Table des Matières

Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier certaines classes d'équations dynamiques et systèmes dynamiques avec conditions aux limites non locales dans les échelles de temps.

La théorie des échelles de temps a été intoduite par Stephan Hilger en 1987. Cette théorie permet d'unifier l'analyse continue et l'analyse discrète. Les trois exemples les plus populaires de calcul sur des échelles de temps sont le calcul différentiel, le calcul de différence et le calcul quantique. Les équations dynamiques dans des échelles de temps ont un nombre énorme d'applications telles que la physique, l'économie, biologie et la dynamique des populations.

Exemple 1, (voir [47]) il peut modéliser une population d'insectes continue pendant la saison, mourir en hiver, par exemple, alors que leurs œufs sont en incubation ou en dormance, puis éclore à une nouvelle saison donnant lieu à une nouvel population. Dans cette exemple l'échelle de temps est donnée par

$$P_{1,1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$$

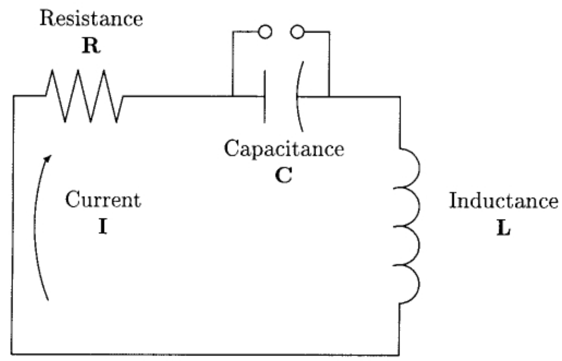
et

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1] \\ 1 & \text{pour } t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{2k+1\} \end{cases}$$

Exemple 2 (voir [48])

Considérons un circuit électrique simple avec une résistance R, une inductance L et une capacité C.

Figure 1.4. An Electric Circuit



Supposons que nous déchargions le condensateur périodiquement à chaque unité de temps et supposons que le déchargement prend $\delta > 0$ une unité de temps. Alors, cette simulation peut être modélisée en utilisant l'échelle de temps

$$P_{1,1} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} [k, k+1-\delta]$$

Si $Q(t)$ est la charge totale du condensateur au temps t et $I(t)$ est le courant en fonction du temps t, alors on a

$$Q^{\Delta}(t) \begin{cases} bQ(t) & \text{si } t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [k-\delta], \\ I(a) & \text{si } t \notin \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [k, k+1-\delta], \end{cases}$$

$$I^{\Delta}(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} [k-\delta], \\ -\frac{1}{LC}Q(t) - \frac{R}{L}I(t) & \text{si } t \notin \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} [k-\delta], \end{cases}$$

où b est une constante satisfaisant $-1 < b\delta < 0$.

Les équations dynamiques dans les échelles de temps on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schauder, la méthode des sous et sur solutions, la théorie du degré de Mawhin et les théorèmes des points fixes dans les cônes (voir [3], [10], [12], [20], [28], [36] et [39]).

Il est bien connu que la méthode de sous et sur solutions couplée avec la technique itérative dans les échelles de temps a été utilisée par plusieurs auteurs pour montrer l'existence des solutions pour des problèmes aux limites non linéaires (voir [9, Chapitre 6], [31], [32, Chapitre 4], [35], [41] et [43]).

Cette thèse est divisée en six chapitres.

Dans le premier chapitre on introduit quelques définitions et notations concernant la théorie des échelles de temps.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales de type

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{1}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle dans une échelle de temp $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et a et b sont deux réels. Les résultat de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [13, Chapitre 1] et [14].

Le troisieme chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques quasilinéaires avec conditions initiales non locales de type

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) = f(t,u^{\sigma}),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{2}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g : [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et a et b sont deux nombres réels.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour le systèmes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales suivant.

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ v^{\Delta}(t) = g(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \\ u(a) = \int_a^{b} g_1(s)u(s)\,\Delta s, \\ v(a) = \int_a^{b} g_2(s)v(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{3}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f,g : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, $g_1, g_2 : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et a et b sont deux nombres réels. Les résultat de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [13, Chapitre 2] et [15].

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u(s)\, \Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u(s)\, \Delta s, \end{cases} \tag{4}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g_1, g_2 : \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et a_0, a_1, a et b sont des nombres réels. Les résultat de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [13, Chapitre 3].

Le sixième chapitre est consacré a l'étude de l'existence des solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(4)}}(t) = f(t,u,u^{\Delta\Delta}),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s) u(s)\, \Delta s, \\ u(\sigma^4(b)) + a_2 u^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s) u(s)\, \Delta s, \\ u^{\Delta\Delta}(a) - a_3 u^{\Delta^{(3)}}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s) u^{\Delta\Delta}(s)\, \Delta s, \\ u^{\Delta\Delta}(\sigma^2(b)) + a_4 u^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s) u^{\Delta\Delta}(s)\, \Delta s, \end{cases} \tag{5}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $h_1, h_2 : \left[a, \sigma^4(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$, $h_3, h_4 : \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^-$ des fonctions continues et a_1, a_2, a_3, a_4, a et b sont des nombres réels. Les résultat de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [37, Chapitre 1].

Chapitre 1

Résultats préliminaires sur les échelles de temps

Dans ce chapitre on donne quelques définitions et résultats concernant les échelles de temps

Les réultats de ce chapitre se trouvent dans [6, 7, 8] et [29].

1.1 Les échelles de temps

Définition 1.1 *Une échelle de temps est une partie non vide fermé de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles suivants sont des échelles de temps:* $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$.

On note une échelle de temps par le symbole $\mathbb{T}$.

1.2 L'opérateur de saut

Définition 1.2 *On définit l'intervalle* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *dans* $\mathbb{T}$ *par*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T}\colon a \leq t \leq b\}, \text{ avec } a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une echelle de temps. Pour* $t \in \mathbb{T}$*, on definit l'operateur de saut supèrieur* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\sigma(t) := \inf \{s > t : s \in \mathbb{T}\},$$

et l'opérateur de saut inférieur $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\rho(t) := \sup\{s > t : s \in \mathbb{T}\}.$$

Remarque 1.1 *Dans ces définitions, on pose* $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$*, c'est à dire* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t*.*
On pose $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$*, c'est à dire* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t*, avec* $\emptyset$ *désigne l'ensemble vide.*

1.3 La classification des points dans une échelles de temps $\mathbb{T}$

Définition 1.4 *Un point* t *de* $\mathbb{T}$ *est dit dispersé à droite si* $\sigma(t) > t$*, et on dit que le point* t *est dispersé à gauche si* $\rho(t) < t$*.*

Définition 1.5 *Un point* t *de* $\mathbb{T}$ *est dit isolé si il est à la fois dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *Un point* t *de* $\mathbb{T}$ *est dit dense à droite si* $t < \sup \mathbb{T}$ *et* $\sigma(t) = t$*.*

Définition 1.7 *Un point* t *de* $\mathbb{T}$ *est dit dense à gauche si* $t > \inf \mathbb{T}$ *et* $\rho(t) = t$*.*

Définition 1.8 *Un point* t *de* $\mathbb{T}$ *est dit dense si il est à la fois dense à droite et à gauche.*

Définition 1.9 *La fonction de granulation* μ *est définie par*

$$\begin{array}{ccc} \mu & : & \mathbb{T} \longmapsto [0, \infty) \\ t & \longmapsto & \mu(t) := \sigma(t) - t. \end{array}$$

Définition 1.10 *L'ensemble* $\mathbb{T}^{\kappa}$ *est définit par*

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], \; si \; \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, \; si \; \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.11 *On définit la fonction f^σ par*

$$\begin{aligned} f^\sigma \quad &: \quad T \to \mathbb{R}, \\ t \quad &\mapsto \quad f^\sigma(t) = f(\sigma(t)). \end{aligned}$$

1.4 Delta différentiabilité

Définition 1.12 *On dit que g admet une delta dérivée en un point $t \in \mathbb{T}^\kappa$ et on la note $g^\Delta(t)$ si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t telque*

$$\left|(g(\sigma(t)) - g(s)) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon(\sigma(t) - s),\ \forall s \in U.$$

Définition 1 *On nome $g^\Delta(t)$ la delta derivée de $g(t)$ au point t et on dit que g est delta-différentiable au point t.*

Définition 1.13 *Une fonction $g : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite dans $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.1 *(voir [29],[8] et [9]).*
Soit $\mathbb{T}$ une echelle de temps et $g : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction tel que $t \in \mathbb{T}$, alors on a les propriétes suivantes:
(i) Si g est delta-différentiable au point t, alors g est continue en t.
(ii) Si g est continue au point t, et t est dispersé à droite alors g est delta-différentiable au point t avec

$$g^\Delta(t) = \frac{g^\sigma(t) - g(t)}{\mu(t)},$$

ou $g^\sigma = g \circ \sigma$.
(iii) Si t est dense à droite , alors g est delta-différentiable en t si et seulement si $\lim_{s\to t} \frac{g(t)-g(s)}{t-s}$ existe et finie.
Dans ce cas $g^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{g(t)-g(s)}{t-s}$.
(iv) Si g est delta-différentiable au point t, alors

$$g^\sigma(t) = g(t) + \mu(t) g^\Delta(t).$$

Théorème 1.2 *[8] Soient $f, g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions delta-différentiables en $t \in T^{\kappa}$, alors on a*

(i) $f+g$ est delta-différentiable en t et on a

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est delta-différentiable en t et on a

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) Si fg est delta-différentiable en t alors on a

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).\end{aligned}$$

(iv) Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est delta-différentiable en t et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est delta-différentiable en t et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Définition 1.14 *Pour une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ la $\Delta-$dérivée seconde $f^{\Delta^{(2)}}$ existe si f^{Δ} est $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$, où $f^{\Delta^{(2)}}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t)$.*
Dune manière similaire, on peut définir inductivement les $\Delta-$dérivées d'ordre suppèerieur $f^{\Delta^{(n)}}$.
Pour la suite, on notera $C^k_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, l'ensemble des foncctions k fois $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^{\kappa^k}$ telles que $f^{\Delta^{(k)}}$ est rd-continue sur $\mathbb{T}$.
Pout $\mathbb{T}$ compact, cet espace est muni de la norme

$$\|x\|_{C^k_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \max\left\{\|x\|_0, \left\|x^{\Delta}\right\|_0, ..., \left\|x^{\Delta^{(k)}}\right\|_0\right\} \text{ et } \left\|x^{\Delta^{(i)}}\right\|_0 = \sup_{t \in \mathbb{T}^{(i)}} \|x(t)\|.$$

On note $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ *et* $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ *et par conséquent on définit* $\sigma^n(t)$ *et* $\rho^n(t)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *par la même façon.*

Par convention on pose $\sigma^0(t) = \rho^0(t) = t,\ f^{\Delta(0)} = f$ *et :* $\mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$.

Théorème 1.3 *[9] (Théorème de la moyenne) Soit* g *une fonction continue et delta-différentiable dans* $[a,b]_{\mathbb{T}}$. *Alors il existes* $\xi,\ \tau \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ *tel que*

$$g^{\Delta}(\tau) \leq \frac{g\,(b) - g\,(a)}{b-a} \leq g^{\Delta}(\xi).$$

Définition 1.15 *Soient* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et* $h : [a,b]_{\mathbb{T}} \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction. La fonction.* $H : \mathbb{T}^{\kappa} \longmapsto \mathbb{R}$ *est appelée primitive de* h *si* $H^{\Delta}(t) = h(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Dans ce cas on définit l'integrale de h *par*

$$\int_{t_1}^{t_2} h(s)\Delta s = H(t_2) - H(t_1),\ \textit{pour tout } t_1,\ t_2 \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.16 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps. La fonction* $h : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$ *est rd-continue si elle est continue en tout point* t *de* $\mathbb{T}$ *dense à gauche et* $\lim\limits_{s \to t^-} h(s)$ *existe.*

Remarque 1.2 *Toute fonction continue est rd-continue.*

Proposition 2 *[9] Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et* $g,\ h$ *sont deux fonctions de* $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *tel que* $g^{\Delta}(t) = h(t)$, *alors on a les propriétés suivantes:*

(i) Si g *est rd-continue, alors* g *a une primitive* $h : t \to \int_s^t g(s)\Delta s,\ s{,}t \in \mathbb{T}$.

(ii) Si g *est rd-continue, alors* $\left| \int_s^t g(s)\Delta s \right| \leq \int_s^t |g(s)|\,\Delta s$.

Théorème 1.4 *[19] Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et supposons que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $\widetilde{g}_n : [s,t]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *est rd-continue.*

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \widetilde{g_n} = g$ *dans* $[s,t]_{\mathbb{T}}$ *et* g *est rd-continue dans* $[s,t]_{\mathbb{T}}$.

(iii) Il existe une fonction rd-continue $\widetilde{g}$ *tel que* $\widetilde{g_n} \leq |\widetilde{g}|$ *dans* $[s,t]_{\mathbb{T}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_s^t \widetilde{g_n}(\tau)\Delta\tau = \int_s^t g(\tau)\Delta\tau.$$

1.5 La fonction exponentielle dans les echelles de temps

Définition 1.17 *Pour $h > 0$ on définit l'ensemble de Hilger par*

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

et pour $h = 0$, on pose

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}.$$

Définition 1.18 *Pour $h > 0$ On définit $\mathbb{Z}_h$ par*

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ Im\left(z\right) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$$

et pour $h = 0$, on pose

$$\mathbb{Z}_0 := \mathbb{C}.$$

Définition 1.19 *Pour $h \geq 0$ on définit la transformation cylindrique $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ par*

$$\xi_h\left(z\right) = \begin{cases} \frac{1}{h} Log\left(1 + zh\right) \ \ si\ h > 0, \\ z \ si\ h = 0, \end{cases}$$

où Log est la fonction logarithme principale.

Définition 1.20 *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régréssive si*

$$1 + \mu\left(t\right) p\left(t\right) \neq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Définition 1.21 *Soit p une fonction régressive, alors on défint la fonction exponentielle par*

$$e_p\left(t, s\right) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\left(p\left(\tau\right)\right) \Delta\tau \right), \text{ pour tout } s,\ t \in \mathbb{T}.$$

L'expréssion de la fonction exponentielle dans quelques échelles de temps

$\mathbb{T}$	$e_p(t,t_0)$
$\mathbb{R}$	$e^{p(t-t_0)}$
$\mathbb{Z}$	$(1+p)^{t-t_0}$
$h\mathbb{Z}$	$(1+ph)^{\frac{t-t_0}{h}}$

$\mathbb{T}$	t_0	$p(t)$	$e_p(t,t_0)$
$\mathbb{R}$	0	1	e^t
$\mathbb{Z}$	0	1	2^t
$h\mathbb{Z}$	0	1	$(1+h)^{\frac{t}{h}}$

(1.1)

Définition 1.22 *(Fonctions trigonomitriques)*
Si $p \in C_{rd}$ et $(\mu p^2) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, alors on definit les fonctions trigonomitriques $\cos_p(t,t_0)$ et $\sin_p(t,t_0)$ par

$$\cos_p(t,t_0) = \frac{e_{ip}(t,t_0) + e_{-ip}(t,t_0)}{2}, \ \ et \ \sin_p(t,t_0) = \frac{e_{ip}(t,t_0) - e_{-ip}(t,t_0)}{2i} \tag{1.2}$$

Notons que μp^2 est regréssive si et seulement si (ip) et $(-ip)$ sont regréssives, et par suite les fonctions $\cos_p(t,t_0)$ et $\sin_p(t,t_0)$ sont bien définies.

Exemple 1.2 *1) Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t_0 = 0$*

$$\cos_p(t,t_0) = \cos(pt), \ \ \sin_p(t,t_0) = \sin(pt)$$

2) Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $p = 1$, $t_0 = 0$

$$\cos_p(t,t_0) = \frac{(1+i)^t + (1-i)^t}{2}, \ \ \sin_p(t,t_0) = \frac{(1+i)^t - (1-i)^t}{2i} \tag{1.3}$$

Lemme 1.1 *[9]*
Soit $p \in C_{rd}$, et $(\mu p^2) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, alors on a

$$\cos_p^{\Delta}(t,t_0) = -p\sin_p(t,t_0), \ \ \sin_p^{\Delta}(t,t_0) = p\cos_p(t,t_0) \tag{1.4}$$

et

$$\cos_p^2(t,t_0) + \sin_p^2(t,t_0) = e_{\mu p^2}(t,t_0)$$

Notons que pour $p \in \mathbb{R}$, la condition regréssive de μp^2 est toujours satisfaite.

Chapitre 2

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales.

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction des solutions de l'équation dynamique du premier ordre suivante avec condition initiale non locale

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle dans une échelle de temp $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et a et b sont deux réels.

Plusieurs auteurs ont étudié les équations dynamiques dans les échelles de temps avec des conditions aux limites non locales à l'aide du théorème de point fixe de Leray-Schauder, la méthode des sous-sur solutions, (voir [2, 3, 4, 5] et [19, 20]).

Il est bien connu que la méthode des sous-sur solutions couplée avec la technique itérative dans les échelles de temps a été utilisée pour prouver l'existence des solutions pour les problèmes aux limites non linéaires par plusieurs auteurs (voir par exemple [9, Chapitre 6], [31], [32, Chapitre 4] et [41]).

Dans [14], les auteurs ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \; t \in J = [0, T], \\ x(0) = \int_0^T g(s)x(s)ds, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et $T > 0$.

En utilisant la méthode des sous et sur solutions couplée avec la technique itérative les auteurs ont montré l'existence d'au moins une solution pour le problème (2.2) quand la fonction g change de signe.

Les résultats de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [14] et se trouvent dans [13].

Ce chapitre est divisé comme suit. Dans la première section, on donne quelques résultats préliminaires. Dans la deuxième section, on énoce et on montre le résultat principal, et enfin, dans la dernière section on donne un exemple d'application pour illustrer nos résultats.

2.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires.

On considère le problème initial suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) + Mu(t) = h(t), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où : $h : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, M est un nombre réel positif, a et x_0 sont deux nombres réels.

Lemme 2.1 *([8, Theorem 2.77 page 77]) Le problème de Cauchy (2.2) admet une unique solution u donnée par*

$$u(t) = e_{-M}(t, a)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{-M}(t, \sigma(\tau))\, h(\tau)\, \Delta\tau,\ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Remarque 2.1 *On pose par définition*

$$C^1\left([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}\right) = \left\{ \begin{array}{l} g : \mathbb{T} \to \mathbb{R} :\ g \text{ est continue dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} \\ \text{et } g^{\Delta} \text{ est continue dans } [a, b]_{\mathbb{T}} \end{array} \right\},$$

Lemme 2.2 *Soit* $u \in C^1\left([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ *vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\Delta}(t) + Mu(t) \leq 0,\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) \leq 0, \end{array} \right.$$

alors $u(t) \leq 0$, *pour tout* $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: La preuve est une conséquence immédiate du Lemme 2.1. ■

On Considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\Delta}(t) + Mu(t) = h(t),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^c g(s)u(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u(s)\Delta s, \end{array} \right.$$

où $g : [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$g(t) \leq 0,\ t \in [a, c]_{\mathbb{T}} \text{ et } g(t) \geq 0,\ t \in [c, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

avec $a < c < b$ et $c \in [a, b]_{\mathbb{T}}$.

On a le résultat suivant

Lemme 2.3 *Soit* $u \in C^1\left([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ *qui vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\Delta}(t) + Mu(t) \leq 0,\ t \in [a, b]_{T}, \\ u(a) \leq \int_a^c g(s)u(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u(s)\Delta s, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

et
$$-\int_{a}^{c} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s + \int_{c}^{\sigma(b)} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s < 1, \tag{2.5}$$
alors $u(t) \leq 0$, *pour tout* $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: Soit $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, on a
$$u(t) \leq e_{-M}(t,a)\, u(a). \tag{2.6}$$
Alors d'aprés la second inégalité dans (2.3), on a
$$u(a) \leq -u(a) \int_{a}^{c} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s + u(a) \int_{c}^{\sigma(b)} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s.$$
C'est à dire,
$$u(a) \left(1 + \int_{a}^{c} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s - \int_{c}^{\sigma(b)} e_{-M}(s,a)\, g(s)\Delta s\right) \leq 0.$$
En utilisant (2.4), on obtient
$$u(a) \leq 0,$$
et par conséquant, d'aprés (2.5), il résulte que
$$u(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$
■

2.3 Résultat principal

Dans cette section, on donne quelques définitions, on énonce et on montre nos résultats.

Définition 2.1 *On dit que* $(\underline{u}, \overline{u})$ *est une paire de sous-sur solutions de (2.1) si*

(i) $(\underline{u}, \overline{u}) \in (C^1([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}))^2$.

$$(ii) \begin{cases} \underline{u}^{\Delta}(t) \leq f(t, \underline{u}(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \overline{u}^{\Delta}(t) \geq f(t, \overline{u}(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}(a) \leq \int_a^c g(s)\overline{u}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(a) \geq \int_a^c g(s)\underline{u}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Définition 2.2 *La paire de fonctions* (u_*, u^*) *est dite quasi-solutions de (2.1) si*

(i) $(u_*, u^*) \in (C^1([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}))^2$.

$$(ii) \begin{cases} u_*^{\Delta}(t) = f(t, u_*(t)), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u^{*\Delta}(t) = f(t, u^*(t)), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*(0) = \int_a^c g(s)u^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s, \\ u^*(0) = \int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u^*(s)\Delta s. \end{cases}$$

Dans cette section, on impose sur la fonction f la condition suivante.

(H1) Il existe une constante $M > 0$ telle que

$x \longmapsto f(t, x) + Mx$ est croissante si $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

On a le résultat suivant

Théorème 2.1 *Soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous-sur solutions de (2.1) telle que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ *et supposon que l'hypothèse (H1) est satisfaite Alors le probleme (2.1) admet une paire de quasi-solutions* (u_*, u^*) *telle que*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \ dans \ [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Preuve: On pose $u_0 = \underline{u}$, $u_1 = \overline{u}$, et on défint la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par:

$$\begin{cases} u_{n+2}^{\Delta}(t) + Mu_{n+2}(t) = f(t, u_n(t)) + Mu_n(t), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u_{n+2}(a) = \int_a^c g(s)u_{n+1}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_n(s)\Delta s. \end{cases} \tag{2.7}$$

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Soit

$$w_0(t) := u_2(t) - u_0(t), \ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (2.6) et en utilisant la Définition 2.1, on a

$$\begin{cases} w_0^{\Delta}(t) + Mw_0(t) \geq 0, \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_0(a) \geq 0, \end{cases}$$

Alors par le Lemme 2.2, on a

$$w_0(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_0 \leq u_2 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.8}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.9}$$

Posons par définition

$$w_1(t) = u_2(t) - u_1(t), \ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (2.6), on a

$$\begin{cases} w_1^{\Delta}(t) + Mw_1(t) \\ \leq f(t, u_0(t)) + Mu_0(t) - f(t, u_1(t)) - Mu_1(t), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(0) \leq \int_a^c g(s)\left(u_1(s) - u_0(s)\right)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\left(u_0(s) - u_1(s)\right)\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{cases} w_1^{\Delta}(t) + Mw_1(t) \leq 0, \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(a) \leq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 2.2, on a

$$w_1(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et par suite

$$u_2 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.10}$$

Maintenant on va prouver que

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

pour ce faire posons par définition

$$w_3(t) = u_2(t) - u_3(t), \ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (2.6), on a

$$\begin{cases} w_3^{\Delta}(t) + Mw_3(t) \\ = f(t, u_0(t)) + Mu_0(t) - f(t, u_1(t)) - Mu_1(t), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(0) = \int_a^c g(s)(u_1(s) - u_2(s))\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)(u_0(s) - u_1(s))\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{cases} w_3^{\Delta}(t) + Mw_3(t) \leq 0, \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(a) \leq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 2.2, on a

$$w_3(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.11}$$

En conclusion d'aprés (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10), on a

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Supposons pour n fixé on a,

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On pose par définition

$$w_{n+1}(t) := u_{2n+4}(t) - u_{2n+2}(t),\ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

D'aprés (2.6), on a

$$\begin{cases} w_{n+1}^{\Delta}(t) + M w_{n+1}(t) \\ = f(t, u_{2n+2}(t)) + M(u_{2n+2}(t) - u_{2n}(t)) - f(t, u_{2n}(t)),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) = \int_a^c g(s)(u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s))\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)(u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s))\Delta s, \end{cases}$$

D'aprés l'hypothèse de récurrence, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et d'aprés l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{cases} w_{n+1}^{\Delta}(t) + M w_{n+1}(t) \geq 0,\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) \geq 0. \end{cases}$$

Alors par le Lemme 2.2, on a

$$w_{n+1}(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.12}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{2.13}$$

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{2.14}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.15}$$

D'aprés (2.11), (2.12), (2.13) et (2.14), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve de **l'étape 1** est terminée.

Etape 2: Les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une quasi-solution de (2.1).

D'aprés **L'étape 1**, les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers u_* et u^*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$u_{2n}(t) = \int_a^c g(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{2n-2}(s)\Delta s + \int_a^t \widetilde{f}_n(s)\,\Delta s,$$

et

$$u_{2n+1}(t) = \int_0^c g(s)u_{2n}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_a^t \widehat{f}_n(s)\,ds,$$

ou

$$\widetilde{f}_n(s) := f(s, u_{2n-2}(s)) + M\left(u_{2n-2}(s) - u_{2n}(s)\right),$$

et

$$\widehat{f}_n(s) := f(s, u_{2n-1}(s)) + M\left(u_{2n-1}(s) - u_{2n+1}(s)\right).$$

Maintenant, si on fait tendre $n \to +\infty$, on a

$$\widetilde{f}_n(s) \to f(s, u_*(s)),$$

et

$$\widehat{f}_n(s) \to f(s, u^*(s)).$$

D'autre part, on a

$$\exists\ c_1 > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \left|\widetilde{f}_n(s)\right| \leq c_1,$$

et

$$\exists\ c_2 > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \left|\widehat{f}_n(s)\right| \leq c_2.$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine que

$$u_*(t) = \int_a^c g(s)u^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s + \int_a^t f(s, u_*(s))\Delta s, \tag{2.16}$$

et

$$u^*(t) = \int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u^*(s)\Delta s + \int_a^t f(s, u^*(s))\Delta s, \tag{2.17}$$

Maintenant, montrons que (u_*, u^*) est une paire de quasi-solution de (2.1).

Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{cases} u_*(a) = \int_a^c g(s)u^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s, \\ u^*(a) = \int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u^*(s)\Delta s \end{cases} \tag{2.18}$$

D'autre part puisque f est continue, $\underline{u} \leq u_* \leq \overline{u}$ et $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont continues, alors il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$|f(s, u_*(s))| \leq K_1. \tag{2.19}$$

Alors d'aprés (2.15) et (2.18), on a

$$\forall\ t_1 \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \forall\ t_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \ |u_*(t_1) - u_*\,(t_2)| \leq K\,|t_1 - t_2|\,.$$

Ceci implique que u_* est continue dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par conséquent d'aprés (2.15) il résulte que u_* est $\Delta-$différentiable dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

D'une façon similaire, on peut prouver que la founction u^* est is $\Delta-$différentiable dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par conséquent d'aprés (2.15) et (2.16), on a

$$\begin{cases} u_*^{\Delta}(t) = f(t, u_*\,(t)),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u^{*\Delta}(t) = f(t, u^*\,(t)),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \end{cases}$$

et d'aprés (2.17), il résulte que (u_*, u^*) est une paire de quasi-solution de (2.1).

La preuve de l'étape 2 est terminée et ce qui achève la preuve du Théorème 2.1. ■

Maintenant il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur f et g, pour que $u^* = u_*$ et par conséquent le problème (2.1) admet au moins une solution.

Sur la fonction f et la fonction g, on impose les conditions supplémentaires suivantes:

(H2) Il existe un nombre réel négatif $\widetilde{M}$ tel que

$x \longmapsto f(t,x) + \widetilde{M}x$ est décroissante si $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

(H3) $-\int_a^c e_{-\widetilde{M}}\,(s,a)\,g(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} e_{-\widetilde{M}}\,(s,a)\,g(s)\Delta s < 1.$

On a le résultat suivant

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèse (Hi) $(i = 1,2,3)$ sont satisfaite et soit $(\underline{u}, \overline{u})$ une paire de sous-sur solutions de (2.1) telles que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans $[a, \sigma\,(b)]$. Alors le problème (2.1) admet au moins une solution.*

Preuve: D'aprés le Théorème 2.1, le problème (2.1) admet une paire de quasi-solution (u_*, u^*) telle que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } [a, \sigma\,(b)]_{\mathbb{T}}\,. \tag{2.20}$$

On pose par définition

$$z^*\,(t) = u^*\,(t) - u_*\,(t)\,,\, t \in [a, \sigma\,(b)]_{\mathbb{T}}\,.$$

On a

$$z^*(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.21}$$

Maintenant, on va montrer que

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$\begin{cases} z^{*\Delta}(t) = f(t, u^*(t)) - f(t, u_*(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ z^*(a) = -\int_a^c g(s) z^*(s) \Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s) z^*(s) \Delta s. \end{cases} \tag{2.22}$$

D'après (2.19) et en utilisant l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{aligned} & z^{*\Delta}(t) + \widetilde{M} z^*(t) \\ & = f(t, u^*(t)) + \widetilde{M} u^*(t) - f(t, u_*(t)) - \widetilde{M} u_*(t) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$z^{*\Delta}(t) + \widetilde{M} z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.23}$$

Alors on a,

$$\begin{cases} z^{*\Delta}(t) + \widetilde{M} z^*(t) \leq 0, \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ z^*(a) = -\int_a^c g(s) z^*(s) \Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s) z^*(s) \Delta s. \end{cases} \tag{2.24}$$

D'aprés l'hypothèse (H3) et en utilisant le Lemme 2.3, on obtient

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par suite d'aprés l'inégalité (2.19), on obtient

$$z^*(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u^*(t) = u_*(t) \ \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent le problème (2.1) admet au moins une solution. ■

Remarque 2.2 *On cosidère le problème suivant*

$$\begin{cases} (\varphi_p(u))^{\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u\,(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{2.25}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\,y,\ y \in \mathbb{R},\ p > 1,\ g : [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue qui vérifie l'hypothèse (H1) et* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

On a les définitions suivantes:

Définition 2.3 *On dit que* $(\underline{U},\overline{U})$ *est une paire de sous-sur solution de (2.25) si*

(i) $(\varphi(\underline{U}),\varphi(\overline{U})) \in (C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}))^2,$

(ii) $\begin{cases} (\varphi_p(\underline{U}))^{\Delta}(t) \le f(t,\underline{U}\,(t)),\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ (\varphi_p(\overline{U}))^{\Delta}(t) \ge f(t,\overline{U}\,(t)),\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ \underline{U}(a) \le \int_a^c g(s)\overline{U}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\underline{U}(s)\Delta s, \\ \overline{U}(a) \ge \int_a^c g(s)\underline{U}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\overline{U}(s)\Delta s. \end{cases}$

Définition 2.4 (u_*,u^*) *est dite quasi-solution de (2.25) si*

(i) $(\varphi_p(u_*),\varphi_p(u^*)) \in (C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}))^2,$

(ii) $\begin{cases} (\varphi_p(u_*))^{\Delta}(t) = f(t,u_*\,(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ (\varphi_p(u^*))^{\Delta}(t) = f(t,u^*\,(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u_*(a) = \int_a^c g(s)u^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s, \\ u^*(a) = \int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u^*(s)\Delta s. \end{cases}$

Définition 2.5 *On dit que u est une solution de (2.25) si*

(i) $\varphi_p(u) \in C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}),$

(ii) $\begin{cases} (\varphi_p(u))^{\Delta}(t) = f(t,u\,(t)),\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\Delta s. \end{cases}$

Sur la fonction f on impose la condition supplèmentaire suivante

(H5) Il existe une constante $M_2 > 0$ tel que $x \longmapsto f(t,x) + M_2\varphi_p\,(x)$ est croissante pour $\underline{u} \le x \le \overline{u}$.

En utilisant une preuve similaire à celle du Théoreme 2.1 on a les résultats suivants

Théorème 2.3 *Soit* $\left(\underline{U},\overline{U}\right)$ *une paire de sous-sur solution de (2.25) telle que* $\underline{U}\leq\overline{U}$ *dans* $\left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}$ *et supposon que les l'hypothèses (H1) et (H5) sont satisfaite. Alors le problème (2.25) admet une paire de quasi-solutions* $\left(u_{*},u^{*}\right)$ *telle que*

$$\underline{U}\leq u_{*}\leq u^{*}\leq\overline{U}\ \ dans\ \ \left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Si on suppose maintenant que les conditions supplémentaires suivantes sont satisfaites

(H6) Il existe un nombre réel négatif M_3 tel que $x\longmapsto f(t,x)+M_3\varphi_p(x)$ est décroissante si $\underline{U}\leq x\leq\overline{U}$.

(H7) $-\int_a^c\varphi_p^{-1}(e_{-M_3}\left(s,a\right))g(s)\Delta s+\int_c^{\sigma(b)}\varphi_p^{-1}(e_{-M_3}\left(s,a\right))g(s)\Delta s<1$,

et en utilisant une preuve similaire à celle du Théorème 2.2, on a le résultat suivant

Théorème 2.4 *Soit* $\left(\underline{U},\overline{U}\right)$ *une paire de sous-sur solution de (2.25) telle que* $\underline{U}\leq\overline{U}$ *dans* $\left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}$ *et supposon que les l'hypothèses (H1) et (Hi) pour i=5,6,7 sont satisfaites. Alors le problème (2.25) admet au moins une solution .*

2.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u^{\Delta}\left(t\right)=4t\sin\left(u\left(t\right)\right)-11u\left(t\right)+e^{-t},\ t\in\left[0,10\right]_{\mathbb{T}}, \\ u(0)=\dfrac{1}{7}\int_0^{\sigma(10)}\left(\dfrac{s}{5}-1\right)u\left(s\right)\Delta s. \end{cases}\tag{2.26}$$

Cas 1: $T=\left[0,10\right]_{\mathbb{T}}\subset\mathbb{R}$

Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} u^{'}\left(t\right)=4t\sin\left(u\left(t\right)\right)-11x\left(t\right)+e^{-t},\ t\in\left[0,10\right]_{\mathbb{T}}, \\ u(0)=\dfrac{1}{7}\int_0^{10}\left(\dfrac{s}{5}-1\right)u\left(s\right)ds. \end{cases}$$

On pose par définition $\left(\underline{u}\left(t\right),\overline{u}\left(t\right)\right)=(-L,L)$, où L est un nombre réel strictement positif et $t\in[0,10]$.

$(\underline{u}, \overline{u})$ est une sous-sur solution de (2.26) si on a

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) \leq f(t, \underline{u}(t)), \ t \in [0, 10]_{\mathbb{T}}, \\ \overline{u}'(t) \geq f(t, \overline{u}(t)), \ t \in [0, 10]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}(0) \leq \frac{1}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1 \right) \overline{u}(s) \, ds + \frac{1}{7} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1 \right) \underline{u}(s) ds, \\ \overline{u}(0) \geq \frac{1}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1 \right) \underline{u}(s) ds + \frac{1}{7} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1 \right) \overline{u}(s) \, ds. \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} 0 \leq 4t \sin(-L) + 11L + e^{-t}, \ t \in [0, 10]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \geq 4t \sin(L) - 11L + e^{-t}, \ t \in [0, 10]_{\mathbb{T}}, \\ -L \leq \frac{L}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1 \right) ds + \frac{L}{7} \int_5^{10} \left(1 - \frac{s}{5} \right) ds = -0.714\,29L, \\ L \geq -\frac{L}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1 \right) ds + \frac{L}{7} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1 \right) ds = 0.714\,29L. \end{cases}$$

Alors si on choisit par exemple $L \geq 1$, on obtient $(\underline{u}, \overline{u})$ une sous-sur solution de (2.26).

D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\widehat{f}(t, x) = 4t \sin x - 11x + e^{-t}.$$

satisfait la condition du Théorème 2.1 et il en résulte que le problème (2.26) admet une paire de quasi-solution (u_*, u^*) tel que

$$-L \leq u_* \leq u^* \leq L \text{ dans } [0, 10].$$

Maintenant, si on pose par définition

$$\widetilde{M} = 0,$$

alors la fonction f vérifie l'hypothèse supplémentaire (H2).

D'autre part, on a

$$-\frac{1}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1 \right) ds + \frac{1}{7} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1 \right) ds = 0.714\,29 < 1,$$

et par conséquent d'aprés le Théorème 2.2, il s'ensuit que le problème (2.26) admet au moins une solution.

Cas 2: $T=[0,10]_{\mathbb{T}}\subset\mathbb{Z}$

Pour ce cas, nous avons

$$\begin{cases} u\left(t+1\right)-u\left(t\right)=4t\sin\left(u\left(t\right)\right)-11u\left(t\right)+e^{-t},\ t\in\left\{0,1,2,3,...,10\right\}, \\ u(0)=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=0}^{10}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)u\left(i\right). \end{cases}$$

On pose par définition $\left(\underline{u}\left(t\right),\overline{u}\left(t\right)\right)=(-L,L)$, où L est un nombre réel strictement positif et $t\in[0,10]_{\mathbb{T}}$

$(\underline{u},\overline{u})$ est une paire de sous-sur solution de (2.26) si on a

$$\begin{cases} \underline{u}(t+1)-\underline{u}(t)\leq f(t,\underline{u}\left(t\right)),\ t\in\left\{0,1,2,3,...,10\right\}, \\ \overline{u}(t+1)-\overline{u}(t)\geq f(t,\overline{u}\left(t\right)),\ t\in\left\{0,1,2,3,...,10\right\}, \\ \underline{u}\left(0\right)\leq\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)\overline{u}\left(i\right)+\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)\underline{u}\left(i\right), \\ \overline{u}(0)\geq\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)\underline{u}\left(i\right)+\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)\overline{u}\left(i\right). \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} 0\leq 4t\sin\left(-L\right)+11L+e^{-t},\ t\in\left\{0,1,2,3,...,10\right\}, \\ 0\geq 4t\sin\left(L\right)-11L+e^{-t},\ t\in\left\{0,1,2,3,...,10\right\}, \\ -L\leq\dfrac{L}{7}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)+\dfrac{L}{7}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(1-\dfrac{i}{5}\right)=-0.857\,14L, \\ L\geq-\dfrac{L}{7}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)+\dfrac{L}{7}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\dfrac{i}{5}-1\right)=0.857\,14L. \end{cases}$$

Alors si on choisit par exemple $L\geq 1$, on obtient $(\underline{u},\overline{u})$ une paire de sous-sur solution de (2.26) et il en résulte que le problème (2.26) admet une paire de quasi-solution (u_*,u^*) telles que

$$-L\leq u_*\leq u^*\leq L \text{ dans } \left\{0,1,2,3,...,10\right\}.$$

Maintenant, si on pose par définition $\widetilde{M}=0$, alors la fonction f vérifie l'hypothèse supplémentaire (H2).

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{7}\int_0^5 e_0(s,0)\left(\frac{s}{5}-1\right)\Delta s+\frac{1}{7}\int_5^{10} e_0(s,0)\left(\frac{s}{5}-1\right)\Delta s \\
= \quad & -\frac{1}{7}\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right)+\frac{1}{7}\sum_{i=6}^{10}\left(\frac{i}{5}-1\right)=0.857\,14<1,
\end{aligned}
$$

et par conséquent d'aprés le Théorème 2.2, il s'ensuit que le problème (2.26) admet au moins une solution.

Chapitre 3

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques quasilinéaires avec conditions initiales non locales.

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la construction des solutions pour le problème initial suivant

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) = f(t, u^{\sigma}),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g : [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et a et b sont des nombres réels.

Plusieurs auteurs ont étudié les équations dynamiques dans les échelles de temps avec des conditions aux limites non locales à l'aide du théorème de point fixe de Leray-Schauder, la méthode des sous-sur solutions, (voir [2, 3, 4, 5] et [19, 20]).

Le plan de ce chapitre est le suivant

Dans la première Section, on donne quelques résultats préliminaires qui seront utilies pour la suite. Dans la deuxième Section, on énoce et on montre le résultat principal de ce chapitre. Enfin, on donne un exemple d'application pour illustrer nos résultats.

3.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires.

On considère le problème initial suivant

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) + \widetilde{M}\varphi_p(u^{\sigma}(t)) = h(t)\,,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $h : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\widetilde{M}$ est un nombre réel positif, a et x_0 sont deux nombres réels.

Remarque 3.1 *Dans ce chapitre, on définit*

$$C\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\right) = \{u : \mathbb{T} \to \mathbb{R} :\ u \text{ est continue dans } [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\}\,,$$

et

$$D = \left\{u \in C\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\right) :\ \varphi_p(u^{\Delta}) \text{ est rd-continue dans } [a,b]_{\mathbb{T}}\right\}.$$

Définition 3.1 *On dit que u est une solution de (3.2) si*

(i) $u \in D$,

(ii) u vérifie (3.2).

Définition 3.2 *On dit que α est une sous solution de (3.2) si*

(i) $\alpha \in D$,

(ii) $\begin{cases} \varphi_p(\alpha^{\Delta}(t)) + \widetilde{M}\varphi_p(\alpha^{\sigma}(t)) \leq h(t)\,,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ \alpha(a) \leq x_0. \end{cases}$

Définition 3.3 *On dit que β est une sur solution de (3.2) si*

(i) $\beta \in D$,

(ii) $\begin{cases} \varphi_p(\beta^{\Delta}(t)) + \widetilde{M}\varphi_p(\beta^{\sigma}(t)) \geq h(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \beta(a) \geq x_0. \end{cases}$

On a le résultat suivant

Lemme 3.1 *(Principe de comparaison). Soit u_1,u_2 deux fonctions tels que $u_1, u_2 \in D$, et*

$$\begin{cases} \varphi_p(u_1^{\Delta}(t)) + \widetilde{M}\varphi_p(u_1^{\sigma}(t)) \leq \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + \widetilde{M}\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_1(a) \leq u_2(a), \end{cases} \tag{3.3}$$

alors $u_1(t) \leq u_2(t)$, pour tout $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$w(t_0) := u_2(t_0) - u_1(t_0) = \min\{w(t) : a \leq t \leq \sigma(b)\} < 0,$$

et

$$w(t) > w(t_0), \text{ pour tout } t \in (t_0, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.4}$$

On distingue les cas suivants

Cas 1:

Si $t_0 = a$, on obtient la contradiction

$$0 > u_2(a) - u_1(a) \geq 0.$$

Cas 2:

Si $t_0 \in (a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, on distingue quatre sous cas

Premièr sous cas $\rho(t_0) = t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^{\Delta}(t_0) > 0$, alors $\lim_{t \to t_0} w^{\Delta}(t) = w^{\Delta}(t_0)$ ce qui entraine l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^{\Delta}(t) > 0$ dans $(t_0 - \delta, t_0]_{\mathbb{T}}$, ce qui veut dire que w est croissante sur $(t_0 - \delta, t_0]_{\mathbb{T}}$. Mais ça contredit la définition de t_0.

(ii) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0) < 0$ ce qui entraine l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ dans $[t_0, t_0+\delta)_{\mathbb{T}}$, ce qui veut dire que w est décroissante sur $[t_0, t_0+\delta)_{\mathbb{T}}$. Mais ça contredit la définition de t_0.

(iii) Si $w^\Delta(t_0) = 0$, alors $u_1^\Delta(t_0) = u_2^\Delta(t_0)$ et donc $\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) = \varphi_p(u_2^\Delta(t_0))$.
Mais en ce point, on a

$$\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) + \widetilde{M}\varphi_p(u_2^\sigma(t_0)) - \varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) - \widetilde{M}\varphi_p(u_1^\sigma(t_0)) \geq 0.$$

C'est à dire que

$$\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) \geq \widetilde{M}\varphi_p(u_1^\sigma(t_0)) - \widetilde{M}\varphi_p(u_2^\sigma(t_0)).$$

Comme $u_2(t_0) < u_1(t_0)$ et la fonction φ_p est strictement croissante, on a

$$\varphi_p(u_2^\Delta(t_0)) - \varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) > 0,$$

ce qui est une contradiction.

2$^{\text{ème}}$ **sous cas** $\rho(t_0) = t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0^-} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$ ce qui entraine l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) > 0$ dans $(t_0-\delta, t_0]_{\mathbb{T}}$, ce qui veut dire que w est croissante sur $(t_0-\delta, t_0]_{\mathbb{T}}$. Mais ça contredit la définition de t_0

(ii) Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors $w^\sigma(t_0) \leq w(t_0)$. Mais ça contredit la définition de t_0.

3$^{\text{ème}}$ **sous cas** $\rho(t_0) < t_0 = \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^\Delta(t_0) < 0$, alors $\lim\limits_{t\to t_0^+} w^\Delta(t) = w^\Delta(t_0)$ ce qui entraine l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $w^\Delta(t) < 0$ dans $[t_0, t_0+\delta)_{\mathbb{T}}$, ce qui veut dire que w est décroissante sur $[t_0, t_0+\delta)_{\mathbb{T}}$. Mais ça contredit la définition de t_0.

(ii) Si $w^\Delta(t_0) \geq 0$, alors on a

$$u_1^\Delta(t_0) \leq u_2^\Delta(t_0),$$

c'est à dire

$$\varphi_p(u_1^\Delta(t_0)) \leq \varphi_p(u_2^\Delta(t_0)).$$

D'autre part, comme $\rho(t_0)$ est un point dispersé à droite, on a

$$w^\Delta(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$

d'où

$$u_2^\Delta(\rho(t_0)) < u_1^\Delta(\rho(t_0)).$$

Comme φ_p est strictement croissante, on a

$$\varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0))).$$

Par suite, on a

$$\varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0))) + \widetilde{M}\varphi_p(u_2\,(t_0)) < \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0))) + \widetilde{M}\varphi_p(u_1\,(t_0)),$$

ce qui contredit la première inégalité dans (3.3).

4$^{\text{ème}}$ **sous cas** $\rho(t_0) < t_0 < \sigma(t_0)$.

(i) Si $w^\Delta(t_0) \leq 0$, alors $w^\sigma(t_0) \leq w(t_0)$ ce qui contredit la définition de t_0.

(ii) Si $w^\Delta(t_0) > 0$, alors on a

$$w^\Delta(\rho(t_0)) = \frac{w(t_0) - w(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} < 0,$$

c'est à dire

$$u_2^\Delta(\rho(t_0)) < u_1^\Delta(\rho(t_0)).$$

Ce qui entraine que

$$\varphi_p(u_2^\Delta(\rho(t_0))) < \varphi_p(u_1^\Delta(\rho(t_0))).$$

Par suite, on a

$$\varphi_p(u_1^{\Delta}(\rho(t_0))) + \widetilde{M}\varphi_p(u_1\,(t_0)) > \varphi_p(u_2^{\Delta}(\rho(t_0))) + \widetilde{M}\varphi_p(u_2\,(t_0)).$$

ce qui contredit la première inégalité dans (3.3).

La preuve du Lemme 3.1 est terminée.

■

Lemme 3.2 *Le problème de Cauchy (3.2) admet une unique solution.*

Preuve: On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}\,(t)) = F\,(t,u)\,,\; t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec

$$F\,(t,u) = \begin{cases} h\,(t) - \widetilde{M}\varphi_p(\alpha^{\sigma}\,(t)) + \dfrac{u^{\sigma}\,(t) - \alpha^{\sigma}\,(t)}{1+(u^{\sigma}\,(t) - \alpha^{\sigma}\,(t))^2} \text{ si } u^{\sigma}\,(t) \le \alpha^{\sigma}\,(t)\,, \\ h\,(t) - \widetilde{M}\varphi_p(u^{\sigma}\,(t)) \text{ si } \alpha^{\sigma}\,(t) \le u^{\sigma}\,(t) \le \beta^{\sigma}\,(t)\,, \\ h\,(t) - \widetilde{M}\varphi_p(\beta^{\sigma}\,(t)) + \dfrac{\beta^{\sigma}\,(t) - u^{\sigma}\,(t)}{1+(\beta^{\sigma}\,(t) - u^{\sigma}\,(t))^2} \text{ si } u^{\sigma}\,(t) \ge \beta^{\sigma}\,(t)\,. \end{cases}$$

Tout d'abord, on note que le problème (3.5) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta}\,(t) = \varphi_p^{-1}(F\,(t,u)),\; t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) = x_0, \end{cases}$$

Puisque φ_p^{-1} est continue et F est bornée, alors d'aprés le Théorème 4.6 dans [31], le problème (3.5) admet au moins une solution dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Montrons maintenant que

$$\alpha\,(t) \le u\,(t) \le \beta\,(t)\,, \text{ pour tout } t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,.$$

Tout d'abord, on montre que

$$\alpha\,(t) \le u\,(t)\,, \text{ pour tout } t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,.$$

On suppose qui'il existe $t_1 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\alpha(t_1) - u(t_1) = \max_{s\in[a,b]_{\mathbb{T}}} (\alpha(s) - u(s)) > 0.$$

Alors, on a

$$\alpha^{\Delta}(\rho(t_1)) \geq u^{\Delta}(\rho(t_1)).$$

Puisque la fonction φ_p est strictement croissante on obtient

$$\varphi_p(\alpha)^{\Delta}(\rho(t_1)) \geq \varphi_p(u)^{\Delta}(\rho(t_1)).$$

ce qui signifie que

$$0 \leq \varphi_p(\alpha)^{\Delta}(\rho(t_1)) - \varphi_p(u)^{\Delta}(\rho(t_1)).$$

D'autre part, on a

$$\varphi_p(\alpha)^{\Delta}(\rho(t_1)) - \varphi_p(u)^{\Delta}(\rho(t_1)) < \frac{u(t_1) - \alpha(t_1)}{1 + (u(t_1) - \alpha(t_1))^2} < 0,$$

ce qui est une contradiction.

De même, on montre que

$$u(t) \leq \beta(t), \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Par conséquent, on a

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

On va prouver maintenant que le problème (3.2) admet une solution unique.

Supposons que le problème (3.2) admet deux solutions u_1 et u_2. alors d'après le Lemme 3.1, on a à la fois $u_1 \leq u_2$ et $u_2 \leq u_1$ sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$. C'est à dire $u_1 = u_2$.

La preuve du Lemme 3.2 est complète. ■

3.3 Resultat principal

Dans cette section, on donne quelques définitions, on énonce et on montre nos résultats. Nous considérons le problème (3.1) et supposons que la fonction $g : [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait à la condition suivante

(H1) $g(t) \leq 0$, $t \in [a, c]_{\mathbb{T}}$ et $g(t) \geq 0$, $t \in [c, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ tel que $a < c < b$ et $c \in [a, b]_{\mathbb{T}}$.

Définition 3.4 *On dit que $(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sous-sur solution de (3.1) si*

(i) $(\underline{u}, \overline{u}) \in D^2$,

$$(ii)\begin{cases} \varphi_p(\underline{u}^{\Delta}(t)) \leq f(t, \underline{u}^{\sigma}(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \varphi_p(\overline{u}^{\Delta}(t)) \geq f(t, \overline{u}^{\sigma}(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}(a) \leq \int_a^c g(s)\overline{u}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\underline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(a) \geq \int_a^c g(s)\underline{u}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\overline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Définition 3.5 *La paire de fonctions (u_*, u_{**}) est dite quasi-solution de (3.1) si*

(i) $(u_*, u_{**}) \in D^2$,

$$(ii)\begin{cases} \varphi_p(u_*^{\Delta}(t)) = f(t, u_*^{\sigma}(t)), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \varphi_p(u_{**}^{\Delta}(t)) = f(t, u_{**}^{\sigma}(t)), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*(a) = \int_a^c g(s)u_{**}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s, \\ u_{**}(a) = \int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{**}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Définition 3.6 *On dit que u est une solution de (3.1) si*

(i) $u \in D$,

$$(ii)\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) = f(t, u^{\sigma}(t)), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g(s)u(s)\Delta s. \end{cases}$$

Dans cette section, on impose sur la fonction f la condition suivante

(H2) Il existe une constante $M > 0$ tel que $x \longmapsto f(t, x) + M\varphi_p(x)$ est croissante si $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

On a, le résultat suivant

Théorème 3.1 *Soit $(\underline{u}, \overline{u})$ une paire de sous-sur solutions de (3.1) telle que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et supposons que les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites. Alors le problème*

(3.1) admet une paire de quasi-solution (u_*, u_{**}) *tel que*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u_{**} \leq \overline{u} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Preuve: On pose $u_0 = \underline{u}$, $u_1 = \overline{u}$, et on définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante:

$$\begin{cases} \varphi_p(u_{n+2}^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_{n+2}^{\sigma}(t)) = f_n(t), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ u_{n+2}(a) = \int_a^c g(s)u_{n+1}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_n(s)\Delta s, \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$f_n(t) = f(t, u_n^{\sigma}(t)) + M\varphi_p(u_n^{\sigma}(t)).$$

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Soit

$$w_0(t) := u_2(t) - u_0(t), \ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (3.6) et en utilisant la Définition 3.4, on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)) \geq \varphi_p(u_0^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_0^{\sigma}(t), \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_0(a) \geq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 3.1, on a

$$w_0(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u_0 \leq u_2 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.7}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.8}$$

Posons par définition

$$w_1(t) = u_2(t) - u_1(t), \; t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (3.6), on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)) - \varphi_p(u_1^{\Delta}(t)) - M\varphi_p(u_1^{\sigma}(t)) \\ \leq f_0(t) - f_1(t), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(a) \leq \int_a^c g(s)(u_1(s) - u_0(s))\,\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)(u_0(s) - u_1(s))\,\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H2), on obtient

$$\begin{cases} \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)) \leq \varphi_p(u_1^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_1^{\sigma}(t)), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(a) \leq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 3.1, on a

$$w_1(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u_2 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.9}$$

Maintenant, on va prouver que

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Pour ce faire posons par définition

$$w_3(t) = u_2(t) - u_3(t), \; t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (3.6), on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)) - \varphi_p(u_3^{\Delta}(t)) - M\varphi_p(u_3^{\sigma}(t)) \\ = f_0(t) - f_1(t), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(a) = \int_a^c g(s)(u_1(s) - u_2(s))\,\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)(u_0(s) - u_1(s))\,\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H2), on obtient

$$\begin{cases} \varphi_p(u_2^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_2^{\sigma}(t)) \leq \varphi_p(u_3^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_3^{\sigma}(t)), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(a) \leq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 3.1, on a

$$w_3(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.10}$$

En conclusion d'aprés (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10), on a

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Supposons pour n fixé on a,

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On pose par définition

$$w_{n+1}(t) := u_{2n+4}(t) - u_{2n+2}(t), \, t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

D'aprés (3.6), on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u_{2n+4}^{\Delta}(t)) + M\varphi_p(u_{2n+4}^{\sigma}(t)) - \varphi_p(u_{2n+2}^{\Delta}(t)) - M\varphi_p(u_{2n+2}^{\sigma}(t)) \\ = f_{2n+2}(t) - f_{2n}(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) = \int_a^c g(s)\left(u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s)\right)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\left(u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s)\right)\Delta s, \end{cases}$$

D'aprés l'hypothèse de récurrence, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H2), on obtient

$$\begin{cases} w_{n+1}^{\Delta}(t) + Mw_{n+1}(t) \geq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) \geq 0. \end{cases}$$

Alors par le Lemme 3.1, on a

$$w_{n+1}(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.11}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{3.12}$$

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{3.13}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.14}$$

D'aprés (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve de **L'étape 1** est terminée.

Etape 2: Les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la quasi-solution de (3.1).

D'aprés **L'étape 1**, les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_* et u_{**}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$u_{2n}(t) = \int_a^c g(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{2n-2}(s)\Delta s + \int_a^t \varphi_p^{-1}(\widetilde{f_n}\,(s))\Delta s,$$

et

$$u_{2n+1}(t) = \int_0^c g(s)u_{2n}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_a^t \varphi_p^{-1}(\widehat{f_n}\,(s))\Delta s,$$

où

$$\widetilde{f_n}\,(s) := f(s, u_{2n-2}^{\sigma}\,(s)) + M\varphi_p(u_{2n-2}^{\sigma}\,(s)) - M\varphi_p(u_{2n}^{\sigma}\,(s)),$$

et

$$\widehat{f_n}\,(s) := f(s, u_{2n-1}^{\sigma}\,(s)) + M\varphi_p(u_{2n-1}^{\sigma}\,(s)) - M\varphi_p(u_{2n+1}^{\sigma}\,(s)).$$

Si on fait tendre $n \to +\infty$, on a

$$\widetilde{f_n}\,(s) \to f(s, u_*^{\sigma}\,(s)),$$

et

$$\widehat{f_n}\,(s) \to f(s, u_{**}^{\sigma}\,(s)).$$

D'autre part, on a

$$\exists\ c_1 > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \left|\widetilde{f_n}\,(s)\right| \leq c_1,$$

et

$$\exists\ c_2 > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \left|\widehat{f_n}\,(s)\right| \leq c_2.$$

Ce qui signifie que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \left|\varphi_p^{-1}(\widetilde{f_n}\,(s))\right| \leq c_1^{\frac{1}{p-1}},$$

et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \left|\varphi_p^{-1}(\widehat{f_n}\,(s))\right| \leq c_2^{\frac{1}{p-1}}.$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine que

$$u_*(t) = \int_a^c g(s)u_{**}(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s + \int_a^t \varphi_p^{-1}(f(s, u_*^{\sigma}\,(s)))\Delta s, \tag{3.15}$$

et

$$u_{**}(t)=\int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s+\int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{**}(s)\Delta s+\int_a^t \varphi_p^{-1}(f(s,u_{**}^{\sigma}(s)))\Delta s, \tag{3.16}$$

Maintenant, montrons que (u_*,u_{**}) est une paire de quasi-solution de (3.1).

Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{cases} u_*(a)=\int_a^c g(s)u_{**}(s)\Delta s+\int_c^{\sigma(b)} g(s)u_*(s)\Delta s, \\ u_{**}(a)=\int_a^c g(s)u_*(s)\Delta s+\int_c^{\sigma(b)} g(s)u_{**}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.17}$$

Comme φ_p^{-1} et f sont continues, $\underline{u}\leq u_*\leq \overline{u}$ et $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont continues, alors il existe une constante $K_1>0$ telle que pour tout $s\in[a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$|f(s,u_*^{\sigma}(s))|\leq K_1. \tag{3.18}$$

Alors d'après (3.15) et (3.18), on a

$$\forall\ t_1\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \forall\ t_2\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,,\ \ |u_*(t_1)-u_*(t_2)|\leq K\,|t_1-t_2|\,.$$

Ceci implique que u_* est continue dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par consèquent d'aprés (3.16) il résulte que u_* est Δ-différentiable dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

De même, on montre que la fonction u_{**} est $\Delta-$différentiable dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par conséquent par (3.15) et (3.16), on a

$$\begin{cases} u_*^{\Delta}(t)=\varphi_p^{-1}(f(t,u_*^{\sigma}(t))),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u_{**}^{\Delta}(t)=\varphi_p^{-1}(f(t,u_{**}^{\sigma}(t))),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,. \end{cases}$$

Ce qui signifie que

$$\begin{cases} \varphi_p(u_*^{\Delta}(t))=f(t,u_*^{\sigma}(t)),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ \varphi_p(u_{**}^{\Delta}(t))=f(t,u_{**}^{\sigma}(t)),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,. \end{cases}$$

et par (3.17), il résulte que (u_*,u_{**}) est une paire de quasi-solutions de (3.1).

La preuve de **L'étape 2** est terminée et ce qui achève la preuve du Théorème 3.1. $\blacksquare$

Il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur f et g, pour que $u_{**}=u_*$ et par conséquent le problème (3.1) admet au moins une solution.

Sur la f et la fonction g, on impose les conditions supplémentaires suivantes

(H3) La fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est décroissante si $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

(H4) $-\int_a^c g(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)\Delta s < 1$.

On a le résultat suivant

Théorème 3.2 *Supposons que les hypothèses (Hi) (i = 1, ..., 4) sont satisfaite et soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous-sur solutions de (3.1) telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. *Alors le problème (3.1) admet au moins une solution.*

Preuve: D'aprés le Théorème 3.1, le problème (3.1) admet une paire de quasi-solution (u_*, u_{**}) telle que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u_{**} \leq \overline{u} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.19}$$

On pose par définition

$$z^*(t) = u_{**}(t) - u_*(t), \; t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$z^*(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3.20}$$

Maintenant, on va montrer que

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$\begin{cases} z^{*\Delta}(t) = \varphi_p^{-1}(f(t, u_{**}^{\sigma}(t))) - \varphi_p^{-1}(f(t, u_*^{\sigma}(t))), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ z^*(a) = -\int_a^c g(s)z^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)z^*(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.21}$$

D'aprés (3.19) et en utilisant l'hypothèse (H3), on a

$$\begin{cases} z^{*\Delta}(t) \leq 0, \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ z^*(a) = -\int_a^c g(s)z^*(s)\Delta s + \int_c^{\sigma(b)} g(s)z^*(s)\Delta s. \end{cases} \tag{3.22}$$

En utilisant l'hypothèse (H4), on a

$$z^*(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par l'inégalité (3.20), il résulte que

$$z^*(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_{**}(t) = u_*(t) \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent le problème (3.1) admet au moins une solution. ■

3.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) = \cos(u^{\sigma}(t)) - 15\varphi_p(u^{\sigma}(t)) + e^{-t}, \ t \in [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = \frac{1}{8}\int_0^{\sigma(10)} \left(\frac{s}{5} - 1\right) u(s)\,\Delta s. \end{cases} \tag{3.23}$$

Cas 1: $\mathbb{T} = [0,10]_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{R}$

Pour ce cas, on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u'(t)) = \cos(u(t)) - 15\varphi_p(u(t)) + e^{-t}, \ t \in [0,10]_{\mathbb{T}} \\ u(0) = \frac{1}{8}\int_0^{10} \left(\frac{s}{5} - 1\right) u(s)\,ds. \end{cases}$$

On pose par définition $(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (-L, L)$, ou L est un nomre réel positif et $\in [0,10]_{\mathbb{T}}$.

$(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sus-sur solution de (3.23) si on a

$$\begin{cases} \varphi_p(\underline{u}'(t)) \le \cos(\underline{u}(t)) - 15\varphi_p(\underline{u}(t)) + e^{-t}, \ t \in [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ \varphi_p(\overline{u}'(t)) \ge \cos(\overline{u}(t)) - 15\varphi_p(\overline{u}(t)) + e^{-t}, \ t \in [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ \underline{u}(0) \le \frac{1}{8}\int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1\right) \overline{u}(s)\,ds + \frac{1}{8}\int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1\right) \underline{u}(s)ds, \\ \overline{u}(0) \ge \frac{1}{8}\int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1\right) \underline{u}(s)ds + \frac{1}{8}\int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1\right) \overline{u}(s)\,ds, \end{cases}$$

c'est à dire,

$$\begin{cases} 0 \leq \cos(-L) + 15L^{p-1} + e^{-t},\ t \in [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \geq \cos(L) - 15L^{p-1} + e^{-t},\ t \in [0,10]_{\mathbb{T}}, \\ -L \leq \frac{L}{8} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1\right) ds + \frac{L}{8} \int_5^{10} \left(1 - \frac{s}{5}\right) ds = -\frac{5}{8}L, \\ L \geq -\frac{L}{7} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1\right) ds + \frac{L}{7} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1\right) ds = \frac{5}{8}L. \end{cases}$$

Alors si on choisit par exemple $L \geq 1$, on obtient que $(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sous-sur solution de (3.23). D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\widehat{f}(t,u) = \cos(u) - 15\varphi_p(u) + e^{-t}.$$

satisfait les conditions du Théorème 3.1 et par suite, il résulte que le problème (3.23) admet une paire de quasi-solutions (u_*, u_{**}) tel que

$$-L \leq u_* \leq u_{**} \leq L \text{ dans } [0,10]_{\mathbb{T}}..$$

Maintenant, la fonction $\widehat{f}$ vérifie l'hypothèse supplémentaire (H3) et d'autre part, on a

$$-\frac{1}{8} \int_0^5 \left(\frac{s}{5} - 1\right) ds + \frac{1}{8} \int_5^{10} \left(\frac{s}{5} - 1\right) ds = \frac{5}{8} < 1,$$

et par conséquent d'aprés le Théorème 3.1, il résulte que le problème (3.23) admet au moins une solution.

Cas 2: $\mathbb{T} = [0,10]_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{Z}$.

Pour ce cas on a

$$\begin{cases} \varphi_p(u(t+1)) - \varphi_p(u(t)) = \cos(u(t+1)) - 15\varphi_p(u(t+1)) + e^{-t},\ t \in \{0,1,2,3,...,9,10\}, \\ u(0) = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{10} \left(\frac{i}{5} - 1\right) u(i). \end{cases}$$

On pose par définition $(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (-L, L)$, est un nombre réel strictement positif et $t \in \{0,1,2,...,10\}$.

$(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sus-sur solutions de (3.23) si on a

$$\begin{cases} \varphi_p(\underline{u}(t+1)) - \varphi_p(\underline{u}(t)) \leq \cos\left(\underline{u}\,(t+1)\right) - 15\varphi_p(\underline{u}\,(t+1)) + e^{-t},\ t \in \{0,1,2,3,...,9,10\}\,, \\ \varphi_p(\overline{u}(t+1)) - \varphi_p(\overline{u}(t)) \geq \cos\left(\overline{u}\,(t+1)\right) - 15\varphi_p(\overline{u}\,(t+1)) + e^{-t},\ t \in \{0,1,2,3,...,9,10\}\,, \\ \underline{u}\,(0) \leq \frac{1}{8}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right)\overline{u}\,(i) + \frac{1}{8}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\frac{i}{5}-1\right)\underline{u}\,(i)\,, \\ \overline{u}(0) \geq \frac{1}{8}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right)\underline{u}\,(i) + \frac{1}{8}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\frac{i}{5}-1\right)\overline{u}\,(i)\,. \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} 0 \leq \cos\left(-L\right) + 15L^{p-1} + e^{-t},\ t \in \{0,1,2,3,...,9,10\}\,, \\ 0 \geq \cos\left(L\right) - 15L^{p-1} + e^{-t},\ t \in \{0,1,2,3,...,9,10\}\,, \\ -L \leq \frac{L}{8}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right) + \frac{L}{8}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(1-\frac{i}{5}\right) = -\frac{7}{8}L, \\ L \geq -\frac{L}{8}\sum\limits_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right) + \frac{L}{8}\sum\limits_{i=6}^{10}\left(\frac{i}{5}-1\right) = \frac{7}{8}L. \end{cases}$$

Alors si on choisit par exemple $L \geq 1$, on obtient que $(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sous-sur solution de (3.23) et par conséquent le problème (3.23) admet une paire de quasi-solution (u_*, u_{**}) tel que

$$-L \leq u_* \leq u_{**} \leq L \text{ dans } \{0,1,2,3,...,10\}\,.$$

Maintenant, la fonction $\widehat{f}$ vérifie l'hypothèse supplémentaire (H3) et d'autre part, on a

$$-\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}-1\right) + \frac{1}{8}\sum_{i=6}^{10}\left(\frac{i}{5}-1\right) < 1,$$

et par conséquent d'aprés le Théorème 3.1, le problème (3.23) admet au moins une solution.

Chapitre 4

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes de systèmes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour le problème suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ v^{\Delta}(t) = g(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) = \int_a^{\sigma(b)} g_1(s)u(s)\,\Delta s, \\ v(a) = \int_a^{\sigma(b)} g_2(s)v(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f,g : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, $g_1, g_2 : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et a et b sont des nombres réels.

Les résultats de ce chapitre généralisent ceux qui ont été obtenu dans [15].

4.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires.

On considère le problème initial suivant

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = h(t)x(t) + \psi(t), \; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ x(a) = a_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où : $h : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, $\psi : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et a_0 est un nombre réel.

Lemme 4.1 *Le problème de Cauchy (4.2) admet une unique solution x donnée par*

$$x(t) = e_h(t,a)\, a_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))\psi(\tau)\, \Delta\tau, \; t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Lemme 4.2 *Soit $x \in C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ qui vérifie*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + Mx(t) \leq 0, \; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ x(a) \leq 0, \end{cases}$$

avec $M \in \mathbb{R}$, alors $x(t) \leq 0$, pour tout $t \in [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: La preuve est une conséquence immédiate du Lemme 4.1. ■

4.3 Résultat principal

Dans cette section, on impose les conditions suivantes

(H1) $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et il existe une constante positive M_1 tel que

$(t,u,v) \longmapsto f(t,,u,v) + M_1 u$ est croissante par rapport à u pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ et $v \in \mathbb{R}$.

(H2) $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et il existe une constante M_2 positive tel que

$(t,u,v) \longmapsto g(t,,u,v)+M_2 v$ est croissante par rapport à v pour tout $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ et pour tout $u\in\mathbb{R}$.

(H3) $f(t,,u,v)$ est croissante par rapport à v pour tout $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$.

(H4) $g(t,,u,v)$ est décroissante par rapport à u pour tout $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$

(H5) $g_1(t)\leq 0$ dans $[a,c_1]$ et $g_1(t)\geq 0$ dans $[c_1,b]$, avec $c_1\in[a,b]_{\mathbb{T}}$

(H6) $g_2(t)\leq 0$ dans $[a,c_2]$ et $g_2(t)\geq 0$ dans $[c_2,b]$, avec $c_2\in[a,b]_{\mathbb{T}}$.

On a le résultat suivant

Définition 4.1 *On dit que (u,v) est un couple de solutions de (4.1) si*
(i) $(u,v)\in\left(C^1\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)\right)^2$.
(ii) (u,v) *satisfait le probleme (4.1)*

Définition 4.2 *On dit que les fonctions (u_*,u^*) et (u_*,u^*) sont deux paires de quasi-solutions de (4.1) si*
(i) $(u_*,u^*)\in\left(C^1\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)\right)^2, (v_*,v^*)\in\left(C^1\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)\right)^2$.

$$(ii)\begin{cases} u_*^{\Delta}(t)=f(t,u_*(t),v_*(t)), t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ u^{*\Delta}(t)=f(t,u^*(t),v^*(t)), t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ v_*^{\Delta}(t)=g(t,u^*(t),v_*(t)), t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ v^{*\Delta}(t)=g(t,u_*(t),v^*(t)), t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ u_*(a)=\int_a^{c_1}g_1(s)u^*(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)u_*(s)\Delta s\\ u^*(a)=\int_a^{c_1}g_1(s)u_*(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)u^*(s)\Delta s\\ v_*(a)=\int_a^{c_2}g_2(s)v^*(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)v_*(s)\Delta s\\ v^*(a)=\int_a^{c_2}g(s)v_*(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)v^*(s)\Delta s \end{cases}$$

Définition 4.3 *On dit que les fonctions $(\underline{u},\overline{u})$ et $(\underline{v},\overline{v})$ sont deux paires de sous-sur solutions de (4.1) si*
(i) $(\underline{u},\overline{u})\in\left(C^1\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)\right)^2, (\underline{v},\overline{v})\in\left(C^1\left([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)\right)^2$.

$$(ii)\begin{cases}\underline{u}^{\Delta}(t)\leq f(t,\underline{u}(t),\underline{v}(t)),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ \overline{u}^{\Delta}(t)\geq f(t,\overline{u}(t),\overline{v}(t)),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ \underline{v}^{\Delta}(t)\leq g(t,\overline{u}(t),\underline{v}(t)),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ \overline{v}^{\Delta}(t)\geq g(t,\underline{u}(t),\overline{v}(t)),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\ \underline{u}(a)\leq\int_a^{c_1}g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s\\ \overline{u}(a)\geq\int_a^{c_1}g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s\\ \underline{v}(a)\leq\int_a^{c_2}g_2(s)\overline{v}(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)\underline{v}(s)\Delta s\\ \overline{v}(a)\geq\int_a^{c_2}g_2(s)\underline{v}(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)\overline{v}(s)\Delta s\end{cases}$$

Théorème 4.1 *Supposon que les hypothèses (Hi) i=1...6 sont satisfaite et soit* $(\underline{u},\overline{u}),(\underline{v},\overline{v})$ *deux paire de sous-sur solutions de (4.1) telle que* $\underline{u}\leq\overline{u}$ *et* $\underline{v}\leq\overline{v}$ *dans* $[a,b]_{\mathbb{T}}$. *Alors le probleme (4.1) admet deux paires de quasi-solutions* $(u_*,u^*),(v_*,v^*)$ *telle que*

$$\underline{u}\leq u_*\leq u^*\leq\overline{u}\ \textit{dans}\ [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

et

$$\underline{v}\leq v_*\leq v^*\leq\overline{v}\ \textit{dans}\ [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Preuve: On pose $u_0=\underline{u}$, $u_1=\overline{u},v_0=\underline{v}$, $v_1=\overline{v}$ et on définIt les suites $(u_n)_{n\geq0}$ et $(v_n)_{n\geq0}$ par

$$\begin{cases}u_{n+2}^{\Delta}(t)+M_1u_{n+2}(t)=f(t,u_n(t),v_n(t))+M_1u_n(t),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}},\\ u_{n+2}(a)=\int_a^{c_1}g_1(s)u_{n+1}(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)u_n(s)\Delta s.\end{cases}\tag{4.3}$$

et

$$\begin{cases}v_{n+2}^{\Delta}(t)+M_2v_{n+2}(t)=g(t,u_n(t),v_n(t))+M_2v_n(t),\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}},\\ v_{n+2}(a)=\int_a^{c_2}g_2(s)v_{n+1}(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)v_n(s)\Delta s.\end{cases}\tag{4.4}$$

Etape 1: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{2n}\leq u_{2n+2}\leq u_{2n+3}\leq u_{2n+1}\text{ dans }[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et

$$v_{2n}\leq v_{2n+2}\leq v_{2n+3}\leq v_{2n+1}\text{ dans }[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Soit

$$w_0\left(t\right) := u_2\left(t\right) - u_0\left(t\right),\ z_0\left(t\right) := v_2\left(t\right) - v_0\left(t\right),\ t \in \left[a, \sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (4.3), (4.4) et en utilisant la Définition 4.3, on a

$$\begin{cases} w_0^{\Delta}\left(t\right) + M_1 w_0\left(t\right) \geq 0,\ t \in \left[a, b\right]_{\mathbb{T}}, \\ w_0\left(a\right) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z_0^{\Delta}\left(t\right) + M_2 z_0\left(t\right) \geq 0,\ t \in \left[a, b\right]_{\mathbb{T}}, \\ z_0\left(a\right) \geq 0, \end{cases}$$

Alors par le Lemme 4.2, on a

$$w_0\left(a\right) \geq 0 \text{ et } z_0\left(a\right) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_0 \leq u_2 \text{ et } v_0 \leq v_2 \text{ dans } \left[a, \sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{4.5}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ et } v_3 \leq v_1 \text{ dans } \left[a, \sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{4.6}$$

Posons par définition

$$p_1\left(t\right) = u_2\left(t\right) - u_1\left(t\right), q_1\left(t\right) = v_2\left(t\right) - v_1\left(t\right),\ t \in \left[a, \sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (4.3) et (4.4), on a

$$\begin{cases} p_1^{\Delta}\left(t\right) + M_1 p_1\left(t\right) \\ \leq f(t, u_0\left(t\right), v_0\left(t\right)) + M_1 u_0\left(t\right) - f(t, u_1\left(t\right), v_1\left(t\right)) - M_1 v_1\left(t\right),\ t \in \left[a, b\right]_{\mathbb{T}}, \\ p_1(a) \leq \int_a^{c_1} g_1(s)\left(u_1\left(s\right) - u_0\left(s\right)\right)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)\left(u_0\left(s\right) - u_1\left(s\right)\right)\Delta s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_1^{\Delta}(t) + M_2 q_1(t) \\ \leq g(t, u_0(t), v_0(t)) + M_2 v_0(t) - g(t, u_0(t), v_1(t)) - M_2 v_1(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ q_1(a) \leq \int_a^{c_2} g_2(s)(v_1(s) - v_0(s))\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)(v_0(s) - v_1(s))\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ et $v_0 = \underline{v} \leq \overline{v} = v_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant les hypothèses (Hi) pour $i = 1, ..., 6$, on a

$$\begin{cases} p_1^{\Delta}(t) + M_1 p_1(t) \leq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ p_1(a) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_1^{\Delta}(t) + M_2 q_1(t) \leq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ q_1(a) \leq 0, \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 4.2, on a

$$p_1(t) \leq 0 \text{ et } q_1(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et par suite

$$u_2 \leq u_1 \text{ et } v_2 \leq v_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.7}$$

Maintenant on va prouver que

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Pour ce faire posons par définition

$$p_3(t) = u_2(t) - u_3(t) \text{ et } q_3(t) = v_2(t) - v_3(t), \ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (4.3) et (4.4), on a

$$\begin{cases} p_3^{\Delta}(t) + M_1 p_3(t) \\ = f(t, u_0(t), v_0(t)) + M_1 u_0(t) - f(t, u_1(t), v_1(t)) - M_1 u_1(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ p_3(a) = \int_a^{c_1} g_1(s)(u_1(s) - u_2(s))\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)(u_0(s) - u_1(s))\Delta s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_3^{\Delta}(t) + M_2 q_3(t) \\ = g(t, u_1(t), v_0(t)) + M_2 v_0(t) - g(t, u_2(t), v_1(t)) - M_2 v_1(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ q_3(a) = \int_a^{c_2} g_2(s)(v_1(s) - v_2(s)) \Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)(v_0(s) - v_1(s)) \Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ et $v_0 \leq v_2 \leq v_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, on a

$$\begin{cases} p_3^{\Delta}(t) + M_1 p_3(t) \leq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ p_3(a) \leq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_3^{\Delta}(t) + M_2 q_3(t) \leq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ q_3(a) \leq 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 4.2, on a

$$p_3(t) \leq 0 \text{ et } q_3(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_2 \leq u_3 \text{ et } v_2 \leq v_3 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.8}$$

En conclusion d'aprés (4.6), (4.7) et (4.8), on a

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et

$$v_0 \leq v_2 \leq v_3 \leq v_1 \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Supposons pour n fixé que

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On pose par définition

$$w_{n+1}(t) := u_{2n+4}(t) - u_{2n+2}(t),\ z_{n+1}(t) := v_{2n+4}(t) - v_{2n+2}(t),\ t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

D'aprés (4.3) et (4.4), on a

$$\begin{cases} w_{n+1}^{\Delta}(t) + M_1 w_{n+1}(t) \\ = f(t, u_{2n+2}(t), v_{2n+2}(t)) + M_1(u_{2n+2}(t) - u_{2n}(t)) - f(t, u_{2n}(t), v_{2n}(t)),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) = \int_a^{c_1} g_1(s)(u_{2n+3}(s) - u_{2n+1}(s))\,\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)(u_{2n+2}(s) - u_{2n}(s))\,\Delta s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z_{n+1}^{\Delta}(t) + M_2 z_{n+1}(t) \\ = g(t, u_{2n+2}(t), v_{2n+2}(t)) + M_2(v_{2n+2}(t) - v_{2n}(t)) - g(t, u_{2n+1}(t), v_{2n}(t)),\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ z_{n+1}(a) = \int_a^{c_2} g_2(s)(v_{2n+3}(s) - v_{2n+1}(s))\,\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)(v_{2n+2}(s) - v_{2n}(s))\,\Delta s, \end{cases}$$

D'aprés les hypothèses de récurrence, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1},\ \text{dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et d'aprés les hypothèses (Hi) pour $i = 1, ..., 6$, on a

$$\begin{cases} w_{n+1}^{\Delta}(t) + M_1 w_{n+1}(t) \geq 0,\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) \geq 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z_{n+1}^{\Delta}(t) + M_2 z_{n+1}(t) \geq 0, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ z_{n+1}(a) \geq 0. \end{cases}$$

Alors par le Lemme 4.2, on a

$$w_{n+1}(t) \geq 0 \text{ et } z_{n+1}(t) \geq 0, \text{pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ et } v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.9}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ et } v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{4.10}$$

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \tag{4.11}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ et } v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.12}$$

D'aprés (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et

$$v_{2n+2} \leq v_{2n+4} \leq v_{2n+5} \leq v_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

et

$$v_{2n} \leq v_{2n+2} \leq v_{2n+3} \leq v_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve de **l'Etape 1** est terminée.

Etape 2: Les suites de fonctions $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une quasi-solution de (4.1).

D'aprés **L'étape 1**, les suites de fonctions $(u_{2n}, v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}, v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers (u_*, v_*) et (u^*, v^*).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$u_{2n}(t) = \int_a^{c_1} g_1(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u_{2n-2}(s)\Delta s + \int_a^t \widetilde{f_n}\,(s)\,\Delta s,$$

$$u_{2n+1}(t) = \int_a^{c_1} g_1(s)u_{2n}(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u_{2n-1}(s)\Delta s + \int_a^t \widehat{f_n}\,(s)\,ds,$$

$$v_{2n}(t) = \int_a^{c_2} g_2(s)v_{2n-1}(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)v_{2n-2}(s)\Delta s + \int_a^t \widetilde{g_n}\,(s)\,\Delta s,$$

et

$$v_{2n+1}(t) = \int_a^{c_2} g_2(s)v_{2n}(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)v_{2n-1}(s)\Delta s + \int_a^t \widehat{g_n}\,(s)\,ds,$$

où

$$\widetilde{f_n}\,(s) := f(s, u_{2n-2}\,(s)\,, u_{2n-2}\,(s)) + M_1\,(u_{2n-2}\,(s) - u_{2n}\,(s))\,,$$

$$\widehat{f_n}\,(s) := f(s, u_{2n-1}\,(s)\,, v_{2n-1}\,(s)) + M_1\,(u_{2n-1}\,(s) - u_{2n+1}\,(s))\,.$$

$$\widetilde{g_n}\,(s) := g(s, u_{2n-1}\,(s)\,, v_{2n-2}\,(s)) + M_2\,(v_{2n-2}\,(s) - v_{2n}\,(s))\,,$$

et

$$\widehat{g_n}\,(s) := g(s, u_{2n}\,(s)\,, v_{2n-1}\,(s)) + M_2\,(v_{2n-1}\,(s) - v_{2n+1}\,(s))\,.$$

Maintenant si on fait tendre $n \to +\infty$, on a

$$\widetilde{f_n}\,(s) \to f(s, u_*\,(s)\,, v_*\,(s)),$$

$$\widehat{f_n}\,(s) \to f(s, u^*\,(s)\,, v^*\,(s)),$$

$$\widetilde{g_n}\,(s) \to g(s, u^*\,(s)\,, v_*\,(s)).$$

et

$$\widehat{g}_n(s) \to g(s, u_*(s), v^*(s)).$$

D'autre part les fonctions $\widetilde{f}_n$, $\widehat{f}_n$, $\widetilde{g}_n$ et $\widehat{g}_n$ étant continues, alors

$$\exists\ c_1 > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \ \left|\widetilde{f}_n(s)\right| \le c_1,$$

et

$$\exists\ c_2 > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \ \left|\widehat{f}_n(s)\right| \le c_2,$$

$$\exists\ c_3 > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \ |\widetilde{g}_n(s)| \le c_3,$$

et

$$\exists\ c_4 > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ s \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \ |\widehat{g}_n(s)| \le c_4.$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine que

$$u_*(t) = \int_a^{c_1} g_1(s)u^*(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u_*(s)\Delta s + \int_a^t f(s, u_*(s), v_*(s))\Delta s, \tag{4.13}$$

$$u^*(t) = \int_a^{c_1} g_1(s)u_*(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u^*(s)\Delta s + \int_a^t f(s, u^*(s), v^*(s))\Delta s, \tag{4.14}$$

$$v_*(t) = \int_a^{c_2} g_2(s)v^*(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)v_*(s)\Delta s + \int_a^t g(s, u^*(s), v_*(s))\Delta s, \tag{4.15}$$

et

$$v^*(t) = \int_a^{c_2} g_2(s)v_*(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g(s)v^*(s)\Delta s + \int_a^t g(s, u_*(s), v^*(s))\Delta s, \tag{4.16}$$

Maintenant, montrons que $(u_*, u^*), (v_*, v^*)$ sont des paires de quasi-solutions de (4.1).

Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{cases} u_*(a) = \int_a^{c_1} g_1(s)u^*(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u_*(s)\Delta s, \\ u^*(a) = \int_a^{c_1} g_1(s)u_*(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} g_1(s)u^*(s)\Delta s \\ v_*(a) = \int_a^{c_2} g_2(s)v^*(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)v_*(s)\Delta s \\ v^*(a) = \int_a^{c_2} g_2(s)v_*(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)v^*(s)\Delta s \end{cases} \tag{4.17}$$

D'autre part puisque f et g sont continues, $\underline{u} \leq u_* \leq \overline{u}$ et $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont continues et $\underline{v} \leq v_* \leq \overline{v}$ et $\underline{v}$ et $\overline{v}$ sont continues alors il existe deux constantes $K_1 > 0, K_2 > 0$ telle que pour tout $s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$|f(s, u_*(s), v_*(s))| \leq K_1. \tag{4.18}$$

$$|g(s, u_*(s), v_*(s)))| \leq K_2. \tag{4.19}$$

Alors d'aprés (4.17), (4.18) et (4.19), on a

$$\forall\ t_1 \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \forall\ t_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \ |u_*(t_1) - u_*(t_2)| \leq K_1 |t_1 - t_2|.$$

et

$$\forall\ t_1 \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \forall\ t_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}},\ \ |v_*(t_1) - v_*(t_2)| \leq K_2 |t_1 - t_2|.$$

Ceci implique que u_* et v_* sont continues dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par conséquent par (4.13) et (4.15) il résulte que u_*, v_* sont $\Delta-$différentiable dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

D'une façon similaire, on peut prouver que les founctions u^* et v^* sont $\Delta-$différentiables dans $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et par suite d'aprés (4.14) et (4.16), on a

$$\begin{cases} u_*^{\Delta}(t) = f(t, u_*(t), v_*(t)),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u^{*\Delta}(t) = f(t, u^*(t), v^*(t)),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*^{\Delta}(t) = g(t, u^*(t), v_*(t))\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*^{\Delta}(t) = g(t, u_*(t), v^*(t))\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

et par consèquent d'aprés (4.17), il résulte que (u_*, u^*) et (v_*, v^*) sont deux paires de quasi-solutions de (4.1).

La preuve de l'étape 2 est terminée et ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1. ■

Il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur f et g, pour que $u^* = u_*$ et $v^* = v_*$ et par conséquent le problème (4.1) admet au moins une solution.

(H7) Il existe une constante négative $\widetilde{M}_1$ tel que

$$u \longmapsto f(t,u,v) + \widetilde{M}_1 u \text{ est décroissante si } \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ et } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

(H8) Il existe une constante négative $\widetilde{M}_2$ tel que

$v \longmapsto f(t,u,v) + \widetilde{M}_2 v$ est décroissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H9) Il existe une constante positive $\widetilde{M}_3$ tel que

$u \longmapsto g(t,u,v) + \widetilde{M}_3 u$ est croissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H10) Il existe une constante négative $\widetilde{M}_4$ tel que

$v \longmapsto g(t,u,v) + \widetilde{M}_4 v$ est décroissante si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

(H11) $A + B < 1$. avec

$$\begin{aligned} A &= -\int_a^{c_1} \exp(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)\Delta\tau) g_1(s)\Delta s + \int_{c_1}^{\sigma(b)} \exp(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)\Delta\tau) g_1(s)\Delta s \\ B &= -\int_a^{c_2} \exp(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)\Delta\tau) g_2(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} \exp(\int_0^s \widetilde{M}(\tau)\Delta\tau) g_2(s)\Delta s \end{aligned}$$

et

$$\widetilde{M}(\tau) = \max(-\widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_3, -\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_4)$$

On a le résultat suivant

Théorème 4.2 *Supposons que les hypothèses* $(Hi)_{(i=1,\ldots,11)}$ *sont satisfaites et soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *deux* $(\underline{v}, \overline{v})$ *deux paires de sous-sur solutions de (4.1) telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *et* $\underline{v} \leq \overline{v}$*dans* $[a,b]_{\mathbb{T}}$.
Alors le problème (4.1) admet au moins une solution.

Preuve: D'aprés le Théorème 4.1, le problème (4.1) admet une paire de quasi-solutions $(u_*, u^*), (v_*, v^*)$ telle que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u},\ \underline{v} \leq v_* \leq v^* \leq \overline{v} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.20}$$

On pose par définition

$$z^*(t) = u^*(t) - u_*(t) \text{ et } w^*(t) = v^*(t) - v_*(t), t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$z^*(t) \geq 0 \text{ et } w^*(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4.21}$$

Maintenant, on va montrer que

$$z^{*}\left(t\right)\leq 0 \text{ et } w^{*}\left(t\right)\leq 0 \text{ pour tout } t\in\left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$\begin{cases} z^{*\Delta}\left(t\right)=f(t,u^{*}\left(t\right),v^{*}\left(t\right))-f(t,u_{*}\left(t\right),v_{*}\left(t\right)),\ t\in\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}, \\ z^{*}(a)=-\int_{a}^{c_1}g_1(s)z^{*}(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)z^{*}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{4.22}$$

et

$$\begin{cases} w^{*\Delta}\left(t\right)=g(t,u_{*}\left(t\right),v^{*}\left(t\right))-g(t,u^{*}(t),v_{*}\left(t\right)),\ t\in\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}, \\ w^{*}(a)=-\int_{a}^{c_2}g_2(s)w^{*}(s)\Delta s+\int_{c_2}^{\sigma(b)}g_2(s)w^{*}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{4.23}$$

D'après les hypothèses (H7) et (H8), on a

$$\begin{aligned} & z^{*\Delta}\left(t\right)+\widetilde{M_1}z^{*}\left(t\right)+\widetilde{M_2}w^{*}\left(t\right) \\ & =f(t,u^{*}\left(t\right),v^{*}\left(t\right))+\widetilde{M_1}z^{*}\left(t\right)-f(t,u_{*}\left(t\right),v_{*}\left(t\right))+\widetilde{M_2}w^{*}\left(t\right) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$z^{*\Delta}\left(t\right)+\widetilde{M_1}z^{*}\left(t\right)+\widetilde{M_2}w^{*}\left(t\right)\leq 0 \text{ pour tout } t\in\left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{4.24}$$

De même, on a

$$w^{*\Delta}\left(t\right)-\widetilde{M_3}z^{*}\left(t\right)+\widetilde{M_4}w^{*}\left(t\right)\leq 0 \text{ pour tout } t\in\left[a,\sigma\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{4.25}$$

Ce qui implique que

$$\left(z^{*}+w^{*}\right)^{\Delta}\left(t\right)-\widetilde{M}(z^{*}+w^{*})\left(t\right)\leq 0,\ t\in\left[a,b\right]_{\mathbb{T}},$$

et par suite

$$\left(z^{*}+w^{*}\right)\left(t\right)\leq \exp(\int_{0}^{t}\widetilde{M}(\tau)\Delta\tau)(z^{*}+w^{*})\left(a\right) \tag{4.26}$$

D'autre part puisque $z^{*}(t)\geq 0$ et $w^{*}\left(t\right)\geq 0$ on a

$$z^{*}(a)\leq -\int_{a}^{c_1}g_1(s)(z^{*}+w^{*})(s)\Delta s+\int_{c_1}^{\sigma(b)}g_1(s)(z^{*}+w^{*})(s)\Delta s.$$

et
$$w^*(a) \leq -\int_a^{c_2} g_2(s)(z^* + w^*)(s)\Delta s + \int_{c_2}^{\sigma(b)} g_2(s)(z^* + w^*)(s)\Delta s.$$
En utilisant l'inégalité (4.26), on obtient
$$z^*(t) \leq A(z^* + w^*)(a) \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$
et
$$w^*(t) \leq B(z^* + w^*)(a) \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$
Ce qui donne
$$(z^* + w^*)(t) \leq (A + B)(z^* + w^*)(a)$$
Comme $A + B < 1$, on obtient
$$(z^* + w^*)(a) \leq 0.$$
Par suite, il résulte que
$$(z^* + w^*)(t) \leq 0.$$

et par conséquent d'aprés (4.21), on a
$$z^*(t) = 0 \text{ et } w^*(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$
C'est à dire
$$u^*(t) = u_*(t) \text{ et } v^*(t) = v_*(t) \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$
et par conséquant le problème (4.1) admet au moins une solution. ■

4.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t,u,v), \ \ t \in \mathbb{T} = \{0,1,2\} \cup [3,4] \\ v^{\Delta}(t) = g(t,u,v), \ \ t \in \mathbb{T} = \{0,1,2\} \cup [3,4] \\ u(0) = \frac{1}{k}\int_0^2 g_1(s)u(s)\,\Delta s + \frac{1}{k}\int_3^{\sigma(4)} g_1(s)u(s)\,\Delta s, \\ v(0) = \frac{1}{k}\int_0^2 g_2(s)v(s)\,\Delta s + \frac{1}{k}\int_3^{\sigma(4)} g_2(s)v(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{4.27}$$

avec

$$f(t,u,v) = \sin u(t) - 4u(t) + v(t) + (2+t)^2,$$

$$g(t,u,v) = \cos v(t) - 4v(t) - u(t) + 5 + 4t + t^2,$$

et

$$g_1(t) = g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}(t-2)t & t \in [0,2], \\ \frac{1}{k}(t-2) & t \in [3,4], \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}^*$. Le problème (4.27) devient

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = \sin u(t) - 4u(t) + v(t) + (2+t)^2 \\ v^{\Delta}(t) = \cos v(t) - 4v(t) - u(t) + 5 + 4t + t^2 \\ u(0) = \frac{1}{k}\int_0^2 (s-2)su(s)\,\Delta s + \frac{1}{k}\int_3^{\sigma(4)} (s-2)u(s)\,\Delta s, \\ v(0) = \frac{1}{k}\int_0^2 (s-2)sv(s)\,\Delta s + \frac{1}{k}\int_3^{\sigma(4)} (s-2)v(s)\,\Delta s, \end{cases} \tag{4.28}$$

On pose par définition $(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (\underline{v}(t), \overline{v}(t)) = (t,4)$, pour tout $t \in \{0,1,2\} \cup [3,4]$.

$(\underline{u},\overline{u}) = \underline{v}\,(t)\,,\overline{v}\,(t) = (t,4)$, sont deux paire de sous-sur solutions de (4.27) si on a

$$\begin{cases} 1 \leq 4+t+t^2+\sin t \\ 0 \geq -8+4t+t^2+\sin 4, \\ 1 \leq \cos t+t^2+1, \\ 0 \geq -11+\cos 4+3t+t^2, \\ 0 \leq \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{2-1} 4(i-2)i+\frac{1}{k}\int_3^4 (s-2)sds \\ 4 \geq \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{2-1} (i-2)i^2+\frac{1}{k}\int_3^4 4(s-2)ds \\ 0 \leq \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{2-1} 4(i-2)i+\frac{1}{k}\int_3^4 (s-2)sds \\ 4 \geq \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{2-1} (i-2)i^2+\frac{1}{k}\int_3^4 4(s-2)ds \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} 1 \leq 4+t+t^2+\sin t \\ 0 \geq -8+4t+t^2+\sin 4, \\ 1 \leq \cos t+t^2+1, \\ 0 \geq -11+\cos 4+3t+t^2, \\ 0 \leq \frac{1}{k}(1.33) \\ 4 \geq \frac{1}{k}(5) \end{cases}$$

Ainsi si on pose $M_1 = M_4 = 0, M_2 = -2, M_3 = 2, \widetilde{M} = \max\{-M_1+M_3, -M_2-M_4\} = 2$,

$$A = -\int_0^2 \exp(\int\limits_0^s 2ds)g_1(s)ds + \int_3^4 \exp(\int\limits_0^s 2ds)g_1(s)ds$$

et

$$B = -\int_a^2 \exp(\int\limits_0^s 2ds)g_2(s)ds + \int_3^4 \exp(\int\limits_0^s 2ds)g_2(s)ds$$

C'est à dire

$$A = -\sum_{i=0}^{2-1}\frac{1}{k}e^{2i}(i-2)i + \int_3^4 e^{2s}\frac{1}{k}(s-2)sds$$

et

$$B=-\sum_{i=0}^{2-1}\frac{1}{k}e^{2i}(i-2)+\int_3^4 e^{2s}\frac{1}{k}(s-2)ds$$

C'est à dire

$$A=\frac{1}{k}(7902.5)=\frac{7902.5}{k},$$

et

$$B=\frac{1}{k}(2144.3)=\frac{2144.3}{k}.$$

Alors

$$A+B=\frac{1}{k}(7902.5+2144.3)=10046.8\times\frac{1}{k}$$

Pour que $A+B<1$, il faut choisir $k>7902,5+2144,3=10046.8$.

Par suite $(\underline{u},\overline{u})=(\underline{v},\overline{v})=(t,4)$, est une paires de sous-sur solutions de (4.28) et par conséquent le problème (4.28) admet deux paire de quasi-solutions (u_*,u^*) et (v_*,v^*) tel que

$$t\leq u_*\leq u^*\leq 4 \text{ dans } \{0,1,2\}\cup[3,4].$$

et

$$t\leq v_*\leq v^*\leq 4 \text{ dans } \{0,1,2\}\cup[3,4].$$

et par conséquent d'aprés le Théorème 4.2, le problème (4.28) admet au moins une solution.

Chapitre 5

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques du second ordre avec conditions aux limites non locales.

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques du second ordre avec conditions aux limites non locales. Plus précisément, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u(s)\, \Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u(s)\, \Delta s, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $g_1, g_2 : \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^-$ deux fonctions continues et a_0 et a_1 sont des nombres réels positifs.

5.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires.

On considère le problème initial suivant

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) + Mu(t) = h\,(t)\,,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}\,(a) = \alpha \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}\,(\sigma(b)) = \beta, \end{cases} \tag{5.2}$$

Ou : $h : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, M est un nombre réel positif, a ,b, α et β sont des nombres réels.

Lemme 5.1 *(Principe de comparaison [16]) Soit* u *une fonction tels que* $u \in C^1\left(\left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ *et* $M > 0$ *et*

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) + Mu \leq 0,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) \leq 0, \\ u(\sigma^2\,(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma\,(b)) \leq 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

alors $u\,(t) \leq 0$*, pour tout* $t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}$.

5.3 Résultat principal

Dans cette section, on donne quelques définitions, on énonce et on montre nos résultats.

Définition 5.1 *On dit que* $(\underline{u}, \overline{u})$ *est une paire de sous-sur solution de (5.1) si*

(i) $(\underline{u}, \overline{u}) \in (C^1\,([a, \sigma\,(b)]_{\mathbb{T}}\,, \mathbb{R}))^2$.

$$(ii)\begin{cases} -\underline{u}^{\Delta\Delta}(t) \leq f(t, \underline{u}\,(t)),\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ -\overline{u}^{\Delta\Delta}(t) \geq f(t, \overline{u}\,(t)),\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\,, \\ \underline{u}(a) - a_0 \underline{u}^{\Delta}(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(a) - a_0 \overline{u}^{\Delta}(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\underline{u}(s)\Delta s. \\ \underline{u}(\sigma^2\,(b)) + a_1 \underline{u}(\sigma\,(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\overline{u}(s)\Delta s, \\ \overline{u}(\sigma^2\,(b)) + a_1 \overline{u}^{\Delta}(\sigma\,(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\underline{u}(s)\Delta s. \end{cases}$$

Définition 5.2 *La paire de fonctions* (u_*, u^*) *est dite quasi-solution de (5.1) si*

(i) $(u_*, u^*) \in (C^1([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}))^2$.

$$(ii) \begin{cases} -u_*^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u_*(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ -u^{*\Delta\Delta}(t) = f(t, u^*(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_*(a) - a_0 u_*^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u^*(s)\Delta s, \\ u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u^*(s)\Delta s. \\ u^*(a) - a_0 u^{*\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u_*(s)\Delta s, \\ u^*(\sigma^2(b)) + a_1 u^{*\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u_*(s)\Delta s, \end{cases}$$

Dans cette section, on impose la condition suivante sur la fonction f.

(H1) Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$x \longmapsto f(t,x) + Mx \text{ est croissante si } \underline{u} \leq x \leq \overline{u}.$$

On a le résultat suivant

Théorème 5.1 *Soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous-sur solutions de (5.1) telle que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$ *et supposon que l'hypothèse (H1) est satisfaite Alors le probleme (5.1) admet une paire de quasi-solution* (u_*, u^*) *telle que*

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Preuve: On pose $u_0 = \underline{u}$, $u_1 = \overline{u}$, et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} -u_{n+2}^{\Delta\Delta}(t) + Mu_{n+2}(t) = f(t, u_n(t)) + Mu_n(t), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u_{n+2}(a) - a_0 u_{n+2}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u_{n+1}(s)\Delta s. \\ u_{n+2}(\sigma^2(b)) + a_1 u_{n+2}^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u_{n+1}(s)\Delta s. \end{cases} \tag{5.4}$$

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Soit

$$w_0(t) := u_0(t) - u_2(t), \ t \in [a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (5.4) et en utilisant la Définition 5.1, on a

$$\begin{cases} -w_0^{\Delta\Delta}(t) + Mw_0(t) \leq 0,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_0(a) - a_0 w_0^{\Delta}(a) \leq 0, \\ w_0(\sigma^2(b)) + a_1 w_0^{\Delta}(\sigma(b)) \leq 0 \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 5.1, on a

$$w_0(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_0 \leq u_2 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.5}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_3 \leq u_1 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.6}$$

Posons par définition

$$w_1(t) = u_2(t) - u_1(t),\ t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (5.4), on a

$$\begin{cases} -w_1^{\Delta\Delta}(t) + Mw_1(t) \\ \leq f(t, u_0(t)) + Mu_0(t) - f(t, u_1(t)) - Mu_1(t),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(a) - a_0 w_0^{\Delta}(a) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\left(u_1(s) - u_0(s)\right)\Delta s, \\ w_1(\sigma^2(b)) + a_1 w_0^{\Delta}(\sigma(b)) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\left(u_1(s) - u_0(s)\right)\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{cases} -w_1^{\Delta\Delta}(t) + Mw_1(t) \leq 0,\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_1(a) - a_0 w_0^{\Delta}(a) \leq 0, \\ w_1(\sigma^2(b)) + a_1 w_0^{\Delta}(\sigma(b)) \leq 0 \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 5.1, on a

$$w_1(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}},$$

et par suite

$$u_2 \leq u_1 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.7}$$

Maintenant on va prouver que

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Pour ce faire posons par définition

$$w_3(t) = u_2(t) - u_3(t), \; t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (5.4), on a

$$\begin{cases} -w_3^{\Delta\Delta}(t) + Mw_3(t) \\ = f(t, u_0(t)) + Mu_0(t) - f(t, u_1(t)) - Mu_1(t), \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(a) - a_0 w_3^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\,(u_1(s) - u_2(s))\,\Delta s, \\ w_3(\sigma^2(b)) + a_1 w_3^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\,(u_1(s) - u_2(s))\,\Delta s, \end{cases}$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_1$ dans $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ et en utilisant l'hypothèse (H1), on a

$$\begin{cases} -w_3^{\Delta\Delta}(t) + Mw_3(t) \leq 0, \; t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ w_3(a) - a_0 w_3^{\Delta}(a) \leq 0, \\ w_3(\sigma^2(b)) + a_1 w_3^{\Delta}(\sigma(b)) \leq 0 \end{cases}$$

Alors d'aprés le Lemme 5.1, on a

$$w_3(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_2 \leq u_3 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.8}$$

En conclusion d'aprés (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8), on a

$$u_0 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_1 \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Supposons pour n fixé on a,

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

On pose par définition

$$w_{n+1}(t) := u_{2n+2}(t) - u_{2n+4}(t), \; t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}},$$

D'aprés (5.4), on a

$$\begin{cases} -w_{n+1}^{\Delta\Delta}(t) + Mw_{n+1}(t) \\ = f(t, u_{2n}(t)) + M(u_{2n}(t) - u_{2n+2}(t)) - f(t, u_{2n+2}(t)), \; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) - a_0 w_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\left(u_{2n+1}(s) - u_{2n+3}(s)\right)\Delta s, \\ w_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1 w_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\left(u_{2n+1}(s) - u_{2n+3}(s)\right)\Delta s, \end{cases}$$

D'aprés l'hypothèse de récurrence, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ dans $\left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}$ et d'aprés l'hypothèse (H1), on obtient

$$\begin{cases} -w_{n+1}^{\Delta\Delta}(t) + Mw_{n+1}(t) \leq 0, \; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ w_{n+1}(a) - a_0 w_{n+1}^{\Delta}(a) \leq 0. \\ w_{n+1}(\sigma^2(b)) + a_1 w_{n+1}^{\Delta}(\sigma(b)) \leq 0 \end{cases}$$

Alors par le Lemme 5.1, on a

$$w_{n+1}(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.9}$$

D'une façon similaire on montre que

$$u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}, \tag{5.10}$$

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+3} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}, \tag{5.11}$$

et

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{5.12}$$

D'aprés (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12), on a

$$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \text{ dans } [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve de **l'Etape 1** est terminée.

Etape 2: Les suites de fonctions $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformèment bornées sur $C^1([a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$ et les suites de fonctions $(u_{2n}^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}^{\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équicontinues sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve:

Sous étape 2.1 La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformèment bornée sur $C^1([a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$

C'est à dire

$$\exists \widetilde{C}_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \text{on a } \left\|u_{2n+1}^{\Delta}(t)\right\| = \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \left|u_{2n+1}^{\Delta}(t)\right| \leq \widetilde{C}_1.$$

Preuve de la sous étape 2.1

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}, \text{ on a } u_{2n+1}^{\Delta}(t) \leq \widetilde{C}_1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, puisque u_n est continue sur $[a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}}$ et u_n^{Δ} est continue sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, alors d'aprés le Théoreme 1.2 (voir [9]), il existe $\zeta_n, \nu_n \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$u_n{}^{\Delta}(\tau_n) \leq \frac{u_n\left(\sigma^2(b)\right) - u_n(a)}{\sigma^2(b) - a} \leq u_n{}^{\Delta}(\xi_n).$$

Comme

$$-u_{2n+1}^{\Delta\Delta}(t) + Mu_{2n+1}(t) = f(t, u_{2n-1}(t)) + Mu_{2n-1}(t), \text{ pour tout } t \in [a, b]_{\mathbb{T}},$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} u_{2n+1}^{\Delta}(t) &= u_{2n+1}^{\Delta}(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{t} (f(s, u_{2n-1}(s)) + Mu_{2n-1}(s) - Mu_{2n+1}(s))\Delta s, \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (5.13) \\ &\leq \frac{u_{2n+1}\left(\sigma^2(b)\right) - u_{2n+1}(a)}{\sigma^2(b) - a} + \int_{\tau_n}^{t} (f(s, u_{2n-1}(s)) + Mu_{2n-1}(s) - Mu_{2n+1}(s))\Delta s, \end{aligned}$$

Si on pose

$$\widetilde{C_1} = \frac{\overline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \underline{u}(a)}{\sigma^2(b) - a} + (M_1(f) + 2\max\{|\underline{u}|, |\overline{u}|\})(\sigma(b) - a),$$

où

$$M_1(f) = \max\{f(t, u), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}.$$

En conclusion, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} : u_{2n+1}^{\Delta}(t) \leq \widetilde{C_1}.$$

De la même façon, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} : u_{2n+1}^{\Delta}(t) \geq \widetilde{C_2},$$

où

$$\widetilde{C_2} = \frac{\underline{u}\left(\sigma^2(b)\right) - \overline{u}(a)}{\sigma^2(b) - a} + (m_1(f) + 2\min\{|\underline{u}|, |\overline{u}|\})(\sigma(b) - a),$$

avec

$$m_1(f) = \min\{f(t, u), t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$$

Maintenant si on pose par définition

$$C_1 = \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} (\widetilde{C_1}, -\widetilde{C_2}),$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} : \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \left|u^{\Delta}_{2n+1}(t)\right| \leq C_1.$$

Sous étape 2.2 La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformèment bornée sur $C^1([a, \sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$

C'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} : \left\|u^{\Delta}_{2n}(t)\right\| = \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \left|u^{\Delta}_{2n}(t)\right| \leq C_3$$

La preuve de la **Sous étape 2.2** est similaire à celle de la **Sous étape 2.1.**

Sous étape 2.3 La suite $(u^{\Delta}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Preuve de la Sous étape 2.3

L'orsqu'on remplace τ_n par s dans (5.17) on a

$$u^{\Delta}_{2n+1}(t) = u^{\Delta}_{2n+1}(s) + \int_s^t (f(s, u_{2n-1}(s)) + Mu_{2n-1}(s) - Mu_{2n+1}(s))\Delta s,\ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Soit $\epsilon > 0, t, s \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ tel que $t < s$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|u^{\Delta}_{2n+1}(s) - u^{\Delta}_{2n+1}(t)\right| \leq [M_1(f) + 2\max\{|\underline{u}|, |\overline{u}|\}]\,|s - t|$$

Si on pose

$$K_1 = [M_1(f) + 2\min\{|\underline{u}|, |\overline{u}|\}],$$

on obtient

$$\left|u^{\Delta}_{2n+1}(s) - u^{\Delta}_{2n+1}(t)\right| \leq K_1\,|s - t|$$

Alors si on choisit $|s - t| < \dfrac{\epsilon}{K_1 + 1}$, on a

$$\left|u^{\Delta}_{2n+1}(s) - u^{\Delta}_{2n+1}(t)\right| < \epsilon$$

C'est à dire la suite $(u^{\Delta}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

Sous étape 2.4 La suite $(u^{\Delta}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$.

La preuve de la **Sous étape 2.4** est similaire à celle de la **Sous étape 2.3**

Conclusion:

D'aprés la **Sous étape 2.1** et la **Sous étape 2.3** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$ et $(u^{\Delta}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. Alors d'aprés le Théorème d'Ascoli-Arzéla il existe une sous suite $(u_{2n_j+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$.

Soit

$$u=\lim_{n_j\to+\infty}u_{2n_j+1}.$$

Alors

$$u^{\Delta}=\lim_{n_j\to+\infty}u^{\Delta}_{2n_j+1}.$$

Or d'aprés l'**Etape 1,** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge vers une fonction qu'on la note u^* et par l'unicité de la limite on a $u=u^*$ et la suite (u_{2n+1}) converge dans $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$ vers u^*.

De la même façon on a d'aprés la **Sous étape 2.2** et la **Sous étape 2.4** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$ et $(u^{\Delta}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. Alors d'aprés le Théorème d'Ascoli-Arzéla il existe une sous suite $(u_{2n_j})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$.

Soit

$$v=\lim_{n_j\to+\infty}u_{2n_j}.$$

Alors

$$v^{\Delta}=\lim_{n_j\to+\infty}u^{\Delta}_{2n_j}.$$

Or d'aprés l'**Etape 1,** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers une fonction qu'on la note u_* et par l'unicité de la limite on a $v=u_*$ et la suite (u_{2n}) converge dans $C^1([a,\sigma^2(b)]_{\mathbb{T}})$ vers u_*.

Soit $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$, on a

$$-u^{\Delta}_{2n+1}(t)=u^{\Delta}_{2n+1}(a)+\int_a^t(f(s,u_{2n-1}(s))+Mu_{2n-1}(s)-Mu_{2n+1}(s))\Delta s,\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$$

quand $n\to+\infty$, la fonction $f(s,u_{2n-1}(s))+Mu_{2n-1}(s)-Mu_{2n+1}(s)$ tend vers $f(s,u^*(s))$.

D'autre part on a

$$\exists K_2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [a,b]_{\mathbb{T}} : |f(s, u_{2n-1}(s)) + Mu_{2n-1}(s) - Mu_{2n+1}(s))| \leq K_2$$

Alors d'aprés le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$-u^{*\Delta}(t) = u^{*\Delta}(a) + \int_a^t (f(s, u^*(s))\Delta s, \text{ pour tout } t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$$

Alors

$$-u^{*\Delta\Delta}(t) = f(t, u^*(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \tag{5.14}$$

D'une façon similaire, on montre que

$$-u_*^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u_*(t)), t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \tag{5.15}$$

De même par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} u^*(a) - a_0 u^{*\Delta}(a) &= \textstyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u_*(s) \Delta s, \\ u^*(\sigma^2(b)) + a_1 u^{*\Delta}(\sigma(b)) &= \textstyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u_*(s) \Delta s \end{aligned} \tag{5.16}$$

et

$$\begin{aligned} u_*(a) - a_0 u_*^{\Delta}(a) &= \textstyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u^*(s) \Delta s, \\ u_*(\sigma^2(b)) + a_1 u_*^{\Delta}(\sigma(b)) &= \textstyle\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u^*(s) \Delta s \end{aligned} \tag{5.17}$$

En conclusion d'aprés (5.14), (5.15),(5.16) et (5.17) il résult que (u_*, u^*) est une paire de quasi-solutions de (5.1).

La preuve du Théorème 5.1 est achevée. ■

Il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur f et g_1, g_2, pour que $u^* = u_*$ et par conséquent le problème (5.1) admet au moins une solution.

Sur la fonction f et la fonction g_i,$i = 1, 2$, on impose les conditions supplémentaires suivantes

(H2) La fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est décroissante si $\underline{u} \leq x \leq \overline{u}$.

(H3) $-\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)\Delta s < 1$.

(H4) $-\int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)\Delta s < 1$

Théorème 5.2 *Supposons que les hypothèse* (Hi) $(i = 1, 2, 3)$ *sont satisfaites et soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous-sur solutions de (5.1) telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* $[a, \sigma(b)]$*. Alors le problème (5.1) admet au moins une solution.*

Preuve: D'aprés le Théorème 5.1, le problème (5.1) admet une paire de quasi-solution (u_*, u^*) telle que

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u} \text{ dans } \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.18}$$

On pose par définition

$$z(t) = u^*(t) - u_*(t), \, t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$z(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \tag{5.19}$$

Maintenant, on va montrer que

$$z(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}.$$

D'aprés (H1), on a

$$-z^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u^*(t)) - f(t, u_*(t)) \leq 0., \; t \in [a, b]_T, \tag{5.20}$$

Alors on distingue trois cas

Cas 1:

$$z(t) = \alpha, \; \text{pour tout } t \in \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}. \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$z(a) - a_0 z^{\Delta}(a) = -\int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) z(s) \Delta s.$$

Alors on a

$$\alpha(1 + \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) z(s) \Delta s) = 0,$$

et en utilisant l'hypothése (H3) on obtient $\alpha = 0$.

Par suite

$$z\left(t\right) = 0,\ \text{pour tout}\ t \in \left[a, \sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Cas 2:

$$\max_{t \in [a, \sigma^{2}(b)]} z\left(t\right) = z(a).$$

Comme

$$z\left(a\right) - a_{0} z^{\Delta}\left(a\right) = -\int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{1}(s) z(s) \Delta s$$

et

$$z^{\Delta}\left(a\right) = 0$$

Alors on a,

$$\begin{aligned} z\left(a\right) &= -\int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{1}(s) z(s) \Delta s \\ &\leq z\left(a\right) \int_{a}^{\sigma^{2}(b)} \left(-g_{1}(s)\right) \Delta s, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\left(1 + \int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{1}(s) \Delta s\right) z\left(a\right) \leq 0$$

et en utilisant l'hypothése (H3), on obtient $z\left(a\right) \leq 0$.

Par suite

$$z\left(t\right) \leq 0,\ \text{pour tout}\ t \in \left[a, \sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

et d'aprés (5.19), on obtient

$$z\left(t\right) = 0,\ \text{pour tout}\ t \in \left[a, \sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Cas 3:

$$\max_{t \in [a, \sigma^{2}(b)]} z\left(t\right) = z(\sigma^{2}\left(b\right)),\ \text{pour tout}\ t \in \left[a, \sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

Comme

$$z\left(\sigma^{2}\left(b\right)\right) + a z^{\Delta}\left(\sigma\left(b\right)\right) = -\int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{2}(s) z(s) \Delta s,$$

et

$$z^{\Delta}\left(\sigma\left(b\right)\right)=0$$

Alors on a,

$$\begin{aligned} z\left(\sigma^{2}\left(b\right)\right) &= -\int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{2}(s)z(s)\Delta s \\ &\leq z\left(\sigma^{2}\left(b\right)\right)\int_{a}^{\sigma^{2}(b)}(-g_{2}(s))\Delta s, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$(1+\int_{a}^{\sigma^{2}(b)} g_{1}(s)\Delta s)z\left(\sigma^{2}\left(b\right)\right)\leq 0$$

et en utilisant l'hypothése (H4) on obtient $z\left(\sigma^{2}\left(b\right)\right)\leq 0$.
Alors

$$z\left(t\right)\leq 0,\ \text{pour tout } t\in\left[a,\sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

et d'aprés (5.19), il résulte que

$$z\left(t\right)=0,\ \text{pour tout } t\in\left[a,\sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

En conclusion: dans tout les cas, on a

$$z\left(t\right)=0,\ \text{pour tout } t\in\left[a,\sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

C'est à dire,

$$u^{*}\left(t\right)=u_{*}(t),\ \text{pour tout } t\in\left[a,\sigma^{2}\left(b\right)\right]_{\mathbb{T}}.$$

et par conséquent le problème (5.1) admet au moins une solution. ■

5.4 Application

Dans cette section, on donne un exemple d'application

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f(t,u),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{T} \in [0,8] \cup \{9,10,11,12\} \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u(s)\, \Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u(s)\, \Delta s, \end{cases} \tag{5.21}$$

où

$$f(t,u) = -2u + \sin u(t) + e^{-t} - 2,\ g_1(s) = -k_1 s \text{ et } g_2(s) = -k_2 s^2$$

On pose par définition $(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (-L, L)$, où L est un nombre réel strictement positif pour tout $t \in \mathbb{T}$.

$(\underline{u}, \overline{u})$ est une sous-sur solution de (5.21) si on a

$$\begin{cases} -(L)^{\Delta\Delta}(t) \le f(t,-L), \\ -(L)^{\Delta\Delta}(t) \ge f(t,L), \\ -L \le \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)(+L)\, \Delta s, \\ -L \le \int_a^{\sigma^2(b)} \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)(L)\, \Delta s, \\ L \ge \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s)(-L)\, \Delta s, \\ L \ge \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s)(-L)\, \Delta s, \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} 0 \le 2L + \sin(-L) + e^{-t} - 2, \\ 0 \ge -2L + \sin L + e^{-t} - 2, \\ -1 \le \int_0^8 (k_1 s) ds + \int_9^{14} (k_1 s) \Delta s, \\ -1 \le \int_0^8 \left(k_2 s^2\right) ds + \int_9^{14} \left(k_2 s^2\right) \Delta s \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} 0 \leq 2L + \sin(-L) + e^{-t} - 2, \\ 0 \geq -2L + \sin(L) + e^{-t} - 2, \\ -1 \leq 32k_1 + k_1 \sum\limits_{i=9}^{13} i = 8k_1 + 55k_1 = 63k_1, \\ -1 \leq \frac{512}{3}k_2 + k_2 \sum\limits_{i=9}^{13} i^2 = \dfrac{512}{3}k_2 + 615k_2 = \frac{2357}{3}k_2, \end{cases}$$

Alors si on choisit par exemple $L \geq 3$, et $k_1 > \dfrac{1}{63}, k_2 > \dfrac{3}{2357}$ on obtient $(\underline{u}, \overline{u})$ une sous-sur solution de (5.21).

et par conséquent d'aprés le Théorème 5.1, il s'ensuit que le problème (5.21) admet au moins une solution.

Chapitre 6

Etude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques d'ordre 4 avec conditions aux limites non locales.

6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(4)}}(t) = f\left(t, u, u^{\Delta^{(2)}}\right), & t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)u(s)\Delta s, \\ u\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 u^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)u(s)\Delta s, \\ u^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 u^{\Delta^{(3)}}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)u^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \\ u^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 u^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)u^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \end{cases} \tag{6.1}$$

où $[a,b]_{\mathbb{T}}$ est un intervalle d'une échelle de temps $\mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $h_1, h_2 : \left[a, \sigma^4(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$, $h_3, h_4 : \left[a, \sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues et a_1, a_2 a_3 et a_4 sont des nombres réels positifs et a et b sont des nombres réels.

6.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires.

Définition 6.1 *Pour une fonction $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ la $\Delta-$dérivée seconde $f^{\Delta^{(2)}}$ existe si f^{Δ} est $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^{\kappa^2}=(\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$, où $f^{\Delta^{(2)}}(t)=(f^{\Delta})^{\Delta}(t)$.*
Dune manière similaire, on peut définir inductivement les $\Delta-$dérivée d'ordre suppèerieur $f^{\Delta^{(n)}}$. Pour la suite, on notera $C^k_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, l'ensemble des foncctions k fois $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^{\kappa^k}$ telles que $f^{\Delta^{(k)}}$ est rd-continue sur $\mathbb{T}$. Pout $\mathbb{T}$ compact, cet espace est muni de la norme

$$\|x\|_{C^k_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})}=\max\left\{\|x\|_0\,,\left\|x^{\Delta}\right\|_0,...,\left\|x^{\Delta^{(k)}}\right\|_0\right\},\ \text{où}\ \left\|x^{\Delta^{(i)}}\right\|_0=\sup_{t\in\mathbb{T}^{(n^i)}}\|x(t)\|\,.$$

On note $\sigma^2(t)=\sigma(\sigma(t))$ et $\rho^2(t)=\rho(\rho(t))$, et par conséquent on définit $\sigma^n(t)$, et $\rho^n(t)$ pour $n\in\mathbb{N}$ de la même manière.
Par convention on pose $\sigma^0(t)=\rho^0(t)=t$, $f^{\Delta^{(0)}}=f$ et : $\mathbb{T}^{\kappa^0}=\mathbb{T}$.

Notation:

Dans ce chapitre on note par D l'ensemble suivant

$$D=\{u\in C^2_{rd}([a,\sigma^4(b)],\mathbb{R}),u^{\Delta^{(2)}}\in C^2_{rd}([a,\sigma^2(b)],\mathbb{R})\}.$$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases}-u^{\Delta^{(2)}}(t)=g\left(t\right),\ t\in[a,b],\\ u\left(a\right)-a_1u^{\Delta}\left(a\right)=r_1,\\ u\left(\sigma^2(b)\right)+a_2u^{\Delta}\left(\sigma(b)\right)=r_2,\end{cases}\tag{6.2}$$

où $g:[a,\sigma(b)]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, a_1 et a_2 sont deux nombres réels positifs et r_1 et r_2 sont des nombres réels.
Alors on a le résultat suivant

Lemme 6.1 *[?] le problème (6.2) admet une unique solution donnée par*

$$u(t) = \int_a^{\sigma(b)} G(t,s)\, g(s)\, \Delta s - \frac{t - a_2 - \sigma(b)}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2} r_1 + \frac{t + a_1 - a}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2} r_2,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} (t + a_1 - a)\,\dfrac{\sigma(b) - s + a_2}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2}, & a \leq t \leq s, \\ (s + a_1 - a)\,\dfrac{\sigma(b) - t + a_2}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2}, & t \leq s \leq \sigma(b). \end{cases}$$

Maintenant on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(4)}}(t) = g_2(t), \ t \in [a,b], \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) = r_1, \\ u\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 u^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = r_2, \\ u^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 u^{\Delta^{(3)}}(a) = r_3, \\ u^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 u^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = r_4, \end{cases} \tag{6.3}$$

où $g_2 : [a, \sigma(b)] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a_3 et a_4 sont deux nombres reéls positifs et r_3 et r_4 sont deux nombres reéls.

Alors on a le résultat suivant

Corollaire 6.1 *Le problème (6.3) admet une unique solution donnée par:*

$$u(t) = -\int_a^{\sigma(b)} G(t,s)\, y(s)\, \Delta s - \frac{t - a_2 - \sigma(b)}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2} r_1 + \frac{t + a_1 - a}{\sigma(b) - a + a_1 + a_2} r_2,$$

où

$$y(t) = -\int_a^{\sigma(b)} G(t,s)\, g_2(s)\, \Delta s - \frac{t - a_4 - \sigma(b)}{\sigma(b) - a + a_3 + a_4} r_3 + \frac{t + a_3 - a}{\sigma(b) - a + a_3 + a_4} r_4.$$

Preuve: On pose par définition

$$y(t) = u^{\Delta^{(2)}}(t)$$

y est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} y^{\Delta^{(2)}}(t) = g_2(t), \ t \in [a,b], \\ y(a) - a_3 y^{\Delta}(a) = r_3, \\ y\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 y^{\Delta}(\sigma(b)) = r_4 \end{cases} \tag{6.4}$$

D'après le Lemme 6.1, il est clair que le problème (6.4) admet une unique solution donnée par

$$y(t) = -\int_a^{\sigma(b)} G(t,s)\, g_2(s)\, \Delta s - \frac{t - d_0 - \sigma(b)}{\sigma(b) - a + c_0 + d_0} r_3 + \frac{t + c_0 - a}{\sigma(b) - a + c_0 + d_0} r_4$$

Maintenant puisque $u^{\Delta^{(2)}}(t) = y(t)$, alors u est une solution du problème:

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(2)}}(t) = y(t), \ t \in [a,b], \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) = r_1, \\ u\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 u^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = r_2, \end{cases} \tag{6.5}$$

D'après le Lemme 6.1, le problème (6.5) admet une unique solution définie par:

$$u(t) = -\int_a^{\sigma^3(b)} G(t,s)\, y(s)\, \Delta s - \frac{t - a_2 - \sigma^3(b)}{\sigma^3(b) - a + a_1 + a_2} r_1 + \frac{t + a_1 - a}{\sigma^3(b) - a + a_1 + a_2} r_2$$

■

Lemme 6.2 *Supposons que u satisfait*

$$\begin{cases} -u^{\Delta^{(2)}}(t) \geq 0, \qquad t \in [a,b], \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) \geq 0, \\ u\left(\sigma^2(b)\right) + a_2 u^{\Delta}(\sigma(b)) \geq 0, \end{cases}$$

alors $u(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: Prenons $g(t) \geq 0$ et $r_1, r_2 \geq 0$ dans (6.2). Alors d'après le Lemme 6.1**,** on obtient que $u(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. ■

Lemme 6.3 ***(Principe du comparaison)***

Soit u une fonction tel que: $u \in D$ et

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(4)}}(t) \leq 0,\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_1 u^{\Delta}(a) \leq 0, \\ u\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 u^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq 0, \\ u^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 u^{\Delta^{(3)}}(a) \geq 0, \\ u^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 u^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \geq 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

alors $u(t) \leq 0$ et $u^{\Delta^{(2)}}(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

Preuve: On pose par définition

$$y = u^{\Delta^{(2)}}(t)$$

Alors $y \in D$ et par (6.6), on a

$$\begin{cases} y^{\Delta^{(2)}}(t) \leq 0,\ \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ y(a) - a_3 y^{\Delta}(a) \geq 0, \\ y\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 y^{\Delta}\left(\sigma^2(b)\right) \geq 0 \end{cases}$$

D'après le Lemme 6.2, on a

$$y(t) \geq 0 \ \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}},$$

Ce qui donne

$$u^{\Delta^{(2)}}(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}. \tag{6.7}$$

Par suite si on pose par définition

$$z = u$$

D'aprés (6.6) et (6.7), on obtient

$$\begin{cases} z^{\Delta^{(2)}}(t) \leq 0,\ \ a < t < \sigma^2(b). \\ z(a) - a_1 z^{\Delta}(a) \leq 0 \\ z\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 z^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq 0 \end{cases}$$

Par suite d'après le Lemme 6.2, il résulte que

$$z\left(t\right) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

C'est à dire,

$$u\left(t\right) \leq 0, \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

■

6.3 Définitions et résultat principal

Dans cette section on donne quelques définitions, on énonce et on montre notre résultat principal.

Définition 6.2 *On dit que $\alpha \in D$ est une sur solution du problème (6.1) si*

$$\begin{cases} \alpha^{\Delta^{(4)}}(t) \geq f\left(t, \alpha, \alpha^{\Delta^{(2)}}\right), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \alpha\left(a\right) - a_1 \alpha^{\Delta}\left(a\right) \geq \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)\alpha(s)\Delta s, \\ \alpha\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 \alpha^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \geq \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)\alpha(s)\Delta s, \\ \alpha^{\Delta^{(2)}}\left(a\right) - a_3 \alpha^{\Delta^{(3)}}\left(a\right) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)\alpha^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \\ \alpha^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 \alpha^{\Delta^{(3)}}\left(\sigma(b)\right) \leq \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)\alpha^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s \end{cases}$$

Définition 6.3 *On dit que $\beta \in D$ est une sous solution du problème (6.1) si*

$$\begin{cases} \beta^{\Delta^{(4)}}(t) \leq f\left(t, \beta, \beta^{\Delta(2)}\right), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \beta\left(a\right) - a_1 \beta^{\Delta}\left(a\right) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)\beta(s)\Delta s, , \\ \beta\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 \beta^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)\beta(s)\Delta s, , \\ \beta^{\Delta^{(2)}}\left(a\right) - a_3 \beta^{\Delta^{(3)}}\left(a\right) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)\beta^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, , \\ \beta^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 \beta^{\Delta^{(3)}}\left(\sigma(b)\right) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)\beta^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \end{cases}$$

Théorème 6.1 *Supposons que le problème (6.1) admet une sur solution α et une sous solution β satisfaisant à*

$$\beta\left(t\right) \leq \alpha\left(t\right) \ \text{ et } \beta^{\Delta^{(2)}}\left(t\right) \geq \alpha^{\Delta^{(2)}}\left(t\right), \ \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Si de plus $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfait aux hypothèses suivantes:

(H$_1$) *$f(t, u_2, v) - f(t, u_1, v) \geq 0$ pour $\beta(t) \leq u_1(t) \leq u_2(t) \leq \alpha(t)$,*

$\alpha^{\Delta^{(2)}}(t) \leq v(t) \leq \beta^{\Delta^{(2)}}(t)$ pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$.

(H$_2$) *$f(t, u, v_2) - f(t, u, v_1) \leq 0$ pour $\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$,*

$\alpha^{\Delta^{(2)}}(t) \leq v_1(t) \leq v_2(t) \leq \beta^{\Delta^{(2)}}(t)$ pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$,

alors il existent deux suites monotones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et croissante, respectivement, sachant que $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$. qui convergent uniformément vers les solutions extrémales du problème aux limites (6.1).

Preuve: On définit les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1}^{\Delta(4)} = f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta(2)}\right), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \alpha_{n+1}(a) - a_1\alpha_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)\alpha_n(s)\Delta s \\ \alpha_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_{n+1}^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)\alpha_n(s)\Delta s, \\ \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \\ \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta \\ \beta_{n+1}^{\Delta^{(4)}} = f\left(t, \beta_n, \beta_n^{\Delta^{(2)}}\right), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \beta_{n+1}(a) - a_1\beta_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)\beta_n(s)\Delta s \\ \beta_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\beta^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)\beta_n(s)\Delta s, \\ \beta_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\beta_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)\beta_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \\ \beta_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\beta_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)\beta_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s \end{cases}$$

Notons que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Maintenant on va montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale du problème (6.1).

La preuve est donnée en plusieures étapes

Etape 1: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t) \ , \quad 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$$

Pour $n=0$, on a

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_0^{\Delta^{(2k)}}(t) = (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t) \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Supposons que pour un $n>1$ fixé, on a

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t) \quad \text{pout tout} \quad 0 \leq k \leq 1 \text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t) \ \text{ pout tout } 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

On a

$$\begin{cases} \left(\alpha_{n+1}^{\Delta^{(4)}} - \alpha^{\Delta^{(4)}}\right)(t) \leq f\left(t, \alpha_n(t), \alpha_n^{\Delta^{(2)}}(t)\right) - f\left(t, \alpha(t), \alpha^{\Delta^{(2)}}(t)\right), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ (\alpha_{n+1} - \alpha)(a) - a_1\left(\alpha_{n+1}^{\Delta} - \alpha^{\Delta}\right)(a) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)(\alpha_n(s) - \alpha(s))\Delta s, \\ (\alpha_{n+1} - \alpha)\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\left(\alpha_{n+1}^{\Delta} - \alpha^{\Delta})(\sigma^3(b)\right) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)(\alpha_n(s) - \alpha(s))\Delta s, \\ (\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}} - \alpha^{\Delta^{(2)}})(a) - a_3(\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}} - \alpha^{\Delta^{(3)}})(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)(\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(s) - \alpha^{\Delta^{(2)}}(s))\Delta s, \\ (\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}} - \alpha^{\Delta^{(2)}})\left(\sigma^2(b)\right) + a_4(\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}} - \alpha^{\Delta^{(3)}})(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)(\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(s) - \alpha^{\Delta^{(2)}}(s))\Delta s \end{cases}$$

D'après les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$**,** on a

$$\begin{aligned} & f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\left(t, \alpha, \alpha^{\Delta^{(2)}}\right) \\ = \ & f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\left(t, \alpha, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) + f\left(t, \alpha, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\left(t, \alpha, \alpha^{\Delta^{(2)}}\right) \\ \leq \ & 0 \end{aligned}$$

Comme

$$\int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)(\alpha_n(s) - \alpha(s))\Delta s \leq 0,$$

$$\int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)(\alpha_n(s) - \alpha(s))\Delta s \leq 0,$$

$$\int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)(\alpha_n^{\Delta(2)}(s) - \alpha^{\Delta(2)}(s))\Delta s \geq 0,$$

$$\int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)(\alpha\Delta_n^{(2)}(s) - \alpha^{\Delta(2)}(s))\Delta s \geq 0.$$

On obtient

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^{\Delta^{(4)}}(t) \leq \alpha^{\Delta^{(4)}}(t)\,, \; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \alpha_{n+1}(a) - a_1\alpha_{n+1}^{\Delta}(a) \leq \alpha(a) - a_1\alpha^{\Delta}(a)\,, \\ \alpha_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_{n+1}^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq \alpha\left(\sigma^4(b)\right) - a_2\alpha^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right)\,, \\ \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a) \geq \alpha^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\alpha^{\Delta^{(3)}}(a)\,, \\ \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \geq \alpha^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) - a_4\alpha^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b))\,. \end{cases}$$

D'après le Lemme 6.3, on a

$$\alpha_{n+1}(t) \leq \alpha(t) \;\text{ et }\; \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(t) \geq \alpha^{\Delta^{(2)}}(t)\,, \;\text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

De la même manière, on montre que

$$\alpha_{n+1} \geq \beta \;\text{ et }\; \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}} \leq \beta^{\Delta^{(2)}}.$$

Par suite on a

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t) \;\text{, pour tout } 0 \leq k \leq 1 \;\text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Etape 2: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(-1)^k \beta^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \beta_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha^{\Delta^{(2k)}}(t)\,, \;\text{pour tout } 0 \leq k \leq 1 \;\text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve est similaire à celle de l'**Etape 1**.

Etape 3: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t)\,, \;\text{pour tout } 0 \leq k \leq 1 \;\text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Pour $n=0$, on a

$$\begin{cases} \alpha_1^{\Delta^{(4)}} - \alpha_0^{\Delta^{(4)}} \leq f\ \left(t,\alpha,\alpha^{\Delta^{(2)}}\right) - f\ \left(t,\alpha,\alpha^{\Delta^{(2)}}\right) = 0, \\ (\alpha_1-\alpha)(a) - a_1(\alpha_1^{\Delta} - \alpha^{\Delta})(a) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)(\alpha_0(s)-\alpha_0(s))\Delta s = 0, \\ (\alpha_1-\alpha)\left(\sigma^4(b)\right) + a_2(\alpha_1^{\Delta} - \alpha^{\Delta})\left(\sigma^3(b)\right) \leq \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)(\alpha_0(s)-\alpha_0(s))\Delta s = 0, \\ (\alpha_1^{\Delta^{(2)}} - \alpha^{\Delta^{(2)}})(a) - a_3(\alpha_1^{\Delta^{(3)}} - \alpha^{\Delta^{(3)}})(a) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)(\alpha_0^{\Delta^{(2)}}(s) - \alpha_0^{\Delta^{(2)}}(s))\Delta s = 0, \\ (\alpha_1^{\Delta^{(2)}} - \alpha_0^{\Delta^{(2)}})\left(\sigma^2(b)\right) + a_4(\alpha_1^{\Delta^{(3)}} - \alpha^{\Delta^{(3)}})(\sigma(b)) \geq \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)(\alpha_0^{\Delta^{(2)}}(s) - \alpha_0^{\Delta^{(2)}}(s))\Delta s = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} \alpha_1^{\Delta^{(4)}}(t) \leq \alpha_0^{\Delta^{(4)}}(t)\,,\ \ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \alpha_1(a) - a_1\alpha_1^{\Delta}(a) \leq \alpha_0(a) - \alpha_1^{\Delta}(a)\,, \\ \alpha_1\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_1^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq \alpha_0\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_0^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right), \\ \alpha_1^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\alpha_1^{\Delta^{(3)}}(a) \geq \alpha_0^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3\alpha_0^{\Delta^{(3)}}(a)\,, \\ \alpha_1^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_1^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \geq \alpha_0^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_0^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \end{cases} \tag{6.8}$$

D'après (6.8) et le Lemme 6.3, on obtient

$$\alpha_1(t) \leq \alpha_0(t)\ \text{ et } \alpha_1^{\Delta^{(2)}}(t) \geq \alpha_0^{\Delta^{(2)}}(t)\,,\text{ pour tout } t\in[a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Suppoosons que pour un $n>1$ fixé, on a

$$(-1)^k\,\alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k\,\alpha_{n-1}^{\Delta^{(2k)}}(t)\ \text{ pour tout } 0\leq k\leq 1 \text{ et } t\in[a,b]_{\mathbb{T}},$$

et montrons que

$$(-1)^k\,\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k\,\alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t)\ \text{ pour tout } 0\leq k\leq 1 \text{ et } t\in[a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Par définition de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$**,** on a

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{\Delta^{(4)}} - \alpha_n^{\Delta^{(4)}} &= f\left(t,\alpha_n,\alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\left(t,\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}^{\Delta^{(2)}}\right) \\ &= f\left(t,\alpha_n,\alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\left(t,\alpha_{n-1},\alpha^{\Delta^{(2)}}\right) + f\left(t,\alpha_{n-1},\alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) - f\ \left(t,\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}^{\Delta^{(2)}}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\alpha_{n+1}^{\Delta^{(4)}} \leq \alpha_n^{\Delta^{(4)}}. \tag{6.9}$$

De plus on a

$$\left(\alpha_{n+1}(a) - a_1\alpha_{n+1}^{\Delta}(a)\right) - \left(\alpha_n(a) - a_1\alpha_n^{\Delta}(a)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)(\alpha_n(s) - \alpha_{n-1}(s))\Delta s \leq 0.$$

Alors

$$\left(\alpha_{n+1}(a) - a_1\alpha_{n+1}^{\Delta}(a)\right) \leq \left(\alpha_n(a) - a_1\alpha_n^{\Delta}(a)\right). \tag{6.10}$$

De même, on montre que

$$\alpha_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_{n+1}^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \leq \alpha_n\left(\sigma^4(b)\right) + a_2\alpha_n^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \tag{6.11}$$

$$\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) + a_4\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a) \geq \alpha_n^{\Delta^{(2)}}(a) + a_4\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(a) \tag{6.12}$$

$$\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \geq \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \tag{6.13}$$

D'après (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) et le Lemme 6.3, on obtient

$$\alpha_{n+1}(t) \leq \alpha(t) \text{ et } \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(t) \geq \alpha^{\Delta^{(2)}}(t), \text{ pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Ce qui entraîne que

$$(-1)^k \alpha_{n+1}^{\Delta^{(2k)}}(t) \leq (-1)^k \alpha_n^{\Delta^{(2k)}}(t) \ \text{, pour tout } 0 \leq k \leq 1 \ \text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Etape 4: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^k \beta_{n+1}^{\Delta^{(2k)}}(t) \geq (-1)^k \beta_n^{\Delta^{(2k)}}(t), \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 1 \text{ et } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

La preuve est similaire à celle de **l'Etape 3**.

Etape 5: La suite de fonction $(\alpha_n^{\Delta^{(3)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformèment bornée

C'est à dire

$$\exists C_1>0,\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\,,\text{on a }\left\|\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t)\right\|=\max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}}\left|\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t)\right|\leq C_1.$$

Preuve

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, puisque $\alpha_n^{\Delta^{(2)}}$est continue sur D et α_n^{Δ} est continue sur $[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$, alors d'aprés le Théoreme 1.2 [9], il existe $\zeta_n,\nu_n\in\left[a,\sigma^2(b)\right]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\alpha_n{}^{\Delta^{(3)}}(\tau_n)\leq\frac{\alpha_n^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right)-\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(a)}{\sigma^2(b)-a}\leq\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(\xi_n).$$

Comme

$$\alpha_n{}^{\Delta^{(4)}}(t)=f(t,\alpha_n,\alpha_n^{\Delta^{(2)}}),\ \text{pour tout } t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,,$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\alpha_n{}^{\Delta^{(3)}}(t)&=\alpha_n{}^{\Delta^{(3)}}(\tau_n)+\int_{\tau_n}^{t}(f(s,\alpha_n,\alpha_n^{\Delta^{(2)}})\Delta s,\ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\\&\leq\frac{\alpha_n^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right)-\alpha_n^{\Delta^{(2)}}(a)}{\sigma^2(b)-a}+\int_{\tau_n}^{t}(f(s,\alpha_n,\alpha_n^{\Delta^{(2)}})\Delta s.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Si on pose

$$\widetilde{C_1}=\frac{\beta^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right)-\alpha^{\Delta^{(2)}}(a)}{\sigma^2(b)-a}+(\sigma^4(b)-a)\max\{f(t,u,u^{\Delta^{(2)}}),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,,\alpha^{\Delta^{(2)}}\leq u^{\Delta^{(2)}}\leq\beta^{\Delta^{(2)}}\},$$

on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}:\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t)\leq\widetilde{C}_1.$$

De la même façon, on montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}:\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t)\geq\widetilde{C}_2,$$

où

$$\widetilde{C_2}=\frac{\alpha^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right)-\beta^{\Delta^{(2)}}(a)}{\sigma^2(b)-a}+(\sigma^4(b)-a)\min\{f(t,u,u^{\Delta^{(2)}}),t\in[a,b]_{\mathbb{T}}\,,\alpha^{\Delta^{(2)}}\leq u^{\Delta^{(2)}}\leq\beta^{\Delta^{(2)}}\},$$

Maintenant, si on pose par définition

$$C_1 = \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} (\widetilde{C_1}, -\widetilde{C_2})$$

On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}} : \max_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \left|\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t)\right| \leq C_1.$$

Etape 6 La suite $(\beta_n^{\Delta^{(3)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformèment bornée

La preuve de la l'**Etape 6** est similaire à la l'**Etape 5.**

Etape 7 La suite $(\alpha_n^{\Delta^{(3)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur D.

Comme f est continue alors

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], \ \left|f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right)\right| \leq K,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \left|\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(t) - \alpha_n^{\Delta^{(3)}}(s)\right| &= \left|\int_s^t \alpha_n^{\Delta^{(4)}}(\tau)\,\Delta\tau\right| \\ &= \left|\int_s^t f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right)\Delta\tau\right| \\ &\leq K\,|t-s| \end{aligned}$$

Etape 8 La suite $(\beta_n^{\Delta^{(3)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur D.

La preuve de la l'**étape 8** est similaire à la l'**étape 7**.

Maintenant on va montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution maximale du problème (6.1).

D'après les **Etapes 1, 5** et **7** et puisque f est continue, $\left(\alpha_n^{\Delta^{(3)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée et continue. Donc il existe une sous suite $\left(\alpha_{n_j}\right)$.

Posons

$$\alpha^* := \lim_{n_j \to +\infty} \alpha_{n_j}$$

Or d'après les **Etapes 1** et **3,** il est claire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_*. Ce qui implique que: $\alpha_* = \alpha^*$ et par suite notre suite converge vers α_*.

On a

$$\alpha_n^{\Delta^{(3)}}(x) = \alpha_n^{\Delta^{(3)}}(a) + \int_a^x f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) \Delta t$$

Comme

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[a, \sigma^4(b)\right], \quad \left| f\left(t, \alpha_n, \alpha_n^{\Delta^{(2)}}\right) \right| \leq K,$$

alors, le théorème de convergence dominée de Lebesgue [9] entraîne que

$$\alpha_*^{\Delta^{(3)}}(x) = \alpha_*^{\Delta^{(3)}}(a) + \int_0^x f\left(t, \alpha_*, \alpha_*^{\Delta^{(2)}}\right) \Delta t.$$

Comme f est continue, alors on a

$$\alpha_*^{\Delta^{(4)}}(t) = f\left(t, \alpha_*, \alpha_*^{\Delta^{(2)}}\right) \text{ pour tout } t \in [a, b] \tag{6.15}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\alpha_{n+1}(a) - a_1 \ \alpha_{n+1}^{\Delta}(a)\right) = \alpha_*(a) - a_1 \alpha_*^{\Delta}(a) \tag{6.16}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\alpha_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 \alpha_{n+1}^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right)\right) = \alpha_*\left(\sigma^4(b)\right) - a_2 \alpha_*^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) \tag{6.17}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 \alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a)\right) = \alpha_*^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 \alpha_*^{\Delta^{(3)}}(a) \tag{6.18}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\alpha_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right)\right) - a_4 \alpha_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \alpha_*^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) - a_4 \alpha_*^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) \tag{6.19}$$

D'après (6.15),(6.16),(6.17),(6.18) et (6.19), on obtient que α_* est une solution du problème (6.1).

Maintenant on montre que si $\widetilde{\alpha}$ est une autre solution de (6.1) sachant que $\beta \leq \widetilde{\alpha} \leq \alpha$ et $\alpha^{\Delta^{(2)}} \leq \widetilde{\alpha}^{\Delta^{(2)}} \leq \beta^{\Delta^{(2)}}$, alors $\widetilde{\alpha} \leq \alpha_*$ et $\widetilde{\alpha}^{\Delta^{(2)}} \leq \alpha_*^{\Delta^{(2)}}$.

Puisque $\widetilde{\alpha}$ est une sur solution de (6.1), prenons $\gamma_0 = \widetilde{\alpha}$ et on définie la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{cases} \gamma_{n+1}^{\Delta^{(4)}} = f\left(t, \gamma_n, \gamma_n^{\Delta^{(2)}}\right), \ t \in [a,b], \\ \gamma_{n+1}(a) - a_1 \gamma_{n+1}^{\Delta}(a) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_1(s)\gamma_n(s)\Delta s, \\ \gamma_{n+1}\left(\sigma^4(b)\right) + a_2 \gamma_{n+1}^{\Delta}\left(\sigma^3(b)\right) = \int_a^{\sigma^4(b)} h_2(s)\gamma_n(s)\Delta s, \\ \gamma_{n+1}^{\Delta^{(2)}}(a) - a_3 \gamma_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_3(s)\gamma_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s, \\ \gamma_{n+1}^{\Delta^{(2)}}\left(\sigma^2(b)\right) + a_4 \gamma_{n+1}^{\Delta^{(3)}}(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} h_4(s)\gamma_n^{\Delta^{(2)}}(s)\Delta s \end{cases}$$

Puisque $\gamma_0 = \widetilde{\alpha} \leq \alpha$, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma_n \leq \alpha_n \text{ et } \gamma_n^{\Delta^{(2)}} \geq \alpha_n^{\Delta^{(2)}} \tag{6.20}$$

Comme $\widetilde{\alpha}$ est une solution de (6.1), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma_n = \widetilde{\alpha} \tag{6.21}$$

Par suite d'après (6.20) et (6.21), il rèsulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \widetilde{\alpha} \leq \alpha_n \text{ et } \widetilde{\alpha}^{\Delta^{(2)}} \geq \alpha_n^{\Delta^{(2)}}.$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\widetilde{\alpha} \leq \alpha_* \text{ et } \widetilde{\alpha}^{\Delta^{(2)}} \geq \alpha_*^{\Delta^{(2)}}$$

C'est à dire α_* est une solution maximale de (6.1), Par le même argument, on montre que $(\beta_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution minimale de (6.1).
Ce qui achève la démonstration. ■

6.4 Application

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u^{\Delta^{(4)}}(t) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u^{\Delta^{(2)}} + \frac{1}{6}\sin_1(t,0),\ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = 0, \\ u(\sigma^4(2)) + u^{\Delta}(\sigma^3(2)) = \int_0^{\sigma^4(2)} e^{-s}u(s)\,\Delta s, \\ u^{\Delta^{(2)}}(0) - u^{\Delta^{(3)}}(0) = \int_0^{\sigma^2(2)}(-e^{s+1})u^{\Delta^{(2)}}(s)\,\Delta s, \\ u^{\Delta^{(2)}}(\sigma^2(2)) + u^{\Delta^{(3)}}(\sigma(2)) = \int_0^{\sigma^2(2)}(-e^{s+1})u^{\Delta^{(2)}}(s)\,\Delta s. \end{cases} \tag{6.22}$$

Où

$$f(t,u,u^{\Delta(2)}) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u^{\Delta^{(2)}} + \frac{1}{6}\sin_1(t,0),$$

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = a_4 = 1,$$

$$h_1(t) = 0, h_2(t) = e^{-t}, h_3(t) = h_4(t) = -e^{t+1}.$$

Cas 1: $\mathbb{T} = [0,2] \subset \mathbb{R}$

On pose par définition $(\underline{u}(t), \overline{u}(t)) = (0, \sin t)$.

$(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sous-sur solutions de (6.22) si on a

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{6}\sin t,\ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \leq \int_0^2 s \times (0)\,ds, \\ 0 \leq \int_0^2 e^{-s} \times (0)\,ds, \\ 0 \geq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (0)\,ds, \\ 0 \geq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (0)\,ds. \end{cases} \tag{6.23}$$

et

$$\begin{cases} \sin t \geq \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{6}\sin t,\ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \geq \int_0^2 0 \times \sin s ds, \\ \sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2 \geq \int_0^2 e^{-s} \times \sin s ds, \\ 1 \leq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (-\sin s)\,ds, \\ -(\sin 2 + \cos 2) \leq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (-\sin s)\,ds. \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{6}\sin t,\ \ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}\,, \\ 0 \leq \int_0^2 s \times (0)\,ds, \\ 0 \leq \int_0^2 e^{-s} \times (0)\,ds, \\ 0 \geq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (0)\,ds, \\ 0 \geq \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (0)\,ds. \end{cases} \tag{6.24}$$

et

$$\begin{cases} \sin t \geq \sin t,\ \ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}\,, \\ 0 \geq 0, \\ 0.80 = \sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2 \geq 0,46 = \int_0^2 e^{-s} \times \sin s ds, \\ 1 \leq 14.67 = \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (-\sin s)\,ds, \\ -0.49 \leq 14.67 = \int_0^2 (-e^{s+1}) \times (\sin s)\,ds. \end{cases}$$

D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction f définie par

$$f(t,u,u'') = \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u' + \frac{1}{6}\sin t$$

satisfait les conditions du Théorème précédent et par suite, le problème (6.22) admet au moins une solution.

Cas 2: $\mathbb{T} = [0,2] \subset \mathbb{Z}$

Le problème (6.22) devient

$$\begin{cases} \sin_1^{\Delta^{(4)}}(t,0) = \frac{1}{2}\sin_1(t,0) - \frac{1}{3}\sin_1^{\Delta^{(2)}}(t,0) + \frac{1}{6}\sin_1(t,0),\ \ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}\,, \\ \sin_1(0,0) = 0. \\ \sin_1(6,0) + \frac{1}{4}\sin_1^{\Delta}(5,0) = \sum\limits_{i=0}^{5} i \sin_1(i,0). \\ \sin_1^{\Delta^{(2)}}(0,0) - \sin_1^{\Delta^{(3)}}(0,0) = \sum\limits_{i=0}^{3} (-e^{i+1}) \sin_1^{\Delta^{(2)}}(i,0). \\ \sin_1^{\Delta^{(2)}}(4,0) + \sin_1^{\Delta^{(3)}}(3,0) = \sum\limits_{i=0}^{3} (-e^{i+1}) \sin_1^{\Delta^{(2)}}(i,0), \end{cases} \tag{6.25}$$

où

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = a_4 = 1,$$

$$h_1(t) = 0, h_2(t) = t, h_3(t) = h_4(t) = -e^{t+1}.$$

On pose par définition $\left(\underline{u}\left(t\right), \overline{u}\left(t\right)\right) = \left(0, \sin_1(t,0)\right)$ la paire de sous-sur solution de (6.22), en utilisant la formule $(1.1), (1.2), (1.3)$ et (1.4) et aprés calcul on a

$$\begin{cases} 0 \leq 0, \ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \leq 0. \\ 0 \leq \sum\limits_{i=0}^{5} i \times 0 \\ 0 \geq \sum\limits_{i=0}^{3} (-e^{i+1}) \times 0 \\ 0 \geq \sum\limits_{i=0}^{3} (-e^{i+1}) \times 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sin_1(t,0) \geq \frac{1}{2}\sin_1(t,0) + \frac{1}{3}\sin_1(t,0) + \frac{1}{6}\sin_1(t,0), \ t \in [0,2]_{\mathbb{T}}, \\ 0 \geq 0. \\ -8 + \frac{1}{4}(-4) \geq 1 + 4 + 6 + 0 - 20 \\ 0 - (-1) \leq e^2 + 2e^3 + 2e^4 \\ (0) - (-2) \leq e^2 + 2e^3 + 2e^4 \end{cases}$$

D'autre part, il n'est pas difficile de prouver que la fonction f définie par

$$f(t, u, u^{\Delta(2)}) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u^{\Delta^{(2)}} + \frac{1}{6}\sin_1(t,0),$$

satisfait les conditions du Théorème précédent et par suite, le problème (6.22) admet au moins une solution.

Perspectives

Dans cette thèse nous avons voulu apporter notre attribution à la théorie d'existence de solutions pour des problèmes et systèmes d'équations dynamiques dans les échelles de temps par la méthode des sous et sur solution couplée avec la technique itérative.

Plus précisément nous avons étudié:

- L'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales,

- L'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques quasilinéaires avec conditions initiales non locales.

- L'existence des solutions pour certaines classes de systèmes d'équations dynamiques avec conditions initiales non locales.

- L'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques du second ordre avec conditions aux limites non locales.

- L'existence des solutions pour certaines classes d'équations dynamiques d'ordre 4 avec conditions aux limites non locales.

Il serait aussi intéressant dans nos recherche futures de s'attaquer aux systèmes d'équations aux échelles de temps avec opérateur p-Laplacien de la forme

$$\begin{cases} \varphi_p(u^{\Delta}(t)) = f(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ \varphi_p(v^{\Delta}(t)) = g(t,u,v),\ t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \\ u(a) = \int_a^b g_1(s)u\,(s)\,\Delta s, \\ v(a) = \int_a^b g_2(s)v\,(s)\,\Delta s, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\varphi_p(u\,(t))^{\Delta} = f(t,u,v),\; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ (\varphi_p(v\,(t))^{\Delta} = g(t,u,v),\; t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \\ \varphi_p(u(a)) = \int_a^b g_1(s)\varphi_p(u\,(s))\Delta s, \\ \varphi_p(v(a)) = \int_a^b g_2(s)\varphi_p(v\,(s))\Delta s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\phi(u^{\Delta}))^{\Delta} = f(t,u),\; t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ u(a) - a_0 u^{\Delta}\,(a) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_1(s) u\,(s)\,\Delta s, \\ u(\sigma^2(b)) + a_1 u^{\Delta}\,(\sigma(b)) = \int_a^{\sigma^2(b)} g_2(s) u\,(s)\,\Delta s. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] D. R. Anderson, Existence of solutions for a first-order p-Laplacian BVP on time scales, Nonlinear Anal. 69 (2008), 4521–4525.

[2] D. R. Anderson, Existence of solutions for first-order multi-point problems with changing-sign nonlinearity, J. Difference Equ. Appl. 14 (2008), 657–666.

[3] D. R. Anderson; R. Avery and J. Henderson, Existence of solutions for a one dimensional p-Laplacian on time-scales, J. Difference Equ. Appl. 10 (2004), 889–896.

[4] D. Anderson and A. Boucherif, Nonlocal initial value problem for first-order dynamic equations on time scales, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. 16 (2009), N^0.S1, Suppl., 222-226.

[5] F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8, Academic Press, New York, 1964.

[6] M. Bohner and S. G. Georgiev, Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

[7] M. Bohner and A. Peterson, A survey of exponential function on times scales, Cubo Mat. Educ.3 (2001), 285–301.

[8] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston, 2001.

[9] M. Bohner and A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston, 2003.

[10] A. Cabada and D. R. Vivero, Existence of solutions of first-order dynamic equations with nonlinear functional boundary value conditions, Nonlinear Anal. 63 (2005), e697–e706.

[11] S.Carl and S.Heikkila, Nonlinear differential equations in ordered spaces, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2000.

[12] E. Cetin and F. Serap Topal, Existence results for solutions of integral boundary value problems on time scales, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 708734.

[13] M. Derhab and M. Kada Kloucha, Existence results for a class of first-order dynamic equations with nonlocal initial conditions on time scales, Nonlinear Stud. 28 (2018), 883-898.

[14] M. Derhab, T. Khedim and B. Messirdi, Existence results of first-order differential equations with integral boundary conditions at resonance, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 24 (2017), 93-106.

[15] M. Derhab, T. Khedim, B. Messirdi, Existence results of first-order differential systems with mixed quasimonotone nonlinearities and integral boundary conditions, Panam, J. 27 (2017), 59-77.

[16] M. Derhab and M. Nehari, Existence of minimal and maximal solutions for a second order quasilinear dynamic equation with integral boundary conditions, Panamer. Math. J. 25 (2015), 17-35.

[17] A. Dogan, On the existence of positive solutions of the p-Laplacian dynamic equations on time scales, Math. Meth. Appl. Sci. (2017), 15 pages.

[18] L. Erbe, Allan Peterson and M. Simon, Square integrability of Gaussian bells on time scales, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 871–883

[19] M. Frigon and H. Gilbert, Boundary value problems for systems of second-order dynamic equations on time scales with Δ-Carathéodory functions, Abstr. Appl. Anal. 2010, Article ID 234015, 26 pages.

[20] F.Geng and D.Zhu, Multiple results of p-Laplacian dynamic equations on time scales, Appl.Math.Comput.193 (2007), 311-320.

[21] S. G. Georgiev, Integral Equations on Time Scales, Atlantis Studies in Dynamical Systems, 2016.

[22] Y. Gong and X. Xiang, A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales, J. Industrial and Management Optimization, 5 (2009), 1-13.

[23] H. Gilbert, Théorèmes d'existence pour des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux échelles de temps, Ph. D. en Mathématiques, Université de Montréal, 2009.

[24] C. S. Goodrich, Existence of a positive solution to a first-order p-Laplacian BVP on a time scale, Nonlinear Anal. 74 (2011), 1926-1936.

[25] C. S. Goodrich, On a first order-order semipositone boundary value problem on a time scale, Appl. Anal. Discrete Math. 8 (2014), 269–287.

[26] J. Graef and L. Kong, First-order singular boundary value problems with p-Laplacian on time scales, Journal of Difference Equations and Applications 17 (2011), 831–839.

[27] G. Sh. Guseinov and E. Özyılmaz, Tangent lines of generalized regular curves parametrized by time scales, Turk J Math. 25 (2001) , 553-562.

[28] Z.He, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J.Comput.Appl.Math.182 (2005), 304-315.

[29] S. Hilger, Analysis on measure chains–a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 (1990), 18-56.

[30] T. Jankowski, Monotone iterative method for first-order differential equations at resonance, Appl. Math. Comput. 233 (2014), 20-28.

[31] B. Kayamkçalan, Monotone iterative method for dynamic systems on time scales, Dynam. Systems Appl. 2 (1993), 213-220.

[32] B. Kayamkçalan, V. Lakshmikantham and S. Sivasundaram, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[33] B. Kayamkçalan and B.A. Lawrence, Coupled solutions and monotone iterative techniques for some nonlinear initial value problems on time scales, Nonlinear Analysis: Real World Applications 4 (2003), 245 – 259.

[34] T. Khedim, Etude de certaines classes d'équations différentielles avec conditions aux limites non locales, Thèse de Doctorat Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen 2018.

[35] V. Lakshmikantham, Monotone flows and fixed points for dynamic systems on time scales in a Banach space, Appl. Anal. 56 (1995), 175-184.

[36] Y. Li and J. Shu, Solvability of boundary value problems with Riemann-Stieltjes Δ-integral conditions for second-order dynamic equations on time scales at resonance, Adv. Difference Equ. 1 (2011).

[37] B. Messirdi Existence et Multipilicité des solutions pour certains problèmes elliptiques non-linéaires, Thèse de Doctorat Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen 2010.

[38] G. V. Ramana, K. Swamy and A.V.S.N.Murty, Dynamical equations with integral boundary conditions on time scales, International Journal of Mathematics and computer research 3 (2015), 812-823.

[39] Y. Sang and H. Su, Several existence theorems of nonlinear m-point boundary value problem for p-Laplacian dynamic equations on time scales, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1012-1026.

[40] V. Spedding, Taming Nature's Numbers, New Scientist, July 19 (2003), 28–31.

[41] P. Stehlík, On monotone iterative method for BVP on time scales, Adv. Difference Equ. 1 (2005), 81-92.

[42] D. M. Thomas, L. Vandemeulebroeke and K. Yamaguchi, A mathematical evolution model for phytoremediation of metals, Dynamical Systems - Series B. 5 (2005), 411–422.

[43] S.Gulsan Topal, Second-order periodic boundary value problems on time scales, Comput Appl. Math.48 (2004), 637-648.

[44] C. C. Tisdell and A. Zaidi, Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear dynamic equations on time scales with an application to economic modelling, Nonlinear Anal. 68 (2008), 3504–3524.

[45] Ü. Ufuktepe, Unification of probability theory on time scales, Adv. Difference Equ. 211 (2012), 13 pages.

[46] Ya-Hong Zhao, First-order boundary value problem with nonlinear boundary condition on time scales, Discrete Dyn. Nat. Soc. Volume 2011 (2011), Article ID 845107, 8 pages.

[47] F. B. Christiansen and T. M. Fenchel. Theories of Populations in Biological Communities, volume 20 of Lecture Notes in Ecological Studies. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[48] S. Keller. Asymptotis ches Verhalten invarianter Faserbii.ndel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis au/ Zeitskalen. PhD thesis, Un iversitat Augsburg, 1999.