)$ domine $(H; V)$, ce qui veut dire dans ce cas que : $(\min(H; V); \max(H; V))$ domine $(\max(H; V); \min(H; V))$ C.Q.F.D.

Par symétrie nous avons que le **Cas 2** ($V > H$) nous mène aux mêmes conclusions

B-L'AS/RS multi-allées :

Nous posons la propriété suivante :

Propriété 3 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers différents.

Si $t'_h \geq t'_v$ alors :

$$(\min(H; V); \max(H; V)) \text{ domine } (\max(H; V); \min(H; V))$$

Si $(\min(H; V) + 1)t'_v - \max(H; V)t'_h - Mt'_p > 0$ alors :

$$(\max(H; V); \min(H; V)) \text{ domine } (\min(H; V); \max(H; V))$$

Démonstration de la propriété 3 :

La propriété 3 est démontrée suivant le même raisonnement que pour la propriété 1.

C-L'AS/RS à racks glissants :

Nous posons la propriété suivante :

Propriété 4 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers différents.

Si $t'_h \geq t'_v$ alors :

$$(\min(H; V); \max(H; V)) \text{ domine } (\max(H; V); \min(H; V))$$

Si $(\min(V; H) + 1)t'_v - \max(V; H)t'_h - \max(t'_r; Mt'_p) > 0$ alors :

$$(\max(H; V); \min(H; V)) \text{ domine } (\min(H; V); \max(H; V))$$

Démonstration de la propriété 4 :

La propriété 4 est démontrée suivant le même raisonnement que pour la propriété 1.

4.5.2.4 Algorithme de résolution :

Maintenant que nous avons identifié et démontré nos différentes propriétés de dominances, ces dernières vont être utilisées pour mettre en place un algorithme de résolution efficace, puisque ces propriétés nous permettent de réduire notre espace de recherche en éliminant d'office les solutions que l'on sait par avance qu'elles sont dominées par d'autres.

Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de parcourir tout l'espace de recherche $\{1, 2, \dots, N\}$ pour chacune des trois dimensions, car la contrainte (4.20) (pour le problème (P1)) nous permet de sensiblement réduire notre champs de recherche. Selon cette contrainte $(H \cdot V \cdot M = N)$ la valeur de chacune des dimensions est un diviseur de N . Il est donc suffisant de ne parcourir que l'ensemble $\{1, 2, \dots, \sqrt{N}\}$, et cela pour la raison suivant :

Soient d , d' et D des entiers positifs, avec d et d' deux diviseurs de D , de telle sorte que : $dd' = D$

Si $d \leq \sqrt{D}$ alors $\frac{D}{d'} \leq \sqrt{D}$ et par conséquent $d' \geq \sqrt{D}$ (La réciproque est vraie aussi)

Par conséquent le quotient de division de chaque diviseur inférieur ou égale à \sqrt{D} est supérieur ou égale à \sqrt{D} et inversement. Et donc trouver tous les diviseurs de D est possible en trouvant seulement ceux qui sont inférieurs ou égaux à \sqrt{D} .

Grâce à cela nous mettons en place la méthode de résolution suivante (Les deux algorithmes 1 et 2), dont la complexité algorithmique est de $O(N^2)$. Par conséquent les problèmes d'optimisation du design de l'AS/RS ((P1), (P2) et (P3)) est polynomial au plus en $O(N^2)$.

Les algorithmes présentés sont adaptés au problème (P1), mais uniquement des modifications mineures sont nécessaires pour les adapter aux deux autres problèmes (Exp : modification de la condition sur les propriétés de dominance). Donc en plus de réduire la complexité du problème de $O(N^4)$ à $O(N^2)$, nos propriétés de dominance nous permettent de réduire encore de moitié le temps de calcul, en éliminant d'office la moitié des solutions candidates à parcourir.

Algorithme I : Algorithme principal

Read(t'_h, t'_v, N, ρ)

$Best_{Solution} \leftarrow \{0; 0; 0; +\infty\}$

For i from 2 to \sqrt{N} :

If $\text{mod}(N; i) = 0$:

If $\text{mod}(i; 2) = 0$ and $i \neq 2$:

$Best_{Solution} \leftarrow \text{Evaluate}(i; \frac{N}{i})$

End If

If $\text{mod}(\frac{N}{i}; 2) = 0$ and $\frac{N}{i} \neq 2$ and $\frac{N}{i} \neq i$:

$Best_{Solution} \leftarrow \text{Evaluate}(\frac{N}{i}; i)$

End If

End If

End For

Return $Best_{Solution}$

Algorithme II: Algorithme de la fonction Evaluate(a, b)

Read(a, b)

For j from 2 to \sqrt{a} :

If $\text{mod}(a; j) = 0$ then:

If $\text{mod}(\frac{a}{j}; 2) = 0$ and $\text{mod}(j; 2) = 0$ then:

If $t'_h = t'_v$ then:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(\frac{a}{j}; j; \mathbf{b})$

$S \leftarrow \text{Update_Best}(j; \frac{a}{j}; \mathbf{b})$

Else:

If $t'_h < t'_v$ then:

If $j \geq \frac{t'_h}{t'_v - t'_h} - 1$ then:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(\frac{a}{j}; j; \mathbf{b})$

Else:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(\frac{a}{j}; j; \mathbf{b})$

$S \leftarrow \text{Update_Best}(j; \frac{a}{j}; \mathbf{b})$

End If

Else:

If $j \geq \frac{t'_v}{t'_h - t'_v} - 1$ then:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(j; \frac{a}{j}; \mathbf{b})$

Else :

$S \leftarrow \text{Update_Best}(\frac{a}{j}; j; \mathbf{b})$

$S \leftarrow \text{Update_Best}(j; \frac{a}{j}; \mathbf{b})$

End If

End If

End If

Else:

If $\text{mod}(\frac{a}{j}; 2) = 0$ then:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(\frac{a}{j}; j; \mathbf{b})$

Else:

If $\text{mod}(j; 2) = 0$ then:

$S \leftarrow \text{Update_Best}(j; \frac{a}{j}; \mathbf{b})$

End If

Else If

End If

End If
End For

Return S

4.5.2.5 Etude numérique :

Comme mentionné plus haut, ce problème d'optimisation n'a jamais été traité dans la littérature du point de vue de la complexité. D'autre part puis que la détermination du design de l'AS/RS relève de la décision stratégique, le temps d'attente pour l'obtention d'une solution optimale (temps de calcul) n'était pas un facteur déterminant dans le choix ou la recherche d'une méthode de résolution performante. De ce fait lorsqu'il est question de trouver les dimensions optimales en nombre entiers d'un AS/RS, l'énumération complète est la méthode choisie. Cependant lorsque la taille du système devient trop importante, le temps de calcul élevé devient trop contraignant, même pour un problème de décision stratégique. C'est pour cette raison là que nous avons mis en place la méthode de résolution décrite plus haut. Dans ce qui va suivre nous allons justement étudier les performances de cette dernière par rapport à la méthode d'énumération communément utilisée.

L'optimisation a été effectuée sur 7 tailles de systèmes différentes, avec un pourcentage de variation sur le volume. Ceci a été fait en faisant varier le taux de charge entre 0.6 et 0.9 et pour 5 différentes vitesses de machines. Les résultats pour un taux de charge de 0.8 sont présentés dans le Tableau 4.4.

Tableau 4.4 : Résultats et comparaison entre la méthode proposée et l'énumération complète

Taille	Variation (%)	$(t'_h; t'_v)$															Augmentation du temps de calcul %
		(1,378;0,316)			(0,316;1,378)			(1;1)			(1,274;0,615)			(0,615;1,274)			
		H^*	V^*	M^*	H^*	V^*	M^*	H^*	V^*	M^*	H^*	V^*	M^*	H^*	V^*	M^*	
10000	±5	14	68	10	68	14	10	24	22	18	18	38	14	38	18	14	+ 1003.74%
30000	±5	20	95	15	90	20	16	32	33	27	26	55	20	56	27	19	+ 985.55%
60000	±3	26	112	20	112	26	20	42	42	33	32	70	26	70	32	26	+ 965.81%
100000	±2	30	131	25	132	31	24	50	49	40	40	82	30	84	39	30	+ 1025.81%
200000	±2	38	172	30	172	38	30	62	62	51	50	106	37	100	49	40	+ 950.93%
400000	±1	48	212	39	212	48	39	78	77	66	62	128	50	130	61	50	+ 1054.27%
800000	±0,75	62	267	48	266	61	49	98	99	82	78	167	61	164	77	63	-

Dans le Tableau 4.4, les dimensions optimales (H^* ; V^* ; M^*) pour chaque taille de système sont affichées en fonction des différentes vitesses des machines utilisées. Les deux premières colonnes représentent les tailles et le pourcentage de variation toléré par rapport à ces dernières. Les colonnes 3-7 montrent les configurations optimales en fonction des vitesses des machines. Enfin, la dernière colonne présente le pourcentage d'augmentation du temps de calcul de l'énumération complète par rapport à la méthode que nous avons développée. Sur la Figure 4.3 on peut clairement voir les tendances des deux courbes du temps d'exécution des deux méthodes et l'écart important entre les deux, puisque notre méthode est **10 fois** plus rapide que l'énumération complète. Notre méthode en plus du fait d'être très rapide (par rapport à l'énumération) fournit des solutions optimales exactes en utilisant des modèles discrets plus précis que leurs analogues continus, ce qui lui offre un avantage par rapport à la méthode présentée en

début du chapitre, qui est certes rapide, mais non adaptée à la résolution de problème d'optimisation en nombre entiers.

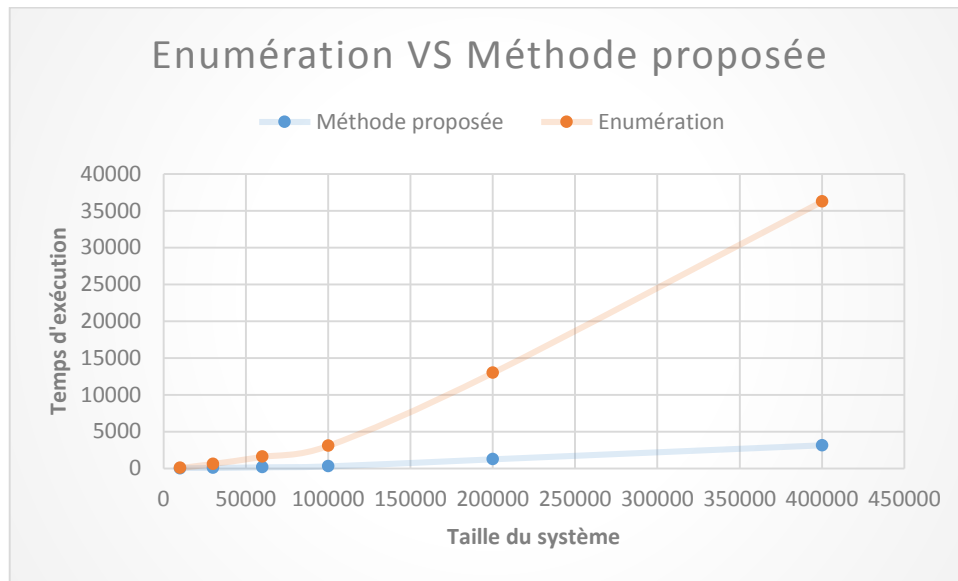


Figure 4.3 : Comparaison du temps de calcul des deux méthodes

4.6 Conclusion :

Finalement, dans ce quatrième chapitre, nous avons étudié ce système dans le but d'optimiser son fonctionnement sur le long terme, et cela en trouvant les caractéristiques initiales optimales (design du système) qui lui permettent d'avoir les meilleures performances possibles en régime permanent. Nous avons donc utilisé deux méthodes, la première est la méthode communément utilisée pour ce type de problème de décision, et nous a permis de trouver les ratios optimaux entre les différentes dimensions du système, ce qui amène à obtenir la forme géométrique optimale du système. Cependant la seconde méthode a un rôle beaucoup plus pratique, car elle offre l'avantage de trouver des solutions exactes, basés sur un modèle précis tout en utilisant un algorithme rapide basé sur des propriétés mathématiques que nous avons développées. Les résultats obtenus offrent des performances inégalées tant sur le plan de la précision que celui de la rapidité, cependant, beaucoup de pistes d'améliorations et de perspectives peuvent être considérées :

-L'optimisation du système avec le double cycle comme fonction objectif (identification des propriétés de dominances pour le double cycle).

-Optimisation du design en utilisant les modèles du temps de cycle qui prennent en considération les caractéristiques opérationnelles du système (chapitre 3).

-Mettre en place des algorithmes de résolution similaires pour d'autres types de système, en identifiant les propriétés mathématiques de ces derniers (en plus de ceux traités ici).

Conclusion générale

Afin de mener à bien cette thèse de doctorat, notre intérêt s'est porté sur les systèmes de stockage automatisés ou communément appelés AS/RS. Ces systèmes sont une solution technologique très répandue dans l'industrie, et leur valeur ajoutée dans la compétitivité des entreprises qui y font appel est sans équivoque. L'installation de ce genre d'équipements n'est pas une mince affaire, car en plus du choix du type de système, de sa taille, et de son implémentation afin de satisfaire au mieux les exigences d'un cahier des charges méticuleusement rédigé, beaucoup de paramètres doivent être pris en considération.

Dans ce mémoire nous avons choisi de travailler sur l'AS/RS à convoyeurs gravitationnels, et cela à travers différentes perspectives. Ce choix du système a été guidé par le fait que ce système soit assez récent, est pour l'instant peu étudié, en plus de présenter -à priori- des caractéristiques intéressantes, en trouvant un juste équilibre face au dilemme espace-temps (grande densité du rack en parallèle avec des temps de cycles réduits, par rapport aux AS/RS à convoyeurs gravitationnels classiques). A travers cette thèse de doctorat et les contributions qui y sont présentées, nous avons donc voulu ouvrir une brèche et déblayer le terrain pour des travaux futurs pour l'étude de ce type de système.

A travers le premier chapitre, nous avons procédé à une brève introduction au domaine des AS/RS et de la manutention de manière générale, puis intégré les différentes notions et termes utilisés dans le jargon de la discipline. Par la suite un état de l'art est venu mettre en perspective les niches où viennent se situer les différentes contributions scientifiques exposées dans ce mémoire ainsi que la jonction qui les lie avec les travaux scientifiques antérieurs.

Par ailleurs, le second chapitre exposait les premières contributions scientifiques de cette thèse, qui sont les modèles mathématiques du temps de cycle. Ces derniers présentent l'avantage d'être systémiques contrairement aux autres modèles se trouvant dans la littérature. Car ces modèles prennent en considération le fonctionnement réel du système en tenant compte de ses différents modes de fonctionnement, ce qui offre la possibilité d'obtenir des résultats beaucoup plus proche de la réalité. De plus, le gap entre les deux modèles continus et discrets était assez faible, malgré les variations du taux de charge et de la taille du système, ce qui prouve leur robustesse. Cependant, cette partie reste toujours sujette à l'amélioration et à l'extension, il serait intéressant par exemple de recalculer d'autres modèles en :

- Faisant varier les politiques du point de repos des machines.
- Changeant de politique de stockage (stockage par classe par exemple).
- Faisant une étude numérique pour des vitesses horizontales et verticales différentes.

Le troisième chapitre quant à lui, présente de nouveaux modèles mathématiques basés sur des hypothèses différentes. L'idée était de développer des formules qui traduisent de manière plus fidèle le comportement du système, même si cela impliquait de se retrouver avec des formules plus complexes.

La première hypothèse qui rompt avec les modèles précédents est celle des vitesses. Dans le second chapitre des vitesses constantes étaient considérées sans tenir compte de l'accélération, cependant ce n'est pas le cas dans la réalité, et ceci peut engendrer des écarts significatifs par rapport aux données réelles. C'est pour cela que nous avons décidé de développer d'autres modèles qui prennent en compte l'accélération/décélération ainsi que la vitesse maximale des machines S/D. De ce fait nous avons pu calculer des temps de cycle holistiques pour les simples et doubles cycles du système considéré. Cependant là aussi des améliorations sont à prévoir et des perspectives nouvelles peuvent se mettre en évidence, et dont le point de départ peut être la contribution présentée ici :

- Trouver le moyen de regrouper les formules des six cas étudiés en une seule formule compacte.
- Faire une étude comparative entre les modèles développés en chapitre 2 et ceux du chapitre 3.
- Evaluer les performances de ce système par rapport à ceux des autres dont des formules similaires du temps de cycle sont disponibles dans la littérature.

Finalement, dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'optimisation du fonctionnement de ce système sur le long terme, en trouvant les caractéristiques initiales optimales (design du système), qui lui permettent d'avoir les meilleures performances possibles en régime permanent. Nous avons donc utilisé deux méthodes, la première est une méthode communément utilisée pour ce type d'études, et nous a permis de trouver les ratios optimaux entre les différentes dimensions du système, ce qui amène à avoir une « forme » géométrique optimale du système, permettant sa comparaison avec les autres types d'AS/RS par exemple. Cependant la seconde méthode a un rôle beaucoup plus pratique, car elle offre l'avantage de générer des solutions exactes, basés sur un modèle précis tout en utilisant un algorithme rapide basé sur des propriétés mathématiques que nous avons développées. Les premières pistes d'améliorations qui peuvent être le sujet d'études prochaines sont :

- L'optimisation du système avec le double cycle comme fonction objectif.
- Optimiser le design et la configuration initiale du système en utilisant les modèles du temps de cycle qui prennent en considération les caractéristiques opérationnelles du système (chapitre 3).
- Mettre en place des algorithmes de résolution similaires pour d'autres types de systèmes, en identifiant d'autres propriétés mathématiques.

Au final, cette thèse de doctorat s'est intéressée aux problématiques liées aux systèmes automatisés de stockage AS/RS. Et cela en traitant des questionnements qui se posent en amont de l'installation du système et à un niveau décisionnel stratégique. Nous avons essayé de proposer des outils mathématiques permettant l'évaluation des performances du système selon différentes approches, mais aussi proposer des outils d'aide à la décision en traitant le problème d'optimisation du design du système en proposant une méthode de résolution adaptée et performante.

Références

- Abdel-Malek, L. & Tang, C., 1994. A heuristic for cyclic stochastic sequencing of tasks on a drum like storage system. *Computers & Operations Research*, pp. 385-396.
- Accorsi, R. et al., 2017. Multi-objective warehouse building design to optimize the cycle time, total cost, and carbon footprint. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technolog*, pp. 839-854.
- Ancelin, B. & Semery, A., 1987. Calcul de la productivité d'une ligne intégrée de fabrication : CALIF, une méthode analytique industrielle. *RAIRO APII*, pp. 209-238.
- Ashayeri, J. et al., 2002. A geometrical approach to computing expected cycle times for zone-based storage layouts in AS/RS. *International Journal of Production Research*, pp. 4467- 4483.
- Bessenouci, H. N. S. Z. & Ghomri, L., 2012. Metaheuristic based control of a flow rack automated storage retrieval system. *Journal of Intelligent Manufacturing*, pp. 1157-1166.
- Borovinšek, M., Ekren, B. Y., Burinskienė, A. & Lerher, T., 2017. Multi-objective optimisation model of shuttle-based storage and retrieval system. *Transport*, pp. 120-137.
- Bozer, Y. A. & White, J. A., 1984. Travel-time models for automated storage/retrieval systems. *IIE Transactions*, pp. 329-338.
- Bozer, Y., Schorn, E. & Sharp, G., 1990. Geometric approaches to solve the chebyshev traveling salesman problem. *IIE Transactions*, pp. 238-254.
- Bozer, Y. & White, J., 1996. A generalized design and performance analysis model for end-of aisle order picking systems. *IIE Transactions*, pp. 271-280.
- Chang, S. & Egbelu, P., 1997. Relative pre-positioning of storage/retrieval machines in automated storage/retrieval systems to minimize maximum system response time. *IIE Transactions*, pp. 303-312.
- Chen, C. et al., 2003. Platform-based AS/RS for container storage. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (14-19 Sept. 2003)*.
- Chen, Z., Li, X. & Gupta, J. N., 2015. A bi-directional flow-rack automated storage and retrieval system for unit-load warehouses. *International Journal of Production Research*, pp. 4176-4188.
- Cinar, D., Oliveira, J. A., Topcu, Y. I. & Pardalos, P. M., 2017. Scheduling the truckload operations in automated warehouses with alternative aisles for pallets. *Applied Soft Computing*, pp. 566-574.
- D'Antonio, G. et al., 2018. Analytical models for the evaluation of deep-lane autonomous vehicle storage and retrieval system performance. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technologies*, pp. 1811-1824..
- Dallari, F., Marchet, G. & Melacini, M., 2009. Design of order picking system. *The international journal of advanced manufacturing technology*, pp. 1-12.
- De Koster, B., 2007. Optimal storage rack design for a 3-dimensional compact AS/RS. *International Journal of Production Research*, pp. 1495-1514.

- De Koster, R. M. B., Le-Duc, T. & Yugang, Y., 2008. Optimal storage rack design for a 3-dimensional compact AS/RS. *International Journal of Production Research*, pp. 1495-1514.
- Eben-Chaïme, M. & Pliskin, N., 1996. An integrative model for automatic warehousing systems. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, pp. 286-292.
- Eben-Chaïme, M. & Pliskin, N., 1997. Operations management of multiple machine automatic warehousing systems. *International Journal of Production Economics*, pp. 83-98.
- Egbelu, P., 1991. Framework for dynamic positioning of storage/retrieval machines in an automated storage/ retrieval system. *International Journal of Production Research*, pp. 17-37.
- Egbelu, P. & Wu, C., 1993. A comparison of dwell point rules in an automated storage/retrieval system. *International Journal of Production Research*, pp. 2515-2530.
- Ekren, B. Y., 2011. Performance evaluation of AVS/RS under various design scenarios: a case study. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, p. 1253–1261.
- Ekren, B. Y., Akpunar, A., Sari, Z. & Lerher, T., 2018. A tool for time, variance and energy related performance estimations in a shuttle-based storage and retrieval system. *Applied Mathematical Modelling*, pp. 109-127.
- Ekren, B. Y. & Heragu, S. S., 2010. Simulation-based regression analysis for the rack configuration of an autonomous vehicle storage and retrieval system. *International Journal of Production Research*, pp. 6257-6274.
- Ekren, B. Y., Heragu, S. S., Krishnamurthy, A. & Malmberg, C. J., 2010. Simulation based experimental design to identify factors affecting performance of AVS/RS. *Computers & Industrial Engineering*, pp. 175-185.
- Ekren, Y. B., Sari, Z. & Rosi, B., 2015. Simulation analysis of shuttle based storage and retrieval systems. *International Journal of Simulation Modelling*, pp. 48-59.
- Eldemir, F., Graves, R. J. & Malmberg, C. J., 2004. New cycle time and space estimation models for automated storage and retrieval system conceptualization. *International Journal of Production Research*, pp. 4767-4783.
- Elsayed, E. & Lee, M., 1996. Order processing in automated storage/retrieval systems with due dates". *IIE Transactions*, pp. 567-577.
- Eynan, A. & Rosenblatt, M., 1994. Establishing zones in single-command class-based rectangular AS/RS. *IIE Transactions*, pp. 38-46.
- Firth, D. et al., 1988. Profitable Logistics Management. *McGraw-Hill Ryerson, Toronto*.
- Gagliardi, J. P., Renaud, J. & Ruiz, A., 2015. Sequencing approaches for multiple-aisle automated storage and retrieval systems. *International Journal of Production Research*, pp. 5873-5883.
- Gamberi, M., Manzini, R. & Regattieri, A., 2012. Analytical and numerical modeling of AS/RS cycle time in class-based storage warehousing. *Warehousing in the Global Supply Chain*, pp. 261-283.
- Gaouar, N., 2004. Amélioration des performances d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel. *Thèse de magister, Université de Tlemcen Algérie*.

- Gaouar, N., Sari, Z., Cardin, O. & Castagna, P., 2010. Evaluation de la performance d'un stockage par classes dans le contexte du stockage en AS/RS à convoyeurs gravitationnels. *Conférence Internationale de Modélisation et Simulation, Hammamet Tunisie.*
- Ghomri, L. & Sari, Z., 2017. Mathematical modeling of the average retrieval time for flow-rack automated storage and retrieval systems. *Journal of Manufacturing Systems*, pp. 165-178.
- Ghomri, L., Sari, Z., Guezzen, A. & Sari, T., 2009. Continuous models for single and dual cycle times of a multi aisle automated storage and retrieval system. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(4), pp. 1061-1066.
- Goetschalckx, M. & Ratliff, H., 1988. Sequencing picking operations in a man-aboard order picking system. *Material Flow*, pp. 255-263.
- Graves, S., Hausman, W. & Schwarz, L., 1977. Storage-retrieval interleaving in automatic warehousing systems. *Management Science*, pp. 935-945.
- Guenov, M. & Raeside, R., 1992. Zone shapes in class based storage and multi-command order picking when storage/retrieval machines are used. *European Journal of Operational Research*, pp. 37-47.
- Guezzen, A. H., Sari, Z., Castagna, P. & Cardin, O., 2013. Travel time modeling and simulation of a mobile racks automated storage/retrieval system. *International Journal of Engineering and Technology*.
- Hamzaoui, M. A., Arbaoui, T., Sari, Z. & Yalaoui, F., 2019. Exact and Heuristic Approaches for the Design of Automated Storage and Retrieval Systems (AS/RS). *IEEE 6th International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA)*, pp. 837-842.
- Hamzaoui, M. A. & Baba Ahmed, M. N., 2016. *Conception, réalisation et pilotage d'un AS/RS à chariots gravitationnels*. Tlemcen: Université de Tlemcen.
- Hamzaoui, M. A., Baba Ahmed, M. N. & Hassam, A., 2014. Human Machine Interface Device for AS/RS. *2nd International Conference on Human Machine Interaction, Chennai, India.*
- Hamzaoui, M. A. & Sari, Z., 2013. Optimisation d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel à une machine S/R pour un temps de cycle minimal. *8ième Conférence Internationale Conception et Production Intégrée*.
- Hamzaoui, M. A. & Sari, Z., 2013. Single closed form travel time model based optimization of flow rack AS/RS. *1st International Conference on Industrial Engineering & Sustainable Management (IESM), Iran, Isfahan*.
- Hamzaoui, M. A. & Sari, Z., 2015. Optimal dimensions minimizing expected travel time of a single machine flow rack AS/RS. *Mechatronics*, pp. 158-168.
- Hamzaoui, M. A. & Sari, Z., 2019. Cycle time models for the bidirectional flow-rack AS/R. *FME Transactions*, pp. 211-226.
- Han, M., McGinnis, L., Shieh, J. & White, J., 1987. On sequencing retrievals in an automated storage/retrieval system. *IIE Transactions*, pp. 56-66.
- Hassan, M. M., 2002. A framework for the design of warehouse layout. *Facilities*, pp. 432-440.

- Hatton, G., 1990. Designing a warehouse or distribution centre.. In: *Gattorna, J.L. (Ed.), The Gower Handbook of Logistics and Distribution Management, fourth ed. Gower Publishing, Aldershot.*, pp. 175-193.
- Hausman, W., Schwarz, L. & Graves, S., 1976. Optimal storage assignment in automatic warehousing systems. *Management Science*, pp. 629-638.
- Heskett, J., Glaskowsky, N. & Ivie, R., 1973. Business Logistics. *Physical Distribution and Materials Handling, second ed. Ronald Press, New York.*
- Hu, P., Chen, H., Wang, X. & Shi, M., 2019. Model and Algorithm for Co-scheduling of Stackers and Single RGV during retrieval Process in AS/RS. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*.
- Hwang, H. & Lee, S. B., 1990. Travel-time models considering the operating characteristics of the storage and retrieval machin. *The International Journal of Production Research*, pp. 1779-1789.
- Hwang, H. & Song, J., 1993. Sequencing picking operations and travel time models for man-on-board storage retrieval system. *International Journal of Production Economics*, pp. 75-88.
- Ignall, E. & Silver, A., 1977. The output of a two-stage system with unreliable machines and limited storage. *AIIE Transactions*, pp. 183-188.
- Jarvis, J. & McDowell, E., 1991. Optimal product layout in an order picking warehouse. *IIE Transactions*, pp. 93-102.
- Kosanić, N. Ž., Milojević, G. Z. & Zrnić, N. Đ., 2018. A survey of literature on shuttle based storage and retrieval systems. *FME Transactions*, pp. 400-409.
- Kouloughli, S. & Sari, Z., 2015. Multi-aisle AS/RS dimensions optimization for cycle time minimization. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 675-692.
- Kouvelis, P. & Papanicolaou, V., 1995. Expected travel time and optimal boundary formulas for a two-class-based automated storage/retrieval system. *International Journal of Production Research*, pp. 2889-2905.
- Krishnaiah Chetty, O. & Sarveswar Reddy, M., 2003. Genetic algorithms for studies on AS/RS integrated with machines. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 932-940.
- Kuo, P. H., Krishnamurthy, A. & Malmborg, C. J., 2007. Design models for unit load storage and retrieval systems using autonomous vehicle technology and resource conserving storage and dwell point policies. *Applied Mathematical Modelling*, pp. 2332-2346.
- Kuo, P.-H., Krishnamurthy, A. & Malmborg, C. J., 2008. Performance modelling of autonomous vehicle storage and retrieval systems using class-based storage policies. *International Journal of Computer Applications in Technology*, pp. Volume 31, Issue 3-4.
- Lee, H. & Schaefer, S., 1996. Retrieval sequencing for unit-load automated storage and retrieval systems with multiple openings. *International Journal of Production Research*, pp. 2943-2962.
- Lee, M. K. & Elsayed, E. A., 2005. Optimization of warehouse storage capacity under a dedicated storage policy. *International Journal of Production Research*, pp. 1785-1805.

- Lee, Y. H., Lee, M. H. & Hur, S., 2005. Optimal design of rack structure with modular cell in AS/RS. *International Journal of Production Economics*, pp. 172-178.
- Lerher, T., Ekren, B. Y., Dukic, G. & Rosi, B., 2015. Travel time model for shuttle-based storage and retrieval systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 1705-1725.
- Lerher, T., Potrč, I., Šraml, M. & Tollazzi, T., 2010. Travel time models for automated warehouses with aisle transferring storage and retrieval machine. *European Journal of Operational Research*, pp. 571-583.
- Lerher, T. & Šraml, M., 2012. Designing Unit Load Automated Storage and Retrieval Systems. *Warehousing in the Global Supply Chain*, pp. 211-231.
- Linn, R. & Wysk, R., 1987. An analysis of control strategies for automated storage and retrieval systems. *INFOR*, pp. 66-83.
- Linn, R. & Wysk, R., 1990a. An expert system framework for automated storage and retrieval system control. *Computers & Industrial Engineering*, pp. 37-48.
- Linn, R. & Wysk, R., 1990b. An expert system based controller for an automated storage/retrieval system. *International Journal of Production Research*, pp. 735-756.
- Liu, C.-I., Jula, H. & Loannou, P., 2002. Design, simulation, and evaluation of automated container terminals. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, pp. 12 - 26.
- Mahajan, S., Rao, B. & Peters, B., 1998. A retrieval sequencing heuristic for miniload end-of-aisle automated storage/retrieval systems. *International Journal of Production Research*, pp. 1715-1731.
- Maleki, R., 1991. *Flexible Manufacturing Systems the Technology and Management*. Prentice Hall.
- Malmborg, C. J., 2003. Design optimization models for storage and retrieval systems using rail guided vehicles. *Applied Mathematical Modelling*, pp. 929-941.
- Manzini, R., Gamberi, M., Persona, A. & Regattieri, A., 2007. Design of a class based storage picker to product order picking system. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, p. 811–821.
- Manzini, R., Gamberi, M. & Regattieri, A., 2005. Design and control of an AS/RS. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 766-774.
- Marchet, G., Melacini, M., Perotti, S. & Tappia, E., 2013. Development of a framework for the design of autonomous vehicle storage and retrieval systems. *International Journal of Production Research*, pp. 4365-4387.
- Material Handling Institute, 1977. Consideration for planning and installing an automated storage/retrieval systems. *Inc AS/RS document*.
- Ma, Y. & Cao, Y., 2019. Travel Time Analysis of Split-platform Automated Storage and Retrieval Systems with Two Storage Classes. *16th International Conference on Service Systems and Service Management (ICSSSM) IEEE*, pp. 1-6.
- Metahri, D., 2019. *Contribution à l'évaluation des performances d'un flow-rack AS/RS*. Oran: Université d'Oran 2.

- Metahri, D. & Hachemi, K., 2018. Retrieval–travel-time model for free-fall-flow-rack automated storage and retrieval system. *Journal of Industrial Engineering International*, pp. 807-820.
- Mulcahy, D., 1994. Warehouse Distribution and Operations Handbook. *McGraw-Hill, New York*.
- Muppani, V. R. & Adil, G. K., 2008. A branch and bound algorithm for class based storage location assignment. *European Journal of Operational Research*, pp. 492-507.
- Ouhoud, A., Guezzen, A. & Sari, Z., 2016. Comparative Study between Continuous Models and discrete models for Single Cycle Time of a Multi-Aisles Automated Storage and Retrieval System with Class Based Storage. *IFAC-PapersOnLine*, 49(12), pp. 1341-1346.
- Oxley, J., 1994. Avoiding inferior design. *Storage Handling and Distribution*, pp. 38 (2), 28–30.
- Pandit, R. & Palekar, U. S., 1993. Response time considerations for optimal warehouse layout design. *Journal of Engineering for Industry*, pp. 322-328.
- Park, C. B., Foley, R. D., White, J. A. & Frazelle, E. H., 2003. Dual command travel times and miniload system throughput with turnover-based storage. *IIE Transactions*, pp. 343-355.
- Park, B., 2001. An optimal dwell point for automated storage/ retrieval systems with uniformly distributed, rectangular racks. *International journal of production research*, pp. 1469-1480.
- Patchong, A. & Willaeyts, D., 2001. Modelling and analysis of an unreliable flowline composed of parallel-machine stages. *IIE Transactions*, pp. 559-568.
- Peters, B., Smith, J. & Hale, T., 1996. Closed form models for determining the optimal dwell point location in automated storage and retrieval systems. *International Journal of Production Research*, pp. 1757-1771.
- Rajković, M. et al., 2017. A Multi-Objective Optimization model for minimizing cost, travel time and CO2 emission in an AS/RS. *FME Transactions*, pp. 620-629.
- Ramtin, F. & Pazour, J. A., 20015. Product allocation problem for an AS/RS with multiple in-the-aisle pick positions. *IIE Transactions*, pp. 1379-1396.
- Roodbergen, K. J. & Vis, I. F., 2009. A survey of literature on automated storage and retrieval systems. *European Journal of Operational Research*, pp. 343-362.
- Rosenblatt, M. & Eynan, A., 1989. Deriving the optimal boundaries for class-based automatic storage/retrieval systems. *Management Science*, pp. 1519-1524.
- Roshan, K., Shojaie, A. & Javadi, M., 2019. Advanced allocation policy in class-based storage to improve AS/RS efficiency toward green manufacturing. *International Journal of Environmental Science and Technology*, pp. 5695-5706.
- Sari, Z., 2003. Modélisation, analyse et évaluation des performances d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel. *Thèse de doctorat d'état, Université de Tlemcen Algérie*.
- Sari, Z. & Bessenouci, N. H., 2012. Design & Modeling of a Single Machine Flow Rack AS/RS. *12TH IMHRC PROCEEDINGS (GARDANNE, FRANCE – 2012)*.

- Sari, Z. & Hamzaoui, M. A., 2013. Optimization of a Single Machine Flow Rack AS/RS for Minimum Expected Cycle Time. *IFAC Proceedings Volumes*, pp. 57-62.
- Sari, Z. & Hamzaoui, M. A., 2016. Cycle time models for the single machine flow-rack AS/RS. *3rd International Conference on Industrial Engineering & Sustainable Management (IESM), Iran, Isfahan*.
- Sari, Z., Saygin, C. & Ghouali, N., 2005. Travel-time models for flow-rack automated storage and retrieval systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 979-987.
- Seidmann, A., 1988. Intelligent control schemes for automated storage and retrieval systems. *International Journal of Production Research*, pp. 931-952.
- Southeast University, N. C., 2013. *Multi-depth bidirectional flow type shelf and layout storing and fetching method thereof*. Chine, Brevet n° CN103723422A.
- Takakuwa, S., 1993. Design and Cost-Effectiveness Analysis of Large-Scale AS/RS-Agv Systems. *Proceedings of 1993 Winter Simulation Conference - (WSC '93)*.
- Tang, L. & Chew, E., 1997. Order picking systems: batching and storage assignment strategies. *Computer & Industrial Engineering*, pp. 817-820.
- Thomas, L. M. & Meller, R. D., 2014. Analytical models for warehouse configuration. *IIE Transactions*, pp. 928-947.
- Tompkins, J. A. & White, J. A., 1984. *Facilities Planning*. Première éd. Boston: Springer.
- Van den Berg, J., 2002. Analytic expressions for the optimal dwell point in an automated storage/retrieval system. *International Journal of Production Economics*, pp. 13-25.
- Van Oudheusden, D., Tzen, Y. & Ko, H., 1988. Improving storage and order picking in a person-on-board AS/R system: a case study. *Engineering Costs and Production Economics*, pp. 273-283.
- Vasili, M., Hong, T. S., Homayouni, S. M. & Ismail, N., 2008. A STATISTICAL MODEL FOR EXPECTED CYCLE TIME OF SP-AS/RS: AN APPLICATION OF MONTE CARLO SIMULATION. *Applied Artificial Intelligence*, pp. 824-840.
- Wang, J. & Yih, Y., 1997. Using neural networks to select a control strategy for automated storage and retrieval systems (AS/RS)". *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, pp. 487-795.
- Wen, J., Liu, X. & Yang, P., 2018. Stochastic Storage/retrieval Scheduling Considering Shuttle Failure in Multi-shuttle Automated Storage and Retrieval System. *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*.
- Xu, X. et al., 2018a. Travel-time model of dual-command cycles in a 3D compact AS/RS with lower mid-point I/O dwell point policy. *International Journal of Production Research*, pp. 1620-1641.
- Xu, X. et al., 2018. International Journal of Production Research. *Travel-time model of dual-command cycles in a 3D compact AS/RS with lower mid-point I/O dwell point policy*, pp. 1620-1641.
- Xu, X. et al., 2019. Travel time models for a three-dimensional compact AS/RS considering different I/O point policies. *International Journal of Production Research*, pp. 1-24.

- Xu, X., Zhao, X., Zou, B. & Li, M., 2018. Optimal dimensions for multi-deep storage systems under class-based storage policies. *Cluster Computing*, pp. 1-15.
- Yang, P., Miao, L., Xue, Z. & Qin, L., 2014. Optimal storage rack design for a multi-deep compact AS/RS considering the acceleration/deceleration of the storage and retrieval machine. *International Journal of Production Research*, pp. 929-943.
- Yang, P. et al., 2017. Designing the optimal multi-deep AS/RS storage rack under full turnover-based storage policy based on non-approximate speed model of S/R machine. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, pp. 113-130..
- Yang, Z., Wang, L., Cai, Y. & Kimie, K., 2019. A polychromatic sets theory based algorithm for the input/output scheduling problem in AS/RSs. *Evolutionary Intelligence*, pp. 333-340.
- Yoon, C. & Sharp, G., 1996. A structured procedure for analysis and design of order pick systems. *IIE Transactions*, p. 379–389.

Annexes

Annexe A : Modèle discret du temps moyen de stockage pour chaque machine

Soit X la variable aléatoire associée au temps de stockage, nous avons donc :

$$ESC_{Machine\ 1}^D = E(X) \quad (A1)$$

Son support est :

$$Sup(X) = \left\{ W_{i,j} / i \in \left\{ 1 \dots \frac{N_l}{2} \right\} \text{ et } j \in \{ 1 \dots N_h \} \right\} \quad (A2)$$

Puisqu'une opération de stockage est simplement un aller-retour entre la station D/L et l'emplacement de stockage :

$$W_{i,j} = 2S_{i,j} \quad (A3)$$

Puisque c'est le déplacement de Tchebychev qui est considéré :

$$S_{i,j} = \max(2(i-1)t'_h + l; (j-1)t'_v + h) \quad (A4)$$

Nous avons $2(i-1)$ à cause de l'hypothèse A_1

Afin de simplifier nous considérons que $l = t'_h$ et $h = t'_v$

$$S_{i,j} = \max((2i-1)t'_h; jt'_v) \quad (A5)$$

Puisque c'est le stockage aléatoire qui est considéré, i et j sont uniformément distribués :

$$E(X) = \frac{1}{Card(Sup(X))} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} W_{i,j} \quad (A6)$$

$$Card(Sup(X)) = Card(Sup(i)) \cdot Card(Sup(j)) \quad (A7)$$

Et donc nous avons :

$$E(X) = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2S_{i,j} \quad (A8)$$

Finalement :

$$ESC_{Machine\ 1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2max((2i-1)t'_h; jt'_v) \quad (A9)$$

Suivant l'hypothèse A₁, par symétrie nous trouvons :

$$ESC_{Machine\ 2}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2max(2it'_h; jt'_v) \quad (A10)$$

Annexe B : Modèle discret du temps moyen de déstockage pour chaque machine

1-OP1: Les machines fonctionnent indépendamment (produit en première position).

Ce cas est analogue à celui d'une opération de stockage, car il s'agit que d'un simple aller-retour.

Par ailleurs, via l'hypothèse A₁ nous avons :

$$ERC_{OP1/Machine1}^D = ESC_{Machine\ 2}^D \quad (B1)$$

$$ERC_{OP1/Machine2}^D = ESC_{Machine\ 1}^D \quad (B2)$$

Donc :

$$ERC_{OP1/Machine1}^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2max(2it'_h; jt'_v) \quad (B3)$$

$$ERC_{OP1/Machine2}^D = \frac{2}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} 2max((2i-1)t'_h; jt'_v) \quad (B4)$$

2-OP2 : Les deux machines travaillent ensemble (produit ne se trouve pas en première position)

Soit Y la variable aléatoire associée au temps de déstockage pour la machine 1 :

$$ERC_{OP2/Machine1}^D = E(Y) \quad (B5)$$

Et son support est :

$$Sup(Y) = \left\{ Z_{i,j} / i \in \left\{ 1 \dots \frac{N_l}{2} \right\} \text{ et } j \in \{ 1 \dots N_h \} \right\} \quad (B6)$$

Dans ce cas-là, en plus de l'aller-retour nous avons aussi le temps nécessaire au restockage des produits bloquants.

$$Z_{i,j} = 2R_{i,j} + E(Q_{i,j}) \quad (\text{B7})$$

$E(Q_{i,j})$ est l'espérance du temps de restockage des produits bloquants dans le casier $(i; j)$, le support de $Q_{i,j}$ est :

Avec k uniformément distribuée car il s'agit d'une politique de stockage aléatoire (tous les produits ont la même probabilité d'être déstockés).

$$\text{Sup}(Q_{i,j}) = \left\{ 2(k-1)t'_p / k \in \{2 \dots m_{2i,j}\}, i \in \left\{1 \dots \frac{N_l}{2}\right\} \text{ et } j \in \{1 \dots N_h\} \right\} \quad (\text{B8})$$

$$E(Q_{i,j}) = \frac{1}{\text{Card}(\text{Sup}(Q))} \sum_2^{m_{2i,j}} 2(k-1)t'_p \quad (\text{B9})$$

$$E(Q_{i,j}) = \frac{2}{m_{2i,j} - 1} \sum_1^{m_{2i,j}-1} kt'_p \quad (\text{B10})$$

$$E(QQ_{i,j}) = \frac{2}{m_{2i,j} - 1} \frac{(m_{2i,j})(m_{2i,j} - 1)}{2} t'_p \quad (\text{B11})$$

$$E(Q_{i,j}) = m_{2i,j} t'_p \quad (\text{B12})$$

Puisque c'est le déplacement de Tchebycheve qui est considéré :

$$R_{i,j} = \max((2i-1)t'_h + l; (j-1)t'_v + h) \quad (\text{B13})$$

Nous avons $2(i-1)$ à cause de l'hypothèse A_1

Pour simplifier nous considérons $l = t'_h$ et $h = t'_v$

$$R_{i,j} = \max(2it'_h; jt'_v) \quad (\text{B15})$$

Puisqu'il s'agit d'une politique de stockage aléatoire, i et j sont uniformément distribués :

$$E(Y) = \frac{1}{\text{Card}(\text{Sup}(Y))} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} Z_{i,j} \quad (\text{B16})$$

$$\text{Card}(\text{Sup}(Y)) = \text{Card}(\text{Sup}(i)) \cdot \text{Card}(\text{Sup}(j)) \quad (\text{B17})$$

Et donc nous obtenons :

$$E(Y) = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} (2R_{i,j} + E(Q_{i,j})) \quad (\text{B18})$$

Finalement :

$$ERC_{OP2/Machine1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j} t'_p) \quad (B19)$$

Nous avons par définition que $t'_p = \max(t'_h; t'_v)$

$$ERC_{OP2/Machine1}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j} \max(t'_h; t'_v)) \quad (B20)$$

Via l'hypothèse A₁, par symétrie nous trouvons :

$$ERC_{OP2/Machine2}^D = \frac{2}{N_l N_h} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) + m_{2i-1,j} \max(t'_h; t'_v)) \quad (B21)$$

Annexe C : Modèle discret du temps moyen de déstockage pour tout le système en OP2

Via (2.8), (2.11) et (2.12) nous avons :

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{2} (ERC_{OP2/Machine1}^D + ERC_{OP2/Machine2}^D) \quad (C1)$$

$$ERC_{OP2/Machine1}^D = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j} \max(t'_h; t'_v)) \quad (C2)$$

$$\begin{aligned} ERC_{OP2/Machine2}^D \\ = \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) + m_{2i-1,j} \max(t'_h; t'_v)) \end{aligned} \quad (C3)$$

En remplaçant (C2) et (C3) dans (C1):

$$\begin{aligned} ERC_{OP2}^D = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j} \max(t'_h; t'_v)) \right. \\ \left. + \frac{2}{NhNl} \sum_{i=1}^{\frac{Nl}{2}} \sum_{j=1}^{Nh} (2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) + m_{2i-1,j} \max(t'_h; t'_v)) \right) \end{aligned} \quad (C4)$$

Et donc :

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} (2\max(2it'_h; jt'_v) + m_{2i,j}\max(t'_h; t'_v) + 2\max((2i-1)t'_h; jt'_v) + m_{2i-1,j}\max(t'_h; t'_v)) \quad (C5)$$

Nous remarquons que cette équation peut être écrite de cette manière :

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{\frac{N_l}{2}} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{k=0}^1 2\max((i+k)t'_h; jt'_v) + m_{(i+k),j}\max(t'_h; t'_v) \quad (C6)$$

Donc en fusionnant les deux sommes et en changeant les indices :

$$ERC_{OP2}^D = \frac{1}{N_h N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_h} 2\max(it'_h; jt'_v) + m_{i,j}\max(t'_h; t'_v) \quad (C7)$$

Annexe D : Modèles continus du temps moyens de stockage pour tout le système, et du temps moyen de déstockage en OP1

Nous savons que le stockage pour la machine 1 est un simple aller-retour :

$$ESC_{Machine\ 1}^C = 2E(V_1) \quad (D1)$$

Où $E(V_1)$ est l'espérance du temps de déplacement entre la station D/L et le casier de stockage (et vice-versa) comme présenté dans (Bozer & White, 1984) :

$$E(V_1) = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D2)$$

Donc :

$$ESC_{Machine\ 1}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D3)$$

C'est exactement la même chose pour la machine 2 :

$$ESC_{Machine\ 2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D4)$$

De (2.20) nous avons :

$$ESC^C = \frac{ESC_{Machine\ 1}^C \cdot ESC_{Machine\ 2}^C}{ESC_{Machine\ 1}^C + ESC_{Machine\ 2}^C} \quad (D5)$$

Donc :

$$ESC^C = \frac{ESC_{Machine\ 1}^C \cdot ESC_{Machine\ 1}^C}{ESC_{Machine\ 1}^C + ESC_{Machine\ 1}^C} = \frac{ESC_{Machine\ 2}^C \cdot ESC_{Machine\ 2}^C}{ESC_{Machine\ 2}^C + ESC_{Machine\ 2}^C} \quad (D6)$$

$$ESC^C = \frac{(ESC_{Machine\ 1}^C)^2}{2ESC_{Machine\ 1}^C} = \frac{(ESC_{Machine\ 2}^C)^2}{2ESC_{Machine\ 2}^C} \quad (D7)$$

$$ESC^C = \frac{ESC_{Machine\ 1}^C}{2} = \frac{ESC_{Machine\ 2}^C}{2} = 2CSC_{Machine\ 1}^C = 2CSC_{Machine\ 2}^C \quad (D8)$$

Finalement :

$$ESC^C = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D9)$$

Pour le déstockage en OP1, nous avons via (2.33) and (2.35)

$$ERC_{OP1/Machine\ 1}^C = ERC_{OP1/Machine\ 2}^C = T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D10)$$

En remplaçant dans (2.41):

$$\begin{aligned} ERC_{OP1}^C &= \frac{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C \cdot ERC_{OP1/Machine\ 1}^C}{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C + ERC_{OP1/Machine\ 1}^C} \\ &= \frac{ERC_{OP1/Machine\ 2}^C \cdot ERC_{OP1/Machine\ 2}^C}{ERC_{OP1/Machine\ 2}^C + ERC_{OP1/Machine\ 2}^C} \end{aligned} \quad (D11)$$

$$ERC_{OP1}^C = \frac{(ERC_{OP1/Machine\ 1}^C)^2}{2ERC_{OP1/Machine\ 1}^C} = \frac{(ERC_{OP1/Machine\ 2}^C)^2}{2ERC_{OP1/Machine\ 2}^C} \quad (D12)$$

$$ERC_{OP1}^C = \frac{ERC_{OP1/Machine\ 1}^C}{2} = \frac{ERC_{OP1/Machine\ 2}^C}{2} = 2CRC_{OP1/Machine\ 1}^C = 2CRC_{OP1/Machine\ 2}^C \quad (D13)$$

Finalement :

$$ERC_{OP1}^C = \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \quad (D14)$$

Annexe E : Modèle continu du temps moyen de déstockage pour tout le système :

Nous avons via (2.45)

$$ERC^C = \frac{1}{M'} \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{M'} \right) \left(T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M' t'_p \right) \quad (E1)$$

$$ERC^C = \frac{1}{M'} \frac{T}{2} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + \left(\frac{M' - 1}{M'} \right) \left(T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + M' t'_p \right) \quad (E2)$$

$$ERC^C = \frac{1}{M'} T \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + T \left(\frac{M' - 1}{M'} \right) \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) + \left(\frac{M' - 1}{M'} \right) M' t'_p \quad (E3)$$

$$ERC^C = \frac{T}{M'} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + (M' - 1) \right) + (M' - 1) t'_p \quad (E4)$$

$$ERC^C = \frac{T}{M'} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2M' - 1}{2} \right) + (M' - 1) t'_p \quad (E5)$$

Nous avons que $M' = \rho M$, donc :

$$ERC^C = \frac{T}{\rho M} \left(\frac{b^2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2\rho M - 1}{2} \right) + (\rho M - 1) t'_p \quad (E6)$$

Annexe F : Résultats de la simulation et de l'évaluation de la précision des modèles mathématiques calculés en chapitre 3.

Etant donnée la grande voluminosité des données, nous présentant cet annexe uniquement en version numérique jointe.

Annexe G : Résultats de l'optimisation numérique effectuée en chapitre 4.

Etant donnée la grande voluminosité des données, nous présentant cet annexe uniquement en version numérique jointe.

Annexe H :

(Bozer & White, 1984) ont présenté le modèle discret du temps de cycle moyen de déstockage pour l'AS/RS à charges unitaires :

$$ERC = \frac{1}{HV} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) \dots (H1)$$

On pose le problème d'optimisation suivant (P4):

$$\text{Minimiser } ERC \dots (H2)$$

$$SC : \begin{cases} H \cdot V = N \quad \forall (H; V) \in \mathbb{N}^{*2} \dots (H3) \\ H > 1, V > 1 \dots (H4) \\ (H; V) \in \mathbb{N}^{*2} \dots (H5) \end{cases}$$

Propriété 5 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers différents.

Si $t'_h > t'_v$ alors :

$$(\min(H; V); \max(H; V)) \text{ domine } (\max(H; V); \min(H; V))$$

Si $t'_h < t'_v$ alors :

$$(\max(H; V); \min(H; V)) \text{ domine } (\min(H; V); \max(H; V))$$

Démonstration de la propriété 5 :

Soient $(H; V)$ et $(V; H)$ deux solutions candidates, avec H et V deux entiers différents.

Nous effectuons une comparaison entre ERC (fonction objectif pour la solution $(H; V)$) et ERC' (fonction objectif pour la solution $(V; H)$), avec :

$$ERC' = \frac{1}{HV} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^H \max(it'_h; jt'_v) \dots (H6)$$

Il est évident que le cas $H = V$ ne soit pas traité. En outre comparer entre $(H; V)$ et $(V; H)$ avec $V < H$ est équivalent à comparer entre $(V; H)$ et $(H; V)$ avec $H < V$, donc uniquement le cas $V < H$ est considéré.

Cas 1: $V < H$:

On pose :

$$\begin{aligned} ERC - ERC' &= \frac{1}{HV} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) - \frac{1}{HV} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^H \max(it'_h; jt'_v) \\ ERC - ERC' &= \frac{1}{HV} \left(\sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) + \sum_{i=V+1}^H \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^V \sum_{j=V+1}^H \max(it'_h; jt'_v) \right) \\ ERC - ERC' &= \frac{1}{HV} \left(\sum_{i=V+1}^H \sum_{j=1}^V \max(it'_h; jt'_v) - \sum_{i=1}^V \sum_{j=V+1}^H \max(it'_h; jt'_v) \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$ERC - ERC' = \frac{1}{HV} \sum_{i=V+1}^H \sum_{j=1}^V (\max(it'_h; jt'_v) - \max(jt'_h; it'_v))$$

Donc :

$$ERC - ERC' = \frac{1}{HV} \sum_{i=1}^{H-V} \sum_{j=1}^V (\max((i+V)t'_h; jt'_v) - \max(jt'_h; (i+V)t'_v))$$

Nous avons : $\forall i = 1..(H - V)$ and $\forall j = 1..V$: $i + V > j$

Alors pour les deux cas de la propriété 5 :

Cas 1.1 $t'_h > t'_v$:

$\forall i = 1..(H - V)$ et $\forall j = 1..V$

$$\max((i + V)t'_h; jt'_v) > \max(jt'_h; (i + V)t'_v) \dots (H7)$$

Par conséquent :

$$ERC - ERC' > 0 \dots (H8)$$

Conclusion 5.1:

Grâce à (H8), $(V; H)$ domine $(H; V)$, qui veut dire dans ce cas :
 $(\min(H; V); \max(H; V))$ domine $(\max(H; V); \min(H; V))$

Cas 1.2 $t'_h < t'_v$:

$\forall i = 1..(H - V)$ et $\forall j = 1..V$

$$\max((i + V)t'_h; jt'_v) < \max(jt'_h; (i + V)t'_v)$$

Par conséquent :

$$ERC - ERC' < 0 \dots (H9)$$

Conclusion 5.2:

Grâce à (H9), $(H; V)$ domine $(V; H)$, qui veut dire dans ce cas :
 $(\max(H; V); \min(H; V))$ domine $(\min(H; V); \max(H; V))$

Par symétrie, le cas **Case 2** ($V > H$) mène aux mêmes conclusions. **CQDFT**

Résumé

Dans cette thèse de doctorat nous nous sommes intéressés à l'étude du système automatisé de stockage/déstockage à convoyeurs gravitationnels bidirectionnels. Il est question de procéder à diverses modélisations mathématiques de différents temps de cycle de ce système afin de pouvoir évaluer ses performances. Nous avons dans un premier lieu procédé à une modélisation des temps de stockage, de déstockage et de doubles cycles en considérant des vitesses constantes pour les machines S/D (stockage/déstockage). Et cela suivant deux approches de modélisation, discrète et continue, avant de procéder à une comparaison entre les deux. Dans un second temps nous avons développé de nouveaux modèles des temps de cycle mais en prenant en considération les caractéristiques opérationnelles des machines S/D, c'est-à-dire l'accélération/décélération ainsi que la vitesse maximale avant de valider ces formules par simulation. Finalement nous avons procédé à l'optimisation du design du système étudié pour un temps de cycle minimal. Nous avons tout d'abord fait appel à une méthode communément utilisée afin de trouver les ratios optimaux entre les trois dimensions spatiales du rack, et cela en utilisant le modèle continu du temps de cycle. Par la suite nous avons utilisé le modèle discret du temps de cycle, qui est plus précis mais pour qui les méthodes exactes utilisées nécessitent un temps de calcul important. Nous avons donc développé une nouvelle méthode exacte adaptée, qui en se basant sur des propriétés de dominance que nous avons démontrées résout le problème d'optimisation en un temps dix fois inférieur à celui de l'énumération complète.

Abstract

In this Ph.D thesis we were interested in the study of the bidirectional flow-rack Automated Storage/Retrieval (AS/RS) system. The main purpose was to carrying out various mathematical models of different cycle times of this system in order to be able to evaluate its performance. First, we modelled storage, retrieval and double cycle times by considering constant velocities for the S/R machines (Storage/Retrieval). This could be made using two modelling approaches, discrete and continuous. In a second step we developed new cycle time models but taking into consideration the operational characteristics of the S/R machines, i.e. acceleration/deceleration and maximum velocity before validating these formulas by simulation. Finally we proceeded to optimize the design of the studied system for a minimal cycle time. First, we used a commonly used method to find the optimal ratios between the three spatial dimensions of the rack, using the continuous cycle time model. Subsequently we used the discrete cycle time model, which is more accurate but for which the used exact methods require a significant computation time. We have therefore developed a new adapted exact method, which based on dominance properties that we have demonstrated solves the optimization problem in a time ten times less than that of the full enumeration.

ملخص

في أطروحة الدكتوراه هذه ، نحن مهتمون بدراسة النظام الآلي للتخزين بواسطة ناقلات جاذبية ثنائية الاتجاه. الهدف الرئيسي هو إيجاد معادلات رياضية تمثل الزمن المتوسط لتخزين، استرجاع أو القيام بدورة ثنائية، وذلك من جل القيام بتقييم أدائه على المدى البعيد. بادئ ذي بدء، شرعنا في نمذجة أوقات التخزين، استرجاع و الدورة الثنائية من خلال طريقتين للنمذجة، طريقة منفصلة و طريقة مستمرة. في خطوة ثانية ، قمنا بتطوير نماذج جديدة لأوقات الدورات ولكن مع مراعاة الخصائص التشغيلية للآلات ، أي التسارع / التباطؤ والحد الأقصى للسرعة. أخيرًا، ننتقل إلى تحسين تصميم النظام المدروس زمن متوسط للدورات أدنى. استخدمنا أولاً طريقة شائعة الاستخدام لإيجاد النسب المثلى بين الأبعاد المكانية الثلاثة للرف، وذلك باستخدام نموذج وقت الدورة المستمر. بعد ذلك، استخدمنا النموذج المنفصل لوقت الدورة، والذي هو أكثر دقة ولكن التي تتطلب الطرق الدقيقة المستخدمة وقت حساب كبير. لذلك قمنا بتطوير طريقة جديدة دقيقة ومتكيفة ، والتي تستند إلى خصائص الهيمنة التي برهنا على صحتها والتي تعمل على حل مشكلة التحسين في وقت أقل بعشر مرات من طريقة التعداد الكامل.