REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

Par :

MAHI Fatiha

Sur le thème

Géométrie des sous-variétés dans les espaces de formes complexes et S-variétés

Soutenue publiquement le 10 juin 2019 à Tlemcen devant le jury composé de :

MESSIRDI Miloud	Prof.	Université de Tlemcen	Président
BELKHELFA Mohamed	Prof.	Université de Mascara	Directeur de thèse
BENALILI Mohamed	Prof.	Université de Tlemcen	Examinateur
DJAA Mustafa	Prof.	Centre universitaire de Relizane	Examinateur
MALIKI Youssef	M.C.A	Université de Tlemcen	Examinateur
SOUICI-BENHAMADI Zoubida	M.C.A	Université d'Annaba	Examinatrice
BELARBI Lakehal	M.C.A	Université de Mostaganem	Invité

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans la volonté de Allah qui m'a offert santé, force, courage et volonté jusqu'au dernier moment, je te remercie Allah pour ça et pour tout le reste.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à Monsieur Mohamed Belkhelfa, professeur à l'université de Mascara, mon directeur de thèse. En acceptant de m'encadrer, il m'a témoigné sa confiance, je le remercie énormément. Je garde toujours beaucoup de plaisir à discuter avec vous et à bénéficier de vos conseils.

Je présente mes vifs remerciements à Monsieur Miloud Messirdi, professeur à l'université de Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Merci aux membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail, et je tiens à les assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'ils portent à cette thèse :

Monsieur Mohamed Benalili, professeur à l'université de Tlemcen.
Monsieur Mustapha Djaa, professeur au centre universitaire de Relizane.
Monsieur Youssef Maliki, maître conférence à l'université de Tlemcen.
Madame Zoubida Souici-Benhamadi, maître conférence à l'université d'Annaba.
Monsieur Lakehal Belarbi, maître conférence à l'université de Mostaganem.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues de laboratoire L.P.Q.3M de l'université de Mascara qui j'ai eu le plaisir de côtoyer.

Mes vifs remerciements sont également exprimés à l'égard des responsables, personnel et enseignants de la faculté des sciences de l'université de Tlemcen.

Je remercie toutes mes amies, qui m'ont aidé chacune à leur manière, en particulier Karima L. , Sarah A., Amina A. et Djemaia B.

Enfin, je ne saurais trop exprimer toute ma gratitude envers ma mère, mon père, ma soeur et mes deux frères, le mérite de ce travail leur revient en grande partie. C'est plus qu'un merci que je veux leur dire. Puisse ce modeste travail leur témoigner ma profonde reconnaissance.

À tous ceux qui me sont chers :
Un grand merci.

A' mes chers parents, merci pour vos prières,

A' ma sœur et mes deux frères…

Je dédie ce travail…

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que pour étudier la géométrie d'une variété Riemannienne donnée (M, g), parfois il est commode de la plonger dans une certaine variété Riemannienne à géométrie connue et puis analyser la géométrie induite. Cela a conduit à l'étude de la géométrie de sous-variété [1, 15, 16].
Cette approche a donne naissance à l'introduction de la théorie de la sous-variété qui est devenue un sujet de recherche indépendant lui-même. La théorie de la sous-variété a de nombreuses applications significatives en mécanique et en physique...etc.

Une sous-variété M d'une variété Riemanienne $\widetilde{M}$ est dite pseudo-parallèle si sa seconde forme fondamentale σ vérifie

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(g, \sigma),$$

où $\widetilde{R}$ indique le tenseur de courbure Riemannienne de $\widetilde{M}$, $Q(g, \sigma)$ le tenseur de type $(0, 4)$ associé à σ et L une fonction réelle sur M.
Les sous-variétés pseudo-parallèles ont été introduites dans [2] et [3], comme des extensions naturelles des sous-variétés semi-parallèles ($\widetilde{R}\,.\,\sigma = 0$), et comme analogues extrinsèque des variétés Riemanniennes pseudo-symétrique ($\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = L\,Q(g, \widetilde{R})$) dans le sens de Deszcz [21], qui généralisent les variétés Riemanniennes semi-symétrique ($\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = 0$).
Ferus [28] a introduit le concept des immersions parallèles, c'est à dire des immersions avec une seconde forme fondamentale parallèles ($\widetilde{\nabla}\sigma = 0$) et il a classifié de telles immersions. D'autre part, Deprez [19] [20] a introduit le concept des immersions semi-parallèles. Ainsi, les immersions pseudo-parallèles sont une généralisation d'immersions semi-parallèles et par conséquent une généralisation d'immersions parallèles.
Les immersions parallèles et semi-parallèles ont été étudiées dans des espaces différents par de nombreux auteurs (voir par exemple [19, 20, 23, 45, 46, 52, 53, 56]).
Des exemples d'immersions pseudo-parallèles qui ne sont pas semi-parallèles dans les espaces de formes réelles et complexes ont été montrés dans [2], [3], [43] et [14].
Recemment, nombreux auteurs ont étudié les sous-variétés pseudo-parallèles de divers types de variétés dans " espaces formes réelles, espaces de formes complexes, espaces formes de Sasaki, espace formes de Kenmotsu...".

Cette thèse consiste en l'étude des sous-variétés pseudo-parallèles de l'espace de formes Sasakiennes munis de s-champs de Reeb, en abrégé $\mathcal{S}$-espace forme.
En 1963, Yano dans [70] introduit la notion d'une φ-structure métrique sur une variété de dimension $2n + s$, où φ est un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ et de rang constant $2n$

satisfaisant

$$\varphi^3 + \varphi = 0.$$

En ce qui concerne les φ-structures, cette définition équivaut à une réduction du groupe de structure du fibré tangent à $U(n) \times O(s)$. Si g est une métrique compatible,on a

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \sum\nolimits_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y),$$

pour tout X, Y des champs de vecteurs tangent à $\widetilde{M}$. Où, les η_α sont les 1-formes duales de ξ_α et les ξ_α $(\alpha = \{1, ..., s\})$ sont des sections globales linéairement indépendantes de $\ker(\varphi)$. Ces structures ont été introduites comme une généralisation des structures métriques quasi-contact et des structures presque hermitiennes.
Blair [8] a introduit le concept d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$ munie d'une φ-structure métrique normale (c'est à dire le champ de tenseurs $N_\varphi + 2\sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha$ est nul) et satisfaisant certaines relations. Ces structures ont été largement étudiées ces dernières années [7, 8, 37]...
La $\mathcal{S}$-structure est analogue à la structure kählerienne $(s = 0)$ dans le cas presque Hermitien et à la structure Sasakienne $(s = 1)$ dans le cas presque contact.
Dans [39], Kobayashi et Tsushiya ont établi l'expression explicite de la courbure des $\mathcal{S}$-variétés de courbure φ-sectionnelle constante, ce qui constitue un outil trés important pour l'étude de ces variétés. Si $\widetilde{M}^{2n+s}$ est une $\mathcal{S}$-variété de courbure φ-sectionnelle constants c, alors le tenseur de courbure $\widetilde{R}$ est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \frac{c+3s}{4}\{g(\varphi X, \varphi Z)\varphi^2 Y - g(\varphi Y, \varphi Z)\varphi^2 X\} \\
&+ \frac{c-s}{4}\{g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\} \\
&+ (\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s} \eta_\beta(Z))\varphi^2 Y - (\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s} \eta_\beta(Z))\varphi^2 X \\
&+ g(\varphi Y, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s} \xi_\beta) - g(\varphi X, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s} \xi_\beta)\,,
\end{aligned}$$

dans ce cas, une $\mathcal{S}$-variété est dite $\mathcal{S}$-espace forme qu'on la note $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, $(n > 1)$.
Pour $s = 1$, on retrouve l'expression du tenseur de courbure des variétés Sasakiennes de courbure φ-sectionnelle constante c, dites espace formes de Sasaki et on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \\
&+ \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi \\
&- g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y - 2g(\varphi X, Y)\varphi Z\}\,,
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in T(\widetilde{M})$.

Ce travail est organisé comme suit

Le premier chapitre est une introduction générale à la géométrie de sous-variétés, ce chapitre contient les différentes définitions et propriétés qui seront utilisées ou généralisées par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré aux notions de pseudo-symétrie, semi-symétrie et localement symétrie d'une variété Riemannienne et ses notions extrinsèques (parallélisme, semi-parallélisme et pseudo-parallélisme). On donne aussi l'interprétation géométrique de ces notions.

Dans le troisième chapitre, on introduit les notions essentielles qui sont attachées à une variété Sasakienne et $\mathcal{S}$-variété. On donne les définitions et les propriétés de l'espace forme de Sasaki et de $\mathcal{S}$-espace formes (c'est à dire une $\mathcal{S}$-variété de courbure φ sectionnelle constante). On termine ce chapitre, en traitant le tenseur parallèle du second ordre sur une $\mathcal{S}$-variété. On montre le Théorème suivant :

Théorème 0.0.1. *Dans une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, un tenseur symétrique parallèle du second ordre est proportionnel au tenseur métrique, si $s = 1$ et il s'agit d'une combinaison linéaire (avec des coefficients constants) du tenseur métrique sous-jacent et des 1-formes de $\mathcal{S}$-structure, si $s \geq 2$.*

Dans le quatrième chapitre, on va commencer par montrer l'inexistence des hypersurfaces pseudo-parallèles dans l'espace forme de sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, puis on étudie l'existence des hypersurface parallèles dans $\mathcal{S}$-espace forme, ensuite on en déduit l'inexistence des hypersurfaces semi-parallèles dans $\mathcal{S}$-space form $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \neq s$. Dans la dernière section de ce chapitre on étudie le pseudo-parallélisme d'une hypersurface totalement φ-ombilicale qui satisfaisant à certaines conditions. En établissant les résultats suivants :

Théorème 0.0.2. *Il n'existe aucune hypersurface pseudo-parallèle dans un espace forme de Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, tel que le champ de vecteurs ξ est tangent à M et $c \neq 1$.*

Corollaire 0.0.3. *Il n'y a pas d'hypersurfaces pseudo-parallèles dans $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$, avec $n > 1$.*

Théorème 0.0.4. *Soit M une hypersurface d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, tel que la structure de champs de vecteurs tangente à M, avec $c \neq s$, alors M n'est pas parallèle.*

Théorème 0.0.5. *Il n'existe pas une hypersurface semi-parallèle dans un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec la structure des champs de vecteurs tangente à cette hypersurface et $c \neq s$.*

Corollaire 0.0.6. *Il n'y a pas d'hypersurfaces semi-parallèles dans $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$.*

Théorème 0.0.7. *Soit $\widetilde{M}^{2n+2+s}(-3s)$ un $\mathcal{S}$-space form, et M une hypersurface totalement φ-ombilicale de $\widetilde{M}^{2n+2+s}(-3s)$ avec la courbure moyenne constante $\frac{2n+1}{2n+1+s}$, alors M n'est pas pseudo-parallèle.*

Corollaire 0.0.8. *L'hypersurface $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ n'est pas pseudo-parallèle dans $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}[-3(s-1)]$.*

Le cinquième chapitre est consacré à la sous-variété Legendrienne pseudo-parallèle normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme. On sait que les sous-variété Legendriennes jouent un rôle important dans la géométrie de contact. L'étude des sous-variétés Legendriennes de la variété Sasakienne du point de vue Riemannienne a été initiée dans les années 1970. En particulier, les sous-variétés Legendriennes minimales ont attiré l'attention considérable de nombreux géomètres. D'autre part, les sous-variétés Lagrangiennes dans l'espace de formes complexes ont été profondément étudiées à partir de la décennie des années 70 [14] [24]...
Dans ce chapitre on étudie les conditions nécessaires de cette sous-variété pour être semi-parallèle, totalement géodésique ou minimale. On obtient ces résultats :

Proposition 0.0.9. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne pseudo-parallèle d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$. S'il y a une autre fonction lisse L' satisfait* (5.7) *, alors $L = L'$ au moins sur $M - K$, où $K = \{p \in M/\sigma_p = 0\}$.*

Proposition 0.0.10. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate et pseudo-parallèle d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, alors pour tout champ de vecteurs $X, Y \in TM$ on a*

$$R(X,Y)\varphi H = L\{g(\varphi H, X)Y - g(\varphi H, Y)X\},$$

où H est un vecteur de courbure moyenne.

Théorème 0.0.11. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \leq s$, alors M^n est pseudo-parallèle si et seulement si elle est semi-parallèle ou totalement géodésique.*

Théorème 0.0.12. *Soit M^n $(n > 1)$ une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$. Si M^n est pseudo-parallèle, alors $L = \frac{c+3s}{4}$ ou M est minimale.*

Corollaire 0.0.13. *Soit M^n $(n > 1)$ une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-space forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec $c \neq -3s$. Si M^n est semi-parallèle alors elle est minimale.*

Corollaire 0.0.14. *Soit M^n $(n > 1)$ une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec $c < -3s$. Si M^n est semi-parallèle alors elle est totalement géodésique.*

Corollaire 0.0.15. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \neq -3s$. Si M^n est semi-parallèle, alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

i) *M^n est totalement géodésique.*

ii) *Le tenseur de Ricci $S = \frac{1}{4}(n-1)(c+3s)g$.*

iii) *La courbure scalaire $\rho = \frac{1}{4}n(n-1)(c+3s)$.*

Dans la dernière section de ce chapitre on s'intéresse à un autre type de pseudo-parallélisme, à savoir, Ricci pseudo-parallèle généralisée et on obtient ce Théorème

Théorème 0.0.16. *Soient $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ $(n > 1)$ un $\mathcal{S}$-espace forme de courbure φ-sectionelle constante c et M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate de $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, $(c \neq -3s)$. Si M^n est Ricci pseudo-parallèle généralisée de $\widetilde{M}$, alors M^n est minimale ou $L = \frac{1}{n-1}$.*

Les sous-variétés invariantes pseudo-parallèles d'une $\mathcal{S}$-variété font l'objet du sixième (et le dernier) chapitre. On commence par rappeler les définitions et les propriétés fondamentales associées aux variétés invariantes d'une $\mathcal{S}$-variété. On donne les conditions nécessaires d'une variété invariante, pseudo-parallèle et Ricci pseudo-parallèle généralisée, pour être totalement géodésique, et on trouve ces résultats :

Théorème 0.0.17. *Soit M une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$. Alors, M est pseudo-parallèle avec $L \neq 1$ si et seulement si M est totalement géodésique.*

Alors, on peut déduire le Corollaire suivant :

Corollaire 0.0.18. *Soit M une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété. Alors M est semi-parallèle si et seulement si M est totalement géodésique.*

Théorème 0.0.19. *Soit M une sous-variété invariante de dimension $2m+s$ d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$. Alors, M est Ricci pseudo-parallèle généralisée avec $L \neq \frac{1}{2m}$ si et seulement si M est totalement géodésique.*

Théorème 0.0.20. *Une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété satisfait $Q(\sigma, R) = 0$ si et seulement si elle est totalement géodésique.*

Théorème 0.0.21. *Une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété satisfait $Q(S, \sigma) = 0$ si et seulement si elle est totalement géodésique.*

En fin, au vu de nos résultats et le Théorème 6.2.6.(Théorème 4.3 dans [65]), on peut affirmer ce qui suit :

Corollaire 0.0.22. *Soit M une sous-variété invariante de dimension $2m+s$ d'une $\mathcal{S}$-variété. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est parallèle.*
2. *M est semi-parallèle.*
3. *M est pseudo-parallèle, à condition de $L \neq 1$.*
4. *M est Ricci pseudo-parallèle généralisée, à condition de $L \neq \frac{1}{2m}$.*
5. *M satisfait la condition $Q(\sigma, R) = 0$.*
6. *M satisfait la condition $Q(S, \sigma) = 0$.*
7. *M est totalement géodésique.*

Les résultats obtenus dans ce travail seront publiés dans l'article [5] et d'autres soumis pour publication.

Chapitre 1

Introduction à la géométrie de sous-variété

Ce chapitre est consacré à des rappels de notions fondamentales utiles pour la suite. Il s'agit de présenter des objets de base en géométrie de sous-variété. On introduit dans la première partie les bases de la variété Riemannienne, notamment les différents types de tenseurs et courbures. Dans la deuxième partie, on rappelle les définitions et notions classiques sur les sous-variétés Riemanniennes. Pour un traitement détaillé de ces thèmes, le lecteur pourra consulter les références suivantes [1, 13, 15, 16, 71, 38].

1.1 Variété Riemannienne

1.1.1 Espace Tangent

Définition 1.1.1. *Soit M une variété différentiable et soit $p \in M$. Une application $A : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, notée $A[\,]$, est appelée une dérivation en p si elle satisfait les règles suivantes pour $f, g \in C^\infty(M)$:*

1. $A[f+g] = A[f] + A[g]$,
2. $A[fg] = A[f]g(p) + f(p)A[g]$,
3. *f constante au voisinage de $p \Longrightarrow A[f] = 0$.*

L'ensemble de toutes les dérivations en p s'appelle l'espace tangent de M en p. Il est noté $T_p(M)$. Par définition, un vecteur tangent de M en p est un membre de $T_p(M)$.

Remarque 1.1.2.
1. *$T_p(M)$ est un espace vectoriel de dimension n.*
2. *Soit (U, φ) une carte locale au point $p \in M$ et $\varphi(p) = (x^1, x^2, ..., x^n)$ les coordonnées locales au voisinage de p. Les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}/_p$ forment une base de $T_p(M)$.*
3. *$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$ est appelé le fibré tangent de M.*
4. *On appelle $T_p^*(M)$ l'espace cotangent à M en p. On sait que localement $(\frac{\partial}{\partial x^i}/_p)$ est une base de T_pM, donc on note par $(dx^i/_p)$ sa base dual et on a $< dx^i/_p, \frac{\partial}{\partial x^i}/_p >= \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_{ij}$*

où δ_{ij} est le symbole de Kröneker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j\,. \end{cases}$$

5. *$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*(M)$ est appelé le fibré cotangent à M.*

Définition 1.1.3. *(Champ de vecteurs).*
On appelle section de $T(M)$ ou champ de vecteurs sur M toute application $X : M \longrightarrow T(M)$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Où π est une projection canonique $\pi : T(M) \longrightarrow M$.

On note $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.
Sur une carte locale (U_i, φ_i) de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, un champ de vecteurs a pour expression

$$X_i(p) = \sum_{k=1}^{n} f_k(p)\frac{\partial}{\partial x_k}(p)\,,$$

où les f_k sont des fonctions de classe C^∞ sur U_i.

Définition 1.1.4. *(Crochet de Lie).*
Soit M une variété différentable. Le crochet de Lie noté $[,]$ est défini par $[X,Y] = XY - YX$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$[,]$ est bilinéaire et antisymétrique.*
2. *$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

1.1.2 Tenseurs et formes différentielles

Définition 1.1.5. *(Tenseur).*
Pour tout $p \in M$, on définit l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)}(M) = \underbrace{T_p(M) \otimes ... \otimes T_p(M)}_{s\,fois} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes ... \otimes T_p^*(M)}_{r\,fois}.$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}(M)$ est un tenseur de type (s,r) au dessus de p.
Dans une base associée à coordonnées (x^i) au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{/p} = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1}_{/p} \otimes ... \otimes dx^{j_r}_{/p}.$$

Nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^{(s,r)}(M) = \bigcup_{p\in(M)} T_p^{(s,r)}(M),$$

qui est un fibré au dessus de M, le *fibré des tenseurs de type* (s,r).

Définition 1.1.6. *(Champ de tenseurs).*
La section C^∞ de fibré $T^{(s,r)}(M)$ est appelée champ de tenseurs de type (s,r). Un champ de tenseurs T de type (s,r) s'écrit donc localement, au dessus d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i)

$$T = T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r} .$$

Définition 1.1.7. *(r-forme).*
Une r-forme différentielle (ou plus brièvement r-forme) sur M est un champ tensoriel de type $(0,r)$ complètement antisymétrique. Nous noterons $\Omega^r(M)$ l'espace vectoriel de ces r-formes. Pour $r=0$, nous avons $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Pour $r=1$, nous retrouvons les 1-formes différentielles. Pour $r > n$ (n dimension de M), nous avons $\Omega^r(M) = \{0\}$.
Une r-forme différentielle est donc une application $\mathfrak{F}(M)$-multilinéaire antisymétrique de $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)$ dans $\mathfrak{F}(M)$.

Expressions locales

Si dx^i est une base locale des r-formes différentielles, au dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i).
Toute r-forme ω s'écrit, au dessus de U,

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} .$$

Où les $\omega_{i_1 \dots i_r}$ sont des fonctions $U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 1.1.8. *En cas particuliers, on a*

- $T^{(0,0)}(M) = C^\infty(M)$ *: fonctions de classe* C^∞.
- $T^{(1,0)}(M) = \mathfrak{X}(M)$ *: champs de vecteurs.*
- $T^{(0,1)}(M) = \Omega^1(M)$ *: 1-formes différentielle.*

1.1.3 Variété Riemannienne

Définition 1.1.9. *(Connexion).*
Une connexion linéaire ∇ sur une variété différentiable est une application :

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \,;\, (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y \text{ vérifiant :}$$

1. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
2. $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$.
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.
4. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et f une fonction différentiable.

Exemple 1.1.10. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordoonnèe sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, on définit*

$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ *et*

$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *par* $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} (XY^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On vérifie aisément que ∇ *satisfait les conditions 1,2,3,4 d'une connexion, cette connexion* ∇ *sur* $\mathbb{R}^n$ *est connue sous le nom de connexion Euclidienne.*

Définition 1.1.11. *(La dérivée covariante d'un tenseur)*
Soit T *un tenseur de type* $(0, r)$ *sur une variété Riemannienne* M*. La dérivée covariante* ∇T *est un tenseur de type* $(0, r+1)$ *défini par*

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = X(T(Y_1, ..., Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r) \,.$$

Si le tenseur T *est de type* $(1, r)$ *la dérivée covariante de* T *est définie par*

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, ..., Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r) \,,$$

pour tout $X, Y_1, ..., Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Définition 1.1.12. *(Torsion).*
Soient M *une variété différentiable et* ∇ *une connexion sur* M*. La torsion de* ∇ *est le tenseur* T *de type (1,2) sur* M *tel que pour tous les champs de vecteurs* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *:*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Définition 1.1.13. *(Métrique Riemannienne).*
Soit M *une variété différentiable de dimension* n*, une métrique Riemannienne sur* M *est un champ de tenseurs de type* $(0, 2)$ *tel que pour tout* $p \in M$*,* g *est une forme bilinéaire, symétrique, definie positive et non- degénérée sur* $T_p(M)$*.*

Remarque 1.1.14. *Dans un système de coordonnées locales* $(x^1, ..., x^n)$*, les composantes de* g *sont* $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$*.*

Définition 1.1.15. *(Variété Riemannienne).*
Une variété différentiable M *munie d'une métrique Riemannienne* g *est dite variété Riemannienne et est notée* (M, g)*.*

Définition 1.1.16. *i) Une connexion* ∇ *sur une variété Riemannienne* (M, g) *vérifiant :*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

est dite compatible avec la métrique g*.*

ii) Une connexion ∇ *sur une variété différentiable* M *est dite symétrique si :*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \,,$$

c'est à dire la torsion de ∇ *est nul.*
Où, $[X, Y]$ *est le crochet de Lie des champs de vecteurs* X, Y*.*

Théorème 1.1.17. *(Connexion de Levi-Civita).*
Soit (M, g) une variété Riemannienne, il existe une unique connexion ∇ sur M qui vérifie :

1. *∇ est compatible avec g.*
2. *∇ est symétrique.*

La connexion unique ∇ sur une variété Riemannienne (M, g) satisfaisant (1) et (2) est appelée la connexion de Levi-Civita.

Définition 1.1.18. *(Champ de Killing).*
Soit (M, g) une variété Riemannienne. Un champ de vecteurs X sur M est un champ de Killing si $L_X g = 0$ où L_X indique la dérivée de Lie dans la direction X et donc

$$X.g(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]).$$

Proposition 1.1.19. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, X un champ de Killing si et seulement si*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0,$$

pour tout $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.1.4 Courbures sur une variété Riemannienne

Dans tout qui suit, on considère que les variétés Riemanniennes munies de la connexion de Levi-Civita.

Définition 1.1.20. *(Tenseur de courbure).*
On appelle tenseur de courbure d'une connexion ∇, le champ de tenseurs R de type (1,3) défini par :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposition 1.1.21. *Pour tout $p \in M$ et tout $X, Y, Z, W \in T_p(M)$ on a :*

1. *$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ (Antisymétrique).*
2. *$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (Identité de Bianchi).*
3. *$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.*

Définition 1.1.22. *(Courbure sectionnelle)*
Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $p \in M$ et pour tout couple de vecteurs linéairement indépendants $X, Y \in T_p(M)$, on définit la courbure sectionnelle de M, notée $K(X, Y)$ par :

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{X \wedge Y},$$

oú $X \wedge Y = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$.

Proposition 1.1.23. *La courbure sectionnelle $K(X, Y)$ ne dépend que du plan α engendré par $X, Y \in T_p(M)$.*

Proposition 1.1.24. *Le tenseur de courbure est entièrement déterminé par les courbures sectionnelles.*

-On dit que la variété Riemannienne (M,g) est de courbure constante c si $K(\alpha)=c$ pour tout plan $\alpha \in T_p(M)$ et tout $p \in M$.

Proposition 1.1.25. *(M,g) est de courbure sectionnelle constante c si et seulement si le tenseur de courbure satisfait :*

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}\,,$$

pour tout $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Exemple 1.1.26. *On considère $(\mathbb{R}^n, g)$, où g est le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^n$ défini par :*
$g(X,Y)=\sum_{i=1}^n g^i f^i$ *où* $X=\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $g^i, f^i \in C^\infty(M)$.
Alors selon la connexion Euclidienne définie dans exemple 1.1.10, on peut vérifier que ∇ est une connexion Riemannienne, et le tenseur de courbure sera donné par :

$$R(X,Y)Z = \sum_{i=1}^n XY(h^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^n YX(h^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^n [X,Y](h^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = 0\,.$$

Où $Z=\sum_{i=1}^n h^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Ainsi on obtient $g(R(X,Y)Z,W)=0, \quad X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que $K(\alpha)=0$, pour toute section plan α de $\mathbb{R}^n$ et donc $(\mathbb{R}^n,g)$ est à courbure sectionnelle nulle.

Définition 1.1.27. *(Courbure de Ricci et courbure scalaire)*
Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée sur une variété Riemannienne (M,g). La courbure de Ricci de M est un tenseur de type $(0,2)$ défini par :

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i,X)Y,e_i), \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

et la courbure scalaire τ de M est la trace de la courbure de Ricci, τ est definie par :

$$\tau = \sum_{j=1}^n S(e_j,e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n g(R(e_i,e_j)e_j,e_i)\,.$$

Corollaire 1.1.28. *Soit (M^n,g) une variété Riemannienne à courbure sectionnelle constante c, alors on a*

$$\tau = n(n-1)c.$$

Définition 1.1.29. *(Variété d'Einstein)*
Une variété Riemannienne M^n est dite variété d'Einstein si pour tout $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$;

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y)\,,$$

où $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. Si $\dim M > 2$, λ est une constante.

Remarque 1.1.30. *Si (M,g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante, alors M est une variété d'Einstein.*

1.1.5 Géodésique et transport parallèle

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $\gamma(t)$, $t \in I$ une courbe sur la variété M. On note par $\gamma'(t)$ le vecteur vitesse de γ.

Définition 1.1.31. *Soit $v(t)$ un vecteur tangent à la variété M en $\gamma(t)$, $\forall t \in I$. On dit que $v(t)$ est parallèle le long de $\gamma(t)$ si*

$$\nabla_{\gamma'(t)} v(t) = 0\,.$$

Définition 1.1.32. *(Géodésique)*
Une courbe γ est dite géodésique si son vecteur vitesse est parallèle le long de $\gamma(t)$, c-à-d,

$$\nabla_{\gamma'}\gamma'\backslash_t = 0, \quad \forall t \in I$$

Géométriquement, une courbe sur M est une géodésique, si celle-ci transport parallèlement son vecteur vitesse le long d'elle même.

Proposition 1.1.33. *Soit M une variété munie d'une connexion, $p \in M$ et $X_p \in T_pM$. Alors, il existe une unique géodésique maximale γ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(t) = X_p$.*

Définition 1.1.34. *(Transport parallèle)*
Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe dans une variété Riemannienne M. Etant donné un vecteur tangent $v \in T_{\gamma(0)}M$, on apppelle transport parallèle de v le long de γ, le champ de vecteurs $t \longrightarrow V(t)$ le long de γ solution de l'équation différentielle

$$\nabla_{\gamma'(t)} V(t) = 0\,,$$

tel que $V(0) = v$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en V'. Il y a donc une unique solution $t \longrightarrow V(t)$.

1.2 Sous-variété Riemannienne

Dans cette section on définit la sous-variété, l'immersion isométrique et les fibrés tangents et normals d'une sous-variété. Aprés on considère la dérivée convariante et la seconde forme fondamentale pour une sous-variété et les formules de Gauss et de Weingarten. Ensuite, on donne les équations de Gauss, Codazzi et Ricci.

Définition 1.2.1. *(Application tangente).*
Soient les variétés différentiables M, M' (pas nécessairement de mêmes dimensions). $D \subset M$ un ouvert et $\phi : D \longrightarrow M'$ une application différentiable. Pour tout $p \in D$ nous définissons une application

$$d\phi = d_p\phi : T_p(M) \longrightarrow T_q(M'), \qquad q = \phi(p),$$

en posant

$$(d_p\phi(A))[f] = A[f \circ \phi], \qquad f \in \mathfrak{F}_pM'.$$

L'application $d\phi$ s'appelle l'application tangente, où $\mathfrak{F}_pM'$ l'ensemble des fonctions différentiables en p.

Définition 1.2.2. *Soit* $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ *une application différentiable, alors*

- f *est appelée une immersion si* $d_p f : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(\widetilde{M})$ *est injective pour tout* $p \in M$. *Dans ce cas* $dim M \leq dim\widetilde{M}$ *et* $rg\, f = dim M$ *en tout point* p *de* M.

- f *est appellée une submersion si* $d_p f : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(\widetilde{M})$ *est surjective pour tout* $p \in M$. *Dans ce cas* $dim M \geq dim\widetilde{M}$ *et* $rg\, f = dim\widetilde{M}$.

- f *est appelée un plongement si* f *est une immersion injective tel que* $f : M \longrightarrow f(M)$ *est un homeomorphisme pour la topologie induite de celle de* $\widetilde{M}$ *sur* $f(M)$, *i.e :* $\forall \theta \in \tau_M, \exists \overline{\theta} \in \tau_{\widetilde{M}}$ *tel que* $f(\theta) = \overline{\theta} \bigcap f(M)$.

Définition 1.2.3. *Soient* M *une variété de dimension* n , $\widetilde{M}$ *une variété Riemannienne de dimension* $n+m$ *et* $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ *une immersion, alors la différence entre les deux dimensions (dans ce cas* m*) est définie comme la codimension de l'immersion* f *et* M *est dite sous-variété immergée de* $\widetilde{M}$.
Si f *est un plongement,* M *(ou l'image* $f(M)$*) est dite sous-variété plongée de* $\widetilde{M}$.

Remarque 1.2.4. *[71] Quand il n'ya pas de danger de confusion, on dit simplement que* M *est une sous-variété de* $\widetilde{M}$, *au lieu que* M *est une sous-variété immergée ou une sous-variété plongée de* $\widetilde{M}$.

Définition 1.2.5. *Soient* $(\widetilde{M}, g')$ *et* (M, g) *deux variétés Riemanniennes et* $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ *une immersion. Si la métrique sur* $\widetilde{M}$ *induite une métrique sur* M *pour tout* $X, Y \in T_p(M)$, $p \in M$ *:*

$$g(X, Y) = g'(d_p f(X), d_p f(Y)) \,,$$

alors f *est dite immersion isométrique.*

Remarquons qu'une immersion isométrique induite sur M une structure Riemannienne à partir de celle de $\widetilde{M}$ donnée par la relation précédente.
On peut définir le fibré normal pour une sous-variété M dans une variété Riemannienne $\widetilde{M}$, en considérant l'espace tangent de $\widetilde{M}$.

Définition 1.2.6. *Soit* M *une sous variété dans une variété Riemannienne* $\widetilde{M}$. *Alors on peut décomposer l'espace tangent a la variété* $\widetilde{M}$ *en deux parties dites tangente et normale :*

$$T_p(\widetilde{M}) = T_p(M) \oplus T_p(M)^{\perp} \,.$$

Remarque 1.2.7. *On peut localement décomposer le fibré tangent* $T(\widetilde{M})$ *de* $\widetilde{M}$, *en le fibré tangent* $T(M)$ *défini par* $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ *et le fibré normal* $T(M)^{\perp}$ *défini par* $T(M)^{\perp} = \bigcup_{p \in M} T_p(M)^{\perp}$.
On peut également considérer un champ de vecteurs $\overline{X}$ *dans l'espace ambiant* $\widetilde{M}$ *comme des extensions de champ de vecteurs* X *dans la sous variété* M.

1.2.1 Différentiation covariante et la seconde forme fondamentale

On considère la variété Riemannienne $\widetilde{M}$ avec une métrique g'. Alors la sous-variété M est aussi une variété Riemannienne avec une métrique induite g, donnée par :

$$g(X,Y) = g'(X,Y)\,.$$

Maintenant, on définit la dérivée covariante $\nabla_X Y$ pour une sous-variété M en termes de variété $\widetilde{M}$ avec la dérivée covariante $\widetilde{\nabla}_X Y$.

Soit M une sous variété de dimension n dans une variété Riemannienne $\widetilde{M}$ de dimension $n+m$. La connexion Riemannienne sur $\widetilde{M}$ est $\widetilde{\nabla}$.
Puisque M a une codimension m en tout point, on peut choisir m champs de vecteurs normaux $\zeta_1,...,\zeta_m$ du fibré normal $T(M)^{\perp}$.
On peut supposer que $\zeta_1,...,\zeta_m$ sont orthonormés pour tout $p \in M$.
On définit la différentiation covariante en point p sur la sous-variété M, en séparant la composantes tangente et normale comme suit :

$$(\widetilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + \sigma_p(X,Y)\,. \tag{1.1}$$

Où $(\nabla_X Y)_p \in T_p(M)$ et $\sigma_p(X,Y) \in T_p(M)^{\perp}$.

On définit ∇ comme *la connexion induite* sur M. Elle peut être démontrée que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante sur M.

On définit aussi l'application bilinéaire symétrique

$$\sigma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}\,,$$

comme *la seconde forme fondamentale* de M.

En termes d'un particulier $p \in M$:
$\sigma_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow T_p(M)^{\perp}$ est *la seconde forme fondamentale* de M en p.

Plus généralement, si M est une sous-variété de codimension m (i.e. une sous-variété dans $\widetilde{M}$ de dimension $n+m$).
Alors on peut choisir m champs de vecteurs orthonormés $\zeta_1,...,\zeta_m$ et dans ce cas, on peut exprimer σ en termes de h de la manière suivante :

$$\sigma(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} h^i(X,Y)\zeta_i\,.$$

De la même façon, on peut séparer la dérivée covariante d'un champ de vecteurs normal ζ sur M, $\widetilde{\nabla}_X \zeta$ en composante tangente et normale :

$$(\widetilde{\nabla}_X \zeta)_p = -(A_\zeta(X))_p + (\nabla^{\perp}_X \zeta)_p\,. \tag{1.2}$$

Ici, $A_\zeta(X)$ est la composante tangente de $\widetilde{\nabla}_X \zeta$ et $\nabla^{\perp}_X \zeta$ est la composante normale.

Définition 1.2.8. *L'application* $(X,\zeta) \in T_p(M) \times T_p(M)^{\perp} \longrightarrow A_{\zeta}(X) \in T_p(M)$ *est bilinéaire et donc* $(A_{\zeta}(X))_p : T_p(M) \times T_p(M)^{\perp} \longrightarrow T_p(M)$ *ne dépends que de* X *et* ζ *en* p *.*
L'application A *est appelée l'opérateur de Weingarten.*

La proposition suivante nous donne la relation entre $A_{\zeta}(X)$ et la seconde forme fondamentale σ :

Proposition 1.2.9. *Pour chaque champ de vecteurs normal* ζ *sur* M *on a*

$$g(A_{\zeta}(X), Y) = g(\sigma(X,Y), \zeta)\,. \tag{1.3}$$

On peut également définir l'opérateur $\nabla^{\perp}_X$ comme suit :

Définition 1.2.10. *L'application* $(X,\zeta) \in T_p(M) \times T_p(M)^{\perp} \longrightarrow \nabla^{\perp}_X(\zeta) \in T_p(M)^{\perp}$ *définit la dérivée covariante de* $\zeta \in T_p(M)^{\perp}$ *dans la direction* X*, où* $\nabla^{\perp}$ *est la connexion Riemannienne de l'espace normal* $TM^{\perp}$ *.*

Les formules (1.1) et (1.2) sont connues comme *formule de Gauss* et *formule de Weingarten* respectivement :

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \qquad \text{(La formule de Gauss),}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \zeta = -A_{\zeta}(X) + \nabla^{\perp}_X \zeta \qquad \text{(La formule de Weingarten).}$$

Remarque 1.2.11. *On considère les formules de Gauss et Weingarten pour une hypersurface.*
Une hypersurface M *dans* $\widetilde{M}$ *a de codimension* 1 *et donc a un unique vecteur unitaire normal* ζ*, alors* $g(\zeta,\zeta) = 1$*. On a la dérivée pour obtenir* $g(\widetilde{\nabla}_X \zeta, \zeta) = 0$ *et donc* $g(\nabla^{\perp}_X \zeta, \zeta) = 0$*. Ainsi* $\nabla^{\perp}_X \zeta = 0$*.*
D'où la formule de Weingarten devient $\nabla_X \zeta = -A_{\zeta}(X)$ *.*

1.2.2 Équations de Gauss, Codazzi et Ricci

Soit M^n une sous-variété dans une variété Riemannienne $\widetilde{M}^{n+m}$.
On note par $\widetilde{R}$ (respect... R) le tenseur de courbure Riemannienne associée à la dérivée covariante $\widetilde{\nabla}$ (respect...∇).
D'aprés les formule de Gauss et de Weingarten, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \sum h^i(Y,Z) A_i(X) \\
&+ \sum \{Y.h^i(X,Z) - \nabla_Y h^i(X,Z) - h^i(\nabla_Y X, Z)\}\zeta_i \\
&+ \sum h^i(Y,Z) \nabla^{\perp}_X \zeta_i\,,
\end{aligned}$$

Où

$$X.h^i(Y,Z) = \nabla_X h^i(Y,Z) + h^i(\nabla_X Y, Z) + h^i(Y, \nabla_X Z)\,.$$

Et $\widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X)Z$ donne la même équation que ci-dessus en interchangeant X et Y.
Et on applique la formule de Gauss pour $\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$ qui sera donnée par :

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \sum\{h^i(\nabla_X Y, Z) - h^i(\nabla_Y X, Z)\}\zeta_i\,.$$

D'où l'expressions de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ en termes de connexion induite ∇ et la seconde forme fondamentale est :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \sum\{(\nabla_X h^i)(Y,Z) - (\nabla_Y h^i)(X,Z)\}\zeta_i \\ &+ \sum h^i(X,Z)A_i(Y) - \sum h^i(Y,Z)A_i(X) \\ &+ \sum h^i(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\zeta_i - \sum h^i(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\zeta_i\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La composante tangente de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ d'aprés l'équation ci-dessus est égale à :

$$R(X,Y)Z + \sum h^i(X,Z)A_i(Y) - \sum h^i(Y,Z)A_i(X)$$

Soit W un vecteur tangent à M. Donc on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) + \sum h^i(X,Z)g(A_i(Y),W) \\ &- \sum h^i(Y,Z)g(A_i(X),W) \\ &= R(X,Y,Z,W) + \sum h^i(X,Z)h^i(Y,W) \\ &- \sum h^i(Y,Z)h^i(X,W) \\ &= R(X,Y,Z,W) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - g(\sigma(Y,Z),\sigma(X,W))\,.\end{aligned}$$

Définition 1.2.12. *(Equation de Gauss)*
L'équation de Gauss pour une sous-variété M d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}$ est la composante tangente de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ et peut être exprimée comme suit :

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - g(\sigma(Y,Z),\sigma(X,W))\,. \tag{1.5}$$

Où X,Y,Z,W sont des vecteurs tangents à M.

Maintenant, on considère la composante normale de l'équation (1.4), est égale à :

$$\sum\{(\nabla_X h^i)(Y,Z) - (\nabla_Y h^i)(X,Z)\}\zeta_i + \sum h^i(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\zeta_i - \sum h^i(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\zeta_i\,.$$

On peut simplifier cette expression, en définissant la dérivée covariante de seconde forme fondamentale $\widetilde{\nabla}_X\sigma$ comme suit :

$$\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)\,, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X(\sum h^i(Y,Z)\zeta_i) - \sum\{h^i(\nabla_X Y, Z) + h^i(Y, \nabla_X Z)\}\zeta_i \\
&= \sum X.h^i(Y,Z)\zeta_i + \sum h^i(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\zeta_i \\
&- \sum\{h^i(\nabla_X Y, Z) + h^i(Y, \nabla_X Z)\}\zeta_i \\
&= \sum(\nabla_X h^i)(Y,Z)\zeta_i + \sum h^i(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\zeta_i\,.
\end{aligned}$$

On voit alors que la composante normale de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ peut être exprimée par :

$$\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X,Z)\,.$$

Cela justifie la définition de l'équation de Codazzi ;

Définition 1.2.13. *(Equation de Codazzi)*
L'équation de Codazzi pour une sous-variété M d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}$ est la composante normale de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ et peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X,Z) &= \sum\{(\nabla_X h^i)(Y,Z) - (\nabla_Y h^i)(X,Z)\}\zeta_i \\
&+ \sum h^i(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\zeta_i - \sum h^i(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\zeta_i\,.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Définition 1.2.14. *(Equation de Ricci)*
L'équation de Ricci pour une sous-variété M^n d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}^{n+p}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y,\zeta,\vartheta) &= R^{\perp}(X,Y,\zeta,\vartheta) + g(A_\vartheta A_\zeta(X),Y) - g(A_\zeta A_\vartheta(X),Y) \\
&= R^{\perp}(X,Y,\zeta,\vartheta) - g([A_\zeta, A_\vartheta]X,Y)\,.
\end{aligned}$$

Où ζ ,ϑ sont des vecteurs normaux, $R^{\perp}(X,Y)\zeta = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\zeta - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\zeta - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\zeta$,
et $R^{\perp}(X,Y,\zeta,\vartheta) = g(R^{\perp}(X,Y)\zeta,\vartheta)$.

Proposition 1.2.15. *Si $\widetilde{M}$ est un espace de courbure constante k, alors l'équation de Codazzi devient :*

$$\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) = \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X,Z)\,.$$

Preuve . On sait que $\widetilde{R}(X,Y)Z$ est tangent à M pour tout vecteurs X,Y,Z dans M. Cela implique que sa composante normale est nulle.
■

Proposition 1.2.16. *Si $\widetilde{M}$ est un espace de courbure constante k, alors l'équation de Ricci devient :*

$$R^{\perp}(X,Y,\zeta,\vartheta) = g(A_\zeta A_\vartheta(X),Y) - g(A_\vartheta A_\zeta(X),Y)\,.$$

Preuve . Puisque $\widetilde{R}(X,Y)Z$ est tangent à M pour tout vecteurs X,Y,Z dans M. Donc le produit scalaire de $\widetilde{R}(X,Y)\zeta$ avec un vecteur normal ϑ est nul. ■

1.3 Quelques classes importantes des sous-variétés

Dans cette section on va définir quelques classes importantes de sous-variété M d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}$, comme les sous-variétés minimales, totalement géodésiques et totalement ombilicales, pour cette section on pourra consulter les ouvrages [1, 15, 16, 38].

1.3.1 Sous-variété minimale

Définition 1.3.1. *Le vecteur de courbure moyenne est défini par* $H = (\frac{1}{dimM})Tr\,(\sigma)$, *où* $Tr\,\sigma = \sum_{i=1}^{dimM} \sigma(e_i, e_i)$ *pour une base orthonormée* $\{e_i\}$ *d'un espace tangent à* M.

Définition 1.3.2. *Une sous-variété* M *est dite minimale si* $H = 0$, *ceci équivaut à trace* $A_V = 0$, *pour tout champ de vecteurs* V *normal à* M.

Définition 1.3.3. *Soit* ε *un champ de vecteurs unitaire dans la direction de* H, *c'est à dire*

$$H = \mu\varepsilon$$

telle que $\mu = |H|$ *la courbure moyenne.* ε *est appelé vecteur de courbure moyenne normalisée (the normalized mean curvature vector).*

1.3.2 Sous-variété totalement géodésique

Définition 1.3.4. *Une sous-variété* M *de* $\widetilde{M}$ *est totalement géodésique en* $p \in M$, *si chaque géodésique en* p *dans l'espace ambiant* $\widetilde{M}$, *tangent à* M *est contenue dans* M.
Si M *est totalement géodésique pour tout* p, *alors* M *est dite sous-variété totalement géodésique.*

Théorème 1.3.5. *Une sous-variété* M *dans* $\widetilde{M}$ *est totalement géodésique si est seulement si la seconde forme fondamentale* σ *est identiquement nulle i.e.* $\sigma(X, Y) = 0$ *pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Remarque 1.3.6. *Toute sous-variété totalement géodésique d'une variété Riemannienne est minimale.*

1.3.3 Sous-variété totalement ombilicale

Définition 1.3.7. *Soit* M^n *une sous-variété dans une variété Riemannienne* $\widetilde{M}^{n+m}$, *pour une section normale* ω *sur* M. *Si* A_ω *est une matrice diagonale proportionelle partout à la transformation identité* I *:*

$$A_\omega = \rho I\,,$$

pour certaines fonctions ρ. *Alors la sous-variété* M *est dite ombilicale par rapport à* ω.
Si M *est ombilicale par rapport à toute section normale local dans* M, *alors* M *est dite sous-variété totalement ombilicale.*

Proposition 1.3.8. *Soit M^n une sous-variété dans une variété Riemannienne $\widetilde{M}^{n+m}$, si M est totalement ombilicale alors*

$$\sigma(X,Y) = g(X,Y).H$$

Où H est le vecteur de courbure moyenne.

D'aprés l'équation de Gauss on a

Remarque 1.3.9. *Si M est une sous-variété totalement ombilicale dans une variété $\widetilde{M}$ de courbure constante, alors M est aussi à courbure constante.*

Chapitre 2

Pseudo-parallélisme au sens de Deszcz

Dans ce chapitre, on donne les définitions de pseudo-symétrie, semi-symétrie et localement symétrie d'une variété Riemannienne et ses notions extrinsèques (pseudo-parallélisme, semi-parallélisme et parallélisme, respectivement) et l'interprétation géométrique de ces notions. Enfin, on donne la définition d'un autre type de pseudo-parallélisme à savoir Ricci pseudo-parallèle généralisée (pour plus de détail cf. [4, 13, 25, 19, 20, 21, 33, 34, 36, 58, 60, 61, 62]).

2.1 Pseudo-symétrie

Dans cette section on considère une variété Riemannienne $(\widetilde{M}, g)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension n, $n \geq 3$, on note par $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Livi-Civita sur $(\widetilde{M}, g)$ et $\widetilde{R}$ l'opérateur de courbure sur $\widetilde{M}$, défini par

$$\widetilde{R}(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\,.$$

Définition 2.1.1. *Une variété Riemannienne $(\widetilde{M}, g)$ est dite localement symétrique si*

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{R} = 0\,.$$

Remarquons que, tout champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur une variété différentielle détermine une dérivation, qui commute avec les contractions (sur l'algèbre des tenseurs). Ainsi le champ de tenseurs agit comme un opérateur de dérivation sur tout champ de tenseurs T de type $(0,k)$.
Maintenant, on a besoin de définir sur une variété Riemannienne $(\widetilde{M}, g)$, un champ de tenseurs spécifique de type $(0, k+2)$ noté $Q(B,T)$, associé à deux champs de tenseurs B et T de type $(0,2)$ et $(0,k)$ respectivement par

$$\begin{aligned} Q(B,T)(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) &= ((X \wedge_B Y)\,.\,T)(X_1, X_2, ..., X_k) \\ &= -T((X \wedge_B Y)X_1, X_2, ..., X_k) - ... \\ &\quad -T(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, (X \wedge_B Y)X_k)\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tout $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, où $X \wedge_B Y$ est l'endomorphisme donné par

$$(X \wedge_B Y)Z = B(Y,Z)X - B(X,Z)Y\,,$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.
En particulier, si on pose $B = g$ dans (2.1), on obtient

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\,.$$

Où $X \wedge_g Y$ est dit endomorphisme métrique.
Dans ce qui suit, on note $(X \wedge Y)Z$ au lieu $(X \wedge_g Y)Z$.

On sait que $\widetilde{R}$ (l'opérateur de courbure sur $\widetilde{M}$) est un endomorphisme sur $\widetilde{M}$, c'est à dire un champ de tenseurs de type $(1,1)$, il agit alors comme un opérateur de dérivation sur tout champ de tenseurs T sur $\widetilde{M}$ de type $(0,k)$. Ainsi, $\widetilde{R}\,.\,T$ est un champ de tenseurs de type $(0, 2+k)$ il est déterminé par

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}\,.\,T)(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) &= (\widetilde{R}(X,Y).T)(X_1, X_2, ..., X_k)\\ &= -T(\widetilde{R}(X,Y)X_1, X_2, ..., X_k) - ...\\ &\quad -T(X_1, X_2, ..., X_{k-1}, \widetilde{R}(X,Y)X_k),\end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$\widetilde{R}(X,Y)\,.\,T = \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y T) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X T) - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}T\,.$$

Posons $T = \widetilde{R}$ dans (2.2), on obtient l'expression définissant le champ de tenseurs de type $(0,6)$. Donc $\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R}$ s'obtient en dérivant le second $\widetilde{R}$, qui est le tenseur de courbure de type $(0,4)$, en utilisant l'opérateur de courbure $\widetilde{R}$. Le tenseur $\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R}$ jouit des mêmes propriétés de symétrie que celles du tenseur de courbure.

Définition 2.1.2. *Une variété Riemannienne $\widetilde{M}$, de dimension $n \geq 3$ est dite pseudo-symétrique (dans le sens de Deszcz), si les champs de tenseurs de type $(0,6)$ $\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R}$ et $Q(g, \widetilde{R})$ sont linéairement dépendants, c'est à dire s'il existe une fonction*

$$L_{\widetilde{R}} : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

telle que

$$\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = L_{\widetilde{R}}\, Q(g, \widetilde{R})\,. \tag{2.3}$$

Soit vérifié sur $\mathcal{U}_{\widetilde{R}} = \{x \in \widetilde{M} / \widetilde{R} - (\tau/n(n-1)G \neq 0\}$, où τ est la courbure scalaire de $\widetilde{M}$ et G est un champ de tenseurs sur $\widetilde{M}$ de type $(0,4)$, défini par $G(X_1, X_2, X_3, X_4) = g((X_1 \wedge X_2)X_3, X_4)\,.$

Définition 2.1.3. *Une variété Riemannienne $(\widetilde{M}, g)$ est dite semi-symétrique si*

$$\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = 0.$$

La condition (2.3) est apparue lors de l'étude des sous-variétés totalement ombilicales des variétés semi-symétriques et aussi lors de l'étude des applications géodésiques des espaces Riemanniens sur des espaces semi-symétriques [21]. Il est clair que toute variété semi-symétrique est pseudo-symétrique, mais l'inverse est faux (en général).

On sait que chaque sous-variété totalement ombilicale, avec un champ de vecteurs de courbure moyenne parallèle est également pseudo-symétrique (ou plus généralement, dans une variété pseudo-symétrique) est également pseudo-symétrique.
En particulier, les sphères extrinsèques d'une variété Riemannienne pseudo-symétrique sont également pseudo-symétriques [21].

2.1.1 Interprétation géométrique de la pseudo-symétrie

Dans cette section on va donner l'interprétation géométrique des différents tenseurs qui apparaissent dans la définition de la pseudo-symétrie. Schouten dans [58] a étudié la variation d'un vecteur $v \in T_p\widetilde{M}$ à la suite de son transport parallèle autour d'un parallélogramme coordonné $\mathcal{P}$ de sommet p et dont les côtés tangents en p aux vecteurs linéairement indépendants x et y, sont de longueurs Δx et Δy (cf. Figure 1). En revenant au point de départ, c'est à dire p, il obtient alors un vecteur différent de v noté v^* où

$$v^* = v + [R(x,y)v]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,, \tag{2.4}$$

donc $R(x,y)v$ mesure la variation du second ordre du vecteur v aprés son transport parallèle le long d'un parallélogramme infinitésimal [58].

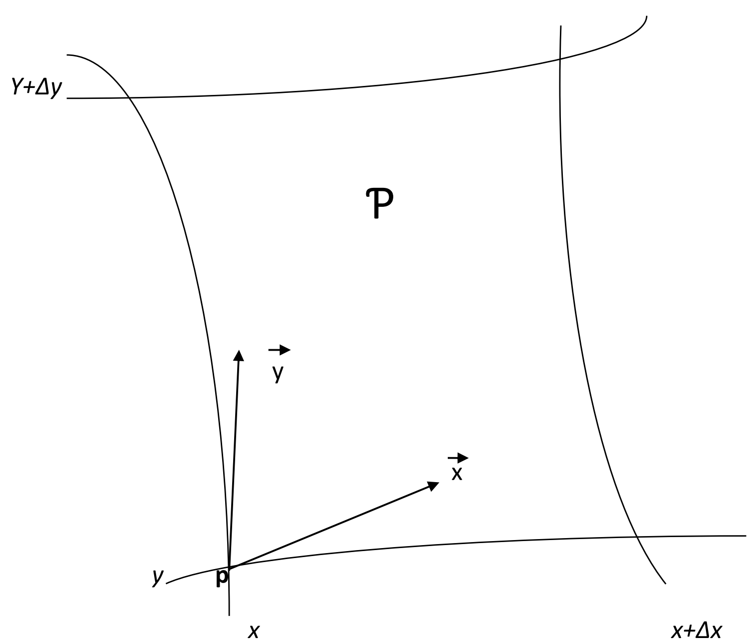

FIGURE 1. Parallélogramme infinitésimal.

Supposons maintenant que x et y soient deux vecteurs orthonormés tangents à $\widetilde{M}$ en p. Soit $\{x, y, e_3, ..., e_n\}$ une base orthonormée de $T_p\widetilde{M}$, alors tout vecteur $v \in T_p\widetilde{M}$ peut s'écrire sous la forme

$$v = g(v,x)x + g(v,y)y + \sum_{i=3}^{n} g(v,e_i)e_i\,.$$

Soit $\overline{\pi} = x \wedge y$, le plan engendré par x et y. Notons par $v_{\overline{\pi}}$ et $\overline{v}_{\overline{\pi}^T}$ les composantes du vecteur v suivant $\overline{\pi}$ et son supplémentaire orthogonal dans $T_p\widetilde{M}$, respectivement. Par une rotation d'angle $\Delta\rho$ du vecteur $v_{\overline{\pi}}$ dans le plan $\overline{\pi}$, sans quitter le point p, le nouveau vecteur $\widetilde{v}$ dont les composantes suivant $\overline{\pi}$ sont $\widetilde{v}_{\overline{\pi}}$ et $\widetilde{v}_{\overline{\pi}^T}$ est donné par

$$\widetilde{v} = v + (x \wedge y)v\Delta\rho + O^{>1}(\Delta\rho)\,, \tag{2.5}$$

ainsi $(x \wedge y)v$ mesure la variation du premier ordre du vecteur v aprés une telle rotation infinitésimale de v dans le plan $x \wedge y$.

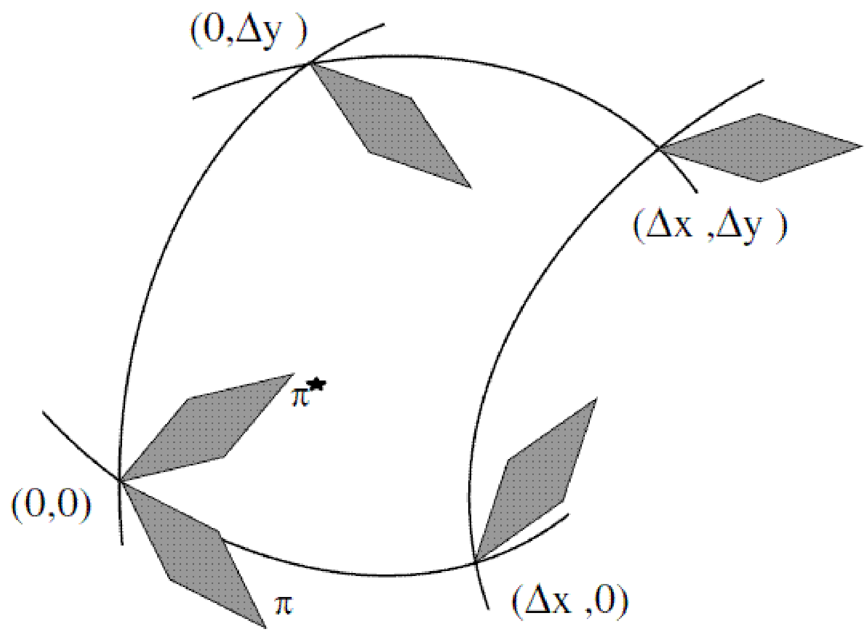

FIGURE 2. Transport parallèle d'un plan le long d'un parallélogramme $\mathcal{P}$.

Maintenant, on considère deux vecteurs linéairement indépendants v et w attachés à un point p de la variété $(\widetilde{M}, g)$ et un parallélogramme coordonné $\mathcal{P}$, de sommet p et dont les côtés sont tangents aux vecteurs x et y, et sont de longueurs Δx, Δy. Notons par $\overline{\pi} = x \wedge y$, le 2-plan tangent en p à $\widetilde{M}$, engendré par les vecteurs x et y. Par le transport parallèle des vecteurs v et w tout autour de $\mathcal{P}$ (cf. Figure 1), on obtient d'aprés (2.4), les vecteurs orthonormés

$$v^* = v + [R(x,y)v]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,$$

$$w^* = w + [R(x,y)w]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,.$$

Ainsi, $\pi^* = v^* \wedge w^*$ est le plan qui résulte par le transport parallèle du plan $\pi = v \wedge w$, (cf. Figure 2) il s'ent suit alors que

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(v^*, w^*, w^*, v^*) &= \widetilde{R}(v, w, w, v) - [(\widetilde{R} \,.\, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y)]\Delta x \Delta y \\ &\quad + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$K(p, \pi^*) = K(p, \pi) - ((\widetilde{R} \,.\, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y))\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,.$$

On a donc le Théorème suivant :[34]

Théorème 2.1.4. *Soit $\widetilde{M}$ une variété Riemannienne, p un point de $\widetilde{M}$ et $\mathcal{P}$ un parallélogramme coordonné infinitésimal de sommet p, dont les côtés sont de longueurs Δx et Δy. Soit x et y les vecteurs liés au point p et qui sont tangents aux côtés de $\mathcal{P}$. Soit $\pi^* = v^* \wedge w^*$ le plan obtenu par le transport parallèle du plan $\pi = v \wedge w$, attachés au point p tout autour de $\mathcal{P}$. Alors, une approximation du second ordre prés est donnée par :*

$$\delta_{\mathcal{P}} K(p, \pi) = (\widetilde{R} \,.\, \widetilde{R})(v, w, w, v)\Delta x \Delta y.$$

Ainsi, le $(0, 6)$-tenseur $\widetilde{R} \,.\, \widetilde{R}$ mesure la variation de la courbure sectionnelle en tout point p pour tout plan π, par le transport parallèle de celui-ci autour d'un parallélogramme infinitésimal de sommet p.

Soit $\{x, y, e_3, ..., e_n\}$ une base orthonormale de $T_p\widetilde{M}$, on considère deux vecteurs orthonormés $v, w \in T_p\widetilde{M}$, en faisant subir une rotation d'angle ε aux projections de ces derniers sur le plan $\overline{\pi} = x \wedge y$, on obtient d'aprés (2.5), les vecteurs $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ définis par

$$\widetilde{v} = v + \varepsilon(x \wedge_g y)v + O(\varepsilon^2)\,,$$

$$\widetilde{w} = w + \varepsilon(x \wedge_g y)w + O(\varepsilon^2)\,.$$

Les calculs sur la courbure sectionnelle du plan $\overline{\pi}$, nous donne

$$K(p, \overline{\pi}) = K(p, \pi) + \varepsilon Q(g, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y) + O(\varepsilon^2)\,.$$

Donc, les composantes $Q(g, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y)$ mesurent la variation de la courbure sectionnelle $K(p, \pi)$ aprés une rotation infinitésimale. Par suite, on peut donc considérer les composantes $Q(g, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y)$ comme une sorte de normalisation des composantes $(\widetilde{R} \,.\, \widetilde{R})(v, w, w, v; x, y)$.

Définition 2.1.5. *Soit $(\widetilde{M}, g)$ une variété Riemannienne de dimension n, $n \geq 3$ de courbure non constante. Soit $U = \{x \in \widetilde{M} / Q(g, \widetilde{R}) \neq 0\}$. Alors, en un point $p \in U$, un plan $\pi = u \wedge v$ de $T_p\widetilde{M}$ est dit être courbure-dépendant par rapport à un plan $\overline{\pi} = x \wedge y$ de $T_p\widetilde{M}$ si*

$$Q(g, \widetilde{R})(u, v, v, u; x, y) \neq 0.$$

Définition 2.1.6. *[34] En un point $p \in U = \{x \in \widetilde{M}/Q(g,\widetilde{R}) \neq 0\}$, soit $\pi = u \wedge v$ le plan tangent courbure-dépendant par rapport à un plan $\overline{\pi} = x \wedge y$. Alors, la courbure sectionnelle de Deszcz dite aussi la courbure sectionnelle double $L(p,\pi,\overline{\pi})$ du plan π par rapport au plan $\overline{\pi}$ au point p est définie comme un scalaire*

$$L(p,\pi,\overline{\pi}) = \frac{(\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R})(u,v,v,u;x,y)}{Q(g,\widetilde{R})(v,w,w,v;x,y)}\,.$$

Ces Définitions sont indépendantes du choix des bases de π et de $\overline{\pi}$.

Théorème 2.1.7. *[34] Une variété Riemannienne $\widetilde{M}^n$, $(n \geq 3)$ est pseudo-symétrique au sens de Deszcz si et seulement si toutes les courbures sectionnelles doubles $L(p,\pi,\overline{\pi})$ sont les mêmes en tout point $p \in U$ (c'est à dire pour tout plan π et $\overline{\pi}$ courbure-dépendants en p, $L(p,\pi,\overline{\pi}) = L_{\widetilde{R}}(p)$ pour une certaine fonction $L_{\widetilde{R}} : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$).*

Interprétation géométrique de la courbure sectionnelle de Deszcz :

Soit u, v deux vecteurs de $T_p\widetilde{M}$. En 1917 Levi-Civita construit un parallélogramoïde, dit squaroïde de Levi-Civita, en considérant une géodésique α, issue du point p de vecteur tangent u, et q un point de α situé à un distante infinitésimale A de p. Notons par v^* le vecteur obtenu par le transport parallèle de v du point p au point q le long de la courbe α. Ensuite, on considère les géodésiques β_p et β_q issues respectivement, de p et q et tangentes respectivement aux vecteurs v et v^*.

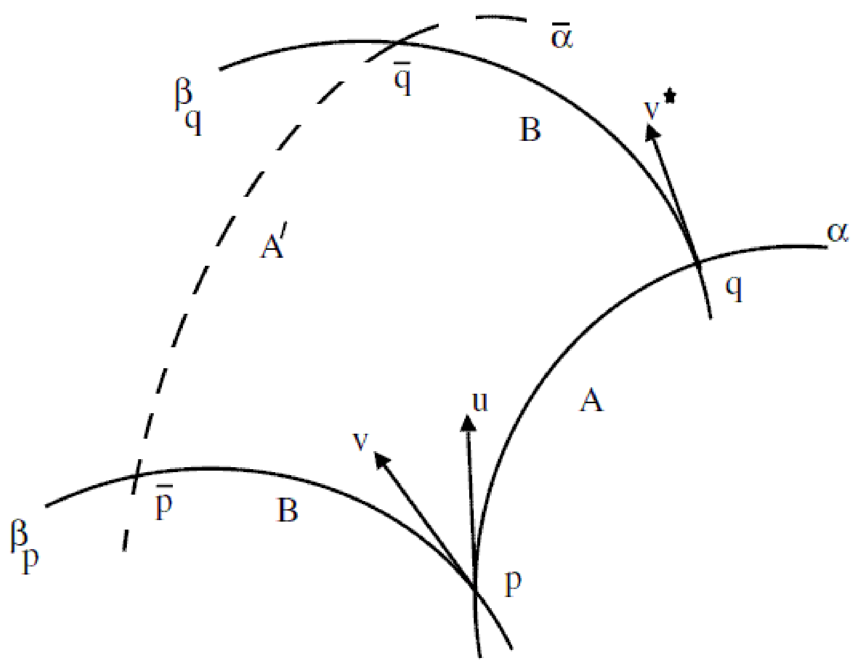

FIGURE 3. Parallélogramoïde de Levi-Civita.

Fixons les point $\overline{p}$ et $\overline{q}$ respectivement, sur β_p et β_q à une même distance infinitésimale B respectivement, des points p et q (cf. Figure 3). Soit $\overline{\alpha}$ la géodésique reliant les points $\overline{p}$ et $\overline{q}$ et soit A' la distance géodésique entre $\overline{p}$ et $\overline{q}$.
Levi-Civita a montré que, à une approximation du premier ordre prés, la courbure sectionnelle du plan $\pi = u \wedge v$ peut être exprimée par

$$K(p,\pi) = \frac{A^2 - A'^2}{(AB\sin\epsilon)^2}\,, \tag{2.6}$$

où ϵ est l'angle entre u et v. Maintenant, on considère au point $p \in \widetilde{M}$ deux plans $\pi = u \wedge v$ et $\overline{\pi} = x \wedge y$, transportons parallélement les deux vecteurs u et v le long du parallélogramme formé par les vecteurs tangents x, y en p (cf. Figure 3). On construit les deux parallélogramoïdes sur les vecteurs u, v et u^*, v^* respectivement, de même longueurs A et B en complétant par les géodésques de longueurs respectives A' et A'^*, qui sont à priori différentes. Plus précisément, on obtient [34], une expression similaire à celle donnée dans (2.6)

$$L(p,\pi,\overline{\pi}) = \frac{A'^2 - A'^{*2}}{(AB\sin\epsilon)^2 Q(g,\widetilde{R})(u,v,v,u;x,y)}\,.$$

2.2 Sur certains types de parallélisme

Dans [28] Ferus a introduit le concept des immersions parallèles ($\widetilde{\nabla}\sigma = 0$). D'autre part, Deprez [19] a donné la définition d'une immersion semi-parallèle ($\widetilde{R}(X,Y)\,.\,\sigma = 0$) pour tous les champs de vecteurs tangents X, Y de M. En 1999, Asperti et co-auteurs [2] ils ont introduit la notion des immersions pseudo-parallèles dans l'espace formes (space forms), comme généralisation des immersions semi-parallèles.
Dans cette section, on introduit les notions d'une sous-variété parallèle, semi-parallèle et pseudo-parallèle.

2.2.1 Sous-variétés pseudo-parallèles

Soit M une sous-variété d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}$.
Une sous-variété M est dite *parallèle* dans $\widetilde{M}$ si

$$\widetilde{\nabla}\sigma = 0\,,$$

où $\widetilde{\nabla}_X\sigma$ est définie par :

$$\widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)\,.$$

pour tout $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.
Et M est dite *semi-parallèle* dans $\widetilde{M}$ si

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = 0\,,$$

où

$$(\widetilde{R}(X,Y)\,.\,\sigma)(Z,W) = R^{\perp}(X,Y)(\sigma(Z,W)) - \sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W)\,,$$

et

$$R^{\perp}(X,Y) = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y} - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X} - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\,,$$

pour tout $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.
Il est clair que, toute sous-variété parallèle est semi-parallèle.

En remplaçant T par σ et B par g dans la formule (2.1), on obtient le tenseur $Q(g,\sigma)$.

$$\begin{aligned} Q(g,\sigma)(Z,W;X,Y) &= ((X \wedge Y)\,.\,\sigma)(Z,W) \\ &= -\sigma((X \wedge Y)Z,W) - \sigma(Z,(X \wedge Y)W)\,. \end{aligned}$$

Probablement $Q(g,\sigma)$ est le plus simple $(0,4)$-tenseur agissant sur les vecteurs tangents ayant les mêmes propriétés de symétrie que $\widetilde{R}\,.\,\sigma$ [33].

Définition 2.2.1. *Une sous-variété satisfaisant la condition :*

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(g,\sigma),$$

où $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$, est dite pseudo-parallèle.

Les équations de Gauss, Codazzi et Ricci donnent que les conditions extrinsèques (parallèles, semi-parallèles et pseudo-parallèles respectivement) impliquent les conditions intrinsèques correspondantes (symétrie, semi-symétrie et pseudo-symétrie respectivement) [3].
En analogie avec les symétries intrinsèques (ce qui précède) des variétés Riemanniennes concernant leur tenseur de courbure, le tableau 1 énumère les symétries extrinsèques correspondantes des sous-variétés, concernant leur seconde forme fondamentale [25].

Intrinsèque	Extrinsèque
Espace plat $\widetilde{R} = 0$	Totalement géodésique $\sigma = 0$
Espace forme $\widetilde{R} = \frac{c}{2} g \wedge g$	Totalement ombilicale $\sigma = gH$
Localement symétrique $\widetilde{\nabla}\widetilde{R} = 0$	Parallèle $\widetilde{\nabla}\sigma = 0$
Semi-symétrique $\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = 0$	Semi-parallèle $\widetilde{R}\,.\,\sigma = 0$
Pseudo-symétrique $\widetilde{R}\,.\,\widetilde{R} = LQ(g,\widetilde{R})$	Pseudo-parallèle $\widetilde{R}\,.\,\sigma = LQ(g,\sigma)$

TABLEAU 1. Comparaison entre les symétries intrinsèques et extrinsèques

2.2.2 Interprétation géométrique de semi-parallélisme

Comme les caractérisations intrinsèques d'une variété basées sur les propriétés du tenseur de courbure de Riemann, on peut considérer des caractérisations extrinsèques analogues basées sur les propriétés de la second forme fondamentale et les symétries du transport parallèle.

Soit $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe sur une variété Riemannienne M. En choisissant des points $p = \gamma(t_0)$ et $p^* = \gamma(t_0^*)$ sur la courbe γ et un vecteur $v \in T_pM$. Soit V un champ de vecteurs unique le long de γ tel que

$$V(t_0) = v\,,\;\; \nabla_{\gamma'}V = 0\,,$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de (M, g). Alors, on appelle $v^* = V(t_0^*)$ le transport parallèle de v de p à p^* le long de la courbe γ par rapport à la connexion ∇.
Si M est immergée dans une autre variété Riemannienne $\widetilde{M}$, on peut aussi transporter le vecteur v parallèlement le long de γ dans $\widetilde{M}$ par rapport à la connexion Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ de $(\widetilde{M}, g)$.
La second forme fondamentale donne la différence du premier ordre d'un vecteur aprés le transport parallèle avec les deux connexions le long d'une courbe dans la sous-variété [33]. Une sous-variété étant appelée *totalement géodésique* lorsque $\sigma = 0$.

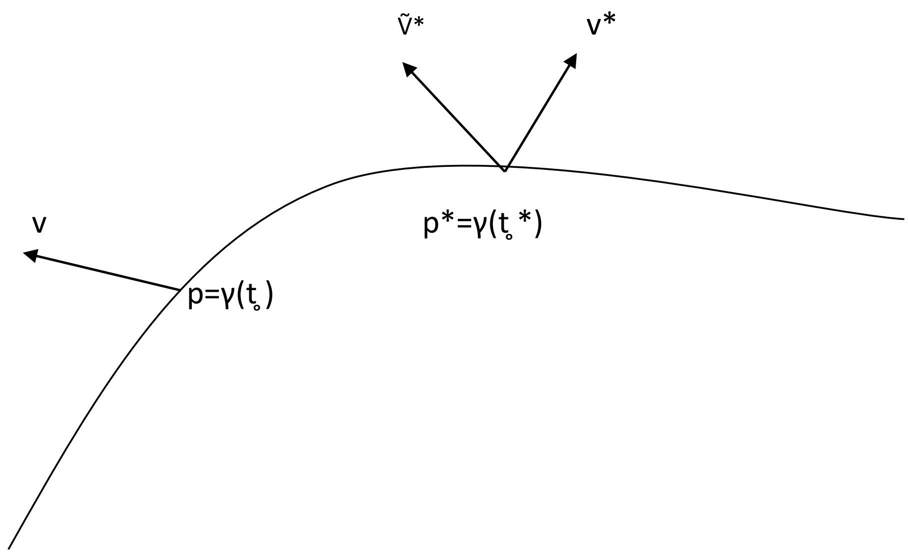

FIGURE 4. Sous-variétés totalement géodésiques.

On peut alors énnoncer la proposition suivante :[25]

Proposition 2.2.2. *Une sous-variété M dans $\widetilde{M}$ est totallement geodesique si et seulement si les transports parallèles des vecteurs qui sont tangents à M par rapport aux connexions ∇ sur M et $\widetilde{\nabla}$ sur $\widetilde{M}$ sont identiques.*

Étant donné une courbe γ dans M et deux vecteurs $u, v \in T_pM$, avec $\gamma(t_0) = p$, on a le vecteur $\sigma(u, v)$ dans l'espace normal de M au point p, $T_p^\perp M$. Au point $\gamma(t_0^*) = p^*$, on peut considérer deux vecteurs normaux : le transport parallèle de $\sigma(u, v)$ par $\nabla^\perp$, qui nous désignons par $\sigma(u, v)^{*\perp}$, et le vecteur $\sigma(u^*, v^*)$ obtenu aprés le premier transport parallèle u et v par ∇, et puis en appliquant σ.

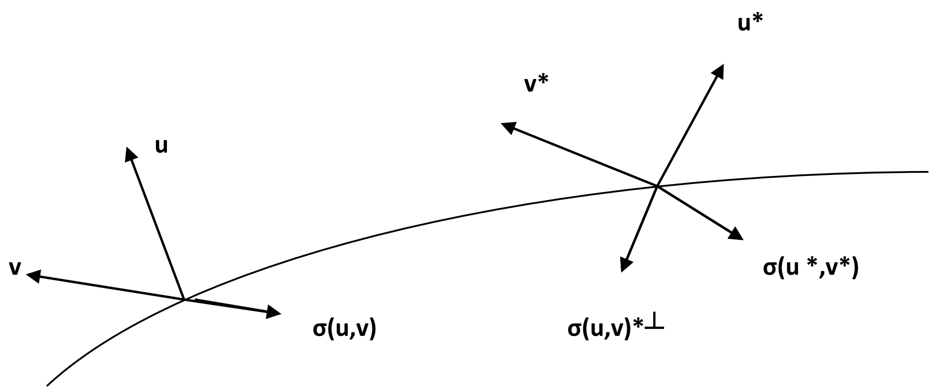

FIGURE 5. Sous-variétés parallèles.

En utilisant l'expression du transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe, i.e.,

$$v^* = v - \nabla_{\gamma'} v + ...$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sigma(u^*, v^*) - \sigma(u, v)^{*\perp} &= \nabla^{\perp}_{\gamma'}(u, v) - \sigma(\nabla_{\gamma'} u, v) - \sigma(u, \nabla_{\gamma'} v) + ... \\ &:= (\widetilde{\nabla}\sigma)(\gamma', u, v) + ... \end{aligned}$$

Une sous-variété est appelée parallèle ou extrinsèquement symétrique lorsque $\widetilde{\nabla}\sigma = 0$.

Proposition 2.2.3. *Une sous-variété M de $\widetilde{M}$ est parallèle si et seulement si le transport parallèle de la seconde forme fondamentale par rapport à $\nabla^{\perp}$ le long de toute courbe dans M est égale à la seconde forme fondamentale agissant sur le transport parallèle de deux vecteurs qui sont tangents à M le long de la même courbe.*

Les sous-variété parallèles ont été introduites dans [28] en tant qu'analogue extrinsèque des variétés Riemanniennes symétriques introduites par Cartan [13]. Par exemple, les seules surfaces dans $\mathbb{E}^3$ qui sont parallèles sont les parties ouvertes des plans, des sphères et des cylindres ronds [28, 45].
Remarquons que toute sous-variété extrinsèquement symétrique (c-à-d Parallèle) dans un espace forme est également intrinséquement symétique au sens de Cartan.
Si on nous donne un parallélogramme de coordonnées infinitesimales de sommet p, avec des

vecteurs tangents x et y dans M, le transport parallèle d'un vecteur tangent $v \in T_pM$ autour d'un parallélogramme par rapport à ∇ est donné par

$$v^* = v + [R(x,y)v]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,$$

tandis que le transport parallèle d'un vecteur normal ϵ avec $\nabla^\perp$ est donné par

$$\epsilon^{*\perp} = \epsilon - [R^\perp(x,y)\epsilon]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,.$$

Le tenseur normal de courbure $R^\perp$ est défini par $R^\perp(u,v)\epsilon = (\nabla^\perp_u \nabla^\perp_v - \nabla^\perp_v \nabla^\perp_u - \nabla^\perp_{[u,v]})\epsilon$ pour tout $u, v \in T_pM$. Comme le tenseur de courbure R peut être interprété géométriquement comme une mesure de la divergence du second ordre dans la direction d'un vecteur après le transport parallèle autour d'un parallélogramme de coordonnées infinitésimales, le tenseur de courbure normal $R^\perp$ peut être interprété de manière analogue comme une mesure de la différence du second ordre dans la direction d'un vecteur normal aprés le transport parallèle avec la connexion normale $\nabla^\perp$ autour d'un parallélogramme de coordonnées infinitésimales dans la sous-variété ([58]).
On peut alors considérer la seconde forme fondamentale aprés le transport parallèle de u et v autour d'un parallélogramme,

$$\sigma(u^*, v^*) = \sigma(u,v) - [\sigma(R(x,y)u, v) + \sigma(u, R(x,y)v)]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,$$

et le transport parallèle de la second forme fondamentale elle-même autour du parallélogramme avec $\nabla^\perp$,

$$\sigma(u,v)^{*\perp} = \sigma(u,v) - [R^\perp(x,y)\sigma(u,v)]\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,$$

En soustrayant les deux expressions, on obtient

$$\sigma(u^*, v^*) - \sigma(u,v)^{*\perp} = (\widetilde{R}\,.\,\sigma)(u, v; x, y)\Delta x \Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\,,$$

où

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(Z, W; X, Y) &= (\widetilde{R}(X,Y)\,.\,\sigma)(Z,W)\\ &:= R^\perp(X,Y)\sigma(Z,W) - \sigma(R(X,Y)Z, W) - \sigma(Z, R(X,Y)W)\,,\end{aligned}$$

avec $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

Proposition 2.2.4. *[25] Une sous-variété est semi-parallèle si et seulement si pour tout $p \in M$, les vecteurs normaux $\sigma(u,v)^{*\perp}$ et $\sigma(u^*, v^*)$ coïncident pour tout $u, v \in T_pM$ et pour chaque parallélogramme dans M, jusqu'au second ordre.*

Dans [19], il a été démontré qu'une sous-variété semi-parallèle de l'espace Euclidien $\mathbb{E}^n$ est intrinsèquement semi-symétrique.

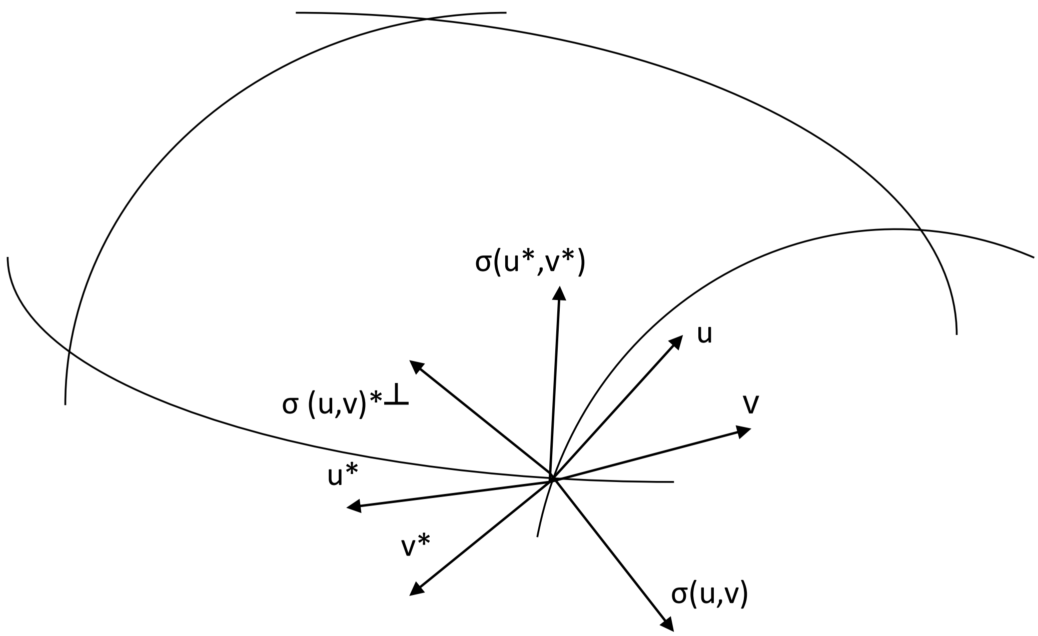

FIGURE 6. Sous-variétés semi-parallèles.

2.2.3 Interprétation géométrique de pseudo-parallélisme

Un point p de M est appelé *ombilique* s'il existe un vecteur normal ε tel que

$$\sigma(u,v) = g(u,v)\varepsilon,$$

pour tout $u, v \in TM$. Une sous-variété semi-Riemannienne M de $\widetilde{M}$ est appelée *totalement ombilicale* si chaque point de M est ombilique. Alors, en conséquence il existe un champ de vecteurs normal ε sur M, appelé le champ de vecteurs de courbure moyenne H ou encore appelé champ de vecteurs de Bompiani de la sous-variété M dans $\widetilde{M}$, à savoir $H = \frac{1}{n} tr\sigma$.

Proposition 2.2.5. *[25] Une sous-variété M dans $\widetilde{M}$ est totalement ombilicale si et seulement si $Q(g,\sigma) = 0$.*

On peut donner l'interprétation géométrique suivant du vecteur $Q(g,\sigma)(u,v;x,y)$.
Soit $u, v, x, y \in T_pM$ et supposons que $\{x, y\}$ sont orthonormés. Nous étendons ces vecteurs à une base orthonormée $\{x, y, e_3, ..., e_n\}$ de T_pM. Les deux vecteurs u et v peuvent être décomposés par rapport à cette base. Considérons les vecteurs $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ qui sont obtenus aprés une rotation des composants de u et v dans le plan engendré par les vecteurs de base x et y autour d'un angle infinitésimal ε, en conservant les autres composants fixés. Jusqu'à le premier ordre dans ε, on a [25]

$$\begin{aligned}
\widehat{u} &= u + \varepsilon\{g(u,x)y - g(u,y)x\} + O(\varepsilon^2) \\
&= u + \varepsilon(x \wedge y)u + O(\varepsilon^2)\,,
\end{aligned}$$

et de manière analogue pour $\widehat{v}$. La seconde forme fondamentale appliquée à ces deux vecteurs donnée par

$$\begin{aligned}\sigma(\widehat{u},\widehat{v}) &= \sigma(u,v)+\varepsilon\{\sigma(x\wedge y)u,v)+\sigma(u,(x\wedge y)v)\}+O(\varepsilon^2)\\ &= \sigma(u,v)+\varepsilon Q(g,\sigma)(u,v;x,y)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Si l'on compare notre interprétation de $Q(g,\sigma)$ avec $\widetilde{R}\,.\,\sigma$, on trouve ce qui suit.
Le tenseur $\widetilde{R}\,.\,\sigma$ mesure la différence du premier ordre dans la direction de deux secondes formes fondamentales obtenues aprés le transport parallèle de : premièrement deux vecteurs autour d'un parallélogramme de coordonnées infinitésimales et deuxièmement, le transport parallèle de la seconde forme fondamentale elle-même autour du parallélogramme. D'autre part, le vecteur $Q(g,\sigma)(u,v;x,y)$ mesure la différence du premier ordre dans la direction de la seconde forme fondamentale avec la seconde forme fondamentale obtenue aprés la rotation des vecteurs dans un plan particulier. Notons qu'il s'agit d'un mouvement en p, alors que $\widetilde{R}\,.\,\sigma$ mesure la différence dans une direction aprés un mouvement loin de p.
Il semble donc de considérer $Q(g,\sigma)$ comme une sorte de normalisation de $\widetilde{R}\,.\,\sigma$.
En utilisant cette idée, on peut énoncer cette définition [25].

Définition 2.2.6. *Soit $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique. En $p\in M$ on considère une direction tangente d, engendrée par un vecteur $u\in T_pM$, un plan tangent $\pi = span\,\{x,y\}$ dans T_pM et une direction normale $\epsilon\in T_p^{\perp}M$. La direction d, le plan π et la direction normale ϵ sont dits fondamentalement indépendants si $\widetilde{g}(Q(g,\sigma)(u,u;x,y),\epsilon)\neq 0$.*

Définition 2.2.7. *Soit $p\in M$ et une direction d tangente fondamentalement indépendant, engendrée par un vecteur $u\in T_pM$, un plan tangent $\pi = span\,\{x,y\}$ dans T_pM et une direction normale $\epsilon\in T_p^{\perp}M$. On peut donc définir un scalaire $L_\epsilon(p,d,\pi)$ comme*

$$L_\epsilon(p,d,\pi)=\frac{\widetilde{g}((\widetilde{R}\,.\,\sigma)(u,u;x,y),\epsilon)}{\widetilde{g}(Q(g,\sigma)(u,u;x,y),\epsilon)}.$$

Cette définition est indépendante du choix des bases de π, et des vecteurs u et ϵ.

Théorème 2.2.8. *[25] Soit $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique et $p\in\mathcal{U}\subset M$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des points où $Q(g,\sigma)$ n'est pas identiquement nul. Si la fonction L est isotrope en p, c-à-d, $L_\epsilon(p,d,\pi)=L(p)$, pour toute direction tangente d, les plans tangents π et les directions normales $\epsilon\in T_p^{\perp}M$, alors*

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L(p)\,Q(g,\sigma)\ \text{ en }\ p\in\mathcal{U}. \tag{2.7}$$

Définition 2.2.9. *Soit $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique. Un point $p\in\mathcal{U}$ est appelé pseudo-parallèl si (2.7) est vérifiée en p. Une sous-variété M est appelée pseudo-parallèle si tout point de M est pseudo-parallèle.*

De l'équation de Gauss, il en résult qu'une hypersurface dans un espace de courbure constante c est pseudo-parallèle si et seulement si l'opérateur de Weingarten A a au plus deux valeurs propres distincts λ et μ [3]. Si $\lambda\neq\mu$, alors $L=\lambda\mu+c$.

2.2.4 Sous-variétés Ricci pseudo-parrallèles généralisées

En 2005, les auteurs [51] ont défini les sous-variétés satisfaisant à la condition

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(S,\sigma) \tag{2.8}$$

où L est une fonction sur M et S est le tenseur de courbure de Ricci sur M.

Ce type de sous-variétés est appelé *Ricci pseudo-parallèle généralisée*, où l'equation (2.8) est donnée par

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y)\sigma(Z,W) - \sigma(R(X,Y)Z,W) &- \sigma(Z,R(X,Y)W) \\ &= -L[\sigma((X\wedge_S Y)Z,W) + \sigma(Z,(X\wedge_S Y)W)], \end{aligned}$$

pour tout X, Y, Z et W tangents à M.

2.2.5 Interprétation géométrique de $Q(S,\sigma)$

Il s'agit dans cette section de donner l'interprétation géométrique du tenseur $Q(S,\sigma)$ [74] et donc, de ce qui précède nous allons complétons l'interprétation géométrique d'une sous-variété Ricci pseudo-parallèle généralisée.

Soit M^n une sous-variété de dimension n et $\widetilde{M}^{n+m}$ une variété Riemannienne de dimension $n+m$. Soit $\{x, y, e_3, ..., e_n\}$ une base orthonormée de T_pM. Alors $z \in T_pM$ peut être décomposé par une expansion orthonormée comme

$$z = g(z,x)x + g(z,y)y + \sum_{i=3}^{n} g(z,e_i)e_i\,.$$

En faisant tourner la projection sur le plan π engendré par x et y sur un angle infinitésimal ε, tout en gardant la projection de z sur le $(n-2)$-Plan engendré par $e_3, ..., e_n$ fixés, le nouveau vecteur $\widehat{z}$ est obtenu :

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= z + \varepsilon\{g(z,y)x - g(z,x)y\} + O(\varepsilon^2) \\ &= z + \varepsilon(x\wedge_g y)z + O(\varepsilon^2)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ainsi, le vecteur $(x\wedge_g y)z$ mesure le changement du premier ordre de vecteur z aprés une rotation infinitésimale dans le plan π au point p [34] [36].
En prenant $z = \widetilde{S}z$ dans l'équation (2.9), on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{S}z} &= \widetilde{S}z + \varepsilon\{g(\widetilde{S}z,y)x - g(\widetilde{S}z,x)y\} + O(\varepsilon^2) \\ &= \widetilde{S}z + \varepsilon(x\wedge_S y)z + O(\varepsilon^2) \\ &= \widetilde{S}z + \varepsilon(x\wedge_g y)\widetilde{S}z + O(\varepsilon^2)\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\widetilde{S}$ est un opérateur de Ricci de M^n.
Ainsi, le vecteur $(x\wedge_S y)z = (x\wedge_g y)\widetilde{S}z$ mesure le changement du premier ordre de vecteur

$\widetilde{S}z$ aprés une rotation infinitésimale dans le plan π au point p.

Dans [25], Dillen et ses co-auteurs ont donné une interprétation géométrique de $Q(g,\sigma)$. Maintenant, on utilise la même méthode pour donner une interprétation géométrique de $Q(S,\sigma)$.
Soit z, w des vecteurs de T_pM. De l'équation (2.10) on a

$$\sigma(\widehat{\widetilde{S}z},w) = \sigma(\widetilde{S}z,w) + \varepsilon\sigma((x\wedge_S y)z,w) + O(\varepsilon^2)\,, \tag{2.11}$$

$$\sigma(z,\widehat{\widetilde{S}w}) = \sigma(z,\widetilde{S}w) + \varepsilon\sigma(z,(x\wedge_S y)w) + O(\varepsilon^2)\,. \tag{2.12}$$

Utilisation des équations (2.11) et (2.12), nous donne

$$\begin{aligned}\sigma(\widetilde{S}z-\widehat{\widetilde{S}z},w)+\sigma(z,\widetilde{S}w-\widehat{\widetilde{S}w}) &= -\varepsilon\{\sigma((x\wedge_S y)z,w)+\sigma(z,(x\wedge_S y)w)\}+O(\varepsilon^2)\\ &= \varepsilon Q(S,\sigma)(z,w;x,y)+O(\varepsilon^2)\,. \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'équation (2.13) possède une signification géométrique. Ainsi, l'interprétation géométrique du premier ordre pour $Q(S,\sigma)(z,w;x,y)$ est obtenue [74].

Chapitre 3

$\mathcal{S}$-variétés

Dans ce chapitre, on rappel les définitions et les résultats sur un $\mathcal{S}$-espace forme, qui seront constamment utilisées dans cette thèse.
Ce chapitre a pour but de fixer les notations et de servir de références pour les théorèmes les plus utilisés. On commence par de brefs rappels sur l'espace de formes complexes, aprés on donne quelque notions de géométrie Sasakienne, on insiste sur la variété Sasakienne et l'espace de formes Sasakienne munis d'un champs de Reeb "espace forme de Sasaki". On donne ensuite la définition d'une $\mathcal{S}$-variété et ses propriétés fondamentales. Puis, on introduit la notion de l'espace de formes Sasakiennes munis de s-champs de Reeb appelé "$\mathcal{S}$-espace forme" et quelques résultats sur cet espace. Enfin, on définit le tenseur parallèle symétrique du second ordre et on établit l'expression de ce tenseur sur une $\mathcal{S}$-variété (qui est notre premier résultat de cette thèse).

3.1 Généralités sur l'espace de formes complexes

Les espaces de formes complexes, c'est à dire les espaces Euclidiens complexes, les espaces projectifs et hyperboliques complexes sont les exemples les plus simples de variété de Kähler-Einstein.
Dans cette section, on introduit la notion d'un espace de formes complexes. On commence par rappeler les différentes définitions et propriétés concernant cet espace. Pour plus de détails voir [38, 71]

Définition 3.1.1. *(Structure presque complexe)*
Une structure presque complexe sur une variété différentiable réelle $\widetilde{M}$ de dimension $2n$ est un champ de tenseurs J qui à chaque point x de $\widetilde{M}$ associe un endomorphisme J de l'espace $T_x\widetilde{M}$ tel que $J^2 = -I$, où I dénote la transformation identité.

Définition 3.1.2. *(Variété presque complexe)*
Une variété différentiable réelle munie d'une structure presque complexe est appelée variété presque complexe.

Le groupe de structure du fibré tangent de toute variété muni d'une structure presque complexe est réduit au groupe unitaire $U(n)$. La réciproque est aussi vraie.

Remarques 3.1.3. – *Une variété complexe c'est une variété différentiable telles que les applications de changements de cartes soient des fonctions holomorphes d'un ouvert de* $\mathbb{C}^n$ *dans un autre.*

– $\forall p \in \widetilde{M}$, *si* $(z^1, ..., z^n)$ *est un système de coordonnées complexe local en* p *alors :* $J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^k}$, $J(\frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{\partial}{\partial x^k}$, $k = 1, ..., n$ *avec* $z^k = x^k + iy^k$ *et* $J : T_p\widetilde{M} \longrightarrow T_p\widetilde{M}$.

Définition 3.1.4. *(Tenseur de Nijenhuis)*
La torsion d'une structure presque complexe J *ou tenseur de Nijenhuis, est le tenseur* N *de type (1,2) défini par :*

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]\,,$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Théorème 3.1.5. *Une structure presque complexe* J *est dite intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis est nul.*

Définition 3.1.6. *(Métrique Hermitienne)*
Une métrique Hermitienne sur une variété presque complexe $\widetilde{M}^{2n}$ *est une métrique Riemannienne* g *tel que :* $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Définition 3.1.7. *(Variété Hermitienne)*
Une variété Riemannienne $\widetilde{M}^{2n}$ *munie d'une métrique Hermitienne* g *est dite variété Hermitienne.*

Définition 3.1.8. *(Variété Kählérienne)*
Une variété Hermitienne est dite variété Kählérienne si $d\phi = 0$, *où* ϕ *est une 2-forme fondamentale définie par :* $\phi(X, Y) = g(X, JY)$.

Proposition 3.1.9. *Une variété Hermitienne est dite Kählérienne si et seulement si*

$$\widetilde{\nabla} J = 0\,.$$

Définition 3.1.10. *(Courbure holomorphique)*
Le 2-plan egendré par les vecteurs X *et* JX, *où* $X \in T_p\widetilde{M}$ *est dite section holomorphique et la courbure sectionnelle* $K(X, JX)$ *est dite courbure holomorphique.*

Définition 3.1.11. *(Espace de formes complexes)*
Une variété Kählerienne de courbure holomorphique constante c *est dite espace de formes complexes et son tenseur de courbure est donné par*

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \frac{c}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ)\,.$$

3.2 Variété Sasakienne

En 1960, Sasaki [57] définit une structure dite (φ, ξ, η, g)-structure sur une variété Riemannienne de dimension impaire par analogie avec une structure presque hermitienne qu'elle est définit sur une variété de dimension paire.

3.2.1 Structure presque de contact

Définition 3.2.1. *Soit $\widetilde{M}$ une variété de dimension $2n+1$, s'il existe des champs de tenseurs φ, ξ, η de types (1,1),(1,0) ,(0,1) respectivement satisfaisant ces conditions :*

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \,, \quad \eta(\xi) = 1 \tag{3.1}$$

Alors $\widetilde{M}$ admet une structure presque de contact (φ, ξ, η), et $\widetilde{M}$ est dite variété presque de contact.

ξ est le *champ de vecteurs Reeb* ou le champ de vecteurs fondamental d'une variété presque de contact $\widetilde{M}$.
Le sous espace $D = \{X \in T_p(\widetilde{M}),\, \eta(X) = 0\}$ de l'espace tangent d'une variété presque de contact $\widetilde{M}$ définit une distribution de dimension $2n$ sur $\widetilde{M}$, on l'appelle la distribution de contact de $\widetilde{M}$ et η *la forme de contact.*

Proposition 3.2.2. *[6] Si (φ, ξ, η) est une structure presque de contact sur une variété $\widetilde{M}$ de dimension $2n+1$, alors*

$$\varphi\xi = 0, \;\; \varphi^3 = -\varphi, \;\; \eta \circ \varphi = 0, \;\; rg\, \varphi = 2n\,. \tag{3.2}$$

Définition 3.2.3. *Soit $\widetilde{M}^{2n+1}$ une variété de structure presque de contact (φ, ξ, η), alors $\widetilde{M}^{2n+1}$ admet une métrique Riemannienne g telle que :*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\,, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.3}$$

$\widetilde{M}^{2n+1}$ est dite alors variété Riemannienne presque de contact, (φ, ξ, η, g) est appelée structure Riemannienne presque de contact sur M, et g métrique compatible.

Ainsi, on définit une seconde forme sur $\widetilde{M}^{2n+1}$ par :

$$\phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ϕ est anti-symétrique, dite seconde forme fondamentale ou une *forme Sasakienne.*

Proposition 3.2.4. *Si g est une métrique compatible avec la structure presque de contact (φ, ξ, η, g) sur la variété $\widetilde{M}^{2n+1}$ alors on a :*
i) $\eta(X) = g(X, \xi)$, pour tout $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

ii) Sur le domaine U de chaque carte locale de M, il existe une base orthonormée de la forme :

$$\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{1^*} = \varphi X_1, ...X_{n^*} = \varphi X_n, \xi\}$$

dans le module $\mathfrak{X}(U)$.

Définition 3.2.5. *Si $\phi = d\eta$, i.e, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ sur $\widetilde{M}$, on dit que η définit une structure de contact ou $\widetilde{M}$ est une variété de contact.*

Définition 3.2.6. *Soit $\widetilde{M}^{2n+1}$ une variété Riemannienne de contact et (φ, ξ, η, g) une structure métrique de contact associée. Si ξ est un champ de vecteurs de Killing par rapport à g, on appelle une telle structure métrique de contact par structure K-contact.*

La première propriété de base d'une structure K-contact est

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\varphi X \,, \tag{3.4}$$

où $\widetilde{\nabla}$ est la connexion Riemannienne de g.

Théorème 3.2.7. *[6] La structure presque de contact (φ, ξ, η, g) sur une variété est normale si et seulement si*

$$N^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \,. \tag{3.5}$$

3.2.2 Variété Sasakienne

Il est bien connu qu'une variété Sasakienne est une variété Riemannienne "de K-contact" particulière.
Dans cette section on donne une définition importante, à savoir celle d'une variété Sasakienne. On a vu qu'une variété de contact avec la forme de contact η porte une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) avec $\phi = d\eta$. Cette structure a été mentionnée comme une structure associée ou simplement comme une structure métrique de contact.

Définition 3.2.8. *Si une structure métrique de contact (φ, ξ, η, g) est normale, on l'appelle métrique de contact normale ou structure Sasakienne.*

Une structure Sasakienne est en quelque sorte un analogue de structure Kählérienne sur une variété presque Hermitienne, i.e. la structure presque complexe J est parallèle par rapport à la métrique Hermitienne.
Ce point de vue est suggéré dans la formule suivante de la condition Sasakienne.

Théorème 3.2.9. *[6] La structure Riemannienne presque de contact (φ, ξ, η, g) est Sasakienne si et seulement si :*

$$(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \,, \tag{3.6}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Si la variété $\widetilde{M}$ a une courbure sectionnnelle constante alors on a :

Théorème 3.2.10. *[6] Soit $\widetilde{M}$ une variété Riemannienne de contact de dimension $2n+1 \geq 5$. Si $\widetilde{M}$ a une courbure sectionnelle constante c alors c est égale à 1 et $\widetilde{M}$ est une variété Sasakienne.*

Dans ce cas l'étude des variétés Sasakiennes de courbure sectionnelle constante n'a pas beaucoup d'intérêt. Ainsi a été introduite la notion de la courbure φ-sectionnelle [7]. Cette notion joue un rôle en géométrie Sasakienne comme le joue la courbure sectionnelle holomorphique en géométrie Kählerienne.

Soit x un point d'une variété Riemannienne presque de contact M et π un plan dans l'espace tangent $T_x(\widetilde{M})$ en x à $\widetilde{M}$.
Avec le plan π est associé la courbure sectionnelle $K(\pi)$ et parce que cela ne dépend pas de la base orthonormée X, Y de π, on écrit $K(\pi) = K(X, Y)$.
Il est naturel d'étudier la restriction de K sur les plans π invariant par φ, qui est $\varphi\pi = \pi$. Un tel plan est appelé *φ-plan.*

Définition 3.2.11. *Si π est un φ-plan donc pour tout vecteur unitaire $X \in \pi$, la paire $\{X, \varphi X\}$ est une base orthonormée de π, et donc la courbure sectionnelle d'un tel plan est $K(X, \varphi X)$.*

Il est donc naturel de considérer la restriction de la courbure sectionnelle de φ-plan et on l'appelle la courbure φ-sectionnelle d'une variété Riemannienne presque de contact.

3.2.3 Espace forme de Sasaki

Rappelons que les courbures sectionnelles d'une variété Riemannienne déterminent le tenseur de courbure. On a l'analogue pour les courbures φ-sectionnelles.

Théorème 3.2.12. *[6] Les courbures φ-sectionnelles déterminent complètement la courbure d'une variété Sasakienne.*

Le théorème suivant est important, nous donne une expression de $\widetilde{R}$ lorsque la courbure φ-sectionnelle est constante :

Théorème 3.2.13. *[6, 7] Si la courbure φ-sectionnelle en tout point x d'une variété Sasakienne $\widetilde{M}$ de dimension ≥ 5 est indépendante du choix de la φ-section en x, alors elle est constante sur $\widetilde{M}$ et le tenseur de courbure est donné par :*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \\ &\quad + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad - g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y - 2g(\varphi X,Y)\varphi Z\}\,, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$. Où c est la courbure φ-sectionnelle constante.

Définition 3.2.14. *Une variété Sasakienne avec une courbure φ-sectionnnelle constante est appelée espace form de Sasaki, et noté $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$.*

3.3 $\mathcal{S}$-variété

L'objet de cette section est de présenter une classe de variétés qui généralisent celle des variétés de contact métrique et qu'on peut considérer comme une extension des variétés Sasakiennes, elles sont dites $\mathcal{S}$-variétés [8, 35, 39]. On va commencer par donner le concept de φ-structure sur une variété lisse $\widetilde{M}^{2n+s}$, cette notion introduite par Yano [70]. L'existence d'une φ-structure sur une variété $\widetilde{M}$ de dimension $2n+s$, est équivalente à la réduction du groupe de structure du fibré tangent $U(n) \times O(s)$ où $U(n)$ est le groupe unitaire [8]. Pour $s=0$, on a une structure presque complexe et pour le cas $s=1$, on obtient une structure presque de contact, ce sont des exemples de φ-structure.

3.3.1 φ-structure

Définition 3.3.1. *Soit $\widetilde{M}$ une variété de dimension n différentiable de class C^∞. Une φ-structure sur $\widetilde{M}$ est un champ de tenseurs φ non nul sur $\widetilde{M}$, de type $(1,1)$ et de class C^∞ vérifiant*

$$\varphi^3 + \varphi = 0$$

L'endomorphisme φ est de rang constant [70]. Une variété munie d'une φ-structure est dite φ-variété.

Définition 3.3.2. *Soit $(\widetilde{M}, g)$ une variété Riemannienne de dimension $2n+s$. $(\widetilde{M}, g)$ est dite φ-variété métrique (ou une variété Riemannienne presque de s-contact), s'il existe sur $\widetilde{M}$ une φ-structure, et $2s$ champs de tenseurs $\xi_1, ..., \xi_s, \eta_1, ..., \eta_s$ sur $\widetilde{M}$ de types $(1,0), ...(1,0)$ et $(0,1), ..., (0,1)$ respectivement qui satisfont les équations suivantes :*

$$\eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \;\; \varphi\xi_\alpha = 0, \;\; \eta_\alpha(\varphi X) = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, ..., s) \tag{3.8}$$

$$\varphi^2 X = -X + \sum\nolimits_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\xi_\alpha \,, \tag{3.9}$$

$$g(X,Y) = g(\varphi X, \varphi Y) + \sum\nolimits_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) \,. \tag{3.10}$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ et $\alpha = 1, ..., s$.
On dit alors que $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ est une structure métrique presque de s-contact et $\widetilde{M}$ une variété Riemannienne presque de s-contact.

Propriété 3.3.3. *La métrique g satisfait à :*

$$\eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha), \qquad g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) = 0 \,. \tag{3.11}$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ et $\alpha = 1, ..., s$.

Définition 3.3.4. *Si la structure métrique presque de s-contact $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ sur $\widetilde{M}$ satisfait $d\eta_\alpha(X,Y) = g(X, \varphi Y)$ (c-à-d, $d\eta_\alpha = \phi$), donc cette structure est appellée "structure métrique de s-contact", $\widetilde{M}$ avec telle structure est dite "variété Riemannienne de s-contact".*

3.3.2 φ-structure normale

On considère une variété produit $M \times \mathbb{R}^s$, où $\mathbb{R}^s$ indique un espace Euclidien de dimension s. Un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}^s$ est donné par :

$$X + \sum\nolimits_{\alpha=1}^{s} f_\alpha \partial_\alpha \,,$$

où X un champ de vecteurs tangent de M, $\partial_\alpha := \partial/\partial t_\alpha$ (the natural frame fields) de $\mathbb{R}^s$ et $f_\alpha(\alpha = 1, ..., s)$ des fonctions sur $M \times \mathbb{R}^s$.
On définit une application linéaire J sur l'espace tangent de $M \times \mathbb{R}^s$ par

$$J(X + \sum_{\alpha=1}^{s} f_\alpha \partial_\alpha) = \varphi X - \sum_{\alpha=1}^{s} f_\alpha \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\partial_\alpha \,. \tag{3.12}$$

Alors on a $J^2 = -I$ et J est une structure presque complexe sur $M \times \mathbb{R}^s$.

Définition 3.3.5. *On dit que la structure presque de s-contact est normale si le tenseur J ainsi défini est intégrable.*

Théorème 3.3.6. *Si*

$$N_\varphi + 2\sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha = 0\,,$$

alors la φ-structure est dite normale.

Puisque φ est de rang $2n$, alors $\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_s \wedge \phi^n \neq 0$ et particulièrement $\widetilde{M}$ est orientable.

Définition 3.3.7. *La φ-variété métrique est une $\mathcal{K}$-**variété** si elle est normale et la deuxième-forme fondamentale ϕ est fermée (i.e. $d\phi = 0$).*

Dans ce cas les champs de vecteurs $\xi_1, ..., \xi_s$ sont des champs de Killing, i.e. $L_{\xi_\alpha} g = 0$. où L_{ξ_α} indique l'opérateur de différenciation de Lie par rapport à ξ_α [8].

Définition 3.3.8. *Une $\mathcal{K}$-variété est appelée $\mathcal{S}$-**variété** si $\phi = d\eta_\alpha$, pour tout $\alpha = 1, ..., s$.*

Remarquons que pour $s = 0$ une $\mathcal{K}$-variété est une variété Kählérienne, et pour $s = 1$, une $\mathcal{K}$-variété est une variété quasi-Sasakienne et une $\mathcal{S}$-variété est une variété Sasakienne.

3.3.3 Propriétés fondamentales de $\mathcal{S}$-variété

Il est bien connu que la $\mathcal{S}$-variété jouit de beaucoup de propriétés similaires à celles des variété Sasakienne. On peut voir que la structure de $\mathcal{S}$-variété peut être différente de celle-ci. En effet, (contrairement à la variété Sasakienne) il n'existe pas de $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, $s \geq 2$ de courbure constante strictement positive [8].

Dans cette section nous allons d'abord chercher à exprimer la condition de la normalité en termes de torsion Nijenhuis N_φ de φ sur une variété presque de s-contact $\widetilde{M}$.
Puisque N_J est un champ de tenseurs de type (1,2) sur $\widetilde{M} \times \mathbb{R}^s$, il suffit de calculer $N_J(X, Y)$, $N_J(X, \partial_\alpha)$ et $N_J(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ d'aprés (3.12), on obtient :

$$N_J(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2\sum_{\alpha=1}^{s} d\eta_\alpha(X, Y)\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}((L_{\varphi X}\eta_\alpha)Y - ((L_{\varphi Y}\eta_\alpha)X)\partial_\alpha\,,$$

$$N_J(X, \partial_\alpha) = (L_{\xi_\alpha}\varphi)X + \sum_{\beta=1}^{s}((L_{\xi_\alpha}\eta_\alpha)X)\partial_\beta\,,$$

$$N_J(\partial_\alpha, \partial_\beta) = [\xi_\alpha, \xi_\beta]\,.$$

On définit les tenseurs N^1, N^2, N^3 et $N^4; (\alpha, \beta = 1, ..., s)$ respectivement par :

$$N^1(X,Y) := N_\varphi(X,Y) + 2\sum\nolimits_{\alpha=1}^{s} d\eta_\alpha(X,Y)\xi_\alpha\,,$$
$$N^2(X,Y) := (L_{\varphi X}\eta_\alpha)Y - (L_{\varphi Y}\eta_\alpha)X\,,$$
$$N^3(X) := (L_{\xi_\alpha}\varphi)X\,,$$
$$N^4(X) := (L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)X\,.$$

Le lemme suivant permet de caractériser les variétés presque de s-contact.

Lemme 3.3.9. *[35] Si $N^1 = 0$, alors $N^2 = N^3 = N^4 = [\xi_\alpha, \xi_\beta] = 0$.*

Proposition 3.3.10. *[35] La variété presque de s-contact $\widetilde{M}$ est normale si et seulement si $N^1 = 0$.*

Lemme 3.3.11. *Si $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ est une $\mathcal{S}$-structure on a :*

$$\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha = -\varphi X\,, \quad (\alpha = 1, ..., s)\,. \tag{3.13}$$

Preuve . On a

$$\begin{aligned}
d\eta_\alpha(X,Y) &= \frac{1}{2}(X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X,Y]))\\
&= \frac{1}{2}(Xg(Y,\xi_\alpha) - Yg(X,\xi_\alpha) - g([X,Y],\xi_\alpha))\\
&= \frac{1}{2}(g(\widetilde{\nabla}_XY,\xi_\alpha) + g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha) - g(\widetilde{\nabla}_YX,\xi_\alpha) - g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi_\alpha) - \eta_\alpha([X,Y]))\\
&= \frac{1}{2}(g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha) - g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi_\alpha))\\
&= -g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi_\alpha)\,,
\end{aligned}$$

puisque ξ_α est un champ de Kiling pour tout $\alpha = 1, ..., s$, i.e. $g(\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha, Y) + g(X, \widetilde{\nabla}_Y\xi_\alpha) = 0$.

Et comme $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ est une $\mathcal{S}$-structure, on a :

$$d\eta_\alpha(X,Y) = g(X,\varphi Y) = -g(X,\widetilde{\nabla}_Y\xi_\alpha)$$

■

Lemme 3.3.12. *Pour une $\mathcal{S}$-structure de $\widetilde{M}$, on a*

$$(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y = \sum\nolimits_{\alpha=1}^{s}(g(\varphi X,\varphi Y)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)\varphi^2X)\,, \tag{3.14}$$

pour tout $\alpha \in \{1, ..., s\}$.

D'aprés le Lemme 3.3.11 et Lemme 3.3.12, on a

Proposition 3.3.13. *[35] Une structure métrique presque de s-contact $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ sur $\widetilde{M}$ est une $\mathcal{S}$-structure si et seulement si elle vérifie les équations (3.13) et (3.14).*

3.4 $\mathcal{S}$-espace forme

Soit $\widetilde{M}$ une $\mathcal{S}$-variété de dimension $(2n+s)$ de structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, on a les identités suivantes :

$$\widetilde{R}(X, \xi_\alpha)Y = -(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y\,,$$

$(\alpha = 1, ..., s)$.

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\xi_\alpha &= (\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(X))\varphi^2 Y - (\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y))\varphi^2 X \\ &= (\widetilde{\nabla}_Y\varphi)X - (\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y,\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\varphi Z &= \widetilde{R}(X,Y)Z - sg(\varphi X, Z)\varphi^2 Y + sg(\varphi Y, Z)\varphi^2 X \\ &+\{sg(\varphi X, \varphi Z) + (\textstyle\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\}\varphi Y \\ &-\{sg(\varphi Y, \varphi Z) + (\textstyle\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\}\varphi X \\ &+\{g(\varphi X, Z)(\textstyle\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)) - g(\varphi Y, Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))\}(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta)\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= -\varphi\widetilde{R}(X,Y)\varphi Z + \{sg(\varphi X, \varphi Z) + (\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\}\varphi^2 Y \\ &-\{sg(\varphi Y, \varphi Z) + (\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\}\varphi^2 X \\ &-sg(X, \varphi Z)\varphi Y + sg(Y, \varphi Z)\varphi X \\ &-\{g(\varphi X, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)) - g(\varphi Y, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))\}(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta)\,,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}g(\widetilde{R}(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) &= g(\widetilde{R}(X,Y)Z, W) + g(\varphi X, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(W)) \\ &-g(\varphi X, \varphi W)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z)) \\ &+g(\varphi Y, \varphi W)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z)) \\ &-g(\varphi Y, \varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(W)\,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

Où $\widetilde{R}$ désigne un tenseur de courbure Riemannien de $\widetilde{M}$ défini par ;

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z\,.$$

On note par $\mathcal{L}$ la distribution déterminée par $-\varphi^2$ et $\mathcal{M}$ la distribution complémentaire. $\mathcal{M}$ est déterminée par $\varphi^2 + I$ et engendrée par $\xi_1, ..., \xi_s$.
Alors

$$T\widetilde{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$$

Si $X \in \mathcal{L}$, alors $\eta_\alpha(X) = 0$ pour tout $(\alpha = 1, ..., s)$ et si $X \in \mathcal{M}$, alors $\varphi X = 0$.

Théorème 3.4.1. *[8] Dans la $\mathcal{S}$-structure la distribution $\mathcal{M}$ est plate, i.e., toutes les courbures sectionnelles $K(X,Y)$ d'une section engendrée par $X, Y \in \mathcal{M}$ sont nulles. Les courbures sectionnelles $K(X,Y)$ avec $X \in \mathcal{L}$, $Y = \xi_\alpha$ ont une valeur 1.*

Preuve . Comme $\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha = -\varphi X \quad (\alpha = 1, ..., s)$ et $L_{\xi_\alpha}\varphi = 0$, on a :

$$\begin{aligned} R(\xi_\alpha, X)\xi_\beta &= \widetilde{\nabla}_{[\xi_\alpha, X]}\xi_\beta + \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_{\xi_\alpha}\xi_\beta - \widetilde{\nabla}_{\xi_\alpha}\widetilde{\nabla}_X\xi_\beta \\ &= -\varphi[\xi_\alpha, X] + \widetilde{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi X \\ &= -\varphi[\xi_\alpha, X] + \widetilde{\nabla}_{\varphi X}\xi_\alpha + [\xi_\alpha, \varphi X] \\ &= -\varphi^2 X = \begin{cases} X & \text{, si } X \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{, si } X \in \mathcal{M}. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.4.2. *Il n'ya pas des $\mathcal{S}$-variétés M^{2n+s}, $s \geq 2$ à courbure constante du courbure strictement positive.*

3.4.1 Courbure φ-sectionnelle

En 1972, Kobayashi et Tsuchiya [39] ont établi l'expression explicite de la courbure d'une $\mathcal{S}$-variété de courbure φ-sectionnelle constante ($\mathcal{S}$-espace forme, en abrégé), ce qui constitue un outil trés important pour l'étude de cette variété.

Définition 3.4.3. *Une section plan dans un espace tangent $T_x(\widetilde{M})$, $(x \in \widetilde{M})$ est appelée une φ-section s'il existe un vecteur unitaire X dans $T_x(\widetilde{M})$ orthogonal à $\xi_\alpha(\alpha = 1, ..., s)$ telle que $\{X, \varphi X\}$ soit une base orthonormée de cette section plan.*

Définition 3.4.4. *La courbure sectionnelle $K(X, \varphi X) = g(\widetilde{R}(X, \varphi X)\varphi X, X)$ est appelée φ-courbure sectionnelle.*

Proposition 3.4.5. *[35] Les courbures φ-sectionnelles déterminent le tenseur de courbure Riemannienne d'une $\mathcal{S}$-variété.*

3.4.2 $\mathcal{S}$-espace forme

Le Théorème suivant nous donne une expression de $\widetilde{R}$ lorsque la courbure φ-sectionnelle de $\mathcal{S}$-variété est constante.

Théorème 3.4.6. *[39] Si la courbure φ-sectionnelle en tout point d'une $\mathcal{S}$-variété de dimension $\geq 4+s$ est indépendante du choix d'une φ-section en un point, alors elle est constante sur la variété et le tenseur de courbure est donné par :*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \frac{1}{4}(c+3s)\{g(\varphi X,\varphi Z)\varphi^2Y - g(\varphi Y,\varphi Z)\varphi^2X\}\\ &+\frac{1}{4}(c-s)\{g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y + 2g(X,\varphi Y)\varphi Z\}\\ &+(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\varphi^2Y - (\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\varphi^2X\\ &+g(\varphi Y,\varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta) - g(\varphi X,\varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta)\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Où c est la courbure φ- sectionnelle constante.

Définition 3.4.7. *On appelle $\mathcal{S}$-espace forme une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$ de courbure φ-sectionnelle constante c et on le note $\widetilde{M}[c]$.*

La courbure sectionnelle $K(X,Y)$ des sections engendrées par $X, Y \in \mathcal{L}$ dans le cas d'un $\mathcal{S}$-espace form est donnée par le Théorème suivant (cf. Théorème 2.7 [8]) :

Théorème 3.4.8. *La courbure sectionnelle $K(X,Y)$ d'un $\mathcal{S}$-espace form $\widetilde{M}^{2n+s}$ de courbure φ-sectionnelle c, satisfait*

1. $c \leq K(X,Y) \leq \frac{c+3s}{4}$, *si* $c < s$
2. $\frac{c+3s}{4} \leq K(X,Y) \leq c$, *si* $c > s$,
3. $K(X,Y) = c$, *si* $c = s$

pour tout $X, Y \in \mathcal{L}$.

Proposition 3.4.9. *Le tenseur de Ricci d'un $\mathcal{S}$-espace form est donné par*

$$S(X,Y) = \frac{n(c+3s)+c-s}{2}g(\varphi X,\varphi Y) + 2n(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y))\,. \tag{3.20}$$

Remarque 3.4.10. *Comme la courbure scalaire τ est la trace du tenseur de Ricci , on en déduit que τ est donnée par*

$$\begin{aligned}\tau &= n^2(c+3s) + n(c-s) + 2ns\\ &= n^2(c+3s) + n(c+s)\\ &= n(n+1)c + n(3n+1)s\,.\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 3.4.6 et la Proposition précédente, on a

Corollaire 3.4.11. *Dans l'hypothèse du Théorème 3.4.6 , on a*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \frac{\tau+2ns}{4n(n+1)}\{g(\varphi X,\varphi Z)\varphi^2 Y - g(\varphi Y,\varphi Z)\varphi^2 X\}\\ &+\frac{\tau-2n(2n+1)s}{4n(n+1)}\{g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y + 2g(X,\varphi Y)\varphi Z\}\\ &+(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\varphi^2 Y - (\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Z))\varphi^2 X\\ &+g(\varphi Y,\varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta) - g(\varphi X,\varphi Z)(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s}\xi_\beta)\,.\end{aligned}$$

Et

$$S(X,Y) = (\frac{\tau}{2n} - s)g(\varphi X,\varphi Y) + 2n(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y))\,.$$

Lemme 3.4.12. *Le tenseur de Ricci d'une $\mathcal{S}$-variété de dimension $(2n+s)$ satisfait les propriétés suivantes*

1. $S(X,\xi_\alpha) = 2n(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(X)), \qquad (\alpha = 1,...,s)$
2. $S(\varphi X,\varphi Y) = S(X,Y) - 2n(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y))$
3. $S(X,\varphi Y) = -S(\varphi X,Y)\,.$

Du Lemme précédent, on a

Proposition 3.4.13. *[39] Il n'y a pas de $\mathcal{S}$-variété d'Einstein si $s \geq 2$.*

Remarque 3.4.14. *Si $\widetilde{M}$ est un espace de courbure constante, alors $\widetilde{M}$ est automatiquement d'Einstein, de sorte qu'il n'ya pas de $\mathcal{S}$-variété de courbure constante en raison de la proposition précédente.*

Maintenant, on présent quelques exemples de $\mathcal{S}$-espace formes ([35]) :

Exemple 3.4.15. *(Espaces Euclidiens)*
Soit $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ un espace Euclidien, de coordonnées cartésiennes $(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n,z^1,...,z^s)$, alors une $\mathcal{S}$-structure sur $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ est définie par :

$$\xi_\alpha = 2\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \qquad (\alpha = 1,...,s)$$

$$\eta_\alpha := \frac{1}{2}(dz^\alpha - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i), \qquad (\alpha = 1,...,s)$$

$$\varphi X := -\sum_{i=1}^{n} X'^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} X^i\frac{\partial}{\partial y^i} - (\sum_{i=1}^{n} X'^i y^i)(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z^\alpha})$$

$$g := \sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha\otimes\eta_\alpha + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i),$$

où $X = \sum_{i=1}^{n} X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} X'^i\frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\alpha=1}^{s} X''^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$. *Avec cette structure $\mathbb{R}^{2n+s}$ est une $\mathcal{S}$-variété de courbure φ-sectionnelle constante ($\mathcal{S}$-espace forme)et $c = -3s$.*

Exemple 3.4.16. $(CD^n \times \mathbb{R}^s)(c), \quad c < -3s.$
Soit CD^n un domaine complexe borné et simplement connexe à courbure sectionnelle holomorphique constante $k < 0$. Notons par (J, g) une structure Kählerienne sur CD^n. Puisque la deuxième forme fondamental ϕ de cette structure Kählerienne est fermée, $\phi = d\omega$, où ω est une forme réelle et analytique. Soit $t = (t^1, ..., t^s)$ le système de coordonnées sur $\mathbb{R}^s$, posons $\eta_\alpha = \pi^*\omega + dt^\alpha$ sur l'espace de produit $(CD^n \times \mathbb{R}^s$, où $\pi : CD^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow CD^n$ est la projection canonique. Posons $\eta = (\eta_1, ..., \eta_s)$, alors η est une forme de connexion sur le fibré trivial $CD^n \times \mathbb{R}^s$, en plus si on pose $\partial_\alpha = (\partial/\partial t^\alpha)$, $(\alpha = 1, ..., s)$, $<,>= \pi^*g + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha$, $\varphi\widetilde{X} = (J(\pi_*\widetilde{X}))^*$ est un relèvement horizontal de $J(\pi_*\widetilde{X})$. Alors $(\varphi, \xi_1, ..., \xi_s, \eta_1, ..., \eta_s, <,>)$ est une $\mathcal{S}$-structure sur $CD^n \times \mathbb{R}^s$, donc $CD^n \times \mathbb{R}^s$ est un $\mathcal{S}$-espace forme de courbure φ-sectionnelle $c = k - 3s < -3s$.

Exemple 3.4.17. $(S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1})(c), \quad c > -3s.$
Soit $S^{2n+1}(2)$ une sphère de rayon 2 et de dimension $(2n+1)$ et soit $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ une hypersurface dans un $\mathcal{S}$-espace forme $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}(-3(s-1))$.

Soit $(x^1, ..., x^{n+1}, y^1, ..., y^{n+1}, z^1, ..., z^{s-1})$ le système de coordoonées cartésienne et $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\xi_1, ..., \xi_{s-1}}, \widetilde{\eta}_1, ..., \widetilde{\eta}_{s-1}, g)$ une $\mathcal{S}$-structure sur $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}[-3(s-1)]$ (cf. l'exemple 3.4.14).
Pour plus de simplicité, on peut mettre :
$\xi_\alpha := \widetilde{\xi}_\alpha$ et $\eta_\alpha := \widetilde{\eta}_\alpha$ $(\alpha = 1, ..., s-1)$ sur M.
Le vecteur de courbure moyenne normalisée est représenté par :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n+1} y^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - (\sum_{i=1}^{n+1} x^i y^i)(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}),$$

si on pose

$$\xi_\alpha = \widetilde{\xi}_\alpha,\ \eta_\alpha = \widetilde{\eta}_\alpha,\ \alpha = 1, ..., s$$

$$\xi_s := -\widetilde{\varphi}\varepsilon = -\sum_{i=1}^{n+1} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial y^i} - (\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2)(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}),$$

et

$$\eta_s(X) := g(X, \xi_s),$$

pour tout vecteur tangent X de M.
Alors $M = S^{2n-1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ est un $\mathcal{S}$-espace forme de $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_1, ..., \xi_s, \eta_1, ..., \eta_s, g)$ et de courbure φ-sectionnelle constante $c = 4 - 3s$.

3.5 Tenseur parallèle du second ordre sur une $\mathcal{S}$-variété

[1] En 1926, Levy [42] a prouvé qu'un tenseur symétrique parallèle non-dégénéré du second ordre dans l'espace de formes réelles est proportionnel au tenseur métrique.
En 1989, Sharma [59] a généralisé le résultat de Levy pour une dimension supérieure à deux $(n > 2)$ et a également étudié un tenseur paralléle du second ordre sur l'espace de formes complexes.
Depuis lors, de nombreux auteurs ont étudié ce problème, consistant à trouver des tenseurs

1. Cette section a fait l'objet de la première partie de la publication [5].

parallèles symétriques et anti-symétriques sur différents espaces (α-Sasakienne et l'espace de formes Sasakiennes généralisées [18], [50] et [30]...ect) et ils ont obtenu des résultats fructueux.

Dans cette section, on considère une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$ de dimension $2n+s$, $s \geq 1$ et $n > 1$, de $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, $\alpha = 1, ..., s$.

Définition 3.5.1. *Un tenseur symétrique B du second ordre est dit un tenseur parallèle si $\widetilde{\nabla} B = 0$, où $\widetilde{\nabla}$ désigne l'opérateur de la dérivée convariante par rapport au tenseur de métrique g.*

Dans ce qui suit, on étudié le tenseur parallèle symétrique du second ordre sur une $\mathcal{S}$-variété.

Soit B un champ de tenseurs symétrique de type $(0,2)$ sur une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$, telle que $\widetilde{\nabla} B = 0$. En appliquant l'identité de Ricci [2] [59]

$$\widetilde{\nabla}^2 B(X, Y; Z, W) - \widetilde{\nabla}^2 B(X, Y; W, Z) = 0\,,$$

qui donne

$$B(\widetilde{R}(X, Y)Z, W) + B(Z, \widetilde{R}(X, Y)W) = 0\,, \tag{3.21}$$

pour tout champs de vecteurs X, Y, Z, W sur $\widetilde{M}$.
Nous savons que le tenseur symétrique parallèle du second ordre sur un espace forme de Sasaki généralisé est proportionel au tenseur métrique [30].
Concernant une $\mathcal{S}$-variété, on a établi le résultat suivant :

Théorème 3.5.2. *Dans une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, un tenseur symétrique parallèle du second ordre est proportionnel au tenseur métrique, si $s = 1$ et il s'agit d'une combinaison linéaire du tenseur métrique sous-jacent et des 1-formes de $\mathcal{S}$-structure, si $s \geq 2$.*

Preuve . Si on pose $X = Z = W = \xi_\gamma$, pour tout $\gamma \in \{1, ..., s\}$ et $s \geq 1$ dans (3.21) on obtient

$$B(\widetilde{R}(\xi_\gamma, Y)\xi_\gamma, \xi_\gamma) + B(\xi_\gamma, \widetilde{R}(\xi_\gamma, Y)\xi_\gamma) = 0\,,$$

alors il découle de la symétrie de B que

$$B(\widetilde{R}(\xi_\gamma, Y)\xi_\gamma, \xi_\gamma) = 0\,, \tag{3.22}$$

D'aprés (3.15) on obtient

$$\widetilde{R}(\xi_\gamma, Y)\xi_\gamma = \varphi^2 Y\,. \tag{3.23}$$

D'aprés (3.22) et (3.23) on a

$$B(\varphi^2 Y, \xi_\gamma) = 0\,. \tag{3.24}$$

2. Comme le tenseur de torsion de $\widetilde{\nabla}$ est nul, on a

$$\widetilde{\nabla}^2_{X,Y} B - \widetilde{\nabla}^2_{Y,X} B = \widetilde{R}(X, Y)\,.\,B,$$

où $\widetilde{\nabla}^2_{X,Y} B = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y B - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y} B$.

En utilisant (3.9) on obtient

$$B(Y,\xi_\gamma)-\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y)B(\xi_\beta,\xi_\gamma)=0\,, \tag{3.25}$$

pour tout $\gamma\in\{1,...,s\}$.
En différenciant covariante le long de X, on trouve

$$\begin{aligned} B(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi_\gamma)+B(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi_\gamma) &- \sum_{\beta=1}^{s}\{g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi_\beta)+g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi_\beta)\}B(\xi_\beta,\xi_\gamma)\\ &- \sum_{\beta=1}^{s}g(Y,\xi_\beta)\{B(\widetilde{\nabla}_X\xi_\beta,\xi_\gamma)+B(\xi_\beta,\widetilde{\nabla}_X\xi_\gamma)\}=0\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

pour tout $\gamma\in\{1,...,s\}$.
D'autre part, si on pose $Y=\widetilde{\nabla}_X Y$ dans (3.25), on obtient

$$B(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi_\gamma)-\sum_{\beta=1}^{s}g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi_\beta)B(\xi_\beta,\xi_\gamma)=0\,. \tag{3.27}$$

D'aprés (3.26),(3.27) and (3.13) on a

$$-B(Y,\varphi X)+g(Y,\varphi X)\sum_{\beta=1}^{s}B(\xi_\beta,\xi_\gamma)+\sum_{\beta=1}^{s}g(Y,\xi_\beta)\{B(\varphi X,\xi_\gamma)+B(\varphi X,\xi_\beta)\}=0\,, \tag{3.28}$$

pour tout $\gamma\in\{1,...,s\}$.
En remplaçant Y par φX dans (3.25) on obtient

$$B(\varphi X,\xi_\gamma)=0\,, \tag{3.29}$$

pour tout $\gamma\in\{1,...,s\}$.
D'aprés (3.28) et (3.29) on a

$$-B(Y,\varphi X)+g(Y,\varphi X)\sum_{\beta=1}^{s}B(\xi_\beta,\xi_\gamma)=0\,, \tag{3.30}$$

pour tout $\gamma\in\{1,...,s\}$.
En remplaçant X par φX dans (3.30) et utilisant (3.9) et (3.25), dans ce cas néanmoins, l'expression du tenseur $B(X,Y)$ ne peut être totalement simplifiée, mais on obtient seulement qu'elle est de la forme

$$B(X,Y)-g(X,Y)\sum_{\beta=1}^{s}B(\xi_\beta,\xi_\gamma)-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)B(\xi_\beta,\xi_\alpha)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)B(\xi_\beta,\xi_\gamma)=0\,, \tag{3.31}$$

donc,

$$B(X,Y) = g(X,Y)\sum_{\beta=1}^{s} B(\xi_\beta,\xi_\gamma) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta_\alpha(X)\{\eta_\beta(Y)B(\xi_\beta,\xi_\alpha) - \eta_\alpha(Y)B(\xi_\beta,\xi_\gamma)\}\,,$$

pour tout $\gamma \in \{1,...,s\}$.
✓ Pour $s = 1$ (c'est à dire $\widetilde{M}$ est une variété Sasakienne), il suffit de mettre $\xi_1 = \xi_2 ... = \xi_s = \xi$ et $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_s = \eta$, puis d'aprés (3.31) on obtient

$$B(X,Y) = B(\xi,\xi)g(X,Y).$$

✓✓ Pour $s \geq 2$, comme $\widetilde{\nabla}B = 0$ et d'aprés (3.29), on peut vérifier que $B(\xi_\alpha,\xi_\beta)$ est une constante pour tout $\alpha,\beta \in \{1,...,s\}$, en le différenciant le long d'un champ de vecteurs sur $\widetilde{M}$. Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 4

Hypersurfaces pseudo-parallèles

4.1 Introduction

[1] On considère une immersion isométrique $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$, et σ une seconde forme fondamentale de M.
Ferus [28] a introduit le concept des immersions parallèles ($\widetilde{\nabla}\sigma = 0$) et il a classifié de telles immersions de l'espace de formes réelles de courbure sectionnelle constante. Les sous-variétés dans l'espace de formes complexes $\widetilde{M}^n(c)$, $n \geq 2$, de courbure sectionnelle holomorphique constante $4c$, avec une seconde forme fondamentale parallèle ont été classifiées par Naitoh [52]. En conséquence, la seconde forme fondamentale d'une hypersurface réelle M dans $\widetilde{M}^n(c)$, $n \geq 2$, $4c \neq 0$ ne peut jamais être parallèle. Dans [56], deux théorèmes concernant la réduction des codimensions de sous-variétés parallèles dans l'espace forme de Sasaki ont été prouvés.
D'autre part, Deprez [19] a défini l'immersion f comme semi-parallèle si

$$\widetilde{R}(X, Y).\sigma = (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]})\sigma = 0,$$

pour tous les vecteurs tangents X, Y de M. Les hypersurfaces semi-parallèles de l'espace Euclidien ont été classées par Deprez [20] en 1986. Plus tard, en 1990 Lumiste [45] a considéré qu'une sous-variété semi-parallèle d'un espace formes est l'enveloppe du seconde ordre de la famille des sous-variétés parallèles. Ainsi, dans le cas des hypersurfaces dans la sphère et dans l'espace hyperbolique, Dillen [23] en 1991 a prouvé qu'elles sont soit plates, parallèles ou des hypersurfaces de rotation de certaines hélices. Maeda [47] a étudié les hypersurfaces réelles semi-parallèles dans l'espace de formes complexes $\widetilde{M}^n(c)$, $c > 0$, il a obtenu qu'aucune hypersurface réelle dans $\widetilde{M}^n(c)$, $c > 0$ et $n \geq 3$ est semi-parallèle. Dans [53], Neibergall et Ryan ont également prouvé l'inexistence d'hypersurface réelle semi-parallèle dans $\widetilde{M}^2(c)$, $4c \neq 0$. Plus tard, Ortega [55] a fait une preuve pour $4c \neq 0$ et $n \geq 3$, montrant qu'il n'ya pas des hypersurfaces réelles semi-parallèles dans $\widetilde{M}(c)$, $4c \neq 0$ et $n \geq 2$.
De plus, dans l'espace forme de Sasaki, Belkhelfa et Gherib [29] [30] ont prouvé l'inexistence des hypersurfaces parallèles et semi-parallèles.
Dans [2] et [3] les auteurs ont généralisé les travaux de Deprez et Dillen, ils ont introduit la notion des sous-variétés pseudo-parallèles dans l'espace formes (space forms) comme une généralisation de sous-variétés semi-parallèles. La classification des hypersurfaces pseudo-parallèles

1. Ce chapitre a fait l'objet de l'article [5].

dans l'espace de formes réelles a été obtenue par Asperti et ses co-auteurs dans [3].
Dans [44], Lobos et Ortega ont donné une classification des hypersurfaces réelles pseudo-parallèles dans l'espace de formes complexes $\widetilde{M}(c)$, $c =^{+}_{-} 1$, $n \geq 2$.

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence d'hypersurfaces pseudo-parallèles dans l'espace de forme de Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$. Ensuite, on va montrer l'inexistense d'hypersurfaces parallèles dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, et en déduire l'inexistence d'hypersurfaces semi-parallèles. Enfin, on va étudier l'existence d'hypersurfaces pseudo-parallèles qui répondent à certaines conditions dans $\mathcal{S}$-espace forme.

On considère une hypersurface M d'une variété Riemannienne $\widetilde{M}$. Donc, les formules de Gauss et de Weingarten sont données par :

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(A_V X, Y)V$$
$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X\,,$$

où X et Y sont les champs de vecteurs tangents de M, V est un vecteur unitaire normal à M, σ est la seconde forme fondamentale et A est l'opérateur de Weingarten.

4.2 Hypersurfaces pseudo-parallèles dans l'espace forme de Sasaki

Soit M une sous-variété d'une variété Sasakienne $\widetilde{M}$ de dimension $2n+1$, $n > 1$. Pour tout champ de vecteurs X tangent à $\widetilde{M}$, on peut mettre

$$\varphi X = TX + NX\,, \tag{4.1}$$

où TX et NX sont les composantes tangente et normale de φX, respectivement.

Proposition 4.2.1. *[71] Soit M une sous-variété d'une variété Sasakienne $\widetilde{M}$, alors*

$$\nabla_X \xi = -TX\,,\ \sigma(X, \xi) = -NX\,,$$

pour tout X tangent à M.

Définition 4.2.2. *Une sous-variété M est dite invariante si ξ est tangent à M et $\varphi T_x(M) \subset T_x(M)$ pour tout $x \in M$, c'est à dire $\varphi X \in T(M)$ pour tout $X \in T(M)$, et dans ce cas $NX = 0$.*

Théorème 4.2.3. *Soient $\widetilde{M}$ une variété Sasakienne de dimension $2n+1$ et M une sous-variété invariante de $\widetilde{M}$, alors M est aussi une variété Sasakienne et donc sa dimension $p = 2m+1$.*

Lemme 4.2.4. *Soit M^{2m+1} une sous-variété invariante d'une variété Sasakienne $\widetilde{M}^{2n+1}$, alors on a*

$$\sigma(X, \xi) = 0,\ \ A_V \xi = 0\,, \tag{4.2}$$

où $X \in TM$ et $V \in T^{\perp}M$.

Théorème 4.2.5. *[31] Il n'existe pas une hypersurface invariante d'une variété de contact.*

Donc, comme les variétés Sasakiennes sont des variétés de contact alors, il n'existe pas une hypersurface invariante d'une variété Sasakienne.

Soit M^{2n} une hypersurface d'un espace formes de Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, ξ est tangent à M. Alors, le champ de tenseurs $\widetilde{R}\,.\,\sigma$ de type $(0,4)$ sur M est défini par

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(X,Y,Z,W) = -\sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W).$$

Donc la condition de pseudo-parallélisme $\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(g,\sigma)$ devient

$$\sigma(R(X,Y)Z,W) + \sigma(Z,R(X,Y)W) + LQ(g,\sigma)(Z,W;X,Y) = 0, \tag{4.3}$$

où

$$\begin{aligned} Q(g,\sigma)(Z,W;X,Y) &= ((X\wedge Y)\,.\,\sigma)(Z,W) \\ &= -\sigma((X\wedge Y)Z,W) - \sigma(Z,(X\wedge Y)W) \\ &= -g(Y,Z)\sigma(X,W) + g(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad -g(Y,W)\sigma(Z,X) + g(X,W)\sigma(Z,Y). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ainsi, le tenseur de courbure est donné par l'équation de Gauss

$$R(X,Y)Z = \widetilde{R}(X,Y)Z + g(A_VY,Z)A_VX - g(A_VX,Z)A_VY. \tag{4.5}$$

On note A au lieu A_V, dans ce qui suit.

Théorème 4.2.6. *Il n'existe aucune hypersurface pseudo-parallèle dans un espace forme de Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, tel que le champ de vecteurs ξ est tangent à M et $c \neq 1$.*

Preuve . On suppose que l'hypersurface M est pseudo-parallèle, d'aprés (3.7) et (4.5), on obtient alors

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \\ &\quad + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad -g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y - 2g(\varphi X,Y)\varphi Z\} \\ &\quad +g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY, \end{aligned} \tag{4.6}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y,Z \in TM$.

En substituant (4.6), (4.4) dans (4.3), et comme $\sigma(X,Y) = g(AY,X)V = g(AX,Y)V$, la condition (4.3) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)g(AX,W)V - g(X,Z)g(AY,W)V + g(Y,W)g(AX,Z)V \\
&\quad -g(X,W)g(AY,Z)V\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)g(AY,W)V - \eta(Y)\eta(Z)g(AX,W)V \\
&\quad +g(X,Z)\eta(Y)g(A\xi,W)V - g(Y,Z)\eta(X)g(A\xi,W)V + g(\varphi Y,Z)g(A\varphi X,W)V \\
&\quad -g(\varphi X,Z)g(A\varphi Y,W)V - 2g(\varphi X,Y)g(A\varphi Z,W)V + \eta(X)\eta(W)g(AY,Z)V \\
&\quad -\eta(Y)\eta(W)g(AX,Z)V + g(X,W)\eta(Y)g(A\xi,Z)V - g(Y,W)\eta(X)g(A\xi,Z)V \\
&\quad +g(\varphi Y,W)g(A\varphi X,Z)V - g(\varphi X,W)g(A\varphi Y,Z)V - 2g(\varphi X,Y)g(A\varphi W,Z)V\} \\
&\quad +g(AY,Z)g(A^2X,W)V - g(AX,Z)g(A^2Y,W)V \\
&\quad +g(AY,W)g(A^2X,Z)V - g(AX,W)g(A^2Y,Z)V + L\{-g(Y,Z)g(AX,W)V \\
&\quad +g(X,Z)g(AY,W)V - g(Y,W)g(AX,Z)V + g(X,W)g(AY,Z)V\}, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z, W \in TM$ et $V \in T^{\perp}M$.

Comme $g(A\varphi W, Z) = -g(W, \varphi AZ)$, l'équation (4.7) devient

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)AX - g(X,Z)AY + g(AX,Z)Y - g(AY,Z)X\} \\
&\quad +\frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)AY - \eta(Y)\eta(Z)AX + g(X,Z)\eta(Y)A\xi \\
&\quad -g(Y,Z)\eta(X)A\xi + g(\varphi Y,Z)A\varphi X - g(\varphi X,Z)A\varphi Y \\
&\quad -2g(\varphi X,Y)A\varphi Z + \eta(X)g(AY,Z)\xi - \eta(Y)g(AX,Z)\xi \\
&\quad +\eta(Y)g(A\xi,Z)X - \eta(X)g(A\xi,Z)Y + g(A\varphi X,Z)\varphi Y \\
&\quad -g(A\varphi Y,Z)\varphi X + 2g(\varphi X,Y)\varphi AZ\} \\
&\quad +g(AY,Z)A^2X - g(AX,Z)A^2Y + g(A^2X,Z)AY - g(A^2Y,Z)AX \\
&\quad +L\{-g(Y,Z)AX + g(X,Z)AY - g(AX,Z)Y + g(AY,Z)X\}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Si on pose $Y = Z$ dans (4.8), on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{c+3}{4}\{g(Z,Z)AX - g(X,Z)AZ + g(AX,Z)Z - g(AZ,Z)X\} \\
&\quad +\frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)AZ - \eta(Z)\eta(Z)AX + g(X,Z)\eta(Z)A\xi \\
&\quad -g(Z,Z)\eta(X)A\xi + g(\varphi Z,Z)A\varphi X - g(\varphi X,Z)A\varphi Z \\
&\quad -2g(\varphi X,Z)A\varphi Z + \eta(X)g(AZ,Z)\xi - \eta(Z)g(AX,Z)\xi \\
&\quad +\eta(Z)g(A\xi,Z)X - \eta(X)g(A\xi,Z)Z + g(A\varphi X,Z)\varphi Z \\
&\quad -g(A\varphi Z,Z)\varphi X + 2g(\varphi X,Z)\varphi AZ\} \\
&\quad +g(AZ,Z)A^2X - g(AX,Z)A^2Z + g(A^2X,Z)AZ - g(A^2Z,Z)AX \\
&\quad +L\{-g(Z,Z)AX + g(X,Z)AZ - g(AX,Z)Z + g(AZ,Z)X\}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

On considère $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ un repère locale orthonormé sur TM. On pose $Z = e_k$ dans (4.9) et en prenant la sommation sur $k = 1, ..., 2n$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{c+3}{4}\{2n\,AX - AX + AX - tr(A)X\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)A\xi - AX \\ & +\eta(X)A\xi - 2n\,\eta(X)A\xi - A\varphi^2X - 2A\varphi^2X + \eta(X)tr(A)\xi \\ & -g(AX,\xi)\xi + g(A\xi,\xi)X - \eta(X)A\xi + \varphi A\varphi X - tr(A\varphi)\varphi X + 2\varphi A\varphi X\} \\ & +tr(A)A^2X - A^3X + A^3X - tr(A^2)AX \\ & +L\{-2n\,AX + AX - AX + tr(A)X\}\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En effet, $\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)A\varphi e_k = A\varphi^2 X$, car pour tout $Y \in TM$ on a

$$\begin{aligned} g(\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)A\varphi e_k, Y) &= \sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(A\varphi e_k, Y) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(\varphi e_k, AY) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(e_k, \varphi AY) \\ &= -g(\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)e_k, \varphi AY) \\ &= -g(\varphi X, \varphi AY) = g(\varphi^2 X, AY) = g(A\varphi^2X, Y), \end{aligned}$$

et on a $\sum_{k=1}^{2n} g(A\varphi X, e_k)\varphi e_k = \varphi A\varphi X$ car

$$\begin{aligned} g(\sum_{k=1}^{2n} g(A\varphi X, e_k)\varphi e_k, Y) &= \sum_{k=1}^{2n} g(A\varphi X, e_k)g(\varphi e_k, Y) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} g(A\varphi X, e_k)g(e_k, \varphi Y) \\ &= -g(\sum_{k=1}^{2n} g(A\varphi X, e_k)e_k, \varphi Y) \\ &= -g(A\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi A\varphi X, Y), \end{aligned}$$

et $\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)\varphi A e_k = \varphi A\varphi X$, car

$$\begin{aligned} g(\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)\varphi A e_k, Y) &= \sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(\varphi A e_k, Y) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(A e_k, \varphi Y) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)g(e_k, A\varphi Y) \\ &= -g(\sum_{k=1}^{2n} g(\varphi X, e_k)e_k, A\varphi Y) \\ &= -g(\varphi X, A\varphi Y) = -g(A\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi A\varphi X, Y), \end{aligned}$$

pour tout $Y \in TM$.
Puisque la structure de champ de vecteurs ξ est tangente à M, alors la formule de Gauss implique que

$$-\varphi X = \widetilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + g(AX, \xi)V,$$

à partir de l'aquelle on a $(\varphi X)^{\perp} = NX = g(AX, \xi)V$.
Comme $\varphi\xi = 0$, l'équation ci-dessus implique que

$$g(A\xi, \xi)V = 0\,,$$

pour tout $V \in T^{\perp}M$.
Comme $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$, alors $-A\varphi^2 X = AX - \eta(X)A\xi$ et l'équation (4.10) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c+3}{4}\{2n\,AX - tr(A)X\} + \frac{c-1}{4}\{-2(n+1)\eta(X)A\xi + 2AX + \eta(X)tr(A)\xi \\ &\quad -g(AX,\xi)\xi - tr(A\varphi)\varphi X + 3\varphi A\varphi X\} + L\{-2n\,AX + tr(A)X\} \\ &\quad +tr(A)A^2X - tr(A^2)AX = 0\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Pout tout $Y \in TM$, l'équation (4.11) se transforme en

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c+3}{4}\{2n\,g(AX,Y) - tr(A)g(X,Y)\} + \frac{c-1}{4}\{-2(n+1)\eta(X)g(A\xi,Y) \\ &\quad +2g(AX,Y) + \eta(X)tr(A)g(\xi,Y) - g(AX,\xi)g(\xi,Y) - tr(A\varphi)g(\varphi X,Y) \\ &\quad +3g(\varphi A\varphi X,Y)\} + L\{-2n\,g(AX,Y) + tr(A)g(X,Y)\} \\ &\quad +tr(A)g(A^2X,Y) - tr(A^2)g(AX,Y) = 0. \end{aligned}$$

Si X et Y sont orthogonaux dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= 2n\frac{c+3}{4}g(AX,Y) + \frac{c-1}{4}\{-2(n+1)\eta(X)g(A\xi,Y) + 2g(AX,Y) \\ &\quad +tr(A)\eta(X)\eta(Y) - g(AX,\xi)\eta(Y) - tr(A\varphi)g(\varphi X,Y) + 3g(\varphi A\varphi X,Y)\} \\ &\quad -2n\,L\,g(AX,Y) + tr(A)g(A^2X,Y) - tr(A^2)g(AX,Y)\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

En échangeant X et Y dans (4.12), il en découle que

$$\begin{aligned} 0 &= 2n\frac{c+3}{4}g(AY,X) + \frac{c-1}{4}\{-2(n+1)\eta(Y)g(A\xi,X) + 2g(AY,X) \\ &\quad +tr(A)\eta(Y)\eta(X) - g(AY,\xi)\eta(X) - tr(A\varphi)g(\varphi Y,X) + 3g(\varphi A\varphi Y,X)\} \\ &\quad -2n\,Lg(AY,X) + tr(A)g(A^2Y,X) - tr(A^2)g(AY,X)\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En soustrayant (4.12) à (4.13), on obtient

$$\frac{c-1}{4}\{(2n+1)\eta(X)g(AY,\xi) - (2n+1)\eta(Y)g(AX,\xi) + 2tr(A\varphi)g(\varphi X,Y)\} = 0\,, \tag{4.14}$$

car il résulte de $g(AX,Y) = g(\sigma(X,Y),V) = g(X,AY)$ et $g(\varphi X,Y) = -g(X,\varphi Y)$ que $g(\varphi A\varphi X,Y) = g(X,\varphi A\varphi Y)$.
Si on pose $Y = \xi$ dans (4.14), on trouve

$$(2n+1)\frac{c-1}{4}g(AX,\xi) = 0.$$

Comme $c \neq 1$, alors $g(AX,\xi) = 0$, en utilisant la formule de Gauss pour $Y = \xi$, puisque $\widetilde{\nabla}_X\xi = -\varphi X$, il en découle que $\widetilde{\nabla}_X\xi = \nabla_X\xi = -\varphi X$, ($\nabla_X\xi$ est la partie tangente de $\widetilde{\nabla}_X\xi$). Par conséquent φX est tangent, et puisque ξ est tangent à M, alors M est une hypersurface invariante, mais cela contredit le Théorème 4.2.5 .

■

Rappelons maintenant l'exemple suivant :

Exemple 4.2.7. *[6] On considère $\mathbb{R}^{2n+1}$ de coordonnées cartésiennes (x^i, y^i, z), $i = 1, ..., n$ et sa 1-forme $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i)$. Le champ caractéristique ξ est donné par $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$, le champ de tenseurs φ est donné par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}$$

et la métrique Riemannienne $g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (dy^i)^2$ est une métrique associée pour η. Dans ce cas $\mathbb{R}^{2n+1}$ est un espace forme de Sasaki avec φ-sectionnelle constante $c = -3$ noté par $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$.

Une conséquence immédiate en est le Corollaire suivant

Corollaire 4.2.8. *Il n'y a pas d'hypersurfaces pseudo-parallèles dans $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$, avec $n > 1$.*

Remarque 4.2.9. *Soit S^{2n+1} une sphère unitaire de dimension $(2n+1)$, c'est à dire $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} :\mid z \mid = 1\}$. Pour tout point $z \in S^{2n+1}$, on pose $\xi = Jz$, où J est une structure presque complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$. On considère une projection orthogonale*

$$\pi : T_x(\mathbb{C}^{n+1}) \longrightarrow T_x(S^{2n+1}).$$

En mettant $\varphi = \pi \circ J$, nous avons une structure Sasakienne (φ, ξ, η, g) sur S^{2n+1}, où η est une 1-forme duale de ξ et g un tenseur de métrique sur S^{2n+1}. Nous voyons que S^{2n+1} est de courbure φ-sectionnelle constante 1 (cf.[64]).
Maintenant, on considère l'hypersurface de Clifford $M_{p,q}$ définie par

$$M_{p,q} = S^{2p+1}(\sqrt{\frac{p}{2n}}) \times S^{2q+1}(\sqrt{\frac{q}{2n}}),\ p + q = n - 1$$

Alors, $M_{p,q}$ est une hypersurface minimale de S^{2n+1} où la structure de champ de vecteurs ξ est tangente à S^{2n+1} et $M_{p,q}$ a une seconde fondamentale forme parallèle, donc elle est pseudo-parallèle. Par conséquent, l'hypothèse dans le Theorem 4.2.6 sur la courbure φ-sectionnelle $c \neq 1$ de l'espace ambiant $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$ est essentielle.

4.3 Hypersurfaces dans $\mathcal{S}$-espace forme

4.3.1 Hypersurfaces parallèles

Dans cette section on considère une hypersurface M d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, où $s \geq 1$ et $n > 1$, de $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ $(\alpha = 1, ..., s)$ et de courbure φ-sectionnelle constante c.

Tout d'abord on va rappeler la définition d'une variété anti-invariante :

Définition 4.3.1. *Une sous-variété M est appelée anti-invariante si $\varphi T_x(M) \subseteq T_x(M)^{\perp}$ pour tout $x \in M$, c'est à dire $\varphi X \in (TM)^{\perp}$, pour tout $X \in T(M)$.*

Lemme 4.3.2. *[68] Soit M une sous-variété d'une $\mathcal{S}$-variété. alors pour tout $X, Y, \xi_\alpha \in TM$ on a*

1. $TX = -\nabla_X \xi_\alpha$,
2. $NX = -\sigma(X, \xi_\alpha)$.

Dans ce cas, si M est une sous-variété anti-invariante alors, $TX = -\nabla_X \xi_\alpha = 0$ et on obtient ce résultat

Proposition 4.3.3. *Il n'y a pas d'hypersurfaces anti-invariantes parallèles dans une $\mathcal{S}$-variété.*

Preuve . On suppose que M est une hypersurface anti-invariante et parallèle dans $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, donc pour tout $X, Y \in TM$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{\nabla}_X \sigma(Y, \xi_\alpha) \\ &= \nabla^{\perp}_X \sigma(Y, \xi_\alpha) - \sigma(\nabla_X Y, \xi_\alpha) - \sigma(Y, \nabla_X \xi_\alpha) \\ &= -\sigma(\nabla_X Y, \xi_\alpha) = 0\,, \end{aligned}$$

Mais cela contredit notre hypothèse (car M est anti-invariante et donc $NX = -\sigma(X, \xi_\alpha) \neq 0$, pour tout $X \in TM$). ∎

Théorème 4.3.4. *Soit M une hypersurface d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, tel que la structure de champs de vecteurs tangente à M, avec $c \neq s$, alors M n'est pas parallèle.*

Preuve . Supposons que M est une hypersurface d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ et σ la seconde forme fondamentale de M.
On note par C un champ de vecteurs unitaire normal à M et soit $U = -\varphi C$.
Alors, comme $\eta_\alpha(C) = 0$, pour tout α

$$g(U, U) = g(\varphi C, \varphi C) = 1\,,$$

et

$$g(U, C) = -g(\varphi C, C) = 0\,.$$

En plus, si $X \in T(M)$, on a

$$\varphi X = TX + u(X)C\,. \tag{4.15}$$

Où u et T sont les champs de tenseurs sur M de type $(0,1)$ et $(1,1)$ respectivement, donc TX represente la partie tangente de φX.
Dans la suite, on a $u \neq 0$, clairement d'aprés (4.15), $u(X) = g(U, X)$. En outre, il est facile

de vérifier que $\varphi U = C$.
Par l'équation de Codazzi, (4.15) et (3.19) on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{\nabla}_X\sigma(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X,Z) \\
&= (\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} \\
&= \frac{c-s}{4}\{g(\varphi Y,Z)\varphi X - g(\varphi X,Z)\varphi Y + 2g(X,\varphi Y)\varphi Z\}^{\perp} \\
&= \frac{c-s}{4}\{g(\varphi Y,Z)u(X) - g(\varphi X,Z)u(Y) + 2g(X,\varphi Y)u(Z)\}C = 0\,.
\end{aligned}$$

Si on pose $Z = U$, on déduit que

$$\frac{c-s}{4}g(X,TY) = 0\,,$$

comme $c \neq s$ alors $TY = 0$, c'est à dire M est une hypersurface anti-invariante, selon la Proposition 4.3.3 on obtient une contraduction. ■

4.3.2 Hypersurfaces semi-parallèles

Dans cette section, on utilise nos résultats précédents pour déduire l'inexistence d'une hypersurface semi-parallèle dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$.

Théorème 4.3.5. *Il n'existe pas une hypersurface semi-parallèle dans un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec la structure des champs de vecteurs tangente à cette hypersurface et $c \neq s$.*

Preuve . Si M est une hypersurface semi-parallèle et σ la seconde forme fondamentale de M, on a

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma(X,Y;Z,W) = -\sigma(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,\widetilde{R}(X,Y)W) = 0\,.$$

En utilisant le même argument que dans le Théorème 3.5.2 (chapitre 3) on en déduit que

$$\sigma = Kg \;\; or \;\; \sigma = K'g + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K^{\alpha\beta}\eta_\alpha\otimes\eta_\beta - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K^{\beta\gamma}\eta_\alpha\otimes\eta_\alpha\,,$$

où $K, K', K^{\alpha\beta}, K^{\beta\gamma}$ sont constants, donc il est clair que

$$\widetilde{\nabla}\sigma = 0\,,$$

ce qui contredit le Théorème 4.3.4 . ■

Corollaire 4.3.6. *Il n'y a pas d'hypersurfaces semi-parallèles dans $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$.*

4.3.3 Hypersurfaces pseudo-parallèles avec certaines conditions

Dans cette section, on va étudier les hypersurfaces pseudo-parallèles totalement φ-ombilicales dans $\widetilde{M}$, où $\widetilde{M}$ est un $\mathcal{S}$-espace forme de dimension $2n+2+s$ et de courbure φ-sectionnelle constante $-3s$.

Pour cela, on rappelle les notions de la sous-variété totalement φ-géodésique et totalement φ-ombilicale.
Il est nécessaire, d'utiliser une variation d'une sous-variété totalement géodésique (resp,. totalement ombilicale) de $\mathcal{S}$-variété, plus liée à la structure, à savoir une sous-variété *totalement φ-géodésique* (resp.,*totalement φ-ombilicale*) [12].
Ainsi, une sous-variété M de dimension $(n+s)$ d'une $\mathcal{S}$-variété, où la structure ξ_α est tangente à M, est dite une sous-variété *totalement φ-géodésique* (resp., *totalement φ-ombilicale*), si la distribution $\mathcal{L}$ est totalement géodésique (resp.,totalement ombilicale), c'est à dire, si $\sigma(X,Y)=0$ (resp., $\sigma(X,Y)=g(X,Y)V$ tel que $V=\frac{n+s}{n}H$, où H indique le vecteur de courbure moyenne sur M) pour tout $X,Y\in\mathcal{L}$.
Autrement dit, puisque $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta)=0$, pour tout $\alpha,\beta=1,...,s$, on a les deux définitions suivantes :

Définition 4.3.7. *Soit M^{m+s} une sous-variété d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, où la structure de champs de vecteurs est tangente à M. Alors M est dite totalement φ-géodésique si :*

$$\sigma(X,Y)=\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta_\alpha(X)\sigma(Y,\xi_\alpha)+\eta_\alpha(Y)\sigma(X,\xi_\alpha)\}\,,$$

pour tout $X,Y\in TM$.

Définition 4.3.8. *Soit M^{m+s} une sous-variété d 'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, où la structure de champs de vecteurs est tangente à M. Alors, M est dite totalement φ-ombilicale si :*

$$\sigma(X,Y)=\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta_\alpha(X)\sigma(Y,\xi_\alpha)+\eta_\alpha(Y)\sigma(X,\xi_\alpha)\}+g(\varphi X,\varphi Y)V\,.$$

Pour tout $X,Y\in TM$, où $V=(\frac{m+s}{m})H$ et H indique le vecteur de courbure moyenne.

Remarque 4.3.9. *Une sous-variété totalement φ-ombilicale est totalement φ-géodésique si et seulement si elle est minimale. D'autre part, il est facile de montrer qu'une sous-variété totalement φ-géodésique est minimale et totalement φ-ombilicale.*

Commençons par rappeler les résultats de Hasegawa et ses co-auteurs [35] :

Lemme 4.3.10. *Soit $\widetilde{M}$ une variété Riemannienne presque de s-contact de dimension $(2n+2+s)$ avec la structure $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_\alpha,\widetilde{\eta}_\alpha,g)$ et M une hypersurface orientable dans $\widetilde{M}$, tel que $\widetilde{\xi}_1,....,\widetilde{\xi}_s$ sont tangents à M, alors M admet une structure métrique presque de $(s+1)$-contact.*

Proposition 4.3.11. *Soit $\widetilde{M}$ une $\mathcal{S}$-variété de dimension $(2n+2+s)$, avec la structure $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\xi_\alpha}, \widetilde{\eta_\alpha}, g)$ et M une hypersurface totalement φ-ombilicale avec la courbure moyenne constante $\frac{2n+1}{2n+1+s}$, alors M admet une $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ tel que $\alpha = 1, ..., s+1$.*

Théorème 4.3.12. *Soit $\widetilde{M}(-3s)$ un $\mathcal{S}$-espace forme de dimension $(2n+2+s)$ avec la courbure $\widetilde{\varphi}$-sectionnelle constante $-3s$, et M une hypersurface totalement φ-ombilicale avec la courbure moyenne constante $\frac{2n+1}{2n+1+s}$, alors M admet une $(s+1)$-structure avec une courbure φ-sectionnelle constante $4-3(s+1)$.*

Dans tout ce qui suit, M est une hypersurface totalement φ-ombilicale de $(s+1)$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}$ de dimension $2n+2+s$ et de courbure φ-sectionnelle constante $-3s$, on note sa $\mathcal{S}$-structure par $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\xi_\alpha}, \widetilde{\eta_\alpha}, g)$.
Supposons ε un champ de vecteurs unitaire normal sur M. Dans ce cas, ε est un vecteur de courbure moyenne normalisée sur M, défini par

$$\varepsilon =: \frac{2n+1+s}{2n+1} H \,,$$

où H indique le vecteur de courbure moyenne sur M dans $\widetilde{M}$.
On peut mettre

$$\xi_{s+1} := -\widetilde{\varphi}\varepsilon, \quad \eta_{s+1}(X) := g(X, \xi_{s+1}) \quad et \quad \varphi X := \widetilde{\varphi} X - \eta_{s+1}(X)\varepsilon \,,$$

pour tout $X \in TM$.
Afin de simplifier, on pose

$$\xi_\alpha := \widetilde{\xi_\alpha} \,,\, \eta_\alpha := \widetilde{\eta_\alpha} \,, \quad (\alpha = 1, ..., s)$$

Comme M est totalement φ-ombilicale, la seconde forme fondamentale σ est alors représentée par

$$\sigma(X,Y) = g(\widetilde{\varphi}X, \widetilde{\varphi}Y)\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\sigma(Y, \xi_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(Y)\sigma(X, \xi_\alpha) \,. \tag{4.16}$$

Pour X et Y des vecteurs tangent de M.
Puisque $\widetilde{M}$ est un $\mathcal{S}$-espace forme, alors on a $\widetilde{\nabla}_X \xi_\alpha = -\widetilde{\varphi}X$, et d'autre part on a $-\widetilde{\varphi}X = \nabla_X \xi_\alpha + \sigma(X, \xi_\alpha) = -\varphi X - \eta_{s+1}(X)\varepsilon$, donc on en déduit que

$$\nabla_X \xi_\alpha = -\varphi X \,, \ \ \sigma(X, \xi_\alpha) = -\eta_{s+1}(X)\varepsilon \,,\ \alpha \in 1, ..., s+1. \tag{4.17}$$

On peut alors récrire (4.16) comme suit

$$\sigma(X,Y) = [g(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - (\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X))\eta_{s+1}(Y) - (\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(Y))\eta_{s+1}(X)]\varepsilon \,. \tag{4.18}$$

Comme M est un $(s+1)$-espace forme de courbure φ-sectionnelle constante $4-3(s+1)$

(d'aprés le Théorème 4.3.12), alors le tenseur de courbure de M est donné par

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(\varphi X,\varphi Z)\varphi^2 Y - g(\varphi Y,\varphi Z)\varphi^2 X \\ &+ s\{g(\varphi X,Z)\varphi Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X + 2g(\varphi X,Y)\varphi Z\} \\ &+ ((\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))((\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(Z))\varphi^2 Y - (\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))((\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(Z))\varphi^2 X \\ &+ (\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))g(\varphi Y,\varphi Z)((\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta) - (\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))g(\varphi X,\varphi Z)((\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta) \end{aligned} \tag{4.19}$$

On a ce résultat :

Théorème 4.3.13. *Soit $\widetilde{M}^{2n+2+s}(-3s)$ un $\mathcal{S}$-space forme, et M une hypersurface totalement φ-ombilicale de $\widetilde{M}^{2n+2+s}(-3s)$ avec la courbure moyenne constante $\frac{2n+1}{2n+1+s}$, alors M n'est pas pseudo-parallèle.*

Preuve . On suppose que M est une hypersurface pseudo-parallèle, donc

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(X,Y,Z,W) = LQ(g,\sigma)(Z,W,X,Y)\,,$$

où L est une fonction réelle sur M et

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(X,Y,Z,W) = -\sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W)\,, \tag{4.20}$$

et

$$\begin{aligned} Q(g,\sigma)(Z,W;X,Y) &= ((X\wedge Y)\,.\,\sigma)(Z,W) \\ &= -\sigma((X\wedge Y)Z,W) - \sigma(Z,(X\wedge Y)W) \\ &= -g(Y,Z)\sigma(X,W) + g(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad -g(Y,W)\sigma(Z,X) + g(X,W)\sigma(Z,Y)\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

En substituant (4.18) et (4.19) dans (4.20), on obtient

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(X,Y,Z,W) \;=\; & -g(\varphi X,\varphi Z)\sigma(\varphi^2 Y,W)+g(\varphi Y,\varphi Z)\sigma(\varphi^2 X,W)\\
& -s\{g(\varphi X,Z)\sigma(\varphi Y,W)-g(\varphi Y,Z)\sigma(\varphi X,W)+2g(\varphi X,Y)\sigma(\varphi Z,W)\}\\
& -(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z))\sigma(\varphi^2 Y,W)\\
& +(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z))\sigma(\varphi^2 X,W)\\
& -(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))g(\varphi Y,\varphi Z)\sigma(\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta,W)\\
& +(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))g(\varphi X,\varphi Z)\sigma(\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta,W)\\
& -g(\varphi X,\varphi W)\sigma(\varphi^2 Y,Z)+g(\varphi Y,\varphi W)\sigma(\varphi^2 X,Z)\\
& -s\{g(\varphi X,W)\sigma(\varphi Y,Z)-g(\varphi Y,W)\sigma(\varphi X,Z)+2g(\varphi X,Y)\sigma(\varphi W,Z)\}\\
& -(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\alpha(W))\sigma(\varphi^2 Y,Z)\\
& +(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\alpha(W))\sigma(\varphi^2 X,Z)\\
& -(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))g(\varphi Y,\varphi W)\sigma(\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta,Z)\\
& +(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))g(\varphi X,\varphi W)\sigma(\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta,Z)\,, \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

comme M est totalement φ-ombilicale et d'aprés (4.18) on a

$$\sigma(\varphi^2 X,Y)=g(\varphi^2 X,Y)\varepsilon,\;\; \sigma(\varphi X,Y)=g(\varphi X,Y)\varepsilon\,,$$

et d'aprés (4.17) on a

$$\sigma(\sum_{\beta=1}^{s+1}\xi_\beta,X)=-(s+1)\eta_{s+1}(X)\varepsilon\,,$$

pour tout $X, Y \in TM$. En remplaçant ces dernières équations dans (4.22), on obtient

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(X,Y,Z,W) &= (\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(X))\{g(\varphi Y,\varphi W)(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(Z)+(s+1)\eta_{s+1}(Z))\\ &\quad +g(\varphi Y,\varphi Z)(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(W)+(s+1)\eta_{s+1}(W))\}\varepsilon\\ &\quad -(\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Y))\{g(\varphi X,\varphi W)(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(Z)+(s+1)\eta_{s+1}(Z))\\ &\quad +g(\varphi X,\varphi Z)(\sum_{\beta=1}^{s+1}\eta_\beta(W)+(s+1)\eta_{s+1}(W))\}\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

D'autre part, si nous substituons (4.18) dans (4.21) on trouve

$$\begin{aligned}Q(g,\sigma)(Z,W;X,Y) &= \{-g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,W)g(Z,X)\\ &\quad +g(X,W)g(Z,Y)\}\varepsilon\\ &\quad +\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\{g(Y,Z)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(W)+g(Y,W)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z)\}\varepsilon\\ &\quad -\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)\{g(X,Z)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(W)+g(X,W)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z)\}\varepsilon\\ &\quad +\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(W)\{g(Y,Z)\eta_{s+1}(X)-g(X,Z)\eta_{s+1}(Y)\}\varepsilon\\ &\quad +\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Z)\{g(Y,W)\eta_{s+1}(X)-g(X,W)\eta_{s+1}(Y)\}\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Maintenant, on va comparer les deux résultats (4.23) et (4.24) par rapport à des éléments d'un repère local orthonormé sur $T(M)$:

$$\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_{s+1}\}\,.$$

Le 1er cas : si $X=\xi_s$ et $Y=\xi_{s+1}$
D'aprés (4.23), on a

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(\xi_s,\xi_{s+1},Z,W)=0\,,$$

et d'aprés (4.24), on a

$$\begin{aligned}Q(g,\sigma)(Z,W;\xi_s,\xi_{s+1}) &= \{\eta_{s+1}(Z)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(W)+\eta_{s+1}(W)\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z)\\ &\quad -\eta_s(Z)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(W)-\eta_s(W)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Z)\,\}\varepsilon.\end{aligned}$$

Alors

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(\xi_s,\xi_{s+1},Z,W)=LQ(g,\sigma)(Z,W;\xi_s,\xi_{s+1})\,,$$

et comme $Q(g,\sigma)(Z,W;\xi_s,\xi_{s+1})\neq 0$, pour tout $Z,W\in T(M)$
on obtient

$$L=0\,. \tag{4.25}$$

Le 2eme cas : si $X=e_i$ et $Y=\xi_{s+1}$, $i\in\{1,...,n\}$.
D'aprés (4.23), on a

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(e_i,\xi_{s+1},Z,W) &= -\{g(e_i,W)[\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(Z)+(s+1)\eta_{s+1}(Z)]\\ &\quad +g(e_i,Z)[\sum_{\alpha=1}^{s+1}\eta_\alpha(W)+(s+1)\eta_{s+1}(W)]\}\varepsilon\,,\end{aligned}$$

et d'aprés (4.24), on a

$$Q(g,\sigma)(Z,W;e_i,\xi_{s+1})=-\{\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(W)g(e_i,Z)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Z)g(e_i,W)\}\varepsilon\,,$$

Dans ce cas, on pose $Z=\xi_s$, on déduit que

$$(\widetilde{R}\,.\,\sigma)(e_i,\xi_{s+1},\xi_s,W)=Q(g,\sigma)(\xi_s,W;e_i,\xi_{s+1})=-g(e_i,W)\varepsilon\,.$$

D'où

$$L=1\,.$$

Ce qui contredit (4.25). ∎

Exemple 4.3.14. *D'après l'Exemple 3.4.17 (Chapitre 3), on a*

$$\begin{aligned}h(X,Y) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,\varepsilon)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}(X^iY^i+X''^iY''^i)+\frac{1}{8}(\sum_{\alpha=1}^{s-1}X''^\alpha-s\sum_{i=1}^{n+1}X^iy^i)(\sum_{j=1}^{n+1}(Y'^jx^j-Y^jy^j))\\ &+ \frac{1}{8}(\sum_{\alpha=1}^{s-1}Y''^\alpha-s\sum_{i=1}^{n+1}Y^iy^i)(\sum_{j=1}^{n+1}(X'^jx^j-Y^jy^j))\\ &= g(\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)+(\sum_{\alpha=1}^{s-1}\eta_\alpha(X))\eta_s(Y)+(\sum_{\alpha=1}^{s-1}\eta_\alpha(Y))\eta_s(X)\,,\end{aligned}$$

comme $h(X,Y)\varepsilon=\sigma(X,Y)$ et $\sigma(X,\xi_\alpha)=\eta_s(X)\varepsilon$ on obtient

$$\sigma(X,Y)=g(\widetilde{\varphi}X,\widetilde{\varphi}Y)\varepsilon+((\sum_{\alpha=1}^{s-1}\eta_\alpha(X))\sigma(Y,\xi_\alpha)+(\sum_{\alpha=1}^{s-1}\eta_\alpha(Y))\sigma(X,\xi_\alpha),$$

où $X = \sum_{i=1}^{n+1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n+1} X'^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} X''^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$,
et $Y = \sum_{i=1}^{n+1} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n+1} Y'^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} Y''^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$,
indiquent les champs de vecteurs tangents à M.
Donc M *est une hypersurface totalement* φ*-ombilicale dans* $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}[-3(s-1)]$*, avec la courbure moyenne constante* $\frac{2n+1}{2n+s}$ *[35].*
D'après le Théorème 4.3.12, M *admet une* $\mathcal{S}$*-structure* $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, $(\alpha = 1, ..., s)$*, avec la courbure* φ*-sectionnelle constante* $4 - 3s$*. Il suit alors, d'aprés le Théorème 4.3.13 que l'hypersurface* $M = S^{2n+1}(2) \times \mathbb{R}^{s-1}$ *n'est pas pseudo-parallèle dans* $\mathbb{R}^{2n+2+(s-1)}[-3(s-1)]$.

Chapitre 5

Sous-variétés Legendriennes normalement plates dans $\mathcal{S}$-espace forme

5.1 Introduction

[1] Les $\mathcal{S}$-variétés de courbure φ-sectionnelle constante (c'est à dire les $\mathcal{S}$-espace formes) sont la généralisation naturelle des variétés métriques de contact, et comme dans la géométrie de contact, il est possible de définir le concept d'une sous-variété intégrale d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$ de $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, $\alpha = \{1, ..., s\}$, c'est une sous-variété M^m de $\widetilde{M}^{2n+s}$ qui est "transversale" à $\xi_1, ..., \xi_s$. Il suit facilement que $m \leq n$. Une sous-variété intégrale de dimension maximale M^n d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, s'appelle Legendrienne et elle bénéficie de nombreuses propriétés.
Les sous-variétés Legendriennes comme leurs analogues dans la géométrie symplectique, c'est à dire les sous-variétés Lagrangiennes, ont de nombreuses applications, non seulement en géométrie, mais aussi en mécanique et en équations aux dérivées partielles.
Dans le cas des sous-variétés Lagrangiennes, Chacòn et Lobos [14] ont étudié les sous-variétés pseudo-parallèles dans un espace forme complexe et ils ont donné plusieurs propriétés générales de celles-ci. Pour le cas de dimension 2, ils ont montré que toute surface Lagrangienne minimale est pseudo-parallèle, ils ont donné également des exemples de surfaces Lagrangiennes pseudo-parallèles non minimale. Ils ont établi une classification locale des surfaces Lagrangiennes pseudo-parallèles. En particulier, les surfaces Lagrangiennes semi-parallèles sont totalement géodésiques ou plates. Par ailleurs, ils ont donné des exemples de surfaces Lagrangiennes pseudo-parallèles qui ne sont pas semi-parallèles.
Enfin, dans [24] Dillen et ses co-auteurs ont prouvé une conjecture formulée par Chacòn et Lobos dans [14], ils ont montré que toute sous-variété Lagrangienne pseudo-parallèle M^n d'un espace forme complexe $\widetilde{M}(4c)$ de dimension $n \geq 3$ est semi-parallèle.

Concernant l'espace forme de Sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$, les auteurs dans [72] ont donné la condition nécessaire d'une sous-variété C-totalement réelle (pour $s = 1$, une sous-variété intégrale est dite C-totalement réelle) pseudo-parallèle pour être totalement géodésique. D'autre part, les auteurs [17] ont donné la condition nécessaire d'une sous-variété Legendrienne pseudo-

1. Ce chapitre est la traduction d'un article soumis [48].

parallèle dans un espace forme de sasaki, pour être totalement géodésique ou semi-parallèle et aussi pour être minimale.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de sous-variété Legendrienne, puis on étudie les sous-variétés Legendriennes pseudo-parallèles M^n, avec le fibré normal plat dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, $s \geq 1$.
On prouve qu'une sous-variété Legendrienne normalement plate M est pseudo-parallèle (respectivement, Ricci pseudo-parallèle généralisée) alors elle est semi-parallèle ou totalement géodésique (resp. minimale ou $L = \frac{1}{n-1}$).

5.2 Sous-variétés Legendriennes d'une $\mathcal{S}$-variété

Soit $\widetilde{M}^{2n+s}$ une $\mathcal{S}$-variété avec une $\mathcal{S}$-structure $(\varphi, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$.

Définition 5.2.1. *Une sous-variété M^m d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$ est appelée sous-variété intégrale si*
$\eta_1(X) = ... = \eta_s(X) = 0$*, pour tout champ de vecteurs X tangent à M^m.*

Toute sous-variété intégrale est anti-invariante. En effet, pour tout deux champs de vecteurs X, Y tangents à M^m, on a

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) &= \phi(X, Y) \\ &= d\eta_\alpha(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}(X(\eta_\alpha)(Y) - Y(\eta_\alpha)(X) - \eta_\alpha([X, Y])) = 0\,. \end{aligned}$$

Ainsi, φ transforme les vecteurs tangents en vecteurs normaux (c'est à dire $\varphi Y \in T^\perp M$, pour tout $Y \in TM$).

Dans [11], la géométrie de certaines sous-variétés anti-invariantes d'une $\mathcal{S}$-variété, à savoir ceux qui sont normaux à la structure des champs de vecteurs, ont été étudiées.

Soit
$$\mathcal{L}_{(p)} = \{X \in T_p(\widetilde{M}), p \in \widetilde{M}^{2n+s} / \eta_\alpha(X) = 0,\ \alpha = 1, ..., s\}.$$
Alors $\mathcal{L}$ détermine une distribution induite par $-\varphi^2$. En ce qui concerne les sous-variétés intégrales de cette distribution, on a

Théorème 5.2.2. *[11] Soit $\widetilde{M}^{2n+s}$ une $\mathcal{S}$-variété, alors les sous-variétés intégrales de dimension maximale de la distribution $\mathcal{L}$ sont de dimension n.*

et on a

Proposition 5.2.3. *[11] Soit M^m une sous-variété d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$. Alors M^m est une sous-variété intégrale de la distribution $\mathcal{L}$ si et seulement si η_α et $d\eta_\alpha$ restreints à M sont nuls, pour tout α. De plus, si M^m est normale à la structure des champs de vecteurs, alors M^m est une sous-variété intégrale d'une distribution $\mathcal{L}$ si et seulement si φX est normale à M^m dans $\widetilde{M}^{2n+s}$, pour tout champ de vecteurs X dans $\mathcal{L}$.*

Nous remarquons que les sous-variétés intégrales de la distribution $\mathcal{L}$ sont des sous-variétés anti-invariantes de $\widetilde{M}^{2n+s}$, où la structure des champs de vecteurs est normale à M, en vertu de la Proposition précédente.

En particulier, puisque aussi $\xi_1, ..., \xi_s$ sont des champs de vecteurs normaux, la dimension m peut être au plus n. Dans ce cas, M^n est dite *Legendrienne*. En fait, une sous-variété Legendrienne est une sous-variété spéciale intégrale.

Rappelons qu'une sous-variété Legendrienne est identique à une sous-variété anti-invariante avec la structure des champs de vecteurs $\xi_1, ..., \xi_s$ est normale.
Par conséquent, d'aprés (3.10) et (3.11) on obtient

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y), \quad \eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha) = 0\,,$$

pour tout $X, Y \in TM$ et $\alpha \in \{1, ..., s\}$.

Ensuite, on a le Lemme connu suivant [11]

Lemme 5.2.4. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne d'une $\mathcal{S}$-variété, alors*

$$A_{\xi_\alpha} = 0\,, \tag{5.1}$$

$$A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X\,, \tag{5.2}$$

pour tout $\alpha \in \{1, ..., s\}$ et $X, Y \in TM$.

D'aprés le Lemme précédent, on obtient le suivant :

Lemme 5.2.5. *Pour une sous-variété Legendrienne M^n d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, on a les équations suivantes :*

$$g(\sigma(X, Y), \varphi Z) = g(\sigma(X, Z), \varphi Y)\,, \tag{5.3}$$

$$A_{\varphi X} Y = -\varphi\sigma(X, Y) = A_{\varphi Y} X\,, \tag{5.4}$$

pour tout $X, Y, Z \in TM$.

Preuve . 1) Comme $g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y) = g(\sigma(X, Y), V)$ et d'aprés le Lemme 5.2.4, on a

$$\begin{aligned} g(\sigma(X, Y), \varphi Z) = g(A_{\varphi Z} X, Y) &= g(X, A_{\varphi Z} Y) \\ &= g(X, A_{\varphi Y} Z) \\ &= g(\sigma(X, Z), \varphi Y)\,. \end{aligned}$$

2) D'aprés les formules de Gauss-Weingarten et comme $(\widetilde{\nabla}_X \varphi) Y = \sum_{\alpha=1}^{s} g(\varphi X, \varphi Y)\xi_\alpha$, on a

$$\begin{aligned} A_{\varphi X} Y &= -\widetilde{\nabla}_Y(\varphi X) + \nabla^{\perp}_Y \varphi X \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{s} g(\varphi X, \varphi Y)\xi_\alpha - \varphi\nabla_Y X - \varphi\sigma(X, Y) + \nabla^{\perp}_Y(\varphi X)\,, \end{aligned}$$

et donc $g(A_{\varphi X}Y, Z) = -g(\varphi\sigma(X,Y), Z)$, pour tout $Z \in TM$. ∎

En plus, d'aprés (3.9) et (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi A_{\varphi X}Y &= -\varphi^2\sigma(X,Y) \\ &= \sigma(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(\sigma(X,Y))\xi_\alpha \\ &= \sigma(X,Y)\,, \end{aligned}$$

alors, on a

$$\varphi A_{\varphi X}Y = \sigma(X,Y) = \varphi A_{\varphi Y}X. \tag{5.5}$$

En substituant (5.5) et (3.11) dans l'équation de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned} g(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) + g(\varphi A_{\varphi X}Z, \varphi A_{\varphi Y}W) - g(\varphi A_{\varphi X}W, \varphi A_{\varphi Y}Z) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) - g(\varphi^2 A_{\varphi X}Z, A_{\varphi Y}W) + g(\varphi^2 A_{\varphi X}W, A_{\varphi Y}Z) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) + g(A_{\varphi X}Z, A_{\varphi Y}W) - g(A_{\varphi X}W, A_{\varphi Y}Z) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) + g(A_{\varphi Y}A_{\varphi X}Z, W) - g(A_{\varphi Y}A_{\varphi X}W, Z) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) - g([A_{\varphi X}, A_{\varphi Y}]Z, W)\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\widetilde{R}(X,Y) = R(X,Y) - [A_{\varphi X}, A_{\varphi Y}]. \tag{5.6}$$

5.3 Sous-variétés Legendriennes pseudo-parallèles

Dans ce contexte, on a le résultat suivant [66] :

Théorème. *Soit $\widetilde{M}(c)$ un $\mathcal{S}$-espace forme de dimension $2n+s$ et de courbure φ-sectionnelle constante c et M une sous-variété intégrale, minimale de dimension n de $\widetilde{M}(c)$. Si M est pseudo-parallèle et $Ln - \frac{1}{4}(n(c+3s)+c-s) \geq 0$, alors M est totalement géodésique.*

Rappelons qu'une sous-variété M est dite avoir *une connexion normale plate* (ou une triviale connexion normale) si $R^\perp = 0$, dans ce cas M a une connexion normale plate est dite *normalement plate.*

Maintenant, on considère M une sous-variéte Legendrienne pseudo-parallèle d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$.

On sait qu'une sous variété M est dite *pseudo-parallèle*, si sa seconde forme fondamentale satisfait la condition suivante :

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(g,\sigma) \tag{5.7}$$

où

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}(X,Y).\sigma)(Z,W) &= R^\perp(X,Y)(\sigma(Z,W)) - \sigma(R(X,Y)Z,W) \\ &\quad -\sigma(Z,R(X,Y)W), \end{aligned} \tag{5.8}$$

et

$$\begin{aligned} Q(g,\sigma)(Z,W;X,Y) &= ((X\wedge Y)\,.\,\sigma)(Z,W) \\ &= -\sigma((X\wedge Y)Z,W)-\sigma(Z,(X\wedge Y)W) \\ &= -g(Y,Z)\sigma(X,W)+g(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad -g(Y,W)\sigma(Z,X)+g(X,W)\sigma(Z,Y)\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

D'aprés (5.5), (5.8) et (5.9) et lorsque M est normalement plate, la condition de pseudo-parallélisme, se transforme comme

$$\begin{aligned} -A_{\varphi W}R(X,Y)Z \;-\; & A_{\varphi Z}R(X,Y)W \\ = \; & L\{-g(Y,Z)A_{\varphi X}W+g(X,Z)A_{\varphi Y}W \\ & -g(Y,W)A_{\varphi X}Z+g(X,W)A_{\varphi Y}Z\}\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Alors, une sous-variété Legendrienne normalement plate M^n d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ est pseudo-parallèle si et seulement si l'équation (5.10) soit vérifiée.
En particulier, si $L=0$ dans (5.10) la sous-variété M est *semi-parallèle*.

Comme une sous-variété parallèle, $\widetilde{\nabla}\sigma=0$ (en particulier, une sous-variété totalement géodésique $\sigma=0$), elle est semi-parallèle, elle est évident que c'est aussi une sous-variété pseudo-parallèle.

Les deux propositions suivantes sont des résultats analogues à ([14] Prop. 3.1 et Prop. 3.2) et ([17] Prop. 2.2 et Prop. 2.3) dans le cas de la sous-variété Legendrienne pseudo-parallèle dans $\mathcal{S}$-espace forme, respectivement (c-à-d, ces deux propositions suivantes généralisent les résultats obtenus).

Proposition 5.3.1. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne pseudo-parallèle d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$. S'il y a une autre fonction lisse L' satisfait* (5.7) *, alors $L=L'$ au moins sur $M-K$, où $K=\{p\in M/\sigma_p=0\}$.*

Preuve . Si L et L' sont deux fonctions qui satisfont (5.7), on a

$$(L-L')\,Q(g,\sigma)=0\,,$$

on peut choisir une base orthonormée $\{e_1,...,e_n\}$ de T_pM, $p\in M$, donc on obtient

$$\begin{aligned} (L \;-\; & L')\,Q(g,\sigma)(e_k,e_l;e_i,e_j)=(L-L')[(e_i\wedge e_j).\sigma](e_k,e_l) \\ = \; & (L-L')\{-g(e_j,e_k)\sigma(e_i,e_l)+g(e_i,e_k)\sigma(e_j,e_l) \\ & -g(e_j,e_l)\sigma(e_k,e_i)+g(e_i,e_l)\sigma(e_k,e_j)\} \\ = \; & (L-L')\{-\delta_{jk}\sigma(e_i,e_l)+\delta_{ik}\sigma(e_j,e_l)-\delta_{jl}\sigma(e_k,e_i)+\delta_{il}\sigma(e_k,e_j)\}=0\,. \end{aligned}$$

Pour $i=k\neq j=l$, il résulte que

$$(L-L')\{\sigma(e_j,e_j)-\sigma(e_i,e_i)\}=0\,.$$

Pour $i = k = l \neq j$, on obtient

$$(L - L')\sigma(e_i, e_j) = 0.$$

Si $L(p) \neq L'(p)$, $p \in M$ alors

$$\sigma(e_i, e_j) = 0,\ \sigma(e_i, e_i) = \sigma(e_j, e_j),\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

De plus, comme $i \neq j$ et d'aprés (5.3) on a

$$g(\sigma(e_i, e_i), \varphi e_j) = g(\sigma(e_i, e_j), \varphi e_i) = 0\,.$$

$$g(\sigma(e_i, e_i), \varphi e_i) = g(\sigma(e_j, e_j), \varphi e_i) = g(\sigma(e_i, e_j), \varphi e_j) = 0\,.$$

$$g(\sigma(e_i, e_i), \xi_\alpha) = g(\varphi A_{\varphi e_i} e_i, \xi_\alpha) = 0,\ \forall \alpha \in \{1, ..., s\}.$$

Donc, on obtient $g(\sigma(e_i, e_i), N) = 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ et $\forall N \in T^\perp M$, et puisque $\{\varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi_1, ..., \xi_s\}$ est une base de $T^\perp M$ pour une sous-variété Legendrienne M, alors $\sigma = 0$. Par conséquent $\{p \in M, L(p) \neq L'(p)\} \subseteq K$.
Cela prouve la Proposition. ∎

Proposition 5.3.2. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate et pseudo-parallèle d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, alors pour tout champ de vecteurs $X, Y \in TM$ on a*

$$R(X, Y)\varphi H = L\{g(\varphi H, X)Y - g(\varphi H, Y)X\}\,,$$

où H est un vecteur de courbure moyenne.

Preuve . Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de TM, Z un champ de vecteurs unitaire de T_pM pour $p \in M$. $\forall U \in TM$, comme $g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y) = g(\sigma(X, Y), V)$ et d'aprés (5.10), on a

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z, A_{\varphi W}U) \;&+\; g(R(X,Y)W, A_{\varphi Z}U) \\ &= L\{g(Y,Z)g(A_{\varphi X}W, U) - g(X,Z)g(A_{\varphi Y}W, U) \\ &\quad + g(Y,W)g(A_{\varphi X}Z, U) - g(X,W)g(A_{\varphi Y}Z, U)\}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Si on pose $W = U = e_i$ dans (5.11), on obtient

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z, A_{\varphi e_i}e_i) \;&+\; g(R(X,Y)e_i, A_{\varphi Z}e_i) \\ &= L\{g(Y,Z)g(A_{\varphi X}e_i, e_i) - g(X,Z)g(A_{\varphi Y}e_i, e_i) \\ &\quad + g(Y,e_i)g(A_{\varphi X}Z, e_i) - g(X,e_i)g(A_{\varphi Y}Z, e_i)\}\,. \end{aligned}$$

En supposant que $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de $A_{\varphi Z}$ correspondant au repère $\{e_1, ..., e_n\}$. En substituant (5.2) dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} -g(R(X,Y)A_{\varphi e_i}e_i, Z) \;&+\; \lambda_i g(R(X,Y)e_i, e_i) \\ &= L\{g(Y,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, X) - g(X,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, Y) \\ &\quad + g(Y,e_i)g(A_{\varphi Z}e_i, X) - g(X,e_i)g(A_{\varphi Z}e_i, Y)\} \\ &= L\{g(Y,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, X) - g(X,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, Y) \\ &\quad + \lambda_i g(Y,e_i)g(e_i, X) - \lambda_i g(X,e_i)g(e_i, Y)\}\,. \end{aligned}$$

de sorte que

$$-g(R(X,Y)A_{\varphi e_i}e_i, Z) = L\{g(Y,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, X) - g(X,Z)g(A_{\varphi e_i}e_i, Y)\}\,.$$

D'aprés (5.4), on déduit

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)\varphi H, Z) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(R(X,Y)A_{\varphi e_i}e_i, Z) \\ &= L\{g(Y,Z)g(\varphi H, X) - g(X,Z)g(\varphi H, Y)\}\,. \end{aligned}$$

■

5.3.1 Résultats principaux

Théorème 5.3.3. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \leq s$, alors M^n est pseudo-parallèle si et seulement si elle est semi-parallèle ou totalement géodésique.*

Preuve . Comme M^n est une sous-variété Legendrienne et d'aprés (3.19), on a

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c+3s}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}, \tag{5.12}$$

pour tout $X, Y, Z \in TM$, de sorte que

$$\widetilde{R}(X,Y)\varphi H = \frac{c+3s}{4}\{g(Y,\varphi H)X - g(X,\varphi H)Y\}\,, \tag{5.13}$$

où H est le vecteur de courbure moyenne. Comme $R^{\perp} = 0$ et d'aprés (5.12), l'équation de Ricci se réduit à $[A_{\varphi X}, A_{\varphi Y}] = 0$, donc d'aprés (5.6) on obtient

$$\widetilde{R}(X,Y)\varphi H = R(X,Y)\varphi H,$$

ainsi,

$$R(X,Y)\varphi H = \frac{c+3s}{4}\{g(Y,\varphi H)X - g(X,\varphi H)Y\},$$

par la Proposition 5.3.2 , on déduit que

$$(\frac{c+3s}{4} + L)\{g(Y,\varphi H)X - g(X,\varphi H)Y\} = 0, \tag{5.14}$$

cela implique que $L = -\frac{c+3s}{4}$ ou $H = 0$.

✓Quand $L = -\frac{c+3s}{4}$:
Si $c = -3s$, donc $L = 0$.
Si $c \neq -3s$, donc $L \neq 0$ alors d'aprés (5.10), (3.19) et (5.2) on a

$$-g(Y,Z)A_{\varphi X}W + g(X,Z)A_{\varphi Y}W - g(Y,W)A_{\varphi X}Z + g(X,W)A_{\varphi Y}Z = 0\,. \tag{5.15}$$

Ainsi, en utilisant (5.15) et la Proposition 5.3.1 , on obtient $\sigma = 0$. C'est à dire M est totalement géodésique.

✓✓Maintenant, supposons que $L \neq -\frac{c+3s}{4}$, alors d'aprés (5.14), $H = 0$.
En substituant (5.12) dans (5.10) on obtient

$$(L - \frac{c+3s}{4})\{-g(Y,Z)A_{\varphi X}W + g(X,Z)A_{\varphi Y}W \\ -g(Y,W)A_{\varphi X}Z + g(X,W)A_{\varphi Y}Z\} = 0\,. \qquad (5.16)$$

On peut mettre $X = W = e_i$ et faire la sommation sur $i = 1, ..., n$. Lorsque $H = 0$ on obtient $L = \frac{c+3s}{4}$ ou $A_{\varphi Y}Z = 0$ (c'est à dire M est totalement géodésique), pour tout $Y, Z \in TM$.

D'autre part, si on suppose que $L = \frac{c+3s}{4}$. Notons que dans [66], les auteurs ont donné une condition nécessaire pour une sous-variété intégrale pseudo-parallèle minimale (dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$) pour être totalement géodésique, cette condition est $Ln - \frac{1}{4}[n(c+3s)+c-s] \geq 0$. Par conséquent, dans ce cas M est totalement géodésique.
Inversement, si M est semi-parallèle ou totalement géodésique, il est évident qu'elle est pseudo-parallèle.

■

D'aprés (5.14), on prouve facilement le résultat suivant :

Corollaire 5.3.4. *Soit M^n $(n > 1)$ une sous-variété Legendrienne normalement plate de $\mathcal{S}$-space form $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec $c \neq -3s$. Si M^n est semi-parallèle alors elle est minimale.*

Dans [66], les auteurs ont montré que pour une sous-variété Legendrienne minimale M^n d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, si elle est semi-parallèle et satisfait $n(c+3s)+c-s \leq 0$, alors elle est totalement géodésique.

Par conséquent, du Corollaire 5.3.4 on obtient le suivant :

Corollaire 5.3.5. *Soit M^n $(n > 1)$ une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec $c < -3s$. Si M^n est semi-parallèle alors elle est totalement géodésique.*

On sait déja le Théorème suivant [11] :

Théorème 5.3.6. *Soit M^m $(m \leq n)$ une sous-variété anti-invariante minimale d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ normale à la structure de champs de vecteurs. Alors, les assertions sont équivalentes :*

i) *M^m est totalement géodésique.*

ii) *M^m est de courbure constante $k = \frac{c+3s}{4}$.*

iii) *Le tenseur de Ricci $S = \frac{1}{4}(m-1)(c+3s)g$.*

iv) *La courbure scalaire $\rho = \frac{1}{4}m(m-1)(c+3s)$.*

Par l'hypothèse d'une connexion normale plate, M^n est de courbure constante $k = \frac{c+3s}{4}$, en vue du Corollaire 5.3.4 on obtient

Corollaire 5.3.7. *Soit M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \neq -3s$. Si M^n est semi-parallèle, alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

i) *M^n est totalement géodésique.*

ii) *Le tenseur de Ricci $S = \frac{1}{4}(n-1)(c+3s)g$.*

iii) *La courbure scalaire $\rho = \frac{1}{4}n(n-1)(c+3s)$.*

5.4 Sous-variétés Legendriennes Ricci pseudo-parallèles généralisées

Récemment, Yildiz et ses co-auteurs dans [72], Yildiz et Muranthan dans [74] ont étudié les sous-variétés C-totalement réelles dans l'espace forme de Sasaki, les sous-variétés Käeleriennes Ricci pseudo-parallèles généralisées dans l'espace de forme complexe, respectivement. Dans cette section, on généralise leurs résultats pour le cas de M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate de $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ avec $c \neq -3s$.

Rappelons qu'une sous-variété est dite Ricci pseudo-parallèle généralisée si la condition suivante est satisfaite :

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(S,\sigma)\,, \tag{5.17}$$

où L est une fonction sur M et S désigne par le tenseur de courbure de Ricci sur M. Ensuite, on suppose que $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ est un $\mathcal{S}$-espace forme de courbure φ-sectionnelle constante c, telle que $c \neq -3s$ et M une sous-variété Legendrienne normalement plate de $\widetilde{M}$.
Dans ce cas, d'aprés (3.19) on a

$$R(X,Y)Z = \widetilde{R}(X,Y)Z = \frac{c+3s}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}\,, \tag{5.18}$$

pour tout vecteurs $X, Y, Z \in TM$.
Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de M, et comme le tenseur de Ricci S de M défini par $S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y, e_i)$.
Alors d'aprés (5.18) on trouve que

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \frac{c+3s}{4}\{ng(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{n} g(e_i,X)g(e_i,Y)\} \\ &= \frac{c+3s}{4}(n-1)g(X,Y)\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

On pose $B = S$ et $T = \sigma$ dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} Q(S,\sigma)(Z,W;X,Y) &= ((X \wedge_S Y)\,.\,\sigma)(Z,W) \\ &= -\sigma((X \wedge_S Y)Z,W) - \sigma(Z,(X \wedge_S Y)W) \\ &= -S(Y,Z)\sigma(X,W) + S(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad -S(Y,W)\sigma(Z,X) + S(X,W)\sigma(Z,Y)\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

D'aprés (5.2), (5.26), (5.4) et (5.20), la condition (5.17) se transforme en

$$\begin{aligned} -A_{\varphi W}R(X,Y)Z \;&-\; A_{\varphi Z}R(X,Y)W \\ &= L\{-S(Y,Z)A_{\varphi X}W + S(X,Z)A_{\varphi Y}W \\ &\quad -S(Y,W)A_{\varphi X}Z + S(X,W)A_{\varphi Y}Z\}\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Donc, une sous-variété Legendrienne normalement plate M de $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ $(c \neq -3s)$ est Ricci pseudo-parallèle généralisé de $\widetilde{M}$, si et seulement si l'équation (5.21) est vérifiée.

Il est bien connu que l'équation de Ricci montre que la trivialité de la connexion normale de M dans l'espace forme $\widetilde{M}^{n+d}(c)$ (et plus généralement, pour une sous-variété dans un espace plat localement conforme [2] "a locally conformally flat space") est équivalent au fait que tous les seconds tenseurs fundamentaux sont mutuellement commutes, ou tous les seconds tenseurs fondamentaux sont mutuellement diagonalisables [3] .

Pour une variété de courbure constante, si son fibré normal est plat, Cartan a prouvé le Lemme suivant (voir ([15]) :

Lemme 5.4.1. *(Cartan E.) Soient M^n une sous-variété d'un espace de courbure constante $\widetilde{M}^{n+d}(c)$, $\{\varepsilon_\alpha\}$ des champs de vecteurs normaux orthogonaux locaux et $\{h^\alpha\}$ des secondes formes fondamentales correspondant à $\{\varepsilon_\alpha\}$. Ensuite, dans chaque point de M, tous les $\{h^\alpha\}$ sont mutuellement diagonalisables si et seulement si le fibré normale de M est plat.*

Donc, pour tout $p \in M$ il existe un repère local orthogonal $\{e_i\}$ de M^n tel que tous les secondes formes fondamentales soient mutuellement diagonalisables, donc on a

$$A_N(e_i) = \lambda_i^N e_i\,,$$

pour tout champ de vecteurs normal N et λ_i^N sont les courbures principales de M par rapport à N.

On prouve le Théorème principal (de cette section) :

Théorème 5.4.2. *Soient $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$ $(n > 1)$ un $\mathcal{S}$-espace forme de courbure φ-sectionelle constante c et M^n une sous-variété Legendrienne normalement plate de $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, $(c \neq -3s)$. Si M^n est Ricci pseudo-parallèle généralisée de $\widetilde{M}$, alors M^n est minimale ou $L = \frac{1}{n-1}$.*

Preuve . Lorsque M est une sous-variété Legendrienne normalement plate, nous choisissons une base orthonormée de $T_p^\perp M$ de la forme

$$\{e_{n+1} = \varphi e_1, ..., e_{2n} = \varphi e_n, e_{2n+1} = \xi_1, ..., e_{2n+s} = \xi_s\}.$$

2. Une variété Riemannienne est conformément plate si pour chaque point $x \in M$ il existe un voisinage U de x et une fonction lisse f sur U telle que $(U, e^{2f}g)$ est plat.

3. $R^\perp$ =0 si et seulement si σ_α sont mutuellement diagonalisables en x ; on choisit des vecteurs unitaires $e_1, ..., e_n$ tel que la second forme fondamentale σ_α de M est diagonalisable ; c-à-d, $\sigma_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$, où σ_{ij}^α sont les composantes de σ et $\sigma_{ij}^\alpha = g(\sigma(e_i,e_j), e_\alpha)$, $\alpha = n+1, ..., n+d$

Pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $\alpha \in \{1, ..., s\}$, dénote par λ_i^{n+j} la courbure principale par rapport au champ de vecteurs normal φe_j, c'est à dire,

$$A_{\varphi e_j}(e_i) = \lambda_i^{n+j} e_i \,. \tag{5.22}$$

Dans ce cas, le vecteur de courbure moyenne peut être écrit comme $H^{n+j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{n+j}$.
En vue de (5.21), on pose que $X = e_i, Y = e_j, Z = e_k, W = e_l$,

$$\begin{aligned} -A_{\varphi e_l} R(e_i, e_j)e_k \;&-\; A_{\varphi e_k} R(e_i, e_j)e_l \\ &= L\{-S(e_j, e_k)A_{\varphi e_i} e_l + S(e_i, e_k)A_{\varphi e_{lj}} e_l \\ &\quad -S(e_j, e_l)A_{\varphi e_i} e_k + S(e_i, e_l)A_{\varphi e_j} e_k\} \,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

En substituant (5.19), (5.22) dans (5.23) et pour tout $e_m \in TM$, on trouve

$$\begin{aligned} -\lambda_m^{n+l} R_{ijkm} - \lambda_m^{n+k} R_{ijlm} \;&=\; \frac{c+3s}{4}(n-1)L\{-\lambda_l^{n+i}\delta_{jk}\delta_{lm} + \lambda_l^{n+j}\delta_{ik}\delta_{lm} \\ &\quad -\lambda_k^{n+i}\delta_{jl}\delta_{km} + \lambda_k^{n+j}\delta_{il}\delta_{km}\} \,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Où $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ et $1 \le i, j, k, l, m \le n$.
Comme,

$$R_{ijkm} = \frac{c+3s}{4}\{\delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}\}, \qquad R_{ijlm} = \frac{c+3s}{4}\{\delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{jm}\} \,, \tag{5.25}$$

par l'utilisation de (5.25), l'équation (5.24) se transforme en

$$\begin{aligned} &-\lambda_m^{n+l}(\delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}) - \lambda_m^{n+k}(\delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{jm}) \\ =\;& (n-1)L\{-\lambda_l^{n+i}\delta_{jk}\delta_{lm} + \lambda_l^{n+j}\delta_{ik}\delta_{lm} - \lambda_k^{n+i}\delta_{jl}\delta_{km} + \lambda_k^{n+j}\delta_{il}\delta_{km}\} \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on pose $k = i$, $m = j$, on obtient

$$\begin{aligned} &-\lambda_j^{n+l}(\delta_{ij} - \delta_{ii}\delta_{jj}) - \lambda_j^{n+j}\delta_{ij}(\delta_{jl}\delta_{ij} - \delta_{il}\delta_{jj}) \\ =\;& L\{-\lambda_l^{n+l}\delta_{il}\delta_{ij}\delta_{jl} + \lambda_l^{n+l}\delta_{jl}\delta_{ii} - \lambda_i^{n+i}\delta_{jl}\delta_{ij} + \lambda_i^{n+i}\delta_{ij}\delta_{il}\} \,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Parce qu'il résulte de (5.2) que

$$\lambda_i^{n+j} = g(A_{\varphi e_j} e_i, e_i) = g(A_{\varphi e_i} e_i, e_j) = \lambda_i^{n+i}\delta_{ij} \,.$$

En faisant la sommation sur $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$ dans (5.26) respectivement, on obtient

$$H^{n+l} = \frac{n-1}{n} L\lambda_l^{n+l}. \tag{5.27}$$

D'autre part, en substituant (5.18) et (5.19) dans (5.21), ce qui donne

$$\begin{aligned} &[(n-1)L - 1]\{-g(Y, Z)A_{\varphi X}W + g(X, Z)A_{\varphi Y}W \\ &-g(Y, W)A_{\varphi X}Z + g(X, W)A_{\varphi Y}Z\} = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

On pose $X = e_i, Y = e_j, Z = e_k, W = e_l$ et en substituant (5.22) dans (5.28), pour tout $e_m \in TM$ on obtient

$$[(n-1)L-1]\{\lambda_l^{n+j}\delta_{ik}\delta_{lm} - \lambda_l^{n+i}\delta_{jk}\delta_{lm} + \lambda_k^{n+j}\delta_{il}\delta_{km} - \lambda_k^{n+i}\delta_{jl}\delta_{km}\} = 0\,.$$

De la même façon, on pose $k = i$, $m = j$ dans l'équation ci-dessus

$$[(n-1)L-1]\{\lambda_l^{n+l}\delta_{ii}\delta_{jl} - \lambda_l^{n+l}\delta_{il}\delta_{ij}\delta_{jl} + \lambda_i^{n+i}\delta_{ij}\delta_{il} - \lambda_i^{n+i}\delta_{jl}\delta_{ij}\} = 0\,. \tag{5.29}$$

et la sommation sur $j = 1, ..., n$ dans (5.29), nous donne

$$[(n-1)L-1]\{\lambda_l^{n+l}\delta_{ii} - \lambda_l^{n+l}\delta_{il} + \lambda_i^{n+i}\delta_{il} - \lambda_i^{n+i}\} = 0\,.$$

De plus, en faisant la somme sur $i = 1, ..., n$ dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$[(n-1)L-1](n-1)\lambda_l^{n+l} = 0\,,$$

comme $n > 1$, on a

$$[(n-1)L-1]\lambda_l^{n+l} = 0\,. \tag{5.30}$$

En comparant (5.27) et (5.30), on en déduit que si $L = 0$ alors $H^{n+l} = 0$ pour tout $1 \leq l \leq n$, c'est à dire M est minimale. Si $L \neq 0$, alors $\frac{[(n-1)L-1]n}{(n-1)L} H^{n+l} = 0$ ce qui implique $H^{n+l} = 0$ or $L = \frac{1}{n-1}$. ∎

Chapitre 6

Sous-variétés invariantes d'une $\mathcal{S}$-variété

6.1 Introduction

[1] Il existe deux sous-variétés typiques dans une variété presque contact, l'une est la classe de sous-variétés C-totalement réelles (pour une variété presque de s-contact, on les appelle les sous-variétés intégrales), et l'autre est la classe de sous-variétés invariantes, qui correspondent à la classe de sous-variétés totalement réelles et à la classe de sous-variétés holomorphes d'une variété presque hermitienne, respectivement.
En 1973, Kon [40] a étudié la condition de semi-parallélisme sur une sous-variété invariante d'une variété Sasakienne, mais il ne l'a pas appelé comme semi-parallèle. Il a montré par le Théorème suivant que :

Théorème 6.1.1. *Soit M une sous-variété invariante d'une variété Sasakienne. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *M est totalement géodésique.*

ii) $(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\sigma)(\xi,\xi) = 0.$

iii) $\widetilde{R}(X,\xi)\,.\,\sigma = 0.$

iv) $\widetilde{R}(X,Y)\,.\,\sigma = 0.$

X et Y étant des champs de vecteurs arbitraires sur M.

Dans [41], Kowalczyk a étudié une variété semi-Riemannienne satisfaisant $Q(S,R) = 0$ et $Q(S,g) = 0$, où S et R sont le tenseur de Ricci et le tenseur de courbure respectivement. Yildiz et Murathan dans [73], ont étudié les sous-variétés invariantes pseudo-parallèles de l'espace forme de sasaki $\widetilde{M}^{2n+1}(c)$.

Motivé par les études des auteurs ci-dessus, dans ce chapitre on considère une sous-variété invariante, pseudo-parallèle et Ricci pseudo-parallèle généralisée d'une $\mathcal{S}$-variété. On montre des conditions nécessaires pour que ces sous-variétés soient totalement géodésiques sous certaines conditions.

1. Ce chapitre est la traduction d'un article soumis.

6.2 Définitions et propriétés

Rappelons que, pour chaque champ de vecteurs X tangent à sous-variété M on écrit :

$$\varphi X = TX + NX \, .$$

Où TX et NX sont les composante tangente et normale de φX, respectivement. Alors, on

$$\nabla_X \xi_\alpha = -TX \, , \tag{6.1}$$

et

$$\sigma(X, \xi_\alpha) = -NX \, . \tag{6.2}$$

Pour tout X tangent à M et pour tout $\alpha = 1, ..., s$.

Définition 6.2.1. *Une sous-variété M est dite invariante si*

i) *Pour tout ($\alpha = 1, ..., s$), ξ_α est tangent à M,*

ii) *$\varphi T_x(M) \subset T_x(M)$ pour tout $x \in M$, i.e. $\varphi X \in T(M)$, pour tout $X \in T(M)$ et dans ce cas $NX = 0$.*

D'aprés (6.2) on a le Lemme suivant :

Lemme 6.2.2. *[9] Soit M^{2m+s} une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$, alors pour tout $X, Y \in T(M)$, $V \in TM^\perp$ et $\alpha = 1, ..., s$*

$$\sigma(X, \xi_\alpha) = 0 \, , \tag{6.3}$$

$$A_V \xi_\alpha = 0 \, , \tag{6.4}$$

$$\sigma(\varphi X, Y) = \varphi \sigma(X, Y) = \sigma(X, \varphi Y) \, . \tag{6.5}$$

Du Lemme précédent on a

Proposition 6.2.3. *[39] Une sous-variété invariante M d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$ est une $\mathcal{S}$-variété et minimale dans $\widetilde{M}$.*

Proposition 6.2.4. *[65] Soit M une sous-variété invariante de $\widetilde{M}$. Alors $\widetilde{R}(X, Y)\xi_\alpha$ est tangent à M pour tout $X, Y \in T(M)$ et $\alpha = 1, ..., s$.*

Maintenant, on va donner les conditions pour lesquelles une sous-variété invariante M soit totalement géodésique [65].

Proposition 6.2.5. *Soit M une sous-variété invariante d'un $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}(c)$. Alors M est totalement géodésique si et seulement si M a une courbure φ-sectionnelle constante c.*

Dans [39], on peut trouver le même résultat précédent en considérant les sous-variétés de codimension 2.

Théorème 6.2.6. *[65] Soit M une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$. Alors σ est parallèle si et seulement si M est totalement géodésique.*

6.3 Sous-variétés invariantes pseudo-parallèles

Théorème 6.3.1. *Soit M une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$. Alors, M est pseudo-parallèle avec $L \neq 1$ si et seulement si M est totalement géodésique.*

Preuve . Supposons que M est une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété. Si M est pseudo-parallèle alors

$$\widetilde{R}\,.\,\sigma = L\,Q(g,\sigma).$$

et donc

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y)\sigma(Z,W) \;&-\; \sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W) \\ &=\; -L\{g(Y,Z)\sigma(X,W) - g(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad\; +g(Y,W)\sigma(X,Z) - g(X,W)\sigma(Y,Z)\}\,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

pour tout $X,Y,Z,W \in TM$.
Posant $X = \xi_\alpha$ dans (6.6) et d'aprés (6.3), pour tout $\alpha \in \{1,...,s\}$ on a

$$\begin{aligned} &R^{\perp}(\xi_\alpha,Y)\sigma(Z,W) - \sigma(R(\xi_\alpha,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(\xi_\alpha,Y)W) \\ &= L\{g(\xi_\alpha,Z)\sigma(Y,W) + g(\xi_\alpha,W)\sigma(Y,Z)\}\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Encore une fois, on peut mettre $W = \xi_\alpha$ dans (6.7), on obtient

$$-\sigma(Z,R(\xi_\alpha,Y)\xi_\alpha) = L\,\sigma(Y,Z). \tag{6.8}$$

Comme M est une $\mathcal{S}$-variété, donc

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi_\alpha = (\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(X))\varphi^2 Y - (\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y))\varphi^2 X\,,$$

cela implique

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha,Y)\xi_\alpha = \varphi^2 Y\,. \tag{6.9}$$

En substituant (6.9) dans (6.8), et d'aprés (6.5) on déduit que

$$(1-L)\sigma(Z,Y) = 0\,.$$

C'est à dire $\sigma(Z,Y) = 0$, ce qui donne M est totallement géodésique, à condition que $L \neq 1$.
Si $\sigma = 0$, alors il peut être trivialement prouvé que M est pseudo-parallel.

■

À la suite du Théorème précédent, on peut donner le Corollaire suivant

Corollaire 6.3.2. *Soit M une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété. Alors M est semi-parallèle si et seulement si M est totalement géodésique.*

6.4 Sous-variétés invariantes Ricci pseudo-parallèles généralisées

On a obtenu ce résultat :

Théorème 6.4.1. *Soit M une sous-variété invariante de dimension $2m+s$ d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}^{2n+s}$. Alors, M est Ricci pseudo-parallèle généralisée avec $L \neq \frac{1}{2m}$ si et seulement si M est totalement géodésique.*

Preuve . Si M est Ricci pseudo parallèle généralisée, alors

$$R\,.\,\sigma = L\,Q(S,\sigma)\,.$$

Donc, pour tout $X, Y, Z, W \in TM$ on a

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y)\sigma(Z,W) &- \sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W) \\ &= L\,\{-S(Y,Z)\sigma(X,W) + S(X,Z)\sigma(Y,W) \\ &\quad -S(Y,W)\sigma(X,Z) + S(X,W)\sigma(Y,Z)\}\,. \end{aligned}$$

On pose $W = X = \xi_\alpha$, $\alpha \in \{1,...,s\}$ dans l'equation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} R^{\perp}(\xi_\alpha,Y)\sigma(Z,\xi_\alpha) &- \sigma(R(\xi_\alpha,Y)Z,\xi_\alpha) - \sigma(Z,R(\xi_\alpha,Y)\xi_\alpha) \\ &= L\,\{-S(Y,Z)\sigma(\xi_\alpha,\xi_\alpha) + S(\xi_\alpha,Z)\sigma(Y,\xi_\alpha) \\ &\quad -S(Y,\xi_\alpha)\sigma(\xi_\alpha,Z) + S(\xi_\alpha,\xi_\alpha)\sigma(Y,Z)\}\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

D'aprés (6.3) et (6.7) l'équation (6.10) est réduit à l'équation suivante

$$-\sigma(Z, \sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(\xi_\alpha)\varphi^2 Y - \sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y)\varphi^2\xi_\alpha) = L\,S(\xi_\alpha,\xi_\alpha)\sigma(Y,Z)\,,$$

qui implique

$$-\sigma(Z,\varphi^2 Y) = L\,S(\xi_\alpha,\xi_\alpha)\sigma(Y,Z)\,. \tag{6.11}$$

En substituant (6.5) dans (6.11), et comme $\varphi^2 Y = -Y + \sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(Y)\xi_\beta$, on obtient

$$\sigma(Y,Z) = L\,S(\xi_\alpha,\xi_\alpha)\sigma(Y,Z)\,. \tag{6.12}$$

Comme M est une $\mathcal{S}$-variété, et d'aprés (1) du Lemme 3.4.12, on a

$$S(X,\xi_\alpha) = 2m\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(X),$$

d'aprés (6.12) et l'équation ci-dessus, on obtient

$$\sigma(Y,Z) = 2m\,L\,\sigma(Y,Z)\,,$$

d'où

$$(1-2m\,L)\sigma(Y,Z) = 0\,.$$

Si $L \neq \frac{1}{2m}$, alors $\sigma(Y,Z)=0$, i.e. M est totalement géodésique.
Inversement, soit M est totalement géodésique, i.e. $\sigma=0$, donc d'aprés (6.10) on obtient que M est Ricci pseudo-parallèle généralisée. ∎

Remarquons que, la technique utilisée dans la preuve du Théorème précédent (respectivement du Théorème 6.3.1) ne suffit pas d'interpréter le cas $L=\frac{1}{2m}$ (resp., L=1) ces cas restent ouverts.

On donne l'exemple suivant qui est sur une sous-variété invariante non géodésique pseudo-parallèle (resp., Ricci pseudo-parallèle généralisée) d'une variété Sasakienne (c-à-d, $s=1$).

Exemple 6.4.2. *Soit M^{2m+1} une sous-variété invariante conformément plate (conformally flat) d'une variété Sasakienne $\widetilde{M}^{2n+1}$. Alors selon le Théorème1 [32], M^{2m+1} est de courbure constante* 1. *Dans ce cas, M^{2m+1} satisfait les conditions $\widetilde{R}.\sigma=Q(g,\sigma)$ et $\widetilde{R}.\sigma=\frac{1}{2m}Q(S,\sigma)$, ce qui nous donne M^{2m+1} est pseudo-parallèle tel que $L=1$ et aussi Ricci pseudo-parallèle généralisée tel que $L=\frac{1}{2m}$.*

6.5 Sous-variétés invariantes satisfaisant certaines conditions

Rappelons que, le tenseur de courbure de type $(0,4)$ Riemann-Christoffel R de (M,g) est lié au $(1,3)$-tenseur R' par $R(X,Y,Z,W)=g(R'(X,Y)Z,W)$, il possède la propriété suivante [70] :

$$R(X,Y,Z,Z)=0,$$

pour tous les champs de vecteurs X,Y,Z et W sur M.

On considère que M est une sous-variété invariante de dimension $(2m+s)$ d'une $\mathcal{S}$-variété $\widetilde{M}$.

Théorème 6.5.1. *Une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété satisfait $Q(\sigma,R)=0$ si et seulement si elle est totalement géodésique.*

Preuve . Si M satisfait $Q(\sigma,R)=0$, donc on a

$$\begin{aligned}
0 &= Q(\sigma,R)(U_1,U_2,U_3,U_4;X,Y) \\
&= ((X\wedge_\sigma Y)\,.\,R)(U_1,U_2,U_3,U_4) \\
&= -R((X\wedge_\sigma Y)U_1,U_2,U_3,U_4)-R(U_1,(X\wedge_\sigma Y)U_2,U_3,U_4) \\
&\quad -R(U_1,U_2,(X\wedge_\sigma Y)U_3,U_4)-R(U_1,U_2,U_3,(X\wedge_\sigma Y)U_4),
\end{aligned}$$

pour tous les champs de vecteurs X,Y,U_i $(i=1,...,4)$ sur M.
Si on pose dans (2.1) $B=\sigma$ et $T=R$, l'équation ci-dessus devient

$$\begin{aligned}
0 = &-\sigma(Y,U_1)R(X,U_2,U_3,U_4)+\sigma(X,U_1)R(Y,U_2,U_3,U_4) \\
&-\sigma(Y,U_2)R(U_1,X,U_3,U_4)+\sigma(X,U_2)R(U_1,Y,U_3,U_4) \\
&-\sigma(Y,U_3)R(U_1,U_2,X,U_4)+\sigma(X,U_3)R(U_1,U_2,Y,U_4) \\
&-\sigma(Y,U_4)R(U_1,U_2,U_3,X)+\sigma(X,U_4)R(U_1,U_2,U_3,Y).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Si on pose $U_3 = Y = \xi_\alpha$, $\alpha \in \{1, ..., s\}$ dans (6.13), on trouve

$$\sigma(X, U_1)R(\xi_\alpha, U_2, \xi_\alpha, U_4) + \sigma(X, U_2)R(U_1, \xi_\alpha, \xi_\alpha, U_4) = 0, \tag{6.14}$$

par l'utilisation de (3.15) (car M est une $\mathcal{S}$-variété), (6.14) devient

$$\sigma(X, U_1)g(\varphi^2 U_2, U_4) - \sigma(X, U_2)g(\varphi^2 U_1, U_4) = 0.$$

Cela implique

$$\begin{aligned} &-\sigma(X, U_1)g(U_2, U_4) + \sigma(X, U_1)\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(U_2)\eta_\beta(U_4) \\ &+\sigma(X, U_2)g(U_1, U_4) - \sigma(X, U_2)\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(U_1)\eta_\beta(U_4) = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

On considère $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1} = \varphi e_1, ..., e_{2m} = \varphi e_m, e_{2m+1} = \xi_1, ..., e_{2m+s} = \xi_s\}$ une base orthonormée de TM. On insère $U_4 = U_2 = e_k$ dans (6.15) et en prenant la sommation sur $k = 1, ..., 2m + s$, on obtient

$$-(2m + s)\sigma(X, U_1) + s\sigma(X, U_1) + \sigma(X, U_1) = 0,$$

qui implique

$$(-2m + 1)\sigma(X, U_1) = 0.$$

Donc, M est totalement géodésique. Réciproquement, si $\sigma = 0$, alors d'aprés (6.13) il s'ensuit que $Q(\sigma, R) = 0$. ■

Théorème 6.5.2. *Une sous-variété invariante d'une $\mathcal{S}$-variété satisfait $Q(S, \sigma) = 0$ si et seulement si elle est totalement géodésique.*

Preuve . Si $Q(S, \sigma) = 0$, alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= -S(Y, Z)\sigma(X, W) + S(X, Z)\sigma(Y, W) \\ &= -S(Y, W)\sigma(Z, X) + S(X, W)\sigma(Z, Y). \end{aligned}$$

On pose $X = W = \xi_\alpha$ dans l'équation ci-dessus, pour tout $\alpha \in \{1, ..., s\}$ on trouve

$$S(\xi_\alpha, \xi_\alpha)\sigma(Y, Z) = 0.$$

Selon $S(X, \xi_\alpha) = 2m\sum_{\beta=1}^{s}\eta_\beta(X)$, il en découle que

$$2m\,\sigma(Y, Z) = 0.$$

Inversement, soit M est totalement géodésique, en tenant compte de (5.28), on obtient $Q(S, \sigma) = 0$.

■

Au vu de nos résultats et le Théorème 6.2.6., on peut affirmer ce qui suit :

Corollaire 6.5.3. *Soit M une sous-variété invariante de dimension $2m+s$ d'une $\mathcal{S}$-variété. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est parallèle.*
2. *M est semi-parallèle.*
3. *M est pseudo-parallèle, à condition de $L \neq 1$.*
4. *M est Ricci pseudo-parallèle généralisée, à condition de $L \neq \frac{1}{2m}$.*
5. *M satisfait la condition $Q(\sigma, R) = 0$.*
6. *M satisfait la condition $Q(S, \sigma) = 0$.*
7. *M est totalement géodésique.*

Perspectives

Les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse sont dans un premier temps, l'étudier le pseudo-parallélisme des sous-variétés du codimensions particulières dans $\mathcal{S}$-espace forme. Donc, il est possible de prolonger le travail présenté dans le chapitre 4, selon différents axes. C'est à dire, étudier l'existence de certaines hypersurfaces pseudo-parallèles dans $\mathcal{S}$-espace forme $\widetilde{M}^{2n+s}(c)$, avec une courbure φ-sectionnelle constante c quelconque, et même sur les $\mathcal{S}$-espaces formes généralisés (ils ont introduit par Prieto-Martìn, Fernàndez et Fuentes [2]) qui sont devenus aujourd'hui un sujet assez spécialisé, mais de nombreux travaux contemporains s'attachent à l'étude de leurs propriétés et des tenseurs de courbure associés.
D'autre part, nous souhaitons par la suite travailler sur le pseudo-parallélisme et d'autres types de pseudo-parallélisme, comme Ricci pseudo-parallélisme généralisé, bipseudo-parallélisme $(\widetilde{R}\,.\,\widetilde{\nabla}\sigma = L_{\widetilde{\nabla}\sigma}Q(g,\widetilde{\nabla}\sigma))$ [3] et biRicci pseudo-parallèlisme généralisé $(\widetilde{R}\,.\,\widetilde{\nabla}\sigma = L_{\widetilde{\nabla}\sigma}Q(S,\widetilde{\nabla}\sigma))$ de sous variétés du classes importantes. Particulièrement sur les $\mathcal{S}$-espaces formes et les $\mathcal{S}$-espaces formes généralisés.

2. Generalized $\mathcal{S}$-space forms, Publications de l'institut Math. 94 (108) 151-161 (2013).
3.

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(X,Y)\,.\,\widetilde{\nabla}\sigma)(U,V,W) &= R^{\perp}(X,Y)(\widetilde{\nabla}\sigma)(U,V,W) - (\widetilde{\nabla}\sigma)(R(X,Y)U,V,W)\\ &\quad -(\widetilde{\nabla}\sigma)(U,R(X,Y)V,W) - (\widetilde{\nabla}\sigma)(U,V,R(X,Y)W),\\ \forall X,Y,U,V,W \in TM.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Aminov, Yu. : The geometry of submanifolds, Gordon and Breach Science Publishers (2001)

[2] Asperti, A.C., Lobos, G.A., Mercuri, F. : Pseudo-parallel immersions in space form. Math. Contemp. **17**, 59-70 (1999)

[3] Asperti, A.C., Lobos, G.A., Mercuri, F. : Pseudo -parallel submanifolds of a space form. Adv. Geom. **2**,57-71 (2002)

[4] Belkhelfa, M. : Pseudo-Parallel submanifolds. CIMPA School on Riemannian, pseudo-Riemannian Geometry and Dynamics and applications, El Oued (2005)

[5] Belkhelfa, M., Mahi, F. : Second order parallel tensors on $\mathcal{S}$-manifold and semi-parallel hypersurfaces of $\mathcal{S}$-space forms. to appear in Ukrainian Mathematical Journal (Accepted 16/10/2017 .It will be published in 2020).

[6] Blair, D.E : Contact manifolds in Riemannian geometry. lecture notes in math, 509, springer-verlog, Berlin (1976)

[7] Blair, D.E : Riemnnian Geometry of contact and Symplectic manifolds. Springer Science+ Business. Media, LLC (2010)

[8] Blair, D.E : Geometry of manifolds with structural group U(n)*O(s). J. Differential Geometry **4**, 155-167 (1970)

[9] Cabrerizo, J.L., Fernandez, L.M., Fernandez, M. : The curvature of submanifolds of S-space form. Acta Math. Hung. **62**(3-4),373-383 (1993)

[10] Cabrerizo, J.L., Fernandez, L.M., Fernandez, M. : On Pseudo-umbilical hypersurfaces of S-manifolds. Acta Math. Hung. **70** (1-2),121-128 (1996)

[11] Cabrerizo, J.L., Fernandez, L.M., Fernandez, M. : On certain anti-invariant submanifolds of $\mathcal{S}$-manifolds. Portugal. Math. **50**(1), 103-113 (1993)

[12] Cabrerizo, J.L., Fernandez, L.M., Fernandez, M. : A classification of totally f-umbilical submanifolds of an $\mathcal{S}$-manifold. Soochow Journal of Mathematics, **18**,no.2, 211-221 (1992)

[13] Cartan, É. : Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris (1963)

[14] Chacón, P.M., Lobos, G.A. : Pseudo-parallel Lagrangian submanifolds in complex space forms. Differential Geometry and Its Applications **27**, 137-145 (2009)

[15] Chen, B.Y. : Geometry of submanifolds, New York, Dekker (1973)

[16] Chen, B.Y. : Geometry of submanifolds and its applications, Science uni of Tokyo (1981)

[17] Chen, X., Yang, X. : Pseudo-parallel Legendrian submanifolds with flat normal bundle of Sasakian space forms. Progress in Applied Math. **7**(1), 9-19 (2014)

[18] Das, L. : Second order parallel tensors on α-Sasakian manifold, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhaz (N.S.) **23**, 65-69 (2007)

[19] Deprez, J. : Semiparallel surfaces in Euclidean space, J.Geom. **25**, 192-200 (1985)

[20] Deprez, J. : Semi-parallel hypersurfaces, Rend sem. Mat. Univ. Torino, **44**, 303-316 (1986)

[21] Deszcz, R. : On pseudosymmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg. Ser.A **44**, 1-34 (1992)

[22] Deszcz, R., Verstraelen, L., Yaprak, S. : Pseudosymmetric hypersurfaces in 4-dimensional space of constant curvature, Bull. Ins. Math. Acad. Sinica **22**, 167-179 (1994)

[23] Dillen, F. : Semi-parallel hypersurfaces of a real space forms, Isr. J. Math. **75**, 193-202 (1991)

[24] Dillen, F., der Veken, J.V., Vrancken, L. : Pseudo-parallel Lagrangian submanifolds are semi-parallel. Diff. Geo. and its Appl. **27**, 766-768 (2009)

[25] Dillen, F., Fastenakeles, J., Haesen, S., Van der Veken, J., Verstraelen, L. : Submanifold theory and the parallel transport. Kragujevac J. Math. **37** (1), 33-43 (2013)

[26] Do Carmo, M.P. : Riemniann geometry, Botson (1993)

[27] Eisenhart L.P. : Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivates are Zero. Trans. Amer. Math. Soc. **25**, 297-306 (1923)

[28] Ferus, D. : Symmetric submanifolds of Euclidean space. Math. Ann. **247** , 81-93 (1980)

[29] Gherib, F., Belkhelfa, M. : Parallel submanifolds of generalized Sasakian space forms. Bulletin of the Transilvania Uni. of Brasov, **51** (2) 185-192 (2009)

[30] Gherib, F., Belkhelfa, M. : Second order parallel tensors on generalized sasakian space forms and semi parallel hypersurfaces in Sasakian space forms, Beitäge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Alg and Geo, Vol **51** (1),1-7 (2010)

[31] Goldberg, S.I., Yano, K. : Noninvariant hypersurfaces of almost contact manifolds. J. Math. Sco. Japan, **22** ,No.1, 25-34 (1970)

[32] Gouli-Andreou, F., Tsolakidou, N. : Conformally flat contact metric manifolds with $Q\xi = \varrho\xi$. Beiträge algebra Geom. 45, 103-115 (2004)

[33] Haesen, S., Verstraelen, L. : Extrinsic symmetries of parallel transport. Chapiter 9 in book : Differential geometry and topology disrete and computational geometry. Publisher : IOS Press, Editors M. Boucetta, J.M. Morvan, 239-255 (2005)

[34] Haesen, S., Verstraelen, L. : Properties of a scalar curvature invariant depending on two planes. Manuscripta Math. **122**, 59-62 (2007)

[35] Hasegawa, I., Okuyama, Y., Abe,T. : On p-th Sasakian manifolds. J. Hokkaido univ. Ed. Sect. 2 **37** no.1,1-16 (1986)

[36] Jahanara, B., Haesen, S., Sentürk, Z., Verstraelen, L. : On parallel transport of the Ricci curvatures. J. Geom. Phys. **57** no 9, 1771-1777 (2007)

[37] Kaid, R., Belkhelfa, M. : Symmetry properties of $\mathcal{S}$-space forms, J. Geom. **106**, no. 3, 513-530 (2015)

[38] Kobayashi, S., Nomizu, K. : Foundation of differential geometry. I and II, Interscience bublishers NY (1963).

[39] Kobayashi, M., Tsuchiya, S. : Invariant submanifolds of an f-manifolds with complemented frames. Kodai Math. Sem. Rep. **24**, 430-450 (1972)

[40] Kon, M. : Invariant submanifolds of normal contact metric manifolds. Kodai Math. Sem. Rep. **25**, 330-336 (1973)

[41] Kowalczyk, D. : On some subclass of semisymmetric manifolds. Soochow J. Math. **27**, 445-461 (2001)

[42] Levy, H. : Symmetric tensors of the second order whose covariant derivates vanish. Annals of Math. **27**,91-98 (1926)

[43] Lobos, G.A., Tojeiro, R. : Pseudo-parallel submanifolds with flat normal bundle of space forms. Glasg. Math. J. **48**, 171-177 (2006)

[44] Lobos, G.A., Ortega, M. : Pseudo-parallel Real hypersurfaces in complex space forms. Bull. Korean Math. Soc. **41** No.4, 609-618 (2004)

[45] Lumiste, Ü. : Semi-symmetric submanifolds as the second order envelope of symmetric submanifolds. Proc. Estonia Acad. Sci., Phys. Math. **39**, 1-8 (1990)

[46] Lumiste, Ü. : Semiparallel submanifolds in space forms. Springer. DOI : 10.1007/978-0-387-49913-0 (2007)

[47] Maeda, S. : Real hypersurfaces of complex projective spaces. Math. Ann. **263**, 473-478 (1983)

[48] Mahi, F., Belkhelfa, M. : Legendrian normally flat submanifolds of $\mathcal{S}$-space forms, soumis.

[49] Mahi, F., Belkhelfa, M. : On invariant submanifolds of $\mathcal{S}$-manifolds, soumis.

[50] Maralabhavi, Y.B., Shivaprasanna, G.S. : Second order parallel tensors on generalized Sasakian space forms. Inter. J. of Math. Eng. Sci. **1**(I.10) , 11-21 (2012)

[51] Murathan, C., Arslan, K. et Ezentas, R. : Ricci generalized pseudo-parallel immersions, Differential geometry and its applications, 99-108, Matfyzpress, Prague (2005)

[52] Naitoh, H. : Parallel submanifolds of complex space forms. I and II Nagaya Math. J. I **90**, 85-117, II **91** 119-149 (1983)

[53] Neibergall, R., Ryan, P.J. : Semi-parallel and semi-symmetric real hypersurfaces in complex space forms. Kyungpook Math. J. **38**, 227-234 (1998)

[54] Ogiue, K. : On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility. Kodai Math. Sem. Rep. **16**, 223-232 (1964)

[55] Ortego, M. : Classification of real hypersurfaces in complex space forms by means of curvature conditions. Bull. Belg. Math. Soc. **3**, 351-360 (2002)

[56] Pitis, G. : On parallel submanifolds of Sasakian space forms. Rendinconti di Mathematica, **2** 103-111 (1989)

[57] Sasaki, S. : On différentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I Tôhoku Math. J. **12**, 459-476 (1960)

[58] Schouten, J.A., Struik D.J. : On some properties of general manifolds relating to Einstein's theory of gravitation. Amer. J. Math. **43**(4), 213-216 (1921)

[59] Sharma, R. : Second order parallel tensor in real and complex space forms. Int. J. Math. Sci. **12**, 787-790 (1989)

[60] Szab'o, Z.I. : Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X , Y). R = 0, I. The local version, J. Diff. Geom. **17**, 531-582 (1982)

[61] Szab'o, Z.I. : Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying R(X ; Y)R =0. Acta Sci. Math. **47**, 321-348 (1984)

[62] Szab'o, Z.I. : Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X , Y). R = 0, II. Global versions, Geom. Dedicata **19**, 65-108 (1985)

[63] Takahoshi, T. : An note on certain hypersurfaces of Sasakian manifolds. Kodai Math. Sem. Rep. **21**, 510-516 (1969)

[64] Tanno, S. : Sasakian manifolds with constant φ-holomorphic sectional curvature. Tôhoku Math. J. **21**, 501-507 (1969)

[65] Terlizzi, L.D.I. : on invariant submanifolds of C and S-manifolds. Acta Math. Hungar. **85**, 229-239 (1999)

[66] Tiwari, S.K., Shukla, S.S., Pandey, S.P. : C-totally real pseudo-parallel submanifolds of $\mathcal{S}$-space forms. Note di Matematica **32**, 73-81 (2012)

[67] Tripathi, M.M., Mihai, I. : submanifolds of framed metric manifolds and $\mathcal{S}$-manifolds. note di Mathematica **20**, No.2, 135-164 (2001)

[68] Tripathi, M.M., Singh, K.D. : On submanifolds of S-manifolds. Ganita **47** no. 2, 51-54 (1996)

[69] Tripathi, M.M., Kim, J.S., Dwivedi, M.K : Ricci curvature of integral submanifolds in $\mathcal{S}$-space forms. Aligarh Bull. Math. **27** (2), 95-100 (2008)

[70] Yano, K. : On a structure defined a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$. Tensor (N.S.) **14**, 99-109 (1963)

[71] Yano, K., Kon, M. : Structures on manifolds. Series in pure Math, vol3, world scientific, Singafora (1984)

[72] Yildiz, A., Murathan, C., Arslan, K., Ezentas, R. : C-totally real pseudo-parallel submanifolds of Sasakian space forms. Monatsh. Math. **151**, 247-256(2007)

[73] Yildiz, A., Murathan, C. : Invariant submanifolds of sasakian space forms. J. Geom. **95**, 135-150(2009)

[74] Yildiz, A., Murathan, C. : Ricci generalized pseudo-parallel Kählerian submanifolds in complex space forms. Bull. Malaysian Sci. Soc. (2) **31**(2), 153-163(2008)

[75] Zheng, Y. : Submanifolds with flat normal bundle. Geometriae Dedicata **67**, 295-300 (1997)

ملخص

هندسة المنوعات الجزئية في فضاءات الأشكال المركبة و S-منوعات

هذا العمل هو دراسة للمنوعات الجزئية الشبه - متوازية للفضاءات ذات أشكال ساساكي $(Sasaki)$ مرفقة ب S - حقل شعاعي معناه S - منوعة ذات انحناء φ - مقطعي ثابت c باختصار S - فضاء أشكال. هذه الفضاءات تمثل امتداد لصنف منوعات ساساكي ذات انحناء φ - مقطعي ثابت باختصار فضاء أشكال ساساكي.

كان اهتمامنا أولا بالموتر المتوازي ذو الدرجة الثانية على S - منوعة، أسسنا عبارة لهذا الموتر. بعد ذلك برهنا على عدم وجود سطوح فوقية متوازية ل S- فضاء أشكال، قمنا بتوظيف النتائج السابقة لإثبات عدم وجود سطوح فوقية نصف متوازية لهذا الفضاء إضافةعلى ذلك، حصلنا على نفس النتائج السلبية فيما يخص السطوح الفوقية الشبه - متوازية التي تحقق بعض الشروط في S- فضاء أشكال $\widetilde{M}(-3s)$ ذو البعد $2n+2+s$ و أيضا بالنسبة للسطوح الفوقية لفضاء أشكال لساساكي $\widetilde{M}(c)$ ذو البعد $2n+1$.

من جهة أخرى، قمنا بمعالجة المنوعات الجزئية ل $Legendre$ الشبه - متوازية، قدمنا الشروط اللازمةلهذه المنوعات الجزئية حتى تكون نصف - متوازية، متقاصرة كليا أو أصغرية. لقد درسنا أيضا نوع آخر من الشبه - التوازي لهذه المنوعات الجزئية يدعى شبه - توازي معمم ل $Ricci$.

أخيرا، اعتبرنا المنوعات الجزئية الصامدة، الشبه- متوازية والشبه - متوازية معممة ل $Ricci$ و برهنا على أن هذه المنوعات الجزئية تكون متقاصرة كليا في ظل شروط معينة.

الكلمات المفتاحية: S- منوعة، S- فضاء أشكال لساسكي، فضاء أشكال لساسكي، المنوعات الجزئية الشبه - متوازية، السطوح الفوقية، منوعات ل $Legendre$، المنوعات الصامدة.

***Abstract**: Geometry of submanifolds in Complex space forms and S-manifolds*

This work investigate the pseudo-parallel submanifolds of (2n+s)-dimensional S-manifolds of constant φ-sectional curvature c (in short, S-space forms $\acute{M}$). These spaces generalize the Sasakian space forms (i.e. Sasakian manifolds of constant φ-sectional curvature).
We are first interested in the second order parallel symmetric tensor on an S-manifold, we establish a formula of this tensor for $s \geq 1$. Thus, we prove the non-existence of parallel hypersurfaces of an S-space form, with $c \neq s$. We apply these results to show the non-existence of semi-parallel hypersurfaces of this space. In addition, we obtain the same negative results concerning the pseudo-parallel hypersurfaces in a Sasakian space form, and pseudo-parallel hypersurfaces that meet certain conditions in the S-space form $\acute{M}(-3s)$ of dimension 2n+2+s.
On the other hand, the Legendrian pseudo-parallel submanifolds are examined, the necessary conditions of such submanifolds are given to be semi-parallel, totally geodesic or minimal. We also studied another type of pseudo-parallel for these submanifolds, namely Ricci generalized pseudo-parallel.
Finally, we consider an invariant, pseudo-parallel and Ricci generalized pseudo-parallel submanifolds of an S-manifold. It is shown that these submanifolds are totally geodesic under certain conditions.

***Key words**: S-manifold, S-space form, Sasakian space form, Pseudo-parallel Submanifold, Hypersurface, Legendrian submanifold, Invariant submanifold.*

***Résumé**:*

Ce travail étudie les sous-variétés pseudo-parallèles des espace de formes Sasakiennes munis de s-champs de Reeb, c'est à dire des S-variétés de courbure φ-sectionnelle constante c (en abrégé: S-espaces formes). Ces espaces présentent une extension de la classe de variété Sasakienne de courbure φ-sectionnelle constante (en abrégé: espaces formes de Sasaki).
On s'intéresse dans un premier temps au tenseur parallèle symétrique du second ordre sur une S-variété, on établit une formule de ce tenseur. On prouve ainsi l'inexistence d'hypersurfaces parallèles d'un S-espace forme, on applique ces résultats pour montrer l'inexistence d'hypersurfaces semi-parallèles de celle-ci. En plus on obtient les même résultats négatifs concernant les hypersurfaces pseudo-parallèles de l'espace forme de Sasaki et les hypersurfaces pseudo-parallèles qui répondent à certaines conditions dans le S-espace forme $\acute{M}$ (-3s) de dimension 2n+2+s .
D'autre part, on examine les sous-variétés Legendriennes pseudo-parallèles, on donne les conditions nécessaires de telles sous-variétés pour être semi-parallèles, totalement géodésiques ou minimales. On étudie également un autre type de pseudo-parallèle pour ces sous-variétés à savoir la Ricci pseudo-parallèle généralisée.
Finalement, on considère une sous-variété invariante, pseudo-parallèle et Ricci pseudo-parallèle généralisée d'une S-variété. On montre que ces sous-variétés sont totalement géodésiques sous certaines conditions.

***Mots clés** : S-variété, S-espace forme, Espace forme de Sasaki, Sous-variété pseudo-parallèle, Hypersurface, Sous-variété Legendrienne, Sous-variété invariante.*