République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté de Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Équations aux dérivées partielles
présenté par

Batahri Asma Amira

Soutenu le : 23/ 06/ 2019

Problème elliptique fractionnaire en relation avec l'inégalité de Hardy

Soutenu devant le jury composé de :

M. S. E. Miri	Maître de Conférences A	U. Tlemcen	Président
M. Y. O. Boukarabila	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Examinateur
M. R. Bentifour	Maître de Conférences B	U. Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire :2018-2019

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

*Ma chére mère **Guitouni Houria***

Par tout les sacrifices que tu as consentis pour moi, et par ton amour et tes précieux conseils, je parvienne mon but de réussir.

Qu'Allah te garde et t'accorde une longue vie.

***Mon père**, qui m'aider à avancer dans la vie. qu'Allah le garde et le protège.*

*Ma sœur **Narimane***

Merci pour ta présence à mes cotés toujours qui m'a donné la volonté d'être courageuse.

Je t'aime ma sœur.

*Mon frère **Amine** que j'adore*

Merci ma source de force, tu sera toujours le modèle des frères.

*et le prince de la famille **Rayen**.*

je le dédie à toutes les personnes qui me sont chères.

Remerciements

Avant tous, je remercie **ALLAH**, le tout puissant de m'avoir donner la volonté et la patience pour accomplir ce travail.

Ma plus grande gratitude va à mon encadreur monsieur **Bentifour Rachid**, pour ses précieux conseils, la confiance et l'orientation qu'il m'a accordé.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude et mes plus vifs remerciements au professeur **Boukarabila Youcef Oussama**, pour ses précieux conseils, et l'orientation pendant la durée de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur **Miri Sofiane El hadi**, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury de ce travail.

Mes remerciement chaleureux à ma famille surtout ma mère et mon amie Asma Senhadji pour leur patience, aide et soutien moral.

Mes vifs remerciements s'adressent à tous mes professeurs durant toutes les années. qu'Allah vous garde .

Enfin, Je tiens à remercier tous ceux qui ont collaboré d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à l'étude d'un problème elliptique avec l'opérateur non local le laplacien fractionnaire, ce type d'opérateurs apparaît naturellement dans de nombreuses applications de la physique, des probabilités, de la biologie. Ils sont également pertinents en mathématiques.

Les opérateurs non locaux tels que le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ apparaissent naturellement dans la mécanique des continuums, les phénomènes de transition de phase, la dynamique de population et la théorie des jeux, voir par exemple Caffarelli [14].

Plus précisément on considère un opérateur pseudo- différentiel de la forme

$$(-\Delta)^s u(x) = a_{N,s}.P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy$$

où $s \in (0,1)$, $P.V$ représente la valeur de principe de Cauchy et $a_{N,s}$ est la constante de normalisation. L'opérateur peut être aussi défini en utilisant la Transformée de Fourier

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u)$$

où $\mathcal{F}(u)$ désigne la transformée de Fourier, voir [17] comme référence pour une initiation du Laplacien fractionnaire.

Au cours des vingt dernières années, de nombreux chercheurs ont étudie les problèmes elliptiques non locaux, voir [28] et [29] pour le cas sur critique, le cas critique, et l'existence de solutions au problème.

De plus, une grande attention a été consacrée à l'étude de l'existence de solutions aux problèmes non locaux avec potentiel de Hardy, nous référons à [7], [5], [19] .

Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur la partie théorique de l'opérateur laplacien fractionnaire, tels que : la définition de cet opérateur, ses propriétés, le cadre fonctionnel et les équations liées.

Notre mémoire est composé de trois chapitres :
Le premier chapitre fournit les connaissances Mathématiques requises, tels que les espaces de Sobolev fractionnaires (pour une classe précise) avec poids et sans poids, la transformation de Fourier et certaines propriétés de base de ces deux objets mathématiques, en outre, ce chapitre introduit plusieurs inégalités qui seront utilisées dans la suite de mémoire comme l'inégalité de Picone.
Dans le second chapitre, le but est de généraliser le résultat du théorème de "Caffarli-Khon-Nirenberg" au cas $p \neq 2$. D'abord on présente la version de l'inégalité de Hardy avec poids, ainsi pour $\beta = 0$ et $p = 2$, dans un domaine borné. Ensuite, on présente les résultats principaux du chapitre et leurs démonstrations, pour compléter la preuve du théorème de "Caffarli-Khon-Nirenberg" d'ordre fractionnaire dans un domaine borné.
Dans le troisième chapitre, on prend comme application les résultats du chapitre 2, pour $\beta = 0$ et $p = 2$, nous étudions un problème elliptique concave-convexe dans lequel le potentiel de Hardy interfère avec le laplacien fractionnaire. En particulier, nous étudierons le problème

$$(P_{\lambda,\mu}) \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} &= u^p + \mu u^q \text{ dans } \Omega, \\ u &> 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

On analyse l'existence des solutions non triviales du problème. Ensuite, nous trouverons un seuil d'existence des solutions $p(\lambda, s)$ du problème $(P_{\lambda,\mu})$ et on discute l'existence des solutions qui dépend de la valeur de p.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce Chapitre est de présenter quelque outils d'analyse non linéaire, qui seront utilisés au cours de ce mémoire. Donc, nous allons subdiviser ce chapitre en deux parties : Dans la première partie nous présentons les espaces de Sobolev fractionnaires et leur propriétés en précisant la définition de l'opérateur laplacien fractionnaire. Ensuite on définit les espaces de Sobolev avec poids (pour une classe de poids précise), Enfin, la dernière section est consacrée à quelques inégalités algébriques qu'on va utiliser régulièrement dans ce mémoire.

1.1 Espace de Sobolev

1.1.1 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev d'ordre m est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p; D^\alpha u \in L^p, \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, telque |\alpha| \leq m\}.$$

où $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$ *est la dérivée partielle de u d'ordre α au sens des distributions. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (||u||_{L^p(\Omega)} + \sum\limits_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \; si \; 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} \; si \; p = \infty \end{cases}$$

pour $p = 2$, et $m \in \mathbb{N}$, on remplace la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$ qui est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, telque |\alpha| \leq m\}$$

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert muni d'un produit scalaire définit par :

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Définition 1.2. *Pour $1 \leq p < \infty$, on note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, et il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.*
En plus, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, et réflexif si $1 < p < \infty$.

Remarque 1.1. *L'espace $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, i.e*

$$\overline{C_0^1(\mathbb{R}^N)} = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

et par conséquent

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

1.1.2 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$

Définition 1.3. *Soient $s \in (0,1)$, et $p \in]1, +\infty[$. On définit L'espace de Sobolev fractionnaire par :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) / \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < \infty\}$$

qui s'appelle aussi l'espace de Aronszajn,Gagliardo ou Sloboedeckij.[17]

Proposition 1.1. *Pour $s \in (0,1)$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

où

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$

est appelé la semi norme de u.

Pour plus de détails voir [16] et [25].

Définition 1.4. *On peut défenir aussi l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{s,p}(\Omega)$ i.e*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W_0^{s,p}(\Omega).$$

tel que

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\Omega),\ \textit{avec } u = 0 \ \textit{p.p } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

Remarque 1.2. *:*

1. Si Ω est un domaine régulier borné, l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ peut être engendré par la norme équivalente :

$$\|\phi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_Q \int_Q \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

avec $Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (\complement\Omega \times \complement\Omega)$.

2. Si $N > ps$, $W_0^{s,p}(\Omega) \subset L^{p_s^*}(\Omega)$ avec injection continue où $p_s^* = \dfrac{Np}{N-ps}$.

Théorème 1.1. *(**Bourgain - Brezis - Mironescu**)*
Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, il existe une constante positive $K_{N,p}$ tel que :

$$\lim_{s \to 1^-} (1-s) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy = K_{N,p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

Un autre résultat est donné par le théorème de Maz'ya_Shaposhnikova :

Théorème 1.2. *(**Maz'ya_Shaposhnikova**)*
Pour tout $u \in \bigcup\limits_{0<s<1} W^{s,p}(\Omega)$, il existe une constante positive $C_{N,p}$ tel que :

$$\lim_{s \to 0+} s \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy = C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

1.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire avec Poids $W^{s,p,\beta}$

Dans cette section, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire avec poids, pour prouver l'inégalité de **Caffarelli-Khon-Nirenberg** d'ordre fractionnaire

Définition 1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $0 \in \Omega$. Pour $0 < \beta < \dfrac{N-ps}{2}$, on définit l'espace de Sobolev avec poids $W^{s,p,\beta}(\Omega)$ par :*

$$W^{s,p,\beta}(\Omega) = \{\psi \in L^p(\Omega, \frac{dx}{|x|^{2\beta}}) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}\}.$$

ainsi l'espace $W^{s,p,\beta}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|\psi\|_{W^{s,p,\beta}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \frac{|\psi(x)|^p dx}{|x|^{2\beta}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 1.3. *On peut aussi définir l'espace $W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{s,p,\beta}(\Omega)$*

On peut montrer le résultat d'extension suivant :

Lemme 1.1. ***(Lemme d'extension*** *)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine régulier. Alors pour tout* $w \in W^{s,p,\beta}(\Omega)$*, il existe* $\tilde{w} \in W^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$ *tel que* $\tilde{w}_{|\Omega} = w$ *et*

$$\|\tilde{w}\|_{W^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|w\|_{W^{s,p,\beta}(\Omega)}.$$

avec C *est une constante positive qui dépend de* N,s,p *et* Ω *.*

Théorème 1.3. *(Poincaré) Soient* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N$*,* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1, +\infty[$*, alors il existe* $k > 0$ *tel que* $\forall \psi \in W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq k|||\psi|||_{W_0^{s,p,\beta}(\Omega)}$$

par conséquent, $|||.|||_{W_0^{s,p,\beta}(\Omega)}$ *est la norme equivalente de* $W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ *à* $\|.\|_{W^{s,p}}$ *donnée par :*

$$|||\psi|||_{W_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = (\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta})^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, pour $w \in W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ on note $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ par $L_{s,p,\beta}$

$$L_{s,p,\beta}(u)(x) = \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta}.$$

et pour tout $u, v \in W^{s,p,\beta}(\Omega)$, on a

$$\langle L_{s,p,\beta}(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta}.$$

Si $\beta = 0$, on note $L_{s,p,\beta}$ par $L_{s,p}$

Remarque 1.4. *Soit* Ω *un domaine borné tel que* $0 \in \Omega$*,* $1 < q < p$*, et on définit*

$$H_\Omega(v) = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy$$

où $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$*,* $w(x) = |x|^{-\beta}$ *et* $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$*. En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du lemme précédent et par le lemme d'extension 1.1, on peut montrer que*

$$H_\Omega(v) \geq C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy. \tag{1.1}$$

1.1.4 Laplacien Fractionnaire

Définition 1.6. ***(Espace de Schwartz)***
L'espace de schwartz est l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à décroissance rapide, il est notée par :

$$S(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N), telque \|\varphi\|_{S(\mathbb{R}^N)} < +\infty\}$$

où $\|\varphi\|_{S(\mathbb{R}^N)}$ est la semi norme associée, définie comme suit :

$$\|\varphi\|_{S(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^k) \sum_{|\alpha|\leq l} |D^\alpha \Phi(x)|, \forall k,l \in \mathbb{N}_0$$

pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial_N^{\alpha_N}$.

Définition 1.7. ***(Transformation de Fourier)***
La transformation de Fourier est définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N), \mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^N), \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi\xi.x} \varphi(x) dx = \widehat{\varphi}(\xi)$$

cette dernière est même un isomorphisme de S dans lui même dont l'inverse est défini par

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}(\xi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \exp^{ix.\xi} d\xi.$$

Remarque 1.5. *:*
1.Le dual topologique de $S(\mathbb{R}^N)$ est noté $S'(\mathbb{R}^N)$ c'est l'espace des distributions tempérées .
2.Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $S(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\Omega)$ et aussi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des distributions est un sous espace de $S(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue .

Propriétés 1.1. *:*
$D^\alpha \varphi = \mathcal{F}^{-1}(i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi))$.
$D^\alpha \widehat{\varphi} = i^{-|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)$.

Théorème 1.4. ***(Perserval)*** *: Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, On a :*

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Définition 1.8. ***(Définition du laplacien fractionnaire par Transformée de Fourier)***
Soit $u \in S(\mathbb{R}^N)$ et $0 < s < 1$. On définit le Laplacien fractionnaire par la transformée de Fourier comme suit :

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}(u))$$

Nous disons qu'un opérateur est non-local, lorsque le calcul de sa valeur en un point nous oblige à prendre en compte les points autour de lui, même s'ils sont loin. Ce fait est illustré dans le cas du Laplacien fractionnaire.
Dans cette section, on prend $p = 2$, c'est un cas assez important, puisque les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ et $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ deviennent des espaces de Hilbert. Ils sont généralement notés $H^s(\mathbb{R}^N)$ et $H_0^s(\mathbb{R}^N)$ respectivement. En outre, ils sont liés à l'opérateur Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ définie par

$$(-\Delta)^s u(x) \quad = \quad a_{N,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy \tag{1.2}$$

où

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\xi_1)}{|\xi|^N + 2s} d\xi \right)^{-1}$$

$P.V$: la valeur principale.

A présent, on introduit l'espace de Sobolev fractionnaire via la transformée de Fourier

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : |\xi|^s \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

De plus, on définie la semi norme appelée Gagliardo norme de u par

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} = (\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy)^{\frac{1}{2}}.$$

cette semi norme déterminera la formulation énergétique de nos problèmes. En particulier, on note

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy$$

Supposons que Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et dans notre cas on considère un espace de Sobolev fractionnaire $H_0^s(\Omega)$ défini par

$$H_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \text{ } avec \text{ } u = 0 \text{ } p.p \text{ } dans \text{ } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

muni de la norme

$$||u||_{H_0^s(\mathbb{R}^N)} = (\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy)^{\frac{1}{2}}$$

où $Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (\complement\Omega \times \complement\Omega)$

La paire $(H_0^s(\Omega), \|\|_{H_0^s(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. De plus,

$$(-\Delta)^s : H_0^s(\Omega) \to H^{-s}(\Omega)$$

est un opérateur linéaire continue, où $(-\Delta)^s$ est défini dans 1.2 et $H^{-s}(\Omega)$ est le dual topologique de $H_0^s(\Omega)$.
Pour $\varphi \in H_0^s(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^N)} = \int\int_Q \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

On a la relation suivante entre l'espace $H_0^s(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$

$$\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} = 2a^{-1}_{N,s}\|(-\Delta)^s\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Nous annonçons la version fractionnaire de l'inégalité de Sobolev pour $p = 2$

Théorème 1.5. *(Inégalité de Sobolev)[2]*
Soit $s \in (0,1)$ et $N > 2s$, alors il existe $S = S(N,s) > 0$, tel que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\|\varphi\|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \tag{1.3}$$

avec $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$ est l'exposant critique fractionnaire.

1.2 Quelques inégalités pratiques

Lemme 1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^N$, on a*

1) *Si* $p \leq 2$,

$$|a+b|^p - |a|^p - p|a|^{p-2}\langle a,b\rangle \leq C(p)|b|^p, \tag{1.4}$$

$$|b|^p - |a|^p - p|a|^{p-2}\langle a,b-a\rangle \geq C(p)\frac{|b-a|^2}{(|b|+|a|)^{2-p}}. \tag{1.5}$$

2) *Si* $p > 2$,

$$|a+b|^p - |a|^p - p|a|^{p-2}\langle a,b\rangle \leq \frac{p(p-1)}{2}(|a|+|b|)^{p-2}|b|^2, \tag{1.6}$$

$$|b|^p - |a|^p - p|a|^{p-2}\langle a,b-a\rangle \geq \frac{C(p)}{2^p-1}|b-a|^p. \tag{1.7}$$

Pour la preuve voir [10].

Lemme 1.3. *Supposons que* $p > 1$*, alors pour tout* $0 \leq t \leq 1$ *et* $a \in \mathbb{R}$*, on a*

$$|a-t|^p \geq (1-t)^{p-1}(|a|^p - t) \tag{1.8}$$

maintenant, nous avons l'inégalité algébrique suivante

Lemme 1.4. *Supposons que* $1 \leq p \leq 2$*, alors pour tous* $0 \leq t \leq 1$ *et* $a \in \mathbb{R}^N$*, on a*

$$|a-t|^p - (1-t)^{p-1}(|a|^p - t) \geq C_p\frac{|a-1|^2 t}{(|a-t|+|1-t|^{2-p})} \tag{1.9}$$

avec C_p *une constante positive.*

Rappelons que pour $u \in W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$, on a

$$L_{s,p,\beta}(u)(x) = \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dy}{|x|^\beta|y|^\beta}.$$

On commence par la démonstration de l'inégalité de Picone.

Lemme 1.5. *(Inégalité de Picone) Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $w \in W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$*, tel que* $w > 0$ *dans* Ω*. Supposons que* $L_{s,p,\beta}(w) = \nu$ *avec* $\nu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *et* $\nu \gneqq 0$*, alors pour tout* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$*, on a*

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \geq \langle L_{s,p,\beta}w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}}\rangle. \tag{1.10}$$

où $Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$.

Démonstration. le cas $\beta \neq 0$:

On pose $v(x) = \dfrac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}}$ et $k(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}$, alors

$$\begin{aligned}\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle &= \int_\Omega v(x)\int_{\mathbb{R}^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx\\ &= \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}}\int_{\mathbb{R}^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Puisque k est symétrique, on obtient que :

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle = \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \left(\frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}} - \frac{|u(y)|^p}{|w(y)|^{p-1}}\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.$$

par le changement de variable suivant $v_1 = \dfrac{u}{w}$ la formule précédente est équivalente à :

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \Big(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\Big)|w(x)-w(y)|^{p-2}\Big(w(x)-w(y)\Big)k(x,y)\,dy\,dx.$$

On définit

$$\Phi(x,y) = |u(x)-u(y)|^p - \Big(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\Big)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y)),$$

alors

$$\begin{aligned}&\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle + \frac{1}{2}\int_Q \Phi(x,y)k(x,y)\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int\int_Q |u(x)-u(y)|^p k(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

montrons que $\Phi(x,y) \geq 0$. ie

$$|u(x)-u(y)|^p \geq (|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y))\,|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))$$

En commençant par le cas si $w(x) = w(y)$ l'inégalité est trivialement satisfaite. Alors en prend $w(x) \neq w(y)$ et on suppose que $w(x) \geq w(y)$. Le terme à gauche peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}&\left(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\right) |w(x) - w(y)|^{p-2}(w(x) - w(y))\\ &= |u(x)|^p \frac{|w(x)|^p}{|w(y)|^p} |1 - \frac{w(y)}{w(x)}|^{p-1}[|\frac{v_1(x)}{v_1(y)}|^p - \frac{w(y)}{w(x)}]\end{aligned}$$

de la même maniére pour le 2^{eme} terme :

$$|u(x) - u(y)|^p = |w(x)v_1(x) - w(y)v_1(y)|^p = \Big|u(y)|^p \frac{|w(x)|^p}{|w(y)|^p} |\frac{v_1(x)}{v_1(y)} - \frac{w(y)}{w(x)}\Big|^p$$

Ainsi, si on pose $A = \dfrac{v_1(x)}{v_1(y)}$, et $t = \dfrac{w(y)}{w(x)}$ la dernière manipulation équivalente à l'inégalité donnée dans (1.8)

$$(1 - t)^{p-1}(A^p - t) \leq |A - t|^p, \ pour \ 0 \leq t \leq 1.$$

donc il en résulte que $\Phi \geq 0$. Ainsi, on obtiendra l'inégalité de Picone . □

Notons que pour $p = 2$ et $\beta = 0$ dans l'inégalité de Picone (1.10), nous formulons une extension de l'identité de Picone pour une extension intégrale liées aux mesures positives de Radon.

Théorème 1.6. ***Inégalité de Picone***
Soit $u, v \in H_0^s(\Omega)$ telle que $(-\Delta)^s u$ est une mesure de Radon bornée dans Ω, et $u \gneq 0$ alors

$$\forall v \in H_0^s(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{(-\Delta)^s u}{u} v^2 dx \leq \frac{a_{N,\,s}}{2} ||v||^2_{H_0^s(\Omega)} \tag{1.12}$$

Chapitre 2

Inégalités d'ordre fractionnaire de type Caffarelli-Khon-Nirenberg

2.1 Introduction

Le but du Chapitre est la généralisation du Théorème de **Caffarelli-Kohn-Nirenberg** obtenu dans [2], dans les deux cas , $p \in (1,2)$ (Théorème 2.10) et $p > 2$ (Théorème 2.6) . Dans la section 2.2 on donnera des outils pour la preuve de l'inégalité de Hardy avec poids pour une classe de poids "admissibles" dans $\mathbb{R}^N$, ainsi que dans un domaine borné. Ensuite, dans la section 2.3 on présente les résultats principaux de ce chapitre avec leurs démonstrations.

Dans la première partie de cette section, on présente l'inégalité de Hardy fractionnaire pour $p = 2$, puis on donne la preuve du cas général "avec poids" et ceci permet de compléter la preuve de l'inégalité de type "Caffarelli-Kohn-Nirenberg" d'ordre fractionnaire dans un domaine borné (Théorème 2.7).

Dans la deuxième partie on considère le cas $1 < p < 2$.

2.2 Résultats préliminaires

Théorème 2.1. *(Caffarelli-Kohn-Nirenberg). Soient $p, q \geq 1, \tau > 0, 0 \leq a \leq 1$, $\alpha, \beta, \gamma,$ et a des constantes réelles, tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}, \frac{1}{\tau} + \frac{\gamma}{N} > 0,$$

où $\Lambda = a\sigma + (1-a)\beta$. *Alors, il existe une constante positive* C *telle que pour tout* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, *on a*

$$\Big\||x|^\gamma u\Big\|_{L^\tau(\mathbb{R})^{\mathbb{N}})} \leq C\Big\||x|^\alpha|\nabla u|\Big\|^a_{L^p(\mathbb{R}^N)}\Big\||x|^\beta u\Big\|^{1-a}_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{1}{\tau}+\frac{\gamma}{N} = a\Big(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{N}\Big)+(1-a)\Big(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{N}\Big)$$

avec

$$0 \leq \alpha-\sigma \ si \ \alpha>0$$

et

$$\alpha-\sigma \leq 1 \ si \ \alpha>0$$

et

$$\frac{1}{\tau}+\frac{\gamma}{N} = \frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{N}$$

Ce type des inégalités est liée au problème elliptique local suivant :

$$-\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \tag{2.1}$$

On représente une extension du principe de comparaison introduit par **Brezis et Kamin** dans [13].

Lemme 2.1. ***(Principe de comparaison)***

Soit Ω *un domaine borné et soit* f *une fonction continue et non négative telle que* $f(x,u)>0$ *si* $u>0$, *et* $\dfrac{f(x,u)}{u^{p-1}}$ *est décroissante. Supposons que* $u,v \in W_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ *telles que*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}u & \geq & f(x,u)\ , u>0 \ dans \ \Omega, \\ \\ (-\Delta)^s_{p,\beta}v & \leq & f(x,v)\ , v>0 \ dans \ \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors, $u \geq v$ *dans* Ω.

Démonstration. Pour $u,v>0$ de (2.2) nous avons :

$$\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}v}{v^{p-1}} \geq \Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big). \tag{2.3}$$

Multiplions l'inégalité (2.3) par $(v^p - u^p)_+$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} v}{v^{p-1}})(v^p - u^p)_+ dx &\geq \int_\Omega (\Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big))(v^p - u^p)_+ dx \\ &\geq \int_{\Omega\cap[u<v]} (\Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big))(v^p - u^p) dx\end{aligned}$$

par l'hypothèse émises sur f et la définition de $(v^p - u^p)_+$ nous obtenons que

$$\int_\Omega \Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho \geq 0$$

avec $\rho = (v^p - u^p)_+$. D'autre part nous avons

$$J \equiv \int_\Omega (\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} v}{v^{p-1}}\Big) (v^p - u^p)_+ dx$$

d'aprés (1.11) on trouve

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\rho(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta} \\ &- \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\rho(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta},\end{aligned}$$

où $D_\Omega = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (C\Omega \times C\Omega))$. Pour simplifier l'écriture, en remplaçant ρ par sa valeur nous obtenons

$$\begin{aligned} & K_1(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{\rho(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) \\ = \; & |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) - |u(x)-u(y)|^p.\end{aligned}$$

Idem

$$\begin{aligned} & K_2(x,y) = |v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{\rho(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) = \\ & -|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) \\ & +|v(x)-v(y)|^p.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)}-\frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\\
&+ \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)}-\frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\\
&- \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} - \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\\
&= \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]}\int_\Omega \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}(u)}{u^{p-1}}v^p dx + \int_\Omega \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}(v)}{v^{p-1}}u^p dx\\
&- \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} - \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}.
\end{aligned}$$

Pour conclure en utilise l'inégalité de Picone (1.10), donc en trouve que

$$\int_\Omega \Big(\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}v}{v^{p-1}}\Big)(v^p-u^p)_+dx \leq 0$$

Ainsi

$$\int_{D_\Omega\cap[u<v]} \Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho dx \leq 0$$

mais sur l'ensemble $[u<v]$, on sais que $\Big(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho \geq 0$; par la définition de $\frac{f(u)}{u^{p-1}}$ et ρ donc $mes([u<v]) = 0$, ce qui implique que $u \geq v$ dans Ω. $\square$

Par la suite, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 2.2. *Soient* $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$ *fixé et* $w(x) = |x|^{-\alpha}$ *avec* $0 < \alpha < \frac{N-ps-2\beta}{p-1}$, *alors il existe une constante positive* $\Lambda(\alpha) > 0$ *telle que*

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Lambda(\alpha)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \quad p.p \ dans \ \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{2.4}$$

Démonstration. on a

$$L_{s,p,\beta}(w)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dy}{|x|^\beta|y|^\beta}.$$

Soit le changement de variables suivant :

On pose $\begin{cases} r = |x| \\ \rho = |y| \end{cases}$ Alors $\begin{cases} x = rx' \\ y = \rho y' \end{cases}$ où $|x'| = |y'| = 1$.

Ainsi

$$L_{s,p,\beta}(w) \quad = \quad \frac{1}{|x|^{\beta}} \int\limits_{0}^{+\infty} |r^{-\alpha} - \rho^{-\alpha}|^{p-2} \frac{(r^{-\alpha} - \rho^{-\alpha})\rho^{N-1}}{\rho^{\beta} r^{N+ps}} \left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \frac{\rho}{r} y'|^{N+ps}} \right) d\rho.$$

on pose $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, alors

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps+2\beta}} \int\limits_{0}^{+\infty} |1 - \sigma^{-\alpha}|^{p-2} (1 - \sigma^{-\alpha}) \sigma^{N-\beta-1} \left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{N+ps}} \right) d\sigma.$$

notons

$$K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{N+ps}}, \tag{2.5}$$

$K(\sigma)$ peut s'écrire aussi (voir [20]) :

$$K(\sigma) = 2 \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1 - 2\sigma \cos(\theta) + \sigma^2)^{\frac{N+ps}{2}}} d\theta. \tag{2.6}$$

Alors par identification avec (2.4), nous avons

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^{+\infty} |1 - \sigma^{-\alpha}|^{p-2} (1 - \sigma^{-\alpha}) \sigma^{N-\beta-1} K(\sigma) d\sigma. \tag{2.7}$$

pour conclure, on doit juste vérifier que

$$0 < \Lambda(\alpha) < \infty \tag{2.8}$$

On a

$$\Lambda(\alpha) = \int_0^1 |1 - \sigma^{-\alpha}|^{p-2} (1 - \sigma^{-\alpha}) \sigma^{N-\beta-1} K(\sigma)\, d\sigma + \int_1^{\infty} |1 - \sigma^{-\alpha}|^{p-2} (1 - \sigma^{-\alpha}) \sigma^{N-\beta-1} K(\sigma)\, d\sigma$$

posons $\sigma = \dfrac{1}{\xi}$ et notons que $K(\frac{1}{\xi}) = \xi^{N+ps} K(\xi)$ pour tout $\xi > 0$, ceci implique

$$\Lambda(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^{\alpha} - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\alpha(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1} \right) d\sigma. \tag{2.9}$$

Quand $\sigma \to \infty$, on a

$$K(\sigma)(\sigma^{\alpha} - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\alpha(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1} \right) \simeq \sigma^{-1-\beta-ps} \in L^1((2, \infty)).$$

Maintenant, quand, $\sigma \to 1$, nous avons

$$K(\sigma)(\sigma^{\alpha}-1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\alpha(p-1)}-\sigma^{\beta+ps-1}\right) \backsimeq (\sigma-1)^{p-1-ps} \in L^1((1,2)).$$

Donc d'après les estimations qui précèdent, nous obtenons $|\Lambda(\alpha)| < \infty$.
Et puisque $0 < \alpha < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$, et de (2.9) on obtient que $\Lambda(\alpha) > 0$.
Cela implique le résultat désiré

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Lambda(\alpha)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \text{ } p.p. \text{ dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

$\square$

Comme application de l'inégalité de Picone (1.10), nous trouvons l'inégalité de Hardy avec poids suivante.

Théorème 2.2. *Soit $s \in (0,1)$, $1 < p < \infty$ tel que $sp < N$ et $\beta < \frac{N-ps}{2}$, alors il existe $\Lambda(\alpha) > 0$ qui est défini dans (2.9) tel que*

$$2\Lambda(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx \quad\leq\quad \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\beta}}\frac{dy}{|y|^{\beta}}, \tag{2.10}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$

Démonstration. Par le Lemme 2.2
Soit $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $w(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $\alpha < \frac{N-ps-2\beta}{p-1}$, on a

$$L_{p,s,\beta}(w) = \Lambda(\alpha)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

par définition de $\langle L_{p,s,\beta}w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}}\rangle = \Lambda(\alpha)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{w^{p-1}|u(x)|^p}{w^{p-1}|x|^{ps+2\beta}}\,dx$
en plus on a $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Donc d'après l'inégalité de Picone (1.10) on a

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\beta}}\frac{dy}{|y|^{\beta}} \geq \Lambda(\alpha)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx.$$

Ainsi nous concluons $\square$

Remarque 2.1. *(**Le comportement de** $\Lambda(\alpha)$)*
Pour $\alpha < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$,

$$\Lambda(\alpha) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^{\alpha}-1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\alpha(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) d\sigma,$$

Calculons la dérivée de $\Lambda(\alpha)$ *:*

$$\Lambda'(\alpha) = (p-1)\int_1^{+\infty} K(\sigma)\log(\sigma)(\sigma^{\alpha}-1)^{p-2}\left(\sigma^{N-1-\beta-\alpha(p-1)} - \sigma^{\beta+ps+\alpha-1}\right) d\sigma.$$

Si on pose $\Lambda'(\alpha_0) = 0$ *on trouve* $\alpha_0 = \frac{N-2\beta-ps}{p}$ *où*

$$\begin{cases} \Lambda'(\alpha) < 0 & si \quad \alpha > \alpha_0 \\ \Lambda'(\alpha) > 0 & si \quad \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

Ainsi Λ *atteint le maximum défini par :*

$$\max_{\{0<\alpha<\frac{N-ps-2\beta}{p-1}\}} \Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_0).$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\beta}} \frac{dy}{|y|^{\beta}} \geq 2\Lambda(\alpha_0) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\, dx. \tag{2.11}$$

.

Remarque 2.2. *Notons que pour* $\beta = 0$, *alors* $2\Lambda(\alpha_0) = 2\Lambda(\frac{N-ps}{p}) \equiv \Lambda_{N,p,s}$ *donnée par :*

$$\Lambda_{N,p,s} = 2\int_0^{\infty} |1-\sigma^{-\alpha}|^{p-2}(1-\sigma^{-\alpha})\sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma. \tag{2.12}$$

avec

$$K(\sigma) = \int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+sp}}.$$

Nous avons le résultat d'optimalité suivant :

Théorème 2.3. *On définit*

$$\Lambda_{N,p,s} = \inf_{\{\phi\in\mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}dxdy}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}dx},$$

alors $\Lambda_{N,p,s} = 2\Lambda(\alpha_0)$.

Démonstration. Comme conséquence de (2.11), on a

$$\Lambda_{N,p,s} \geq 2\Lambda(\alpha_0) \tag{2.13}$$

alors pour montrer le théorème il suffit de prouver l'inégalité inverse.

Nous suivons les arguments utilisés dans [22].

Par le Lemme 2.2 on a

$$L_{p,s,\beta}(w_0) = \Lambda(\alpha_0)\frac{w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

tel que $w_0(x) = |x|^{-\alpha_0}$

pour montrer que $\Lambda_{N,p,s}$ est optimale en utilise une suite de fonctions $w_n \in W_0^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$ qui approche w et on divise $\mathbb{R}^N$ en trois régions :

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}\ ,\ M_n = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 \leq |x| < n\} \text{ et } O_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq n\}.$$

et on définit la fonction

$$w_n = \begin{cases} 1 - n^{-\alpha_0} & \text{si} \quad x \in B_1(0), \\ |x|^{-\alpha_0} - n^{-\alpha_0} & \text{si} \quad x \in M_n, \\ 0 & \text{si} \quad x \in O_n. \end{cases}$$

On a w_n est une fonction de $W_0^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$ (par un calcul direct).Ainsi

$$\langle L_{p,s,\beta}(w_0), w_n\rangle = \Lambda(\alpha_0)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}dx.$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n(x)-w_n(y))|w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\,dxdy$$
$$= 2\Lambda(\alpha_0)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}dx.$$

Comme dans [22], Analysons chaque terme de l'égalité précédente. on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n(x)-w_n(y))|w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\,dxdy \geq$$
$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n(x)-w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\,dxdy.$$

d'un autre coté on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx + R_1 + R_2,$$

où

$$R_1 = \int_{B_1(0)} (1 - n^{-\alpha_0})(w_0^{p-1} - (1 - n^{-\alpha_0})^{p-1}) \frac{dx}{|x|^{ps+\beta}},$$

et

$$R_2 = \int_{M_n} (w_0(x) - n^{-\alpha_0})(w_0^{p-1} - (w_0(x) - n^{-\alpha_0})^{p-1}) \frac{dx}{|x|^{ps+\beta}}.$$

on a bien $R_1, R_2 \geq 0$, et lorsque n $\to \infty$ $R_1 + R_2 = o(1)$ ie $R_1 + R_2 \leq c$ pour tout $n \geq 1$ Ainsi, en combinant les estimations ci-dessus, on trouve que

$$\begin{aligned} \Lambda_{N,p,s} &\leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x) - w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx} && (2.14) \\ &\leq 2\Lambda(\alpha_0) \left(1 + \frac{R_1 + R_2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx} \right). && (2.15) \end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\int_\Omega \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx \to \infty$ quand $n \to \infty$, passant à la limite dans (2.14), alors

$$\Lambda_{N,p,s} \leq 2\Lambda(\alpha_0) \tag{2.16}$$

d'après les deux inégalités (2.16) et (2.13) on'a bien l'égalité démontré. □

Par la suite, nous présentons une version de l'inégalité de Hardy dans un domaine borné. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3. *Soit Ω un domaine borné régulier tel que $0 \in \Omega$, alors il existe une constante $C \equiv C(\Omega, s, p, N) > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a*

$$C \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx \quad \leq \quad \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.17}$$

Démonstration. Fixons $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et soit $\tilde{u}$ l'extension de u dans $\mathbb{R}^N$ définie par le Lemme 1.1. Alors du Théorème (2.2) , on a

$$2\Lambda(\alpha) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \leq ||\tilde{u}||^p_{W^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C||u||^p_{W^{s,p,\beta}(\Omega)}.$$

Puisque $\tilde{u}_{|\Omega} = u$, alors de la remarque (1.3), on conclut que

$$\begin{aligned}2\Lambda(\alpha)\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx &\leq C||u||^p_{W^{s,p,\beta}(\Omega)}\\ &\leq C_1|||u|||^p_{W_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = C_1\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

2.3 Résultats Principaux

2.3.1 Partie 1 : Le cas $p \geq 2$

Dans de nombreuses branches de la physique mathématique, des analyses harmoniques et stochastiques, l'inégalité de Hardy joue un rôle central. D'après [22], pour $p \geq 2$ on a le théorème suivant

Théorème 2.4. ***(Inégalité de Hardy)****[22] Soit $s \in (0,1)$, et $1 < p < \infty$ tel que $sp < N$. Alors il existe une constante $\Lambda_{N,p,s} > 0$ tel que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, on a*

$$\Lambda_{N,p,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v|^p}{|x|^{sp}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \tag{2.18}$$

où la constante $\Lambda_{N,p,s}$ est donnée dans (2.12)

Pour $p = 2$, dans [2],[22] les auteurs prouvent **l'inégalité de Hardy fractionnaire** suivante

$$\Lambda_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \tag{2.19}$$

avec

$$\Lambda_{N,s} = 2^{2s}\frac{\Gamma^2(\dfrac{N+2s}{4})}{\Gamma^2(\dfrac{N-2s}{4})} \tag{2.20}$$

La constante $\Lambda_{N,s}$ est optimale et elle n'est pas atteinte.
Dans [5] les auteurs ont prouvé le résultat

Théorème 2.5. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, $N \geq 1$, $0 < s < 1$ et $N > 2s$. Alors, pour tout $1 < q < 2$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour tout*

$u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx \geq C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \tag{2.21}$$

Dans la suite, on note

$$h_s(u) := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,p,s}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}\,dx. \tag{2.22}$$

L'un des principaux résultats dans ce chapitre est la généralisation du théorème (2.5) au cas $p > 2$. Plus précisément nous avons le Théorème suivant :

Théorème 2.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné, pour $p > 2$, $0 < s < 1$ et $N > ps$, alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que $\forall\ u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$h_s(u) \geq C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \tag{2.23}$$

avec h_s est définie dans (2.22)

Démonstration. En suivant les arguments utilisées dans [5].
Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\alpha = \dfrac{N-ps}{p}$, alors $w(x) = |x|^{-\alpha}$ et $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$.
Rappelons que d'après l'inégalité de Hardy avec le reste citée dans [22],
on a

$$h_s(u) \geq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}, \tag{2.24}$$

analysons chaque côté de l'inégalité précédente. Notons que

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}w(x)^{\frac{p}{2}}w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{|w(y)u(x)-w(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} \\
&= \frac{\left|(u(x)-u(y)) - \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= f_1(x,y).
\end{aligned}$$

De la même manière, grâce à la symétrie de $f_1(x,y)$, il en résulte immédiatement que

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}(w(x))^{\frac{p}{2}}(w(y))^{\frac{p}{2}} &= \frac{\left|(u(y)-u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y)-w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= f_2(x,y).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$h_s(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Puisque f_1 et f_2 sont des fonctions positives,

$$h_s(u) \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Omega} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Omega} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

En utilisant le fait que Ω est un domaine borné, on obtient que pour tout $(x,y) \in (\Omega \times \Omega)$ et $q < p$,

$$\frac{1}{|x-y|^{N+ps}} \geq \frac{C(\Omega)}{|x-y|^{N+qs}}$$

et

$$K(x,y) \equiv \frac{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}{w(x)^p + w(y)^p} \leq C.$$

Posons

$$D(x,y) \equiv \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \frac{w(x)^p + w(y)^p}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}},$$

alors $K(x,y)D(x,y) = 1$. ainsi on utilise l'inégalité algébrique (1.7) et on pose le changement de variable :

$$\begin{cases} \eta_1 = a \\ \eta_2 = a - b \end{cases} \tag{2.25}$$

On obtient l'inégalité suivante : $|\eta_1|^p + C(p)|\eta_2|^p - p|\eta_1|^{p-2}\langle \eta_1, \eta_2\rangle \leq |\eta_2 - \eta_1|^p$. donc pour

$$\begin{cases} \eta_1 = u(x) - u(y) \\ \eta_2 = \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y)) \end{cases}$$

on a les minorations suivantes :

$$f_1(x,y) \geq C(\Omega)K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} - p\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+qs}}\Big\langle u(x)-u(y), \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\Big\rangle$$
$$+C(p)\frac{|\frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big],$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &\geq \Big[C(\Omega)K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] \\ &- \Big[pC(\Omega)K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]. \end{aligned}$$

idem,

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &\geq \Big[C(\Omega)K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] \\ &- \Big[pC(\Omega)K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(y)-u(x)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} h_s(u) &\geq C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega K(x,y)\Big(\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\Big[K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy \\ &- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\Big[K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy. \end{aligned}$$

et puisque $K(x,y)D(x,y)=1$

$$\begin{aligned} h_s(u) &\geq C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &- C_1(\Omega,p)\int_\Omega\int_\Omega\Big(h_1(x,y)+h_2(x,y)\Big)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{2.26}$$

avec

$$h_1(x,y)=K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|,$$

$$h_2(x,y)=K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|.$$

Puisque $h_1(x,y)$ et $h_2(x,y)$ sont des fonctions symétriques, il suffit d' estimer

$\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)\,dx\,dy$. En utilisant l'inégalité de Young, il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)dxdy &\leq \varepsilon\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &+ C(\varepsilon)\int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{2.27}$$

avec

$$G(x,y) = (K(x,y))^p\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p^2}{2}}\left|\frac{u(x)}{w(x)}\right|^p\frac{|(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}.$$

Montrons que

$$I \equiv \int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Notons que

$$I = \int_\Omega\int_\Omega\frac{(u(x))^p}{|x-y|^{N+qs}}\frac{(w(x))^{p^2-p}|(w(x)-w(y))|^p}{(w(x)^p+w(y)^p)^p}\,dx\,dy,$$

or $w(x) = |x|^{-\alpha}$ alors

$$I = \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega\frac{||x|^{-\alpha}-|y|^{-\alpha}|^p}{(|x|^{-\alpha p}+|y|^{-\alpha p})^p}\frac{|x|^{-\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.$$

implique

$$I = \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega\frac{|\frac{1}{|x|^\alpha}-|\frac{1}{|y|^\alpha}|^p}{(\frac{1}{|x|^{\alpha p}}+\frac{1}{|y|^{\alpha p}})^p}\frac{|x|^{-\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx$$

alors

$$I = \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega\frac{||x|^{\alpha}-|y|^{\alpha}|^p}{(|x|^{\alpha p}+|y|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.$$

Nous suivons l'argument utilisé dans [20] ,pour calculer l'intégrale I .

On pose

$$\begin{cases} r = |x| \\ \rho = |y| \end{cases} \quad \text{Alors} \quad \begin{cases} x = rx' \\ y = \rho y' \end{cases} \quad \text{où } |x'| = |y'| = 1$$

Puis on considère $\Omega \subset B_0(R)$, il en résulte que

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega\frac{||x|^{\alpha}-|y|^{\alpha}|^p}{(|x|^{\alpha p}+|x|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx \\ &\leq \int_\Omega u^p(x)\int_0^R\frac{(|r^\alpha-\rho^\alpha|^p\rho^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(r^{p\alpha}+\rho^{p\alpha})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\rho y'-rx'|^{N+qs}}\Big)d\rho dx. \end{aligned}$$

on pose $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, alors

$$\begin{aligned} I &\leq \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} \int_0^{\frac{R}{r}} \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} \Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{dy'}{|\sigma y' - x'|^{N+qs}} \Big) d\sigma dx \\ &= \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} \int_0^{\frac{R}{r}} \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma dx \leq M \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} dx, \end{aligned}$$

où

$$M = \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma$$

et

$$K(\sigma) = 2 \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1 - 2\sigma\cos(\theta) + \sigma^2)^{\frac{N+qs}{2}}} d\theta.$$

Montrons que $M < \infty$.

quand $\sigma \to \infty$,

$$\frac{(|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) \backsimeq \sigma^{-1-qs} \in L^1((1,\infty)).$$

quand $\sigma \to 1$,en considérant que $K(\sigma) \leq C|1-\sigma|^{-1-ps}$ et en suivant le même calcul que dans le lemme (2.2), il en résulte que

$$\int_0^1 \frac{(1-\sigma^\alpha)^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma < \infty.$$

Ainsi $M < \infty$.

d'après les estimations trouvées ci-dessus :

$$I \leq C \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} dx.$$

Étant donné que $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$ ou $w(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{N-ps}{p}$ implique que $u(x) = v(x)|x|^{-(\frac{N-ps}{p})}$, alors

$$I \leq C \int_\Omega \frac{|v(x)|^p}{|x|^{N-s(p-q)}} dx.$$

En appliquant le lemme (2.3), tel que par identification $N - ps + qs = ps + 2\beta_0$ implique que $\beta_0 = \frac{N-ps}{2} + \frac{(q-p)s}{2}$.

On obtient que

$$\begin{aligned} I &\leq C(\Omega)\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta_0}|y|^{\beta_0}}\,dy\,dx \\ &\leq C_1(\Omega)\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\,dy\,dx \\ &\leq C_1(\Omega)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\,dy\,dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau l'estimation (2.24), nous atteignons que

$$I \leq C_2(\Omega)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}$$

et l'affirmation suit.

Comme conséquence directe des estimations ci-dessus, nous avons prouvé que

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \leq C_3\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{2.28}$$

Ainsi

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \leq Ch_s(u),$$

et le résultat est obtenu. □

Remarque 2.3. *L'inegalité (2.23) s'avére être égalité pour $p=2$, avec $C=1$. Par conséquent, nous obtenons facilement que $\Lambda_{N,p,s}$ n'est jamais atteinte.*

Comme conséquence, on aura l'inégalité de type Caffarelli-Khon-Nirenberg "fractionnaire" dans un domaine borné.

Théorème 2.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné. Soit $p \geq 2$, $0 < s < 1$, $N > ps$ alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que $\forall\ u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}dxdy \geq C\Big(\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \tag{2.29}$$

où $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$ et $\beta = \frac{N-ps}{2}$.

Démonstration. Rappelons que $\alpha = \frac{N-ps}{p} \implies \alpha p^*_{s,q} = \frac{N-ps}{p}\frac{pN}{N-qs} = \frac{N(N-ps)}{N-qs}$, et puisque $\alpha p^*_{s,q} = \frac{N(N-ps)}{N-qs} < N$; il en résulte que $\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\,dx < \infty$, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer (2.29), nous allons utiliser l'estimation (2.28) et l'inégalité de Sobolev fractionnaire.

Fixons $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et définissons $u_1(x) = u(x)|x|^{-\alpha}$. Par (2.28), on obtient

$$C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \le \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Appliquons l'inégalité de Sobolev

$$S\Big(\int_\Omega |u_1(x)|^{p^*_{s,q}}dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \le \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy,$$

donc

$$S\Big(\int_\Omega |u_1(x)|^{p^*_{s,q}}dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \le \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}$$

en remplaçant u_1 par sa valeur

$$\Big(\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \le C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\alpha}\frac{dy}{|y|^\alpha}. \tag{2.30}$$

on pose $\beta = \frac{N-ps}{2}$ alors l'inégalité (2.30) peut être écrite sous la forme

$$\Big(\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \le C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.31}$$

□

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, pour avoir une généralisation "naturelle" de l'inégalité classique de Caffarelli-Khon-Nirenberg obtenue dans [15], on considère une classe de "poids admissibles ". Dans cette direction on a la version suivante du théorème .

Théorème 2.8. *Supposons que* $1 < p < \frac{N}{s}$ *et soit* $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$, *alors pour tout* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, *il existe* $S(\beta) > 0$ *tel que*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \ge S(\beta)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}}, \tag{2.32}$$

où $p^*_s = \frac{pN}{N-ps}$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, sans perte de généralité, supposons que $u \ge 0$. puisque $\beta < \frac{N-ps}{2}$, alors $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\,dx < \infty$. A partir de maintenant et pour Simplifier l'écriture , on note par $C, C_1, C_2, \dots$ toute constante universelle qui ne dépend pas de u et qui peut changer d'une ligne à l'autre. On pose $\tilde{u}(x) = \dfrac{u(x)}{w_1(x)}$, où $w_1(x) = |x|^{\frac{2\beta}{p}}$, donc

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p_s^*}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}. \tag{2.33}$$

D'après l'inégalité de Sobolev on a :

$$S\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p_s^*}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy. \tag{2.34}$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive C tel que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.35}$$

.

En utilisant la définition de $\tilde{u}$ et w_1 , on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{dy}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)}.$$

Nous allons réécrire le coté droit de l'égalité .Notons que

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)} =$$

$$\frac{\Big|(\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)) - w_1(y)\tilde{u}(y)(\dfrac{1}{w_1(x)}-\dfrac{1}{w_1(y)})\Big|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \equiv \tilde{f}_1(x,y).$$

De la même manière grâce à la symétrie de $\tilde{f}_1(x,y)$, nous obtenons que

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)} =$$

$$\frac{\Big|(\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x)) - w_1(x)\tilde{u}(x)(\dfrac{1}{w_1(y)}-\dfrac{1}{w_1(x)})\Big|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \equiv \tilde{f}_2(x,y).$$

Puisque

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_1(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_2(x,y)dxdy,$$

nous concluons que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_1(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_2(x,y)dxdy.$$

D'après l'inégalité (1.7) notons que

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+ps}}\Big\langle \tilde{u}(x)-\tilde{u}(y), w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})\Big\rangle$$
$$+C(p)\frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big],$$

Par conséquent

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}}|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|\Big].$$

Par l'inégalité de Young, nous obtenons l'existence de $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[C_1\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

de la même manière en utilisant le fait que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sont des fonctions symétriques, on aura

$$f_2(x,y) \geq \left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[C_1\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

Ainsi nous avons l'existence des constantes positives C_1, C_2, C_3 telles que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geq \\
&C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big[\Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}+\Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]dxdy \\
&-C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy \\
&-C_3 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\Big[\Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}+\Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \geq 1,$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \leq C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \\
&+C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy \\
&+C_3 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

on pose

$$k_1(x,y) = \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}$$

et

$$k_2(x,y) = \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}.$$

Il est clair que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} k_1(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} k_2(x,y)dxdy,$$

maintenant il suffit de montrer que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} k_1(x,y)dxdy \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}.$$

En remplaçant $\tilde{u}$ et w_1 par sa valeur dans k_1

$$k_1(x,y) = \frac{|u(x)|^p \Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}.$$

Par le même type de calcul que dans la preuve du Lemme 2.2. on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} k_1(x,y)dxdy &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p \Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx.
\end{aligned}$$

posons un changement de variable

$$\begin{cases} r = |x| \\ \rho = |y| \end{cases} \quad \text{Alors} \quad \begin{cases} x = rx' \\ y = \rho y' \end{cases} \quad \text{où } |x'| = |y'| = 1.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big[\int\limits_0^{+\infty} \frac{|r^{\frac{2\beta}{p}} - \rho^{\frac{2\beta}{p}}|^p \rho^{N-1}}{\rho^\beta} \left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|rx'-\rho y'|^{N+ps}} \right) d\rho \Big] dx.$$

maintenant on pose $\sigma = \frac{\rho}{r}$, alors

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} \Big[\int\limits_0^{+\infty} |1-\sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma)\, d\sigma \Big] dx,$$

où K est défini dans (2.6).

En suivant les mêmes calculs de l'estimation (2.8), on peut prouver que

$$\int_0^\infty |1-\sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma) d\sigma \equiv C_3 < \infty,$$

il en résulte que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} k_1(x,y)dxdy = C_3 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} k_1(x,y)dxdy \leq C_4 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.37}$$

combinant (2.33), (2.34) on trouve

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \tag{2.38}$$

et par (2.38) et (2.36) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.39}$$

implique que

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.40}$$

et nous obtenons le résultat désiré .

□

Maintenant on étudie le cas où Ω est un domaine borné régulier contenant l'origine, on a la *version* suivante du Théorème (2.8)

Théorème 2.9. *Supposons que Ω est un domaine borné régulier avec $0 \in \Omega$, alors il existe une constante positive $C \equiv C(\Omega, N, p, s, \underline{)}$ telle que pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geq C\Big(\int_\Omega \frac{|\psi(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}. \tag{2.41}$$

Démonstration. Soit Ω un domaine borné régulier. En utilisant le lemme d'extension (1.1)
on a $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\tilde{\psi} = \psi_{|\mathbb{R}^N}$, on obtient

$$||\tilde{\psi}||_{W^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1||\psi||_{W^{s,p,\beta}(\Omega)} = C_1\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après le Théorème (2.8) à $\tilde{\psi}$, il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{\psi}(x)-\tilde{\psi}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geq S(\beta)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{\psi}(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}.$$

Ainsi, en combinant les estimations ci-dessus on obtient le résultat désiré. □

2.3.2 Partie 2 : Le cas $1 < p < 2$

Le but dans cette section est d'étendre l'inégalité

$$h_s(u) \geq C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}$$

au cas $p < 2$. Pour cela on utilise une approche similaire a la première partie pour étudier le cas $p \in (1, 2)$, voir [3]. Et dans ce cas on a le théorème suivant

Théorème 2.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné. Pour $p < 2$, $0 < s < 1$ et $N > ps$, alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$h_s(u) \geq C \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy. \tag{2.42}$$

Pour montrer le théorème 2.10 on commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on définit $w(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $\alpha = \frac{N-ps}{p}$, alors pour tous $1 \leq q < p$, on a*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy \geq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} dxdy \tag{2.43}$$

telle que $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$.

Démonstration. Pour simplifier, on réécrit le coté gauche de l'inégalité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{|w(y)u(x) - w(x)u(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} \frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} \\
&= \frac{\left|(u(x) - u(y)) - \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y))\right|^p}{|x - y|^{N+qs}} \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&:= h_1(x, y).
\end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de $f_1(x, y)$, on a immédiatement

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{\left|(u(y) - u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y) - w(x))\right|^p}{|x - y|^{N+qs}} \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&:= h_2(x, y).
\end{aligned}$$

Notons :

$$H(v) \quad := \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy$$

alors H(v) peut s'écrire comme :

$$H(v) \quad := \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_2(x,y)\,dx\,dy$$

on pose

$$K(x,y) := \frac{(w(x)\,w(y))^{\frac{p}{2}}}{w(x)^p + w(y)^p},$$

et

$$D(x,y) \equiv \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \frac{w(x)^p + w(y)^p}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}.$$

ainsi $K(x,y) \leq \frac{1}{2}$ et $K(x,y)D(x,y) = 1$. En utilisant l'inégalité (1.4), on obtient

$$h_1(x,y) \geq C\,K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\left[\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} + p\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+qs}}\left\langle u(x)-u(y), \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right\rangle\right].$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} h_1(x,y) \quad &\geq \quad \left[CK(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\right] \\ &- \quad \left[pCK(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\left|\frac{u(y)}{w(y)}\right||(w(x)-w(y))|\right]. \end{aligned}$$

On applique le même argument à h_2

$$\begin{aligned} h_2(x,y) \quad &\geq \quad \left[CK(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\right] \\ &- \quad \left[pCK(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\left|\frac{u(x)}{w(x)}\right||(w(x)-w(y))|\right]. \end{aligned}$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
H(v) &\geq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\Big(\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&- pC\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy\\
&- pC\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

et comme $K(x,y)D(x,y)=1$

$$
\begin{aligned}
H(v) &\geq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&- C_1(p)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(l_1(x,y)+l_2(x,y)\Big)\,dx\,dy,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

avec

$$
l_1(x,y) = K(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|,
$$

$$
l_2(x,y) = K(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|.
$$

pour trouver le résultat désiré il suffit d'estimer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} l_2(x,y)\,dx\,dy$, car $l_1(x,y)$ et $l_2(x,y)$ sont des fonctions symétriques.

Pour cela en utilisant l'inégalité de Young

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} l_2(x,y)dxdy &\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&+ C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G(x,y)\,dx\,dy,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

avec

$$
G(x,y) = (K(x,y))^p\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p^2}{2}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big|^p\frac{|(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}.
$$

montrons que

$$
I := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G(x,y)\,dx\,dy \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,w(x)^{\frac{p}{2}}w(y)^{\frac{p}{2}}dxdy.
$$

En effet

$$I=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}G(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x))^p}{|x-y|^{N+qs}}\frac{(w(x))^{p^2-p}|(w(x)-w(y))|^p}{(w(x)^p+w(y)^p)^p}\,dx\,dy,$$

on remplace $w(x)$ par sa valeur et par simplification en trouve :

$$I=\int_{\mathbb{R}^N}u^p(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|y|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.$$

Comme dans [20], on pose

$$\begin{cases} r=|x| \\ \rho=|y| \end{cases}\quad \text{Alors}\quad \begin{cases} x=rx' \\ y=\rho y' \end{cases}\quad \text{où } |x'|=|y'|=1.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N}u^p(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|x|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}u^p(x)\int_0^\infty\frac{(|r^\alpha-\rho^\alpha|^p\rho^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(r^{p\alpha}+\rho^{p\alpha})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\rho y'-rx'|^{N+qs}}\Big)d\rho dx. \end{aligned}$$

maintenat on pose $\rho=r\sigma$, alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}\int_0^\infty\frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\sigma y'-x'|^{N+qs}}\Big)d\sigma dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}\int_0^\infty\frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}K(\sigma)d\sigma dx \\ &= M_1\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}dx, \end{aligned}$$

où

$$M_1=\int_0^\infty\frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}K(\sigma)d\sigma.$$

Comme dans la preuve du lemme (2.2), on peut montrer que $0<M_1<\infty$.
On remplace $u(x)$ par sa valeur : $u(x)=v(x)|x|^{-\alpha}$ avec $\alpha=\frac{N-ps}{p}$, on obtient

$$I=M_1\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)|^p}{|x|^{N-s(p-q)}}\,dx.$$

En appliquant le lemme (2.2) tel que par identification $N-ps+qs=ps+2\beta_0$ implique

que $\beta_0 = \frac{N-ps}{2} + \frac{(q-p)s}{2}$, alors $\beta_0 < \frac{N-qs}{2}$, on obtient

$$I \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} \, dx \, dy.$$

Alors d'après les estimations obtenues , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} \, dx \, dy \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dx dy \tag{2.46}$$

$\square$

Démonstration. (**Retour à la preuve du théorème 2.10**)

Comme dans le Lemme 2.4 nous avons

$$h_1(x,y) = \frac{\left|(u(x) - u(y)) - \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y))\right|^p}{|x-y|^{N+qs}} \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}$$

et

$$h_2(x,y) = \frac{\left|(u(y) - u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y) - w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+qs}} \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Nous définissons les sous ensemble de $\Omega \times \Omega$,

$$D_1 = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : w(y) \leq w(x)\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : w(x) \leq w(y)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dx \, dy &= \int \int_{D_1} h_1(x,y) \, dx \, dy + \int \int_{D_2} h_2(x,y) \, dx \, dy \\ &= G_1 + G_2. \end{aligned}$$

Pour trouver le résultat désiré il faut estimer $G_1 + G_2$, et puisque h_1 et h_2 sont des fonctions symétriques il suffit d'estimer G_1. Pour cela nous multiplions h_1 par

$$\frac{(|u(x) - u(y)| + |\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y))|)^{(2-p)\frac{p}{2}}}{(|u(x) - u(y)| + |\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y))|)^{(2-p)\frac{p}{2}}}$$

Puis en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_1} h_1(x,y)\,dx\,dy\\
\leq &\left(\int\int_{D_1}\frac{\left|(u(x)-u(y))-\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^2}{|x-y|^{N+qs}(|u(x)-u(y)|+|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|)^{(2-p)}}\frac{w(y)}{w(x)}dxdy\right)^{\frac{p}{2}}\\
\times &\left(\int\int_{D_1}\frac{(|(u(x)-u(y))|+|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|)^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy\right)^{\frac{2-p}{2}}. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

maintenant, on traite chaque terme dans (2.47) d'abord le premier terme : on a $D_1=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : w(y)\leq w(x)\}$
pour majorer le premier terme en utilise l'inégalité (1.9) donc on posant comme un changement de variable $t=\frac{w(y)}{w(x)}$ et $a=\frac{v(x)}{v(y)}$.
D'abord le deuxième terme est majoré comme suit d'après la Remarque 1.4

$$\int\int_{D_1}\frac{(|(u(x)-u(y))|+|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|)^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}}\leq$$

$$C_1\int\int_{\Omega}\frac{|(u(x)-u(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}}+\frac{|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}}\leq C(\Omega)H_{\Omega}(v).$$

Nous traitons maintenant le premier terme dans (2.47). Puisque $w(y)\leq w(x)$ dans D_1, puis en posant $t=\frac{w(y)}{w(x)}$ et $a=\frac{v(x)}{v(y)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|(u(x)-u(y))-\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^2}{(\left|u(x)-u(y)|+|\dfrac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))\right|)^{(2-p)}}\frac{w(y)}{w(x)}\\
= &\frac{w^p(x)|v(y)|^p|a-1|^2 t}{(|a-t|+|1-t|)^{2-p}}\\
\leq & w^p(x)|v(y)|^p\Big(|a-t|^p-(1-t)^{p-1}(|a|^p-t)\Big)\\
= & w^p(x)|v(y)|^p\Big[|\frac{v(x)}{v(y)}-\frac{w(y)}{w(x)}|^p-(1-\frac{w(y)}{w(x)})^{p-1}(|\frac{v(x)}{v(y)}|^p-\frac{w(y)}{w(x)})\Big]\\
= & |u(x)-u(y)|^p-(w(x)-w(y))^{p-2}(w(x)-w(y))(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)}-\frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que, pour tout $(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N$,

$$|u(x)-u(y)|^p - (w(x)-w(y))^{p-2}(w(x)-w(y))\left(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)} - \frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}\right) \geq 0,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
& C(\Omega)\int\int_{D_1} \frac{\left|(u(x)-u(y)) - \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^2}{|x-y|^{N+qs}(|u(x)-u(y)| + |\dfrac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))|)^{2-p}}\frac{w(y)}{w(x)}dxdy \\
\leq \;& \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x)-u(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+ps}} \\
- \;& \int_{I\!R^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)} - \frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))dxdy}{|x-y|^{N+ps}} \\
= \;& h_s(u).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\int\int_{D_1} f_1(x,y)dxdy \leq C(\Omega)h_s^{\frac{p}{2}}(u)H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v). \tag{2.48}$$

De même, par des arguments de symétrie nous obtenons

$$\int\int_{D_2} f_2(x,y)dxdy \leq C(\Omega)h_s^{\frac{p}{2}}(u)H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v). \tag{2.49}$$

En combinant (2.48) et (2.49), on obtient

$$H_\Omega(v) \leq C(\Omega)h_s^{\frac{p}{2}}(u)H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v).$$

et ensuite

$$H_\Omega(v) \leq C(\Omega)h_s(u)$$

qui est le résultat souhaité. □

En conséquence, nous obtenons l'amélioration de l'inégalité de Hardy suivante.

Théorème 2.11. *Supposons que les hypothèses du théorème (2.10) sont vérifiées, alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$h_s(u) \geq C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \tag{2.50}$$

Démonstration. La preuve est obtenue en combinant les résultats du Lemme 2.4 , le Théorème 2.10 de plus le Lemme d'extension 1.1. □

Chapitre 3

Problème elliptique semi-linéaire avec le potentiel de Hardy

Introduction

Le but dans ce chapitre est d'étudier le problème suivant :

$$(P_{\lambda,\mu})\begin{cases}(-\Delta)^s u-\lambda\dfrac{u}{|x|^{2s}} &= u^p+\mu u^q \text{ dans } \Omega,\\ u &> 0 \text{ dans } \Omega\\ u &= 0 \text{ sur}\mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{cases}$$

On analyse l'existence des solutions non triviales du problème $(P_{\lambda,\mu})$, où $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire définit dans le chapitre 1 par (1.2) , avec $N>2s$ et $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un domaine borné tel que $0\in\Omega$.

Notons que μ est un nombre réel positif , $0<\lambda<\Lambda_{N,s}$ où $\Lambda_{N,s}$ est la constante de l'inégalité de Hardy , $0<q<1$ et $1<p<p(\lambda,s)$ où

$$p(\lambda,s)\equiv\frac{N+2s-2\beta_\lambda}{N-2s-2\beta_\lambda}$$

avec $\beta_\lambda\in(0,\dfrac{N-2s}{2})$.

Nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions qui dépend de la valeur de p et nous allons prouvé que $p(\lambda,s)$ est le seuil de l'existence des solutions du problème $(P_{\lambda,\mu})$.

Nous commençons par donner la définition de la sous et sur solution d'énergie du problème $(P_{\lambda,\mu})$.

Définition 3.1. *Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on dit que u est une sur-solution d'énergie (sous-solution respectivement) du problème $(P_{\lambda,\mu})$. si $u(x) > 0$ p.p $x \in \mathbb{R}^N$, $u(x) \geq 0 (\leq 0.resp)$ p.p $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, et pour toute fonction non-négative $\phi \in H_0^s(\Omega)$ on a :*

$$\frac{a_{N,s}}{2} \int\int_Q \frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \lambda \int_\Omega \frac{u\phi}{|x|^{2s}} dx \geq (\leq) \int_\Omega u^p \phi dx + \mu \int_\Omega u^q \phi dx$$

Si u est une sur et sous solution au même temps ,on dit que u est une solution d'énergie positive.

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (P_+)

$$(P_+) \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} &= u_+^p + \mu u_+^q \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur} \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

est définie par

$$J : H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{a_{N,s}}{4} \int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \frac{u_+^2}{|x|^{2s}} dx \\ &- \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} dx - \frac{\mu}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} dx \end{aligned}$$

Les points critiques de J sont des solutions du problème (P_+).

Remarque 3.1. *Si u est une solution strictement positive du problème (P_+), alors $u_+ \equiv u$ et u est aussi une solution du problème principal $(P_{\lambda,\mu})$.*
Si $p > 2_s^* - 1$ le problème est sur-critique et on perd la compacité .
On a besoin de préciser le concept faible de la solution et de préciser le cadre fonctionnel défini par :

$$\Theta := \{\varphi \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \textit{ mesurable ,tel que } (-\Delta)^s \varphi \in L^\infty(\Omega) \textit{ et } \varphi = 0 \textit{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

Les principes de comparaison sont un outil important pour la recherche des solutions au moyen d'arguments itératif. Ils permettent de définir un ordre entre les solutions de problèmes connexes dans certaines situations spécifiques .
D'abord, nous pouvons prouver un Lemme de comparaison pour les solutions énergétiques.

Lemme 3.1. *Soit* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *des solutions énergétiques du problème*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ u &= g_1 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (-\Delta)^s v &= f_2 \text{ dans } \Omega, \\ v &= g_2 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

respectivement ,avec $f_1, f_2 \in H^{-s}(\Omega)$ *et* $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$.
Si $f_1 \leq f_2$ *p.p dans* Ω *et* $g_1 \leq g_2$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ *Alors* $u \leq v$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N$.

Également, on présente le principe de comparaison des solutions faibles dans le lemme suivant :

Lemme 3.2. *soit* $u, v \in L^1(\Omega)$ *sont des solutions faibles de problème*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ u &= g_1 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (-\Delta)^s v &= f_2 \text{ dans } \Omega, \\ v &= g_2 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

respectivement ,avec $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$ *et* $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$.
Si $f_1 \leq f_2$ *p.p dans* Ω *et* $g_1 \leq g_2$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ *Alors* $u \leq v$ *p.p dans* $\mathbb{R}^N$.

3.1 Les solutions radiales

Le but de cette section est d'analyser le comportement des solutions dans un voisinage de l'origine du problème homogène.

$$(-\Delta)^s u = \lambda \frac{u}{|x|^{2s}} \text{ dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

Afin d'utiliser ces informations comme un moyen de prouver l'existence et la non-existence des résultats. Nous commençons par la construction de la solution radiale explicite de l'équation.

Lemme 3.3. *Soit* $0 < \lambda < \Lambda_{N,s}$ *alors* $v_{\pm} := |x|^{-\frac{N-2s}{2} \pm \alpha}$ *sont des solutions de (3.1) où* α *est défini par l'identité*

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = \frac{2^{2s}\Gamma(\frac{N+2s+2\alpha}{4})\Gamma(\frac{N+2s-2\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{N-2s+2\alpha}{4})\Gamma(\frac{N-2s-2\alpha}{4})}$$

Remarque 3.2. *On note* $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = m_\alpha m_{-\alpha}$ *tel que*

$$m_\alpha = 2^{\alpha+s}\frac{\Gamma(\frac{N+2s+2\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{N-2s-2\alpha}{4})}$$

Lemme 3.4.

$$\lambda : [0, \frac{N-2s}{2}) \to (0, \Lambda_{N,s}]$$

$$\alpha \to \lambda(\alpha)$$

est une application bijective et strictement décroissante et

$$0 < \lambda(\alpha) \leq \Lambda_{N,s}$$

si et seulement si $0 \leq \alpha < \dfrac{N-2s}{2}$
Pour plus de détails sur la preuve voir [23]

Démonstration. Notons que $\lambda(\alpha)$ est une fonction continue positive pour $0 \leq \alpha < \dfrac{N-2s}{2}$, telle que $\lambda(0) = \Lambda_{N,s}$. Ainsi, pour prouver le lemme il suffit de montrer que $\lambda(\alpha)$ est une fonction strictement décroissante.
En particulier, montrons que la fonction $log(\alpha)^{-1}$ est strictement croissante par rapport à α.
D'après [9] nous considérons la représentation de la fonction Lambda :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{\frac{x}{n}}$$

où Λ est la constante d'Euler-Mascheroni (voir [6]).
Ainsi

$$log\frac{1}{\lambda(\alpha)} = log\frac{1}{2^{2s}}\frac{\frac{1}{\Gamma(\frac{N+2s+2\alpha}{4})}\frac{1}{\Gamma(\frac{N+2s-2\alpha}{4})}}{\frac{1}{\Gamma(\frac{N-2s+2\alpha}{4})}\frac{1}{\Gamma(\frac{N-2s-2\alpha}{4})}}$$

$$= -2s.log2 + log\frac{(N+2s)^2-4\alpha^2}{(N-2s)^2-4\alpha^2} + 2\gamma s + \sum_{n=1}^{\infty}[log\frac{(\frac{N+4n+2s}{4n}) - \frac{\alpha^2}{4n^2}}{(\frac{N+4n+2s}{4n}) - \frac{\alpha^2}{4n^2}} - \frac{2s}{n}]$$

Le dernier terme est une série convergente de la même manière que le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{\frac{-x}{n}}$$

convergent. Ainsi, si $a > b$ et $\xi > 0$ alors $\dfrac{a^2-\xi^2}{b^2-\xi^2}$ est une fonction croissante par rapport à ξ. $\square$

Remarque 3.3. *On peut construire explicitement deux solutions positives à notre problème homogène (3.1).*
On note :

$$\gamma = \frac{N-2s}{2} - \alpha \text{ et } \bar{\gamma} = \frac{N-2s}{2} + \alpha$$

avec $0 < \gamma \leq \dfrac{N-2s}{2} - \alpha \leq \bar{\gamma} < N-2s$.
Puisque

$$N - 2\gamma - 2s = 2\alpha > 0 \text{ et } N - 2\bar{\gamma} - 2s = -2\alpha < 0,$$

alors $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(|x|^{-\gamma}) \in L^2(\Omega)$ *mais pas* $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(|x|^{-\bar{\gamma}})$. *(voir 2.2)*

En utilisant ces résultats pour étudier les solutions radiales du problème $(P_{\lambda,\mu})$ au voisinage de l'origine. En particulier, nous pouvons voir que chaque solution sera, au moins, aussi singulière que $|x|^{-\gamma}$.

Lemme 3.5. *Soit* $0 < \lambda \leq \Lambda_{N,s}$ *et* $f \in L^\infty(\Omega)$, *considérons* u *une fonction non négative définie dans* Ω *telle que* $u \neq 0$, $u \in L^1(\Omega)$ $\dfrac{u}{|x|^{2s}} \in L^1(\Omega)$ *et* $u = 0$ *dans* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.
Si u *vérifie :*

$$(-\Delta)^s u - \lambda\frac{u}{|x|^{2s}} = f \geq 0$$

au sens faible dans Ω. *Alors,* $\exists \eta > 0$ *et* $C = C(N,s) > 0$ *tel que quelque soit la boule* $B_r(0) \subset\subset \Omega$ *avec* $0 < r < \eta$,

$$u \geq C|x|^{-\gamma} \text{ dans } B_r(0) \text{ où } \gamma := \frac{N-2s}{2} - \alpha$$

Enfin, pour conclure nous étudions le problème suivant pour analyser l'effet du semi-linéarité sur le comportement des solutions radiales dans $\mathbb{R}^N$

$$(-\Delta)^s u - \lambda\frac{u}{|x|^{2s}} = u^p \text{ dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \tag{3.2}$$

En particulier dans l'exemple suivant

Exemple 3.1. *Si on choisit* $w(x) := A|x|^{\frac{2s-N}{2}+\alpha}$ *tel que* A *est une constante positive,* $w(x)$ *est une solution (3.2) si et seulement si elle vérifie :*

$$A\lambda(\alpha)|x|^{-2s+\frac{2s-N}{2}+\alpha} - \lambda A|x|^{-2s+\frac{2s-N}{2}+\alpha} = A^p|x|^{(\frac{2s-N}{2}+\alpha)p}$$

avec

$$\lambda(\alpha) = \pi^2 s \frac{\Gamma(\frac{N+2s+2\alpha}{4})\Gamma(\frac{N+2s-2\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{N-2s-2\alpha}{4})\Gamma(\frac{N-2s+2\alpha}{4})}$$

Ainsi, pour conserver l'homogénéité on prend nécessairement $\frac{2s-N}{2}+\alpha = \frac{-2s}{p-1}$, *et dans ce cas l'équation devient*

$$\lambda(\alpha) - \lambda = A^{p-1}$$

Puisque $A > 0$, *il faut que* $\lambda(\alpha) - \lambda > 0$. *Où* $\lambda(\alpha)$ *est décroissante par le Lemme 3.4 donc il existe un élément unique* β_λ *tel que* $\lambda = \lambda(\beta_\lambda)$ *avec* $0 < \beta_\lambda < \frac{N-2s}{2}$. *Ainsi,* $\lambda(\alpha) - \lambda(\beta_\lambda) > 0$ *est équivalent à* $\alpha < \beta_\lambda$ *implique que*

$$\beta_\lambda > \frac{-2s}{p-1} - \frac{2s-N}{2}$$

Par conséquent

$$p < \frac{N+2s-2\beta_\lambda}{N-2s-2\beta_\lambda} = p(\lambda, s) \tag{3.3}$$

Donc, pour $p < p(\lambda, s)$, *nous pourrons construire une solution radiale pour le problème* $(P_{\lambda,\mu})$.

3.2 Existence des solutions minimales pour $1 < p < p(\lambda, s)$

Dans cette section, on considère $1 < p < p(\lambda, s)$ et on montre l'existence des solutions.

Lemme 3.6. *Soit* $f \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, *où* $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$. *Alors, il existe une solution unique* $v \in L^1(\Omega)$, *qui est la solution faible du problème*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v &= f \text{ dans } \Omega, \\ v &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

De plus

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega,\delta(x)dx)}$$

La preuve suit des arguments données dans [[12],lemme1].

Remarque 3.4. *Si*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v &= f \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ v &\geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Alors $v \geq 0$ p.p dans Ω

Lemme 3.7. *Si le problème (3.6) admet une sous solution $\underline{u}$ et une sur solution $\overline{u}$ vérifiant $\underline{u} \leq \overline{u}$. Alors, il existe une solution u satisfait $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*

Proposition 3.1. *Soit M défini par :*

$$M = \sup\Big\{\mu > 0 : \text{ le problème } (P_{\lambda,\mu}) \text{ admet une solution } \Big\}$$

Alors $0 < M < \infty$.

Démonstration. L'idée est de construire une sous solution et sur solution au problème $(P_{\lambda,\mu})$. D'abord, pour la sous solution, on considère le problème des valeurs propres :

$$(P_1)\begin{cases} (-\Delta)^s \varphi_1 &= \lambda_1\varphi_1 \text{ dans } \Omega, \\ \varphi_1 &= 0 \text{ sur} \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

où λ_1 est la première valeur propre associée à $(-\Delta)^s$ dans Ω qui est caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega), u \neq 0}\Big\{\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}\Big\}$$

et φ_1 est la première fonction propre associée au problème (P_1) et d'après [[27],proposition.4], on affirme que $\varphi_1 \geq 0$, et elle appartient à $H_0^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
En effet, soit $\underline{u} = t\varphi_1$ est la sous solution du problème $(P_{\lambda,\mu})$, tel que pour t assez petit nous avons dans Ω

$$(-\Delta)^s(t\varphi_1) = \lambda_1 t\varphi_1 \leq \mu(t\varphi_1)^q \leq \frac{t\varphi_1}{|x|^2 s} + (t\varphi_1)^p + \mu(t\varphi_1)^q$$

et $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \underline{u}(x) = 0$ *car* $\varphi_1 = 0$ *sur* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.
Ainsi, $\underline{u} = t\varphi_1$ est une sous solution de $(P_{\lambda,\mu})$, dans les deux sens énergétique et faible, de plus nous pouvons construire une suite strictement croissante u_k de solutions du

problème itéré (P_k)

$$(P_k)=\begin{cases}(-\Delta)^s u_k &= \lambda\dfrac{u_{k-1}}{|x|^{2s}}+u_{k-1}^p+\mu u_{k-1}^q \text{ dans } \Omega,\\ u_k &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{cases}$$

Pour $k\geq 1$ et $u_0=\underline{u}$. Notons, lorsque $\underline{u}\in H_0^s(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, les solutions $u_k\in C^s(\Omega)\cap C^{2s+\beta}$ pour $\beta>0$.
En particulier, $u_k\in L^\infty(\Omega)$ et ils peuvent être considérer comme des solutions ponctuelles faibles et énergétiques de (P_k). De plus, par le Lemme 3.1, on sais que

$$\underline{u}\leq u_1\leq \ldots\leq u_k\leq u_{k+1}$$

L'idée maintenant est de trouver une sur solution $\overline{u}$ tel que $\overline{u}>u_k$. Pour cela, on doit traiter avec le cas sous critique et le cas sur critique séparément

1. **Le cas sous critique et critique pour** $1<p\leq 2_s^*-1$;
   On cherche une sur solution de la forme $w(x)=A|x|^{-\beta}$ ou $A>0$ et β un paramètre réel positif qui vérifie

$$\beta<\frac{N-2s}{2}$$

Lorsque $p\leq 2_s^*-1$ avec $2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}$, pour cette valeur de β on a :

$$p\beta<\beta+2s \tag{3.4}$$

$$\beta(p+1)<N \tag{3.5}$$

Par la condition (3.4) et le choix de A et la transformée de Fourier de $(-\Delta)^s w$

$$(-\Delta)^s w=\mathcal{F}^{-1}(\xi^{2s}\mathcal{F}(w)(\xi))=2^{\alpha+2s}\frac{\Gamma(\dfrac{N+2s+2\alpha}{4})}{\Gamma(\dfrac{N-2s-\alpha}{4})}\mathcal{F}^{-1}(\xi^{\frac{-N}{2}+s-\alpha})=\lambda|x|^{-2s}w$$

implique

$$(-\Delta)^s w-\lambda\frac{w}{|x|^{2s}}\geq w^p \ dans\ \Omega \tag{3.6}$$

Soit $\eta:=\inf\limits_{\Omega} w>0$, pour μ assez petit, on prend $\overline{u}=Bw$ avec B une constante tel que $0<B<1$:

$$\eta^{p-q}\geq\mu\frac{1}{B^{1-q}(1-B^p)} \tag{3.7}$$

Ce qui implique

$$w^p \geq \overline{u}^p + \mu \overline{u}^q$$

Alors

$$(-\Delta)^s \overline{u} - \lambda \frac{\overline{u}}{|x|^{2s}} \geq \overline{u}^p + \mu \overline{u}^q$$

Ainsi, nous avons obtenu une sur solution de $(P_{\lambda,\mu})$ pour $1 < p \leq 2_s^* - 1$. De plus, d'après (3.5) nous avons également

$$\overline{u} \in L^{p+1}(\Omega) \ et \ \frac{\overline{u}^2}{|x|^{2s}} \in L^1(\Omega) \tag{3.8}$$

Nous prouvons par induction que $u_k \leq \overline{u}$ pour tout k.
Le fait de choisir un paramètre t assez petit dans $\underline{u} := t\varphi_1$ donne $\overline{u} \geq \underline{u} := u_0$.
Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $k-1$ tel que

$$\underline{u} \leq u_{j-1} \leq u_j \leq \overline{u} \ pour \ j < k-1 \ p.p \ dans \ \Omega$$

Alors

$$(-\Delta)^s u_k = \lambda \frac{u_{k-1}}{|x|^{2s}} + u_{k-1}^p + \mu u_{k-1}^q \leq \lambda \frac{\overline{u}}{|x|^{2s}} + \overline{u}^p + \mu \overline{u}^q$$

et par définition de la sur solution $\overline{u}$

$$(-\Delta)^s \overline{u} \geq \lambda \frac{\overline{u}}{|x|^{2s}} + \overline{u}^p + \mu \overline{u}^q$$

Donc

$$(-\Delta)^s (\overline{u} - u_k) \geq \lambda \frac{(\overline{u} - u_{k-1})}{|x|^{2s}} + (\overline{u}^p - u_{k-1}^p) + \mu(\overline{u}^q - u_{k-1}^q) \geq 0$$

En outre, puisque $u_k \in L^\infty(\Omega)$ il existe $r > 0$ tel que $\overline{u} \geq u_k$ dans $B_r(0) \subset \Omega$.
Ainsi, on pose $z = \overline{u} - u_k$
z est continue dans $\overline{\Omega \setminus B_r(0)}$ et satisfait

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z & \geq & 0 \text{ dans } \Omega \setminus B_r(0), \\ z & \geq & 0 \text{ sur } B_r(0) \\ z & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer le principe du maximum fort pour conclure que $z \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N$, et

$$\underline{u} \leq u_1 \leq ... \leq u_k \leq ... \leq \overline{u}$$

Si on prend u_k comme fonction test dans le problème (P_k), alors d'après (3.8)

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \frac{a_{N,s}}{2}\|u\|_{H_0^s(\Omega)} \\
&= \lambda \int_\Omega \frac{u_k u_{k-1}}{|x|^{2s}} dx + \int_\Omega u_k u_{k-1}^p dx + \mu \int_\Omega u_k u_{k-1}^q dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega \frac{\overline{u}^2}{|x|^{2s}} dx + \int_\Omega \overline{u}^{p+1} dx + \mu \int_\Omega \overline{u}^{q+1} dx \leq c
\end{aligned}$$

Par conséquent, à une sous suite, nous savons que $u_k \to u_\mu$ faiblement dans $H_0^s(\Omega)$ où $u_\mu = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$.
Par monotonie on peut passer à la limite dans le coté droite de la formulation énergétique du problème itéré (P_k) et puisque $u \in H_0^s(\Omega)$ et $p < 2_*^s - 1$, on conclu que $u_\mu \geq 0$ est une solution minimale de $(P_{\lambda,\mu})$.

2. **Le cas sur critique** $2_s^* - 1 < p < p(\lambda, s)$

Dans ce cas on suit la même idée comme dans [18].
Si $p < p(\lambda, s)$ tel que $p(\lambda, s)$ est défini comme dans (3.3), il existe une fonction radiale $w(x) = A|x|^{\frac{-2s}{p-1}}$ (avec A est une constante positive) satisfait

$$(-\Delta)^s w - \lambda \frac{w}{|x|^2 s} = w^p \ dans\ \mathbb{R}^N$$

Lorsque $p > 2_s^* - 1 > \dfrac{N}{N-2s}$,

$$w \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)\ et\ \frac{w}{|x|^{2s}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \tag{3.9}$$

Aussi on prend $\overline{u} = C_1 u, C_1 > 0$ (voir (3.7)), on trouve

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \overline{u} - \lambda \dfrac{\overline{u}}{|x|^{2s}} \geq \overline{u}^p + \mu \overline{u}^q \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ \\ \overline{u} > 0 \text{ sur} \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

De la même manière que dans le cas sous critique, on peut prouver :

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq ... \leq u_k \leq \overline{u}, k \in \mathbb{N}$$

où u_k est une solution faible du problème (P_k),

Par la convergence monotone et (3.9) on trouve que u_k converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vers une solution faible strictement positive u_μ ($u_k \to u_\mu$) de $(P_{\lambda,\mu})$ pour $2_s^* - 1 < p < p(\lambda, s)$.
Alors, pour μ assez petit, nous avons construit une solution minimale dans les deux cas : sous critique et sur critique, c-à-d que nous avons prouver que $M > 0$.
Et pour terminer la preuve, il faut vérifier que $M < \infty$.
Considérons le problème (P_2) des valeurs propres avec potentiel de Hardy et $1 < p \leq 2_s^* - 1$:

$$(P_2) = \begin{cases} (-\Delta)^s \phi_1 - \lambda \dfrac{\phi_1}{|x|^{2s}} & = \lambda_1 \phi_1 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ \phi_1 & = 0 \text{ sur} \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Notons que lorsque $\lambda < \Lambda_{N,s}$, ce problème est bien défini, voir [[29], lemme 9].
Nous savons aussi que $\phi_1 \in H_0^s(\Omega)$, $\phi_1 \geq 0$.
Supposons que u est une solution positive du problème $(P_{\lambda,\mu})$.
En prenant ϕ_1 comme une fonction test dans ce problème, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{a_{N,s}}{2} \int\int_Q \frac{(\phi_1(x) - \phi_1(y))(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy - \lambda \int_\Omega \frac{\phi_1(x) u}{|x|^{2s}} dx \\ = \int_\Omega u^p \phi_1 dx + \mu \int_\Omega u^q \phi_1 dx \end{aligned}$$

Et en utilisant aussi u comme une fonction test dans (P_2) on aura

$$\int_\Omega (u^p + \mu u^q) \phi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi_1 u dx \tag{3.10}$$

Si nous prenons $2_s^* - 1 < p < p(\lambda, s)$, et $\varphi_1 \geq 0$ la solution de (P_1) comme une fonction test du problème $(P_{\lambda,\mu})$, alors

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u \varphi_1 dx = \int_\Omega (\lambda \frac{u}{|x|^{2s}} + u^p + \mu u^q) \varphi_1 dx \geq \int_\Omega (u^p + \mu u^q) \varphi_1 dx \tag{3.11}$$

De plus, puisque φ_1 est une solution d'énergie bornée elle appartient à $C^s(\overline{\Omega}) \cap C^{2s+\beta}(\Omega)$ ([26] prop1.1), et elle vérifie le problème (3.2).
Ainsi, d'après (3.11) on trouve

$$\lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 dx \geq \int_\Omega (u^p + \mu u^q) \varphi_1 dx \tag{3.12}$$

comme il existe des constantes structurelles positives c_0, c_1 telles que

$$t^p + \mu t^q > c_0 \mu^{c_1} t, \ \textit{pour tout } t > 0$$

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq \int_\Omega (u^p + \mu u^q)\varphi_1 dx > c_0 \mu^{c_1} \int_\Omega u\varphi_1 dx \tag{3.13}$$

on obtient de (3.10), (3.12) et (3.13) que $c_0\mu^{c_1} < \lambda_1$.
Alors, nécessairement μ est bornée et $M < \infty$ pour tout $1 < p < p(\lambda, s)$. □

Proposition 3.2. *Pour tout $0 < \mu < M$, le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet au moins une solution positive. En effet, la suite des solutions minimales u_μ est croissante par rapport à μ.*
Si $\mu = M$ le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet au moins une solution faible.

Démonstration. Puisque $M > 0$, on peut trouver une solution pour une valeur de μ aussi proche que l'on veut à M.
On note cette valeur par $\overline{\mu}$ et par $u_{\overline{\mu}}$ la solution minimale associée.
Montrons que $u_\mu \leq u_{\overline{\mu}}$ pour tout $\mu < \overline{\mu}$, en effet si $\mu < \overline{\mu}$ alors $u_{\overline{\mu}}$ est une sur-solution pour le problème $(P_{\lambda,\mu})$.
On peut procéder comme dans la preuve de la proposition 3.1, pour $t > 0$ assez petit $t\varphi_1 < u_{\overline{\mu}}$, alors d'aprés le lemme 3.7 le problème admet une solution v tel que $t\varphi_1 \leq v \leq u_{\overline{\mu}}$.
Or u_μ est la solution minimale du problème $(P_{\lambda,\mu})$, donc d'après le principe du maximum on aura $u_\mu \leq u_{\overline{\mu}}$ pour $\mu < \overline{\mu}$, donc la famille u_μ est croissante.
Nous concluons qu'il existe une solution u_μ pour tout $\mu \in (0, \overline{\mu})$, ainsi pour tout $\mu \in (0, M)$.
Pour le cas $\mu = M$, l'idée, comme dans [[18] , Proposition 2.1], consiste à passer à la limite lorsque $\mu_n \to M$ dans la suite $u_n = u_{\mu_n}$, où u_{μ_n} est la solution minimale de $(P_{\lambda,\mu})$ avec $\mu = \mu_n$. Notons que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons la solution φ_1 du problème (P_1) comme une fonction test dans $(P_{\lambda,\mu})$. Donc

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n\varphi_1 dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^{2s}}\varphi_1 dx + \int_\Omega u_n^p \varphi_1 dx + \mu_n \int_\Omega u_n^q \varphi_1 dx \tag{3.14}$$

En Appliquant l'inégalité de Young,

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n\varphi_1 dx \leq \lambda_1 \left(\varepsilon \int_\Omega u_n^p \varphi_1 dx + \frac{C(p)}{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}} \int_\Omega \varphi_1 \right) dx, \ \varepsilon > 0, \tag{3.15}$$

remplaçons cette dernière dans (3.14) on obtient

$$\lambda \int_\Omega \frac{u_n \varphi_1}{|x|^{2s}} dx + (1 - \varepsilon \lambda_1) \int_\Omega u_n^p \varphi_1 + \mu_n \int_\Omega u_n^q \varphi_1 dx \leq \frac{C(p)\lambda_1}{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}} \int_\Omega \varphi_1 dx \leq C \tag{3.16}$$

et par le lemme de Hopf (voir [[26], lemme 3.2]), il existe $C > 0$ tel que $\varphi_1 \geq C\delta^s(x)$, où $\delta(x) := dist(x, \partial\Omega)$, pour cela et d'après 3.16 on peut conclure

$$\lambda \int_\Omega \frac{u_n \omega^s}{|x|^{2s}} dx + \int u_n^p \omega^s dx + \mu_n \int_\Omega u_n^q \omega^s dx \leq C \tag{3.17}$$

où C est une constante indépendante de n et $\omega(x) := dist(x, \partial\Omega), x \in \Omega$.
Soit maintenant ς_1 la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \varsigma_1 &= 1 \text{ dans } \Omega, \\ \varsigma_1 &= 0 \text{ dans} \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

En utilisant ς_1 comme une fonction test de $P_{\lambda,\mu}$, avec [[26] , proposition 1.1] et (3.17), on obtient que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_n dx &= \lambda \int_\Omega \frac{u_n \varsigma_1}{|x|^{2s}} dx + \int_\Omega u_n^p \varsigma_1 dx + \mu_n \int_\Omega u_n^q \varsigma_1 dx & (3.18) \\ &\leq C(\lambda \int_\Omega \frac{u_n \omega_1}{|x|^{2s}} dx + \int_\Omega u_n^p \omega dx + \mu_n \int_\Omega u_n^q \omega dx) & (3.19) \\ &\leq C, & (3.20) \end{aligned}$$

avec $C > 0$ indépendant de n. Par conséquent, en utilisant la monotonie, nous pouvons affirmer que u_n converge vers une limite $u_M \in L^1(\Omega)$ quand $n \to \infty$. De plus, par la borne uniforme de (3.17) nous pouvons passer à la limite pour conclure que u_M est une solution faible de (P_M).

Remarque 3.5. *Les résultats obtenus dans cette section peuvent être facilement traduits pour le cas $q = 0$, c'est-à-dire si l'on considère une fonction f avec des conditions de croissance appropriées au lieu du terme concave u^q.*

$\square$

3.3 Le cas sur critique : l'existence d'au moins de deux solutions non triviales

Dans cette section on considère $1 < p < 2_s^* - 1$, comme $(P_{\lambda,\mu})$ est un problème variationnel , nous prouverons l'existence d'au moins de deux solutions positives. Nous allons utiliser la minimisation pour trouver la première solution, et le Lemme du Col (Mountain Pass Theorem). pour garantir l'existence de la seconde.
Pour utiliser ce dernier résultat, nous avons besoin de vérifier certaines conditions concernant la géométrie du col et la compacité de la fonctionnelle d'énergie.

Proposition 3.3. *Ils existent $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que on a :*

(i) $J(u) \geq \beta > J(0)$, pour tout $u \in H_0^s(\Omega)$ avec $\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = \alpha$ et μ assez petit.

(ii) Il existe $u_1 \in H_0^s(\Omega)$ positive tel que $\|u_1\|_{H_0^s(\Omega)} > \alpha$ et $J(u_1) < \beta$

Démonstration. (i) Lorsque $q + 1 < p + 1 < 2^*$ et $\lambda < \Lambda_{N,s}$, on a

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{a_{N,s}}{4} \int\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \frac{u_+^2}{|x|^{2s}} dx \\ &- \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_+^{p+1} dx - \frac{\mu}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} dx \end{aligned}$$

par l'inégalité de Sobolev

$$\int_\Omega u_+^{p+1} dx \leq c_2 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^{p+1}$$

idem

$$\int_\Omega u_+^{q+1} dx \leq c_2 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^{q+1}$$

et par l'inégalité de Hardy (2.19)

$$\int_\Omega \frac{u_+^2}{|x|^{2s}} dx \leq c_1 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

ce qui implique que

$$J(u) \geq c_1 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 - c_2 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^{p+1} - \mu c_3 \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^{q+1}$$

avec $c_i, i = \overline{1,3}$ sont des constantes positives.
Alors si on choisis μ assez petit , il existe $\alpha > 0$ tel que $\beta = g(\alpha) > 0$ avec

$$\alpha = \|u\|_{H_0^s(\Omega)}$$

et

$$g(\alpha) = c_1\alpha^2 - c_2\alpha^{p+1} - \mu c_3\alpha^{q+1}$$

ce qui implique $J(u) \geq \beta$ pour $u \in H_0^s(\Omega)$ avec $\alpha = \|u\|_{H_0^s(\Omega)}$.

(ii) Fixons $u_0 \in H_0^s(\Omega)$ positive tel que $\|u_0\|_{H_0^s(\Omega)} = 1$ et prenons $t > 0$. Lorsque $p > 1$ on a :

$$\lim_{t\to\infty} J(tu_0) = -\infty.$$

De plus, il existe t_0 assez grand, tel que $u_1 = t_0u_0$, ce qui implique que $\|u_1\|_{H_0^s(\Omega)} > \alpha$ et $J(u_1) < \beta$.

□

Finalement, montrons que la fonctionnelle d'énergie satisfait la condition de Palais-Smale, pour cela nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.4. ***La condition de Palais-Smale*** *Soient u_n une suite dans $H_0^s(\Omega)$, et $c \in \mathbb{R}^N$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c), si toute suite u_n vérifiant*

$$J(u_n) \to c \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \tag{3.21}$$

admet une sous suite u_n convergente vers $u \in H_0^s(\Omega)$, avec

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H_0^s(\Omega)} = 0$$

Démonstration. Par (3.21) implique

$$J(u_n) - \frac{1}{p+1}\langle J'(u_n), u_n\rangle = c + o(1)$$

Ainsi, puisque $p+1 > 2 > q+1$, et par le théorème de Sobolev et l'inégalité de Hardy on obtient

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \frac{a_{N,s}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega \frac{(u_n)_+^2}{|x|^2s}dx \\ &- \mu\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_n)_+^{q+1}dx \\ &\geq C_1\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - C_2\|u_n\|^{q+1}_{H_0^s(\Omega)} \end{aligned}$$

avec C_1 et C_2 sont des constantes positives donc $\|u_n\|^{q+1}_{H_0^s(\Omega)} \leq C$, en appliquant la proposition précédente (3.21), nous concluons la convergence forte dans l'espace $H_0^s(\Omega)$

ie il existe $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que la sous suite u_n converge vers u dans $H_0^s(\Omega)$;$\|u_n - u\|_{H_0^s\Omega} \to 0$ quand $n \to \infty$. □

Proposition 3.5. *Soient u_n une suite uniforme bornée dans $H_0^s(\Omega)$ tel que $J'(u_n) \to 0$ dans $H^{-s}(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$. Alors, il existe $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que $\|u_n - u\|_{H_0^s(\Omega)} \to 0$ quand $n \to \infty$*

Démonstration. voir [24]. □

Maintenant, on peut énoncer le théorème d'existence suivant

Théorème 3.1. *Il existe $\mu_0 > 0$ tel que si $0 < \mu < \mu_0$, le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet au moins deux solutions d'énergie positives.*

Démonstration. on construit la première solution par minimisation, comme dans la proposition (3.3) : il existe $\alpha > 0$ tel que $j(u) > \beta$ pour tout $u \in H_0^s(\Omega)$ avec $\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = \alpha$. Ainsi, on peut choisir

$$\alpha_1 := \{\inf_{\alpha\in\mathbb{R}^N} \alpha : J(u) > 0 \text{ } pour\ tout \text{ } u \in H_0^s(\Omega) \text{ } avec \text{ } \|u\|_{H_0^s(\Omega)} = \alpha\}$$

On sait que $\alpha_1 > 0$, car au voisinage de l'origine la fonctionnelle d'énergie est négative. Maintenant, on choisis $\alpha_1 < \alpha_2$ assez proche pour que $J(u)$ ne soit pas décroissante en u avec $\alpha_1 \leq \|u\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \alpha_2$.
Puis, on définit la fonction τ comme suit

$$\tau(t) := \begin{cases} 1 \ , \ t \leq \alpha_1, \\ \\ 0 \ , \ t \geq \alpha_2 \end{cases}$$

on considère la fonctionnelle tronquée

$$\begin{aligned} J_2(u) : &= \frac{a_{N,s}}{4}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{u_+^2}{|x|^2 s}dx - \frac{\tau(\|u\|_{H_0^s(\Omega)})}{p+1}\int_\Omega u_+^{p+1}dx \\ &- \frac{\mu}{p+1}\int_\Omega u_+^{q+1}dx \end{aligned}$$

Par définition,

$$J_2(u) = J(u) \text{ } pour \text{ } \|u\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \alpha_1,$$

et

$$J_2(u) = \frac{a_{N,s}}{4}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{u_+^2}{|x|^2s}dx - \frac{\mu}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1}dx \ , \ pour \ \|u\|_{H_0^s(\Omega)} \geq \alpha_2$$

Notons que d'après le théorème de Sobolev (1.3) et l'inégalité de Hardy (2.19), la fonctionnelle J_2 est coercive car $2 > q+1$.

Puisque $H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors la semi continuité de J_2 est donnée donc on peut affirmer l'existence d'un minimum de J_2 avec une énergie négative. Ainsi, pour μ assez petit on a trouvé la première solution de $(P_{\lambda,\mu})$.

Pour la deuxième solution, comme nous l'avons prouvé, pour μ assez petit la fonctionnelle J satisfait la géométrie du théorème de col (3.3) et la condition de Palais-Smale. Alors si on considère

$$\chi := \{\gamma \in C^0([0,1], H_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}$$

où u_1 est déjà défini dans la proposition (3.3) et

$$\beta_0 := \inf_{\Lambda \in \chi} \sup_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

Le lemme du col assure l'existence de la solution $u \in H_0^s(\Omega)$ qui vérifie

$$J(u) = \beta_0 \geq \beta > 0,$$

avec β est donnée dans la proposition 3.3. Notons que cette solution et la solution obtenue auparavant sont différentes car la première avait une énergie négative. Par conséquent, pour μ assez petit le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet au moins deux solutions. □

Maintenant on veut voir que le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet deux solutions pour chaque $\mu \in (0, M)$. Le but de cette section est la généralisation du résultat de S.Alama (voir [8]) pour vérifier que la solution obtenue dans la proposition 3.2 est un minimum local, ce qui nous permettra d'appliquer le lemme du col de la montagne.

Proposition 3.6. *soit $p \in (1, 2_s^* - 1)$.Alors pour $0 < \mu < M$, où M est défini dans (3.1), le problème $(P_{\lambda,\mu})$ admet au moins deux solutions.*

Démonstration. voir l'article [24]. □

3.4 Non existence pour $p > p(\lambda, s)$

Pour terminer ce chapitre, il reste à étudier l'intervalle complémentaire des puissances, c'est-à-dire $p > p(\lambda, s)$. Comme nous l'avons avancé dans les sections précédentes, nous voulons voir que $p(\lambda, s)$ est un seuil réel, c'est-à-dire qu'au-dessus de cette valeur de p, il est impossible de trouver une solution de $(P_{\lambda,\mu})$.

Théorème 3.1. *Soit $0 < \lambda \leq \Lambda_{N,s}$. Si $p > p(\lambda, s)$, Alors le problème $(P_{\lambda,\mu})$ n'a pas de sur-solution faible positive.*

Démonstration. Pour la preuve voir [24]. □

De plus, nous verrons ici que cette non-existence peut être comprise au sens le plus fort. En particulier, énonçons la définition suivante

Définition 3.2. *Soit u_n la solution du problème*

$$(P_n) = \begin{cases} (-\Delta)^s u_n &= \lambda a_n(x) T_n(u_n) + g_n(u_n) + \mu f_n(u_n) \ \textit{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 \ \textit{sur } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

où $a_n(x)$, $g_n(u_n)$ et $f_n(u_n)$ sont des suites croissantes de fonction bornées qui convergent ponctuellement vers $|x|^{-2s}$, u^p et u^q respectivement. Et T_n est défini par

$$T_n(x) = \begin{cases} x \ \textit{si } |x| \leq n, \\ n\dfrac{x}{|x|} \ \textit{si } |x| > n \end{cases}$$

On dit qu' il y'a une explosion complète dans le problème $(P_{\lambda,\mu})$ si

$$u_n(x) \to +\infty \ \textit{pour tout } x \in \Omega$$

Ainsi, le résultat principale de cette section sera le suivant

Théorème 3.2. *Supposons que $0 < \lambda \leq \Lambda_{N,s}$. Soit $p > p(\lambda, s)$ et $\mu > 0$. Alors, il existe une explosion compléte du problème $(P_{\lambda,\mu})$.*

Avant de prouver ce résultat, nous avons besoins du lemme suivant qui est une généralisation de [[11], Lemme 3.2].

Lemme 3.8. *Soit $F(x, u) \geq 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, et soit u une solution de :*

$$(P_F) = \begin{cases} (-\Delta)^s u &= F(x, u) \ \textit{dans } \Omega, \\ u &= 0 \ \textit{sur } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Alors

$$\frac{u(x)}{\delta^s(x)} \geq C \int_\Omega F(x,u)dx, \ \ x \in \Omega$$

où $\delta^s(x) = dist(x, \partial\Omega)$ et C est une constante qui dépend de Ω.

Pour la démonstration du lemme consultez [24]

Démonstration. **(Théorème 3.2)**
Raisonnons par contradiction. On considère $u_n \geq 0$ la solution minimale au problème tronqué (P_n) où

$$a_n(x) = T_n(\frac{1}{|x|^{2s}}) \ , \ g_n(u) = T_n(u_+^p) \ et \ f_n(u) = T_n(u_+^q)$$

avec T_n est défini dans (3.2). Notons que, nous pouvons affirmer que cette solution minimale existe car lorsque :

$$\lambda a_n(x) T_n(u_n) + g_n(u_n) + \mu f_n(u_n) \leq C_n$$

on peut considérer, pour $c > 0$, $\overline{u} = C_n \xi_1$ et $\underline{u} := c\varphi_1$ une sur-solution et sous-solution de (P_n) respectivement, tel que φ_1 est la première fonction propre strictement positive du Laplacien fractionnaire défini dans (3.2) et ξ_1 est la solution du problème

$$(P_{\xi_1}) = \begin{cases} (-\Delta)^s \xi_1 &= 1 \text{ dans } \Omega, \\ \xi_1 &= 0 \text{ sur } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

supposons que

$$\int_\Omega (\lambda_n(x) T_n(u_n) + g_n(u_n) + \mu f_n(u_n)) \delta^s(x) dx \leq C < \infty, n \in \mathbb{N} \tag{3.22}$$

avec C est indépendant de n. En utilisant ξ_1 comme une fonction teste du problème (P_n). Nous obtenons

$$\int_\Omega u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_n (-\Delta)^s \xi_1 dx = \lambda \int_\Omega a_n(x) T_n(u_n) + \int_\Omega g_n(u_n) dx + \mu \int_\Omega f_n(u_n) dx \leq C.$$

Par conséquent, jusqu'à une sous suite u_n converge dans $L^1(\Omega)$ vers une limite non-négative u.
Ainsi, depuis $\lambda a_n(x) T_n(u_n) + g_n(u_n) + \mu f_n(u_n)$ augmente à $\dfrac{u}{|x|^{2s}} + u^p + u^q$ dans Ω.
De plus, par le théorème de Convergence Monotone on peut passer à la limite dans (P_n)

et par (3.22) , nous concluons que u est une solution faible non-négative du problème

$$(P_n) = \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda \dfrac{u}{|x|^{2s}} & = & u^p + \mu u^q \text{ dans } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Alors, nous obtenons une contradiction avec le Théorème 3.1 , et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega (\lambda_n(x) T_n(u_n) + g_n(u_n) + \mu f_n(u_n)) \delta^s(x) dx = \infty$$

en effet, par application du Lemme 3.8, on conclut. $\square$

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, R. Bentifour, *On the Fractional p-laplacian equations with weight and general datum,* apparaître dans Advances in Nonlinear Analysis, 2016.

[2] B. Abdellaoui, **R. Bentifour**, *Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities of fractional order and applications.* soumis au publication.

[3] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *Optimal results for the fractional heat equation involving the Hardy potential.* Nonlinear Analysis 140, 166-207, 2016.

[4] B. Abdellaoui, I. Peral, *On quasilinear elliptic equation related to some Caffarelli-Khon-Nirenberg inequalities*, Comm. Pure and Applied Math. Vol. 3 No 3(2003), 539-566.

[5] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *A remark on the fractional Hardy inequality with a remainder term*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 -2014 299-303.

[6] M. Abramowitz, and I. A. Stegun,*Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55.

[7] A. Ambrosetti, A. Malchiodi,*Perturbation methods and semilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^n$. Progress in Mathematics, 240. Birkhauser Verlag, Basel, 2006.

[8] S. Alama,*Semilinear elliptic euqtions with sublinear indefinite nonlinearities*, Adv. Diff.Equations, 4 (1999), 813842.

[9] E. Artin, *The Lambda Function*, in Rosen, Michael (ed.) Exposition by Emil Artin : a selection ; History of Mathematics 30. Providence, RI : American Mathematical Society (2006)

[10] Bentifour Rachid, *Problèmes elliptiques et paraboliques fractionnaires avec données générales. (Thèse, Université Aboubekr Belkaid Tlemcen, 2018) p 19-25*

[11] H. Brezis, X. Cabré,*Some simple nonlinear PDE's without solutions. Boll. Unione Mat. Ital. 1-B (1998), 223-262*

[12] H. Brezis, T. Cazenave, Y. Martel and A. Ramiandrisoa, *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, Adv. Differential Equations 1 (1996) 73–90.*

[13] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in* $I\!R^N$, Manuscripta Math. 74, (1992), 87-106.

[14] L.A. Caffarelli,*Nonlocal equations, drifts and games, Nonlinear Partial Differential Equations*, Abel Symposia 7 (2012) 37–52.

[15] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math., 53, (1984), 259-275.

[16] A. Di castro, *T. Kuusi, G. Palatucci, Nonlocal Harnack inequalities.* Journal of Functional Analysis Volume 267, Issue 6, 2014, 1807-1836.

[17] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, Bull. Sci. Math. 136(5) (2012) 521–573.*

[18] L. Dupaigne, *A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential*, J. Anal. Math. 86 (2002), 359-398.

[19] M. M. Fall, *Semilinear elliptic equations for the fractional Laplacian with Hardy potential*, Preprint. arXiv :1109.5530v4, 2012.

[20] F. Ferrari, I. Verbitsky, *Radial fractional Laplace operators and Hessian inequalities*, J. Differential Equations 253 (2012), no. 1 244-272.

[21] R. Frank, E. H. Lieb, R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrodinger operators*, Journal of the American Mathematical Society (2008), Vol. 20, No. 4, 925-950

[22] R. Frank, R. Seiringer, *Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities*, Journal of Functional Analysis 255 (2008), 3407–3430.

[23] I. W. Herbst, *Spectral theory of the operator* $(p^2+m^2)^{\frac{1}{2}} - Ze^2/r$, Commun. math. Phys. 53 (1977), 285-294.

[24] Maria Medina de la Torre, *Nonlinear elliptic and parabolic equations related to reaction diffusion and growth problems. Universidad Autónoma de Madrid, Thèse de doctorat (2014-2015), p 29-56.*

[25] V. Maz'ya, *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 342. Springer, Heidelberg, 2011.*

[26] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional laplacian : regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) 101 (2014), no.3, 275-302.

[27] R. Servadei, E. Valdinoci, A Brezis-Nirenberg *result for non-local critical equations in low dimension.*Communications on Pure and Applied Analysis, 2013, 12 (6) : 2445-2464.

[28] R. Servadei, E. Valdinoci ;*Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math.Anal. Appl., 389(2012), 887–898.

[29] R. Servadei, E. Valdinoci ; *Variational methods for non-local operators of elliptic type*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 5(2013), 2105-2137.

Résumé:

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'un problème elliptique concave-convexe où le potentiel de Hardy interfère avec l'opérateur laplacien fractionnaire. Le but principal de ce travail est de généraliser les résultats connus pour le cas local au cadre non local.

Mots clés: Problème elliptique fractionnaire, opérateur non local, potentiel de Hardy, existence de solution, solution énergétique, p-laplacien fractionnaire.

Abstract:

In this work, we are interested in the study of a concave-convex elliptic problem where the Hardy potential interferes with the fractional Laplacian operator. Our main purpose in this work is to generalize the known results for the local case to the non-local case.

Key words: fractionnal elliptic problem, nonlocal operator, Hardy potential, existence of solution, energy solution, fractional p-laplacien.

ملخص :

في هذا العمل ، نحن مهتمون بدراسة مشكلة إهليلجية مقعرة محدبة حيث يتداخل حد هاردي مع مؤثر لابلاس الكسري. هدفنا الرئيسي في هذا العمل هو تعميم النتائج المعروفة للحالة المحلية إلى الحالة غير المحلية.

الكلمات المفتاحية:

مسألة اهليجية ، مؤثر غير محلي ، حد هاردي، وجود حل ، حل الطاقة ، بي-لابلاس كسري.