

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد- تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd- Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR ES SCIENCES**

En : Hydraulique

Spécialité : Hydraulique

Par : **ATALLAH M'hamed**

Modélisation et simulation numérique par éléments finis des écoulements à surface libre

Soutenue publiquement, le 18/12/2018, devant le jury composé de :

Mr BOUANANI Abderrazak	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
Mr HAZZAB Abdelkrim	Professeur	Univ. Saïda	Directeur de thèse
Mr SEDDINI Abdelali	Professeur	Univ. Tlemcen	Co-Directeur de thèse
Mr MEGNOUNIF Abdessalem	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur
Mr KHALDI Abdelkrim	Professeur	U.S.T.M.B.Oran	Examineur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse, Mr. HAZZAB Abdelkrim, professeur à l'université de Saïda pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier sa gentillesse, sa générosité, son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m'avoir donné la chance de faire une thèse.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon co-encadreur Mr. SEDDINI Abdelali, professeur à l'université de Tlemcen, je ne pourrai jamais oublier ses conseils continus, ses encouragements, sa gentillesse et sa générosité.

Je remercie bien chaleureusement Mr. Abdellah GHENAIM, professeur à l'INSA de Strasbourg, pour son accueil durant ma période de stage. Sa qualité humaine et scientifique, sa clairvoyance et son professionnalisme exemplaires, m'ont fourni un appui incomparable. Ses conseils, ses encouragements et sa sympathie sont fort appréciés.

J'exprime mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour le soutien et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et en premier lieu Mr. BOUANANI Abderrazak, professeur à l'université de Tlemcen, qui a accepté de le présider.

Merci à Mr. KHALDI Abdelkrim, professeur à l'USTO et Mr. MEGNOUNIF Abdessalem professeur à l'université de Tlemcen, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail auxquels je dis un grand merci d'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ma thèse.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis intimes pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné et les encouragements qu'ils m'ont offerts ainsi que les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables.

Je remercie également toute ma famille et ma belle-famille pour leur soutien moral sans lequel ce travail n'aurait pas été possible.

Pour finir, merci à ma femme, pour sa patience et son soutien durant ces derniers mois.

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est de proposer un modèle numérique de simulation des écoulements à surface libre en général (des inondations en particulier). Le modèle résout les équations de Saint-Venant en utilisant la formulation de Galerkin discontinue. Cette formulation présente des avantages aux méthodes traditionnelles d'éléments finis en facilitant l'implémentation de l'ordre élevé et donne des souplesses par rapport à l'adaptation de maillage. En simulations numériques, un des challenges est de disposer d'un code robuste et précis en calcul capable de simuler des écoulements uni et bidimensionnels à surface libre en prenant en compte la complexité de la topographie et la présence des épisodes de couvrement/découvrement. Une des applications est la simulation de la propagation des ondes de crues et le phénomène réel de rupture de barrage. Différents schémas d'approximation des flux numériques ont été étudiés. Différents limiteurs de pente ont été testés et leurs effets étaient comparés. Un banc d'essai numérique des différents problèmes hydrauliques stationnaires, transitoires, uni et bidimensionnels, est effectué. La comparaison du schéma numérique avec les mesures expérimentales ou les solutions analytiques montre une très bonne corrélation.

On a, aussi, étudié une section de l'oued Mekerra à travers la ville de Sidi Bel Abbas en exploitant des levés bathymétriques et les données de mesure des écoulements. Les valeurs de paramètres hydrodynamiques calculées (profondeurs et vitesses d'eau maximales) sont utilisées pour dessiner des cartes des risques d'inondation. Les résultats obtenus confirment la capacité du schéma numérique à simuler les événements réels. Ils permettent non seulement de fournir des informations sur la prévision de la crue et le suivi de l'évolution de l'ampleur de l'écoulement dans l'Oued mais aussi la délimitation des zones à risques et la quantification des pertes.

Mots clés : Équation de Saint–Venant, Méthode des éléments finis, Méthode de Galerkin discontinue de type Runge–Kutta, Inondation, Oued Mekerra.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو اقتراح نموذج محاكاة عددية للسريان الحر للمياه السطحية بشكل عام (الفيضانات على وجه الخصوص). هذا النموذج يحل معادلات سان فونان باستخدام طريقة غاليركين المتقطعة. هذه الطريقة لديها مزايا أكثر من طريقة العناصر المنتهية التقليدية من خلال تسهيل تطبيق ترتيب عالي و المرونة فيما يتعلق بمطابقة التشبيك. من أهم التحديات في المحاكاة العددية هو توفر برنامج قوي ودقيق في الحساب قادر على محاكاة التدفقات السطحية أحادية أو ثنائية البعد مع الأخذ بعين الاعتبار تعقيد التضاريس و تعاقب ظاهرة الغمر و انحصار الماء. من أهم التطبيقات هو محاكاة انتشار موجات الفيضانات وظاهرة انهيار السدود. في هذا الصدد قمنا بدراسة مختلف طرق الحساب التقريبي للتدفق العددي و اختبار محددات الميلان المختلفة ومقارنة آثارها. و قد أجرينا مجموعة من الاختبارات العددية لدراسة الجريان الدائم و المتغير للمياه أحادية و ثنائية البعد. المقارنة بين النتائج الرقمية و القياسات التجريبية أو الحلول التحليلية أظهرت التقارب الشديد بين النتائج. كما تمت دراسة جزء من وادي المكرا المار بمدينة سيدي بلعباس باستخدام معطيات مسح الأراضي وبيانات قياس التدفق. يتم استخدام القيم المحسوبة للعوامل الهيدروديناميكية (أعماق و سرعات المياه القصوى) لرسم خرائط مخاطر الفيضانات. النتائج التي تم الحصول عليها تؤكد قدرة المخطط العددي على محاكاة الأحداث الحقيقية. وهي لا تسمح فقط بالتنبؤ بالفيضانات ورصد تطور مدى التدفق في الوادي، بل تسمح أيضا بتعيين مناطق الخطر وتحديد حجم الخسائر.

الكلمات المفتاحية: معادلات سان فونان، طريقة العناصر المنتهية، طريقة غاليركين المتقطعة من نوع رانج-كوتا، الفيضانات، وادي المكرا.

Abstract

The main objective of this thesis is to propose a numerical simulation model of free-surface flows in general (floods in particular). The model solves the Saint-Venant equations using the discontinuous Galerkin formulation. This formulation has advantages over traditional finite element methods by facilitating the implementation of high order and provides flexibility for mesh adaptation procedure. In numerical simulations, one of the challenges is to have a robust and precise computational code able to simulate one-dimensional and two-dimensional free-surface flows taking into account the complexity of the topography and the presence of wetting and drying fronts. One of the applications is the investigation of flood wave propagation and the dam-break problems. Different numerical flow approximation schemes have been studied. Different slope limiters were tested and their effects were compared. A variety of tests for shallow water flows in different flow regimes including steady and transient of one and two-dimensional hydraulic problems is carried out. The comparison of the numerical scheme with the experimental measurements or the analytical solutions shows a very good agreement.

A section of wadi Mekerra was also studied through Sidi Bel Abbes city using bathymetric surveys and flow measurement data. Calculated hydrodynamic parameter values (maximum depths and water velocities) are used to draw flood hazard maps. The results obtained confirm the ability of the numerical scheme to simulate real events. They allow not only provide information on flood forecasting and monitoring the evolution of the extent of flow in the Wadi but also the delimitation of risk areas and the quantification of losses.

Keywords : Saint–Venant equations, Finite element method, Runge–Kutta discontinuous Galerkin method, flood, inundation, Wadi Mekerra.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Table des matières	viii
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xvi
Abréviations et notations principales	xxii
1 Introduction	1
1.1 Généralités et problématique	1
1.2 Importance de la simulation	3
1.3 Équations de <i>Saint–Venant</i>	4
1.4 Les méthodes numériques	6
1.5 Objectifs de la thèse	9
1.6 Organisation et présentation du travail	10
2 Modèle mathématique des écoulements en eaux peu profondes	12
2.1 Introduction	12
2.2 Établissement des équations de <i>Saint–Venant</i> unidimensionnelles	13
2.2.1 Forme différentielle et conservative des équations de <i>Saint–Venant</i>	18
2.2.2 Équations de <i>Saint–Venant</i> pour les canaux rectangulaire	21
2.3 Établissement des équations de <i>Saint–Venant</i> bidimensionnelles	23
2.3.1 Équation de continuité	24
2.3.2 Équation de quantité de mouvement	24
2.3.3 Différentes formes des équations de <i>Saint–Venant</i>	29
2.4 Conclusion	31
3 Présentation des méthodes des éléments finis de Galerkin discontinue	32
3.1 Introduction	32
3.2 Un aperçu historique	33
3.2.1 Éléments finis continus	34

3.2.2	Éléments finis discontinus	36
3.3	Forme conservative des équations à résoudre	39
3.4	Formulation de Galerkin discontinue	39
3.4.1	Fonctions de forme	42
3.4.2	Transformation isoparamétrique	44
3.4.3	Intégration numérique	49
3.5	Flux numérique	50
3.5.1	Problème de Riemann associé au système de <i>Saint–Venant</i>	52
3.5.2	Solveur de Riemann approximatif	53
3.6	Variation totale et schéma TVD	57
3.6.1	Discretisation dans le temps	57
3.6.2	Limitation de pente	58
3.7	Conclusion	60
4	Comparaison entre RKDG et CDG sur des problèmes hydrauliques unidimensionnels	61
4.1	Équations de Saint–Venant pour les canaux rectangulaires	62
4.2	Méthode GD pour les équations de <i>Saint–Venant</i> unidimensionnelles	62
4.2.1	Formulation GD	62
4.2.2	Flux numérique	64
4.2.3	Limiteur de pente	65
4.3	Méthode CDG pour les équations de <i>Saint–Venant</i> unidimensionnelles	67
4.4	Conditions initiales et aux limites	70
4.5	Tests numériques	72
4.5.1	Rupture de barrage sur fond mouillé	73
4.5.2	Ressaut hydraulique dans un canal à fond horizontal	74
4.5.3	Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire	77
4.5.4	Écoulements sur une bosse parabolique	79
4.5.5	Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière	86
4.6	Conclusion	91
5	Simulation des écoulement unidimensionnel dans les canaux naturels	94
5.1	Équations de <i>Saint–Venant</i> pour les canaux naturels	94
5.2	Méthode de Galerkin discontinue pour les équations de <i>Saint–Venant</i>	95
5.3	Traitement de lit sec	97
5.4	Tests numériques	98
5.4.1	Rupture de barrage dans un canal horizontal de section variable	99
5.4.2	Parabole de révolution	103
5.4.3	Ressaut hydraulique dans un canal divergent	105
5.4.4	Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent	108
5.5	Conclusion	110

6	Simulation des écoulements bidimensionnels	112
6.1	Équations d'écoulements bidimensionnels en eaux peu profondes	112
6.2	Flux numérique	113
6.3	Traitement du fond sec	115
6.4	Traitement du terme source	116
6.5	Méthode de limiteur de pente	116
6.6	Tests numériques	118
6.6.1	Ressaut hydraulique oblique	119
6.6.2	Onde de choc dans une contraction de canal	121
6.6.3	Rupture de barrage circulaire	124
6.6.4	Rupture partielle de barrage	127
6.6.5	Rupture partielle de barrage (résultats expérimentaux)	132
6.6.6	Rupture d'un barrage dans un canal venturi	135
6.6.7	Rupture d'un barrage sur un canal en forme L	138
6.6.8	Rupture de barrage dans un canal WES	140
6.6.9	Rupture de barrage sur une bosse triangulaire	144
6.6.10	Rupture d'un barrage sur un fond à trois bosses	150
6.7	Conclusion	151
7	Application aux cas réels des problèmes de rupture de barrages	153
7.1	Introduction	153
7.2	Histoire du barrage de Malpasset	154
7.3	Topographie de Malpasset	155
7.4	Données de calcul et points de comparaison	155
7.5	Application	157
7.6	Résultats et discussions	158
7.6.1	Résultats numériques aux différents instants	158
7.6.2	Temps de propagation	160
7.6.3	Niveau d'eau maximum	165
7.7	Conclusion	170
8	Applications aux crues de l'Oued Mekerra	171
8.1	Introduction	171
8.2	Présentation de la zone d'étude	171
8.2.1	Situation géographique	171
8.2.2	Description topographique	172
8.2.3	Climat	173
8.2.4	Géologie	174
8.2.5	Couvert végétal	174
8.2.6	Réseau hydrographique	175
8.2.7	Organisation et fonctionnement du bassin versant de Mekerra	176
8.3	Régime d'écoulement de l'Oued Mekerra	178
8.4	Aperçu des crues de l'Oued Mekerra	181

8.5	Simulations unidimensionnelles	182
8.6	Simulations bidimensionnelles	185
8.6.1	Résultats et discussion	191
8.7	Conclusion	193
	Conclusion	196
	Bibliographie	199

Table des figures

2.1	Section transversale d'un canal.	14
2.2	Les forces agissantes sur le volume de contrôle unidimensionnel : (a) profil ; (b) vue en plan.	15
2.3	Définition des angles α_x , α_y et α_z	28
3.1	Étapes de résolution par éléments finis.	33
3.2	Éléments unidimensionnels linéaires continus et discontinus.	40
3.3	Éléments bidimensionnels linéaires continus et discontinus.	40
3.4	Élément linéaire unidimensionnel : (a) Fonctions de forme, (b) Variation li- néaire d'une variable.	43
3.5	Élément triangulaire linéaire : (a) Fonction de forme, (b) Variation linéaire d'une variable.	44
3.6	Transformation isoparamétrique pour un élément linéaire 1D.	45
3.7	Transformation isoparamétrique pour un élément triangulaire linéaire 2D.	46
3.8	Transformation de l'intégration de la chaîne dans le cadre bidimensionnel.	49
3.9	Illustration des données initiales du problème de Riemann.	52
3.10	Structure des ondes dans le solveur HLL de Riemann.	53
3.11	Volume de contrôle pour le solveur HLL.	53
3.12	Structure des ondes dans le solveur HLLC de Riemann.	55
3.13	Diagramme de <i>Sweby</i> (1984) : limiteurs de pente usuels. La partie grisée est la région TVD du second ordre.	60
4.1	Variation des éléments de la matrice de décentrage D du schéma CDG en fonction du nombre de Froude.	70
4.2	Courbes caractéristiques aux frontières d'un écoulement 1D : (a) Écoulement fluvial ; (b) Écoulement torrentiel.	71
4.3	Rupture de barrage sur fond mouillé : conditions initiales.	73
4.4	Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 10$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).	74
4.5	Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 15$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).	75
4.6	Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 20$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).	75

4.7	Ressaut hydraulique dans un canal à fond horizontal, comparaison entre les données expérimentales de <i>Gharangik et Chaudhry (1991)</i> et les résultats numériques des méthodes RKDG et CDG	77
4.8	Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire : Topographie du canal.	78
4.9	Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire (a) Niveau d'eau et (b) débit unitaire avec limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau.	79
4.10	Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire (a) Niveau d'eau et (b) débit unitaire avec limiteur de pente fondé sur le niveau d'eau.	80
4.11	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s d'un écoulement au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.	82
4.12	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s d'un écoulement au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.	82
4.13	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement fluvial au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.	83
4.14	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement fluvial au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau au bout de 300 s.	84
4.15	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.	85
4.16	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.	85
4.17	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique avec ressaut au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.	87
4.18	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique avec ressaut au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau au bout de 300 s.	87
4.19	Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière : topographie du lit	89
4.20	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement stagnant dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.	89
4.21	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement stagnant dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.	90

4.22	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.	91
4.23	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.	91
5.1	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal triangulaire.	100
5.2	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond sec dans un canal triangulaire.	100
5.3	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond sec dans un canal triangulaire dans différents maillages. . . .	101
5.4	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal parabolique.	101
5.5	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal trapézoïdal.	102
5.6	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire.	103
5.7	Profil de lit de la cuvette parabolique.	104
5.8	Conditions initiales (a) niveau d'eau, (b) débit, dans une cuvette parabolique.	105
5.9	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = T/4$	105
5.10	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = 2T/4$	106
5.11	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = 3T/4$	106
5.12	Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = T$	107
5.13	Ressaut hydraulique dans un canal divergent, variation du largeur du canal. . . .	107
5.14	Ressaut hydraulique dans un canal divergent, (a) comparaison des hauteurs d'eau, (b) débit simulé.	108
5.15	Géométrie du canal divergent / convergent.	108
5.16	Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent sur un fond sec : Comparaison entre le niveau d'eau simulé et mesuré aux stations P_1 et P_5	109
5.17	Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent sur un fond mouillé : Comparaison entre le niveau d'eau simulé et mesuré aux stations P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5	110
6.1	Discrétisation en utilisant des éléments triangulaires dans la méthode GD. . . .	117
6.2	Définition du problème du ressaut hydraulique oblique.	119

6.3	Ressaut hydraulique oblique : Maillages (premier ligne), vues 3D de la surface d'eau (deuxième rangée), et les tracés de contours des profondeurs d'eau (troisième ligne). De gauche à droite maillage grossier, maillage adaptatif et maillage fin.	120
6.4	Ressaut hydraulique oblique : Comparaison des profils de la surface d'eau (a) et les profils de vitesse (b) le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différentes procédures d'adaptation de maillage.	121
6.5	Ressaut hydraulique oblique : Comparaison des profils de la surface d'eau (a) et les profils de vitesse (b) le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différents flux numériques.	122
6.6	Vue en plan de la construction dans un canal rectangulaire.	122
6.7	Onde de choc dans une contraction de canal : Maillages (premier ligne), vues 3D de la surface d'eau (deuxième ligne), et les tracés de contours des profondeurs d'eau (troisième ligne). De gauche à droite maillage grossier et maillage fin.	123
6.8	Onde de choc dans une contraction de canal : Comparaison des profils de la surface d'eau (a) le long de la ligne continue (b) le long de la ligne pointillé.	124
6.9	Onde de choc dans une contraction de canal : Comparaison des profils de la surface d'eau le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différents flux numériques, (a) maillage grossier, (b) maillage fin.	124
6.10	Rupture de barrage circulaire : présentation du maillage.	125
6.11	Rupture de barrage circulaire sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à l'instant $t = 0.69$ s.	125
6.12	Rupture du barrage circulaire : (a) Profil de la surface libre (b) les valeurs absolues correspondantes du nombre de Froude à des instants différents (demi-coupe en $y = 25$ m).	126
6.13	Rupture de barrage circulaire sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau.	126
6.14	Rupture de barrage circulaire sur un fond sec : Profil de la surface libre à des instants différents (demi-coupe en $y = 25$ m).	127
6.15	Rupture partielle de barrage : présentation du maillage.	128
6.16	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 2.2$ s.	128
6.17	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 4.2$ s.	129
6.18	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 6.2$ s.	129
6.19	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 7$ s.	129
6.20	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 8.2$ s.	130

6.21	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 10.2$ s.	130
6.22	Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 2$ s.	131
6.23	Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 4$ s.	131
6.24	Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 5.5$ s.	131
6.25	Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 8$ s.	132
6.26	Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 10$ s.	132
6.27	Disposition expérimentale du réservoir et du bassin d'inondation (<i>Fraccarollo et Toro, 1995</i>).	133
6.28	Rupture partielle de barrage (résultats expérimentaux) : Hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.	134
6.29	Rupture d'un barrage dans un canal venturi : Géométrie du canal et positions des points de mesure.	136
6.30	Raffinement du maillage dans le segment rétréci du canal venturi : (a) entrée et (b) sortie.	136
6.31	Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d'eau aux points de jaugeage S1 (a), S2 (b), S3 (c) et S4 (d) du problème de rupture d'un barrage dans un canal venturi.	137
6.32	Rupture d'un barrage sur un canal en forme de L : Vues en plan et transversale.	139
6.33	Rupture d'un barrage sur un canal en forme L sur un fond mouillé : Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d'eau aux points de jaugeage G1 (a), G2 (b), G3 (c), G4 (d), G5 (e) et G6 (f).	141
6.34	Rupture d'un barrage sur un canal en forme L sur un fond sec : Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d'eau aux points de jaugeage G1 (a), G2 (b), G3 (c), G4 (d), G5 (e) et G6 (f).	142
6.35	Rupture de barrage dans un canal WES, Configuration du canal.	143
6.36	Rupture totale de barrage dans un canal WES : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées aux différentes stations.	144
6.37	Rupture partielle de barrage dans un canal WES : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées aux différentes stations.	145
6.38	Rupture d'un barrage sur une bosse triangulaire : Profil en long du canal.	146
6.39	Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d'un fond sec : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.	147
6.40	Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d'un fond mouillé avec frontière fermée en aval : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.	148

6.41	Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d'un fond mouillé avec déversoir en aval : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.	149
6.42	Rupture d'un barrage sur un fond à trois bosses : maillage.	151
6.43	Rupture d'un barrage sur un fond à trois bosses : Évolution de l'onde de rupture.	152
7.1	État du site après la rupture du barrage de Malpasset (<i>Marche, 2008</i>).	155
7.2	Rupture du barrage de Malpasset : topographie et positions des transformateurs (A, B et C), des points examinés par la police (P1-P17) et des points de mesures issues du modèle physique (G6- G14).	156
7.3	Rupture du barrage de Malpasset : maillage du domaine.	159
7.4	Rupture du barrage de Malpasset : Profondeur d'eau initiale.	159
7.5	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 60$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.	160
7.6	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 300$ s : Profondeur d'eau en 2D.	161
7.7	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 600$ s : Profondeur d'eau en 2D.	161
7.8	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 1200$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.	162
7.9	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 2400$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.	163
7.10	Rupture du barrage de Malpasset à $t = 4000$ s : Profondeur d'eau en 2D.	164
7.11	Rupture du barrage de Malpasset : Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure.	165
7.12	Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive droite.	167
7.13	Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive gauche.	167
7.14	Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique.	168
7.15	Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive droite.	168
7.16	Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive gauche.	169
7.17	Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique.	169
8.1	Situation du bassin versant de l'oued Mekerra.	172
8.2	Diagramme ombrothermique de l'oued Mekerra.	173
8.3	Carte pédologique du bassin versant de l'oued Mekerra.	175
8.4	Organisation hydrogéomorphologique du bassin versant de Mekerra (<i>Hal-louche et al., 2010</i>).	177
8.5	Variation interannuelle des débits dans le bassin de l'Oued Mekerra.	180
8.6	Variation interannuelle des débits dans le bassin de l'Oued Mekerra.	180

8.7	Historique des crues de l'Oued Mekerra au niveau de la station hydrométrique de Sidi Bel Abbès(1942-2001).	183
8.8	Profile au long de l'Oued Mekerra entre la station de Sidi Ali Benyoub et celle de Sidi Bel Abbès.	183
8.9	Vue en plan du tronçon étudié et la localisation de certaines sections transversales de l'oued.	184
8.10	Sections transversales (a) à la station de Sidi Ali Benyoub et (b) à la station de Sidi Bel Abbès.	184
8.11	La crue de l'été de 1983 : (a) l'hydrogramme mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub et (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées au niveau de la station de Sidi Bel Abbès.	186
8.12	La crue de l'automne de 1995 : (a) l'hydrogramme mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub et (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées au niveau de la station de Sidi Bel Abbès.	186
8.13	Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbès : Délimitation de la zone d'étude (<i>Atallah et al., 2018</i>).	187
8.14	Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbès : Topographie de la zone d'étude (<i>Atallah et al., 2018</i>).	188
8.15	Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbès : Maillage de la zone d'étude (<i>Atallah et al., 2018</i>).	189
8.16	Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbès : Courbe de tarage (<i>Atallah et al., 2018</i>).	189
8.17	Calage du modèle : (a) l'hydrogramme calculé par RKDG 1D (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées par RKDG 2D au niveau de la station de Sidi Bel Abbès.	190
8.18	Hydrogrammes : (a) mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub (b) Calculé à l'entrée de la zone exposée aux inondations par RKDG (1D).	192
8.19	Distributions des profondeurs d'eau maximales atteintes pour l'inondation de 1994.	193
8.20	Distributions des vitesses d'eau maximales atteintes pour l'inondation de 1994.	193
8.21	Classification des risques d'inondation selon <i>New South Wales (NSW) Government (2005)</i>	194
8.22	Carte de risque d'inondation pour l'inondation de 1994.	194

Liste des tableaux

1.1	Dommmages causées par quelques inondations à l'échelle nationale.	2
3.1	Quadrature de Gauss pour une intégrale à une dimension dans l'intervalle [-1, 1] (<i>Reddy, 1993</i>).	50
3.2	Quadrature de Gauss et les poids d'un élément de référence triangulaire (<i>Reddy, 1993</i>).	51
4.1	Conditions aux limites requises pour les équations 1D de <i>Saint-Venant</i>	71
4.2	Les erreurs en norme L_2 du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire.	76
4.3	Les erreurs en norme L_2 du problème de ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire.	80
4.4	Les erreurs en norme L_2 pour l'équilibre au repos d'un écoulement au-dessus d'une bosse.	81
4.5	Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement fluvial au-dessus d'une bosse.	83
4.6	Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique au-dessus d'une bosse.	85
4.7	Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse.	87
4.8	Les erreurs relatives maximales E_{\max} pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse.	88
4.9	Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière : topographie du lit.	88
4.10	Les erreurs en norme L_2 pour pour l'équilibre au repos dans un canal de topographie irrégulière.	90
4.11	Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique dans un canal de topographie irrégulière.	92
4.12	Les erreurs relatives maximales E_{\max} pour l'écoulement transcritique dans un canal de topographie irrégulière.	92
5.1	Précision de limiteurs de pente dans les canaux prismatiques.	103
5.2	Variation du largeur du canal convergent /divergent.	109
6.1	Performance de la méthode GD en utilisant un maillage grossier, un maillage adaptatif et un maillage fin pour le test de ressaut hydraulique oblique.	121

6.2	Disposition expérimentale du réservoir et du bassin d'inondation (<i>Fraccarollo et Toro, 1995</i>).	133
6.3	Rupture d'un barrage sur un canal en forme de L : localisation des points de jaugeage.	139
7.1	Coordonnées des trois transformateurs électriques (<i>Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010</i>).	156
7.2	Coordonnées de points examinés par la police (<i>Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010</i>).	157
7.3	Coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage par le modèle physique (<i>Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010</i>).	158
7.4	Influence du coefficient de Manning sur les temps de transit (en secondes) entre les transformateurs électriques.	164
7.5	Comparaison du temps d'arrivée de l'onde aux transformateurs électriques.	164
7.6	Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure.	165
7.7	Comparaison de la cote maximale de la surface libre aux points observés par la police.	166
7.8	Comparaison de la cote maximale de la surface libre aux points de mesures sur le modèle physique.	166
8.1	Caractéristiques des sous bassins de l'oued mekerra.	173
8.2	Statistiques des inondations de la wilaya de Sidi Bel Abbas entre 1986 et 2007 (<i>Yahiaoui, 2012; Benyahia et al., 2011</i>).	181
8.3	Répartition en % du nombre des crues de l'Oued Mekerra entre 1942 et 2001 (<i>Maref, 2010</i>).	182
8.4	Valeurs du coefficient de Manning utilisées dans les différents sous-tronçons (<i>Atallah et Hazzab, 2013</i>).	185
8.5	Comparaison de la précision de débit de pointe pour les deux événements -cas 1 : crue de l'été de 1983 ; cas 2 : crue de l'automne de 1995.	186

Abréviations et notations principales

Liste des abréviations principales

- BG Bubnov–Galerkin
- CDG Characteristic–Dissipative–Galerkin
- CFD Computational Fluid Dynamics
- CFL Condition de *Courant, Friedrichs, et Lewy*
- DG Dissipative–Galerkin
- EDP Équations aux Dérivées Partielles
- GD Galerkin Discontinue
- HLL *Harten, Lax, et van Leer*
- HLLC Harten–Lax–van Leer Contact
- LF Lax–Friedrichs
- LP- ϕ Limiteur de Pente fondé sur la variable ϕ
- LS Least Squares ou Moindres Carrés
- MC Méthodes des Caractéristiques
- MDF Méthodes des Différences Finies
- MEF Méthodes des Éléments Finis
- MUSCL Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws ou Schéma Amont Monotone pour les Lois de Conservation
- MVF Méthodes des Volumes Finis
- PG Petrov–Galerkin
- PPM Piecewise Parabolic Method ou Méthode Parabolique par Morceaux

PPR	Plans de Prévention des Risques
RKDG	Runge–Kutta Discontinuous Galerkin
SU/PG	Streamline Upwind Petrov-Galerkin ou Petrov-Galerkin à décentrage rationalisé
TG	Taylor–Galerkin
TV	Total Variation ou Variation Totale
TVB	Total Variation Bounded ou Variation Totale Bornée
TVD	Total Variation Diminishing ou de variation totale décroissante

Liste des notations principales

α	L'angle fait par le lit et l'horizontale	°
D	Matrice de décentrage du schéma CDG, voir équation (4.45), page 69	-
E	Vecteur de flux dans la direction x	-
F	Vecteur de flux	-
G	Vecteur de flux dans la direction y	-
L	Résidu	-
M	Matrice de masse	-
n	Vecteur d'unité	-
R	Résidu	-
S	Vecteur des termes sources	-
U	Vecteur des variables conservatives	-
W	Matrice des fonctions tests de type Petrov–Galerkin	-
J_E	Matrice jacobienne du vecteur E , voir équation (2.98), page 31	-
J_G	Matrice jacobienne du vecteur G , voir équation (2.98), page 31	-
J	Matrice jacobienne	-
ΔM	L'augmentation net de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle	N
$\epsilon_{xy}, \epsilon_{zx}$	Coefficients de viscosité turbulente	-
η	Coordonnée longitudinale d'un point d'un élément de référence	-

γ	L'angle faite entre le vecteur vitesse et l'axe des abscisses	°
$\lambda_{1,2}$	Valeurs propres de la matrice jacobienne J	m/s
$\lambda_{1,2}$	Valeurs propres de la matrice jacobienne J	m/s
Ω	Domaine de calcul	-
ω	Coefficient de décentrage du schéma CDG	-
ϕ	Peut être h ou q ou toute autre variable	-
Ψ	Fonction de limitation de pente	
ρ	Masse volumique du fluide	Kg/m ³
ρ	Masse volumique	Kg/m ³
Fr	nombre de Froude, voir équation (4.47), page 69	-
τ_f	contrainte dû au au frottement sur le fond	N/m ²
τ_s	contrainte dû au vent en surface	N/m ²
θ	Coefficient de pondération du schéma CDG	-
$\tilde{\alpha}$	Points forts d'onde dans le solveur de Roe	
ξ	Coordonnée longitudinale d'un point d'un élément de référence	
ζ	Variable d'intégration désignant la profondeur	m
A	Section mouillée	m ²
A_e	Surface de l'élément triangulaire, voir équation (3.20), page 43	-
$b(\zeta)$	Largeur du canal pour une hauteur ζ	m
C	Coefficient Chézy	m ^{1/2} /s
c	Célérité de l'onde	m/s
d	Tirant d'eau mesuré perpendiculairement au fond du canal	m
E	Erreur relative absolue du schéma numérique, voir équation (4.51), page 73	%
F_f	Force de frottement, voir équation (2.17), page 17	N
F_g	Force de gravité, voir équation (2.13) , page 17	N
F_H	Force de pression hydrostatique, voir équation (2.7), page 16	N

F_L	Force de pression due au changement de la largeur, voir équation (2.10), page 16	N
g	Vecteur accélération	
h	Tirant d'eau	m
I_1	Terme de pression hydrostatique, voir équation (2.8), page 16	m^{-3}
I_2	Terme de pression due au changement de la largeur, voir équation (2.11), page 16	m^{-3}
L	Longueur du domaine unidimensionnel	m
L_1	Erreur absolue moyenne entre la solution analytique et la solution numérique, voir équation (4.49), page 72	-
L_2	Erreur quadratique moyenne entre la solution analytique et la solution numérique, voir équation (4.50), page 72	-
m	Nombre de valeurs propres de la loi de conservation	
M_f	L'apport net de la dynamique	N
n	Nombre de nœuds dans un élément	-
N_e	Nombre d'éléments du maillage	-
n_g	Nombre de points d'intégration numérique	
n_m	Coefficient de frottement de Manning	$m^{-1/3}/s$
p	Pression	N/m^2
Q	Débit d'écoulement	m^3/s
q	Débit unitaire	m^2/s
r	Ratio des pente ou arguments d'une fonction de limitation	
R_h	Rayon hydraulique	m
S	Vitesse de l'onde dans le problème de Riemann	
S_0	Pente du canal	-
S_f	Pente de frottement	-
T	Largeur du canal à la surface libre de l'eau (largeur miroir)	m
t	Temps	s
u	Vitesse moyenne de l'écoulement selon l'axe ox	m/s

U, V, W	Composantes du vecteur vitesse	m/s
v	Vitesse moyenne de l'écoulement selon l'axe oy	m/s
V^m	Espace d'éléments finis discontinus	
w_i	Coefficients de pondération (ou poids) d'intégration numérique	
x	Coordonnée longitudinale	m
y	Coordonnée latérale	m
Z	Élévation de la surface libre de l'eau ($Z = z_f + h$)	m
z	Coordonnée verticale	m
z_f	Élévation du lit du canal	m
$\mathbf{K}_{1,2}$	Vecteurs propres de la matrice jacobienne	-
$\hat{\mathbf{e}}$	Vecteur unitaire du système x, y, z	-
\mathbf{N}	Fonction de base (ou test)	-

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités et problématique

Les inondations sont parmi les catastrophes naturelles qui causent des pertes et des dommages matériels dans le monde. Elles constituent le risque le mieux distribué sur la planète (*White, 2001*). En 2011, les inondations ont représenté une catastrophe naturelle sur deux et ont été responsables de 20.4% des décès liés aux catastrophes naturelles dans le monde (*Guha-Sapir et al., 2012*). De plus, leur grande fréquence dans certaines régions du globe, leur dépendance face aux changements climatiques et la pression démographique de plus en plus forte sur les rives des cours d'eau en font des événements de plus en plus préoccupants et difficiles à gérer. L'inondation n'est pas seulement une question technique, c'est aussi un problème qui touche de près les domaines économiques, sociaux, légaux, environnementaux, etc (*Yahiaoui, 2012*). Les crues du Yangtsé, au cours du dernier siècle, ont provoqué plusieurs inondations désastreuses. Après la crue de 1931, 3.7 millions de chinois moururent principalement de faim. En 1954, une nouvelle crue du fleuve fit 30 000 victimes (*Clark, 1995*). Entre 1998 et 2008, plus d'une centaine de grandes inondations ont eu lieu en Europe engendrant la mort de 700 personnes et le déplacement de plus d'un demi-million de personnes. On cite pour exemple l'épisode de mai 2014 en Bosnie-Herzégovine et en Serbie, où les plus importantes précipitations depuis 120 ans de mesures météorologiques ont été enregistrées entraînant des inondations catastrophiques dans les Balkans. On a recensé 59 morts au total, 33 en Serbie, 24 en Bosnie-Herzégovine et 2 en Croatie. En Bosnie-Herzégovine, 100 000 personnes ont été évacuées, ce qui représente le plus important exode depuis la guerre de 1992-95 dans ce pays (*Habert, 2016*). L'inondation du Midwest américain de 1993 dans le bassin du fleuve Mississippi et de ses affluents est l'une des plus dévastatrices et des plus coûteuses de l'histoire des États-Unis. Elle a affecté une superficie de 80 000 km² causant pour plus de 15 milliards de dollars de dégâts et la mort de 50 personnes (*Larson, 1996*). Entre 1985 et 1999, l'Europe, l'Asie, les Amériques (Nord, Centre, Sud), l'Afrique et l'Océanie ont enregistré respectivement 430, 900, 630, 330 et 130 cas d'inondations. Parmi l'ensemble des continents, l'Asie est celui qui paie le plus lourd tribut aux inondations. Le pourcentage d'événements dommageables est de 37%, et celui des pertes économiques est de 69%.

L'Algérie, est parmi les régions méditerranéennes qui sont affectées par des crues qui en-

gendrent des inondations dues généralement aux débordements des cours d'eau traversant des villes et des agglomérations. Ces crues dont l'apparition est soudaine, souvent difficilement prévisibles, de temps de montée rapide et de débit spécifique relativement important, elles sont généralement liées à des épisodes pluvieux intenses et se manifestent sur des bassins de taille modérée (Yahiaoui, 2012). 485 (1/3 de 1541) des communes du pays, sans distinction de situation géographique, sont sujettes à des risques d'inondations, selon les statistiques de la protection civil (Sardou *et al.*, 2016). Plusieurs catastrophes provoquées par ses crues ont été recensées en Algérie. En Octobre 1994, les inondations à travers le pays ont entraîné 60 décès et des centaines de disparus pendant 10 jours de mauvais temps (Meddi *et Toumi*, 2015). L'inondation spectaculaire et catastrophique, du 10 Novembre 2001, sur l'Algérois à Bab El Oued (Bassin versant de l'oued Koriche) ont été les plus meurtrières de toutes celles qui ont été enregistrées dans les pays du bassin méditerranéen. Elles ont fait plus de 710 décès, plus de 115 disparitions, affecté plus de 45 000 personnes et provoqué des dommages matériels d'un montant supérieur à 33 milliards de dinars selon les statistiques du Conseil National Économique et Social. L'inondation qui a eu lieu à Ghardaïa (Bassin versant de l'oued M'Zab) le 01 octobre 2008 ont fait 100 morts, 86 blessées, 756 familles sinistrées et des dégâts matériels estimées à 200 millions d'euros (Atallah *et al.*, 2016). Nous citerons, dans le tableau 1.1, quelques inondations importantes qu'a connu le pays ces quatre décennies et leurs conséquences en perte humaine et dégâts matériels :

TABLE 1.1 – Dommages causées par quelques inondations à l'échelle nationale.

Lieu	Date	Bilan des dégâts
Azazga (Tizi Ouzou)	12 octobre 1971	40 morts
Tizi Ouzou	28 au 31 mars 1974	52 décès dans la wilaya, 18000 sinistrés et des dégâts évalués à l'époque à 27 millions de DA
El Eulma (Sétif)	1 ^{er} septembre 1980	44 décès
Annaba	11 novembre 1982	26 morts et 9500 sinistrés
Jijel	29 décembre 1984	29 morts et 11000 sinistrés
Bordj Bou Arréridj	23 septembre 1994	16 décès et des dégâts évalués à 10 milliards de DA
Bab-El-Oued (Alger)	10 novembre 2001	710 décès, 115 disparus et 33 milliards de DA de pertes
Ghardaïa	2 octobre 2008	100 morts, 86 blessées, 756 familles sinistrées et des dégâts matériels estimées à 200 millions d'euros

Les mesures préventives relatives aux inondations sont nombreuses. La protection physique contre les inondations consiste généralement en des actions sur le cours d'eau à travers la canalisation des débits, le calibrage du lit mineur, mais aussi en des aménagements tels que la construction de digues de protection, de barrages écrêteurs de crues ou des canalisations d'éva-

uation. Au titre des mesures préventives, figure également l'établissement des cartes d'inondations identifiant les zones inondables selon les scénarios les plus critiques pour l'établissement d'un plan d'évacuation d'urgence. La mise en oeuvre de telles mesures de protection nécessite l'intervention de l'hydraulicien dans la description de la physique du phénomène d'inondation et la dynamique des écoulements subséquents. La prédiction des zones inondables doit être de plus en plus précise et ce à travers le développement d'un modèle numérique adéquat de simulation ([Zokagoa, 2011](#)).

1.2 Importance de la simulation

Aujourd'hui c'est un fait, et Cédric Villani, médaille Fields 2010, le rappelait encore récemment : « dans tous les domaines scientifiques, la simulation numérique est véritablement devenue le troisième pilier de la recherche, aux côtés de la théorie et de l'expérience » ([Villani, 2011](#)).

Historiquement, l'étude de la mécanique des fluides était divisée en deux branches bien distinctes que sont la théorie et l'expérience. La première atteint ses limites lorsque les configurations géométriques se complexifient, que les modèles d'équations à résoudre ne sont plus simplifiables et que les solutions exactes restent inconnues ([Gérald, 2013](#)). La seconde trouve ses limites dans la faisabilité technique ou temporelle d'une manipulation en raison de l'extension du domaine physique de l'étude considérée ou de l'impossibilité de reproduire les conditions réelles en laboratoire. Par ailleurs les coûts financiers de l'approche expérimentale peuvent être très élevés. En réponse à ces limitations, la simulation numérique est apparue comme la troisième branche et représente une véritable alternative pour prédire l'évolution de phénomènes physiques. L'approche de la simulation numérique appliquée à l'industrie améliore l'efficacité de la production, et réduit le temps de conception technique et les coûts financiers ([Kesserwani, 2008](#); [Ghoshine, 2009](#)). Aujourd'hui l'ordinateur est devenu un outil incontournable d'investigation numérique et les modèles physiques, bien qu'ils restent indispensables dans quelques domaines clés comme les évacuateurs de crue et la stabilité des digues, sont devenus sur d'autres sujets des outils de validation. Au cours de la dernière décennie, la simulation numérique s'est imposée comme un outil d'investigation important pour les études de l'hydraulique et de l'environnement. Le développement des moyens de la simulation s'est vu amélioré, sous l'action conjuguée de deux grandes tendances : d'une part, le progrès technique, avec une progression exponentielle des capacités en rapidité et en mémoire des ordinateurs, et, d'autre part, l'avènement de nouveaux algorithmes et méthodes numériques ([Hervouet, 2003](#)).

À travers une simulation d'écoulements à surface libre nous pouvons déterminer les débits et les profondeurs d'eau à chaque point du cours d'eau, et pendant chaque intervalle de temps durant la période de la crue. Ces résultats sont d'un intérêt majeur pour dimensionner et protéger les ouvrages riverains (ponts, déversoirs, retenues...) ainsi que les villes traversées par des oueds contre les inondations. Ils permettent de localiser les zones menacées par le débordement et d'avoir une estimation correcte du pic de la crue au cours de son passage dans le tronçon étudié ([Hasbaia et Benayada, 2010](#)). Ces modèles jouent un rôle central dans l'évaluation, la sélection et dans certains cas, la mise en oeuvre de mesures préventives ([Schubert et Sanders, 2012](#)).

L'approche de la simulation numérique est aussi utilisée par les institutions de service public pour créer des plans d'urgence ou plan de prévention des risques en cas d'inondation dans les cours d'eau, de tsunamis ou de rupture du barrage (*Kesserwani, 2008; Ghostine, 2009*).

1.3 Équations de Saint–Venant

Suite aux précipitations, les caractéristiques d'écoulement dans les oueds (débit et hauteur d'eau) s'élèvent graduellement jusqu'à un maximum, puis s'abaissent pour revenir à l'état initial sec. Les crues générées à l'exutoire d'un bassin-versant se propagent le long de son cours d'eau principal, avec une atténuation et un retard des débits maximums à cause des frottements et des stockages. Ce phénomène est caractéristique des écoulements transitoires qui sont gouvernés par les équations de *Saint–Venant* (*Hasbaia et Benayada, 2010*). Dans notre travail de recherche, nous considérons le modèle de *Saint–Venant* : bien que ce soit relativement plus simple que celui de *Navier–Stokes*, celui-ci permet d'obtenir suffisamment d'informations pour l'ingénieur hydraulicien de terrain (*Ghostine, 2009*).

Les équations de *Saint–Venant* sont utilisés pour décrire les écoulements réels non permanents, non uniformes et régissant dans les régions de faible profondeur par rapport aux dimensions latérales d'où leur appellation "équations d'eau peu profonde" ou en anglais "Shallow Water Equations". Ces équations sont valables pour la modélisation de la plupart des types d'écoulements rencontrés dans les zones côtières, rivières, canaux, etc. Ils peuvent être utilisés pour prédire les ondes de crue, les tsunamis et les inondations. Les équations des eaux peu profondes peuvent être combinés avec d'autres équations (par exemple, de transport ou de réaction) pour la simulation de la propagation de contaminants, de température, le transport solide et d'autres problèmes d'ingénierie (*Delis et Katsaounis, 2005; Gallardo et al., 2007; Rahmani Firoozjaee et Afshar, 2011*).

Les équations de *Saint–Venant* qui consistent en des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et hyperboliques, et leur solution analytique ne peuvent être obtenue, sauf dans des cas particuliers (voir par exemple les références : *Ritter (1892); Stoker (1957); Thacker (1981); MacDonald et al. (1995); MacDonald (1996); MacDonald et al. (1997); Wu et al. (1999); Iacono (2005)*).

La solution numérique des équations de *Saint–Venant* constitue un défi pour les chercheurs par un certain nombre de facteurs. Tous d'abord, les écoulements modélisés sont caractérisés en particulier par une grande complexité topographique et morphologique ; des frontières d'écoulement très ouvertes ; une forte advection, voire une pure advection dans le cas de rupture de barrage sur un fond plat et glissant (sans frottement) ; une échelle variable dans l'espace (d'une dizaine à quelques milliers de mètres) et dans le temps (de quelques minutes à quelques jours) (*Shi, 2006; Chaabelasri, 2011*).

D'autre part, les écoulements d'eaux peu profondes sont également caractérisés par l'exondation ou l'inondation d'une zone (passage d'une zone sèche à une zone mouillée et inversement). Ce phénomène des bancs couvrants et découvrants caractérise tout cours d'eau sujet à une oscillation de sa surface libre et le mouvement des frontières humide/sec en résultant constitue un aspect très important dans une étude préventive des inondations. Le traitement

numérique de ces phénomènes est très souvent source d’erreurs de stabilité non négligeables pouvant se traduire par la génération d’une hauteur d’eau irréaliste, infinie ou négative. Il en résulte un schéma instable ou non conservatif. La résolution adéquate de ce problème a restée, pendant des décennies, un défi pour les modèles numériques (*Zokagoa, 2011*).

En plus de ces facteurs physiques, il y’a des difficultés supplémentaires résultant de la nature mathématique de ces équations qui constituent un système d’équations couplées aux dérivées partielles hyperboliques et non linéaires. Le plus important est le couplage entre la profondeur de l’eau et le champ de vitesse horizontale qui pourrait conduire à des oscillations spatiales parasites si les schémas numériques ne sont pas choisis avec soin (*Aizinger et Dawson, 2002*).

Le modèle de *Saint–Venant* apparaît sous deux formes fondamentales quand on considère ses variables d’état : la forme conservative qui s’appuie sur la hauteur d’eau et les composantes du débit spécifique et la forme non-conservative qui utilise également la hauteur d’eau mais traite le mouvement à l’aide des variables primitives de vitesse. Pour l’approximation numérique des équations de *Saint–Venant*, la forme conservative est le meilleur choix (*MacDonald et al., 1997*). En effet, les logiciels de recherche efficaces sont basés sur la forme conservative des équations de *Saint–Venant* (*Vázquez-Cendón, 1999; Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon, 2000; Toro, 2001*). Dans ce cas, le solveur numérique est apte à simuler des problèmes d’écoulement admettant des solutions discontinues et non différentiables. Dans le contexte de l’hydraulique à surface libre, les équations du ressaut hydraulique mobile représentent une solution faible des équations de *Saint–Venant* (*Vila, 1986*).

Dans le contexte de la modélisation des écoulements à surface libre, la simulation de dispositifs hydrauliques peut être traitée avec des approches unidimensionnelle (1D), bidimensionnelle (2D) ou tridimensionnelle (3D). Cette dernière est basée sur la résolution des équations de *Navier–Stokes*. Dans le cadre d’une simulation d’une onde de crue ou d’une inondation, l’approche tridimensionnelle est inenvisageable. Les ressources informatiques actuelles sont incompatibles avec de telles simulations. Elle ne peut être considérée qu’à une échelle très locale, comme par exemple, la modélisation de l’écoulement 3D au voisinage des ouvrages hydrauliques.

Plusieurs types de code de calcul existent aujourd’hui chacun faisant appel à des méthodes de résolution différentes. L’analyse des types de codes de calcul utilisés en fonction des objectifs visés a été présentée par *Stelling et Verwey (2005)*. Les codes de calcul à usage commercial privilégient généralement la rapidité de calcul au détriment de la précision à l’inverse d’un grand nombre de codes de calcul développés notamment par des organismes de recherche. Un des objectifs de cette thèse étant de proposer un algorithme de modélisation robuste et précis. L’accent sera mis sur la méthodologie de calcul et la fiabilité des méthodes numériques employées.

Les logiciels unidimensionnels permettent une modélisation relativement simple des cours d’eau du fait des hypothèses utilisées. En effet, ils négligent les écoulements dans la direction transversale à l’axe du cours d’eau modélisé et font l’hypothèse d’une répartition des vitesses homogène sur la section d’écoulement. Ces codes de calcul sont les précurseurs des outils de modélisations des écoulements. Cependant, Ils sont aujourd’hui encore largement utilisés, notamment dans les domaines de l’ingénierie et de l’évaluation du risque d’inondation. Les faibles besoins en données topographiques (comparativement aux modèles de plus haute dimension) et

la relative rapidité de calcul compensent les hypothèses simplificatrices sur lesquelles ces logiciels sont basés. Ces modèles 1D resteront utiles, en particulier pour des applications à grandes portées (par exemple, plus de 50 km) ou sur une longue période de temps (par exemple, plusieurs jours). Exemple de modèles comprennent HEC-RAS (Brunner, 2010), MIKE11 (DHI, 2009), CCHE1D (Vieira et Wu, 2002), SSR-1D (Huang et Greimann, 2011) et ISIS (Evans et al., 2007). Toutefois leurs limitations, sont bien connus et il y'a des situations où la modélisation multidimensionnelle est nécessaire notamment dans le cas d'écoulements plus complexes ou pour lesquels les hypothèses des codes unidimensionnels sont trop simplificatrices. En effet l'emploi de la modélisation bidimensionnelle implique un cout important en termes de collecte de données, de construction du maillage et de temps de calcul. À l'heure actuelle, ce type de modélisation est toutefois de plus en plus employé pour permettre la production d'atlas cartographique des zones inondables ou les Plans de Prévention des Risques inondations (PPR) et pour certaines études d'impact (impact de rupture de barrage). Il est aujourd'hui possible de trouver un nombre important de codes de calcul 2D. Des exemples de codes 2D commerciaux ou du domaine public comprennent MIKE21 (DHI, 2011), RMA2 (Donnell et al., 2011), CCHE2D (Jia et Wang, 2001), River2D (Steffler et Blackburn, 2002), TELEMAC2D (Hervouet, 2003), etc.

Bien que la quasi-totalité des logiciels résolvent les équations de *Saint-Venant* la méthode de maillage de la zone modélisée et la méthode de résolution des équations posées peuvent varier de manière importante d'un code à l'autre. Deux grands types de maillages sont à distinguer : les maillages structurés et les maillages non structurés. Pour les maillages structurés, les points de calcul sont disposés de manière organisée ; tous les points partageant un même indice étant disposés sur une même courbe. En revanche, pour les maillages non structurés, aucune organisation particulière des points de calcul n'est nécessaire. Dans le cas des maillages structurés, la résolution de systèmes d'équations multidimensionnels est généralement faite par la résolution de plusieurs problèmes unidimensionnels. Ce type de maillage peut toutefois être problématique pour représenter des topographies réelles. Par ailleurs, les techniques de résolutions de systèmes d'équations multidimensionnels sous forme d'une succession de problèmes unidimensionnels peuvent produire des solutions fortement anisotropes et particulièrement sensibles à l'orientation du maillage (Guinot et Soares-Frazaõ, 2006). De ce fait, le code de calcul développé dans le cadre de cette thèse utilisera un maillage de calcul non structuré.

1.4 Les méthodes numériques

Simuler l'écoulement à surface libre revient à résoudre le système de *Saint-Venant* à l'aide d'un schéma numérique robuste c'est-à-dire capable de donner une solution numérique proche de la réalité quelles que soient les particularités de l'écoulement. En général, les techniques numériques de résolution des équations de *Saint-Venant* peuvent être classifiées suivant la manière de discrétisation et de transformation utilisée. Les quatre types de méthodes les plus utilisées sont : les méthodes des caractéristiques (MC) ; des différences finies (MDF) ; des éléments finis (MEF) et des volumes finis (MVF).

1. La MC est une technique analytique pour résoudre les équations de type hyperbolique. Elle consiste à calculer la solution à un instant donné en allant chercher l'information par le biais des caractéristiques le long desquelles se propage cette information. Les équations différentielles ordinaires qui ont résulté peuvent être aussi résolues numériquement. Des méthodes analytiques et numériques appliquées aux équations unidimensionnelles de *Saint-Venant* sont exposées en détail par *Cunge et al.* (1980). Dans le cas du traitement d'un modèle unidimensionnel, la méthode des caractéristiques offre l'avantage de la possibilité de déterminer la position des conditions aux limites (en amont ou en aval). Cela assure que le problème étudié est bien posé. De plus, la méthode est plutôt adaptée aux systèmes à géométrie simple et peu variable (*Kovacs, 1988*). Cependant, la méthode des caractéristiques exige la continuité des variables d'écoulement. Donc, les cas de discontinuité (e.g. : ressaut hydraulique) sont exclus du champ de son application (*Graf et Altinakar, 2009*). En plus, la programmation de cette méthode est difficile par rapport à la MDF. Elle devient plus complexe dans certains cas tel que le calcul de la propagation de l'onde dans les canaux non prismatiques.
2. Les MDF consistent à discrétiser, moyennant un maillage de calcul prédéfini, chaque dérivée partielle d'une variable dans les équations aux dérivées partielles (EDP) à l'aide du développement en série de Taylor de la valeur de cette variable. Selon le type de développements utilisés, on obtient des expressions explicites ou implicites.
 Le schéma explicite possède un avantage de simplicité de calcul, mais pose des problèmes de stabilité numérique. Il s'agit de respecter la condition de *Courant, Friedrichs, et Lewy* ou CFL. Les principaux schémas de calcul explicite sont : le schéma "Diffusif" ou de Lax-Wendroff (*Lax et Wendroff, 1960*), le schéma modifié de Lax-Friedrichs (*Burguete et García-Navarro, 2004*), le schéma de MacCormack (*MacCormack, 1969*), le schéma Lambda (*Moretti, 1979*) et, enfin, le schéma de Gabutti (*Gabutti, 1983*).
 Les schémas implicites, d'utilisation plus répandue, peuvent avoir une formulation linéaire ou non-linéaire, et sont aussi classés selon la grille numérique adoptée. Les principaux schémas numériques adoptés sont : le schéma "Full implicit", à 4 points, proposé par *Stoker (1957)* et modifié par *Chen (1973)*; le schéma de *Preissmann (1961)*; le schéma de Beam-Warming (*Anderson et al., 1984*) et le schéma de Vasiliev (*Vasiliev, 1970*). Le schéma de Preissmann, avec sa résolution par la méthode ou "Double Balayage", présente une bonne précision et elle est d'une utilisation assez répandue. Cette méthode est largement utilisée dans les codes numériques.
 Les MDF apportent, grâce à leur simplicité, la possibilité de construire des schémas numériques d'ordre élevé à faible coût. Cependant, elles semblent plus difficiles à mettre en œuvre pour les problèmes à géométrie complexe où la construction d'un seul maillage structuré est difficile (*Shi, 2006*). Malheureusement celles-ci tombent en défaut lorsqu'apparaissent des discontinuités du type ressaut hydraulique ou encore des changements de régime d'écoulement (Nombre de Froude proche de 1) (*Meselhe et Holly Jr., 1997*)
3. La MVF a été introduite initialement par *Godunov (1959)* pour la résolution des équations d'Euler non-linéaires. Elle est particulièrement adaptée à la discrétisation des équations hyperboliques acceptant des solutions discontinues, comme c'est le cas des équations de

Saint-Venant. Il s'agit ici de découper l'espace en cellules – construites par exemple à partir d'un maillage éléments finis classique – puis d'intégrer le système considéré sur chaque cellule et sur un pas de temps. Apparaissent alors les moyennes des solutions sur chaque cellule – d'où des solutions constantes par morceaux et donc naturellement discontinues- et des termes de bords, autrement dit les flux échangés entre les cellules au niveau de leur frontière, ou interface – ainsi le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine, d'où un algorithme conservatif (*Audusse, 2004*).

L'intérêt de la méthode des volumes finis réside dans le fait qu'elle représente une loi de conservation physique, et permet de réduire d'un ordre de dérivée les EDP. La méthode des volumes finis non structurés assure donc non seulement la conservation de la masse – une propriété importante dans le calcul des écoulements de fluides – mais permet également une prise en compte parfaite de la géométrie complexe du domaine de calcul.

Il y avait, dans les années récentes, des avancements importants sur la méthode numérique pour résoudre les équations de *Saint-Venant*, en particulier les schémas de volumes finis (e.g., *LeVeque, 2002; Toro, 2009*).

4. La MEF consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini de sous domaines appelés éléments. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément à l'aide des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation coïncide avec les nœuds de cet élément relatifs aux valeurs de l'inconnue. En un sens, la méthode est une illustration du précepte cartésien qui préconise de diviser la difficulté rencontrée en plusieurs parties plus faciles à résoudre puis à reconstruire la solution globale en assemblant les solutions partielles. L'avantage des MEF réside dans la flexibilité du maillage qui permet une approximation spatiale plus fine des limites irrégulières. Il faut noter qu'avec cette méthode on peut choisir autant de nœuds qu'on veut par élément, ce qui donne une meilleure précision de la solution (*Abdallah, 2005*). Abondamment utilisées dans l'étude du système de *Saint-Venant* et validées, ces méthodes fournissent aujourd'hui encore des algorithmes rapides et des résultats souvent satisfaisants (*Katsaounis et Makridakis, 2003; Ortiz et al., 2006; Rahmani Firoozjaee et Afshar, 2011; Atallah et Hazzab, 2013*). Ces méthodes offrent à la fois un cadre théorique rigoureux et une grande souplesse pour discrétiser les domaines de calcul (*Hervouet, 2003*), et peuvent être pour certains problèmes numériquement plus précises que les MDF ou MVF. Cependant, les méthodes classiques d'éléments finis ne sont pas naturellement très bien adaptées ni au caractère discontinu des solutions, ni au caractère conservatif du système (*Audusse, 2004*). Ces dernières années, les méthodes de Galerkin discontinues (GD) ont fait l'objet de plusieurs travaux visant à leur mise au point pour la résolution numérique des équations de *Saint-Venant* (e.g., *Li, 2006; Xing et Shu, 2006; Ern et al., 2008; Bunya et al., 2009; Ghostine et al., 2009; Ghostine, 2009; Kesserwani, 2008; Zhang et Shu, 2010; Kesserwani et Liang, 2010, 2012; Lai, 2010; Lai et Khan, 2012a,b,c; Lai, 2012; Lee, 2014; Duran et Marche, 2014; Lee et Lee, 2015*)

Dans la conception de telles méthodes numériques nous nous trouvons face à, au moins, trois difficultés majeures (*Kesserwani, 2008; Ghostine, 2009*) :

1. la conservation, une condition essentielle et obligatoire de façon que la présence des discontinuités hydrauliques soit prise en compte automatiquement dans la solution,

2. la non génération d'oscillations parasites aux voisinages des forts gradients,
3. le traitement convenable des termes sources afin de préserver la haute précision du modèle numérique dans la résolution des problèmes impliquant des termes sources pouvant admettre essentiellement des fonctions non différentiables (comme par exemple un lit irrégulier).

Quel que soit la nature de la méthode numérique développée, chacune de ces difficultés est, à elle seule, difficile à résoudre ; la résolution simultanée des trois difficultés évoquées ci-dessus est une tâche redoutable dans l'analyse numérique de lois de conservation hyperbolique. À l'heure actuelle, il existe plusieurs approches pour la construction de schémas numériques qui tentent de surmonter ces difficultés. La classe des méthodes numériques de type *Godunov* (1959) est souvent considérée comme une des plus efficaces. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à la conception d'un schéma numérique utilisant l'approximation spatiale de type élément fini de Galerkin couplé à une discrétisation temporelle de Runge-Kutta. Ce schéma numérique sera désigné par l'acronyme RKDG (correspondant à Runge-Kutta Discontinuous Galerkin). Il conserve toutes les propriétés avantageuses des méthodes numériques de type *Godunov* (1959). Cette méthode résout les systèmes de type hyperboliques non linéaires avec terme source s'écrivant sous forme conservative et permet donc la capture des chocs dans le cadre de la solution numérique. Les méthodes RKDG sont conçues avec une procédure de limitation de pente qui permet d'éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. Ainsi, l'avantage essentiel de ce type de méthodes numériques est qu'elles mènent à un résultat numérique de bonne qualité avec moins d'effort informatique dans le traitement des termes sources et avec un nombre de cellules de calcul plus réduit que les autres classes traditionnelles de schémas numériques (*Zhou et al.*, 2004). En outre, les approximations spatiales de type GD sont locales, et quel que soit l'ordre désiré de la méthode conçue, le schéma numérique ne recourt qu'aux informations des cellules de calcul voisines. Contrairement aux MVF ou MDF, cette dernière propriété constitue un avantage essentiel dans le contexte de la programmation parallèle et dans les traitements des problèmes hydrauliques impliquant des conditions aux limites internes et externes.

1.5 Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de proposer un modèle numérique de simulation des écoulements à surface libre en général (des inondations en particulier). Le modèle résout les équations de *Saint-Venant* en utilisant la formulation de GD. Cette formulation présente des avantages aux méthodes traditionnelles d'éléments finis en facilitant l'implémentation de l'ordre élevé et donne des souplesses par rapport à l'adaptation de maillage. En simulations numériques, un des challenges est de disposer d'un code robuste et précis en calcul capable de simuler des écoulements uni et bidimensionnels à surface libre en prenant en compte la complexité de la topographie et la présence des épisodes de couvremet/découvremet. Une des applications est la simulation de la propagation des ondes de crues et le phénomène réel de rupture de barrage. Différents schémas d'approximation des flux numériques seront étudiés. Différents limiteurs de

penne seront testés et leurs effets seront comparés. Un certain nombre de tests numériques sera exécutée pour valider ces modèles.

1.6 Organisation et présentation du travail

La thèse s’articule autour de quatre grandes parties, précédées par une introduction générale et suivies d’une conclusion générale. Chaque partie est structurée en un ou deux chapitres abordant chacun un niveau de description différent.

Le chapitre 1 situe le problème et présente les énoncés constitutifs de la thèse avancée. Elle met l’accent sur les contributions avant de présenter la structure du travail.

La première partie présente la partie théorique, où la dérivation des modèles mathématiques (1D et 2D) utilisés et les méthodes de discrétisation seront présentées de façon détaillée. Le chapitre 2 concernera une étude théorique du modèle mathématique utilisé, composé des équations de *Saint-Venant* uni et bidimensionnel, incluant un terme de friction, ainsi qu’un terme tenant compte des variations de topographie. Nous montrons que les équations régissant l’écoulement bidimensionnel sont abouties à l’aide d’une dérivation rigoureuse à partir des équations de *Navier-Stokes* avec une adoption de certaines hypothèses simplificatrices caractérisant la nature de l’écoulement. Le chapitre 3, quant à lui, présente les concepts de base de la MEF et en particulier la méthode de GD pour les lois de conservation hyperboliques. En outre, nous exposerons quelques notions mathématiques, telles que les fonctions de forme, la transformation isoparamétrique, l’intégration numérique, les solveurs de Riemann approchés, et l’intégration temporelle. Nous introduirons d’autres caractéristiques du schéma GD, tels que le flux numérique et le limiteur de pente assurant le caractère TVD (Total Variation Diminishing ou de variation totale décroissante).

La deuxième partie porte sur la simulation unidimensionnelle. Elle se subdivise en deux chapitres éclairant chacun une facette du problème. Le chapitre 4 concerne l’application de la méthode GD aux équations unidimensionnelles d’écoulements en eaux peu profondes dans les canaux rectangulaires. Nous présentons également une méthode d’éléments finis continue qui sera appelée la méthode Caractéristique Dissipative de Galerkin (CDG). Cette méthode a été choisie comme élément de comparaison pour le schéma numérique GD. Le but de ce chapitre est de montrer la supériorité de la méthode GD par rapport aux autres méthodes classiques d’éléments finis. Ainsi, les deux méthodes numériques GD et CDG seront validés à travers un banc d’essai numérique impliquant des problèmes stationnaires et transitoires avec des écoulements fluvial, torrentiel et mixte (tous possédant une solution de référence ou des résultats expérimentaux). Le chapitre 5 illustre l’application de la méthode GD aux équations unidimensionnelles d’écoulements en eaux peu profondes dans les canaux non-rectangulaires et non-prismatiques. Nous discuterons également le choix des équations d’écoulements en eaux peu profondes et ses effets. Des problèmes hydrauliques sont simulés pour comparer les différents flux numériques. Les résultats numériques sont comparés avec les solutions analytiques et les mesures en laboratoire.

La troisième partie aborde la simulation bidimensionnelle. Elle se scinde aussi en deux chapitres ; l’application de la méthode GD aux équations bidimensionnelles d’écoulements en

eaux peu profondes dans les canaux naturels est présenté et validé au chapitre 6. On décrit, dans ce chapitre, l'application de limiteur de pente et l'approximation de flux. Le chapitre 7 est une application du modèle bidimensionnel à un problème réel : la rupture du barrage de Malpasset, un rare exemple d'un écoulement dû à une rupture de barrage, sur un fond de topographie très complexe, avec problème de bancs couvrants et découvrants . Une étude comparative entre les résultats numériques obtenus par le modèle et les données recueillies lors de la catastrophe de Malpasset est présentée.

La quatrième partie qui s'articule sur le chapitre 8 donne la simulation de la propagation des ondes de crues dans l'oued Mekerra.

La conclusion générale donne une évaluation des solutions proposées en termes de contributions avant d'ouvrir les horizons vers des orientations potentielles dans le futur.

Chapitre 2

Modèle mathématique des écoulements en eaux peu profondes

2.1 Introduction

Les modèles hydrodynamiques peuvent simuler des écoulements non permanent en utilisant les équations dérivées des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces types de modèles sont largement utilisés pour la modélisation hydraulique des écoulements en rivières car ils peuvent calculer des problèmes non-permanents tels que la simulation de propagation des ondes de crue. Les deux modèles les plus utilisés sont le modèle *Navier-Stokes* et le modèle de *Saint-Venant*.

Le modèle de *Navier-Stokes* utilise, comme équations gouvernantes, les équations de *Navier-Stokes* dérivées des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les équations de *Navier-Stokes* peuvent raisonnablement décrire les propriétés dynamiques des problèmes de propagation des inondations car ces équations expriment l'écoulement de fluide en trois dimensions et englobent les effets de la turbulence et de diverses forces extérieures. Cependant, les modèles basés sur les équations de *Navier-Stokes* sont considérées comme inappropriés pour la simulation des problèmes de propagation des crues dans les cours d'eau naturelles, à l'exception de certains cas particuliers (modélisation de l'effet de la turbulence dans une petite zone d'un système fluvial), car ils sont trop compliqués et nécessitent de nombreuses données et de puissance informatique. Bien que les modèles basés sur la moyenne de Reynolds appliquée aux équations de *Navier-Stokes* (*Reynolds Averaged Navier-Stokes* ou encore RANS) aient été développés pour minimiser les complications rencontrées, il existe encore beaucoup de difficultés pour utiliser les équations de *Navier-Stokes* pour modéliser les problèmes réels de propagation des inondations.

Les équations des eaux peu profondes peuvent être dérivées soit par l'intégration suivant la verticale des équations de *Navier-Stokes*, soit par l'application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement tout en adoptant un certain nombre d'hypothèses. Cependant, le modèle de l'eau peu profonde présente un certain potentiel d'erreurs en raison des hypothèses utilisées pour dériver ces équations. En dépit de ces lacunes, le modèle d'eau peu profonde est le plus utilisé à l'heure actuelle pour simuler les problèmes de propagation des

inondations surtout, dans le cas de modélisation macroscopique d'un grand bassin hydrographique. Il produit généralement des solutions raisonnables avec des ressources informatiques limitées et a une forme plus simple que les équations de *Navier-Stokes*.

Les équations des eaux peu profondes peuvent être exprimées par diverses formes selon la dimension spatiale et le choix des variables conservées. L'écoulement dans un long canal peut être traité par les équations unidimensionnelles d'eau peu profonde, tandis que la propagation de l'onde d'inondation en plaine d'inondation peut être décrite par les équations bidimensionnelles d'eau peu profonde.

Nous présentons, dans ce chapitre, l'obtention des équations uni et bidimensionnelles d'eau peu profonde. Nous décrivons les hypothèses et les moyens d'approximation adoptés pour aboutir aux équations finales régissant les écoulements à surface libre. Nous récapitulons les modèles mathématiques sous formes algébriques précises qui seront utilisées tout au long de ce travail pour décrire les écoulements en eaux peu profondes.

2.2 Établissement des équations de *Saint–Venant* unidimensionnelles

L'écoulement dans un canal à surface libre est unidimensionnel lorsque les variations en largeur et en profondeur du canal des variables (profondeurs, débit et vitesse) sont négligeables par rapport aux variations longitudinales (de telle sorte qu'une valeur transversale moyenne soit représentative). Quoique ce type d'écoulement n'existe pas dans la nature, l'approximation unidimensionnelle peut être utilisée, par exemple, lors de l'étude d'une propagation d'une onde de crue sur une centaine de kilomètres.

Un modèle mathématique unidimensionnel des écoulements à surface libre peut être développé par l'application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à un volume de contrôle.

Les équations de *Saint–Venant* unidimensionnelles sont écrites sous certaines hypothèses qui sont les suivantes :

1. la vitesse est unidimensionnelle, (autrement dit la vitesse est uniforme sur la section);
2. la distribution des pressions est hydrostatique dans une section (soit une accélération faible devant la pesanteur, soit une faible pente de la surface libre et un grand rayon de courbure);
3. les effets de turbulence et frottement sont représentées par des lois empiriques régissant l'écoulement uniforme;
4. la pente du lit du canal est faible de sorte que le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'horizontale peut être remplacé par l'unité;
5. le liquide est supposé incompressible.

Cependant, ces hypothèses n'imposent pas de restriction sur la variation longitudinale du canal ainsi que sur la géométrie d'une section transversale.

Pour faciliter la modélisation, on peut assimiler les écoulements en rivières par les écoulements dans un canal. La figure 2.1 illustre la notation utilisée dans la procédure de dérivation : A est la section transversale mouillée, h est tirant d'eau, z_f est l'élévation du lit du canal, Z est l'élévation de la surface libre de l'eau ($Z = z_f + h$), ζ est une variable d'intégration désignant la profondeur, $b(\zeta)$ est la largeur du canal pour une hauteur ζ , et T est la largeur du canal à la surface libre de l'eau.

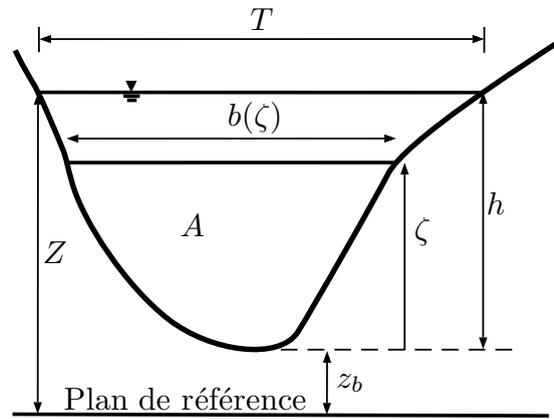


FIGURE 2.1 – Section transversale d'un canal.

Considérons un volume de contrôle Ω (Figure 2.2) situé entre deux sections du canal situées aux abscisses x_1 et x_2 et entre les temps t_1 et t_2 . Les équations de *Saint–Venant* sont composées par l'équation de continuité ou l'équation de conservation de la masse et l'équation fondamentale de la dynamique connue en mécanique sous le vocable de seconde loi de Newton.

L'équation de continuité exprime le principe de conservation de la masse, ce qui revient à dire que la variation du débit massique d'un élément de volume pendant un temps dt est égale à la masse de fluide entrante dans ce volume déduite de la masse de fluide sortante.

Le taux d'écoulement de la masse dans le volume de contrôle peut être défini par l'intégrale temporelle de la différence entre les débits massiques d'entrée et de sortie :

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho u A)_{x_1} - (\rho u A)_{x_2}] dt \quad (2.1)$$

et doit être égale, suivant le principe de conservation de la masse, au variation de masse dans un volume de contrôle entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_1} - (\rho A)_{t_2}] dx \quad (2.2)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide (supposé constante), et u est la vitesse moyenne de l'écoulement. Par conséquent, la relation de conservation de masse pour une masse volumique constante est :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_1} - (A)_{t_2}] dx + \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_1} - (Q)_{x_2}] dt \quad (2.3)$$

Où $Q = uA$ est le débit d'écoulement.

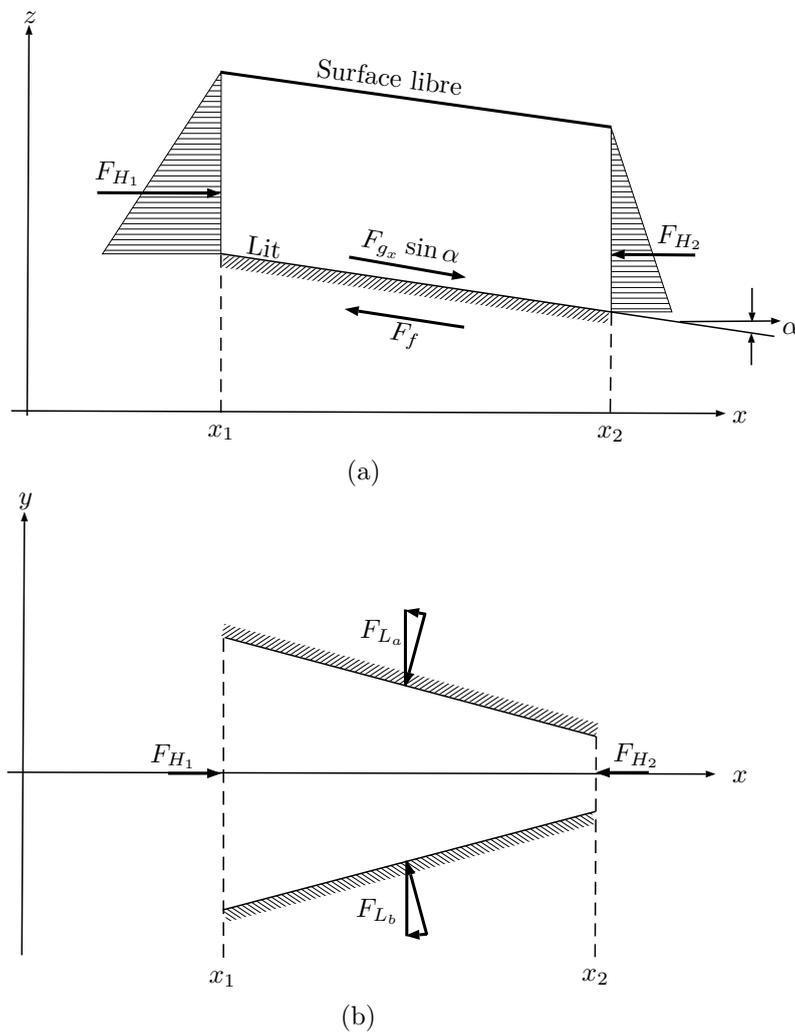


FIGURE 2.2 – Les forces agissantes sur le volume de contrôle unidimensionnel : (a) profil; (b) vue en plan.

Pour ce qui est relatif à l'équation de la quantité du mouvement ; la figure 2.2 montre l'équilibre des forces régissant sur le volume de contrôle donné. Le flux dynamique est le produit du débit massique par la vitesse :

$$\text{Le flux dynamique} = \rho u A \times u = \rho u^2 A \quad (2.4)$$

L'apport net de la dynamique (M_f) au sein de la région pendant dt est égale à la différence entre le flux dynamique entrant et le flux dynamique sortant du volume de contrôle. Il est donné par :

$$M_f = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\rho u^2 A)_{x_1} - (\rho u^2 A)_{x_2} \right] dt \quad (2.5)$$

L'augmentation net ΔM de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle Ω pendant

l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est :

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho u A)_{t_2} - (\rho u A)_{t_1}] dx \quad (2.6)$$

Le principe de conservation de quantité de mouvement stipule que : *le changement (ΔM) dans la dynamique du volume de contrôle pendant dt , doit être égale à la somme de l'apport net de la dynamique (M_f) au sein de la région plus l'intégrale par rapport au temps des forces extérieures agissant sur cette région.*

Les forces extérieures agissant sur le volume de contrôle sont les forces de pression hydrostatique, de pression due au changement de largeur, de gravité et enfin les forces de frottements.

Les forces de pression hydrostatique F_{H_1} et F_{H_2} sont appliquées, respectivement, aux limites x_1 et x_2 du canal. La force de pression hydrostatique, pour une section A , prend la forme :

$$F_H = \rho g I_1 \quad (2.7)$$

où I_1 est donné par la formule intégrale suivante :

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \zeta] b(x, \zeta) d\zeta \quad (2.8)$$

Par suite, dans le volume de contrôle $\Omega = [x_1, x_2]$ et pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ le taux de variation de la pression hydrostatique est donné par :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_H dt = \int_{t_1}^{t_2} (F_{H_1} - F_{H_2}) dt = g \int_{t_1}^{t_2} [(\rho I_1)_{x_1} - (\rho I_1)_{x_2}] dt \quad (2.9)$$

La force de pression due au changement de la largeur est donnée par :

$$F_L = \int_{x_{x_1}}^{x_2} \rho g I_2 dx \quad (2.10)$$

avec

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \zeta] \left[\frac{\partial b(x, \zeta)}{\partial x} \right] d\zeta \quad (2.11)$$

Le long du volume de contrôle $\Omega = [x_1, x_2]$, le taux de variation la force de pression due au changement de la largeur du canal pendant l'intervalle du temps $[t_1, t_2]$ est donnée par :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_L dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_{x_1}}^{x_2} \rho I_2 dx dt \quad (2.12)$$

La force engendrée par l'accélération de la pesanteur (F_g) agissant sur Ω est donnée par :

$$F_g = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A dx \quad (2.13)$$

Si la côte du fond du canal est noté z_f , on définit la pente du canal comme suit :

$$S_0 = -\frac{\partial z_f}{\partial x} = \sin(\alpha) \quad (2.14)$$

Si la pente du lit est petit, donc l'aire perpendiculaire à l'écoulement n'est pas significativement différente à celle calculée en utilisant les dimensions du canal dans le plan vertical, de telle sorte que $\sin \alpha \approx \tan \alpha$. La force de gravité projetée sur l'axe des x sera donc prise comme suit :

$$F_{g_x} = F_g \sin(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx \quad (2.15)$$

Par suite, le taux de variation de la force de gravité dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donné par :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{g_x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt \quad (2.16)$$

La force de frottement, F_f est due à une contrainte de cisaillement et agit sur le périmètre mouillé. Cette force est définie par :

$$F_f = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx \quad (2.17)$$

où S_f est la pente de frottement, qui s'écrit en fonction du coefficient de frottement de Manning, n_m , et le rayon hydraulique, R_h , (quotient de la surface mouillée par le périmètre mouillé) suivant la relation ([Kesserwani, 2008](#)) :

$$S_f = \frac{n_m^2 Q |Q|}{A^2 R_h^{4/3}} = \frac{n_m^2 u |u|}{R_h^{4/3}} \quad (2.18)$$

Le taux de variation de la force de frottement dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donné par :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx dt \quad (2.19)$$

Enfin, la conservation de la quantité de mouvement conduit à :

$$\Delta M = M_f + \int_{t_1}^{t_2} F_H dt + \int_{t_1}^{t_2} F_L dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{g_x} dt - \int_{t_1}^{t_2} F_f dt \quad (2.20)$$

et, pour une masse volumique constante, l'équation de la conservation de la quantité de mouve-

ment sous forme intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left[(uA)_{t_2} - (uA)_{t_1} \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \left[(u^2A)_{x_2} - (u^2A)_{x_1} \right] dt = \\ & g \int_{t_1}^{t_2} \left[(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2} \right] dt + g \int_{t_1}^{t_2} I_2 dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} gA (S_0 - S_f) dx dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les équations (2.3) et (2.21) composent la forme intégrale des équations de Saint–Venant pour la modélisation des écoulements non permanents unidimensionnels dans les canaux naturels.

Diverses formes pour les équations Saint–Venant existent dans la bibliographie ([Črnjarić-Žic et al., 2004](#); [Kesserwani, 2008](#)); elles décrivent toutes mathématiquement les mêmes phénomènes physiques. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Cependant, la forme intégrale est la base de toutes les autres formes - c'est pour cela que nous l'avons présenté en premier lieu. Pour l'approximation numérique des équations de Saint–Venant, la forme intégrale ou conservative est le meilleur choix ([Kesserwani, 2008](#)).

2.2.1 Forme différentielle et conservative des équations de Saint–Venant

En supposant que les variables d'écoulement sont continues, différentiables, et que dx et dt sont des grandeurs infinitésimales, en écrivant le développement en série de Taylor de A et Q au voisinage de t :

$$\begin{aligned} (A)_{t_2} &= (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ (Q)_{t_2} &= (Q)_{t_1} + \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 et en supposant que dx et dt sont des grandeurs infinitésimales, La relation suivante se découle :

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[(A)_{t_2} - (A)_{t_1} \right] dx &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[(Q)_{t_2} - (Q)_{t_1} \right] dx &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dt dx \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation de conservation de masse (2.3) devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (2.22)$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}(u^2A)_{x_2} - (u^2A)_{x_1} &= \frac{\partial (u^2A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 (u^2A)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \\ (uA)_{t_2} - (uA)_{t_1} &= \frac{\partial (Q)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 (Q)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ (I_1)_{x_2} - (I_1)_{x_1} &= \frac{\partial I_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

et l'équation de conservation de quantité de mouvement (2.21) devienne :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (u^2A)}{\partial x} \right] dt dx = -g \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - A (S_0 - S_f) \right] dt dx \quad (2.23)$$

Dans un plan (x, t) arbitraire, nous obtenons le système d'équations de *Saint–Venant* sous forme différentielle conservative :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA (S_0 - S_f) + gI_2 \quad (2.25)$$

Les équations régissant peuvent aussi être écrites sous forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.26)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gI_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gI_2 + gA (S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

\mathbf{U} est le vecteur des variables conservatives, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ est le vecteur de flux et $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ est le vecteur des termes sources. La matrice jacobienne du système précédent s'écrit comme suit :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\frac{A}{T} - \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & \frac{2Q}{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où la célérité de l'onde, c , est défini par :

$$c = \sqrt{g\frac{A}{T}} \quad (2.29)$$

Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon (2000) ont montré que, dans la matrice jacobienne, le terme de force de pression hydrostatique peut être approché par l'équation :

$$\frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{T} \quad (2.30)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de la matrice jacobienne sont, respectivement, donnés par les équations suivantes :

$$\lambda_1 = u - c; \quad \lambda_2 = u + c \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K}_1 = [1, u - c]^T; \quad \mathbf{K}_2 = [1, u + c]^T \quad (2.32)$$

L'écoulement dans un canal rectangulaire est un cas particulier des canaux naturels (pour un canal rectangulaire $b(x, y) \equiv T$). En raison de la difficulté à calculer les termes de force de pression hydrostatique et à la paroi dans les canaux non rectangulaires et non prismatique, les deux termes peuvent être simplifiés en utilisant la règle de Leibnitz, comme présenté ci-dessus :

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 = A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.33)$$

L'équation de quantité de mouvement résultante s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA (S_0 - S_f) \quad (2.34)$$

connaissions que $Z = z_f + h$ et que $S_0 = -\partial z_f / \partial x$, cette dernière équation devienne :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} = -gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gAS_f \quad (2.35)$$

Dans l'équation (2.35), les termes de pression hydrostatique et de pression à la paroi sont combinés. Avec l'équation simplifiée de quantité de mouvement, donnée par l'équation (2.35), la propriété "bien équilibré" (well-balanced) est automatiquement conservée pour le cas d'un lit mouillé. La surface horizontale de l'eau (calme) restera toujours indépendante de la topographie du lit. Ainsi, cette formulation évitera le flux numérique généré en raison du traitement inadéquat du terme de pente du lit (Ying *et al.*, 2004).

L'équation de continuité (2.24), et l'équation de quantité de mouvement simplifiée, (2.35), peuvent également être écrites sous la forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.36)$$

où le vecteur des variables conservatives, \mathbf{U} , le vecteur de flux, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ et le vecteur des termes sources $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ sont, respectivement donnés par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gA \frac{\partial Z}{\partial x} - gAS_f \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La matrice jacobienne s'écrit ainsi :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{Q}{A}\right)^2 & \frac{2Q}{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les valeurs propres correspondantes deviennent :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u \quad (2.39)$$

Les valeurs propres sont les mêmes, ce qui viole la propriété d'hyperbolicité des équations originales de *Saint–Venant* donnée par l'équation (2.26). Les propriétés d'écoulement sont régies par les valeurs propres données par l'équation (2.31). Pour cette raison, lors de l'évaluation du flux numérique, les valeurs et les vecteurs propres donnés, respectivement, dans les équations (2.31) et (2.32) sont utilisés.

2.2.2 Équations de Saint–Venant pour les canaux rectangulaire

Les équations (2.24) et (2.34), décrivent l'écoulement en fonction des variables dépendantes A et Q (section et débit). En général, on se réfère aux équations d'un canal rectangulaire, où $A = bh$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{A h}{2} \right) &= \frac{g}{2} \left(A \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{g h b}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g h}{2} \frac{\partial (h b)}{\partial x} \\ &= \frac{g h b}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{g h b}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g h^2}{2} \frac{db}{dx} \right) \\ &= g A \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g h^2}{2} \frac{db}{dx} = g A \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g h A}{2b} \frac{db}{dx} \end{aligned}$$

donc le terme de pressions dans l'équation (2.34) s'écrit :

$$g A \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{A h}{2} \right) - \frac{g h A}{2b} \frac{db}{dx}$$

pour obtenir :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{A h}{2} \right) - \frac{g h A}{2b} \frac{db}{dx} = g A (S_0 - S_f) \quad (2.40)$$

L'équation (2.40) représente la forme conservative de l'équation de quantité de mouvement pour une section transversale rectangulaire.

Négligeant le terme source associé au variation de la largeur et considérons le débit unitaire $q = Q/b$, la forme alternative des équations de *Saint–Venant* pour un canal rectangulaire après simplification devienne :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g h^2}{2} \right) = g h (S_0 - S_f) \quad (2.42)$$

Les équations (2.41) et (2.42) peuvent être écrites sous forme matricielle comme le montre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.43)$$

où :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ g h^2 / 2 + q^2 / h \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ g h (S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matrice jacobienne du système précédent est donnée par l'équation :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g h - q^2 / h^2 & 2q / h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Les valeurs et vecteurs propres indépendants de la matrice jacobienne sont donnés, respectivement, par les équations suivantes :

$$\lambda_1 = q/h - \sqrt{gh} = u - c; \quad \lambda_2 = q/h + \sqrt{gh} = u + c \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_1 = [1, u - c]^T; \quad \mathbf{K}_2 = [1, u + c]^T \quad (2.47)$$

Les valeurs propres précitées sont réelles et distinctes pour les écoulements fluviaux et torrentiels ($h \neq 0$). Ainsi, les équations régissant, donnée par l'équation (2.43), constituent un système hyperbolique. Pour les équations hyperboliques, même avec des conditions initiales et aux limites lisses, une solution discontinue pourrait évoluer à l'intérieur du domaine de calcul. En théorie, seul un traitement rigoureux des équations conservatives assure une bonne prise en compte des discontinuités qui peuvent apparaître dans les solutions particulières (ressaut hydraulique). D'autres raisons (stabilité des schémas, utilisation de la méthode des caractéristiques) nous ont amené à adopter une formulation différente, avec les variables h et u , appelée formulation "hauteur-vitesse". Cette formulation est dite "non-conservative". Disons tout de suite que cette appellation n'empêche pas de construire des schémas numériques qui conservent la masse d'eau *Hervouet* (2003).

L'équation de quantité de mouvement (2.42) peut être aussi écrite sous la forme non conservative en utilisant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) &= \frac{\partial (uq)}{\partial x} = u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial x} = u \left(\frac{\partial q}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} - u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ &= 2u \frac{\partial q}{\partial x} - u^2 \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (2.34) on obtient :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2u \frac{\partial q}{\partial x} + (g h - u^2) \frac{\partial h}{\partial x} = g h (S_0 - S_f) \quad (2.48)$$

L'équation (2.48) peut être combinée avec l'équation de continuité. Sous forme matricielle,

ce système s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.49)$$

2.3 Établissement des équations de Saint–Venant bidimensionnelles

Dans la plupart des écoulements à surface libre, en particulier pour les problèmes de propagation des ondes de crue qui se développent dans des domaines où les dimensions latérales sont importantes devant la profondeur, le changement de la valeur des variables reste très petit suivant la verticale. Ce constat suggère une simplification des équations tridimensionnelles de *Navier–Stokes* en utilisant une moyenne verticale des trois équations suivant les trois directions, on en parle des approximations en eaux peu profondes aboutissant aux équations de *Saint–Venant* bidimensionnelles appelées également modèle des eaux peu profondes ou en anglais "Shallow water equations". La dérivation suivante est tirée de ([Chaudhry, 2008](#)).

Les équations de *Navier–Stokes* sont basées essentiellement sur les deux fameux principes de conservation de la masse (équation de continuité) et de la quantité de mouvement (équation de la dynamique). Ces équations sont écrites, pour un fluide incompressible, sous leur forme différentielle comme suit ([Chaudhry, 2008](#)) :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.50)$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 U \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 W \quad (2.53)$$

où U , V et W sont respectivement les composantes du vecteur vitesse dans les directions x , y et z ; $g(g_x, g_y, g_z)$ est le vecteur accélération; ρ est la masse volumique; p est la pression et le symbole ∇^2 représente l'opérateur Laplacien.

Nous intégrerons ces équations sur toute la profondeur d'écoulement pour obtenir les équations des eaux peu profondes. Les mêmes hypothèses que celles indiquées à la section 2.2 sont utilisées à l'exception que l'écoulement est unidimensionnel. On suppose que le fond du canal est un plan incliné. Le plan $x - y$ du système de coordonnées cartésiennes est parallèle au plan du fond du canal. L'axe des z perpendiculaire au plan $x - y$ est orienté vers le haut.

2.3.1 Équation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité (2.50) sur toute la profondeur totale donne :

$$\int_{z_f}^Z \frac{\partial U}{\partial x} dz + \int_{z_f}^Z \frac{\partial V}{\partial y} dz + W(Z) - W(z_f) \quad (2.54)$$

Z et z_f sont mesurées perpendiculairement au plan du fond du canal. Les intégrales de l'équation (2.54) peuvent être évalués en utilisant la règle de Leibnitz :

$$\int_{z_f}^Z \frac{\partial U}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^Z U dz - U(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + U(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} \quad (2.55a)$$

$$\int_{z_f}^Z \frac{\partial V}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^Z V dz - V(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + V(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} \quad (2.55b)$$

On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers le fond et la surface libre, que le fond du canal est rigide, et qu'une particule d'eau située sur une de ces deux surfaces y restera au cours du temps. Nous pouvons donc écrire :

$$W(Z) = \frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + V(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (2.56)$$

$$W(z_f) = U(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + V(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} \quad (2.57)$$

La substitution des équations (2.55) au (2.57) dans l'équation (2.54) conduit à :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial (ud)}{\partial x} + \frac{\partial (vd)}{\partial y} = 0 \quad (2.58)$$

Dans laquelle u et v sont les valeurs moyennes de U et V sur la profondeur du canal,

$$u = \frac{1}{d} \int_{z_f}^Z U dz; \quad v = \frac{1}{d} \int_{z_f}^Z V dz \quad (2.59)$$

où $d = Z - z_f$ est le tirant d'eau mesuré perpendiculairement au fond du canal.

2.3.2 Équation de quantité de mouvement

Puisque nous avons supposé que l'accélération verticale est négligeable

$$\frac{DW}{Dt} \approx 0; \quad \mu \nabla^2 W \approx 0 \quad (2.60)$$

Par conséquent, l'équation (2.53) se réduit à :

$$g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.61)$$

Par intégration de l'équation (2.61) sur la verticale en choisissant la constante telle que la pression atmosphérique soit nulle, on obtient :

$$p = \rho g_z(z - Z) \quad (2.62)$$

Par conséquent, il s'ensuit que

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g_z \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (2.63)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g_z \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (2.64)$$

En ajoutant à l'équation (2.51), l'équation (2.50) multipliée par u et en substituant l'expression (2.63), et réarrangeant les termes de l'équation résultante, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} = g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 U \quad (2.65)$$

Similairement, en ajoutant à l'équation (2.52), l'équation (2.50) multipliée par v et en substituant l'expression (2.64), et réarrangeant les termes de l'équation résultante, on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(VU)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial(VW)}{\partial z} = g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V \quad (2.66)$$

Intégrons les équations (2.65) et (2.66) sur la verticale. Pour simplifier la présentation, nous considérons séparément les membres de gauche et de droite de ces équations. L'intégration du membre de gauche de l'équation (2.65) et l'application de la règle de Leibnitz donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^Z U dz - U(Z) \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^Z U^2 dz - U^2(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} \\ & + U^2(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^Z UV dz - U(Z)V(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \\ & + U(z_f)V(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} + U(Z)W(Z) - U(z_f)W(z_f) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sur la base de l'hypothèse d'une distribution uniforme de la vitesse (c'est-à-dire, u et v sont des constantes sur la verticale) et en remplaçant les équations (2.57), l'expression (2.67) se simplifie comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (ud) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 d) + \frac{\partial}{\partial y} (uvd) \quad (2.68)$$

Similairement, le membre de gauche de l'équation (2.66) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (vd) + \frac{\partial}{\partial x} (uvd) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 d) \quad (2.69)$$

L'intégration du membre de droite des équations (2.65) et (2.66) donne :

$$\left(g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x}\right) d + \int_{z_f}^Z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 U dz \quad (2.70)$$

$$\left(g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y}\right) d + \int_{z_f}^Z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V dz \quad (2.71)$$

Comme le plan $x - y$ est parallèle au fond du canal, z_f est donc constante. En conséquence,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial (z_f + d)}{\partial x} = \frac{\partial d}{\partial x} \quad (2.72)$$

et

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial d}{\partial y} \quad (2.73)$$

Maintenant, considérons les termes de contrainte de cisaillement. En écoulement turbulent, la viscosité dynamique est remplacée par un coefficient de viscosité turbulente. En outre, une distinction est faite entre les contraintes agissant dans le plan $x - y$ et les contraintes agissant dans les plans $x - z$ et $y - z$. Par exemple, le terme de contrainte de cisaillement de l'équation dynamique dans la direction x peut être écrit comme suit :

$$\varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{zx} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.74)$$

Dans lequel ε_{xy} et ε_{zx} sont les coefficients de viscosité turbulente. En outre, on suppose que les contraintes effectives sont dominées par les contraintes de cisaillement dues au frottement sur le fond. Cela signifie que le premier terme dans l'équation (2.74) est négligeable par rapport au deuxième terme. Par conséquent, le terme de contrainte de cisaillement de l'équation (2.74) se réduit à $\varepsilon_{zx} \partial^2 U / \partial z^2$. L'intégration de cette expression suivant z donne :

$$\int_{z_f}^Z \varepsilon_{zx} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz = \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=Z} - \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=z_f} = \tau_{s_x} - \tau_{f_x} \quad (2.75)$$

Dans lequel τ_{s_x} et τ_{f_x} sont respectivement la contrainte dû au vent en surface et la contrainte dû au frottement sur le fond, agissantes dans la direction x . De même, le terme de contrainte de cisaillement de l'équation (2.71) se réduit à :

$$\tau_{s_y} - \tau_{f_y} \quad (2.76)$$

Les contraintes de cisaillement, τ_{s_x} et τ_{s_y} , dues au vent en surface agissantes à la surface de l'eau, sont négligées et les contraintes de cisaillement dues au frottement sur le fond, τ_{f_x} et τ_{f_y} , sont évaluées en utilisant des formules empiriques. Par exemple, l'équation Chézy donne :

$$\tau_f = \frac{\rho g}{C^2} (u^2 + v^2) \quad (2.77)$$

où C est le coefficient Chézy. Il découle de l'équation (2.77) que :

$$\tau_{f_x} = \tau_f \cos \gamma = \frac{\rho g}{C^2} u (u^2 + v^2) \quad (2.78a)$$

$$\tau_{f_y} = \tau_f \sin \gamma = \frac{\rho g}{C^2} v (u^2 + v^2) \quad (2.78b)$$

Dans lesquelles γ est l'angle faite entre le vecteur vitesse et l'axe des abscisses.

Les différents termes des équations dynamique intégrées sur toute la profondeur peuvent maintenant être regroupés ensemble. Le remplacement des équations (2.68) au (2.73), (2.75), (2.76) et (2.78) dans les équations (2.65) et (2.66) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(ud) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2d) + \frac{\partial}{\partial y}(uvd) = \left(g_x - g_z \frac{\partial d}{\partial x} \right) gd - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vd) + \frac{\partial}{\partial x}(uvd) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2d) = \left(g_x - g_z \frac{\partial d}{\partial y} \right) gd - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.80)$$

(2.79) et (2.80) sont les équations de quantité de mouvement par rapport à un système de coordonnées $x - y$ parallèle au fond du canal.

Les équations (2.58), (2.79) et (2.80) peuvent être exprimés dans un système horizontal de coordonnées, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (Figure 2.3). Dans ce système de coordonnées, les canaux peuvent avoir une pente du fond constante par morceaux. La transformation du système incliné x, y, z au système horizontal $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ s'effectue en pivotant l'ancien système de coordonnées. Une rotation de ce type est généralement définie en utilisant les cosinus directionnels qui donnent les angles entre les axes dans les deux systèmes. Cependant, dans ce cas, il est préférable d'exprimer la rotation en fonction des angles entre le fond du canal et les axes x et y (α_x et α_y sur la figure 2.3), car ces angles sont généralement connus. Selon la figure 2.3 et après quelques manipulations vectorielles, la transformation entre les deux systèmes de coordonnées est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x & -\cos \varphi \cos \alpha_x / \sin \varphi & \tan \alpha_x \cos \alpha_z \\ 0 & \cos \alpha_y / \sin \varphi & \tan \alpha_y \cos \alpha_z \\ -\sin \alpha_x & -\sin \alpha_y \cos^2 \alpha_x / \sin \varphi & \cos \alpha_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Où $\cos \alpha_z = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_x + \tan^2 \alpha_y}$; $\cos \varphi = \sin \alpha_x \cos \alpha_y$; et $\sin \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_x \sin^2 \alpha_y}$. Les termes g_x , g_y et g_z peuvent être calculés à partir de l'équation (2.81). Par exemple,

$$g_x = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = -g \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = g \sin \alpha_x \quad (2.82)$$

Dans lequel $\hat{\mathbf{e}}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$ sont, respectivement, les vecteurs unitaires du système x, y, z et $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Notez que le terme $-\sin \alpha_x$ dans l'équation (2.82) est l'élément (3,1) de la matrice de transformation. Par conséquent,

$$g_x = g \sin \alpha_x; \quad g_y = g \frac{\sin \alpha_y \cos^2 \alpha_x}{\sin \varphi}; \quad g_z = -g \cos \alpha_z \quad (2.83)$$

Où α_x , α_y et α_z sont tels que définis dans la figure 2.3. Une certaine simplification est nécessaire

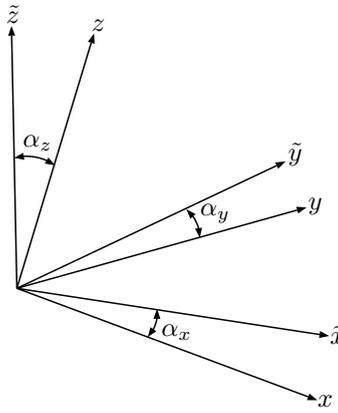


FIGURE 2.3 – Définition des angles α_x , α_y et α_z .

avant de procéder à la transformation ; sinon elle devient difficile. Bien que $\sin \alpha_x$ et $\sin \alpha_y$ ne soient pas petits, nous supposons que leur produit sera petit, i.e.,

$$\sin \alpha_x \sin \alpha_y \approx \sin^2 \alpha_x \approx \sin^2 \alpha_y \approx 0 \quad (2.84)$$

Cette approximation introduit une petite erreur (<3%) si $|\alpha_x|, |\alpha_y| < 10^\circ$. Il découle de l'équation (2.84) que :

$$\sin \varphi = 1; \quad \cos \varphi = 0 \quad (2.85)$$

Sur la base de ces approximations et de l'équation (2.81), nous pouvons écrire

$$\tilde{x} = x \cos \alpha_x + z \tan \alpha_x \cos \alpha_z \quad (2.86a)$$

$$\tilde{y} = y \cos \alpha_y + z \tan \alpha_y \cos \alpha_z \quad (2.86b)$$

Les variables dépendantes transformées deviennent

$$h = \frac{d}{\cos \alpha_z}; \quad \tilde{u} = u \cos \alpha_x; \quad \tilde{v} = v \cos \alpha_y \quad (2.87)$$

Dans laquelle h est la profondeur d'écoulement mesurée verticalement et \tilde{u} et \tilde{v} sont respectivement les composantes de vitesse le long des directions \tilde{x} - et \tilde{y} . Aussi, notons que selon l'équation (2.86)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \alpha_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tan \alpha_x \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (2.88a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos \alpha_y \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tan \alpha_y \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (2.88b)$$

La présence de dérivées le long de la direction \tilde{z} n'est pas souhaitable, puisque l'idée de base est d'éliminer une dimension spatiale. Cependant, on peut montrer que les termes tels que $\tan \alpha_x \cos \alpha_z \partial / \partial \tilde{z}$ sont de l'ordre de $\sin^2 \alpha_x$ et sont par conséquent considérés comme négligeables. En substituant les équations (2.83), (2.86), (2.87) et (2.88) dans les équations (2.58),

(2.79) et (2.80), puis en simplifiant et en éliminant le symbol \sim nous obtenons :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (2.89a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh \left[\cos \alpha_x S_{0x} - (\cos \alpha_x \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial x} - S_{fx} \right] \quad (2.89b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h) = gh \left[\cos \alpha_y S_{0y} - (\cos \alpha_y \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial y} - S_{fy} \right] \quad (2.89c)$$

dans lesquelles,

$$S_{0x} = \sin \alpha_x; \quad S_{0y} = \sin \alpha_y \quad (2.90a)$$

$$S_{fx} = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h}; \quad S_{fy} = \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h} \quad (2.90b)$$

2.3.3 Différentes formes des équations de Saint–Venant

Les variables dépendantes dans les équations de *Saint–Venant* peuvent être choisies selon les formulations suivantes :

- formulation "vitesse-hauteur d'eau" : profondeur d'eau h et les vitesses (u, v) comme variables dépendantes ;
- formulation "débit-hauteur d'eau" : profondeur d'eau h et les débits unitaires $(q_x, q_y) = (hu, hv)$ comme variables dépendantes ;
- formulation "vitesse-dénivellation" : dénivellation de la surface libre Z et les vitesses (u, v) comme variables dépendantes ;
- formulation "débit-dénivellation" : la dénivellation de la surface libre Z et les débits unitaires (q_x, q_y) comme variables dépendantes.

Nous allons par la suite étudier les différentes formulations des équations de *Saint–Venant* sous forme conservative et non conservative.

Si la pente du lit est petit, l'équation (2.89) peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \quad (2.91a)$$

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = -gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.91b)$$

$$\frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2h + gh^2/2)}{\partial y} = -gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.91c)$$

Si l'équation de Manning est utilisée pour calculer les termes de friction au lieu de l'équation de Chézy, alors

$$S_{fx} = \frac{n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad S_{fy} = \frac{n_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.92)$$

Les équations (2.91) constituent les équations de *Saint–Venant* bidimensionnelles, sous forme dite "conservative" écrites sous une formulation "vitesse-hauteur d'eau". Ces équations peuvent aussi être représentées sous forme matricielle comme le montre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.93)$$

où le vecteur correspondant des variables conservatives, \mathbf{U} , des vecteurs de flux, \mathbf{E} , \mathbf{G} , et du vecteur des termes sources, \mathbf{S} , sont donnés par les expressions suivantes :

$$\mathbf{U} = (h, hu, hv)^T \quad (2.94a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = (hu, hu^2 + gh^2/2, huv)^T \quad (2.94b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (hv, huv, hv^2 + gh^2/2)^T \quad (2.94c)$$

$$\mathbf{S} = (0, -gh(S_{0x} - S_{fx}), -gh(S_{0y} - S_{fy}))^T \quad (2.94d)$$

Les équations (2.91) peuvent être réécrites sous une formulation "débit-hauteur d'eau" en posant $hu = q_x$ et $hv = q_y$. Les équations résultantes peuvent aussi être représentées sous forme matricielle similaire à l'expression (2.93) où \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{G} et \mathbf{S} sont donnés par les expressions suivantes :

$$\mathbf{U} = (h, q_x, q_y)^T \quad (2.95a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = (q_x, q_x^2/h + gh^2/2, q_x q_y/h)^T \quad (2.95b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (q_y, q_x q_y/h, q_y^2/h + gh^2/2)^T \quad (2.95c)$$

$$\mathbf{S} = (0, -gh(S_{0x} - S_{fx}), -gh(S_{0y} - S_{fy}))^T \quad (2.95d)$$

Sachons que $Z = h + z_b$, la pente du lit, $S_{0x} = -\partial z_b / \partial x$ (ou $S_{0y} = -\partial z_b / \partial y$), et les termes de force hydrostatique, $\partial h / \partial x$ (ou $\partial h / \partial y$), sont combinés en un seul terme dit "terme de gradient de la surface d'eau", $\partial Z / \partial x$ (ou $\partial Z / \partial y$). Une simple manipulation dans l'équation (2.93) peut conduire à une nouvelle formulation dite "débit-dénivellation" qui sera représentée sous forme matricielle similaire à l'expression (2.93) où \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{G} , et \mathbf{S} , sont donnés par les équations suivantes :

$$\mathbf{U} = (h, q_x, q_y)^T \quad (2.96a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = (q_x, q_x^2/h, q_x q_y/h)^T \quad (2.96b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (q_y, q_x q_y/h, q_y^2/h)^T \quad (2.96c)$$

$$\mathbf{S} = \left(0, -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - gh S_{fx}, -gh \frac{\partial Z}{\partial y} - gh S_{fy} \right)^T \quad (2.96d)$$

La formulation "vitesse-dénivellation" est obtenue en remplaçant $q_x = hu$ et $q_y = hv$.

Il est nécessaire pour certains schémas numériques que les équations soient écrites sous

forme de non-conservation. La forme non-conservation du système (2.93) est :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}_E \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{J}_G \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (2.97)$$

où \mathbf{J}_E et \mathbf{J}_G sont respectivement les matrices jacobienne de \mathbf{E} et \mathbf{G} :

$$\mathbf{J}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'obtention des équations de *Saint-Venant* dans le cas uni et bidimensionnel et sous forme intégrale et conservative. Les équations de *Saint-Venant* présente un système des lois de conservation, qui régissent les écoulements à surface libre. Ces lois de conservation sont celles de la masse et de la quantité de mouvement dont elles combinent entre les effets des forces d'inertie, de gravité, de pressions et de frottement en imposant bien sur certaines hypothèses fondamentales. Nous avons aussi discuté les formules de certains paramètres utilisés dans ce travail telle que la formule de Manning.

Comme il est classiquement présenté dans la littérature en ce qui concerne la modélisation hydrodynamique, la forme conservative du système *Saint-Venant* est une bonne formulation pour le calcul des solutions numériques approchées des équations de conservation de type hyperbolique. Dans ce contexte, nous présentons dans le chapitre suivant la méthode numériques de type éléments finis de Galerkin discontinue pour la simulation des équations hyperboliques correspondant aux lois qui contrôlent les écoulements à surface libre.

Chapitre 3

Présentation des méthodes des éléments finis de Galerkin discontinue

3.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP). Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : Problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique (*Dhatt et Touzot, 1981*). Appliqués très tôt en mécanique du solide, les MEF ont vu leur introduction tardive dans la mécanique des fluides.

La MEF classique discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème (Figure 3.1).

La résolution d'un problème, posé sous la forme d'une EDP, par la MEF classique passe successivement comme suit :

- On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème ;
- On divise le domaine en sous domaines : c'est le maillage ;
- On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. Elle remplace la forme intégrale globale par une somme de formes intégrales élémentaires constituées par des matrices et vecteurs élémentaires. Le passage à l'élément de référence facilite l'implémentation ;
- On construit les matrices et les vecteurs globaux à partir des matrices et vecteurs élémentaires : c'est l'assemblage. Ceci donne un système d'équations algébriques ;
- Enfin, on résout numériquement le système. Ceci donne une solution approchée du problème.

Dans ce chapitre, nous ferons en premier lieu un bref résumé historique de la MEF en essayant de retracer l'origine de l'utilisation de cette méthode à des fins de simulation. Nous met-

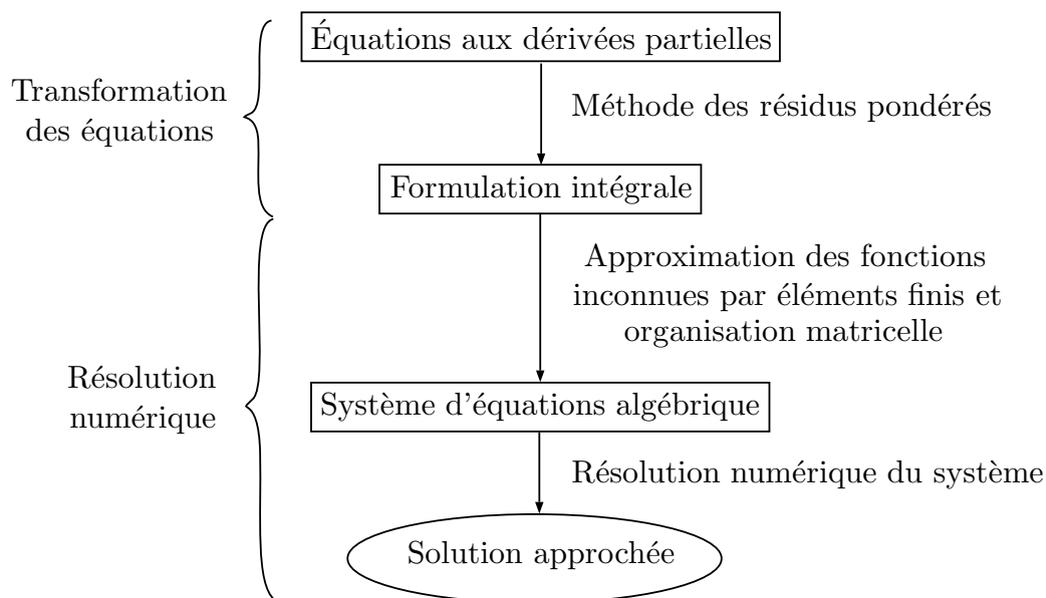


FIGURE 3.1 – Étapes de résolution par éléments finis.

tons en évidence les avantages de la méthode GD par rapport aux méthodes des éléments finis continues. Nous présentons ensuite la forme conservative des équations à résoudre et ces principales caractéristiques mathématiques. L'application de la méthode GD est très populaire pour l'approximation numérique des équations hyperboliques qui peut s'écrire sous forme conservative. Certaines notions mathématiques préliminaires relatives à la formulation GD sont aussi exposées. La notion de variation totale et les schémas à variation totale décroissante d'intégration numérique et de limitation de pente sont aussi discutés.

3.2 Un aperçu historique

Il est intéressant de tracer au cours de l'histoire, les contributions majeures qui ont permis d'aboutir aux méthodes par éléments finis telles que nous les connaissons aujourd'hui. Une telle revue a été entreprise par *Gander et Wanner* (2012). Les pierres angulaires des MEF sont l'approche variationnelle introduite par Euler (1744) et Lagrange (1755) et les transformations conformes par Riemann en 1851. Mais c'est en 1909, que l'on peut dater la naissance des MEF par le physicien suisse *Ritz* (1909) qui résolut, via une combinaison linéaire de fonctions de base définies au sein d'un carré, un problème de l'époque : les figures de Chladni¹. Les travaux de *Ritz* retiennent peu d'intérêt en Europe et c'est l'école russe qui saisit tout l'intérêt de l'approche et va s'approprier cette méthode. Timoshenko (1913), Bubnov (1913) puis *Galerkin* (1915) vont rendre célèbre cette méthode par la publication d'études caractéristiques sur les plaques entrant dans la construction des coques de navires. Les avancées suivantes sont l'utilisation de fonctions

1. Les figures de Chladni (1787) sont des motifs que l'on observe sur une plaque recouverte de sable sollicitée par les vibrations d'un archet. Le sable s'accumule le long des lignes nodales des modes propres de la plaque excités selon l'emplacement de l'archet. C'est dans le but de calculer ces motifs, que Ritz a inventé le principe de la méthode par éléments finis en 1909, d'après *Gander et Wanner* (2012)

de base polynômiales dans des triangles (*Courant, 1943*) et l'invention du terme "élément fini" par (*Clough, 1960*).

Plusieurs méthodes numériques par éléments finis ont été développées pour résoudre les EDP qui régissent l'écoulement à surface libre et que l'on peut classer en deux grandes familles : les éléments finis continus et les éléments finis discontinus. La différence principale entre les deux classes réside dans le fait que dans les méthodes par éléments finis discontinus nous n'imposons plus à la solution numérique d'être continue à travers les interfaces entre différents éléments du maillage.

3.2.1 Éléments finis continus

L'approche la plus simple des méthodes des éléments finis est celle de Bubnov–Galerkin (BG) où les fonctions de pondération sont prises comme étant égales aux fonctions d'interpolation (*Hicks et Steffler, 1990*). La formulation BG peut être aisément appliquée aux systèmes uni et bidimensionnel de *Saint–Venant*. Quoique cette méthode est utile pour la modélisation des ondes relativement plates, elle a une performance médiocre au voisinage des gradients élevés de vitesse. Il résulte des oscillations et la solution reste instable. *Gresho et Lee (1981)* avaient indiqué que les oscillations observées dans les modèles aux éléments finis étaient partiellement dues au raffinement insuffisant du maillage dans les zones à forts gradient de vitesses. Ainsi, *Walters et Carey (1983)* indiquent que le choix des éléments du maillage a également joué un rôle important. Par exemple, les approximations linéaires, de même ordre et quadratiques des variables de la formulation primitive, ont amenées à des oscillations de longueur d'onde $2\Delta x$, où Δx correspond au taille du maillage. *Zarmehi et al. (2011)* avaient indiqué que l'apparition des oscillations est liée à la méthode utilisée pour l'approximation des termes non linéaires. *Walters et Carey (1983)* ont montré que l'utilisation d'une interpolation mixte qui consiste à approximer la hauteur par des polynômes linéaires et la vitesse par des polynômes quadratiques tend à éliminé les oscillations de la hauteur mais pas de la vitesse (*Martinez, 1997*).

Plusieurs recherches ont été effectuées pour éliminer ou diminuer les oscillations associées à l'application de la méthode BG par l'addition d'un terme de diffusion numérique. Dans la méthode d'équation de type onde, la diffusion numérique est introduite par l'utilisation d'une équation de continuité de type onde (*Kinnmark et Gray, 1982*). *Kinnmark (1984)*; *Kinnmark et Gray (1982)* et *Lynch et Gray (1979)* ont montré l'habilité de ce schéma à éliminer les oscillations dans la modélisation des estuaires en utilisant des algorithmes en éléments finis implicites. Ce schéma est destiné aux écoulements typiquement fluviaux. *Hood et Taylor (1974)* et *Walters et Carey (1983)* ont appliqué les méthodes d'interpolation mixte aux équations d'écoulements à surface libre (*Lee et Froehlich, 1986*). Comme le nom l'indique, différentes fonctions d'interpolation sont utilisées pour approximer les variables dépendantes (*Lee et Froehlich, 1986*). Typiquement, les fonctions d'interpolation utilisées pour approximer les vitesses ont un ordre plus élevé que celles utilisées pour approximer la profondeur.

La méthode de Taylor–Galerkin (TG) (*Donea, 1984*) est une formulation explicite analogue à la famille des schémas de Lax-Wendroff en différences finies. Les inconnues sont développées en série par rapport au temps, et l'on peut montrer que la méthode revient à ajouter aux équations

initiales de *Saint-Venant* une diffusion artificielle fonction du pas de temps (*Selmin et al.*, 1985). Analogiquement au schéma de Lax-Wendroff, des conditions aux limites supplémentaires sont donc nécessaires. En plus, elle a une faible performance à proximité des discontinuités (*Hicks et Steffler*, 1990, 1995).

Une autre approche consiste à utiliser la méthode de Petrov-Galerkin (PG) dans laquelle des fonctions de pondération décentrées sont utilisées pour introduire une diffusion numérique qui assure l'atténuation des oscillations associées de la méthode BG. La méthode dissipative de Galerkin (DG) qui est un cas particulier de la méthode PG est une méthode implicite. Elle est introduite par *Katopodes* (1984) pour résoudre les équations de *Saint-Venant*. L'implémentation de la méthode DG introduit une diffusion numérique à l'aide d'un terme de décentrage déterminé sur la base de la vitesse progressive. Les résultats de cette méthode sont très encourageants pour la simulation numérique des écoulements unidimensionnels qui comporte des discontinuités (chocs). Cette méthode a été appliquée avec succès aux problèmes bidimensionnels. Aussi, *Brooks et Hughes* (1982) avaient développé la méthode de Petrov-Galerkin à décentrage rationalisé (SU/PG : Streamline Upwind Petrov-Galerkin). Dans cette approche, la diffusion numérique est incorporée en utilisant un terme de décentrage qui est déterminé à l'aide du signe de la direction d'écoulement. Ce schéma est en effet similaire au schéma DG. Cependant, dans ce cas, les deux vitesses caractéristiques sont utilisées dans la détermination de la matrice de décentrage. La méthode SU/PG, appliquée aux équations de *Saint-Venant*, est nommée par *Hicks et Steffler* (1992) la "méthode Caractéristique Dissipative de Galerkin" ou (CDG). *Blackburn et Hicks* (2002) ont utilisé le schéma CDG pour la modélisation des écoulements non permanent à des fins de laminage de crues et de détermination des niveaux de crue pour le cas de la rivière de Paix au Canada. Cette méthode a aussi été utilisée par *Atallah et Hazzab* (2013) pour la simulation de la propagation des ondes de crue dans le bassin versant de l'oued Mekerra en Algérie.

La méthode des moindres carrés (LS : Least Squares) est une méthode implicite dans laquelle le résidu est minimisé par les moindres carrés plutôt que par la méthode de Galerkin (*Carey et Jiang*, 1988). La quantité de la diffusion numérique ajoutée dépend du pas du temps et du paramètre de pondération. Si l'incrément du pas de temps est minimisé, cette méthode s'approche d'une formulation de type BG. La méthode est jugée inacceptable pour des écoulements instationnaires et pose des difficultés avec des écoulements torrentiels (*Hicks et Steffler*, 1990).

Hicks et Steffler (1990) ont effectué une analyse de Fourier des cinq méthodes (BG, TG, DG, CDG et LS), ainsi que des comparaisons sur des écoulements permanents et non-permanents à surface libre. L'étude conclut à la supériorité de la méthode CDG dont la diffusion numérique est moindre que la méthode TG.

Zienkiewicz et Ortiz (1995) ont utilisé une discrétisation spatiale de type Galerkin combinée avec la méthode des caractéristiques pour la solution des équations de *Saint-Venant*. Ils ont incorporé dans leur travail une procédure à pas fractionné. La technique de combinaison de la méthode des éléments finis avec la méthode des caractéristiques est aussi utilisée par *Chambers* (2000), où il développe un nouvel algorithme en élément finis-caractéristique.

Les méthodes d'éléments finis continus fournissent aujourd'hui des algorithmes rapides et

des résultats souvent satisfaisants. Elles sont utilisées dans de nombreux logiciels de simulation d'écoulements à surface libre, comme RMA2 ([Donnell et al., 2011](#)), CCHE2D ([Jia et Wang, 2001](#)), River2D ([Steffler et Blackburn, 2002](#)), TELEMAC2D ([Hervouet, 2003](#))).

3.2.2 Éléments finis discontinus

La méthode GD est très largement répandue pour le calcul numérique des solutions des lois de conservation. Elle permet de traiter de façon naturelle et robuste les lois de conservation et peut s'adapter à des géométries complexes. Cette méthode fait le lien entre la MEF et la MVF. Plus précisément, elle consiste à approcher les inconnus par des fonctions polynômiales dans chaque élément comme pour les MEF, mais sans supposer de continuité aux interfaces. La formulation faible est restreinte à cet espace de fonctions continues par morceaux et nécessite donc l'évaluation d'un flux numérique aux interfaces, ce qui permet de traduire (au niveau discret) le principe de conservation, comme dans le cas des MVF. Ce flux est ensuite approché numériquement en résolvant un problème de Riemann aux points de discontinuité. Des techniques de limitation de pente sont ensuite utilisées pour stabiliser la solution et supprimer les oscillations non physiques.

La méthode GD a été proposée par [Reed et Hill \(1973\)](#) pour la solution de l'équation linéaire de transport de neutrons. [LeSaint et Raviart \(1974\)](#) ont été les premiers à écrire les bases mathématiques de cette méthode. Pour des solutions exactes assez régulières, ils ont montré que si les polynômes utilisés sont de degré k , l'ordre de la méthode est $k + 1$ (autrement dit est un $(\Delta x)^k$ où Δx est le pas de discrétisation spatiale) pour des maillages irréguliers et, pour des maillages cartésiens, $(\Delta x)^{k+1}$. [Johnson et Pitkäranta \(1986\)](#), [Richter \(1988\)](#), et [Peterson \(1991\)](#) ont étudié les propriétés mathématiques de cette méthode comme la convergence et l'ordre de précision. En particulier en supposant que la solution est suffisamment régulière, [Johnson et Pitkäranta \(1986\)](#) ont démontré une convergence $(\Delta x)^{k+1/2}$ pour un partitionnement quelconque du maillage. [Richter \(1988\)](#) a établi un ordre de convergence optimal de $(\Delta x)^{k+1}$ dans le cas de certains maillages structurés et non cartésiens, en deux dimensions d'espace. [Lin et Zhou \(1993\)](#) ont montré la convergence de la méthode GD en présence des discontinuités dans la solution. [Siegel \(1995\)](#) montrent la supériorité de la méthode GD par rapport à la MVF d'ordre supérieur dans le cas d'un maillage fortement déstructuré.

Les premières applications de la méthode GD comporte la propagation des ondes dans les milieux élastique ([Wellford et Oden, 1975](#)), la modélisation des équations paraboliques ([Jamet, 1978](#)), et de simulation écoulements de fluides viscoélastiques ([Fortin et Fortin, 1989](#)).

Dans le cas d'un problème monodimensionnel en espace, la méthode GD est interprétée comme une généralisation des schémas de type différences finies de Godunov ([Cockburn et al., 1989](#); [Cockburn et Shu, 1991](#)). Ces schémas de résolution d'ordre supérieur ($k \geq 1$) sont en général, stabilisés en employant des limiteurs de pentes assurant le caractère TVD (Total Variation Diminishing ou Variation Totale Décroissante), propriété clé pour capturer des solutions entropiques, (voir e.g., [Cockburn et Shu \(1989\)](#)), pour que les oscillations non physiques puissent être évitées sans détruire la précision de l'approximation. [Chavent et Salzano \(1982\)](#) ont construit une version explicite de la méthode GD pour la loi de conservation scalaire unidimensionnelle.

Ils ont approché la solution en utilisant des polynômes discontinus et linéaires par morceaux. L'opérateur en temps est discrétisé en utilisant le schéma d'Euler explicite. Cependant, cette méthode est instable quel que soit le pas de temps. Afin de la stabiliser, *Chavent et Salzano (1982)* ont adapté un limiteur de pente en suivant l'idée de Van Leer (*Cockburn et Shu, 1998*). En respectant un critère CFL inférieur ou égal à $1/2$, le schéma obtenu est stable, et de plus il vérifie la propriété TVD. Toutefois, ces schémas possèdent une précision dans le temps du premier ordre et le limiteur de pente influe sur la qualité de la solution dans des régions lisses. Le problème a été corrigé par l'introduction de la méthode RKDG par *Cockburn et Shu (1989)*, où ils ont combinés la méthode de Runge-Kutta du second ordre pour la discrétisation temporelle et le limiteur de pente amélioré de *Shu (1987)*. La méthode de RKDG explicite résultante était linéairement stable pour des nombres de courant moins de $1/3$. Cependant, la combinaison des schémas de Runge-Kutta d'ordre $k + 1$ avec une procédure de limitation de pente appliquée sur des polynômes de degré k donne des schémas qui ne sont plus TVD. Les limiteurs ne parviennent plus à supprimer totalement les oscillations dans les zones à fort gradient mais possèdent néanmoins le caractère plus faible de TVB (Total Variation Bounded ou Variation Totale Bornée). En d'autres termes, la solution numérique peut éventuellement toujours présenter des oscillations mais celles-ci sont contrôlées du fait qu'elles sont bornées.

La généralisation de la méthode de *Cockburn et Shu (1989)* à un ordre de précision d'ordre k arbitraire a été développée par *Cockburn et al.* en 1990 pour le cas scalaire, et par *Cockburn et Shu (1991)* pour le cas d'un système hyperbolique unidimensionnel écrit sous forme conservative et par *Cockburn et Shu (1998)* pour le cas d'un système hyperbolique multidimensionnel. Dans les problèmes multidimensionnels, le développement des schémas TVD d'ordre élevé n'est pas aussi simple que dans les cas unidimensionnels. *Goodman et LeVeque (1985)* montrent que tout schéma TVD ne peut qu'être au plus d'ordre un en espace. Ainsi, les limiteurs de pente TVD en dimensions plus élevées réduiraient la précision du système de premier ordre. Cela a été surmonté par l'introduction d'un limiteur de pente généralisé (*Cockburn et Shu, 1998*) qui imposait le principe du maximum local, ce qui était compatible avec une précision d'ordre élevé.

Les premières applications des méthodes GD pour la dynamique des fluides computationnelle (CFD : Computational Fluid Dynamics) étaient principalement pour résoudre les équations d'Euler de la dynamique des gaz compressibles. Plus tard, la méthode GD a été généralisée pour traiter les termes visqueux et, par conséquent, la résolution des équations de *Navier-Stokes (Bassi et Rebay, 1997)*. Les méthodes GD ont également été appliquées à des domaines tels que l'aéroacoustique, les écoulements granulaires, la magnétohydrodynamique, la météorologie, la modélisation des eaux peu profondes, l'océanographie, le transport de contaminants dans les milieux poreux, les écoulements turbulents, les écoulements viscoélastiques et les prévisions météorologiques. Avec la première conférence internationale sur les méthodes GD qui a eu lieu en 1999, le développement et les problématiques liés à ces méthodes ont été tracés (*Cockburn et al., 2000*).

Plus récemment, il existe trois issues spéciales consacrées à la méthode GD (*Cockburn et Shu, 2005, 2009; Dawson, 2006*), qui contiennent des informations intéressantes sur la méthode GD dans tous les aspects, y compris la conception, l'analyse, la mise en œuvre et les applications

d'algorithmes. Il existe également quelques livres récents (*Li, 2006; Kanschä, 2008; Khan et Lai, 2014*) sur les méthodes GD.

Chavent et Salzano (1982) ont été les premiers à appliquer la méthode GD pour les problèmes d'écoulements d'eau peu profonde. Initié par *Schwanenberg et Köngeter (2000)*, la méthode RKDG a gagné en popularité dans la simulation d'écoulements à surface libre. Nous pouvons trouver un nombre croissant d'études, y compris les écoulements avec des chocs, tels que les ressauts hydrauliques et les ruptures de barrages (*Li et Liu, 2001; Schwanenberg et Harms, 2004*). *Kubatko et al. (2006)* ont développé un modèle morphodynamique (modélisation de l'évolution du lit de sédiments) en résolvant l'équation d'Exner sur un maillage non-structuré. Plusieurs approches impliquant des méthodes d'ordres arbitraires sur des triangulations non structurées ont été développées pour les équations d'eau peu profonde (*Eskilsson et Sherwin, 2004*), éventuellement avec une p -adaptativité dynamique (*Kubatko et al., 2009*), un raffinement adaptatif (*Rhebergen et al., 2008*), traitement des dérivés du second ordre (*Aizinger et Dawson, 2002*) ou même des méthodes GD spatio-temporelles (*Ambati et Bokhove, 2007*). Des travaux récents poussent la formulation RKDG pour les équations d'eau peu profonde aux schémas "bien équilibrés" (well-balanced) incluant les flux et les termes sources pour le traitement du phénomène des bancs couvrants et découvrants (e.g., *Xing et Shu, 2006; Ern et al., 2008; Bunya et al., 2009; Ghostine et al., 2009; Ghostine, 2009; Kesserwani, 2008; Zhang et Shu, 2010; Kesserwani et Liang, 2010, 2012; Lai, 2010; Lai et Khan, 2012a,b,c; Lai, 2012; Lee, 2014; Duran et Marche, 2014; Lee et Lee, 2015*). La liste n'est évidemment pas exhaustive.

La méthode GD possède plusieurs propriétés intéressantes qui la rendent attrayante et populaire :

- Capacité à capturer des discontinuités de la solution relative à un domaine de calcul donné ;
- Les propriétés de conservation local (exemple : la quantité de mouvement et l'énergie) sur chaque élément ;
- Permet de choisir arbitrairement l'ordre d'interpolation dans les éléments aboutissant à une complète adaptativité en espace (h -adaptativité) et en ordre (p -adaptativité) ;
- Utilisation des maillages non structurés et aussi des maillages non-conformes ;
- Elle peut être appliquée aux problèmes de géométrie complexe ;
- Indépendamment de l'ordre, la communication entre les éléments se fait aux interfaces, ce qui la rend aisément parallélisable.

Pour répondre aux exigences de précision, de stabilité, de robustesse et de l'applicabilité de la méthode numérique aux problèmes réels, la méthode GD apparaît comme la solution "idéale" par rapport aux MVF dont la précision dépasse difficilement le second ordre. Les méthodes GD par cet état de l'art offrent un large éventail de solutions qui permettent de simuler des écoulements à surface libre.

3.3 Forme conservative des équations à résoudre

Un système de m équations aux dérivées partielles sous une forme conservative peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), U(x, 0) = U_0(x), x \in \Omega, t \geq 0 \quad (3.1)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Dans ces équations, \mathbf{U} est le vecteur des variables conservatives, \mathbf{F} est le vecteur de flux, et \mathbf{S} est le vecteur des termes sources. Tout composant de flux, \mathbf{f}_i , peut être écrit dans un système tridimensionnel de coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\mathbf{f}_i = E_i \mathbf{i} + G_i \mathbf{j} + H_i \mathbf{k} \quad (3.3)$$

Pour un vecteur d'unité arbitraire $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$, la matrice jacobienne de la fonction de flux $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ est donnée par l'équation :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f}_1 / \partial U_1 & \cdots & \partial \mathbf{f}_1 / \partial U_m \\ \partial \mathbf{f}_2 / \partial U_1 & \cdots & \partial \mathbf{f}_2 / \partial U_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial \mathbf{f}_m / \partial U_1 & \cdots & \partial \mathbf{f}_m / \partial U_m \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} \quad (3.4)$$

Le système est hyperbolique si la matrice jacobienne possède m valeurs propres réelles, $\lambda_i(U)$, $i = 1, 2, \dots, m$, et un ensemble complet de vecteurs propres linéairement indépendants $\mathbf{K}_i(\mathbf{U})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Le système est strictement hyperbolique si les valeurs propres sont réelles et distinctes ([Toro, 2009](#)).

3.4 Formulation de Galerkin discontinue

La méthode GD présente deux étapes de calcul indépendantes. La première étape fournit une prédiction de la solution numérique obtenue en utilisant des polynômes discontinus par morceaux incluant une évaluation des flux numériques sur les arêtes de la discrétisation (ou facettes en 3-D). La seconde étape consiste en une limitation de pente afin de stabiliser la solution numérique. La présentation qui suit concerne les maillages 1-D et 2-D. Plus de détails sur la méthode GD peuvent être trouvés dans les livres de ([Li, 2006](#); [Khan et Lai, 2014](#)).

Les MEF reposent sur la recherche d'une solution du problème par "morceaux" par le biais de volumes discrets de l'espace appelés éléments. Ces éléments sont habituellement jointifs et sans recouvrement. Le domaine Ω est divisé en N_e éléments discrets comme le montre la relation

suivante :

$$\Omega \simeq \hat{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e \quad (3.5)$$

Dans la terminologie éléments finis, l'ensemble des éléments constitue un maillage. Dans les méthodes GD, il n'y a pas de continuité des fonctions de base entre les éléments. Les éléments ne partagent donc pas leurs nœuds comme cela est représenté dans la figure 3.2 et 3.3 pour le cas d'éléments 1D et 2D linéaires. Par opposition, la MEF continue implique un partage des nœuds entre les éléments contigus. En réalité, même dans la formulation continue, les nœuds sont également disjoints entre les éléments, mais les contributions de ces derniers sont sommées de manière à ne retenir qu'une seule valeur nodale (dans les MEF continues, cette opération s'appelle l'assemblage). Dans les méthodes GD, la solution peut donc être discontinue entre chaque élément ce qui confère à la méthode d'intéressantes caractéristiques. Les quantités échangées entre les éléments sont des flux qui peuvent être estimés selon plusieurs procédés.

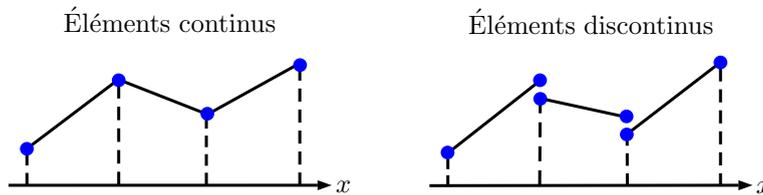


FIGURE 3.2 – Éléments unidimensionnels linéaires continus et discontinus.

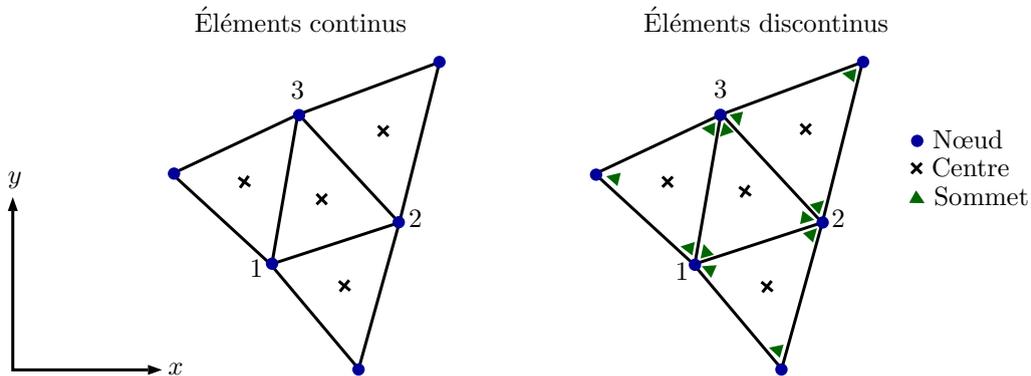


FIGURE 3.3 – Éléments bidimensionnels linéaires continus et discontinus.

Le principe fondamental des MEF est de rechercher la solution sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base. Dans un élément, la variation des variables conservatives, les flux et les termes sources peuvent être estimés à l'aide des polynômes de Lagrange (également appelées fonctions de forme ou des fonctions de base) comme indiqué par l'équation :

$$\mathbf{U} \simeq \hat{\mathbf{U}} = \sum \mathbf{N}_j \mathbf{U}_j ; \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) \simeq \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) ; \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) \simeq \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) \quad (3.6)$$

À chaque nœud j est associée une fonction de base \mathbf{N}_j invariante dans le temps. Les coefficients \mathbf{U}_j sont les degrés de liberté et correspondent aux valeurs de \mathbf{U} aux positions des nœuds de l'élément.

L'équation (3.1) est la formulation forte du système. Les MEF reposent sur une formulation dite faible du problème à résoudre où l'on cherche à vérifier l'équation (3.1) en moyenne sur l'élément. Cette forme s'obtient en multipliant le système (3.1) par une fonction test \mathbf{N}_i et en intégrant l'ensemble sur l'élément :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \nabla \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega \quad (3.7)$$

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions test et les fonctions de forme sont identiques.

En substituant l'approximation des \mathbf{U} et en appliquant le théorème de divergence, on obtient :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega \quad (3.8)$$

où Γ_e désigne la surface de Ω_e et \mathbf{n} le vecteur normal sortant à Γ_e .

L'un des intérêts de la formulation faible est d'introduire la notion de flux qui permet entre autre de traiter de manière simple les conditions aux limites. En remplaçant le terme flux $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n}$ par le flux numérique $\tilde{\mathbf{F}}$ on obtient :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega \quad (3.9)$$

L'équation finale, après l'intégration par la règle de quadrature de Gauss, peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{R} \quad (3.10)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{L} \quad (3.11)$$

où \mathbf{M} est la matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \quad (3.12)$$

Finalement, la solution de variables conservatives \mathbf{U} peut être obtenue en utilisant une méthode d'intégration temporelle appropriée. Les lois de conservation continues sont divisées en équations algébriques discrètes et résolus pour obtenir des solutions à différents moments. Dans un système hyperbolique, des discontinuités et des ondes de choc peuvent se former même avec des conditions initiales et aux limites lisses. Des tests numériques montrent que les oscillations parasites sont générées avec une approximation en espace d'ordre supérieur, de sorte que les techniques de limitation sur les variables conservatives doivent être appliquées pour limiter la solution. La forme de fonctions de base, l'intégration numérique, le flux numérique et l'intégration temporelle sera discuté dans les sections suivantes.

3.4.1 Fonctions de forme

Les fonctions de forme, développées à partir de la théorie de l'interpolation de Lagrange, sont brièvement abordées dans cette section. Les fonctions de forme (également connu en tant que fonctions de base, fonctions d'interpolation ou fonctions d'essai) sont une approximation polynomiale par morceaux de la solution dans un élément local. Plus de discussion sur les fonctions de forme peut être trouvé dans les manuels traitant la méthode des éléments finis (*Dhatt et Touzot, 1981; Reddy, 1993*).

a) Fonctions de forme dans un élément unidimensionnel

Les fonctions de forme sont continue par morceaux et se rapproche de la variation des variables à l'intérieur d'un élément. Dans l'interpolation de Lagrange, l'approximation de la solution est évaluée en utilisant l'équation suivante :

$$\phi(x) \simeq \hat{\phi}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \phi_j, x \in \Omega_e = [x_s^e, x_e^e] \quad (3.13)$$

où n est le nombre de nœuds dans un élément, ϕ_j est la solution aux nœuds, x_d^e et x_f^e sont, respectivement, les coordonnées de début et de fin d'un élément et $N_j(x)$ est la $j^{\text{ième}}$ fonction de base de Lagrange donnée par l'équation suivante :

$$N_j(x) = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

La fonction de forme $N_j(x)$ prend la valeur de un au nœud j considérée et zéro à tous les autres nœuds comme donné par l'équation :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.15)$$

L'approximation $\hat{\phi}$ donne la valeur de ϕ au niveau de chaque nœud de l'élément. Pour un élément linéaire de deux nœuds, les fonctions de forme sont données par l'équation (3.16) et sont présentés sur la figure 3.4(a). La variation linéaire d'une variable est représentée sur la même figure.

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\ N_2(x) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

b) Fonctions de forme dans un élément bidimensionnel

Dans une analyse en deux dimensions, les éléments triangulaires et quadrilatéraux sont couramment utilisés. En règle générale, ces éléments peuvent avoir des arrêtes droites ou courbées. Étant donné que les éléments triangulaires sont plus adaptatifs aux géométries complexes et

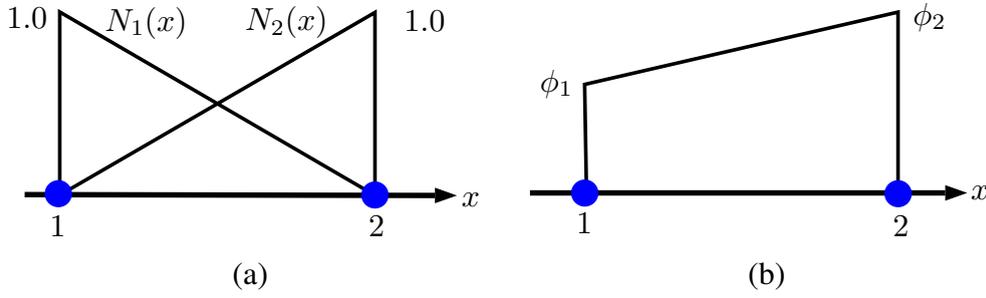


FIGURE 3.4 – Élément linéaire unidimensionnel : (a) Fonctions de forme, (b) Variation linéaire d'une variable.

nécessitent le moindre nombre de nœuds pour atteindre un ordre donné de polynôme, la discussion se limite aux éléments triangulaires. Les éléments triangulaires linéaires 2D avec des arêtes droites sont utilisés dans cette thèse. La variation de variables peut être approximée dans un élément tel que donné par l'équation :

$$\phi(x, y) \simeq \tilde{\phi}(x, y) = \sum_{j=1}^n N_j(x, y) \phi_j, (x, y) \in \Omega_e \quad (3.17)$$

où n est le nombre de nœuds dans un élément. Les fonctions de forme sont nécessaires pour satisfaire la propriété de *Kronecker* donnée par l'équation :

$$N_j(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.18)$$

La fonction de forme N_1 et la variation d'une variable sur un élément triangulaire linéaire de trois nœuds avec des bords droits sont représentées sur la figure 3.5. Les nœuds sont numérotés dans le sens antihoraire. Les fonctions de forme des éléments triangulaires linéaires sont donnés par l'équation :

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e} \\ N_2(x, y) &= \frac{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e} \\ N_3(x, y) &= \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où A_e est la surface de l'élément triangulaire donnée par l'équation (3.20) et x_i, y_i sont des coordonnées d'un nœud ($i = 1, \dots, n$).

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

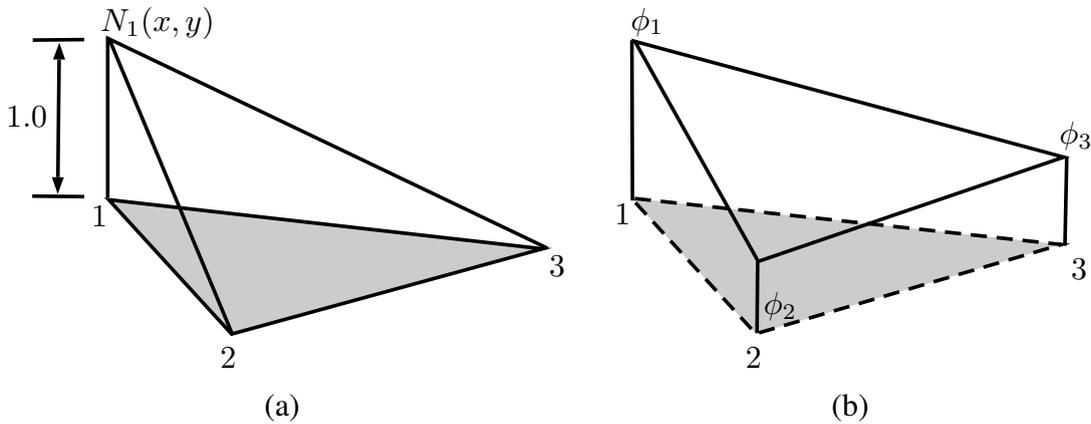


FIGURE 3.5 – Élément triangulaire linéaire : (a) Fonction de forme, (b) Variation linéaire d'une variable.

3.4.2 Transformation isoparamétrique

Le système (3.10) requiert la construction des fonctions test et d'interpolation sur chaque élément e ce qui constitue une procédure assez lourde. De plus, on a souvent recours à l'intégration numérique pour évaluer les coefficients du système élémentaire. Cela nécessite la mise en mémoire de points d'intégration différents d'un élément à l'autre, ce qui exigerait beaucoup d'espace mémoire. Pour contourner cette difficulté, on introduit un élément r dit de référence.

Un élément de référence est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel e par une transformation géométrique bijective. Cette transformation est isoparamétrique si les fonctions de transformation géométrique sont identiques aux fonctions d'interpolation. Elle définit les coordonnées x de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant à l'élément de référence. La transformation de l'élément de référence à l'élément réel prend la forme représentée par l'équation suivante :

$$x = \sum N_j(\cdot)x_j, \quad \hat{\phi} = \sum N_j(\cdot)\phi_j \quad (3.21)$$

Dans cette section, on explique brièvement, les transformations isoparamétriques pour les éléments 1D et 2D. Les intégrations par la quadrature numérique seront détaillées dans la section suivante.

a) Transformation isoparamétriques pour un élément unidimensionnel

La transformation isoparamétrique 1D en forme générale est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi)x_j \\ \hat{\phi} &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi)\phi_j \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour un élément linéaire, la transformation isoparamétrique est représenté sur la figure 3.6 et les fonctions de forme en coordonnées locales sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 0.5(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= 0.5(1 + \xi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La variation de la coordonnée globale ainsi que toute autre variable à l'intérieur d'un élément

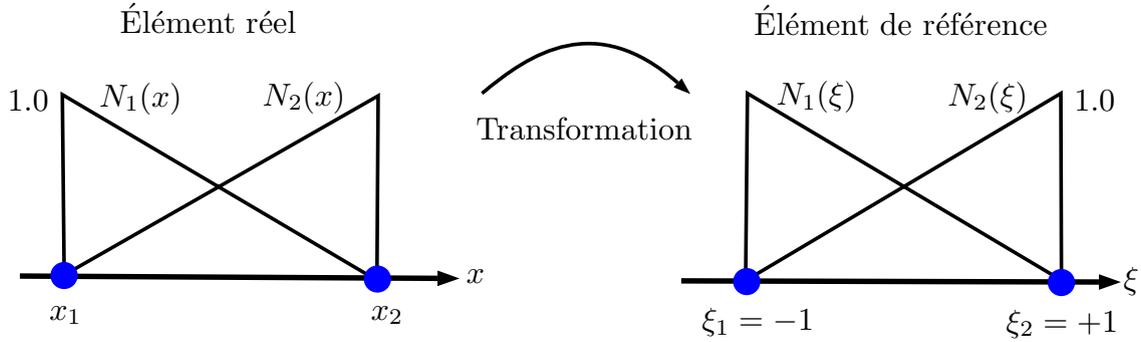


FIGURE 3.6 – Transformation isoparamétrique pour un élément linéaire 1D.

linéaire sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned} x &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ \hat{\phi} &= N_1(\xi)\phi_1 + N_2(\xi)\phi_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

b) Transformation isoparamétrique pour un élément bidimensionnel

La transformation isoparamétrique pour un élément triangulaire linéaire 2D est représenté sur la figure 3.7. Les fonctions de forme de l'élément linéaire sont données par les équations :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les coordonnées x et y ainsi que toute autre variable peuvent être interpolés dans un élément en utilisant les équations :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^3 N_j(\xi, \eta)x_j \\ y &= \sum_{j=1}^3 N_j(\xi, \eta)y_j \\ \hat{\phi} &= \sum_{j=1}^3 N_j(\xi, \eta)\phi_j \end{aligned} \quad (3.26)$$

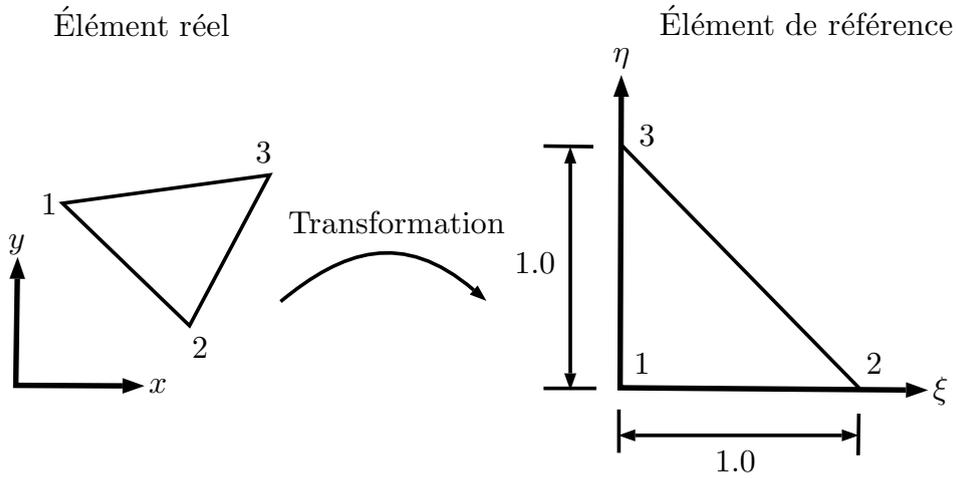


FIGURE 3.7 – Transformation isoparamétrique pour un élément triangulaire linéaire 2D.

c) Calcul des intégrales par la transformation isoparamétrique

En utilisant la transformation isoparamétrique, l'intégration peut être réalisée par la méthode de substitution de variable, également appelée transformation de coordonnées. La matrice de masse dans le cas unidimensionnel est donnée par l'équation :

$$\mathbf{M} = \int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i(x)N_j(x)dx \quad (3.27)$$

La matrice de masse correspondante dans les coordonnées locales est donnée par :

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 N_i(\xi)N_j(\xi)J^e d\xi \quad (3.28)$$

J^e est le Jacobien de l'élément e .

$$J^e = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^n N_j(\xi)x_j\right)}{d\xi} = \sum_{j=1}^n \frac{dN_j(\xi)}{d\xi}x_j \quad (3.29)$$

Le terme de dérivé de coordonnées globales, représenté dans l'équation :

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{dN_i(x)}{dx} f(\hat{\phi}(x)) dx \quad (3.30)$$

peut être transformé en coordonnées locales comme suit :

$$\frac{dN_i(x)}{dx} \rightarrow \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J^e} \quad (3.31)$$

Ainsi, l'équation (3.30) dans le système de coordonnées locales peut être écrite sous la forme suivante :

$$\int_{x_s^e}^{x_e} \frac{dN_i(x)}{dx} f(\hat{\phi}(x)) dx = \int_{-1}^1 \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J^e} f(\hat{\phi}(\xi)) J^e d\xi = \int_{-1}^1 \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} f(\hat{\phi}(\xi)) d\xi \quad (3.32)$$

Dans les éléments 2D, la relation entre les systèmes de coordonnées locales et globales pour une surface infinitésimale est donnée par l'équation :

$$d\Omega = \det(\mathbf{J}^e) d\xi d\eta \quad (3.33)$$

où la matrice jacobienne est donnée par :

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{dN_j(\xi, \eta)}{d\xi} x_j & \sum_{j=1}^n \frac{dN_j(\xi, \eta)}{d\xi} y_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{dN_j(\xi, \eta)}{d\eta} x_j & \sum_{j=1}^n \frac{dN_j(\xi, \eta)}{d\eta} y_j \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

En utilisant la règle de la chaîne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^e \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

un dérivé dans les coordonnées globales peut être transformé en un système de coordonnées locales en utilisant l'équation :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^e)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}^e)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}^e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La procédure de transformation de coordonnées est présentée dans l'équation (3.37), qui a été dérivé, avant l'équation (3.9).

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega \quad (3.37)$$

La matrice masse peut être évaluée en utilisant l'équation suivante :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \mathbf{N}_j(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}^e) d\xi d\eta \quad (3.38)$$

Le terme flux se transforme, comme indiqué dans l'équation (3.39), où le nouvel opérateur ∇'

est défini par l'équation (3.40) :

$$\int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 \nabla' \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \det(\mathbf{J}^e) d\xi d\eta \quad (3.39)$$

$$\nabla' = \frac{1}{\det(\mathbf{J}^e)} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \mathbf{j} \right] \quad (3.40)$$

En utilisant la transformation isoparamétrique représenté dans l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_3 - y_1 = y_{31} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_2 - y_1 = y_{21} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_3 - x_1 = x_{31} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_2 - x_1 = x_{21} \end{aligned} \quad (3.41)$$

l'équation (3.39) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left[y_{31} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} - y_{21} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \right] \mathbf{E}(\hat{\mathbf{U}}) d\xi d\eta \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left[x_{31} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} - x_{21} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \right] \mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}}) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{i} + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}})\mathbf{j}$.

La transformation isoparamétrique présenté sur la figure 3.8 est utilisée pour une intégration linéaire. Dans l'élément physique, le segment linéaire infinitésimal $d\Gamma$ est mappé à $d\xi$ dans le repère local donné par l'équation :

$$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2} d\xi \quad (3.43)$$

Pour un élément linéaire en coordonnées ξ , les fonctions de forme sont données par l'équation (3.44) et la transformation isoparamétrique est donnée par l'équation (3.45).

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 0.5(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= 0.5(1 + \xi) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} x &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ y &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le segment linéaire infinitésimal le long de la ligne 1-2, $d\Gamma_{12}$, est donné par l'équation :

$$d\Gamma_{12} = \frac{L_{12}}{2} d\xi \quad (3.46)$$

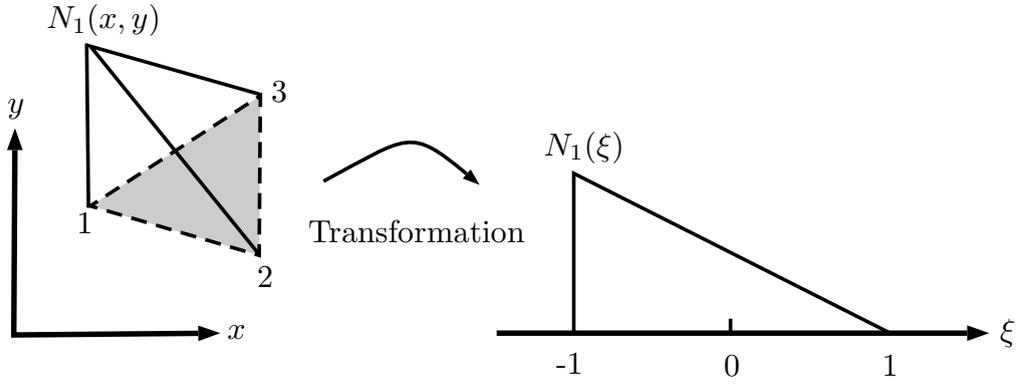


FIGURE 3.8 – Transformation de l'intégration de la chaîne dans le cadre bidimensionnel.

où L_{12} est la longueur de la ligne 1–2. La ligne solide de flux numérique est évaluée comme indiqué dans l'équation :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} N_1(x,y) \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma &= \int_{-1}^1 N_1(\xi) \tilde{\mathbf{F}}_{12} \frac{L_{12}}{2} d\xi + \int_{-1}^1 N_1(\xi) \tilde{\mathbf{F}}_{31} \frac{L_{31}}{2} d\xi \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{12} \frac{L_{12}}{2} + \tilde{\mathbf{F}}_{31} \frac{L_{31}}{2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $\tilde{\mathbf{F}}_{12}$ est le flux numérique à travers la ligne 1–2. Pour les fonctions test N_2 et N_3 les flux numériques sont donnés par l'équation :

$$\int_{\Gamma_e} N_2 \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma = \tilde{\mathbf{F}}_{12} \frac{L_{12}}{2} + \tilde{\mathbf{F}}_{31} \frac{L_{31}}{2}, \quad \int_{\Gamma_e} N_3 \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma = \tilde{\mathbf{F}}_{23} \frac{L_{23}}{2} + \tilde{\mathbf{F}}_{31} \frac{L_{31}}{2} \quad (3.48)$$

En notation succincte, l'intégrale de la chaîne est donnée par l'équation :

$$\int_{\Gamma_e} N_i \tilde{\mathbf{F}} d\Gamma = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \frac{L_{ij}}{2} \quad (3.49)$$

3.4.3 Intégration numérique

Après transformation des coordonnées globales aux coordonnées locales, les équations doivent être intégrés. Pour certains cas simples, l'intégration analytique est possible. Cependant, pour les cas complexes et plus pratiques dans les implémentations informatiques, les intégrales sont souvent évaluées numériquement. Nous présentons ci-dessous la méthode de quadrature de Gauss pour l'intégrale explicite des monômes sur l'élément de référence uni et bidimensionnel.

a) Intégration numérique à une dimension

L'intégrale 1D peut être calculée par la formule de quadrature de Gauss dans l'intervalle $[-1, 1]$ comme indiqué dans l'équation :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(\xi_i) \quad (3.50)$$

où n_g est le nombre de points d'intégration, ξ_i , sont les coordonnées des n_g points d'intégration, et w_i , sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants. Pour les n_g points de quadrature, une fonction polynomiale jusqu'à l'ordre $P = 2n_g - 1$ peut être intégrée exactement. Les règles de la quadrature de Gauss, dans l'intervalle $[-1, 1]$, pour un polynôme jusqu'à l'ordre 5 sont énumérés dans le tableau 3.1 (Reddy, 1993).

TABLE 3.1 – Quadrature de Gauss pour une intégrale à une dimension dans l'intervalle $[-1, 1]$ (Reddy, 1993).

Nombre de point de Gauss (n_g)	Abscisse de point de Gauss (ξ)	Poids (w)	Degré de précision (P)
1	$\xi_1 = 0$	$w_1 = 2$	1
2	$\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$	$w_1 = w_2 = 1$	3
3	$\xi_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}$ $\xi_2 = 0$ $\xi_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}$	$w_1 = 5/9$ $w_2 = 8/9$ $w_3 = 5/9$	5

b) Intégration numérique à deux dimensions

La règle de quadrature 2D pour l'élément triangulaire de référence est donnée par l'équation (3.51) et les points de quadrature de Gauss sont répertoriés dans le tableau 3.2 (Reddy, 1993).

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (3.51)$$

3.5 Flux numérique

Étant donné que les éléments discontinus sont reliés par le flux numérique le long des interfaces, la précision avec laquelle ces flux sont calculés devient cruciale dans la méthode GD. Comme le flux normal $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n}$ n'est pas défini sur les limites discontinues, la stratégie habituelle consiste à le remplacer par un flux numérique $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n}$. On peut réécrire l'équation (3.8),

TABLE 3.2 – Quadrature de Gauss et les poids d'un élément de référence triangulaire (Reddy, 1993).

Nombre de point de Gauss (n_g)	Coordonnées (ξ, η)	Poids (w)	Degré de précision (P)
1	$(\xi_1, \eta_1) = (1/3, 1/3)$	$w_1 = 1$	1
3	$(\xi_1, \eta_1) = (1/6, 1/6)$ $(\xi_2, \eta_2) = (4/6, 1/6)$ $(\xi_3, \eta_3) = (1/6, 4/6)$ $a_1 = 0.1012865073235$ $a_2 = 0.7974269853531$ $a_3 = 0.4701420641051$	$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$	2
7	$a_4 = 0.0597158717898$ $(\xi_1, \eta_1) = (a_1, a_1)$ $(\xi_2, \eta_2) = (a_2, a_1)$ $(\xi_3, \eta_3) = (a_1, a_2)$ $(\xi_4, \eta_4) = (a_3, a_4)$ $(\xi_5, \eta_5) = (a_3, a_3)$ $(\xi_6, \eta_6) = (a_4, a_3)$ $(\xi_7, \eta_7) = (1/3, 1/3)$	$w_1 = 0.1259391805$ $w_1 = w_2 = w_3$ $w_4 = 0.1323941527$ $w_4 = w_5 = w_6$ $w_7 = 0.225$	5

sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{R}' \quad (3.52)$$

l'intégration de temps t à $t + \Delta t$ donne :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} dt + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n} dt d\Gamma = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}' dt \quad (3.53)$$

Le flux normal peut être remplacé par le flux numérique comme représenté dans l'équation suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n} dt = \int_t^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{F}} dt = \tilde{\mathbf{F}} \Delta t \quad (3.54)$$

où le flux numérique est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{n} dt \quad (3.55)$$

Le flux numérique est la moyenne temporelle de flux normal. La précision avec laquelle le flux numérique est calculé limite la taille de pas de temps. Comme le flux normal comprend des quantités comme le flux de masse, de moment, et d'énergie à l'intérieur ou à l'extérieur

d'un élément, la représentation précise des flux numérique est indispensable pour préserver ces quantités.

La solution du flux numérique dépend des variables \mathbf{U} dans un élément Ω_e et l'élément voisin Ω_v , qui devient un problème de Riemann approximatif générale et peut être écrit comme représenté dans l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_e, \mathbf{U}_v) \quad (3.56)$$

Pour conserver la masse dans l'ensemble du domaine, le flux numérique doit être compatible avec le flux physique (Laney, 1998), comme indiqué dans l'équation ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \text{ pour } \mathbf{U} = \mathbf{U}_e = \mathbf{U}_v \quad (3.57)$$

3.5.1 Problème de Riemann associé au système de Saint-Venant

Étant donné que les discontinuités sont autorisés à travers les frontières des éléments, la solution de flux numériques peut être considérée comme un problème de Riemann.

Le problème de Riemann est le problème de valeur initiale le plus simple pour des systèmes hyperboliques. Il est composé de deux états uniformes sur un domaine infini, séparés par une discontinuité à l'origine (Figure 3.9). Pour les équations d'eaux peu profondes, la solution exacte du problème de Riemann est bien connue, et consiste en une combinaison de trois ondes : une onde de raréfaction se propageant vers la gauche, une onde de choc se propageant vers la droite et un contact de discontinuité.

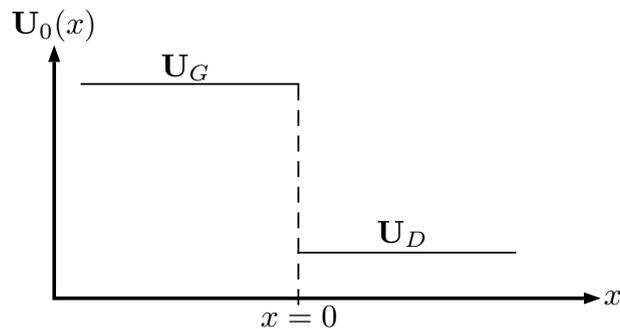


FIGURE 3.9 – Illustration des données initiales du problème de Riemann.

Les valeurs initiales du problème de Riemann sont données par :

$$\text{Conditions initiales } \begin{cases} \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_G & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_D & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Les états initiaux \mathbf{U}_G et \mathbf{U}_D sont des vecteurs constants, et représentent des conditions au temps $t = 0$, à gauche (G) de $x = 0$, et à droite (D) de $x = 0$ respectivement.

3.5.2 Solvateur de Riemann approximatif

Dans cette section, les solveurs HLL, HLLC et de Roe seront discutés en forme générale. Les application du solveur de Riemann à des problèmes spécifiques seront présentées dans les chapitres suivants. Plus de discussions et de détails concernant le problème de Riemann peuvent être trouvés dans le travail de [Toro \(2009\)](#).

a) Solvateur HLL

[Harten, Lax, et van Leer](#) ont proposé en 1983 une méthode approchée pour la résolution d'un problème de Riemann. Cette méthode est maintenant connue sous les initiales HLL. Elle est fondée sur une configuration à deux ondes séparant ainsi trois états (voir Figure 3.10). Pour le volume de contrôle illustré à la figure 3.11 et en supposant que la vitesse des ondes est connue, on peut calculer une approximation du flux au niveau de l'interface en intégrant simplement la loi de conservation.

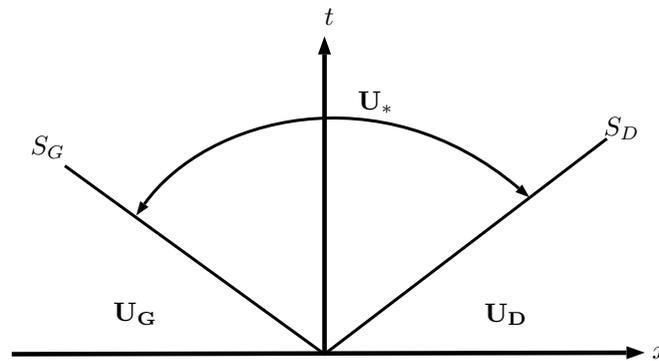


FIGURE 3.10 – Structure des ondes dans le solveur HLL de Riemann.

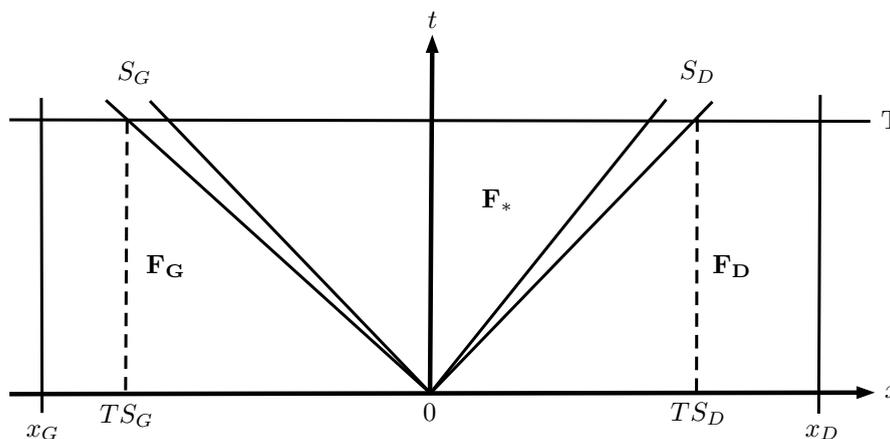


FIGURE 3.11 – Volume de contrôle pour le solveur HLL.

Les lois de conservation sur le plan $x - t$ peuvent être intégrées comme suit :

$$\int \int (\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x) dxdt = 0 \quad (3.59)$$

Après l'application du théorème de Green, l'intégrale double sur le domaine peut être réduite à une intégrale curviligne comme représenté dans l'équation suivante :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt = 0 \quad (3.60)$$

L'intégration sur le volume de contrôle gauche $[TS_G, 0] \times [0, T]$ donne :

$$(\mathbf{U}_G - \mathbf{U}_*) (0 - TS_G) - T (\mathbf{F}_* - \mathbf{F}_G) = 0 \quad (3.61)$$

De la même façon, l'intégration des lois de conservation sur le volume de contrôle droite $[0, TS_D] \times [0, T]$ donne :

$$(\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_*) (TS_D - 0) - T (\mathbf{F}_D - \mathbf{F}_*) = 0 \quad (3.62)$$

Dans ces équations \mathbf{F}_G , \mathbf{F}_D , et \mathbf{F}_* sont flux numériques à travers la frontière de l'élément.

Les équations (3.61) et (3.62) peuvent être résolues pour obtenir la valeur de \mathbf{F}_* telle que donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{F}_* = \frac{S_D \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{F}_D + S_G S_D (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G)}{S_D - S_G} \quad (3.63)$$

Le flux HLL pour le problème de Riemann est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{F}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{F}_G & \text{si } S_G \geq 0 \\ \frac{S_D \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{F}_D + S_G S_D (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G)}{S_D - S_G} & \text{si } S_G < 0 < S_D \\ \mathbf{F}_D & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

Pour le cas scalaire, où il y a une seule vitesse de l'onde, $S = S_G = S_D$, le flux HLL se traduira dans le flux décentré (upwind) représenté dans l'équation suivante :

$$F^{up} = \begin{cases} F_G & \text{si } S \geq 0 \\ F_D & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Ainsi, si on peut calculer les vitesses S_G et S_D , nous obtenons une valeur approchée du flux à l'interface. Le défaut de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne prévoit pas la variation de la solution due à la discontinuité de contact. Ceci peut être corrigé en introduisant une troisième onde. La méthode ainsi obtenue est la méthode HLLC.

b) Solveur HLLC

Le solveur HLLC (Harten–Lax–van Leer Contact) est une modification du solveur de Riemann HLL (*Toro et al., 1989*). Cette modification considère une configuration à trois ondes comme illustré sur la figure 3.12. En supposant que les vitesses des ondes S_G , S_D et S_* sont

connus, le flux de HLLC est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{F}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}_G) & \text{si } S_G \geq 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_G) + S_G (\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_G) & \text{si } S_G < 0 < S_* \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_D) + S_D (\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_D) & \text{si } S_* < 0 < S_D \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_D) & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

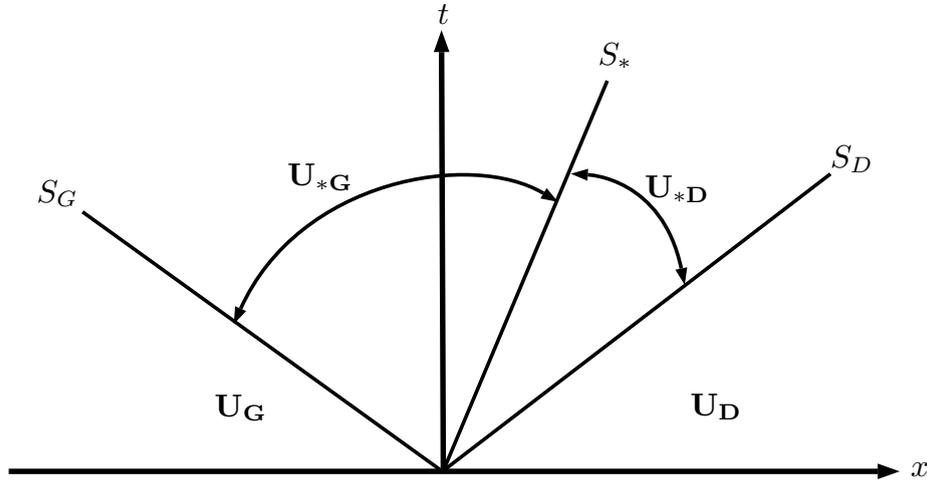


FIGURE 3.12 – Structure des ondes dans le solveur HLLC de Riemann.

c) Solveur de Roe

Les lois de conservation sous une forme générale peuvent être écrites comme le montre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.67)$$

où la matrice jacobienne est donnée par l'équation :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.68)$$

Dans l'approche de [Roe \(1981\)](#), la matrice jacobienne originale \mathbf{J} est remplacée par une matrice constante $\tilde{\mathbf{J}}$ (qui représente les conditions locales), comme le montre l'équation :

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D) \quad (3.69)$$

Le système non linéaire initial de lois de conservation est transformé en un système linéaire à coefficients constants telle que donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial x} = 0 \quad (3.70)$$

La solution du système linéaire est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (3.71)$$

où m est le nombre de valeurs propres de la loi de conservation, $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$ sont les points forts d'onde, et $\tilde{\mathbf{K}}_i$ sont les vecteurs propres.

Appliquant le théorème de Green sur un volume de contrôle (comme dans le cas du solveur HLL), le flux numérique de loi originale de conservation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_* &= \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{U}_G - \frac{1}{T} \int_{TS_G}^0 \mathbf{U} dx \\ \mathbf{F}_* &= \mathbf{F}_D - S_D \mathbf{U}_D + \frac{1}{T} \int_0^{TS_D} \mathbf{U} dx \end{aligned} \quad (3.72)$$

sur la base des hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{TS_G}^0 \mathbf{U} dx &= \int_{TS_G}^0 \tilde{\mathbf{U}} dx \\ \int_0^{TS_D} \mathbf{U} dx &= \int_0^{TS_D} \tilde{\mathbf{U}} dx \\ \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.73)$$

le flux numérique pour le système linéarisé est donné par l'équation :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_* &= \tilde{\mathbf{F}}_G - S_G \mathbf{U}_G - \frac{1}{T} \int_{TS_G}^0 \tilde{\mathbf{U}} dx \\ \tilde{\mathbf{F}}_* &= \tilde{\mathbf{F}}_D - S_D \mathbf{U}_D + \frac{1}{T} \int_0^{TS_D} \tilde{\mathbf{U}} dx \end{aligned} \quad (3.74)$$

Les composantes de l'équation (3.72) sont ensuite combinées pour déterminer le flux numérique de Roe à travers la frontière comme suit :

$$\mathbf{F}^{\text{Roe}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (3.75)$$

La matrice jacobienne de Roe est nécessaire pour faire une projection linéaire de l'espace \mathbf{U} à \mathbf{F} . Elle devrait être consistante avec la matrice jacobienne exacte comme le montre l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{J}} = (\mathbf{U}_G = \mathbf{U}_D = \mathbf{U}) = \mathbf{J}(\mathbf{U}) \quad (3.76)$$

En outre, il convient de préserver la conservation à travers les discontinuités en remplissant la condition suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_D) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G) = \tilde{\mathbf{J}} \times (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G) \quad (3.77)$$

Enfin, les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{J}}$ doivent être linéairement indépendants.

3.6 Variation totale et schéma TVD

Il existe de nombreux schémas numériques précis à un ordre supérieur. Mais atteindre un ordre de précision supérieur implique une tendance du schéma numérique à osciller surtout dans les régions à forts gradients. Pour contourner ce problème, des méthodes numériques dites à variation totale décroissante (TVD) ont été mises au point. Elles garantissent le respect des conditions de monotonie sur la solution. Ceci permet d'assurer la convergence de la méthode. Pour éviter les oscillations on introduit un coefficient ("Viscosité numérique") judicieusement calculé. Les méthodes permettant de déterminer ce coefficient sont de deux types :

- Les méthodes à limitation de pente.
- Les méthodes à limitation de flux.

On rappelle ci-dessous, la notion de variation totale et on définit un schéma TVD :

La Variation Totale (TV : Total Variation) est définie sur un maillage de N_e éléments comme l'écart entre les solutions aux différents points de calcul du schéma numérique à l'instant n :

$$\text{TV}(U)^n = \sum_{i=1}^{N_e-1} |U_{i+1}^n - U_i^n| \quad (3.78)$$

Cette grandeur est un indicateur des oscillations de la solution. Une augmentation de TV avec le temps traduit l'apparition d'oscillations de la solution.

Un schéma numérique est dit TVD si $\forall n$:

$$\text{TV}(U)^{n+1} \leq \text{TV}(U)^n \quad (3.79)$$

La notion TVD a été introduite pour la première fois par [Harten \(1983, 1984\)](#). Un schéma TVD ne crée ni n'amplifie les extrêmes, puisqu'il préserve la monotonie. Les schémas TVD sont intimement liés à la notion traditionnelle de viscosité numérique. Dans la méthode à viscosité artificielle, la viscosité est ajoutée de manière explicite en ajoutant des termes aux équations aux dérivées partielles. Dans les méthodes TVD, cette viscosité artificielle est inhérente au schéma numérique lui-même et les techniques numériques mises en oeuvre pour activer cette viscosité sont complexes. La viscosité numérique au niveau du schéma est contrôlé de manière très précise de telle sorte que les oscillations sont éliminées et qu'une haute précision soit assurée dans les parties lisses ([Buyer, 2001](#)).

3.6.1 Discrétisation dans le temps

La discrétisation temporelle la plus fréquemment utilisée en hydraulique est une discrétisation explicite. La caractéristique principale d'une discrétisation explicite est, en plus de sa plus grande facilité de programmation et sa demande modérée en mémoire ordinateur, une meilleure aptitude à gérer les problèmes fortement transitoires admettant des propagations rapides de discontinuités. En outre, une discrétisation temporelle explicite peut être facilement généralisé en ordre supérieur à 1. Cependant, le pas de temps est borné en fonction d'une contrainte de stabilité numérique qui s'exprime en terme du nombre CFL. Avec l'introduction d'une discrétisation

totale-ment implicite la condition de stabilité CFL n'est plus bornée à 1. Comparé à l'approche explicite, la méthode implicite demande une mémoire de stockage considérable et fait appel (à chaque pas de temps) à une inversion de matrice. En outre, la généralisation de cette approche pour un ordre supérieur à 1 n'est pas simple.

Plusieurs schémas explicites sont disponibles pour la discrétisation temporelle. On cite le schéma d'Euler de premier ordre, le schéma d'Adam–Bashforth et le schéma de type Runge–Kutta. Pour les problèmes impliquant des ondes de choc, les schémas TVD de type Runge–Kutta sont préférés. Plus de discussion sera donnée à travers des exemples dans les chapitres suivants. Pour illustrer la procédure d'intégration temporelle, l'équation ci-dessous sera utilisée.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{L} \quad (3.80)$$

Les méthodes d'intégration temporelle TVD de type Runge–Kutta de deuxième, troisième et quatrième ordre sont données, respectivement, par les équations suivantes (*Gottlieb et Shu, 1998*) :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{649}{1600} \mathbf{U}^n - \frac{10890423}{25193600} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) + \frac{951}{1600} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{5000}{7873} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{(3)} &= \frac{53989}{2500000} \mathbf{U}^n - \frac{102261}{5000000} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) + \frac{4806213}{20000000} \mathbf{U}^{(1)} \\ &\quad + \frac{5121}{20000} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) + \frac{23619}{32000} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{7873}{10000} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)}) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{\mathbf{U}^n}{5} + \frac{\Delta t}{10} \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) + \frac{6127}{30000} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) + \frac{7873}{30000} \mathbf{U}^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathbf{U}^{(3)} + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(3)}) \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

3.6.2 Limitation de pente

La méthode RKDG d'ordre supérieur en espace produit des oscillations à proximité des discontinuités (*Chavent et Cockburn, 1987; Chavent et Salzano, 1982*), ce qui peut mener à des instabilités numériques de la solution. Même si les oscillations sont moins graves, elles

produisent des solutions non-physiques, telles que des hauteurs d'eau négatives, ce qui est inacceptable. L'utilisation d'un limiteur de pente est alors nécessaire pour conserver le caractère TVD de la solution numérique.

Le concept de limitation de pente a été initialement introduit par *Leer* (1979) et *Boris et Book* (1973) sous la forme de "limiteur" qui contrôle les gradients de la solution numérique de façon à empêcher la création d'oscillations numériques (*Harten*, 1984). L'idée fondamentale associée à ces limiteurs est de limiter la dérivée en espace afin d'obtenir des solutions qui ont un sens physique. Ces limiteurs sont utilisés dans les schémas numériques à haute résolution et entrent uniquement en fonction aux voisinages des forts gradients.

Pour éviter tout comportement non monotone dans la solution, *Leer* (1979) a défini le critère suivant : "*L'interpolation dans un élément donné ne doit pas être en dehors des valeurs définies par les valeurs moyennes et les valeurs voisines de la variable interpolée*". Cependant, Le théorème de Godunov stipule qu'il est impossible d'établir une méthode monotone linéaire avec un ordre de précision supérieure à 1, et qu'il est nécessaire d'avoir recours à des techniques spéciales pour la résolution de problèmes où siègent de forts gradients (ce qui est le cas dans les problèmes de rupture de barrage, phénomène des bancs couvrants et découvrants ou au voisinage d'un ressaut hydraulique). Pour un schéma d'ordre supérieur à un, il est alors nécessaire d'introduire un limiteur $\Psi(r)$ qui permet de diminuer l'ordre du schéma en présence d'une discontinuité ou d'un fort gradient. r représente le ratio des pente sur le maillage, c'est-à-dire : $r_i = (U_i - U_{i-1}) / (U_{i+1} - U_i)$. Il existe un très grand nombre de limiteurs assurant le caractère TVD. On en trouvera une revue très détaillée dans l'excellente thèse de *Rider* (1992).

Une manière simple de représenter la limitation de l'ordre a été présentée par *Sweby* (1984). En choisissant dans la partie grisée (Figure 3.13) revient à une limitation TVD du second ordre. La fonction de limiteur est toujours supérieure ou égale à zéro, c'est-à-dire $\Psi(r) \geq 0$. Par conséquent, lorsque le limiteur prend la valeur zéro (pente négative), l'ordre du schéma numérique est réduit à 1 ; en revanche lorsque le limiteur prend la valeur un, l'ordre du schéma numérique est supérieur ou égal à 2. Tous les limiteurs sont compris entre le limiteur minmod (*Roe*, 1986) et le limiteur superbee. N'oublions pas aussi les deux fameux limiteurs de *Van Leer* (1974) et *Van Albada et al.* (1982) qui se placent entre minmod et superbee et qui ont une certaine souplesse dans la sélection des gradients grâce à leur différentiabilité.

Pour les schémas numériques unidimensionnels, l'approche fréquemment utilisée est la technique de MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) de *Leer* (1979) dans laquelle le limiteur est géométriquement appliqué au gradient d'une reconstruction linéaire de la solution par morceaux pour créer un schéma monotone. Dans un espace multidimensionnel, il a été montré que n'importe quel schéma combiné avec une limitation de pente qui vérifie la propriété TVD est au plus du premier ordre de convergence (*Goodman et LeVeque*, 1985). Par conséquent, de nombreux efforts ont été réalisés pour la construction de limiteurs de pentes multidimensionnels qui peuvent éliminer les oscillations non physiques sans ajouter une viscosité numérique excessive.

Nous détaillerons dans la section 4.2.3 trois limiteurs de pente unidimensionnels et nous présentons dans la section 6.5 le limiteur de pente bidimensionnel de *Tu et Aliabadi* (2005) pour des discrétisations triangulaires. Les limiteurs ainsi choisis améliorent l'exactitude de la

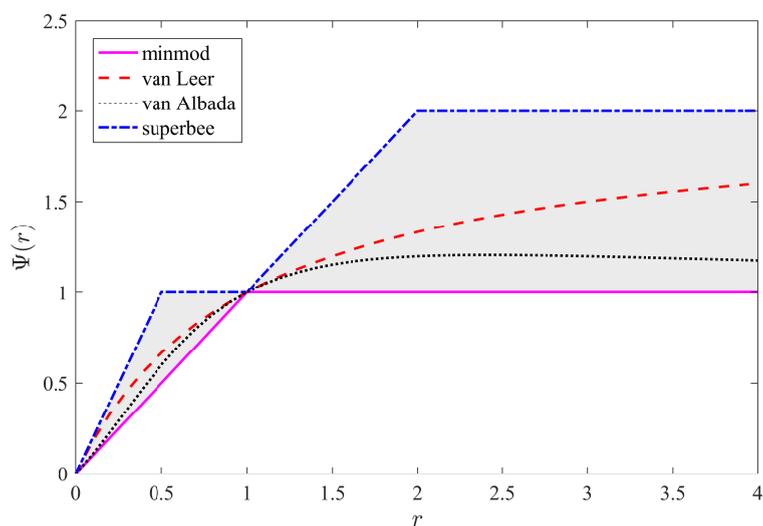


FIGURE 3.13 – Diagramme de *Sweby* (1984) : limiteurs de pente usuels. La partie grisée est la région TVD du second ordre.

solution, réduisent au maximum les oscillations non-physiques au sein des discontinuités et préserve l'ordre supérieur du schéma numérique.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes numériques de type RKDG utilisant l'approximation spatiale de type élément fini de Galerkin discontinue couplée à une discrétisation temporelle de type Runge–Kutta appliqué aux équations de *Saint–Venant* 1D et 2D. Les solutions obtenues sont linéaires par morceaux, et approchent la solution exacte à l'ordre supérieur en temps et en espace. Le caractère discontinu de la méthode et l'utilisation des triangles dans le cas bidimensionnel comme volume d'intégration, nous permet de traiter des problèmes avec des géométries quelconques. La méthode RKDG est conçue avec une procédure de limitation de pente qui permet d'éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. On verra dans le chapitre 4 une comparaison de cette méthode avec la méthode CDG décrite dans la publication de *Atallah et Hazzab* (2013) du point de vue qualitatif et quantitatif.

Chapitre 4

Comparaison entre RKDG et CDG sur des problèmes hydrauliques unidimensionnels

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux deux méthodes de discrétisation par éléments finis, à savoir, la méthode CDG et RKDG appliquées aux écoulements à surface libre dans des canaux rectangulaires. Nous commençons par présenter le système d'équations de *Saint-Venant* unidimensionnelles pour les canaux rectangulaires et écrit sous forme conservative. Nous décrivons, ensuite, les méthodes RKDG et CDG utilisées dans ce travail. Nous détaillons par la suite les discrétisations spatiale et temporelle ainsi que les conditions de stabilité et les conditions aux limites pour un maillage composé d'éléments 1D linéaires. Nous validons et comparons les schémas numériques décrits et ceci sur différents problèmes hydrauliques transitoires et stationnaires : le premier test est un problème transitoire concernant l'écoulement de l'eau dans un canal lors de la rupture d'un barrage. Le deuxième est un problème de ressaut hydraulique dans un canal à fond horizontal où les résultats numériques seront comparés avec des mesures expérimentales. Le troisième cas est un problème de ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire où les résultats numériques seront comparés avec la solution analytique. Le quatrième essai est un problème stationnaire concernant l'écoulement sur une bosse parabolique. Enfin le cinquième test est un problème stationnaire concernant un écoulement dans un canal de topographie irrégulière. Le choix de ces problèmes pour la comparaison des deux schémas numériques se justifie pour les raisons suivantes :

- Ces problèmes admettent des solutions analytiques ou disposent des résultats expérimentaux, ce qui permet de comparer la solution simulée avec la solution exacte ou mesurée.
- Le premier problème est de type transitoire, où les variables de l'écoulement varient évidemment dans le temps, tandis que les autres problèmes sont de type stationnaire.
- Les solutions de ces problèmes contiennent des chocs et des discontinuités.

4.1 Équations de Saint–Venant pour les canaux rectangulaires

Le système d'équations de *Saint–Venant* unidimensionnelles pour les canaux rectangulaires établi dans la section 2.2.2 et écrit sous forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.43)$$

où :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ gh^2/2 + q^2/h \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matrice jacobienne du système précédent est donnée par l'équation :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - q^2/h^2 & 2q/h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Les valeurs et vecteurs propres indépendants de la matrice jacobienne sont donnés, respectivement, par les équations suivantes :

$$\lambda_1 = q/h - \sqrt{gh} = u - c; \quad \lambda_2 = q/h + \sqrt{gh} = u + c \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_1 = [1, u - c]^T; \quad \mathbf{K}_2 = [1, u + c]^T \quad (2.47)$$

Le système (2.43) peut être aussi écrit sous la forme non conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.49)$$

4.2 Méthode GD pour les équations de *Saint–Venant* unidimensionnelles

La procédure de calcul avec la méthode de GD pour les lois de conservation consiste à diviser le domaine de calcul en un ensemble d'éléments, déduire la formulation GD pour chaque élément, appliquer les conditions aux limites, le cas échéant, calculer du flux numérique, intégrer les équations résultantes, et enfin appliquer le limiteur de pente TVD. Dans cette section, nous présentons la formulation GD pour les équations unidimensionnelles de *Saint–Venant* dans un canal rectangulaire. L'évaluation du flux numérique, et l'application du limiteur de pente TVD sont également discutés.

4.2.1 Formulation GD

Le domaine de calcul unidimensionnel ($x = [0, L]$) est divisée en N_e éléments. Soit $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N_e+1} = L$, une partition du domaine. Si $I_e = [x_d^e, x_f^e]$, alors l'espace des éléments

finis discontinue par morceaux de m polynômes est donné par l'équation :

$$V^m = \{v : v|_{I_e} \in P^m(I_e), 1 \leq e \leq N_e\} \quad (4.1)$$

A l'intérieur d'un élément, les inconnues sont approchées par des fonctions d'interpolation de Lagrange comme le montre l'équation :

$$\mathbf{U} \simeq \hat{\mathbf{U}} = \sum \mathbf{N}_j(x) \mathbf{U}_j(x, t) ; \mathbf{F}(\mathbf{U}) \simeq \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) \simeq \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) \quad (4.2)$$

La formulation GD pour un élément est donnée par l'équation :

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j dx \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{F}} \Big|_{x_d^e}^{x_f^e} - \int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \hat{\mathbf{F}} dx = \int_{x_d^e}^{x_f^e} \mathbf{N}_i \hat{\mathbf{S}} dx \quad (4.3)$$

Lorsque le schéma explicite d'intégration temporelle est utilisé, les équations de *Saint–Venant* peuvent être résolus un par un. L'équation 4.3 peut être écrite pour chaque composant comme le montre l'équation suivante :

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i N_j dx \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + N_i \tilde{F} \Big|_{x_d^e}^{x_f^e} - \int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{F} dx = \int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i \hat{S} dx \quad (4.4)$$

Dans l'équation 4.4, ϕ , F et S sont, respectivement, les composantes de vecteurs \mathbf{U} , \mathbf{F} et \mathbf{S} . Par exemple, ϕ peut être h ou q et F , S peuvent être obtenue de manière similaire à partir de l'équation 2.44. La formulation GD pour les équations de continuité et de quantité de mouvement peut être écrite pour chaque équation, respectivement, comme suit :

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i N_j dx \frac{\partial h_j}{\partial t} + N_i \tilde{f}_1 \Big|_{x_d^e}^{x_f^e} - \int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{f}_1 dx = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i N_j dx \frac{\partial q_j}{\partial t} + N_i \tilde{f}_2 \Big|_{x_d^e}^{x_f^e} - \int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{f}_2 dx = \int_{x_d^e}^{x_f^e} N_i g \hat{h} (\hat{S}_0 - \hat{S}_f) dx \quad (4.6)$$

où, pour des raisons de simplification les composants de flux sont estimés à partir de :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ gh^2/2 + q^2/h \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

L'utilisation des éléments linéaires et la transformation isoparamétrique, les équations 4.5 et 4.6 s'écrivent, respectivement, comme suit :

$$\Delta x \begin{bmatrix} 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/6 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{f}_1|_{-1} \\ \tilde{f}_1|_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta x \begin{bmatrix} 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/6 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{f}_2|_{-1} \\ \tilde{f}_2|_1 \end{bmatrix} - \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \hat{f}_2 d\xi \\ = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi) g \hat{h} (\hat{S}_0 - \hat{S}_f) d\xi \end{aligned} \quad (4.9)$$

La prochaine étape est d'évaluer flux numérique $\tilde{\mathbf{F}}$ aux limites de l'élément.

4.2.2 Flux numérique

La fonction de flux HLL est donnée par l'équation :

$$\mathbf{F}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{F}_G & \text{si } S_G \geq 0 \\ \frac{S_D \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{F}_D + S_G S_D (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G)}{S_D - S_G} & \text{si } S_G < 0 < S_D \\ \mathbf{F}_D & \text{Si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour les équations unidimensionnelles de *Saint–Venant*, Les équations suivantes sont utilisées pour calculer les vitesses d'onde (S_G et S_D) aux limites de l'élément :

$$S_G = \min(u_G - c_G, u_D - c_D); \quad S_D = \max(u_G + c_G, u_D + c_D) \quad (4.11)$$

Fraccarollo et Toro (1995) ont suggéré l'estimation de vitesse d'onde sur la base de :

$$S_G = \min(u_G - c_G, u^* - c^*); \quad S_D = \max(u_D + c_D, u^* + c^*) \quad (4.12)$$

où

$$u^* = 0.5(u_G + u_D) + c_G - c_D \quad (4.13)$$

$$c^* = 0.5(c_G + c_D) + 0.25(u_G - u_D) \quad (4.14)$$

Si $S_G = -S_{\max}$ et $S_D = S_{\max}$, avec :

$$S_{\max} = \max(|u_G| + c_G, |u_D| + c_D) \quad (4.15)$$

Le flux résultant est connu sous le nom du solveur de Lax–Friedrichs

$$\mathbf{F}^{LF} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_G - \mathbf{F}_D) + S_{\max}(\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G) \quad (4.16)$$

Le solveur de Roe pour les équations unidimensionnelles de *Saint–Venant* dans un canal rectangulaire est donné par l'équation :

$$\mathbf{F}^{\text{Roe}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_G - \mathbf{F}_D) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (4.17)$$

avec :

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \left(\Delta h - \frac{\tilde{h} \Delta u}{\tilde{c}} \right); \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\Delta h + \frac{\tilde{h} \Delta u}{\tilde{c}} \right) \quad (4.18)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}; \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u} + \tilde{c} \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 = [1, \tilde{u} - \tilde{c}]^T; \tilde{\mathbf{K}}_2 = [1, \tilde{u} + \tilde{c}]^T \quad (4.20)$$

$$\Delta h = h_D - h_G; \Delta u = u_D - u_G \quad (4.21)$$

$$\tilde{h} = \sqrt{h_G h_D}; \tilde{u} = \frac{\sqrt{h_G} u_G + \sqrt{h_D} u_D}{\sqrt{h_G} - \sqrt{h_D}}; \tilde{c} = \sqrt{\frac{g(h_G - h_D)}{2}} \quad (4.22)$$

4.2.3 Limiteur de pente

Comme indiqué à la section 3.6.2, les schémas d'ordre élevé souffrent d'oscillations parasites au voisinage des discontinuités et forts gradients. L'idée d'un limiteur de pente est de reconstruire les variables avec des pentes limitées utilisant des éléments voisins. La méthode de reconstruction de données est basée sur le schéma MUSCL de [Leer \(1979\)](#) et la méthode parabolique par morceaux (PPM : Piecewise Parabolic Method) de [Colella et Woodward \(1984\)](#).

La procédure de limitation est appliquée après le calcul des inconnues dans chaque élément du domaine de calcul. Suivant le schéma MUSCL, la construction linéaire par morceaux du second ordre de $\phi(x)$ dans un élément est donnée par l'équation :

$$\phi_{el}(x) = \bar{\phi}_e + (x - \bar{x})\sigma_e; \quad x_d^e \leq x \leq x_f^e \quad (4.23)$$

où $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne de la variable $\phi(x)$ dans un élément ($\phi(x)$ peut être h , Z , A ou q), $\phi_{el}(x)$ est la valeur limitée dans l'élément, \bar{x} correspond au milieu de l'élément, et σ_e est la pente limitée dans un élément e . Il est évident que la valeur moyenne de la variable $\phi(x)$ ne changerait pas après le processus de limitation, qui est une exigence importante de lois de conservation. Les valeurs récemment calculées sont remplacées par les valeurs limitées ce qui supprime les oscillations parasites.

Pour calculer la pente limitée, la pente amont a , la pente aval b , et la pente central $(a + b)/2$ doivent être définis et sont donnés, respectivement, par les équations :

$$a = \frac{\bar{\phi}_e - \bar{\phi}_{e-1}}{\bar{x}_e - \bar{x}_{e-1}} \quad (4.24)$$

$$b = \frac{\bar{\phi}_{e+1} - \bar{\phi}_e}{\bar{x}_{e+1} - \bar{x}_e} \quad (4.25)$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\bar{\phi}_{e+1} - \bar{\phi}_{e-1}}{(\bar{x}_{e+1} - \bar{x}_{e-1})} \quad (4.26)$$

Le schéma MUSCL est TVD si la pente limitée est définie par les équation ([Toro, 2009](#)) :

$$\sigma_e = \frac{[\text{sign}(a) + \text{sign}(b)]}{2} \min(\beta_1 |a|, \beta_2 |b|) \quad (4.27)$$

avec

$$\beta_1 = \frac{2}{1 + \text{CFL}_e} \quad (4.28)$$

$$\beta_2 = \frac{2}{1 - \text{CFL}_e} \quad (4.29)$$

où CFL_e est le nombre de Courant à l'intérieur de l'élément e . Bien que l'information du nombre de Courant peut ne pas être disponible, plusieurs choix de limiteurs de pente qui satisfont le critère TVD sont rapportés dans la littérature (*Li, 2006*). Ces limiteurs comprennent la méthode de Godunov, le limiteur de pente minmod, et le limiteur de pente MC (Monotonized Central), et sont décrites, respectivement, par les équations :

$$\sigma_e = 0 \quad (4.30)$$

$$\sigma_e = \frac{[\text{sign}(a) + \text{sign}(b)]}{2} \min(|a|, |b|) \quad (4.31)$$

$$\sigma_e = \frac{[\text{sign}(a) + \text{sign}(b)]}{2} \min\left(\frac{|a+b|}{2}, 2|a|, 2|b|\right) \quad (4.32)$$

La procédure de limitation de pente est appliquée après chaque pas intermédiaire du schéma de Runge–Kutta (la procédure de limitation de pente peut également être appliquée après l'intégration en temps de Runge–Kutta).

D'autres recherches montrent que pour le problème de l'onde de choc une valeur de $\text{CFL} \leq 1.03$ est nécessaire pour obtenir des résultats stables avec le schéma d'Euler progressive (explicite) de premier ordre. Pour le schéma Runge–Kutta TVD, des valeurs de $\text{CFL} \leq 1.02$ et $\text{CFL} \leq 0.7$ sont nécessaires pour le limiteur de pente appliqué, respectivement, après chaque pas de temps intermédiaire et après l'ensemble de pas de temps. Pour le problème de l'onde de raréfaction, une valeur de $\text{CFL} \leq 1.21$ est nécessaire pour la stabilité en utilisant le schéma d'Euler progressive de premier ordre, tandis que des valeurs de $\text{CFL} \leq 1.16$ et $\text{CFL} \leq 0.48$ sont nécessaires avec le schéma Runge–Kutta TVD pour le limiteur de pente appliqué, respectivement, après chaque pas de temps intermédiaire et après l'ensemble de pas de temps. Le limiteur de pente TVD autorise que le nombre CFL soit supérieur à l'unité.

Des tests numériques montrent que lorsque le nombre de Courant est relativement grand (en satisfait l'exigence de stabilité), le limiteur de pente appliqué après chaque pas de temps intermédiaire dans la méthode de Runge–Kutta fournit de meilleurs résultats en comparant avec le limiteur de pente appliqué après l'ensemble de pas de temps. Il est, donc, recommandé d'appliquer le limiteur de pente après chaque pas de temps intermédiaire du schéma Runge–Kutta TVD pour minimiser l'effet d'un grand nombre de Courant. Le schéma d'Euler progressive de premier ordre donne des résultats similaires à ceux du schéma Runge–Kutta TVD du second ordre, qui permet d'économiser du temps précieux dans la simulation. En outre, les résultats obtenus par le schéma d'Euler progressive de premier ordre sont moins diffusif de même que le limiteur de pente est appliqué qu'une seule fois, alors que dans le schéma Runge–Kutta TVD du second ordre, le limiteur de pente peut être appliqué après chaque pas de temps intermédiaire.

La procédure d'application du limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau, h , est la

suivante. Tout d’abord, h et q sont déterminés aux nœuds avals de chaque élément du domaine en utilisant les équations (4.5) et (4.6). Ensuite, la variable limitée ϕ (h et q) est calculée pour chaque élément en utilisant l’équation (4.23). Enfin, le niveau d’eau est calculé à partir de l’expression $Z = h + z_b$. En cas d’application d’un limiteur de pente fondé sur le niveau d’eau, la première étape est la même que pour le limiteur de pente fondé sur la profondeur d’eau. Dans l’étape suivante, le niveau d’eau pour chaque nœud, calculé à partir de l’expression, $Z = h + z_b$, est limité par l’équation (4.23). Enfin, la profondeur d’eau est déterminée à partir de l’expression $h = Z - z_b$. Le limiteur de pente d’une variable ϕ sera noté LP- ϕ .

4.3 Méthode CDG pour les équations de Saint–Venant unidimensionnelles

La méthode CDG est une méthode par éléments finis continus de type SU/PG dans laquelle des fonctions de pondération décentrées sont utilisées pour introduire une diffusion numérique qui assure l’atténuation des oscillations. Le vecteur de flux, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ et le vecteur des termes sources $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ peuvent être écrits en fonction du vecteur des variables conservatives, \mathbf{U} comme suit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}_F \mathbf{U} ; \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}_S \mathbf{U} \quad (4.33)$$

où

$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2/2 & u \end{bmatrix} ; \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gbS_0 & f \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

\mathbf{A}_F et \mathbf{A}_S sont deux matrices intermédiaires et $f = gbn_m^2 |u| / R_h^{4/3}$ et $R_h = bh / (b + 2h)$ pour un canal rectangulaire.

La discrétisation spatiale du système d’équations (2.43) est réalisée par l’utilisation d’une interpolation linéaire montrée par l’équation (3.6) pour approximer la solution sur chaque élément (linéaire). La forme intégrale de type Petrov–Galerkin du système (2.43) est :

$$\int_0^L \left[\mathbf{N}_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{S} \right) + \mathbf{W}_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{S} \right) \right] dx = 0 \quad (4.35)$$

où L est la longueur du domaine et \mathbf{W} est la matrice (2×2) des fonctions tests de type Petrov–Galerkin.

L’intégration par partie du terme $\mathbf{N}_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ donne :

$$\int_0^L \left[(\mathbf{N}_i + \mathbf{W}_i) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - (\mathbf{N}_i + \mathbf{W}_i) \mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{F} + \mathbf{W}_i \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right] dx + (\mathbf{N}_i \mathbf{F})_0^L = 0 \quad (4.36)$$

La substitution des équations (4.33) et les fonctions d'interpolation donne :

$$\int_0^L (\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + \mathbf{W}_i \mathbf{N}_j) \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} dx + \int_0^L \left(-(\mathbf{N}_i + \mathbf{W}_i) \mathbf{A}_S \mathbf{N}_j - \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A}_F \mathbf{N}_j + \mathbf{W}_i \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial x} \right) \mathbf{U}_j dx + (\mathbf{N}_i \mathbf{A}_F \mathbf{U})_0^L = 0 \quad (4.37)$$

Ceci peut être aussi écrite sous une notation matricielle comme :

$$\mathbf{M}_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_j + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_j + \mathbf{F}_{ij} = 0 \quad (4.38)$$

où

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_0^L (\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + \mathbf{W}_i \mathbf{N}_j) dx \quad (4.39)$$

est la matrice masse,

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_0^L \left(-(\mathbf{N}_i + \mathbf{W}_i) \mathbf{A}_S \mathbf{N}_j - \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A}_F \mathbf{N}_j + \mathbf{W}_i \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{N}_j}{\partial x} \right) dx \quad (4.40)$$

est la matrice de rigidité, et

$$\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{N}_i \mathbf{A}_F \mathbf{U})_0^L = \begin{bmatrix} N_i q|_0^L \\ N_i (gh^2/2 + qu)_0^L \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

est le vecteur du flux à travers les frontières. Les termes de \mathbf{F}_{ij} représentent les conditions aux limites naturelles.

L'équation (4.38) sera, ensuite discrétisée par rapport au temps, par l'utilisation d'une approximation de différences finies implicite dont la forme est donnée comme suit :

$$[\mathbf{M} + \theta \Delta t \mathbf{K} (\mathbf{U}^{n+1})] (\mathbf{U}^{n+1}) + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} = [\mathbf{M} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{K} (\mathbf{U}^n)] (\mathbf{U}^n) - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{F}^n \quad (4.42)$$

θ représente un paramètre de pondération temporelle compris entre 0 et 1, qui permet de spécifier le degré d'implicitation du schéma. Ce paramètre influe sur la précision et la stabilité du schéma utilisé. On notera également que les termes de décentrage sont construits à partir des dérivées de la forme non conservatoire du système d'origine. Lorsqu'une formulation semi-implicite est utilisé ($\theta=0.5$), la dissipation artificielle est introduite par la seconde dérivée par rapport à x et est équilibrée au troisième ordre par les autres termes décentrés (*Hicks et Steffler, 1990; Atallah et Hazzab, 2013*).

Pour résoudre le système non linéaire (4.42), nous utilisons l'itération de type Newton–Raphson. Aussi, pour le test de convergence, nous procédons à la comparaison entre la norme du vecteur des corrections et une tolérance indiquée :

$$\frac{\Sigma [(\delta \mathbf{U})^2]}{\Sigma (\mathbf{U}^2)} \leq \text{Tolerance} \quad (4.43)$$

alors la solution progresserait au prochain pas de temps.

Les schémas de type Petrov–Galerkin utilise la forma suivant des fonctions tests :

$$\mathbf{W}_i \equiv \omega \mathbf{D} \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dx} \mathbf{N}_i \quad (4.44)$$

ω représente un paramètre de diffusion (ou un coefficient de décentrage) qui dépend de la situation d'écoulement, \mathbf{D} est la matrice de décentrage qui contrôle à la fois la quantité et la direction de la diffusion numérique. Les composantes de cette matrice seront notées comme suite :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{aa} & d_{aq} \\ d_{qa} & d_{qq} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

La première lettre, des indices des composantes, dénote l'équation dans laquelle la contribution de décentrage s'applique (a pour l'équation de continuité et q pour l'équation de quantité de mouvement). Tandis que la seconde, décrit l'équation sur laquelle elle s'opère (e.g. d_{aq} représente le coefficient appliqué à l'équation de quantité de mouvement pour contribuer au décentrage de l'équation de continuité).

La décomposition de la matrice jacobienne \mathbf{J} et l'utilisation de la matrice des valeurs propre permet de déterminer les éléments de la matrice \mathbf{D} qui sont :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \text{Fr}^2) \left(\frac{1}{|\text{Fr} + 1|} - \frac{1}{|\text{Fr} - 1|} \right) & \frac{1}{2c} \left(\frac{\text{Fr} + 1}{|\text{Fr} + 1|} - \frac{\text{Fr} - 1}{|\text{Fr} - 1|} \right) \\ \frac{c}{2}(1 - \text{Fr}^2) \left(\frac{\text{Fr} + 1}{|\text{Fr} + 1|} - \frac{\text{Fr} - 1}{|\text{Fr} - 1|} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{(\text{Fr} + 1)^2}{|\text{Fr} + 1|} - \frac{(\text{Fr} - 1)^2}{|\text{Fr} - 1|} \right) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

où

$$\text{Fr} = \frac{u}{c} \quad (4.47)$$

est le nombre de Froude.

Les variations de \mathbf{D} en fonction du nombre de Froude pour le schéma CDG, sont présentées sur la figure 4.1.

L'évaluation de la valeur du paramètre de décentrage, ω , pour les schémas de type Petrov–Galerkin, a fait l'objet de plusieurs expériences numériques. *Brooks et Hughes (1982)* montrent que, pour un problème transitoire, la détermination d'une valeur optimale de ω est basée sur la précision de la solution et la minimisation de l'erreur de phase.

Katopodes (1984) a examiné plusieurs valeurs de ω ($\omega = 0.5$ et $\omega = \Delta t |U + c| / \Delta x$). Il a conclut que la quantification d'une valeur optimale de ω nécessite la réalisation des expériences numériques. Pour le cas des équations linéaires, *Froehlick (1985)* a examiné l'effet de la variation du coefficient de décentrage sur la phase et la précision de la solution. Il a observé une grande sensibilité au nombre CFL à des courtes longueurs d'onde. Le nombre CFL étant défini comme suit :

$$\text{CFL} = \frac{(U + c) \Delta t}{\Delta x} \quad (4.48)$$

Pour examiner la sensibilité du schéma CDG au terme de dissipation, ω , *Hicks et Steffler*

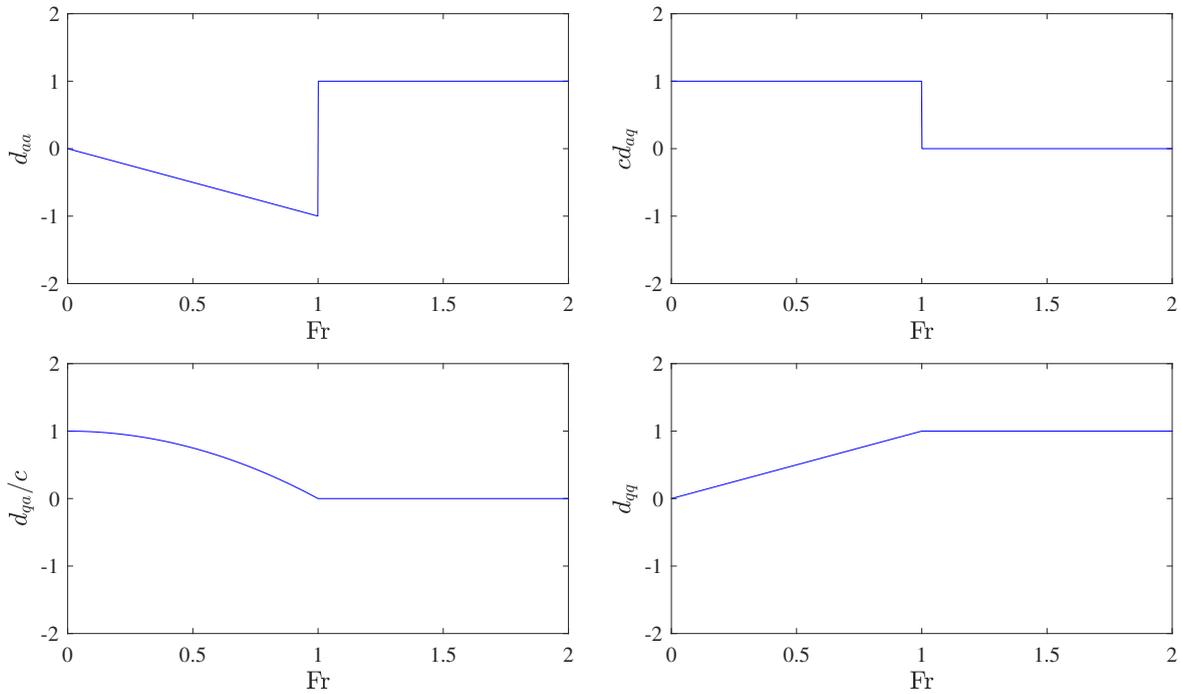


FIGURE 4.1 – Variation des éléments de la matrice de décentrage \mathbf{D} du schéma CDG en fonction du nombre de Froude.

(1990) ont réalisé des expériences numériques correspondant aux trois valeurs de ω : 0.25 ; 0.50 et 1. Ils ont conclu qu’une bonne précision associée à une atténuation élevée des oscillations, pour le cas des écoulements permanent, est obtenue avec une valeur de $\omega = 0.50$. Tandis que pour le cas des écoulements non permanent, la valeur optimale de ω correspond à 0.25. Un CFL=0.5 est considéré comme étant le mieux indiqué afin d’équilibrer les erreurs en espace et en temps.

4.4 Conditions initiales et aux limites

Dans l’analyse d’écoulement dans les canaux découverts, nous commençons habituellement nos calculs à un moment précis. Les conditions d’écoulement à ce moment de départ sont appelés les conditions initiales. Étant donné que les limites de tous les systèmes physiques sont situées à des distances finies, nous devons spécifier dans nos calculs certaines conditions particulières aux limites ou aux bords de ce système physique (Chaudhry, 2008). Ces conditions sont appelées les conditions aux limites. L’importance de la spécificité des conditions aux limites est capitale pour garantir que le problème est bien posé (Graf et Altinakar, 2009).

La figure 4.2 montre le domaine de calcul d’un système unidimensionnel. Les calculs commencent à l’instant $t = t_0$. L’extrémité amont du système est à $x = x_0$, et l’extrémité aval est à $x = x_L$. Les courbes caractéristiques d’écoulements fluvial et torrentiel aux limites du domaine d’écoulement 1D sont présentées sur la même figure. Pour tout point à l’intérieur du domaine, la solution de la profondeur d’eau h et le débit q nécessite des informations concernant les directions caractéristiques, C^+ et C^- . Les directions caractéristiques sont mathématiquement

représentés par les valeurs propres ($\lambda_{1,2} = u \pm c$) (Cunge *et al.*, 1980). Donc les variables de l'écoulement en chaque nœud du canal sont influencées par les variables des points voisins. Pour la solution des équations 1D d'écoulement d'eau peu profonde, deux conditions initiales sont nécessaires, à savoir la profondeur d'eau h et le débit q , ou la profondeur d'eau h et la vitesse d'écoulement u à tous les points dans le canal au temps $t = 0$.

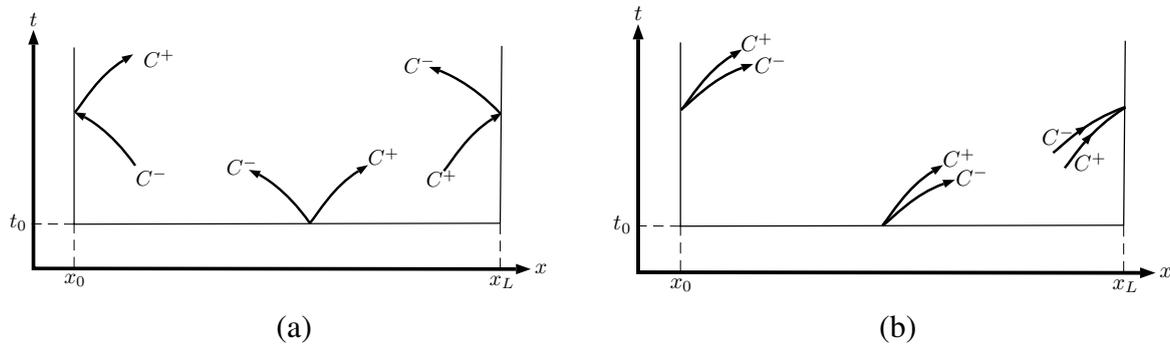


FIGURE 4.2 – Courbes caractéristiques aux frontières d'un écoulement 1D : (a) Écoulement fluvial ; (b) Écoulement torrentiel.

TABLE 4.1 – Conditions aux limites requises pour les équations 1D de *Saint-Venant*.

Régime d'écoulement	Conditions en amont	Conditions en aval	Conditions initiales
Fluvial	1	1	2
Torrentiel	2	0	2
Critique	1	0	2

Dans les limites du domaine d'écoulement, les informations sur les caractéristiques peuvent être manquantes, ainsi des conditions aux limites sont indispensables pour la solution des équations régissant. Les conditions aux limites dépendent de la profondeur d'eau, de la vitesse moyenne ou du débit à l'amont et à l'aval du canal à tous les temps, $t > 0$. Selon la nature de l'écoulement, des conditions doivent être imposées à l'amont ou/et à l'aval. Les conditions en amont et en aval nécessaires aux limites pour les écoulements fluvial, critiques et torrentiel sont répertoriées dans le tableau 4.1. Dans un écoulement fluvial, les deux caractéristiques sont de signes contraires puisque $c > |u|$, donc en chaque point du canal, il y a une onde qui voyage vers l'aval et une autre vers l'amont (Figure 4.2(a)). Dans un écoulement torrentiel, les deux caractéristiques sont de même signe puisque $c < |u|$, donc en chaque point du canal, les deux ondes se propagent vers l'aval (Figure 4.2(b)). Pour un écoulement fluvial, deux conditions sont nécessaires, l'une à l'amont et l'autre à l'aval. Pour un écoulement torrentiel, deux conditions sont nécessaires en amont. Pour un écoulement critique, une condition à la limite est nécessaire en amont, et l'autre est déterminée à partir de la relation de nombre de Froude. Par exemple, dans le cas d'un écoulement fluvial dans tout le canal, on peut imposer le débit à l'amont et une

hauteur d'eau à l'aval ou une relation de type hauteur débit. Dans le cas de l'application d'une hauteur imposée, celle-ci peut être de plusieurs types. Elle peut être constante et représentera une hauteur d'eau invariable comme dans le cas d'un bassin ou d'un plan d'eau. Elle peut également représenter une hauteur de seuil ou la hauteur d'ouverture d'une vanne. Dans le cas de l'application d'un débit imposé, celui-ci peut être de plusieurs types. Il peut être constant et représentera un débit d'eau invariable, et peut être variable en donnant une relation du débit en fonction du temps. Dans le cas de l'application d'une relation débit hauteur, cette relation peut être la relation d'un seuil placé à l'aval d'un canal (*Abdallah, 2005*).

4.5 Tests numériques

La mise en œuvre de techniques numériques pour calculer une solution du modèle mathématique, à l'aide d'ordinateurs, introduit généralement une approximation dans la simulation, et les erreurs résultantes doivent être interprétées et éventuellement quantifiées. Ainsi, la méthode numérique doit être validée. Cette validation nécessite l'accord des résultats obtenus en utilisant une telle technique avec des données expérimentales indépendantes, des solutions analytiques, ou avec des résultats obtenus par d'autres méthodes numériques précédemment validées (*Jau-regui et Silva, 2011*).

Trouver des solutions analytiques est très utile pour comprendre le modèle et la structure des équations. Il est également utile de construire des problèmes d'essai pour les schémas numériques. En utilisant une certaine mesure de la différence entre la solution numérique et la solution exacte, la performance d'un schéma numérique particulier peut être évaluée (*Atallah et Hazzab, 2013*). Par conséquent, le principal objectif de cette section est d'illustrer les performances numériques du schéma RKDG décrit ci-dessus et de vérifier numériquement leurs capacités à résoudre les problèmes d'écoulement à surface libre dans des canaux rectangulaires. La supériorité de la méthode RKDG par rapport au schéma CDG est aussi établie. Les tests numériques comprennent la rupture idéalisée d'un barrage, ressaut hydraulique, écoulement au-dessus d'une bosse, et l'écoulement sur un fond irrégulier. Les solutions numériques sont comparées avec les solutions analytiques pour les cas idéalisés et avec les données de laboratoire (si disponible).

La vérification des schémas numériques se fait en comparant la solution simulée numériquement et la solution analytique. Dans ce but, nous calculons les erreurs en norme L_1 et L_2 entre la solution analytique et la solution numérique. Ces normes sont calculés par les equations suivantes :

$$L_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\phi_i^e - \phi_i^c| \quad (4.49)$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\phi_i^e - \phi_i^c)^2} \quad (4.50)$$

où $\phi^e = (\phi_1^e; \phi_1^e; \dots; \phi_n^e)$ représente la solution analytique dans le canal aux différents nœuds (1 ; 2 ; ... ; n), et $\phi^c = (\phi_1^c; \phi_1^c; \dots; \phi_n^c)$ la solution calculée.

Parfois on calcul l'erreur relative définie par (*Atallah et Hazzab, 2013*) :

$$E(i) = \frac{|\phi^e(i) - \phi^c(i)|}{|\phi^e(i)|} \times 100 \quad (4.51)$$

4.5.1 Rupture de barrage sur fond mouillé

La rupture de barrage idéale sur fond plat est un cas de test analytique classique proposé notamment dans le workshop (*Goutal et Marel, 1997*), ainsi que dans *Wu et al. (1999)*; *Lai et al. (2005)*; *Benkhaldoun et Seaid (2010)*; *Shi (2006)*; *Duran et Marche (2014)*; *Jha (2006)*; *Zoppou et Roberts (2000)*; *Lin et al. (2003)* et *Lai (2012)*. Ce test nous permet d'évaluer la capacité des méthodes à calculer le déplacement d'un choc. Ce cas test est personnalisable : nous pouvons choisir la longueur du domaine (L), la position du barrage avant rupture (x_0), ainsi que les hauteurs d'eau de part et d'autre du barrage.

Nous considérons un canal prismatique rectangulaire horizontal de 100 m de large et 600 m de long. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. Le barrage se trouve au milieu du canal (Fig. 4.3). Les conditions initiales de l'écoulement sont formées d'un débit partout nul dans le canal, et d'une hauteur d'eau discontinue au niveau du barrage. La hauteur à l'amont du barrage est fixée à $h_{\text{amont}} = 10$ m, et la hauteur à l'aval a été choisie égale à $h_{\text{aval}} = 2$ m.

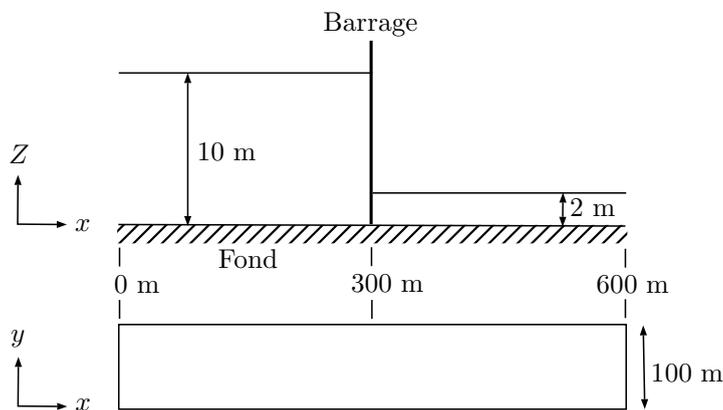


FIGURE 4.3 – Rupture de barrage sur fond mouillé : conditions initiales.

et à l'instant $t=0$ s, le barrage est totalement enlevée et l'eau se relâche sous forme de deux vagues, l'une se dirige vers l'amont et l'autre vers l'aval L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique de *Stoker (1957)*,
- de la vitesse et de la hauteur dans un canal en régime transitoire,
- des ondes de chocs et de raréfaction,
- de l'affranchissement des termes sources.

Le domaine du problème est discrétisé en 120 éléments uniformes de 5 m de longueur. Le schéma CDG est exécuté avec un coefficient de pondération $\theta = 1$ et une valeur du coefficient de décentrage $\omega = 0.25$. Le schéma RKDG est exécuté en utilisant trois fonction de flux (LF, HLL et Roe) et deux limiteurs de pente (LP- h et LP-Z). Pour les deux schéma RKDG et CDG nous avons effectué tous les calculs en respectant un nombre CFL=0.5.

Les figures 4.4–4.6 illustrent, respectivement, les résultats de la simulation après 10, 15 et 20 s de la rupture. Pour le schéma RKDG, nous avons représenté seulement les résultats du limiteur de pente LP-Z. Les différences entre les résultats de deux limiteurs de pente (LP- h et LP-Z) ne sont pas significatives. Les solutions numériques de profondeur d'eau et de débit sont en bon accord avec les solutions exactes. Les trois fonctions de flux numériques présentent les mêmes résultats et sont capables de capturer le choc à l'intérieur du domaine. Les résultats montrent aussi que le schéma RKDG est le plus précis et le moins diffusif par rapport au schéma CDG, à la fois pour la surface libre et pour le débit unitaire. Cependant, des déviations ont été observés pour le schéma CDG. Dans les résultats du schéma CDG, le choc lui-même a été réparti sur plusieurs éléments. De petites oscillations ont été observées avant l'onde régressive. Le tableau 4.2 donne, pour les deux schémas, les erreurs en norme L_2 entre les solutions exactes et les solutions simulées. Les erreurs dans le schéma CDG sont plus grande que celle obtenue par le schéma RKDG.

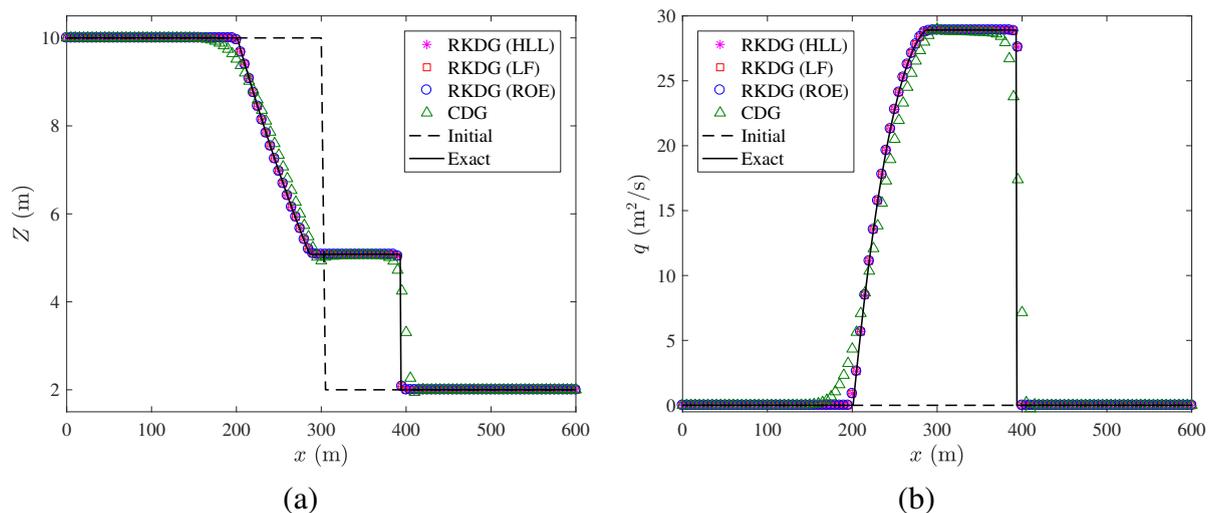


FIGURE 4.4 – Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 10$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).

4.5.2 Ressaut hydraulique dans un canal à fond horizontal

Dans un canal à surface libre, l'écoulement peut changer du régime fluvial au régime torrentiel, et vice versa en raison de changements dans les caractéristiques du canal ou des conditions aux limites, ou en présence de structures hydrauliques. Les changements du régime fluvial au régime torrentiel se produisent habituellement par l'intermédiaire de la profondeur critique. Cependant, le changement de régime torrentiel au régime fluvial se produit brusquement à travers un ressaut hydraulique (Atallah et Hazzab, 2013).

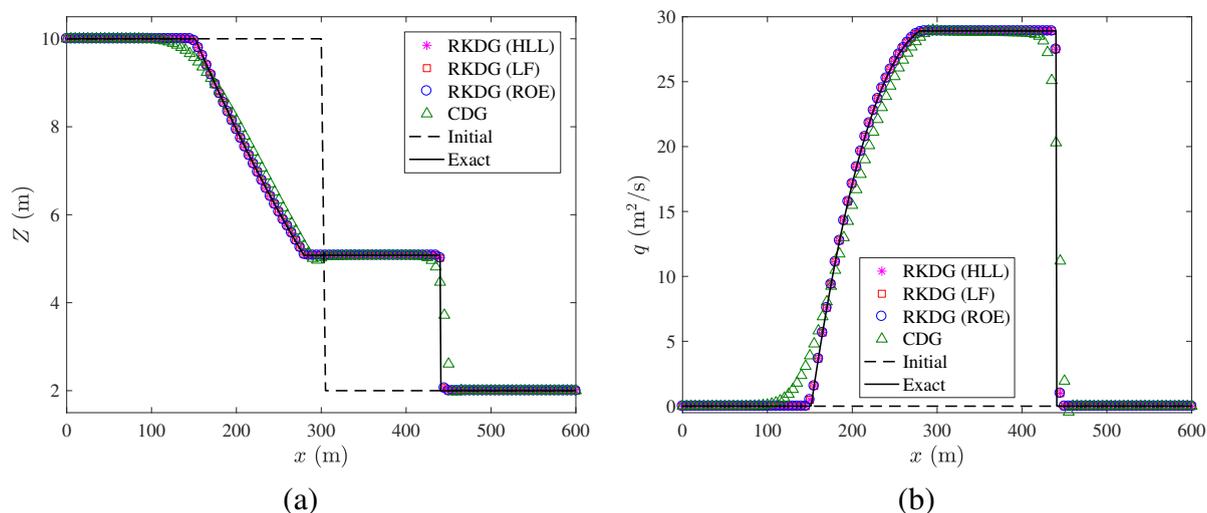


FIGURE 4.5 – Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 15$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).

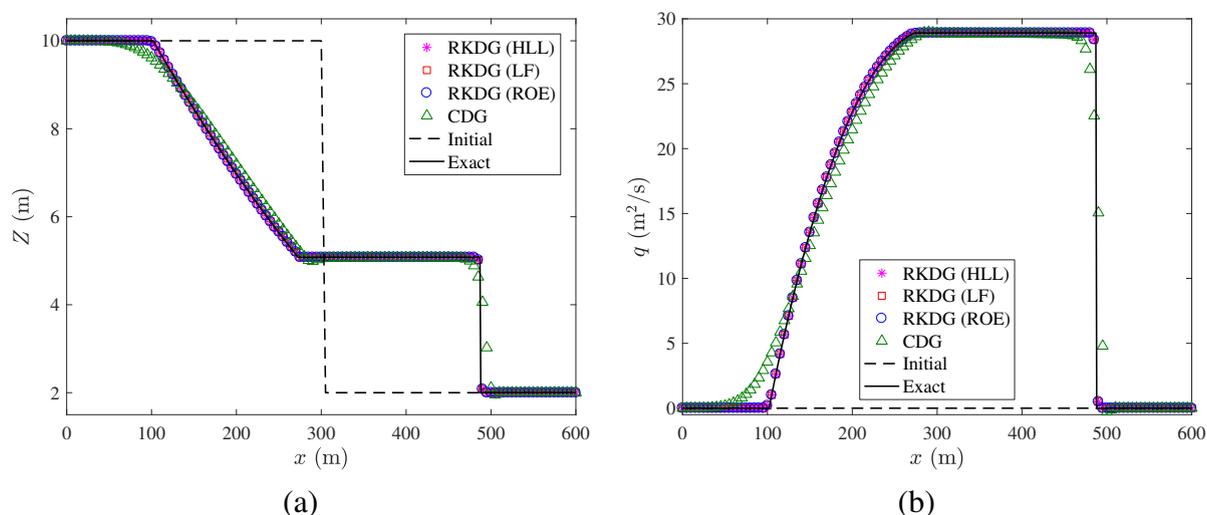


FIGURE 4.6 – Rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire au temps $t = 20$ s (a) Niveau d'eau (Z) et (b) débit unitaire (q).

Les deux schémas numériques sont appliqués ici pour reproduire quatre différents essais expérimentaux sur le ressaut hydraulique. Ces essais sont menés par [Gharangik et Chaudhry \(1991\)](#) sur un canal de section rectangulaire et de lit horizontal de 14 m de long, 0.915 m de haut et 0.46 m de large. La valeur du coefficient Manning est égale à $0.014 \text{ s/m}^{1/3}$, la même valeur utilisée dans la simulation numérique effectuée par [Ying et al. \(2004\)](#) et [Catella et al. \(2008\)](#). L'intérêt de ce test est de disposer :

- des mesures expérimentales,
- d'un ressaut hydraulique,
- de conditions de bord torrentielle en amont et fluviale en aval.

Le canal est discrétisé en 100 éléments ($\Delta x = 0.14$ m). Le schéma CDG est exécuter avec un coefficient de pondération $\theta = 1$ et une valeur du coefficient de décentrage $\omega = 0.25$. Pour

TABLE 4.2 – Les erreurs en norme L_2 du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire.

Schémas numériques	$t = 10$ s		$t = 15$ s		$t = 20$ s	
	$L_2(h)$ (m)	$L_2(q)$ (m ² /s)	$L_2(h)$ (m)	$L_2(q)$ (m ² /s)	$L_2(h)$ (m)	$L_2(q)$ (m ² /s)
RKDG (LF)	5.2083	14.0162	4.9918	17.3028	4.6876	20.1105
RKDG (HLL)	5.2083	14.0162	4.9918	17.3028	4.6876	20.1105
RKDG (ROE)	5.2083	14.0162	4.9918	17.3028	4.6876	20.1105
CDG	5.2614	14.5749	5.0293	17.7143	4.7412	20.4296

les deux schéma RKDG et CDG nous avons effectué tous les calculs en respectant un nombre CFL=0.1. La profondeur d'écoulement et le débit en amont et la profondeur d'écoulement en aval sont imposées comme conditions aux limites. Le tirant d'eau et le débit initiaux dans l'ensemble nœud du canal sont les mêmes que celles imposés à la limite amont, et ce pour les quatre essais. Ces essais sont réalisés comme suit :

- Dans le premier test, le nombre de Froude de l'écoulement entrant est fixé à 7. Nous imposons un débit de 0.054 m³/s et un profondeur d'eau de 0.031 m à l'amont du canal, et une hauteur de 0.265 m à l'aval.
- Dans le deuxième test, le nombre de Froude de l'écoulement entrant est fixé à 6.65. Nous imposons un débit de 0.036 m³/s et un profondeur d'eau de 0.024 m à l'amont du canal, et une hauteur de 0.195 m à l'aval.
- Dans le troisième test, le nombre de Froude de l'écoulement entrant est fixé à 5.74. Nous imposons un débit de 0.066 m³/s et un profondeur d'eau de 0.04 m à l'amont du canal, et une hauteur de 0.286 m à l'aval.
- Dans le quatrième test, le nombre de Froude de l'écoulement entrant est fixé à 2.3. Nous imposons un débit de 0.054 m³/s et un profondeur d'eau de 0.064 m à l'amont du canal, et une hauteur de 0.168 m à l'aval.

La figure 4.7 montre la comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques des deux méthodes (RKDG et CDG) pour le niveau d'eau à l'état d'équilibre. Le schéma RKDG exécuté avec LP-Z est capable de capturer le choc. Le niveau d'eau simulé par le solveur LF présente des oscillations numériques au voisinage du ressaut hydraulique, par contre la simulation avec les solveurs HLL et Roe donnent des résultats sans oscillations. Pour le schéma CDG, nous constatons des oscillations sur les courbes des tirants d'eau calculés au voisinage du ressaut (dans la partie torrentielle) et à la limite aval du domaine, et ce pour les quatre essais effectués.

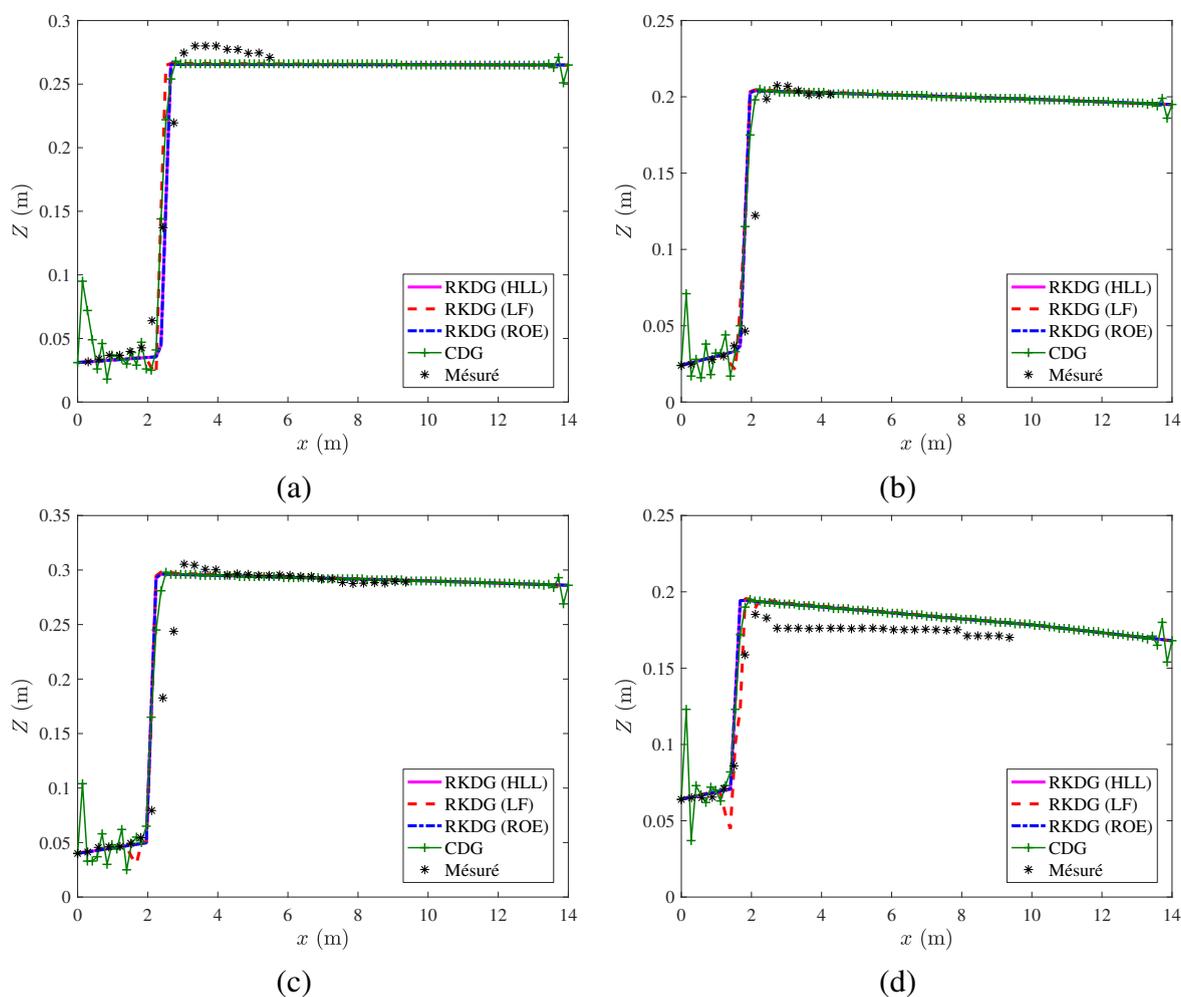


FIGURE 4.7 – Ressaut hydraulique dans un canal à fond horizontal, comparaison entre les données expérimentales de *Gharangik et Chaudhry (1991)* et les résultats numériques des méthodes RKDG et CDG

4.5.3 Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire

Plusieurs études scientifiques ont été récemment publiées concernant l'application des schémas numériques pour la simulation uni ou bidimensionnelle de ressaut stagnant (par exemple : *Gharangik et Chaudhry (1991)*; *Zhou et Stansby (1999)*). Certains auteurs utilisent les solutions analytiques de quelques cas test comportant un ressaut hydraulique proposées par *MacDonald et al. (1995)* et *MacDonald (1996)*.

Dans cet exemple de *MacDonald et al. (1997)*, l'écoulement est stationnaire dans un canal prismatique à section rectangulaire non horizontal en présence des frottements. Le régime de l'écoulement dans le canal est transcritique puisqu'il passe du torrentiel au fluvial à travers un ressaut hydraulique.

Le canal a une longueur de 1000 m et une largeur de 10 m (Fig. 4.8). Le coefficient de rugosité de Manning est de $0.02 \text{ s/m}^{1/3}$ et le débit est constant et égal à $20 \text{ m}^3/\text{s}$. La pente du

canal est une fonction de la hauteur d'eau $h(x)$ et de sa dérivée $h'(x)$. La pente est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{4}{gh(x)^3}\right) h'(x) + 0.16 \frac{(2h(x) + 10)^{4/3}}{(10h(x))^{10/3}} \quad (4.52)$$

La hauteur d'eau $h(x)$ est donnée par :

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{6} \exp\left(\frac{-x}{250}\right)\right) & 0 \leq x \leq 500 \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^3 a_k \exp\left(-20k \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{4}{5} \exp\left(\frac{x}{1000} - 1\right) \right\} & 500 \leq x \leq 1000 \end{cases} \quad (4.53)$$

Avec $a_1 = -0.348427$, $a_2 = 0.552264$ et $a_3 = -0.555580$. Pour les conditions aux limites, et puisque l'écoulement est torrentiel à l'amont du canal, nous imposons une hauteur égale à $h(0)$ et un débit égal à $20 \text{ m}^3/\text{s}$. À l'aval du canal, et puisque l'écoulement est fluvial nous imposons donc une seule variable qui est la hauteur d'eau égale à $h(1000)$.

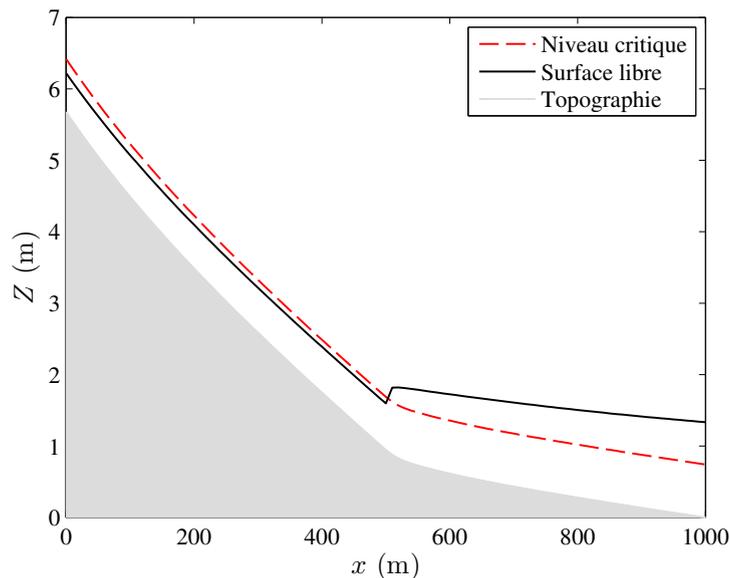


FIGURE 4.8 – Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire : Topographie du canal.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique,
- d'un canal à lit variable.

La discrétisation se fait en partageant le canal en 100 éléments de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10 m. Nous illustrons dans cette simulation la hauteur d'eau et le débit qui correspondent à la solution stationnaire du ressaut, et par conséquent, la solution du problème est la solution à laquelle la simulation numérique converge. Les conditions initiales de ce problème sont un débit égal à $20 \text{ m}^3/\text{s}$ dans le canal et une hauteur d'eau constante égale à la hauteur normale de l'écoulement.

La figure 4.9 montre la comparaison entre les résultats analytiques et numériques des deux méthodes (RKDG et CDG) pour le niveau d'eau et le débit unitaire à l'état d'équilibre. Les résultats de la méthode RKDG sont obtenus avec un limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau. Le schéma CDG est exécuter avec un coefficient de pondération $\theta = 1$ et une valeur du coefficient de décentrage $\omega = 0.25$. On peut noter que la hauteur d'eau simulée suit bien la solution analytique et ceci quel que soit le solveur du flux dans le schéma RKDG, mais pour le débit, une diffusion se trouve au voisinage du ressaut. Le tableau 4.3 donne les erreurs en norme L_2 entre les solutions exactes et les solutions simulées. On peut noter, que le solveur HLL est très convenable pour ce type de problème hydraulique. La diffusion est plus prononcée pour le solveur LF. On relève une solution numérique excellente par comparaison à la solution analytique. Une nette amélioration, est obtenue, en utilisant le limiteur de pente fondé sur la surface d'eau et ceci pour les trois solveurs de flux (Fig. 4.10).

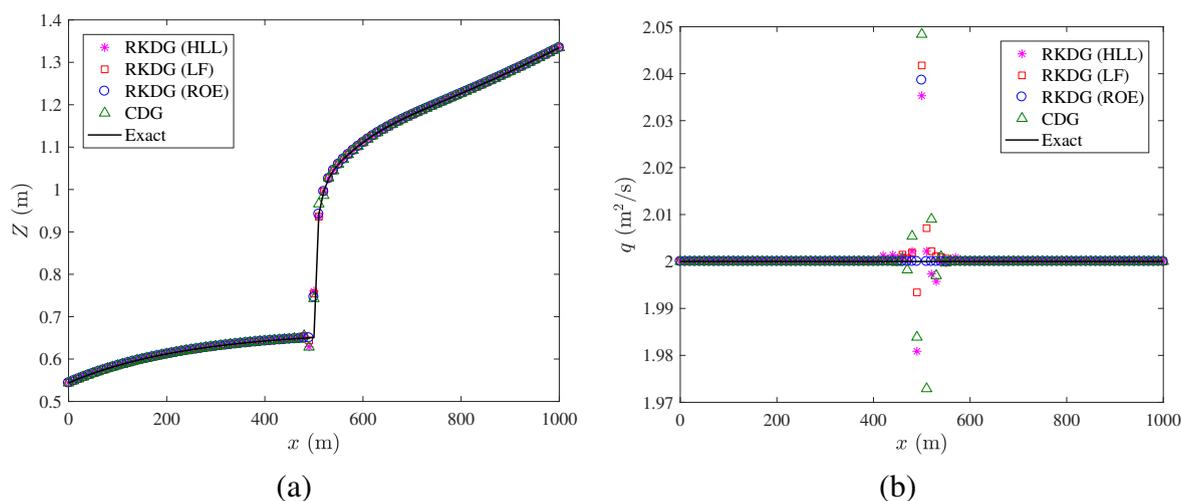


FIGURE 4.9 – Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire (a) Niveau d'eau et (b) débit unitaire avec limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau.

4.5.4 Écoulements sur une bosse parabolique

Ce test de validation consiste à étudier le comportement de la formulation obtenue sur une bathymétrie plate et en présence d'une bosse de forme parabolique.

L'écoulement 1D sur un lit irrégulier peut atteindre un état d'équilibre en contrôlant le débit à l'entrée et le niveau de la surface d'eau à la sortie. À travers cette série de tests proposés par *Goutal et Marel (1997)* et utilisée aussi dans la littérature (*Zhou et al., 2001; Rogers et al., 2003; Gallouet et al., 2003; Ying et al., 2004; Xing et Shu, 2006; Valiani et Begnudelli, 2006; Gallardo*

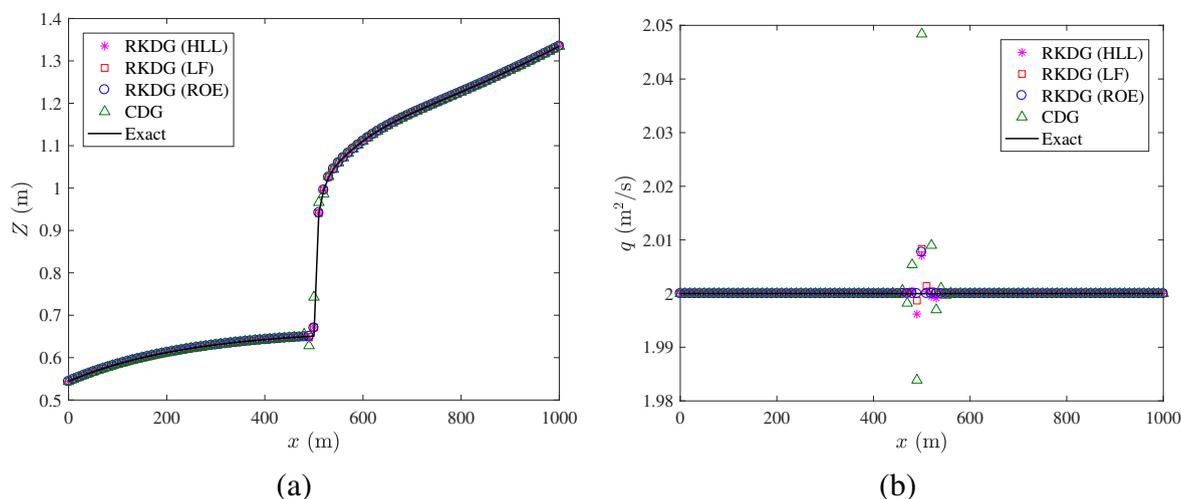


FIGURE 4.10 – Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire (a) Niveau d'eau et (b) débit unitaire avec limiteur de pente fondé sur le niveau d'eau.

TABLE 4.3 – Les erreurs en norme L_2 du problème de ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP-h	LP-Z	LP-h	LP-Z	LP-h	LP-Z	
$L_2(h)$ (m)	10.0E-04	2.1E-04	9.7E-04	2.0E-04	9.4E-04	1.9E-04	11.0E-04
$L_2(q)$ (m ² /s)	4.2E-04	8.5E-05	4.0E-04	8.1E-05	3.8E-04	7.6E-05	5.8E-04

et al., 2007; *Catella et al.*, 2008; *Liang et Borthwick*, 2009; *Akoh et al.*, 2010; *Benkhaldoun et Seaid*, 2010; *Lai*, 2010; *Rosatti et al.*, 2011; *Atallah et Hazzab*, 2013) nous voulons évaluer la capacité des méthodes numériques à converger vers un état d'équilibre puis à le maintenir pour une topographie non-plane et différents types d'écoulements.

La longueur du canal est de 25 m, et sa largeur est de 1 m. Dans cet exemple, il n'y a pas d'effets de frottements. L'expression algébrique du lit est donnée par :

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10.0)^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 12, \\ 0.0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.54)$$

La discrétisation se fait en partageant le canal en 101 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 0.25 m. Pour tous les cas, nous allons utiliser $Z = Cte$ m et $q = 0$ m²/s comme conditions initiales.

En fonction des conditions initiales et des conditions aux bords, nous obtenons différents écoulements : un équilibre au repos, un écoulement fluvial, un écoulement transcritique ou un écoulement transcritique avec ressaut (*Xing et Shu*, 2006; *Vázquez-Cendón*, 1999). La solution

de ces cas tests est donnée par (Delestre, 2010, p. 246–251). Les meilleurs résultats du schéma CDG sont obtenus avec $\theta = 1$ et $\omega = 0.5$.

a) Équilibre au repos

Avec un niveau d'eau initial égal à 0.33 m et des débits nuls à l'entrée et à la sortie du canal, nous obtenons un écoulement stagnant appelé équilibre au repos.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement à débit nul.

La durée de simulation est de 300 s afin d'établir un état permanent de l'écoulement. La stabilité du schéma CDG exige un pas de temps de 1 s. Les résultats de simulation de la surface d'eau et de débit par unité de largeur du schéma RKDG pour les trois fonctions de flux avec le limiteur de pente LP- h sont présentés sur la figure 4.11. Ces résultats sont comparés avec ceux du schéma CDG et la solution analytique. Les résultats numériques du schéma RKDG montrent de petites oscillations dans la profondeur d'eau et l'erreur dans le débit peut atteindre 10^{-3} m²/s. Dans les résultats du schéma CDG, le niveau d'eau et le débit sont bien captés et suit bien les solutions analytiques. Les résultats de trois solveurs de flux sont très proches et ne présentent pas de différence remarquable (Tab. 4.4).

Lorsque le limiteur de pente LP-Z est utilisé (Fig. 4.12), il n'y a pas d'oscillations à la surface de l'eau, et les erreurs dans le débit diminuent pour atteindre 10^{-7} m²/s. En outre, pour chacun des limiteurs de pente, les trois différentes fonctions de flux donnent des résultats du même ordre de précision.

Comme nous l'avons dit dans la section 3.2.2, le limiteur de pente des schémas TVD influe sur la qualité de la solution dans les régions lisses. C'est pour cette raison que les résultats du schéma CDG sont plus précis que ceux du schéma RKDG quelle que soit le solveur du flux ou le limiteur de pente utilisé.

TABLE 4.4 – Les erreurs en norme L_2 pour l'équilibre au repos d'un écoulement au-dessus d'une bosse.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	
$L_2(Z)$ (m)	1.58E-04	9.85E-06	1.58E-04	9.85E-06	1.58E-04	9.85E-06	0
$L_2(q)$ (m ² /s)	3.12E-04	7.98E-08	3.08E-04	7.98E-08	3.11E-04	7.98E-08	1.35E-16

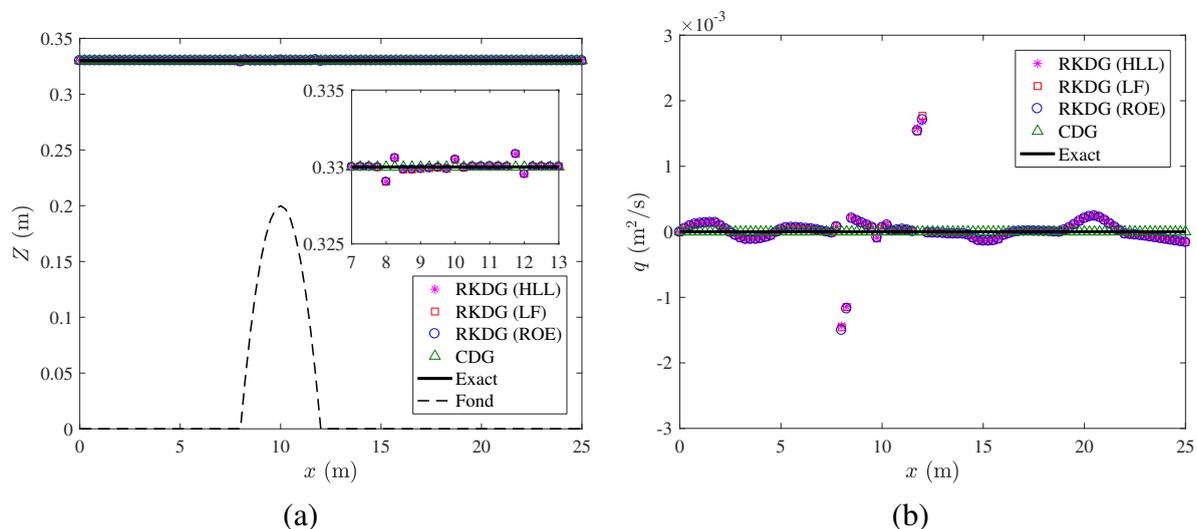


FIGURE 4.11 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s d'un écoulement au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.

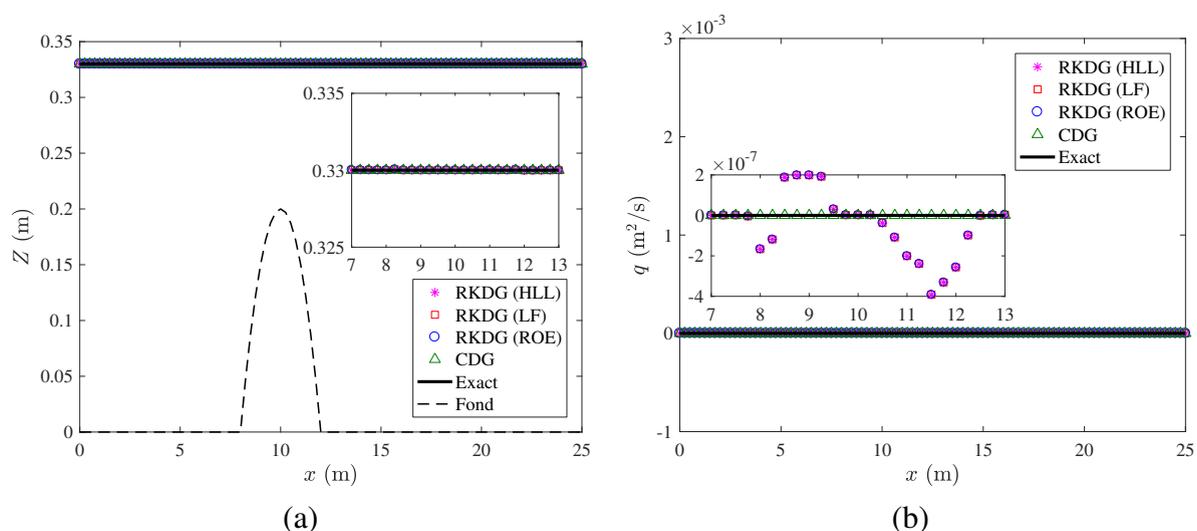


FIGURE 4.12 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s d'un écoulement au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.

b) Écoulement fluvial

Avec un niveau d'eau initial égal à 0.5 m, un débit $q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$ à l'amont du canal et un niveau d'eau $Z = 0.5 \text{ m}$ à l'aval du canal, nous obtenons un écoulement partout stationnaire de type fluvial dans le canal.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'une topographie variable,
- de la hauteur spatialisée en régime permanent,

— d'un régime fluvial.

La durée de simulation est toujours 300 s afin d'établir un état permanent de l'écoulement. La stabilité du schéma CDG exige un pas de temps de 1 s. Les résultats pour la surface d'eau et le débit sont présentés sur les figures 4.13 et 4.14. Ces figures montrent la comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques obtenus par les deux schémas CDG et RKDG. Ce dernier schéma est testé avec deux limiteurs de pente et trois solveurs de flux. Les résultats du schéma CDG sont très satisfaisants et sont meilleurs par rapport au schéma RKDG. La surface d'eau calculée par le schéma RKDG présente des oscillations au début et à la fin de la bosse avec le limiteur de pente LP- h et ce pour les trois fonctions de flux (Fig. 4.13). Ces oscillations se réduits considérablement en utilisant le limiteur de pente LP-Z et ceci avec les trois solveurs de flux (Fig. 4.13). Les résultats pour le débit présentent aussi des oscillations importantes sur la bosse en cas d'utilisation d'un limiteur de pente LP- h . Cependant, le limiteur de pente LP-Z assure la conservation de débit. Les meilleurs résultats sont obtenus avec le solveur HLL et le limiteur de pente LP-Z (Tab. 4.5).

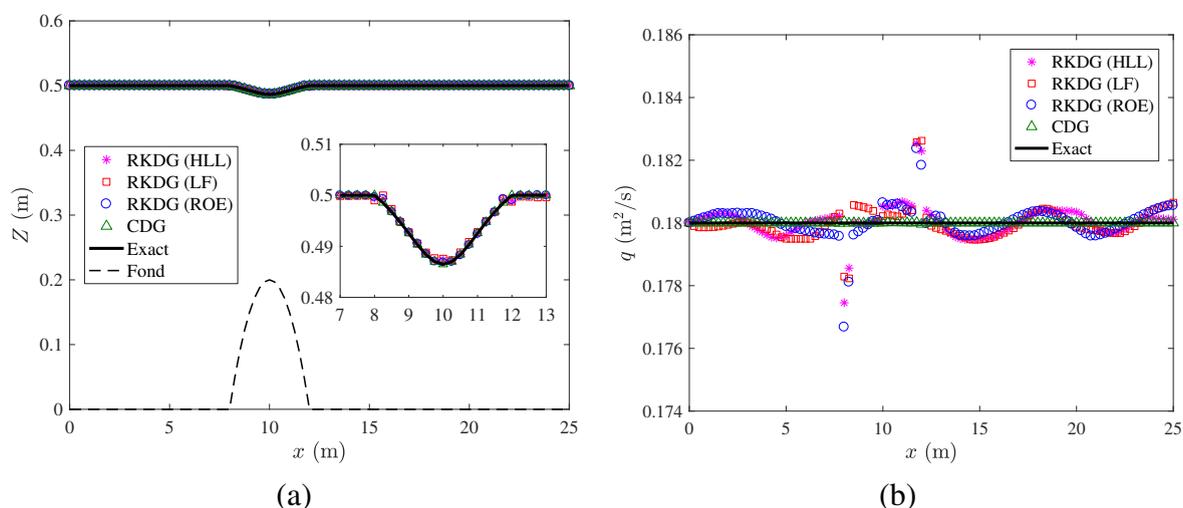


FIGURE 4.13 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement fluvial au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.

TABLE 4.5 – Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement fluvial au-dessus d'une bosse.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	
$L_2(Z)$ (m)	1.56E-05	1.04E-04	1.98E-04	1.04E-04	1.62E-04	1.04E-04	1.56E-05
$L_2(q)$ (m ² /s)	5.44E-04	3.06E-05	5.42E-04	1.77E-05	5.66E-04	1.87E-05	6.41E-06

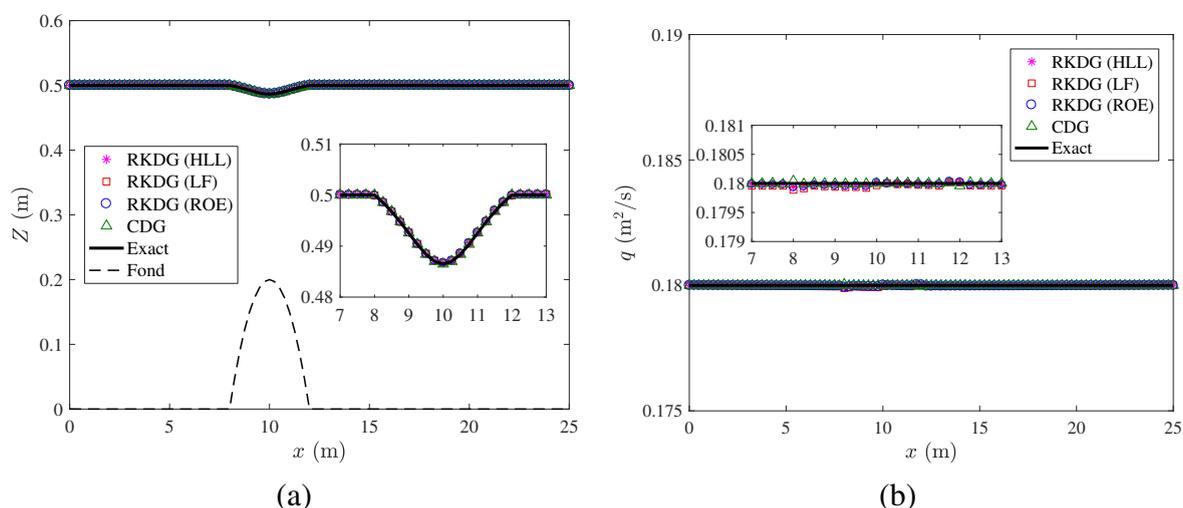


FIGURE 4.14 – Comparaison (a) des hauteurs d’eau, (b) des débits pour l’écoulement fluvial au-dessus d’une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d’eau au bout de 300 s.

c) Écoulement transcritique

Avec un niveau d’eau initial égal à 0.66 m, un débit $q = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$ à l’amont du canal et un niveau d’eau $Z = 0.66 \text{ m}$ à l’aval du canal tant que l’écoulement est fluvial, nous obtenons un écoulement transcritique. L’écoulement en amont du sommet de la bosse est fluvial. Au passage de celui-ci, il devient torrentiel.

L’intérêt de ce test est de disposer :

- d’une solution analytique,
- d’une topographie variable,
- de la hauteur spatialisée en régime permanent,
- d’un régime transcritique.

La durée de simulation est toujours 300 s afin d’établir un état permanent de l’écoulement. La stabilité du schéma CDG exige un pas de temps de 0.8 s. Les résultats pour la surface d’eau et le débit sont présentés sur les figures 4.15 et 4.16. Ces figures montrent la comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques obtenus par les deux schémas CDG et RKDG. Ce dernier schéma est testé avec deux limiteurs de pente et avec trois solveurs de flux. Encore une fois, le schéma CDG résout avec précision ce problème de test avec de petites erreurs dans le débit sur la bosse. Comme l’ont mentionné plusieurs auteurs, dont *Benkhaldoun et Seaid (2010)* et *Atallah et Hazzab (2013)*, la capture correcte du débit, dans ce test, est plus difficile que celle du niveau d’eau. La surface d’eau calculée par le schéma RKDG est prédite avec précision par les deux procédures de limitation de pente et avec les trois fonctions de flux. Ces résultats sont plus précis que ceux du schéma CDG (Tab. 4.6). Les résultats pour le débit présentent des oscillations importantes sur la bosse en cas d’utilisation d’un limiteur de pente LP- h . Cependant, le limiteur de pente LP- Z assure la conservation de débit et améliore la solution numérique.

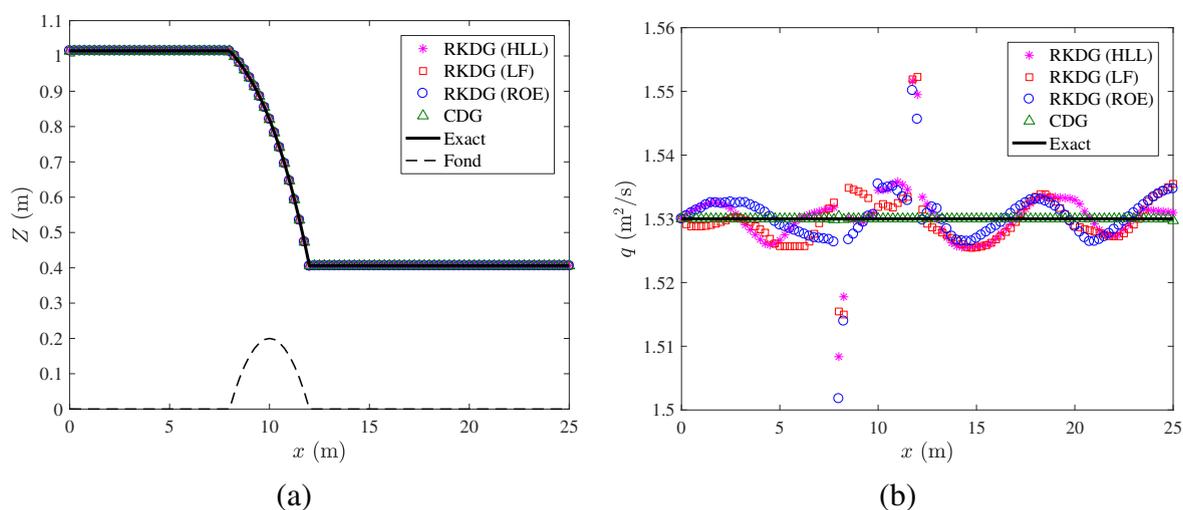


FIGURE 4.15 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement transcritique au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.

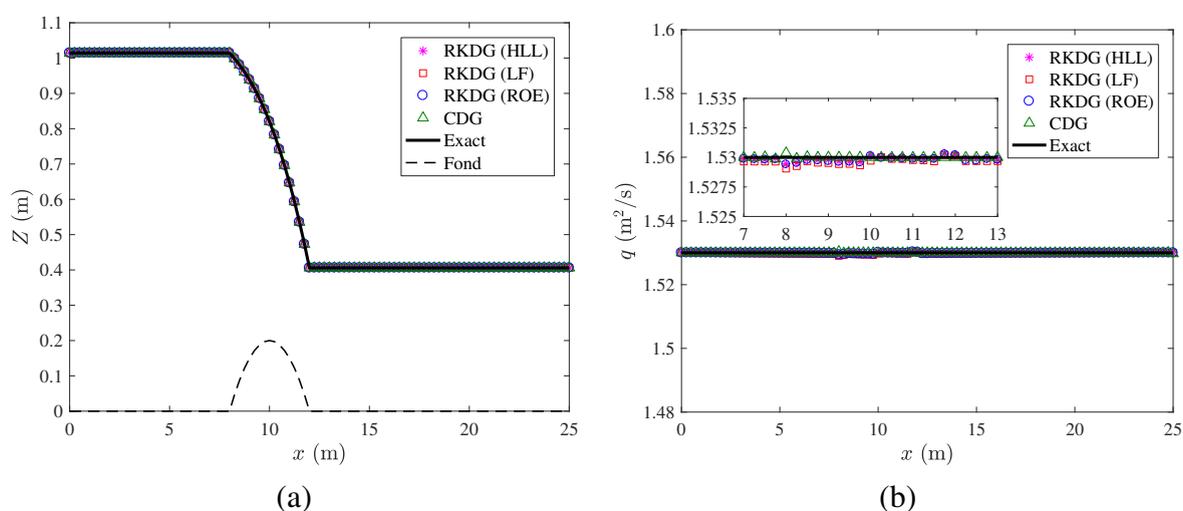


FIGURE 4.16 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement transcritique au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.

TABLE 4.6 – Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique au-dessus d'une bosse.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP- Z	LP- h	LP- Z	LP- h	LP- Z	
$L_2(Z)$ (m)	4.98E-04	1.30E-04	3.03E-04	1.30E-04	2.24E-04	1.30E-04	4.25E-04
$L_2(q)$ (m ² /s)	0.0046	2.60E-04	0.0046	1.51E-04	0.0048	1.59E-04	5.05E-05

d) Écoulement transcritique avec ressaut

Avec un niveau d'eau initial égal à 0.33 m, un débit $q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$ à l'amont du canal et un niveau d'eau $Z = 0.33 \text{ m}$ à l'aval du canal, nous obtenons un écoulement transcritique avec un ressaut. L'écoulement est fluvial en entrée, devient torrentiel au sommet de la bosse puis redevient fluvial au passage du choc.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'une topographie variable,
- de la hauteur spatialisée en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique et d'un régime transcritique.

Les figures 4.17 et 4.18 montrent la comparaison entre les solutions numériques de deux schémas, CDG et RKDG, concernant le niveau d'eau et le débit unitaire par rapport aux solutions analytiques, dérivées en utilisant le théorème de Bernoulli et l'équilibre de la quantité de mouvement à travers le choc (Valiani et Begnudelli, 2006). Les résultats analytiques indiquent que la profondeur critique se produit au sommet de la bosse selon les conditions aux limites imposées. L'emplacement du ressaut est au point de coordonnée $x = 11.58 \text{ m}$ et la profondeur à cet endroit est $h = 0.1540 \text{ m}$. Les figures montrent un bon accord entre les solutions numériques et les solutions analytiques. En particulier, les niveaux d'eau simulés, en amont et en aval de la bosse, sont très proche des valeurs analytiques. La résolution de choc est bonne et sa position est capturée avec précision. Seulement quelques valeurs numériques du débit ne s'accordent pas avec la solution analytique, mais ces points sont situés à la position du ressaut. Les comparaisons avec des résultats numériques similaires disponibles dans la littérature (Zhou et al., 2001; Rogers et al., 2003; Gallouet et al., 2003; Ying et al., 2004; Xing et Shu, 2006; Valiani et Begnudelli, 2006; Gallardo et al., 2007; Catella et al., 2008; Liang et Borthwick, 2009; Akoh et al., 2010; Benkhaldoun et Seaid, 2010; Lai, 2010; Rosatti et al., 2011; Atallah et Hazzab, 2013) sur le même cas test sont également satisfaisantes. Pour le débit, il existe une différence maximale d'environ 0.85% pour le schéma RKDG(ROE) avec un limiteur de pente LP-Z et 15% pour le schéma CDG entre la prédiction numérique et la solution analytique à un point près du milieu du domaine (Tab. 4.8). Des écarts plus élevés entre les solutions numériques et analytiques ont été observés par d'autres chercheurs. Par exemple, l'erreur relative dans le débit est d'environ 23% suivant Valiani et Begnudelli (2006), 10% suivant Zhou et al. (2001), 15% suivant Rogers et al. (2003) et 15% suivant Liang et Borthwick (2009). Comme précédemment, les résultats de la simulation du schéma RKDG par un limiteur de pente LP-Z offrent de meilleures conservations de débit que le limiteur de pente LP-h. Parmi les trois fonctions de flux, le solveur de Roe conserve, plus précisément, le débit et lorsqu'il est utilisé avec le limiteur de pente LP-Z le débit est constant dans tout le domaine.

4.5.5 Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière

Dans les équations de Saint-Venant décrivant un écoulement sur un fond très irrégulier, les termes source deviennent dominants et peuvent provoquer des instabilités numériques in-

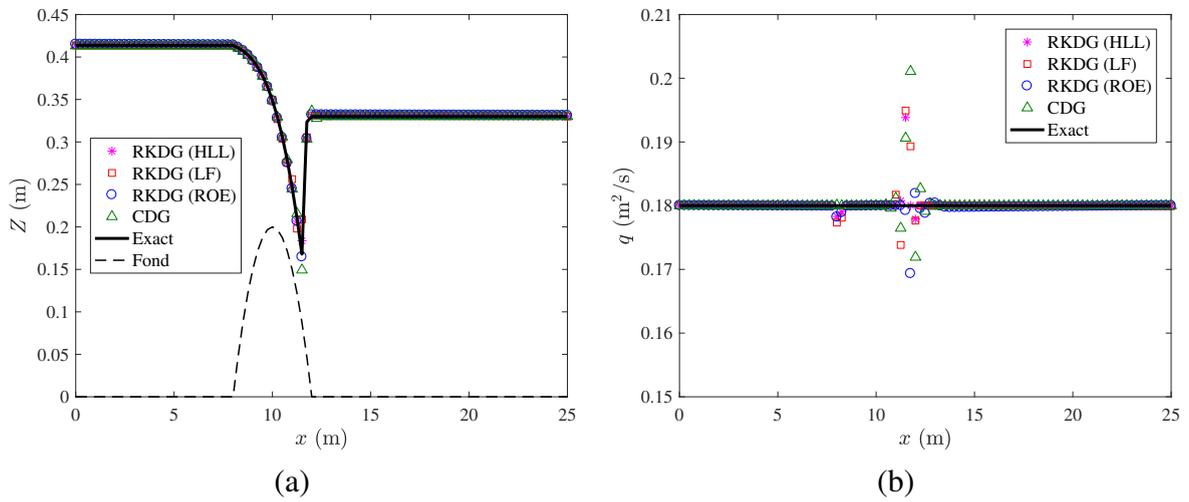


FIGURE 4.17 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau au bout de 300 s.

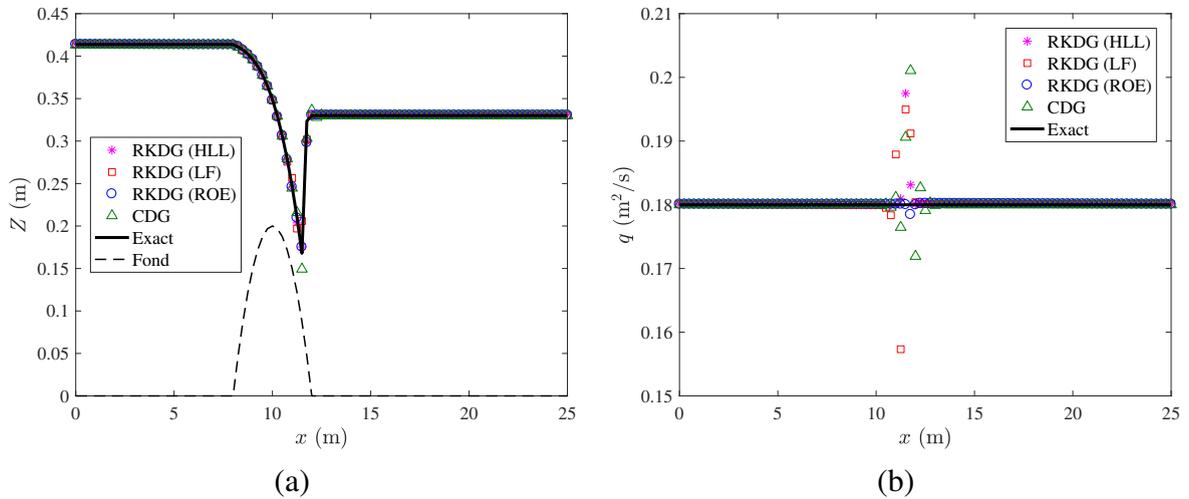


FIGURE 4.18 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau au bout de 300 s.

TABLE 4.7 – Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP-h	LP-Z	LP-h	LP-Z	LP-h	LP-Z	
$L_2(Z)$ (m)	0.0048	0.0047	0.0028	0.0028	0.0024	0.0027	0.0029
$L_2(q)$ (m ² /s)	0.0019	0.0030	0.0014	0.0018	0.0011	2.05E-04	0.0025

TABLE 4.8 – Les erreurs relatives maximales E_{\max} pour l'écoulement transcritique avec ressaut au-dessus d'une bosse.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	
$E_{\max}(Z)$ (%)	24.41	22.61	9.40	7.62	7.85	6.12	11.09
$E_{\max}(q)$ (%)	5.91	12.59	9.70	8.29	11.09	0.85	11.70

désirables. Un traitement inadéquat des termes source peut mener à une perte importante de la qualité des résultats. Par exemple, l'impossibilité de converger vers un état stationnaire réel même avec un débit et une hauteur constants pour un écoulement initial au repos qui se déplace artificiellement. Ce cas-test, proposé par *Goutal et Marel (1997)* et utilisé par plusieurs chercheurs *Zhou et al. (2001)*; *Shi (2006)*; *Ma et al. (2007)*; *Benkhaldoun et Seaid (2010)*; *Benkhaldoun et al. (2010)*; *Chaabelasri (2011)*; *Wang (2011)*, nous permet donc de tester la fiabilité et la robustesse du modèle proposé lorsque la variation du fond est rapide et irrégulière.

On considère un canal rectangulaire très large de 1500 m de long et 40 m de large, à fond irrégulier. Le tableau 4.1 donne la définition du fond. La Figure 4.19 présente la topographie du canal. Le frottement est négligé pour bien vérifier le comportement des schémas aux effets de l'irrégularité du fond.

La discrétisation se fait en partageant le canal en 301 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 5 m. En fonction des conditions initiales et des conditions aux bords, nous obtenons différents écoulements : un équilibre au repos, un écoulement fluvial ou un écoulement transcritique avec ressaut. Les meilleurs résultats du schéma CDG sont obtenus avec $\theta = 1$ et $\omega = 0.5$.

TABLE 4.9 – Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière : topographie du lit.

x (m)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	425
z_b (m)	0	0	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8
x (m)	435	450	470	475	500	505	530	550	565	575
z_b (m)	9	9	9	9.1	9	9	6	5.5	5.5	5
x (m)	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
z_b (m)	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0	0

a) Test de stagnation

Il s'agit d'un test de stagnation. Une zone de repos doit rester au repos et ainsi le schéma ne doit pas générer de mouvement artificiel dans le canal. La stabilité du schéma CDG exige un pas

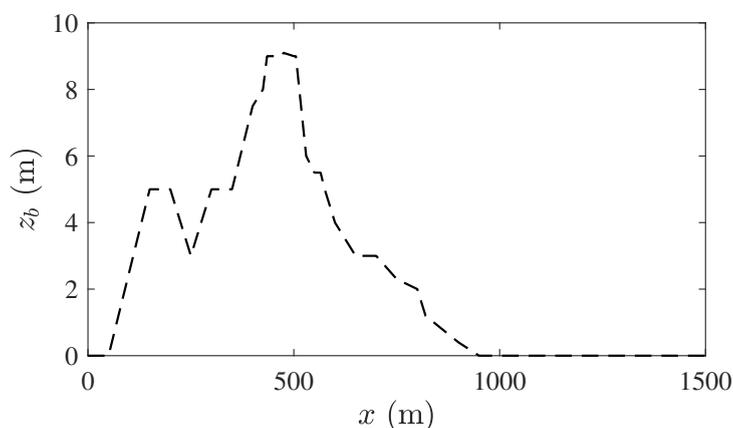


FIGURE 4.19 – Écoulement permanent dans un canal de topographie irrégulière : topographie du lit

de temps de 1 s. Initialement, la dénivellation de la surface libre est de 16 m. Le débit unitaire est nul à tout moment et partout dans le canal. À l'entrée, un débit nul est imposé et inchangé au cours du calcul. À la sortie, la dénivellation de la surface libre $Z = 16$ m est imposée. La solution exacte de ce problème est un débit nul et une hauteur d'eau constante. D'après [Goutal et Marel \(1997\)](#), pour qu'un schéma numérique réussisse un test de stagnation, une simulation de 200 s est suffisante. La figure 4.20 et 4.21 donne le résultat trouvé pour la surface libre à $t = 200$ s.

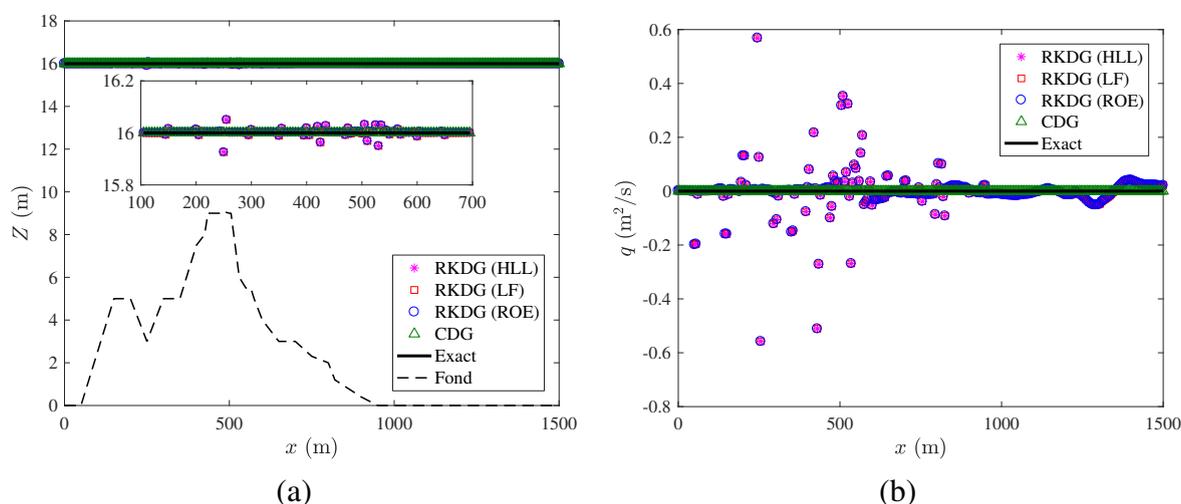


FIGURE 4.20 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement stagnant dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.

Les résultats du schéma CDG sont plus précis que ceux du schéma RKDG quelle que soit le solveur du flux ou le limiteur de pente utilisé. Cela est dû au fait du limiteur de pente qui influe sur la qualité de la solution dans les régions lisses. Les résultats montrent la supériorité du limiteur de pente LP-Z pour la préservation de l'état initial de la profondeur et d'un débit d'écoulement nul pour les trois fonctions de flux. Dans le cas du limiteur de pente LP-h, le solveur de Roe donne de meilleurs résultats pour maintenir la profondeur d'eau et le débit

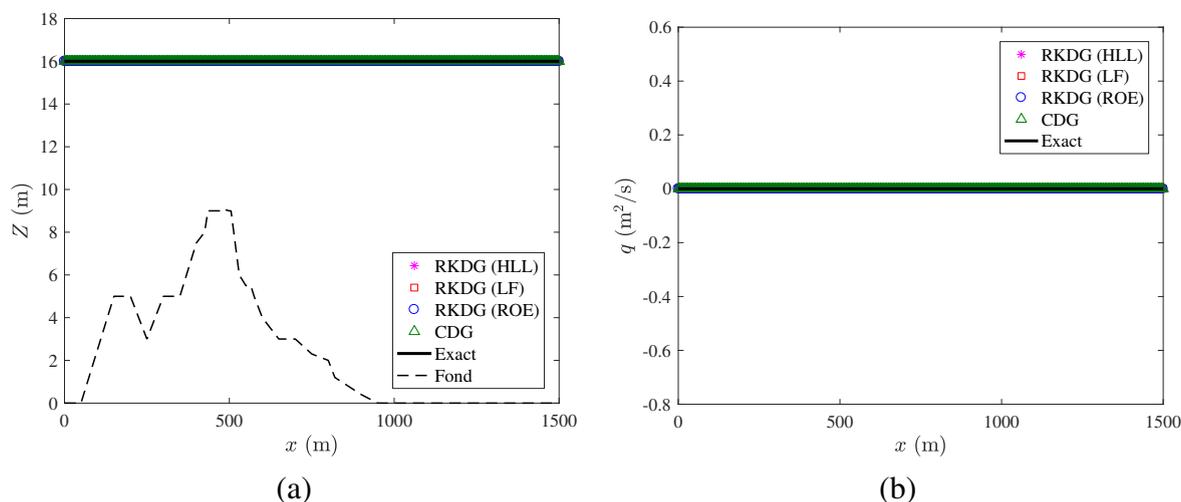


FIGURE 4.21 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement stagnant dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.

nul par rapport aux deux autres fonctions de flux (Tab. 4.10). La figure 4.21 montre que la condition de stagnation est bien vérifiée et que le schéma est conservatif (ne génère pas de masse artificielle) et stable.

TABLE 4.10 – Les erreurs en norme L_2 pour pour l'équilibre au repos dans un canal de topographie irrégulière.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP- Z	LP- h	LP- Z	LP- h	LP- Z	
$L_2(Z)$ (m)	0.0145	0	0.0145	0	0.0145	0	0
$L_2(q)$ (m ² /s)	0.1379	0	0.1379	0	0.1379	0	1.5925E-11

b) Écoulement transcritique

Le canal avec un lit irrégulier, tel que décrit précédemment, a été utilisé dans ce test. Nous imposons un débit unitaire égal à 50 m²/s à l'amont du canal et une hauteur aval égale à 16 m. L'écoulement peut changer du régime fluvial au régime torrentiel, et vice versa en présence d'un ressaut hydraulique. La stabilité du schéma CDG exige un pas de temps de 0.1 s.

Les résultats numériques sont présentés sur les figures 4.22 et 4.23 . La comparaison entre les deux méthodes (RKDG et CDG) démontre la supériorité du schéma RKDG à capturer le ressaut avec précision. L'erreur relative maximale sur les niveaux d'eau est de l'ordre de 25.17% et 0.45% (Tab. 4.12), respectivement pour le schéma CDG et RKDG(ROE)- Z (utilisant un solveur de flux de type Roe et un limiteur de pente LP- Z). L'erreur relative maximale sur les débits unitaires est de l'ordre de 26.41% et 25.35%, respectivement pour le schéma CDG et RKDG(LF)- h .

Les résultats du schéma RKDG montrent aussi que la profondeur d'eau est prévue avec précision par les deux procédures de limitation de pente alors que le débit d'écoulement est prévu avec plus de précision par un limiteur de pente LP-Z. En outre, le solveur de Roe fournit de meilleurs résultats pour le débit d'écoulement lorsqu'il est utilisé avec l'un des deux procédures de limitation de pente.

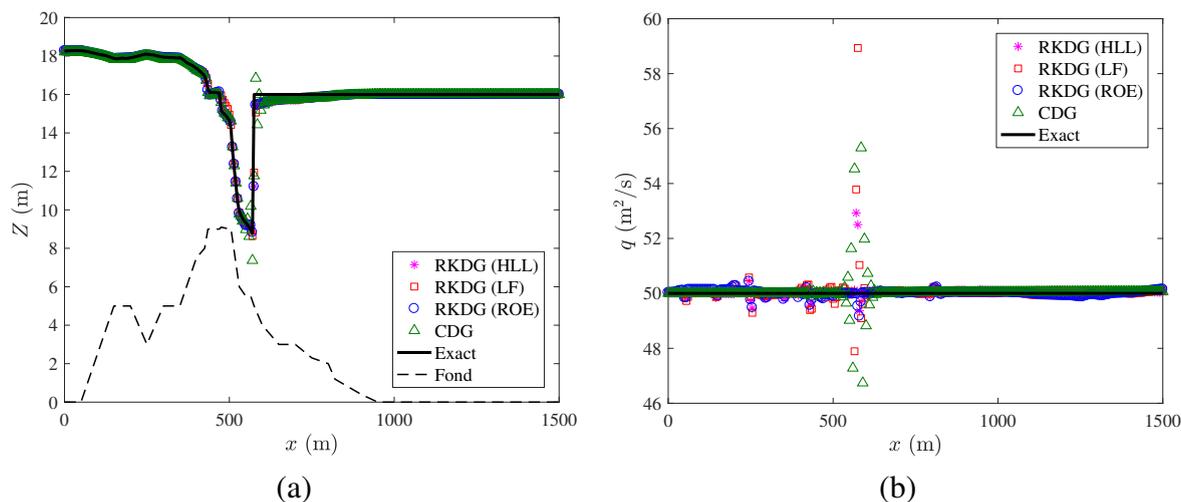


FIGURE 4.22 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au profondeur d'eau.

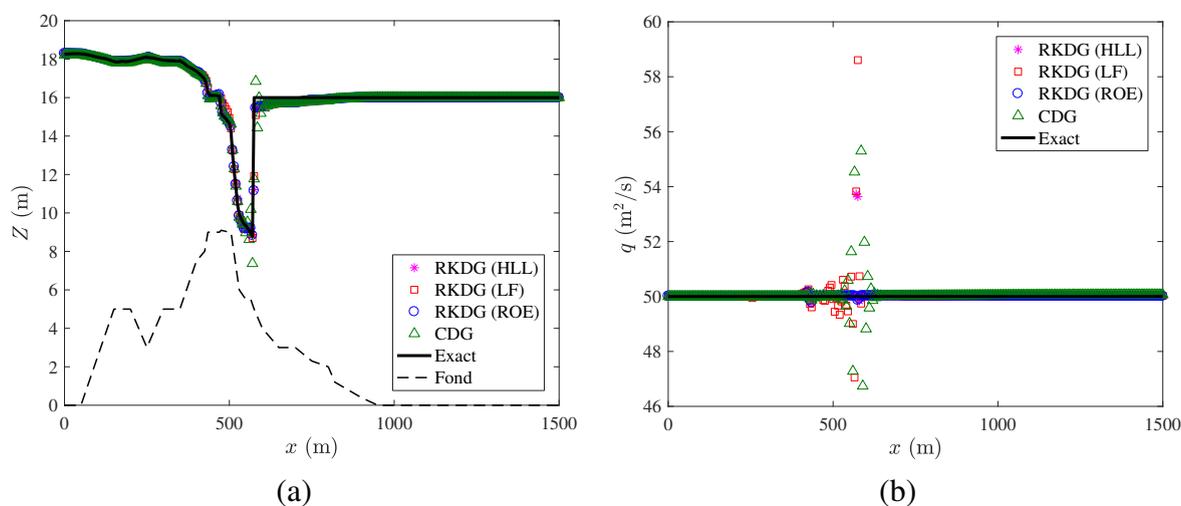


FIGURE 4.23 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'écoulement trans-critique dans un canal à lit fortement irrégulier avec limiteur de pente appliqué au niveau d'eau.

4.6 Conclusion

Un modèle numérique pour l'écoulement unidimensionnel d'eau peu profonde est développé en utilisant la méthode de Galerkin discontinue de type Runge–Kutta TVD à la fois avec

TABLE 4.11 – Les erreurs en norme L_2 pour l'écoulement transcritique dans un canal de topographie irrégulière.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	
$L_2(Z)$ (m)	1.0140	1.0058	0.5250	0.4211	1.1898	0.0472	1.9198
$L_2(q)$ (m ² /s)	0.4823	0.4794	0.5298	0.5298	0.5294	0.5294	0.0025

TABLE 4.12 – Les erreurs relatives maximales E_{\max} pour l'écoulement transcritique dans un canal de topographie irrégulière.

Erreurs	RKDG (LF)		RKDG (HLL)		RKDG (ROE)		CDG
	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	LP- h	LP-Z	
$E_{\max}(Z)$ (%)	17.86	17.21	7.45	5.85	1.66	0.45	25.17
$E_{\max}(q)$ (%)	25.48	25.35	29.94	29.92	30.29	29.94	26.41

un limiteur de pente fondé sur la surface d'eau et avec un limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau. Des tests numériques avec ou sans terme source due au frottement et à la pente du lit sont effectuées. Pour les canaux avec variation de pente, des tests numériques avec les deux procédures de limitation de pente sont menées. Différentes conditions d'écoulement sont étudiées y compris l'écoulement stagnant, écoulement fluvial, écoulement torrentiel, et la transition entre les deux régimes d'écoulement. La comparaison entre les deux méthodes (RKDG et CDG) démontre la supériorité du schéma RKDG à capturer la discontinuité dans la surface d'eau avec précision.

Pour chaque type de limiteur de pente utilisé, les solveurs approximatifs de Riemann de type HLL, LF, et Roe sont évalués. Les résultats prouvent que le meilleur limiteur de pente est celui fondé sur la surface d'eau. Les tests montrent que le solveur de type Roe donne les résultats les plus précis tandis que les résultats le moins précis est obtenus avec le solveur de type LF.

Pour un état d'équilibre stagnant même en utilisant un limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau la conservation du débit (nul) n'est toujours pas assurée. Les trois fonctions de flux fournissent des résultats similaires. Les résultats montrent aussi que le débit non-physique généré par la pente du lit augmente lorsque le fond est très irrégulier. Dans le cas du limiteur de pente fondé sur le niveau d'eau, l'écoulement non physique est réduit au minimum en utilisant les trois fonctions de flux.

Les résultats montrent que le limiteur de pente fondé sur la surface assure le mieux la conservation de la masse. Dans le cas d'écoulement fluvial partout dans le domaine, les résultats de

la profondeur d'eau avec les deux procédures de limitation de pente suivent la même tendance. Cependant, les résultats pour le débit montrent qu'en général, le solveur LF donne les mauvais résultats. Le solveur de Roe assure une bonne conservation de débit. En outre, des oscillations dans la profondeur de l'eau sont observées avec l'utilisation d'un limiteur de pente fondé sur la profondeur d'eau où il y a un changement brutal dans la pente du lit.

Dans le cas où il existe des transitions du régime torrentiel au fluvial suivies d'un ressaut hydraulique, comme dans les essais 5 et 9, les deux procédures de limitation de pente donnent des résultats similaires. Cependant, les résultats oscillatoires sont observés dans le débit avec le solveur LF. Pour les deux procédures de limitation de pente, le solveur de type Roe conserve le débit avec plus de précision. Cependant, l'utilisation de limiteurs de pente fondé sur la surface d'eau avec un solveur de type Roe fournit de meilleures solutions. Dans le cas d'un écoulement torrentiel partout dans le domaine (Test 6), le solveur de LF est incapable de conserver le débit initial.

En général, le limiteur de pente fondé sur la surface d'eau est le mieux adapté pour les canaux découverts avec un fond irrégulier. Les tests effectués montrent que le solveur de type Roe a la meilleure propriété de conservation parmi les fonctions de flux évalués.

Chapitre 5

Simulation des écoulement unidimensionnel dans les canaux naturels

Dans ce chapitre, la méthode GD est appliquée à la modélisation unidimensionnelle des écoulements à surface libre dans les canaux non-prismatiques et non rectangulaires. On présente tout d'abord les équations régissant l'écoulement à surface libre dans les canaux naturels. Nous détaillons par la suite la méthode GD utilisée pour résoudre ces équations. La méthode de traitement des lits secs sera aussi présentée. Nous validons et comparons le schéma numérique décrits et ceci sur différents problèmes hydrauliques transitoires et stationnaires : le premier test est un problème transitoire concernant l'écoulement de l'eau dans un canal lors de la rupture d'un barrage dans un canal horizontal de section variable. Le deuxième est un problème de recouvrement/découvrement dans un bassin en forme de parabole de révolution. Le troisième cas est un problème de ressaut hydraulique dans un canal divergent. Enfin le quatrième essai est un problème de rupture de barrage dans un canal convergent/divergent. Dans les deux premiers tests les résultats numériques seront comparés avec les solution analytiques tandis que dans les deux derniers tests les résultats numériques seront comparés avec mesures expérimentales.

5.1 Équations de *Saint-Venant* pour les canaux naturels

Le système d'équations de *Saint-Venant* unidimensionnelles pour les canaux naturels établi dans la section 2.2.2 et écrit sous forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.36)$$

où le vecteur des variables conservatives, \mathbf{U} , le vecteur de flux, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ et le vecteur des termes sources $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ sont, respectivement donnés par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gA \frac{\partial Z}{\partial x} - gAS_f \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Les valeurs et vecteurs propres indépendants de la matrice jacobienne sont donnés, respectivement, par les équations suivantes :

$$\lambda_1 = u - c; \quad \lambda_2 = u + c \quad (2.31)$$

$$\mathbf{K}_1 = [1, u - c]^T; \quad \mathbf{K}_2 = [1, u + c]^T \quad (2.32)$$

5.2 Méthode de Galerkin discontinue pour les équations de Saint–Venant

Le domaine de calcul unidimensionnel ($x = [0, L]$) est divisée en N_e éléments. Soit $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N_e+1} = L$, une partition du domaine. Un élément caractéristique est défini par $I_e = [x_d^e, x_f^e]$, $1 \leq e \leq N_e$ dans lequel x_d et x_f sont respectivement les coordonnées de début et de fin d'un élément. À l'intérieur d'un élément, les inconnues sont approximés par des fonctions d'interpolation de Lagrange comme le montre l'équation suivante :

$$\mathbf{U} \simeq \hat{\mathbf{U}} = \sum \mathbf{N}_j(x) \mathbf{U}_j(x, t) ; \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) \simeq \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) ; \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) \simeq \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{U}}) \quad (5.1)$$

L'équation régissant est multipliée par la fonction teste ou de poids. Les équations qui en résultent sont intégrés sur un élément. Le terme de flux est intégré par parties, et l'équation finale devienne :

$$\int_{x_d^e}^{x_f^e} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j dx \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{F}} \Big|_{x_d^e}^{x_f^e} - \int_{x_d^e}^{x_f^e} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \hat{\mathbf{F}} dx = \int_{x_d^e}^{x_f^e} \mathbf{N}_i \hat{\mathbf{S}} dx \quad (5.2)$$

Cette équation peut être réécrite sous une forme compacte comme suit :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{R} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{L} \quad (5.3)$$

La solution de la variable conservée, \mathbf{U} , peut être obtenue avec un schéma d'intégration temporelle convenable tel que le schéma de Runge–Kutta TVD. Le limiteur de pente TVD (voir §4.2.3) est également nécessaire pour éviter les oscillations non physiques avec les schémas d'ordre supérieur. Pour le flux numérique, les solveurs de Riemann approchés, comme le solveur HLL ou de Roe, peuvent être utilisés. Dans les équations de *Saint–Venant*, le vecteur des variables conservatives et le vecteur de flux sont respectivement donnés par $\mathbf{U} = [A, Q]^T$ et $\mathbf{F} = [Q, Q^2/A]^T$. Le flux HLL est donné par :

$$\mathbf{F}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{F}_G & \text{si } S_G \geq 0 \\ \frac{S_D \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{F}_D + S_G S_D (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G)}{S_D - S_G} & \text{si } S_G < 0 < S_D \\ \mathbf{F}_D & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Comme suggéré par *Fraccarollo et Toro (1995)*, les vitesses d’onde gauche et droite (S_G et S_D) sont, respectivement, données par :

$$S_G = \min(u_G - c_G, u^* - c^*); \quad S_D = \max(u_D + c_D, u^* + c^*) \quad (5.5)$$

où

$$u^* = 0.5(u_G + u_D) + c_G - c_D \quad (5.6)$$

$$c^* = 0.5(c_G + c_D) + 0.25(u_G - u_D) \quad (5.7)$$

où la célérité de l’onde, c , pour les canaux naturels est défini par :

$$c = \sqrt{g \frac{A}{T}} \quad (2.29)$$

D’après *Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon (2000)*, le solveur de Roe pour les canaux non rectangulaires est donné par l’équation :

$$\mathbf{F}^{\text{Roe}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_G - \mathbf{F}_D) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (5.8)$$

où les variables de l’équation sont définis par les équations :

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{(\tilde{c} + \tilde{u}) \Delta A - \Delta Q}{2\tilde{c}}; \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{u}) \Delta A + \Delta Q}{2\tilde{c}} \quad (5.9)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}; \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u} + \tilde{c} \quad (5.10)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 = [1, \tilde{u} - \tilde{c}]^T; \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = [1, \tilde{u} + \tilde{c}]^T \quad (5.11)$$

$$\Delta A = A_D - A_G; \quad \Delta Q = Q_D - Q_G \quad (5.12)$$

$$\tilde{u} = \frac{Q_D \sqrt{A_G} + Q_G \sqrt{A_D}}{\sqrt{A_G A_D} (\sqrt{A_G} + \sqrt{A_D})}; \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{g}{2} [(A/T)_G + (A/T)_D]} \quad (5.13)$$

Comme souligné auparavant, l’écoulement d’eau peu profonde est régi par les valeurs propres des équations de *Saint–Venant* donné par les équations (2.36) et (2.37), et représentent les caractéristiques physiques de l’écoulement. Le choix de l’équation modélisée ne devrait pas affecter les valeurs propres. Ainsi, les vitesses des ondes dans les équations (5.5) et (5.10) sont estimées avec les valeurs propres données par l’équation (2.31).

Étant donné que les termes de pression hydrostatique et de pression à la paroi sont combinés dans l’équation (2.35), les termes sources doivent être discrétisées de manière appropriée. Différentes méthodes de traitement du terme source peuvent être trouvées dans les littératures telles que donnée par *Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon (2000)*; *Perthame et Simeoni (2001)*; *Ying et al. (2004)*; *Catella et al. (2008)*; *Lai et Khan (2012a)*. Le traitement proposé par *Lai et Khan (2012a)* est utilisée pour discrétiser le terme combiné de force de pression hydrostatique. Pour les éléments linéaires, le terme source associée à la pente de la surface d’eau est discrétisé

comme suit :

$$\begin{aligned} -gN_1 \hat{A} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial x} &= -gN_1 \frac{(A_{x_d}^G + A_{x_f}^G)}{2} \frac{(Z_{x_2}^G - Z_{x_1}^G)}{(x_f - x_d)} \\ -gN_2 \hat{A} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial x} &= -gN_2 \frac{(A_{x_d}^D + A_{x_f}^D)}{2} \frac{(Z_{x_2}^D - Z_{x_1}^D)}{(x_f - x_d)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.3 Traitement de lit sec

L'étude numérique des écoulements à surface libre impose des contraintes spécifiques comme la prise en compte de topographies fortement irrégulières et la gestion du phénomène d'immersion et d'émergence des bancs alternativement couverts puis découverts. Ceux-ci constituent un phénomène très présent dans les écoulements d'eaux peu profondes tels que les écoulements estuariens, lagunaires, fluviaux, les inondations et tout cours d'eau sujet à une oscillation de sa surface libre. Les bancs couvrants et découvrants se traduisent par l'exondation ou l'inondation d'une zone, ou encore par leur production alternée selon la vitesse et la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine et la variabilité de la bathymétrie. Le mouvement des frontières humide/sec (H/S) en résultant constitue un aspect très important dans une étude préventive des inondations. Si aucune attention particulière n'est portée, le schéma numérique peut provoquer des instabilités numériques indésirables et peut produire une profondeur d'eau irréaliste (infini ou négatif) et/ou la génération de vitesse parasite. La reproduction adéquate des bancs couvrants et découvrants est restée longtemps un défi pour les modèles numériques. Les effets d'inondation étaient en effet négligés dans les premières études, et des frontières solides étaient plutôt considérées. Parmi les études pionnières de modélisation des écoulements à surface libre, figurent les travaux de [Reid et Bodine \(1968\)](#). Les approches proposées dans la littérature pour le traitement des bancs couvrants et découvrants sont nombreuses. L'article de [Medeiros et Hagen \(2013\)](#) offre une revue intéressante des recherches sur le sujet.

Les équations de *Saint-Venant* sont strictement hyperboliques pour $h > 0$. Vu que le calcul de flux numérique avec des solveurs approximatifs de Riemann sont basés sur des lois de conservation hyperboliques, le traitement pour le lit à sec ($h = 0$) est nécessaire. Le flux numérique avec lit sec devrait être calculée avec précision, et la profondeur d'eau doit être physiquement correcte, c'est-à-dire, $h \geq 0$.

Pour un lit sec à droite d'un nœud ($h_G > 0$ et $h_D = 0$), les vitesses d'onde du solveur HLL sont donnés par ([Toro, 1990](#)) :

$$S_G = u_G - c_G; S_D = u_G + 2c_G \quad (5.15)$$

Pour un lit sec à gauche d'un nœud ($h_G = 0$ et $h_D > 0$), les vitesses d'onde sont données par :

$$S_G = u_D - 2c_D; S_D = u_D + c_D \quad (5.16)$$

Pour le solveur de Roe, les vitesses de l'onde pour un lit sec à droit ou à gauche d'un nœud

sont donnés, respectivement, par les équations suivantes :

$$\tilde{\lambda}_1 = u_G - c_G; \tilde{\lambda}_2 = u_G + 2c_G \quad (5.17)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = u_D - 2c_D; \tilde{\lambda}_2 = u_D + c_D \quad (5.18)$$

Pour traiter le problème de lit sec, une faible profondeur h_{dry} (par exemple, $h_{dry} = 10^{-16}$) peut être utilisé pour vérifier l'interface mouillé/sec (Sanders, 2001). La profondeur d'eau au niveau des nœuds sec est mise à zéro. Si la profondeur d'eau à un côté d'un élément est plus grande que h_{dry} et l'autre côté est inférieur ou égal à h_{dry} , le flux numérique à travers cet face est calculé en fonction de l'emplacement du lit sec. Si les profondeurs d'eau aux deux côtés sont inférieures ou égales à h_{dry} , le flux numérique est mis à zéro. Dans le cas où la profondeur d'eau calculée est inférieure ou égale à h_{dry} , la vitesse au nœud considéré est mise à zéro. Si la profondeur d'eau calculée est inférieure à zéro, la profondeur et la vitesse en ce nœud sont subséquemment misent à zéro.

Dans la deuxième méthode, une profondeur suffisamment faible h_{dry} (par exemple, 10^{-16}) et une vitesse nulle sont définies au niveau des nœuds secs (Ying et al., 2004). À la limite de l'élément, si la profondeur d'eau d'un côté est plus grande que h_{dry} et à l'autre côté est inférieure ou égale à h_{dry} , le flux numérique est alors calculé en fonction de l'emplacement du lit sec. Si la profondeur d'eau aux deux côtés de l'élément sont inférieure ou égale à h_{dry} , le flux numérique calculé avec le solveur HLL ou Roe sont mis à zéro. Après chaque pas de temps, la profondeur d'eau à chaque nœud est vérifié. Si la profondeur d'eau à un nœud est inférieure à h_{dry} , la profondeur d'eau est prise égale à h_{dry} et la vitesse est fixé à zéro.

Pour les lits horizontaux, ces deux méthodes donnent les mêmes résultats. Dans le cas d'un canal à fond variable, même une profondeur prédéfinie suffisamment faible h_{dry} peut générer un flux non physique. En conséquence, la première méthode est recommandée pour le traitement des interfaces M/S avec variation de lit. Cependant, dans la première méthode, puisque la profondeur est égale à zéro au niveau des nœuds secs, une attention particulière doit être prise avec des termes divisé par h , par exemple, Q^2/h et le terme de frottement.

5.4 Tests numériques

Dans cette section, des solutions numériques pour les équations d'eau peu profonde avec la méthode GD sont présentés dans les canaux non rectangulaires et non prismatiques. Les tests numériques comprennent une rupture idéalisée de barrage dans un canal horizontal de section variable, un problème de recouvrement/découvrement dans un bassin en forme de parabole de révolution, un ressaut hydraulique dans un canal divergent, et un rupture de barrage dans un canal convergent/divergent. Les résultats numériques sont comparés avec les solutions analytiques ou avec les mesures en laboratoire.

5.4.1 Rupture de barrage dans un canal horizontal de section variable

Le schéma GD pour les équations d'eau peu profonde est utilisé pour simuler les problèmes idéalisés de rupture de barrage, dans des canaux horizontaux et sans frottement avec différentes formes de sections transversales. Les formes testées comprennent un canal triangulaire, un canal parabolique, un canal trapézoïdal et un canal rectangulaire. Le canal est de 100 m de long avec un barrage situé à 50 m. Les solutions exactes peuvent être trouvées dans l'ouvrage de [Henderson \(1966\)](#).

a) Canal triangulaire

La pente latérale de canal de 1H : 1V ([Sanders, 2001](#); [Ying et al., 2004](#)). Nous avons étudié deux cas test : la rupture d'un barrage sur fond sec et la rupture sur un fond mouillé. 400 éléments sont utilisés avec $\Delta x = 2.5$ m et $\Delta t = 0.125$ s pour le cas d'un fond mouillé. Pour le test d'un fond sec, 1000 éléments sont utilisés avec $\Delta x = 1$ m, $\Delta t = 0.05$ s, et $h_{dry} = 10^{-16}$ m.

Les résultats des tests sur un fond mouillé, pour l'élévation de la surface d'eau et le débit après 80 s de l'enlèvement du barrage, sont présentés sur la figure 5.1. Les résultats sur un fond sec, pour l'élévation de la surface d'eau et la vitesse après 45.16 s de l'enlèvement du barrage sont présentés sur la figure 5.2.

Au cours de ce travail, "HLL-Z", signifie que le solveur HLL avec le limiteur de pente fondé sur la surface d'eau sont appliqués. De même, "-A" et "-h" signifient que le limiteur de pente est fondé, respectivement sur la surface d'écoulement et sur la profondeur d'eau. Pour un canal horizontal, les limiteurs de pente LP-A et LP-h vont produire des résultats identiques.

Les résultats de la figure 5.1 montrent que les solutions numériques avec un limiteur de pente LP-A sont en bon accord avec la solution exacte pour les deux fonctions de flux. Les résultats montrent aussi que ce schéma est capable de capturer le choc avec précision. Le limiteur de pente LP-Z produit des erreurs dans la vitesse d'onde, l'amplitude de l'onde, et le débit avec les deux fonctions de flux. Les fonctions de flux de type Roe et HLL fournissent des résultats similaires pour tous les autres tests. Ainsi dorénavant, seuls les résultats du solveur HLL sont présentés pour faciliter l'interprétation.

Pour le test sur un fond sec, le limiteur de pente LP-Z n'a pas fourni des résultats pour la taille d'élément et le pas du temps mentionnés précédemment. Il est constaté qu'une profondeur d'eau minimale de 0.007 m à fixer, comme condition initiale, en aval du barrage et une réduction du pas de temps de 0.00025 s doivent être utilisés pour le limiteur de pente LP-Z pour exécuter la simulation. Les résultats pour la profondeur d'eau 5.2(a) montrent que la faible profondeur initiale en aval modifie la solution à la pointe de l'onde. Dans le cas du limiteur de pente LP-Z une discontinuité est observée au pied du front d'onde. La procédure de limitation de pente fondée sur la surface d'eau est capable de capturer la pointe de front d'onde. La dépendance des résultats sur le maillage est illustrée à la figure 5.3 avec le schéma HLL-A. Comme prévu, une résolution plus élevée fournit des résultats plus précis.

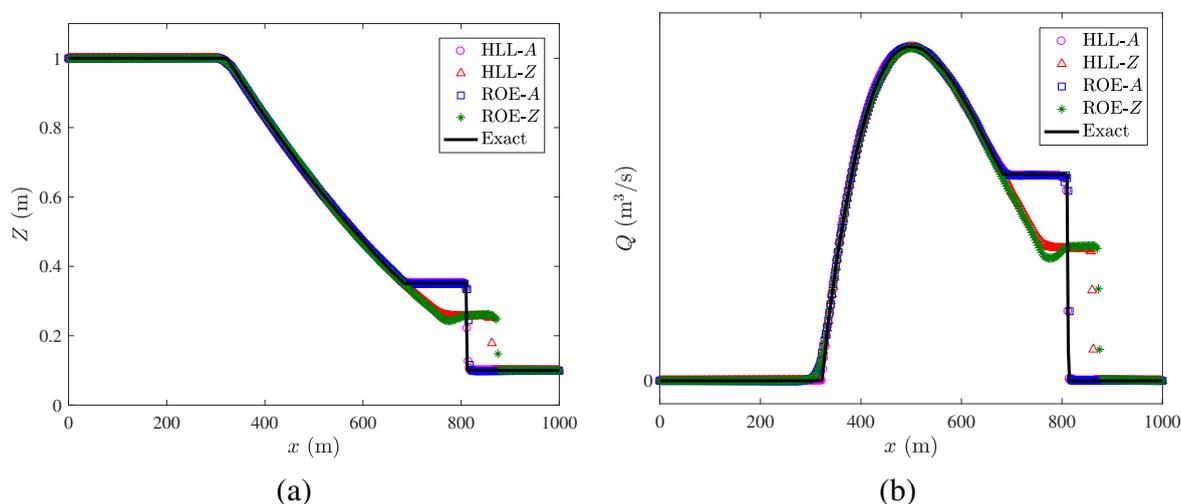


FIGURE 5.1 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal triangulaire.

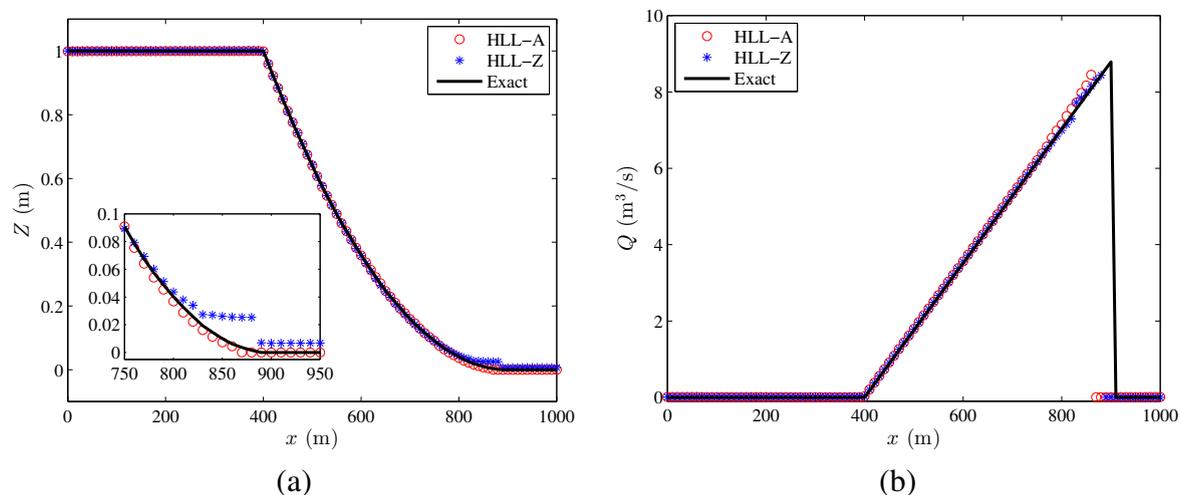


FIGURE 5.2 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond sec dans un canal triangulaire.

b) Canal parabolique

Dans cet essai, le canal a une forme parabolique dont la largeur au miroir $b = h^{0.5}$. Le test est exécuté en utilisant 400 éléments ($\Delta x = 2.5$ m) et un pas de temps $\Delta t = 0.125$ s. Les solutions numériques pour la surface d'eau et le débit après 100 s de l'enlèvement du barrage sont présentés sur la figure 5.4.

Les résultats numériques dans le canal parabolique présentent des performances similaires à celui dans un canal triangulaire avec le limiteur de pente LP-A. En appliquant ce limiteur les résultats sont plus précis. Comme on peut l'observer à partir des résultats, le limiteur de pente LP-Z entraîne moins d'erreurs pour un canal parabolique que pour un canal triangulaire.

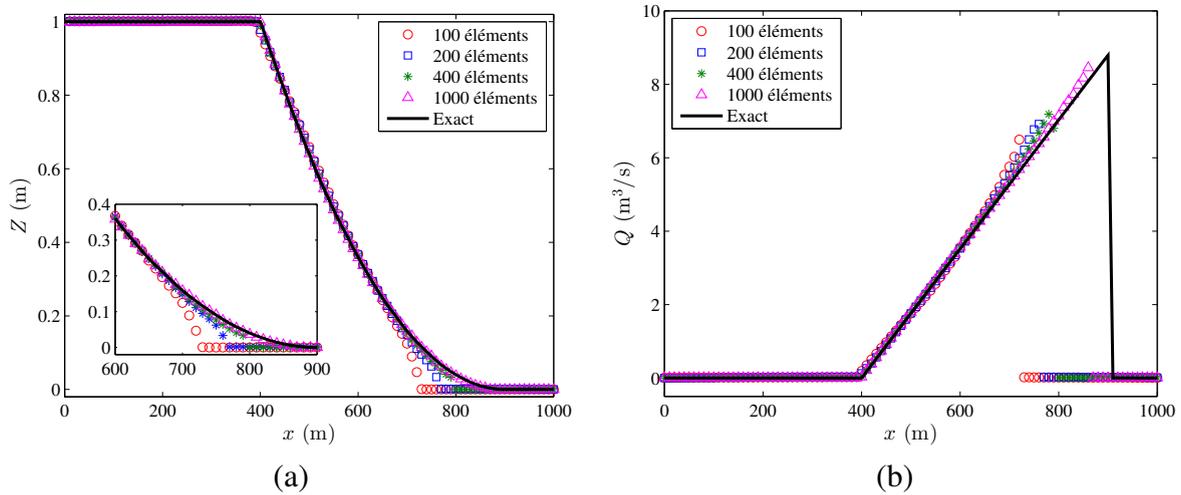


FIGURE 5.3 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond sec dans un canal triangulaire dans différents maillages.

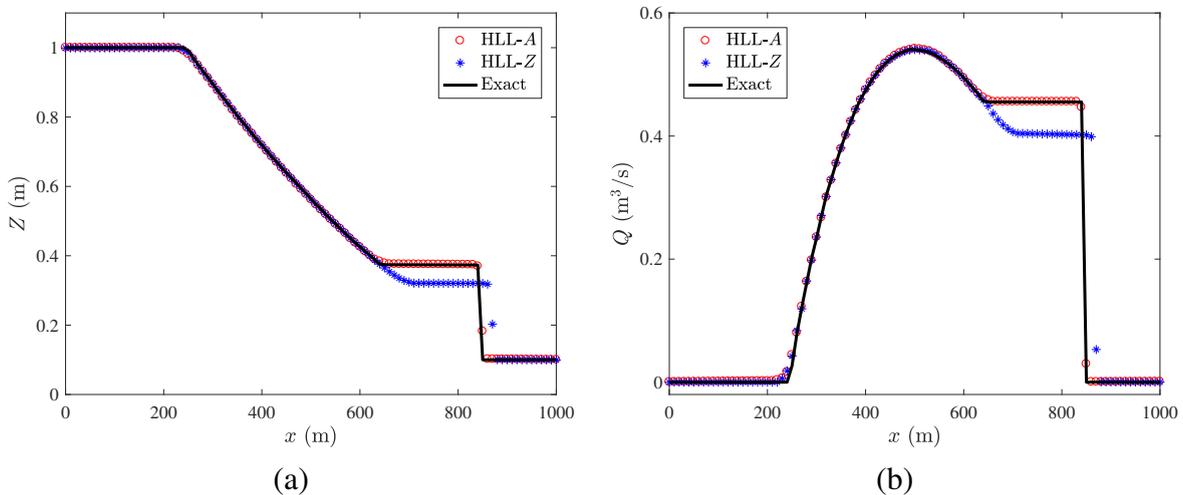


FIGURE 5.4 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal parabolique.

c) Canal trapézoïdal

Dans ce test, le problème de rupture de barrage classique est simulé dans un canal trapézoïdal horizontal et sans frottement. Le canal a une pente latérale de $2H : 1V$ (pente des berges, $\beta = 2$) et la largeur au fond est de 1 m. Initialement, la profondeur d'eau en amont est de 1 m, et la profondeur d'eau en aval est de 0.1 m (*Sanders, 2001*). Le test est exécuté en utilisant 400 éléments ($\Delta x = 2.5$ m) et un pas de temps $\Delta t = 0.125$ s. Les solutions numériques pour la surface d'eau et le débit après 103.1 s de l'enlèvement du barrage sont présentés sur la figure 5.5.

Les résultats montrent une tendance similaire à celle des canaux triangulaires et paraboliques. Comme auparavant, le limiteur de pente LP-A donne des résultats numériques qui sont en accord avec la solution exacte, tandis que le limiteur de pente LP-Z génère des erreurs plus

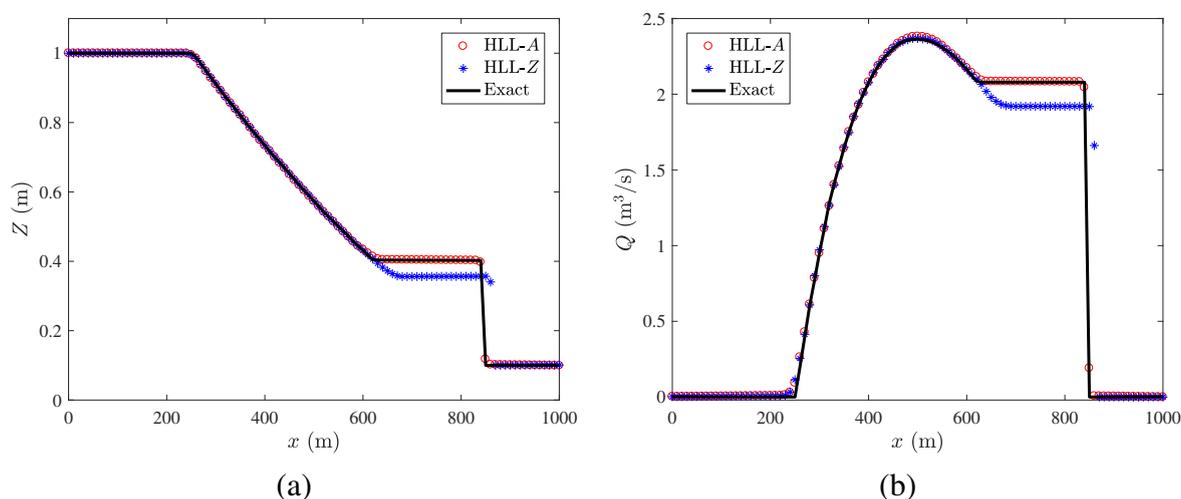


FIGURE 5.5 – Comparaison (a) des hauteurs d’eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal trapézoïdal.

importantes. Toutefois, les erreurs dans la surface d’eau et le débit sont moins importantes que dans les deux tests précédents.

d) Canal rectangulaire

Le canal est considéré maintenant rectangulaire horizontal et sans frottement. Le canal a une longueur de 1000 m et une largeur de 1 m. Initialement, la profondeur d’eau en amont est de 1 m, et la profondeur d’eau en aval est de 0.1 m. Le test est exécuté en utilisant 400 éléments ($\Delta x = 2.5$ m) et un pas de temps $\Delta t = 0.125$ s. Les solutions numériques pour la surface d’eau et le débit après 90 s de l’enlèvement du barrage sont présentés sur la figure 5.6.

Comme évoqué précédemment (cf. § 4.5.1), les résultats obtenus à partir des deux limiteurs de pente, LP-A et LP-Z, produisent les mêmes résultats pour un canal prismatique rectangulaire horizontal et sans frottement. D’autres investigations montrent que lorsque la pente latérale (β) diminue, les différences entre les résultats basés sur les deux limiteurs de pente diminuent. Autrement dit, lorsque la forme de la section transversale du canal s’éloigne de canal rectangulaire les différences dans les résultats en fonction des deux limiteurs de pente augmente. Il est évidents et comme indiqué dans cet essai, les deux limiteurs de pente sont mathématiquement identiques et fournissent exactement les mêmes résultats pour un canal prismatique rectangulaire.

La précision des résultats obtenus en utilisant les deux limiteurs de pente pour les quatre canaux prismatiques précédents sont présentés dans le tableau 5.1. L’erreur moyenne est fondée sur la différence entre les niveaux de surface d’eau prédits et analytiques sur tout le domaine. La section transversale d’écoulement est représentée en fonction de la profondeur d’eau. Quand l’exposant de la profondeur diminue, la précision des résultats obtenus en utilisant le limiteur de pente LP-Z améliore.

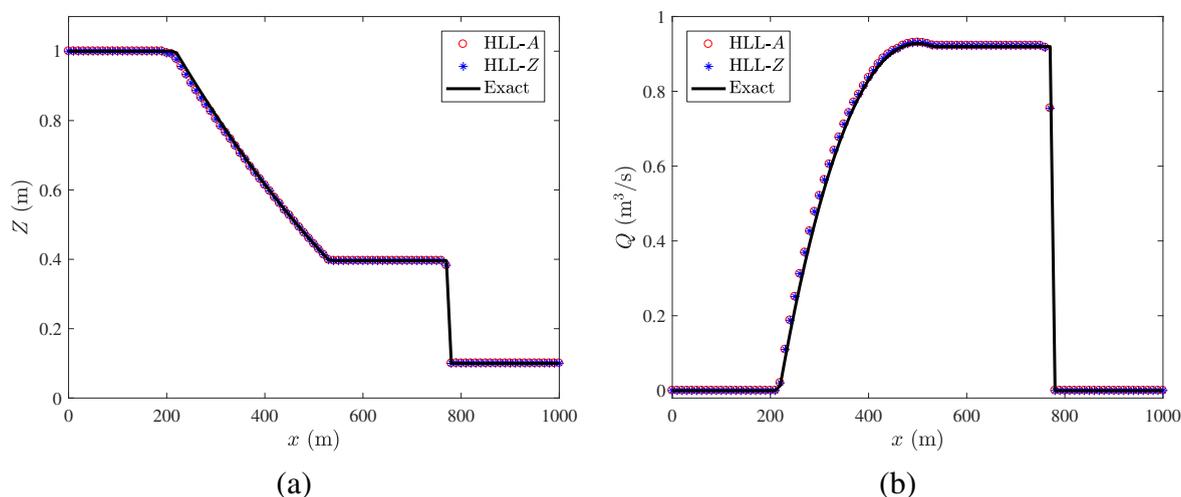


FIGURE 5.6 – Comparaison (a) des hauteurs d’eau, (b) des débits du problème de rupture de barrage sur fond mouillé dans un canal rectangulaire.

TABLE 5.1 – Précision de limiteurs de pente dans les canaux prismatiques.

Type de canal	Surface d’écoulement (A)	L’ordre du h	Erreur moyenne de LP-Z	Erreur moyenne de LP-A
Triangulaire	h^2	2	12.24%	1.22%
Parabolique	$2h^{(3/2)}/3$	1.5	6.94%	1.12%
Trapézoïdal	$bh + \beta h^2$	1 \sim 2	6.12%	1.22%
Rectangulaire	bh	1	1.02%	1.02%

5.4.2 Parabole de révolution

Plus complexe, on considère maintenant un bassin en forme de parabole de révolution, sans frottement, dont la surface libre oscille librement et infiniment autour d’une position d’équilibre. Ce cas test est un cas particulier 1D d’un cas test 2D introduit dans [Thacker \(1981\)](#) et repris dans [Sampson \(2008\)](#) et [Delestre \(2010\)](#). Il s’agit d’un problème de recouvrement/ découverte un peu comme sur une plage, c’est pourquoi ce test et ses variantes sont souvent utilisés pour la validation des méthodes numériques pour l’océanographie ([Delestre, 2010](#)). Nous avons choisi ce cas test car il permet de tester la capacité des méthodes numériques à traiter les transitions sec/mouillé. De plus, la solution étant périodique, elle nous permet aussi de tester le degré de diffusion numérique des différentes méthodes de traitement du flux.

La cuvette parabolique est de largeur unitaire et de 8000 m et la topographie (Fig. 5.7) est une parabole définie par :

$$z_b(x) = h_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \quad \text{pour } -4000 \text{ m} \leq x \leq 4000 \text{ m} \quad (5.19)$$

Nous obtenons une solution explicite périodique ([Delestre, 2010](#), p. 251–254) dont la surface

libre reste plane et oscille entre les points :

$$x_1(t) = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) - a \text{ et } x_2(t) = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) + a \quad (5.20)$$

avec la pulsation $\omega = \sqrt{2gh_0/a^2}$ et la période $T = 2\pi/\omega$

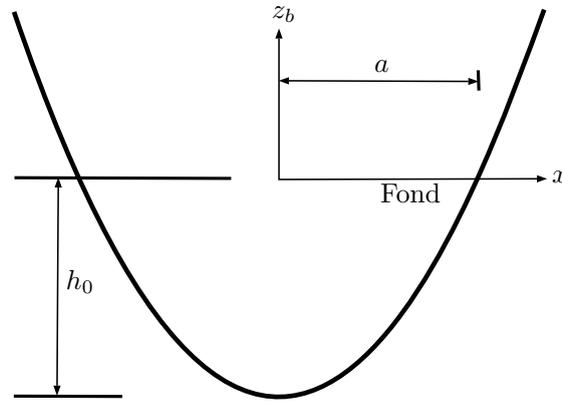


FIGURE 5.7 – Profil de lit de la cuvette parabolique.

La hauteur d'eau est décrite par :

$$h(t,x) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left(\left(x + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right)^2 - a^2 \right) & \text{pour } x_1(t) < x < x_2(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.21)$$

et la vitesse par :

$$u(t,x) = \begin{cases} B \sin(\omega t) & \text{pour } x_1(t) < x < x_2(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.22)$$

Pour les paramètres, nous prenons $h_0 = 10$ m, $a = 2500$ m, et $B = 5$ m/s, qui donnent une période d'oscillation $T = 1121$ s.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique explicite,
- d'une topographie variable,
- de transitions sec/mouillé en mouvement,
- d'une solution périodique.

Le domaine de calcul s'étend de -4000 m à 4000 m. Nous avons utilisé une discrétisation numérique de 100 éléments ($\Delta x = 80$ m), un pas de temps $\Delta t = 1.121$ s et un critère de lit sec (h_{dry}) de 10^{-2} m. La surface d'eau et la vitesses initiales sont données par les équations 5.21 et 5.22 pour $t = 0$ s. Ces conditions sont représentées sur la figure 5.8. Pour la fonction de flux HLL, les vitesses d'onde sont estimées sur la base des équations :

$$S_G = \min(u_G - c_G, u_D - c_D); \quad S_D = \max(u_G + c_G, u_D + c_D) \quad (5.23)$$

La simulation est réalisée sur la période complète ($t = T$). Les solutions simulées et exactes de la surface d'eau et du débit aux différents moments sont comparés dans les figures 5.9 à 5.12. Les résultats montrent que le limiteur de pente LP-A donne de meilleures solutions que le limiteur de pente LP-Z. Le schéma avec le limiteur de pente LP-A est capable de conserver la masse et la quantité de mouvement au cours des épisodes de couvremet/découvremet. En utilisant le limiteur de pente LP-A, le volume d'eau calculé aux différents moments est le même que le volume initial.

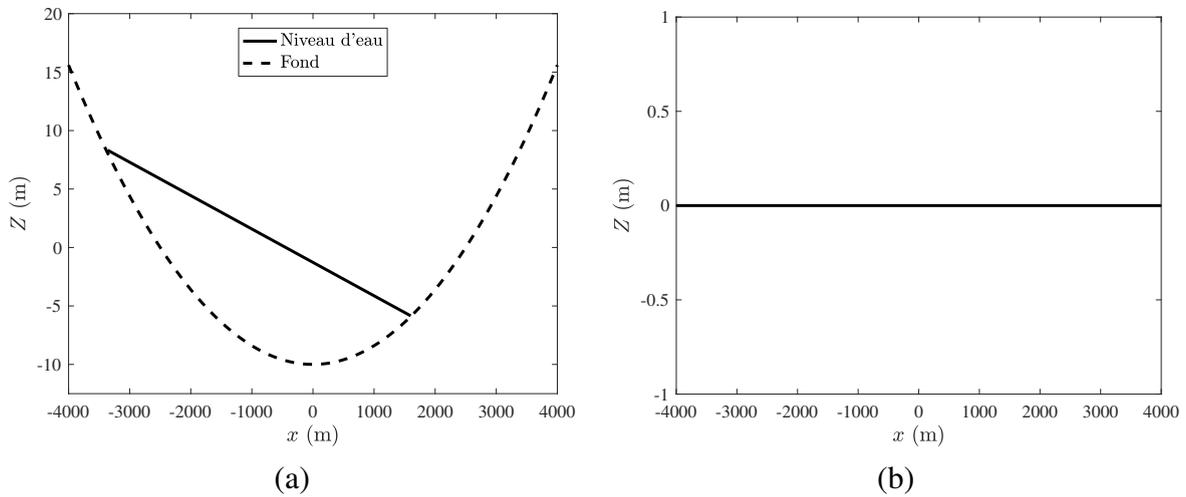


FIGURE 5.8 – Conditions initiales (a) niveau d'eau, (b) débit, dans une cuvette parabolique.

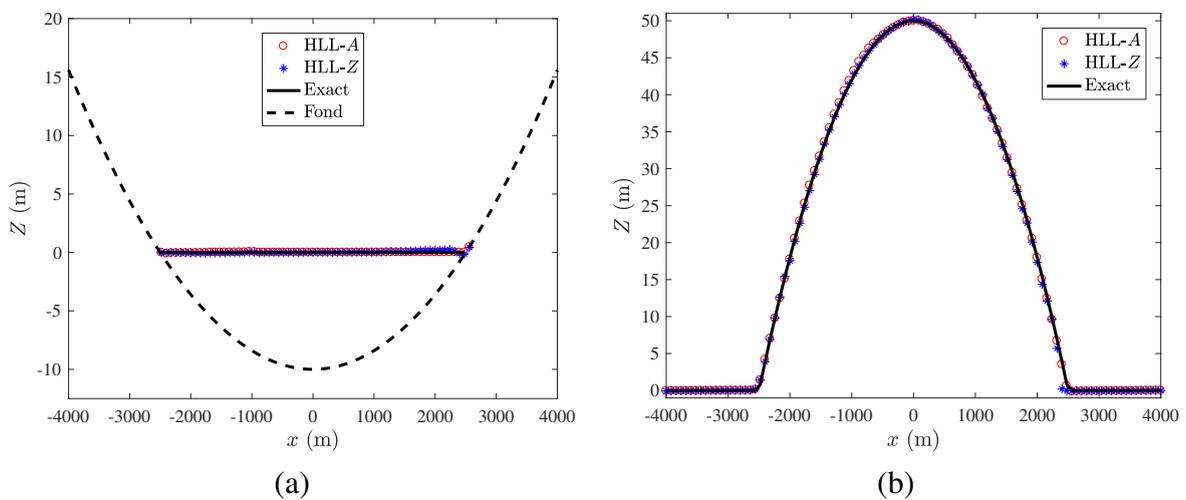


FIGURE 5.9 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = T/4$.

5.4.3 Ressaut hydraulique dans un canal divergent

Dans ce test, un ressaut hydraulique dans un canal divergent est simulé. Les résultats numériques sont comparés avec le profil de la surface d'eau mesurée par *Khalifa (1980)*. Ces données

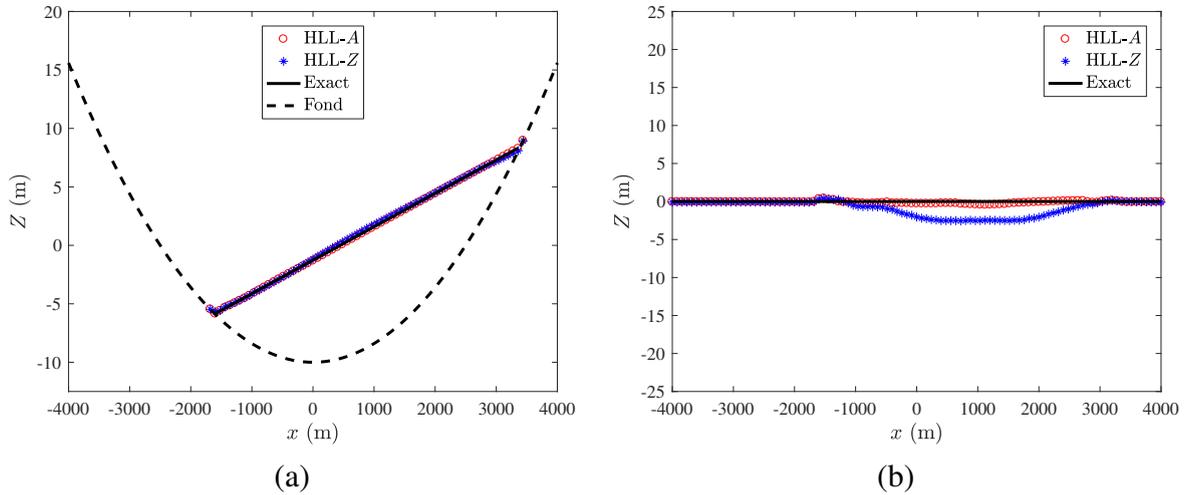


FIGURE 5.10 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = 2T/4$.

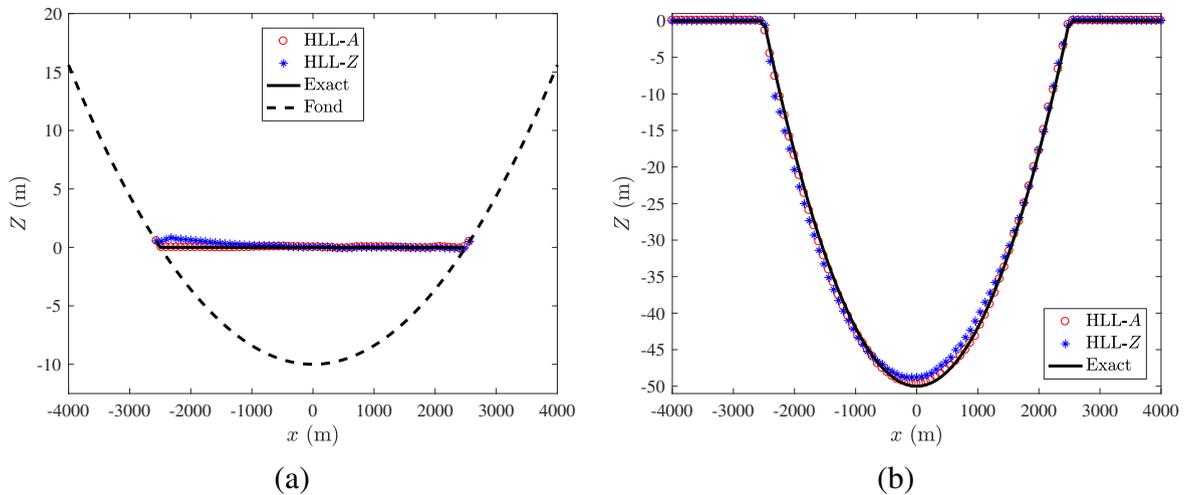


FIGURE 5.11 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = 3T/4$.

sont aussi utilisées par [Catella et al. \(2008\)](#) et [Rosatti et al. \(2011\)](#). Le canal divergent horizontal a une section transversale rectangulaire et une longueur de 2.5 m. La largeur de section transversale (en mètres) le long du canal est donnée par l'équation suivante (voir aussi la figure 5.13) :

$$b(x) = \begin{cases} 0.155 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.65 \\ 0.155 + 0.236(x - 0.65) & \text{si } 0.65 \leq x \leq 1.94 \\ 0.46 & \text{si } 1.94 \leq x \leq 2.5 \end{cases} \quad (5.24)$$

La largeur du canal varie de 0.155 m à 0.46 m linéairement sur une longueur de 1.3 m. La profondeur d'eau initiale est de 0.088 m partout dans le canal. Le débit d'entrée en amont est fixé à $0.0263 \text{ m}^3/\text{s}$ et la profondeur d'eau en amont est maintenu à 0.088 m. Ces conditions établissent une condition d'écoulement torrentiel à l'extrémité amont. La profondeur de l'eau à

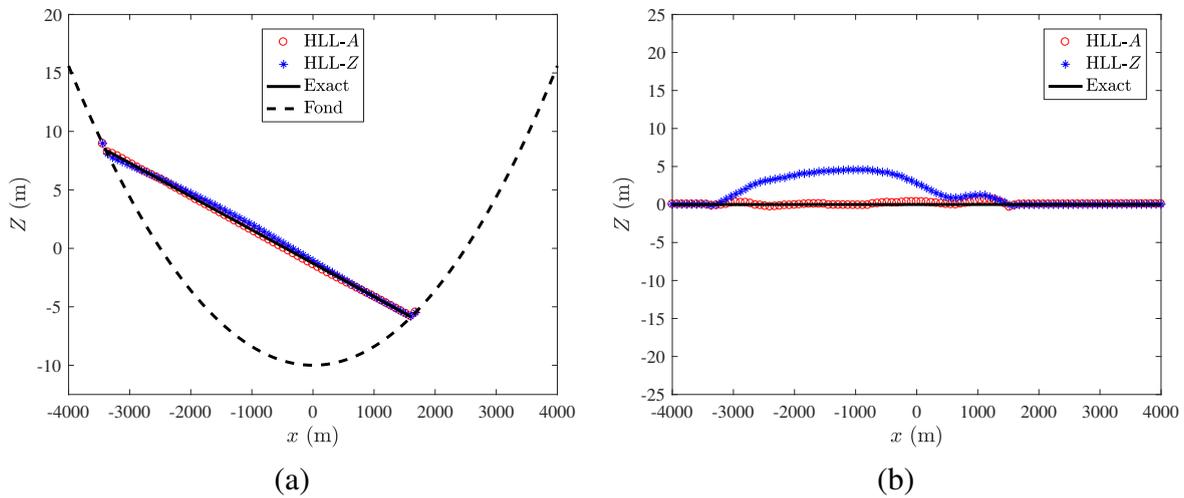


FIGURE 5.12 – Comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits dans une cuvette parabolique au bout d'un temps $t = T$.

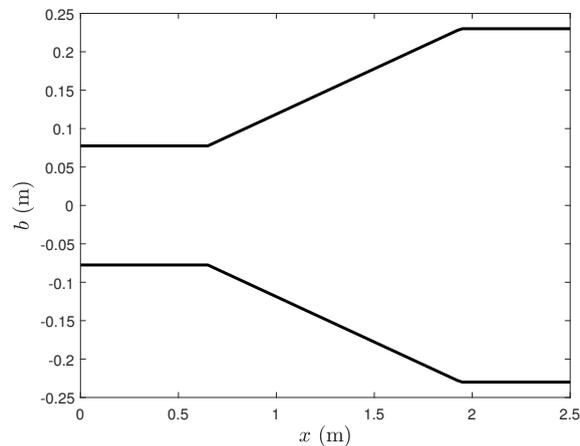


FIGURE 5.13 – Ressaut hydraulique dans un canal divergent, variation du largeur du canal.

la limite aval était de 0.195 m, assurant la formation d'un ressaut hydraulique dans la section divergente du canal. Les conditions ci-dessus sont utilisées dans modèle physique. Le coefficient de rugosité de Manning est inconnue, de sorte que les simulations sont effectuées avec différentes valeurs du coefficient de rugosité. Nous avons utilisé une discrétisation numérique de 100 éléments ($\Delta x = 0.025$ m) et un pas de temps $\Delta t = 1.121$ s.

Les solutions d'écoulements permanents, pour la surface d'eau et le débit, sont présentées sur la figure 5.14 avec un coefficient de rugosité de Manning de $0.009 \text{ s/m}^{1/3}$. Les profils de la surface d'eau calculés sont comparés avec les données de mesure le long de la ligne centrale. L'emplacement du ressaut et le profil de la surface libre sont ainsi prévues avec précision en utilisant le modèle unidimensionnel. Le débit est conservé en utilisant les deux limiteurs de pente. On observe une petite déviation dans le débit dans la région du passage du régime fluvial au régime torrentiel.

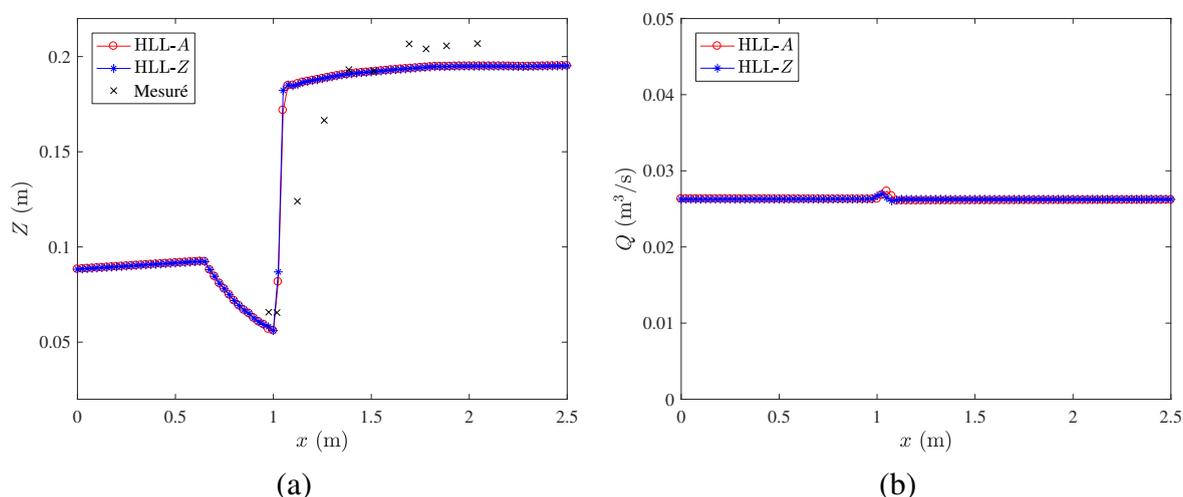


FIGURE 5.14 – Ressaut hydraulique dans un canal divergent, (a) comparaison des hauteurs d'eau, (b) débit simulé.

5.4.4 Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent

Une série d'expériences ont été menées dans un canal rectangulaire convergent/divergent par *Bellos et al.* (1992) pour examiner le mouvement d'une onde de crue bidimensionnelle après une rupture de barrage instantanée. La géométrie du canal utilisé dans les expériences est donnée dans le tableau 5.2 et est représentée sur la figure 5.15. Pour modéliser le barrage, une vanne a été installée à l'emplacement où la largeur dans le canal est minimale ($x = 8.5$ m). Les auteurs ont mené diverses expériences avec des pentes de lit différentes dans des conditions à fond mouillé et sec. Dans ce test, les débits de rupture de barrage, pour les deux cas (fond mouillé et sec), en aval du barrage, sur un lit horizontal, sont simulés. Dans les deux tests, la profondeur d'eau en amont du barrage est fixée à 0.3 m. La profondeur d'eau est 0.101 m en aval du barrage pour un fond mouillé pour imiter le dispositif expérimental. Le barrage est enlevé instantanément. Le coefficient de rugosité de Manning de $0.012 \text{ s/m}^{1/3}$ est utilisé dans le test. Pour les deux cas, 212 éléments de 0.1 m sont utilisés. Les pas de temps de 0.003 s et 0.0002 s sont utilisés, respectivement, pour le cas d'un fond mouillé et un fond sec. Les solutions numériques sont comparées avec les données de mesure aux points de jauge P_1 ($x = 0$ m), P_2 ($x = 4.5$ m), P_3 ($x = 8.5$ m), P_4 ($x = 13.5$ m), et P_5 ($x = 18.5$ m).

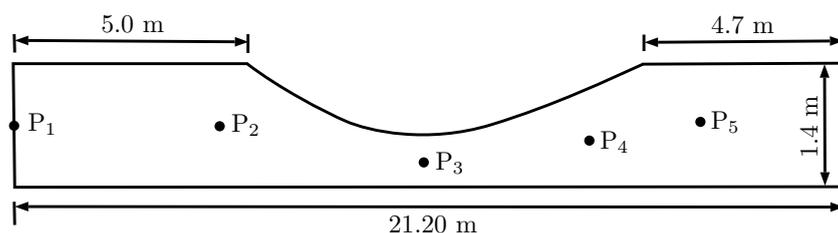


FIGURE 5.15 – Géométrie du canal divergent / convergent.

Pour le cas de rupture de barrage sur un fond initialement sec, les hydrogrammes simulées et mesurées aux points de jauge P_1 et P_5 sont présentés sur la figure 5.16. Les résultats numériques

TABLE 5.2 – Variation du largeur du canal convergent /divergent.

x (m)	0.0	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5
b (m)	1.40	1.40	1.22	1.05	0.90	0.77	0.67	0.62	0.60
x (m)	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0
b (m)	0.61	0.62	0.64	0.68	0.75	0.82	0.91	0.99	1.08
x (m)	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5	18.0	21.2
b (m)	1.15	1.24	1.28	1.33	1.37	1.39	1.40	1.40	1.40

concordent très bien avec les données de mesure. L'hydrogramme simulé au point P_5 est plus élevé que les données de mesure. Cela est peut être due au fait que la rupture est supposée instantanée, alors que dans la réalité, l'élimination de la vanne prend un certain temps.

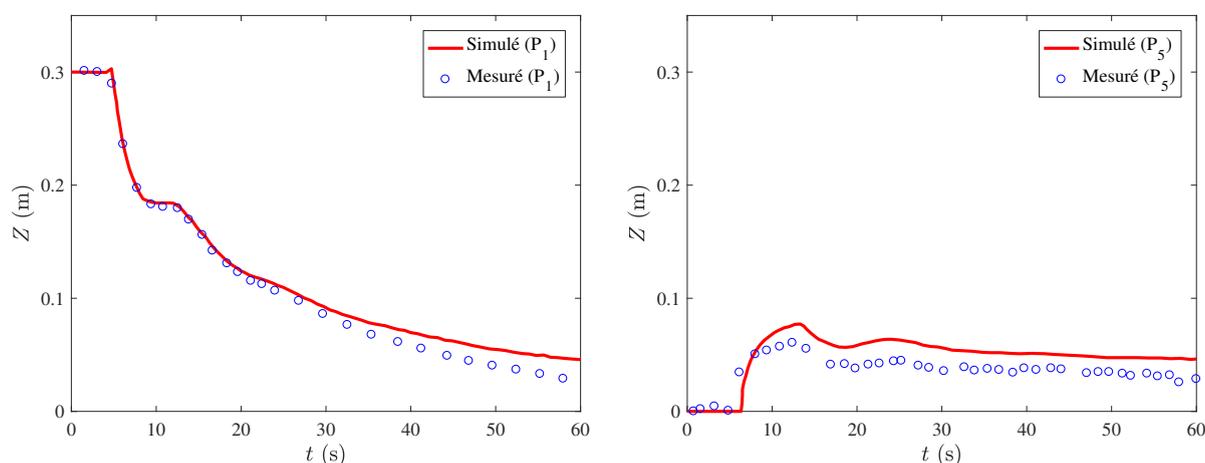


FIGURE 5.16 – Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent sur un fond sec : Comparaison entre le niveau d'eau simulé et mesuré aux stations P_1 et P_5 .

Pour le cas de rupture de barrage sur un fond mouillé, un déversoir a été installé à l'extrémité aval du canal. La configuration du déversoir à l'extrémité aval n'est pas disponible. Comme la condition à la limite aval est indispensable à la simulation numérique, ce qui peut influe sur l'exactitude de la solution numérique. Cependant, on a supposé l'existence, à l'extrémité aval du canal, d'un déversoir rectangulaire à paroi mince. La relation de débit (la formule de Bazin) est donnée par l'équation :

$$Q = \frac{2}{3} C_d b (2g)^{2/3} (Z - 0.101)^{1.5} \quad (5.25)$$

où le coefficient de débit (C_d) est pris égale à 0.62, et la longueur du déversoir est égale à la largeur de canal ($b = 1.4$ m).

Les résultats simulés et mesurés pour les cinq points de jauge sont présentés sur la figure 5.17. Les hydrogrammes simulés concordent bien avec les hydrogrammes mesurés. Les différences proviennent principalement de l'effet de la structure de déversoir inconnu.

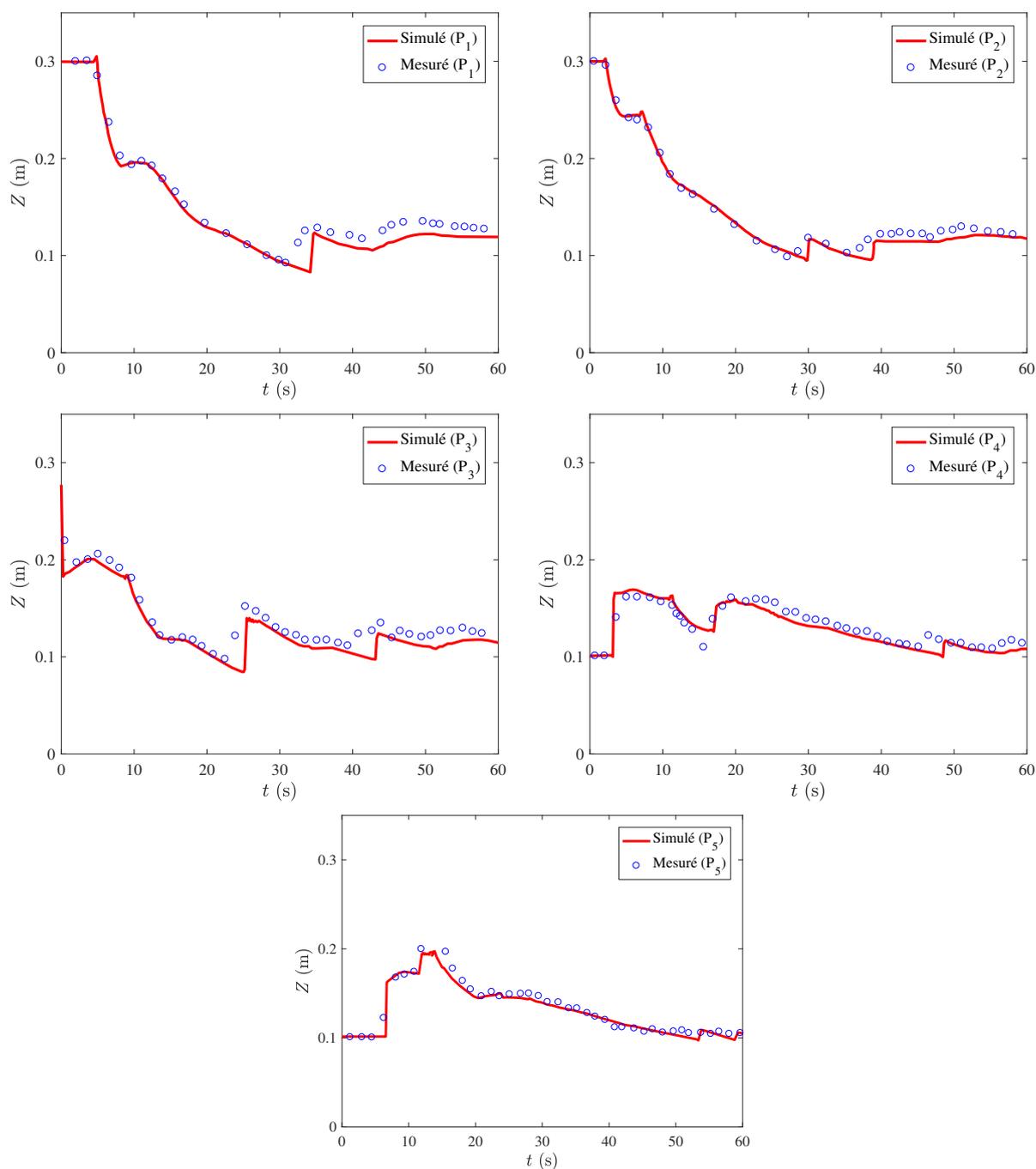


FIGURE 5.17 – Rupture de barrage dans un canal convergent /divergent sur un fond mouillé : Comparaison entre le niveau d’eau simulé et mesuré aux stations P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P_5 .

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode GD est appliquée à la modélisation unidimensionnelle des écoulements à surface libre dans les canaux naturels. Nous avons détaillé la méthode GD utilisée pour résoudre ces équations. La méthode de traitement des lits secs est aussi présentée. Nous avons validé et comparé le schéma numérique décrits et ceci sur quatre problèmes hy-

drauliques transitoires et stationnaires. Dans les deux premiers tests les résultats numériques ont été comparés avec les solution analytiques tandis que dans les deux derniers tests les résultats numériques ont été comparés avec des mesures expérimentales. Les solutions numériques de profondeur d'eau et de débit sont en bon accord avec les solutions exactes ou avec les solutions expérimentales.

Chapitre 6

Simulation des écoulements bidimensionnels

Dans ce chapitre, la méthode de Galerkin discontinue (GD) est appliquée à la simulation des écoulements à surface libre en deux dimensions dans les canaux naturels. On donne dans un premier temps, les équations de *Saint-Venant* en deux dimensions. Différents traitements des termes de flux numériques sont discutés. On décrit, aussi, la méthode de traitement du terme source et le limiteur de pente utilisé pour stabiliser le schéma numérique. Ce schéma numérique est appliqué aux divers problèmes d'écoulements à surface libre. Les solutions numériques sont comparées avec des solutions analytiques ou avec des mesures en laboratoire.

6.1 Équations d'écoulements bidimensionnels en eaux peu profondes

Les équations d'écoulements bidimensionnels de *Saint-Venant* présentées au chapitre 2 écrites sous une formulation "débit-dénivellation" sont données par les équations ci-dessous.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.93)$$

avec

$$\mathbf{U} = (h, q_x, q_y)^T \quad (2.96a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = (q_x, q_x^2/h, q_x q_y/h)^T \quad (2.96b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (q_y, q_x q_y/h, q_y^2/h)^T \quad (2.96c)$$

$$\mathbf{S} = \left(0, -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - gh S_{fx}, -gh \frac{\partial Z}{\partial y} - gh S_{fy} \right)^T \quad (2.96d)$$

6.2 Flux numérique

La formulation GD est appliquée à chaque équation du système. Pour les équations d'écoulement en eaux peu profondes, le flux numérique peut être calculée avec le solveur HLL, le solveur HLLC ou le solveur de Roe. Le solveur HLL (*Fraccarollo et Toro, 1995*) et HLLC (*Eskilsson et Sherwin, 2004*) sont respectivement donnés par les équations ci-dessous :

$$\mathbf{F}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{F}_G \cdot \mathbf{n} & \text{si } S_G \geq 0 \\ \frac{(S_D \mathbf{F}_G - S_G \mathbf{F}_D) \cdot \mathbf{n} + S_G S_D (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G)}{S_D - S_G} & \text{si } S_G < 0 < S_D \\ \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{n} & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{F}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}_G) \cdot \mathbf{n} & \text{si } S_G \geq 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_G) \cdot \mathbf{n} + S_G (\mathbf{U}_{*G} - \mathbf{U}_G) & \text{si } S_G < 0 < S_* \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_D) \cdot \mathbf{n} + S_D (\mathbf{U}_{*D} - \mathbf{U}_D) & \text{si } S_* < 0 < S_D \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_D) \cdot \mathbf{n} & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ est la normale extérieure unitaire à la limite d'un élément

Introduisons la matrice de rotation \mathbf{T} et sa matrice inverse comme le montre l'équation :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ 0 & -n_y & n_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Le flux peut être écrit sous la forme donnée par l'équation :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}n_x + \mathbf{G}n_y = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{T}\mathbf{U}) \quad (6.5)$$

En définissons :

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}\mathbf{U} = (h, hu_n, hu_t)^T \quad (6.6)$$

où $u_n = u_{nx} + v_{ny}$ and $u_t = v_{nx} - u_{ny}$ sont respectivement la vitesse normale et tangentielle à l'interface de l'élément, le flux numérique $\hat{\mathbf{F}}$ peut être obtenue par l'évaluation des flux numérique $\hat{\mathbf{E}}$ en utilisant :

$$\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{V}) \quad (6.7)$$

Les vecteurs \mathbf{V} et $\mathbf{E}(\mathbf{V})$ sont donnés par l'équation :

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q_x n_x + q_y n_y \\ -q_x n_y + q_y n_x \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} q_x n_x + q_y n_y \\ \frac{(q_x n_x + q_y n_y)^2}{h} \\ \frac{(q_x n_x + q_y n_y)(-q_x n_y + q_y n_x)}{h} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Les solveurs HLL et HLLC seront évalués par les équations ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{E}}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{V}_G) & \text{si } 0 \leq S_G \\ \frac{S_D \mathbf{E}(\mathbf{V}_G) - S_G \mathbf{E}(\mathbf{V}_D) + S_G S_D (\mathbf{V}_D - \mathbf{V}_G)}{S_D - S_G} & \text{si } S_G \leq 0 \leq S_D \\ \mathbf{E}(\mathbf{V}_D) & \text{si } 0 \geq S_D \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{V}_G) & \text{si } S_G \geq 0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{V}_G) + S_G (\mathbf{V}_{*G} - \mathbf{V}_G) & \text{si } S_G \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{E}(\mathbf{V}_D) + S_D (\mathbf{V}_{*D} - \mathbf{V}_D) & \text{si } S_* \leq 0 \leq S_D \\ \mathbf{E}(\mathbf{V}_D) & \text{si } S_D \leq 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Les vitesses d'ondes et les variables intermédiaires sont donnés par les équations ci-dessous :

$$S_G = \min \left(u_{nG} - \sqrt{gh_G}, u_n^* - \sqrt{gh^*} \right) \quad (6.11)$$

$$S_D = \max \left(u_{nD} - \sqrt{gh_D}, u_n^* + \sqrt{gh^*} \right) \quad (6.12)$$

$$S_* = \frac{S_G h_D (u_{nD} - S_D) - S_D h_G (u_{nG} - S_G)}{h_D (u_{nD} - S_D) - h_G (u_{nG} - S_G)} \quad (6.13)$$

$$u_n^* = \frac{1}{2} (u_{nG} + u_{nD}) + \sqrt{gh_G} - \sqrt{gh_D} \quad (6.14)$$

$$\sqrt{gh^*} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{gh_G} + \sqrt{gh_D} \right) + \frac{1}{4} (u_{nG} - u_{nD}) \quad (6.15)$$

$$\mathbf{V}_{*(G,D)} = h_{(G,D)} \left(\frac{S_{(G,D)} - u_{n(G,D)}}{S_{(G,D)} - S_*} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ u_{t(G,D)} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Les quantités $\mathbf{E}(\mathbf{V}_G)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{V}_D)$ représentent des valeurs à gauche et à droite de la limite de l'élément se déplaçant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les valeurs $\mathbf{E}(\mathbf{V}_G)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{V}_D)$ aux limites sont calculées sur la base des valeurs moyennes de h , q_x et q_y aux nœuds limites correspondantes. Une seule fois est évalué, le flux numérique peut alors être calculé en utilisant l'équation 6.7. L'équation 6.2 peut être utilisée directement pour évaluer le flux numérique en utilisant le solveur HLL, où les vitesses d'ondes sont données par les équations 6.11 et 6.12.

Le solveur de Roe pour les équations 2D d'écoulement en eaux peu profondes (*Wang et Liu, 2000*) est donné par l'équation :

$$\tilde{\mathbf{F}}^{Roe} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \left| \tilde{\lambda}_i \right| \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (6.17)$$

Les paramètres du solveur de Roe sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta q_x n_x + \Delta q_y n_y - (\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y) \Delta h] \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{1}{\tilde{c}} [(\Delta q_y - \tilde{v} \Delta h) n_x - (\Delta q_x - \tilde{u} \Delta h) n_y] \\ \tilde{\alpha}_3 &= \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta q_x n_x + \Delta q_y n_y - (\tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y) \Delta h]\end{aligned}\quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1 &= \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y - \tilde{c} \\ \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y + \tilde{c}\end{aligned}\quad (6.19)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c} n_x \end{pmatrix}; \tilde{\mathbf{K}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c} n_y \\ \tilde{c} n_x \end{pmatrix}; \tilde{\mathbf{K}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c} n_x \end{pmatrix}\quad (6.20)$$

$$\tilde{u} = \frac{u_G \sqrt{h_G} + u_D \sqrt{h_D}}{(\sqrt{h_G} + \sqrt{h_D})}; \tilde{v} = \frac{v_G \sqrt{h_G} + v_D \sqrt{h_D}}{(\sqrt{h_G} + \sqrt{h_D})}; \tilde{c} = \sqrt{\frac{g}{2} (h_G + h_D)}\quad (6.21)$$

Le flux numérique HLLC est adopté dans les tests suivants, sauf indication contraire.

6.3 Traitement du fond sec

Pour les problèmes de fonds secs, le flux numérique est évalué par le biais du solveur HLL à deux ondes. Les vitesses d'onde pour les frontières droite ou gauche sèches sont données, respectivement, par les équations suivantes :

$$S_G = u_{nG} - \sqrt{gh_G}; S_D = u_{nD} + 2\sqrt{gh_D}\quad (6.22)$$

$$S_G = u_{nD} - 2\sqrt{gh_D}; S_D = u_{nD} + \sqrt{gh_D}\quad (6.23)$$

On adopte ici un traitement du fond sec similaire au cas unidimensionnel. Pour un lit initialement sec, une profondeur suffisamment faible, h_{dry} , (par exemple, 10^{-8}) et une vitesse nulle sont imposées au niveau des nœuds secs (*Lai, 2012; Lai et Khan, 2012c; Ying et al., 2004*). Après chaque pas de temps, l'ensemble du domaine est testé pour la profondeur d'eau. Si la profondeur d'eau à un nœud est inférieure à h_{dry} , elle prend la valeur de h_{dry} et le débit d'écoulement est fixé à zéro. Pour le flux à la frontière d'un élément, si la profondeur d'eau à un côté est plus grande que h_{dry} et la profondeur d'eau à l'autre côté est inférieure ou égale à h_{dry} , le flux numérique est calculé avec les équations 6.9, 6.22 et 6.23. Si la profondeur d'eau aux deux côtés est inférieure ou égale à h_{dry} , le flux numérique de l'équation 6.9 sera nul parce que le débit d'écoulement est nul. Le flux de masse et de quantité de mouvement seront conservés. Cette approche assure que la profondeur d'eau reste toujours positive et peut évaluer avec précision les éléments secs.

6.4 Traitement du terme source

Pour utiliser le solveur HLLC avec le système d'équations 2.96, les vitesses d'onde donnée par les équations 6.11 à 6.13 doivent être utilisées. En utilisant la notation pour les éléments présentés sur la figure 6.1, le calcul des pentes de la surface libre du vecteur source peut être déterminée avec le théorème de Green (*Ying et al., 2009*) comme indiqué par les équations :

$$\Omega_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = \oint_{\Gamma_0} Z dy = \sum_{k=1}^3 Z_{0k} \Delta y_k = Z_{01} (y_c - y_b) + Z_{02} (y_a - y_c) + Z_{03} (y_b - y_a) \quad (6.24)$$

$$-\Omega_0 \frac{\partial Z}{\partial y} = \oint_{\Gamma_0} Z dx = \sum_{k=1}^3 Z_{0k} \Delta x_k = Z_{01} (x_c - x_b) + Z_{02} (x_a - x_c) + Z_{03} (x_b - x_a) \quad (6.25)$$

Les termes de la pente de la surface d'eau donnés par les équations (6.24) et (6.25) sont traités comme des constantes dans l'évaluation des intégrales.

Dans ces équations, Z_{0k} est le niveau d'eau aux limites des éléments 0 et k, et Ω_0 est l'aire de l'élément 0. Le niveau d'eau, Z_{0k} , peut être déterminé en utilisant les élévations de la surface d'eau des éléments 0 et k. On calcul, tout d'abord, les élévations moyennes de surface d'eau au centre de tous les éléments. Les élévations de la surface d'eau aux frontières sont interpolées en utilisant une pondération inverse à la distance. Cette discrétisation évite de générer des courants non-physiques de topographie du lit si la surface d'eau dans l'élément principal et l'élément entourant est la même. Les résultats numériques montrent que ce traitement du terme source est précis.

La propriété «bien équilibré» dans le domaine mouillé est assurée avec le système d'équations 2.96. L'eau stagnant aux zones partiellement mouillées peut être facilement réalisée en fixant le terme source \mathbf{S} à zéro dans les éléments secs et les éléments partiellement mouillés. En outre, le limiteur de pente n'est pas applicable aux éléments dont les vitesses, aux trois nœuds, sont nulles. Bien que le terme source dans des éléments partiellement mouillés soit forcément pris égal à zéro, les tests numériques pour les problèmes de rupture de barrage montrent que les ondes de crue sont, tout de même, modélisées avec précision.

6.5 Méthode de limiteur de pente

Le limiteur de pente et l'intégration temporelle TVD de type Runge–Kutta sont utilisés ici pour éliminer les oscillations numériques parasites générées à proximité de discontinuités et de gradients élevé et pour préserver la propriété TVD. *Jawahar et Kamath (2000)* présentent une procédure de limitation de pente pour leur solveur de volumes finis. Il est en fait de type van Albada et est différentiable. Leurs résultats numériques montrent d'excellentes performances pour éliminer les oscillations sans influencer la convergence. *Tu et Aliabadi (2005)* ont légèrement modifié le limiteur de *Jawahar et Kamath* pour répondre aux besoins du solveur GD pour les écoulements compressibles. Cette procédure adoptée dans ce travail a été également utilisée par plusieurs chercheurs (par exemple *Lai (2012)*; *Lai et Khan (2012c)*; *Lee (2014)*; *Yoon et Kang*

(2004); Li (2008); Gokpi (2013)) dans leurs modèles bidimensionnels. Le processus de limitation de pente est très approprié pour les maillages triangulaires. Les points suivants résument les étapes de la procédure d'application de ce limiteur de pente.

Considérons par exemple l'élément triangulaire abc dont le centre est noté 0 et les sommets sont notés a b et c (figure 6.1).

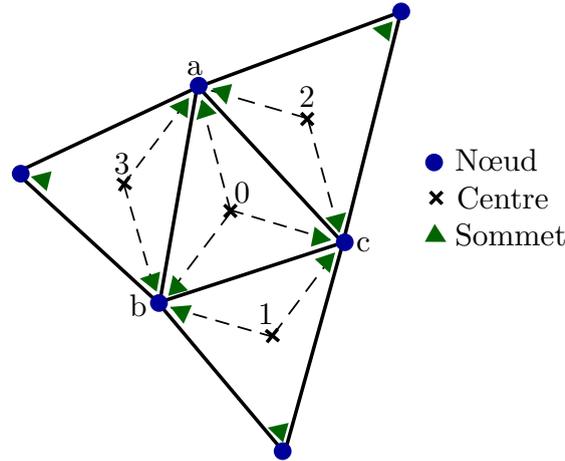


FIGURE 6.1 – Discrétisation en utilisant des éléments triangulaires dans la méthode GD.

Dans la première étape, les gradients de toute variable, $U \in \mathbf{U}$, dans un élément 0, noté $(\partial U / \partial x)_{a-b}$ et $(\partial U / \partial y)_{a-b}$ à travers l'interface a-b de l'élément 0 sont calculés en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_a - x_b & y_a - y_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\partial U / \partial x)_{a-b} \\ (\partial U / \partial y)_{a-b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_3 - U_0 \\ U_a - U_b \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

où $U_0 (U \in \mathbf{U})$ est la valeur moyenne de la solution sur l'élément abc associé au centre de l'élément. Cette valeur est obtenue en calculant la moyenne arithmétique des valeurs nodales. Les valeurs de U_a et U_b sont obtenus en faisant la moyenne arithmétique des valeurs nodales des éléments partageant ces nœuds. (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) sont, respectivement, les coordonnées des centres de gravité des éléments 0, 1, 2 et 3. Les gradients à travers l'interface b-c et c-a sont calculés de la même manière. Des éléments imaginaires ont été utilisés pour évaluer les gradients à travers les interfaces frontalières.

Dans la deuxième étape, le gradient non limité sur l'élément 0 est construit à partir des gradients de ses interfaces pondérés par l'aire correspondante telle que :

$$(\nabla U)_0 = \frac{A_{0a3b}(\nabla U)_{a-b} + A_{0b1c}(\nabla U)_{b-c} + A_{0c2a}(\nabla U)_{c-a}}{A_{0a3b} + A_{0b1c} + A_{0c2a}} \quad (6.27)$$

où ∇U est le gradient de U et A_{0a3b} , A_{0b1c} et A_{0c2a} sont, respectivement, les aires des quadrilatères 0a3b, 0b1c et 0c2a.

Une fois le gradient non limité calculé sur chaque élément (l'élément courant 0 et ses voisins), on calcule, dans la troisième étape, le gradient limité $(\nabla U)_0^l$ sur l'élément 0 par l'expres-

sion suivante :

$$(\nabla U)_0^l = w_1(\nabla U)_1 + w_2(\nabla U)_2 + w_3(\nabla U)_3 \quad (6.28)$$

où les poids w_1, w_2, w_3 sont donnés par :

$$w_1 = \frac{g_2 g_3 + \varepsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\varepsilon}; w_2 = \frac{g_1 g_3 + \varepsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\varepsilon}; w_3 = \frac{g_1 g_2 + \varepsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\varepsilon} \quad (6.29)$$

où $g_1, g_2,$ et g_3 sont choisis étant les carrés en norme L_2 des gradients non limités sur les éléments voisins 1, 2 et 3 :

$$g_1 = \|(\nabla U)_1\|^2, g_2 = \|(\nabla U)_2\|^2, g_3 = \|(\nabla U)_3\|^2 \quad (6.30)$$

ε est une petite valeur introduite pour éviter l'obtention de valeur indéterminée et prise égale à 10^{-10} (Tu et Aliabadi, 2005).

Finalement, la variable conservative limitée (h, uh, vh) aux sommets de chaque élément est évaluée. Les gradients numériquement limité dans un chaque élément de l'équation 6.28 sont utilisés pour reconstruire la solution locale aux sommets de chaque élément. La reconstruction doit satisfaire deux conditions :

1. Les gradients limités, dans chaque direction (pour un élément triangulaire, dans la direction x et y) devraient être les mêmes avec les gradients obtenus par les fonctions de forme (l'équation 6.31).
2. Les valeurs aux centres de gravité obtenues par la moyenne des valeurs aux sommets doivent être les mêmes (équation 6.32).

Autrement dit, étant donné que la reconstruction est unique pour les éléments triangulaires linéaires, le système de trois équations suivant doit être résolu pour chaque élément pour déterminer les valeurs aux sommets.

$$\sum_{j=1}^3 U_j^l \frac{\partial N_j}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^l; \sum_{j=1}^3 U_j^l \frac{\partial N_j}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^l \quad (6.31)$$

$$\sum_{j=1}^3 U_j^l = 3U \quad (6.32)$$

où U_j^l représente la solution reconstituée au $j^{\text{ème}}$ sommet d'un élément (Autrement dit, U_1^l, U_1^2 et U_1^3).

Ces quatre étapes sont répétées dans chaque étape de l'application des limiteurs de pente.

6.6 Tests numériques

Dans cette section, plusieurs tests sur des canaux avec des lits horizontaux et irréguliers, sont effectués afin de vérifier le schéma numérique. Les termes de l'élévation de lit et de la force de pression sont combinés pour obtenir le terme d'élévation de la surface d'eau. Le terme

d'élévation de la surface d'eau fait partie du terme source.

6.6.1 Ressaut hydraulique oblique

Lorsqu'un écoulement torrentiel passe dans un canal de largeur décroissante, la paroi du canal dévié génère une onde stationnaire oblique avec un angle β accompagnant une augmentation brusque de la profondeur d'eau. Ce phénomène est appelé "ressaut hydraulique oblique" ([Chow, 1959](#)), pour lequel une solution analytique est disponible. Ce problème est utilisé ici pour vérifier la stabilité et la capacité des différents schémas numériques à gérer les flux discontinus à grandes vitesses.

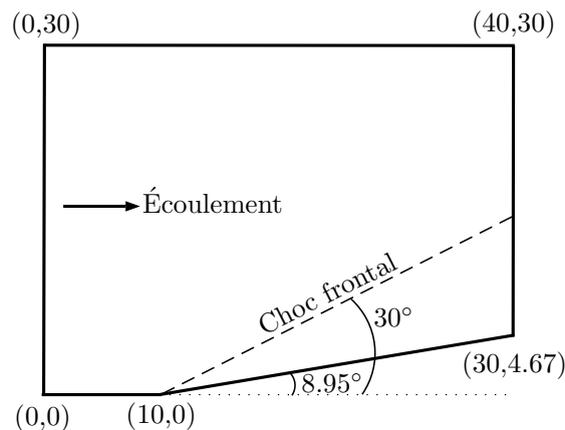


FIGURE 6.2 – Définition du problème du ressaut hydraulique oblique.

Ici, nous utilisons les mêmes conditions de simulation que ceux donnés par [Alcrudo et García-Navarro \(1993\)](#); [Anastasiou et Chan \(1997\)](#); [Lai et al. \(2005\)](#); [Wang et Liu \(2000\)](#); [Benkhaldoun et al. \(2010\)](#); [Ghostine et al. \(2009\)](#). Le domaine d'écoulement est de 40 m x 30 m dans le plan avec un lit horizontal et sans frottement. Le flux amont torrentiel est dirigé de gauche vers la droite et présente une profondeur uniforme de 1 m et une vitesse de 8.57 m/s correspondant à un nombre de Froude d'environ 2.74. À une distance de 10 m de la limite d'entrée, le mur sud du canal est incliné vers l'intérieur à un angle de 8.95° par rapport à l'axe des x provoquant la formation d'un ressaut hydraulique (voir Fig. 6.2). Ce problème a une solution analytique (voir [Hager et al. \(1994\)](#)), au moyen duquel le ressaut est orientée dans le domaine à un angle de 30° par rapport à l'axe des x . La profondeur de l'eau augmente brutalement de 1 à 1.5 m à travers le ressaut et $|\vec{u}|=7.9556$ m/s correspondant à un nombre de Froude d'environ 2.074.

Les conditions d'écoulement torrentiel amont mentionnées ci-dessus sont imposées à la limite amont du canal. Une sortie libre est imposée à l'aval et une vitesse normale égale à 0 est imposée sur les murs du canal. La simulation est réalisée sur un grille triangulaire de Delaunay avec un nombre de Courant de 0.5.

Afin d'exposer la performance de la procédure d'adaptation de maillages, nous affichons sur la figure 6.3 les résultats obtenus en utilisant un maillage adaptatif, un maillage fixe plus fin et un maillage fixe grossier. Les statistiques de ces maillages sont répertoriées dans le tableau 6.1. On

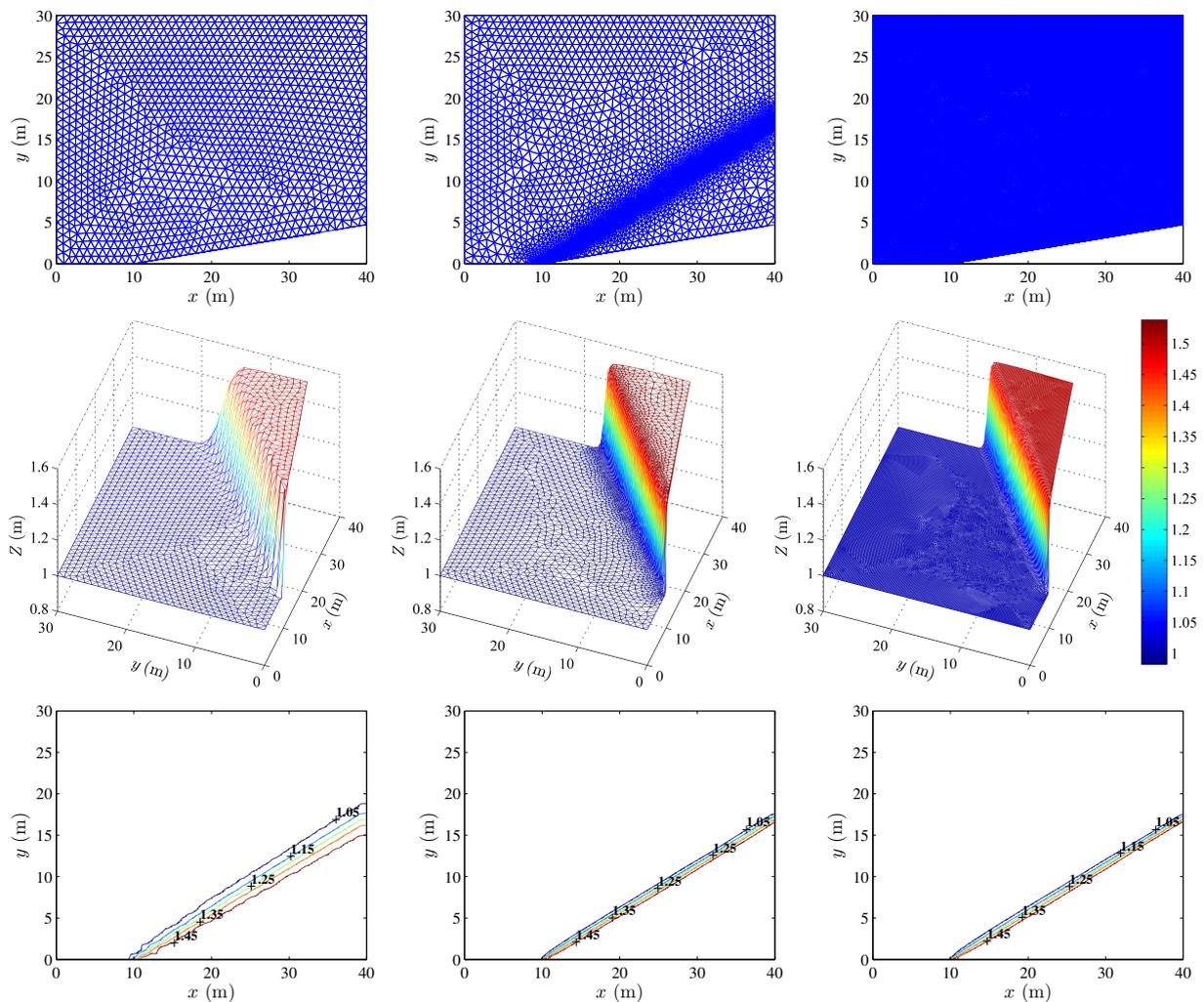


FIGURE 6.3 – Ressaut hydraulique oblique : Maillages (premier ligne), vues 3D de la surface d’eau (deuxième rangée), et les tracés de contours des profondeurs d’eau (troisième ligne). De gauche à droite maillage grossier, maillage adaptatif et maillage fin.

remarque que les résultats calculés sur un maillage adaptatif se comparent bien qualitativement avec ceux obtenus sur un maillage fixe fin. À noter que dans le cas d’un maillage adaptatif, le nombre d’éléments est inférieure à un sixième du nombre d’éléments dans le cas de maillage fixe plus fin. Cela se traduit par une réduction significative des coûts de calcul. Comme le montre la figure 6.3, le front de choc induit est bien capturé dans toutes les procédures d’adaptation de maillage. Il est clair que la diffusion numérique est plus prononcée dans les résultats sur un maillage grossier que dans les autres résultats. Pour quantifier davantage les résultats de ce test, nous présentons dans le tableau 6.1, les profondeurs d’eau et les vitesses exactes et calculées.

Les comparaisons entre les résultats calculés et la solution analytique du profil de la surface d’eau et de la vitesse le long de la ligne de coupe $y = 10$ m en utilisant différentes procédures d’adaptation de maillage est présenté sur la figure 6.4. Dans les conditions d’écoulement actuelles, il est clair que le maillage fin et le maillage adaptatif produisent de meilleurs résultats en comparaison avec la solution exacte. Les résultats sur un maillage grossier sont plus dissipa-

TABLE 6.1 – Performance de la méthode GD en utilisant un maillage grossier, un maillage adaptatif et un maillage fin pour le test de ressaut hydraulique oblique.

Solution	Nombre des éléments	Nombre des nœuds	Profondeur h (m)	Vitesse $ \vec{u} $ (m/s)
Avec un maillage grossier	2567	1352	1.5105	7.9616
Avec un maillage adaptatif	6034	3102	1.5077	7.9588
Avec un maillage fin	39517	20083	1.5042	7.9570
Exact	-	-	1.5000	7.9556

tive.

Les comparaisons entre les résultats simulés avec différentes fonctions de flux et les solutions analytiques le long de la ligne de la ligne de coupe $y = 10$ m sont présentées sur la figure 6.5. Les solutions calculées sont en bon accord avec les solutions analytiques. Les résultats obtenus avec les flux HLL, Roe et HLLC sont identiques.

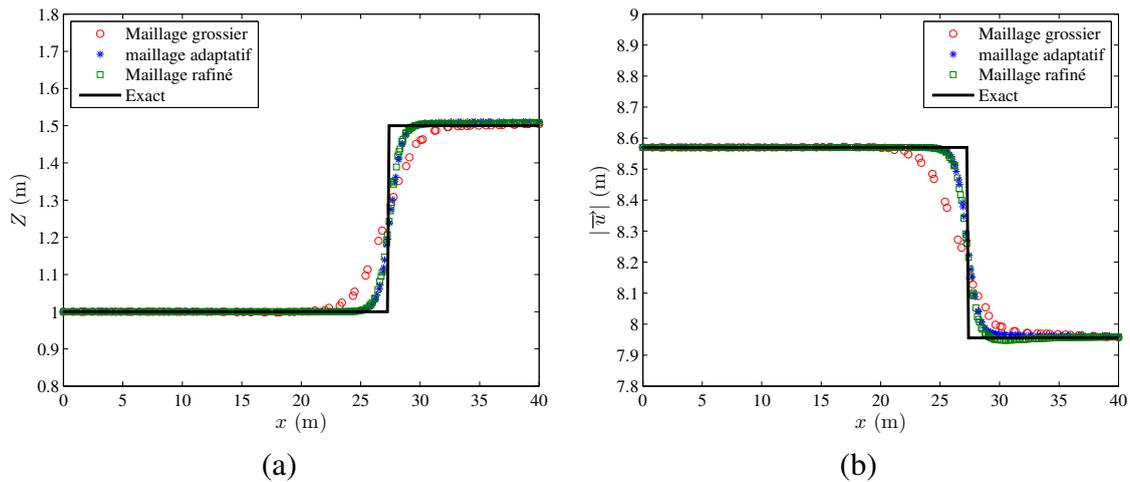


FIGURE 6.4 – Ressaut hydraulique oblique : Comparaison des profils de la surface d'eau (a) et les profils de vitesse (b) le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différentes procédures d'adaptation de maillage.

6.6.2 Onde de choc dans une contraction de canal

Le schéma GD est utilisé pour simuler l'onde de choc supercritique stable dans une contraction de canal. La solution analytique de ce problème est donnée par *Ippen et Dawson (1951)*. Dans la figure 6.6 on a présenté la vue en plan de l'onde de choc dans la contraction du canal. Dans cette figure, L_{ab} est la longueur de la contraction, α_2 est l'angle de déviation de la paroi du canal, β_2 et β_3 sont les angles du front du choc. b_1 et b_3 sont, respectivement, la largeur à l'entrée et à la sortie du canal. Les vitesses d'écoulement dans les régions 1, 2 et 3 sont, respectivement V_1 , V_2 , et V_3 . *Ippen et Dawson (1951)* ont montré qu'un rapport approprié de b_1/b_3

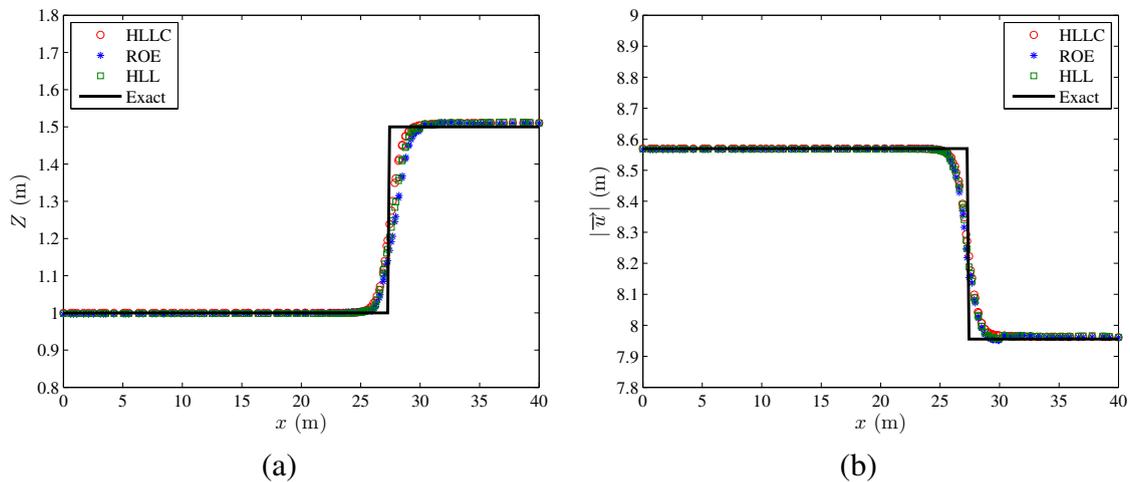


FIGURE 6.5 – Ressaut hydraulique oblique : Comparaison des profils de la surface d'eau (a) et les profils de vitesse (b) le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différents flux numériques.

pourrait minimiser les perturbations dans la région 3 et limiter les ondes de choc stagnantes au sein de la partie contractée.

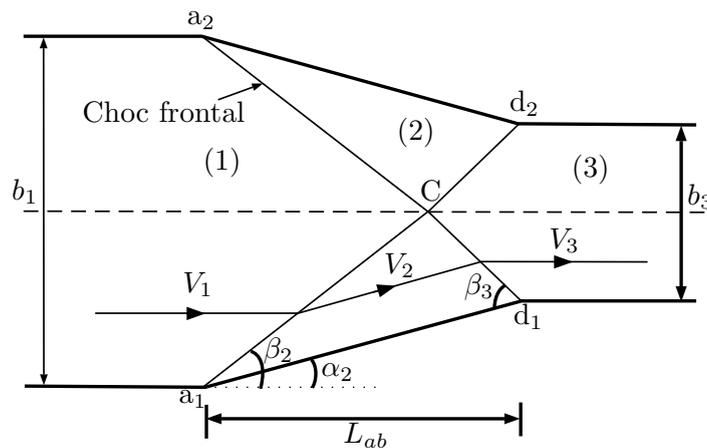


FIGURE 6.6 – Vue en plan de la construction dans un canal rectangulaire.

Dans ce qui suit, on adopte la contraction du canal proposé par [Lin et al. \(2005\)](#). La géométrie et le maillage du calcul de canal sont présentés à la figure 6.7. La largeur du canal à l'extrémité amont est $b_1 = 20$ m et la largeur à l'extrémité aval est $b_3 = 10.548$ m. L'angle de déviation de la paroi est $\alpha_2 = 12^\circ$, et la longueur de la contraction est $L_{ab} = 22.234$ m. Pour les conditions aux limites, nous imposons une profondeur d'eau de 1 m, une vitesse longitudinale de 8.4566 m/s, et une vitesse transversale nulle à l'amont du canal ce qui correspond à un nombre de Froude égal à 2.7. Aucune condition aux limites n'est appliquée à l'extrémité aval du canal. La solution exacte est de telle sorte que les angles des fronts de choc sont $\beta_2 = 33.69^\circ$ et $\beta_3 = 48.10^\circ$, tandis que les profondeurs d'eau dans la région 2 et la région 3 sont, respectivement, 1.868 m et 2.562 m.

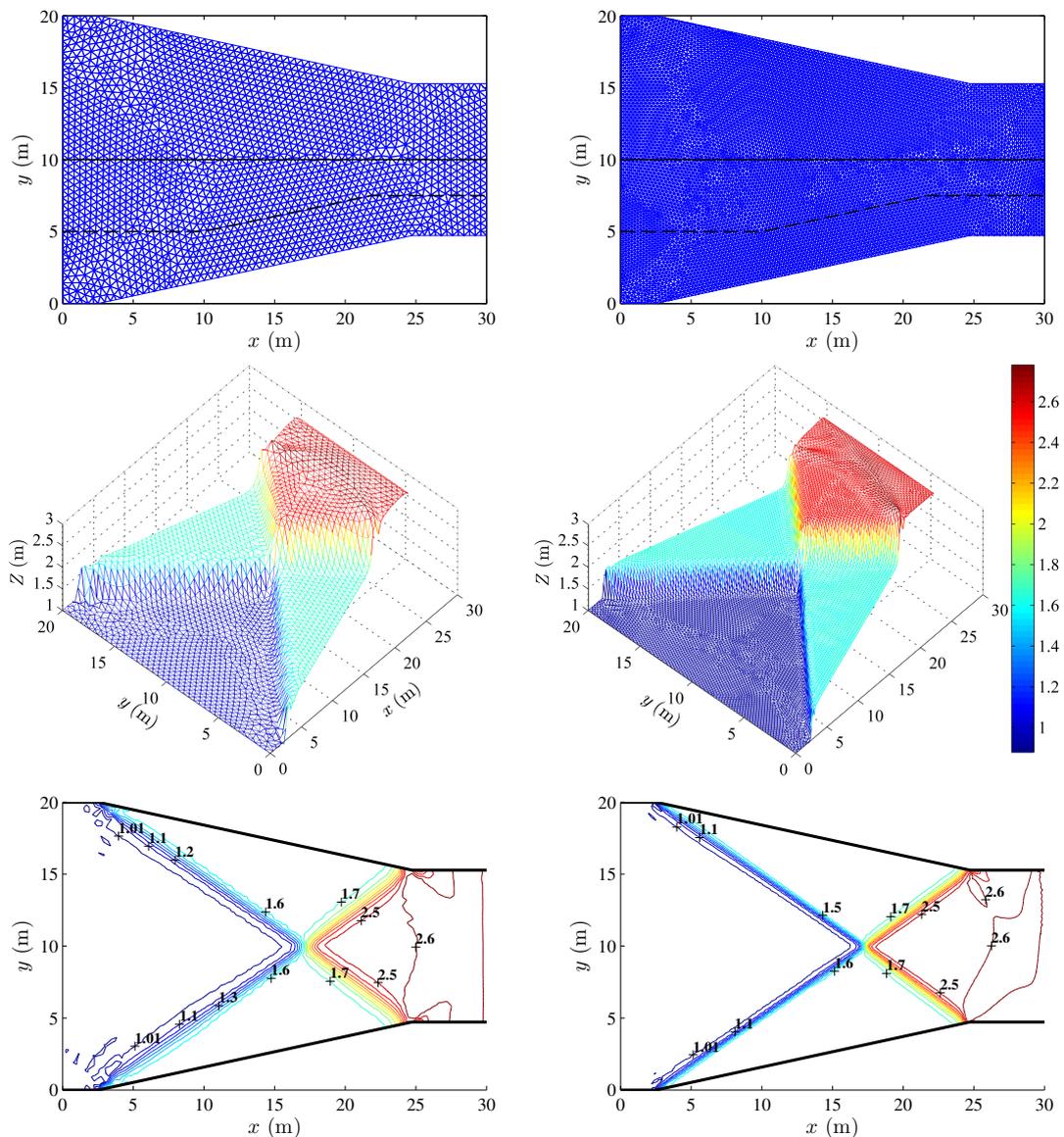


FIGURE 6.7 – Onde de choc dans une contraction de canal : Maillages (premier ligne), vues 3D de la surface d'eau (deuxième ligne), et les tracés de contours des profondeurs d'eau (troisième ligne). De gauche à droite maillage grossier et maillage fin.

Les solutions d'écoulement permanent pour la profondeur d'eau sont présentées sur les figures 6.7 avec un maillage grossier (4094 éléments) et un maillage raffiné (16188 éléments). La figures 6.8 montrent une comparaison entre la solution exacte et la profondeur d'eau simulée le long de la ligne pointillée et la ligne continue (voir figure 6.7). La comparaison montre que le schéma numérique donne des résultats satisfaisants même avec un maillage grossier. En utilisant un maillage raffiné on obtient une meilleure résolution au choc et les oscillations sont plus faibles après le choc. La figure 6.9 compare la solution analytique et les solutions numériques le long de deux droites en trait plein et en pointillé en utilisant différents flux numériques. Les résultats montrent que les différentes fonctions de flux numériques offrent une précision similaire. Les ondes de choc sont capturées avec précision par le schéma numérique.

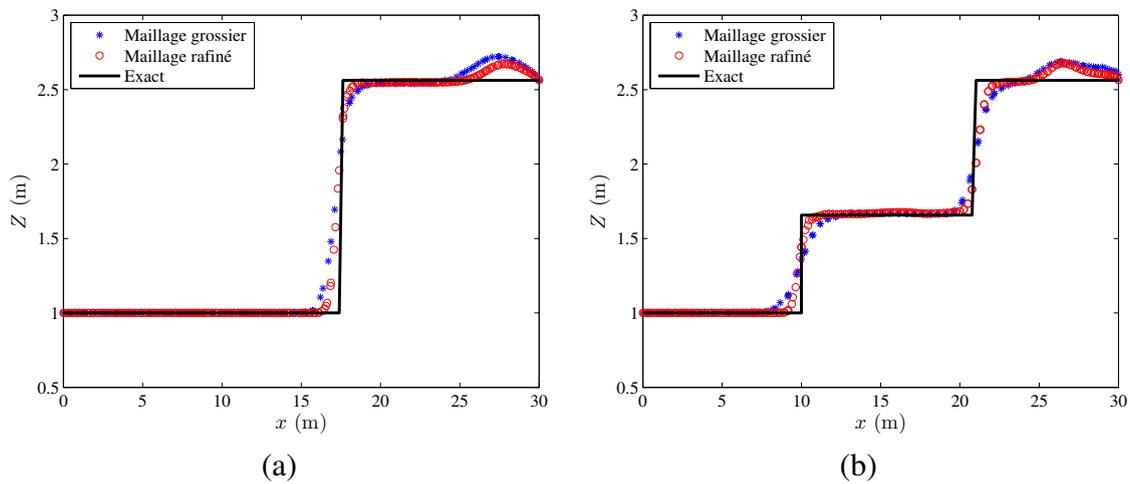


FIGURE 6.8 – Onde de choc dans une contraction de canal : Comparaison des profils de la surface d’eau (a) le long de la ligne continue (b) le long de la ligne pointillé.

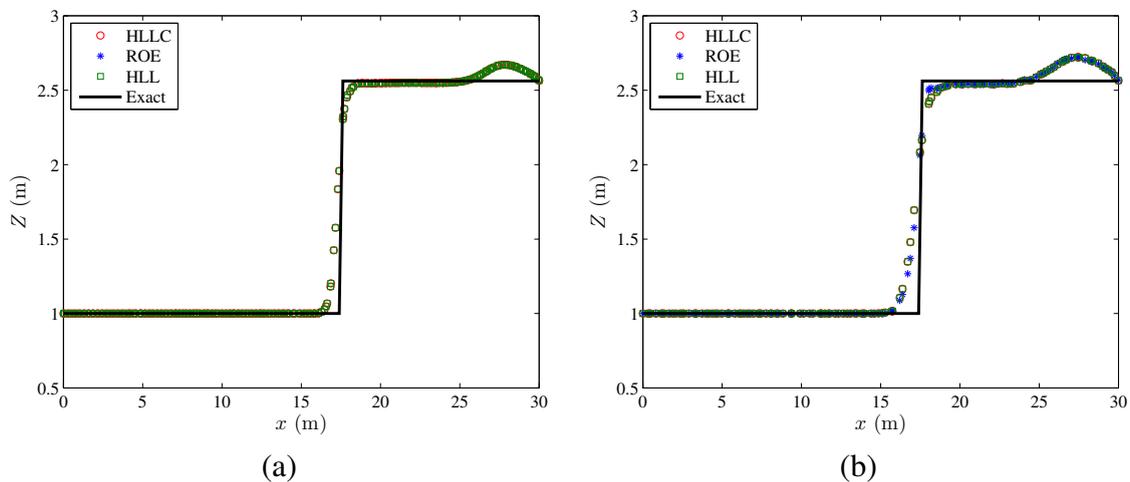


FIGURE 6.9 – Onde de choc dans une contraction de canal : Comparaison des profils de la surface d’eau le long de la ligne de coupe longitudinale ($y = 10$ m) en utilisant différents flux numériques, (a) maillage grossier, (b) maillage fin.

6.6.3 Rupture de barrage circulaire

Dans ce test, nous étudions la rupture d’un barrage circulaire sur un fond plat et sans frottement. Il est un test canonique pour les modèles informatiques d’écoulement à surface libre, en raison de la coexistence de différents régimes d’écoulement et la discontinuité dans la profondeur de l’eau (choc) au cours de l’évolution d’écoulement. La simulation de ce test intéressant fournit une évolution temporaire spectaculaire de la forme d’onde. D’autre part, il donne la possibilité de vérifier la conservation de la symétrie dans la solution numérique. Le problème a été étudié d’abord par *Alcrudo et García-Navarro (1993)* puis par de nombreux auteurs (*Delis et Katsaounis, 2005; Lai, 2012; Anastasiou et Chan, 1997; Li et Liu, 2001; Lin et al., 2003; Gottardi et Venutelli, 2004; Lai et al., 2005; Pilotti et al., 2010; Aricò et al., 2013; Amiri et al., 2013*).

Initialement, le domaine physique consiste en deux régions d'eau calme séparées par une paroi cylindrique (avec un rayon de 11 m) centrée dans un domaine carré de 50 m x 50 m. La profondeur de l'eau à l'intérieur du barrage est de 10 m et à l'extérieur du barrage est de 1 m et 0 m, respectivement, pour un fond mouillé et un fond sec. On suppose aussi que $u = v = 0$ m/s dans tout le domaine. À $t = 0$ s, la paroi est alors complètement supprimé et nous assistons à une onde de crue qui se propage radialement et symétriquement dans le domaine à partir du centre du cylindre. Un maillage de 3558 éléments triangulaires, représenté sur la figure 6.10 et un nombre de Courant $C = 0.3$ sont utilisées pour la simulation.

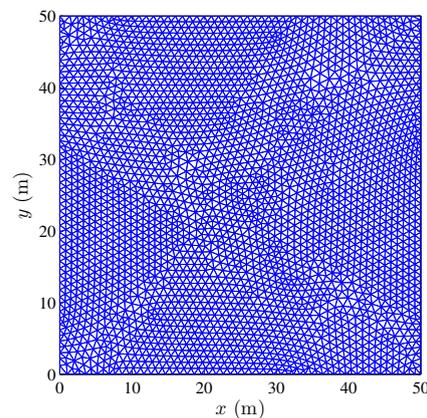


FIGURE 6.10 – Rupture de barrage circulaire : présentation du maillage.

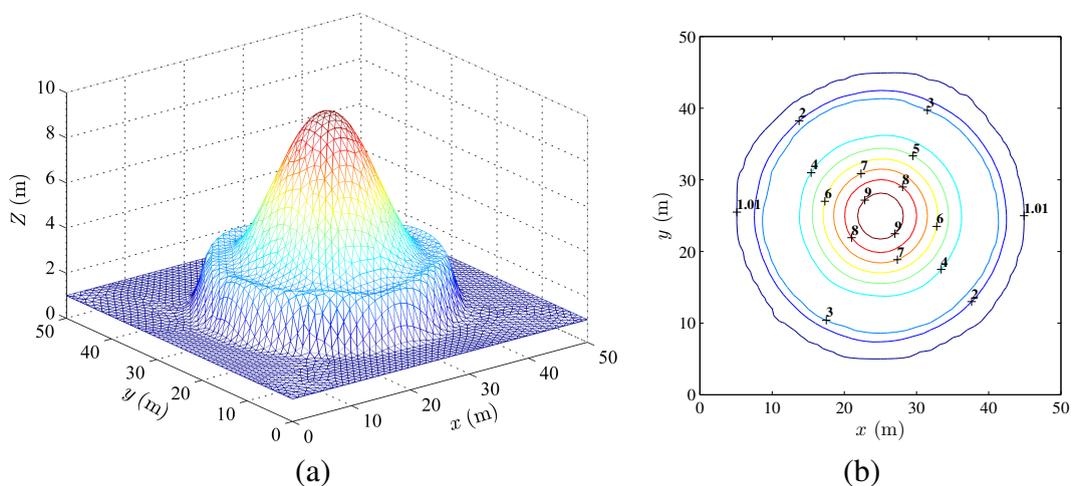


FIGURE 6.11 – Rupture de barrage circulaire sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à l'instant $t = 0.69$ s.

La figure 6.11 présente la vue en 3D et les courbes de niveaux de la hauteur d'eau sur un fond mouillé à l'instant $t = 0.69$ s. Dans ce cas on voit clairement le passage d'un écoulement de type fluvial à un écoulement torrentiel. On peut voir aussi que les ondes se propagent de façon uniforme et symétrique. La symétrie radiale est légèrement déformée à cause de l'incapacité de représenter un cercle sur un maillage triangulaire. La figure 6.12 représente une coupe pour les hauteurs effectuée en $y = 25$ m à des instants différents. On observe clairement la propagation

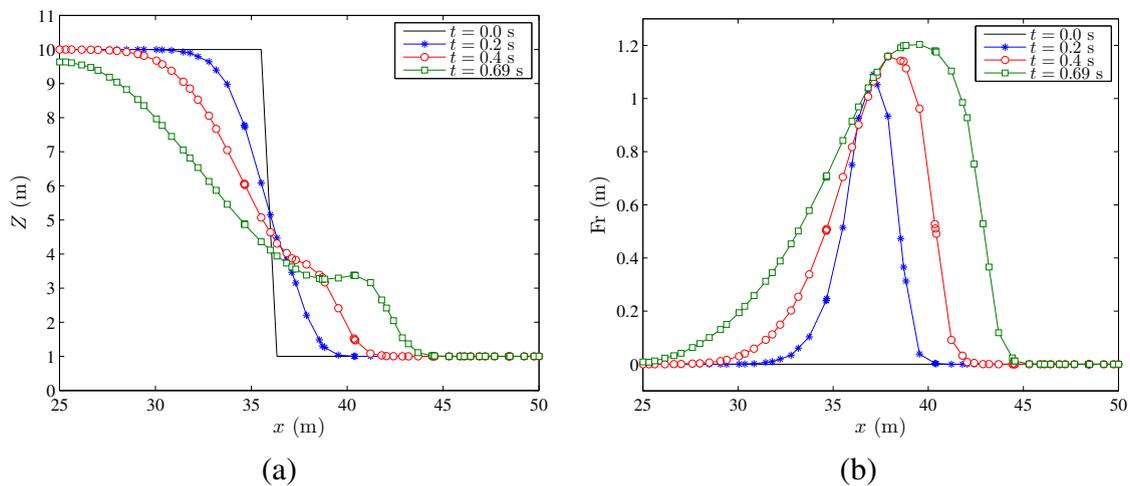


FIGURE 6.12 – Rupture du barrage circulaire : (a) Profil de la surface libre (b) les valeurs absolues correspondantes du nombre de Froude à des instants différents (demi-coupe en $y = 25$ m).

de l'onde du choc à partir du centre. Il existe aussi une onde de raréfaction qui se déplace radialement vers le centre et a tendance à atteindre le point central d'origine. Ces résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus récemment par (*Delis et Katsaounis, 2005; Lai, 2012; Anastasiou et Chan, 1997; Li et Liu, 2001; Lin et al., 2003; Gottardi et Venutelli, 2004; Lai et al., 2005; Pilotti et al., 2010; Aricò et al., 2013; Amiri et al., 2013*).

Le cas d'un fond sec à l'extérieur du cylindre est également considéré ici et présenté sur les figures 6.13 et 6.14. On peut voir seulement une onde de raréfaction qui se prolonge dans la région sèche. Aucune onde secondaire n'est formée comme dans le cas d'un fond mouillé. Le schéma est capable de traiter le problème de lit sec.

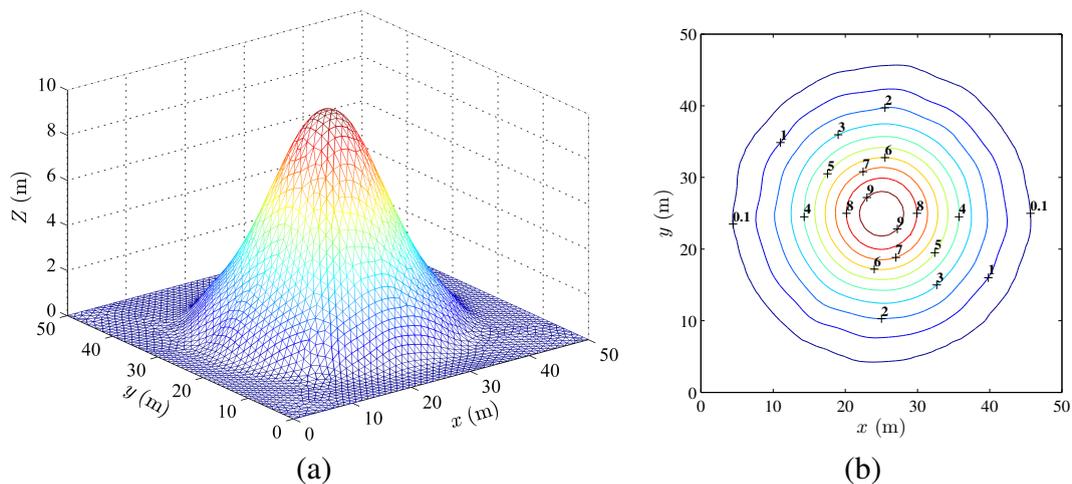


FIGURE 6.13 – Rupture de barrage circulaire sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau.

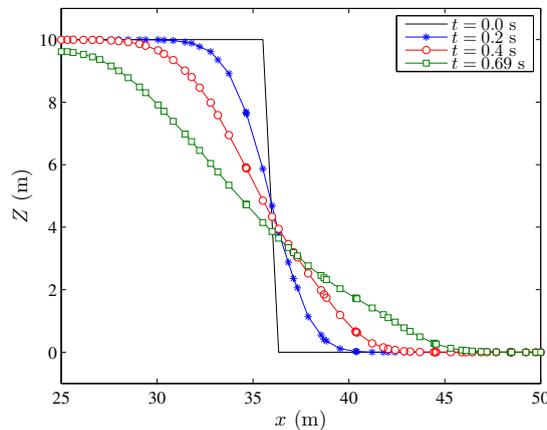


FIGURE 6.14 – Rupture de barrage circulaire sur un fond sec : Profil de la surface libre à des instants différents (demi-coupe en $y = 25$ m).

6.6.4 Rupture partielle de barrage

Dans la réalité, les écoulements torrentiels dus à une rupture de barrage et de segments de digues sont souvent de nature bidimensionnelle. Par conséquent, l'objectif de ce cas-test est de vérifier la capacité du modèle proposé à reproduire la propagation bidimensionnelle de crues en la présence d'un front discontinu de la hauteur d'eau et de la vitesse sur un fond mouillé.

Ce cas-test consiste à étudier l'écoulement torrentiel dû à une rupture partielle et asymétrique de barrage. Ce cas-test, qui a été proposé par *Fennema et Chaudhry (1990)*, est largement utilisé par de nombreux modélisateurs (*Delis et Katsaounis, 2005; Loukili et Soulaïmani, 2007; Ma et al., 2007; Akoh et al., 2010; Kuiry et al., 2010; Wood, 2010; Zhang et Wu, 2011; Lai, 2012; Duran et Marche, 2014*) pour valider leurs modèles de rupture de barrage.

L'intérêt particulier de ce problème est que sa solution est caractérisée par :

- une onde de choc qui se propage vers l'aval en y augmentant brusquement la hauteur d'eau et se modifie par une onde de réflexion (lorsqu'elle se heurte à la paroi);
- une onde de raréfaction (de dépression), qui se déplace vers l'amont en y diminuant la hauteur d'eau, souvent décrite comme choc de raréfaction.

Étudions un bassin de 200 m de large, 200 m de long et de fond plat, sans frottement. L'eau est retenue dans la partie gauche du bassin. On suppose qu'à $t = 0$ s, brusquement le barrage du réservoir est en rupture partielle et non symétrique sur une longueur de 75 m. L'épaisseur du barrage est de 10 m sur la direction des écoulements. La figure 6.15 donne une description géométrique de ce problème. La profondeur d'eau dans le réservoir est de 10 m et en aval du réservoir est de 5 m et 0 m, respectivement, pour un fond mouillé et un fond sec. L'eau dans le bassin est en repos à $t = 0$ s, c'est-à-dire $u = v = 0$ m/s partout. Le bassin est fermé sur les quatre côtés. Une condition dite de "non glissement" est imposée à toutes les parois.

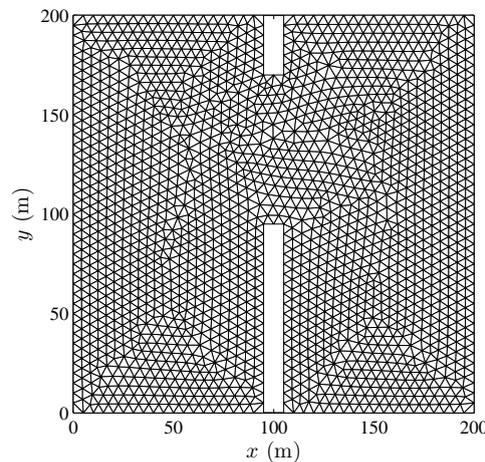
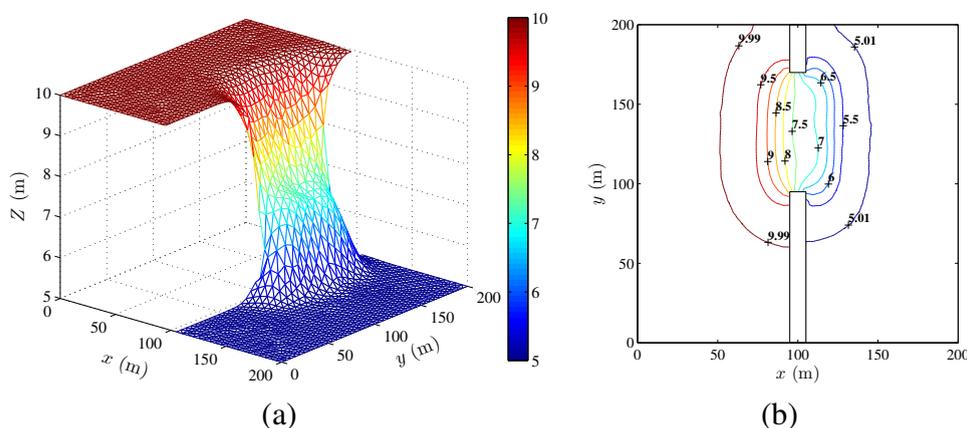


FIGURE 6.15 – Rupture partielle de barrage : présentation du maillage.

Le domaine étudié a été discrétisé en 3558 triangles (figure 6.15). Le pas de temps $\Delta t = 0.01$ s pour toutes les simulations. La durée de simulation est de 10.2 s comptée à partir de la rupture de barrage.

Les figures 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 et 6.21 représentent les résultats obtenus par le modèle proposé sur un fond mouillé à $t = 2.2$ s, 4.2 s, 6.2 s, 7 s, 8.2 s et 10.2 s, respectivement. Les résultats sont visualisés en deux types de figures : surface libre en trois dimensions (section a) et contour de dénivellation (section b). À $t = 7$ s, le front d'onde est parvenu jusqu'à la paroi gauche du bassin ; le front est bien développé dans la partie centrale en aval. Ces résultats semblent très similaires à ceux présentés par les études existantes et précédemment mentionnées. Nous remarquons unhaussement très léger de la surface libre au niveau du front d'onde. On observe également cehaussement dans les études existantes et précédemment mentionnées. Bien que notre modèle soit basé sur la méthode GD, les résultats de ce cas-test prouvent indéniablement la capacité de notre modèle à capturer l'onde choc dans un problème bidimensionnel.

FIGURE 6.16 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 2.2$ s.

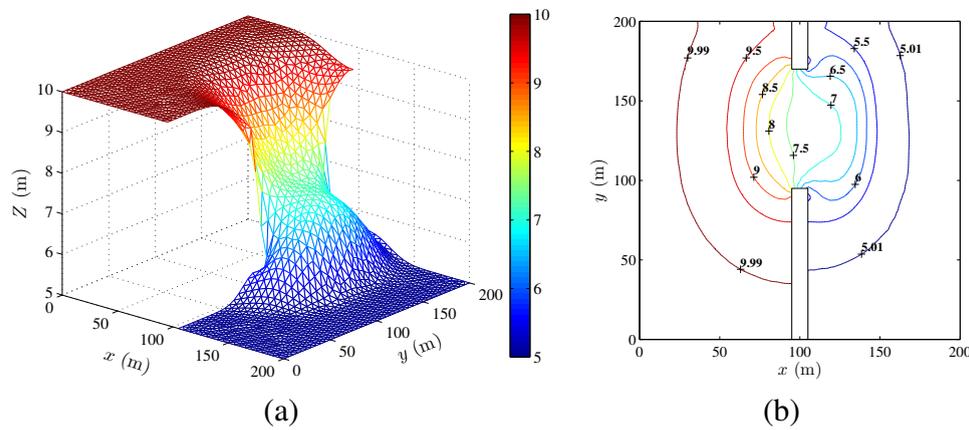


FIGURE 6.17 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 4.2$ s.

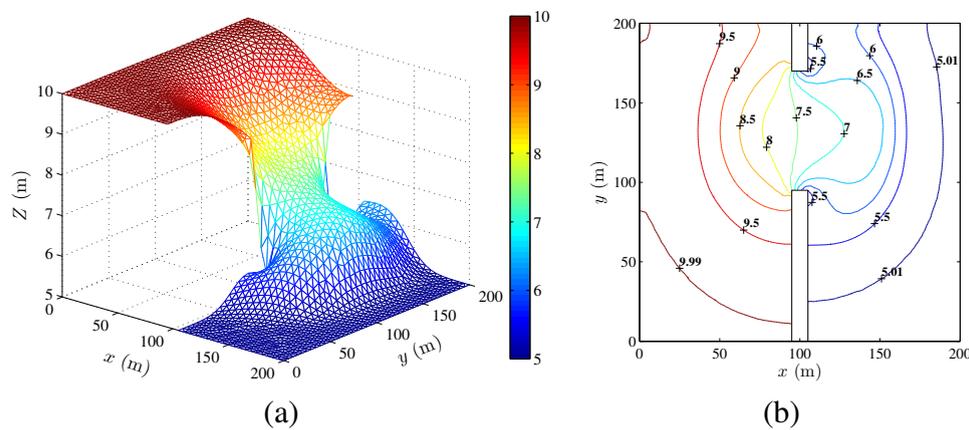


FIGURE 6.18 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 6.2$ s.

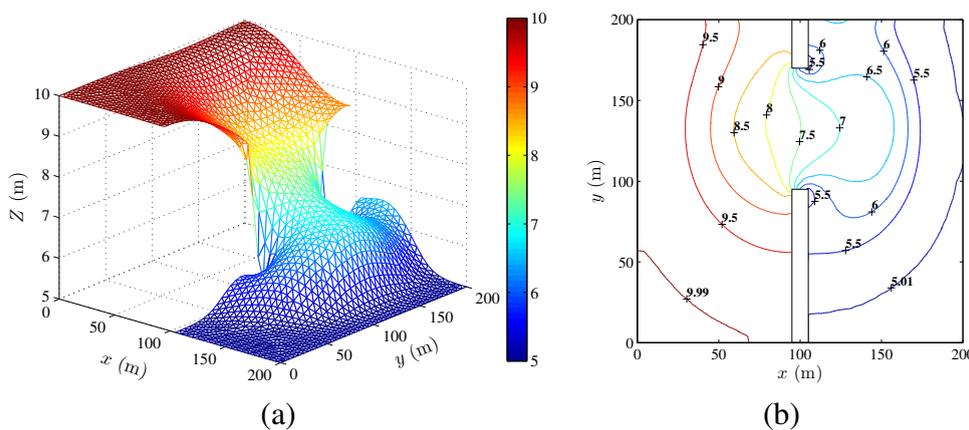


FIGURE 6.19 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 7$ s.

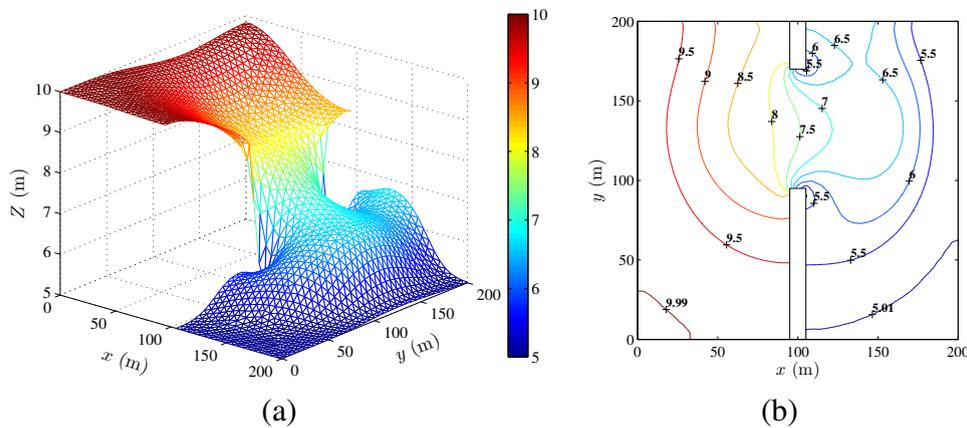


FIGURE 6.20 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 8.2$ s.

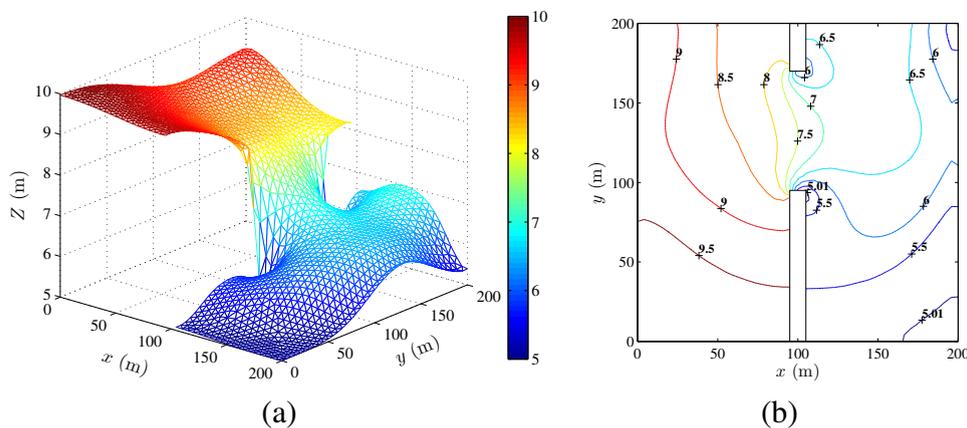


FIGURE 6.21 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 10.2$ s.

Les figures 6.22, 6.23, 6.24, 6.25 et 6.26 représentent les résultats obtenus par le modèle proposé sur un fond sec à $t = 2$ s, 4 s, 5.5 s, 8 s et 10 s, respectivement. Les résultats sont visualisés en deux types de figures : surface libre en trois dimensions (section a) et contour de dénivellation (section b). À $t = 5.5$ s, le front d'onde est parvenu jusqu'à la paroi gauche du bassin; le front est bien développé dans la partie centrale en aval. Ces résultats semblent très similaires à ceux présentés par les études existantes et précédemment mentionnées. Nous remarquons unhaussement très léger de la surface libre au niveau du front d'onde. On observe également cehaussement dans les études existantes et précédemment mentionnées. Bien que notre modèle soit basé sur la méthode GD, les résultats de ce cas-test prouvent indéniablement la capacité de notre modèle à capturer l'onde choc dans un problème bidimensionnel et sur un fond sec.

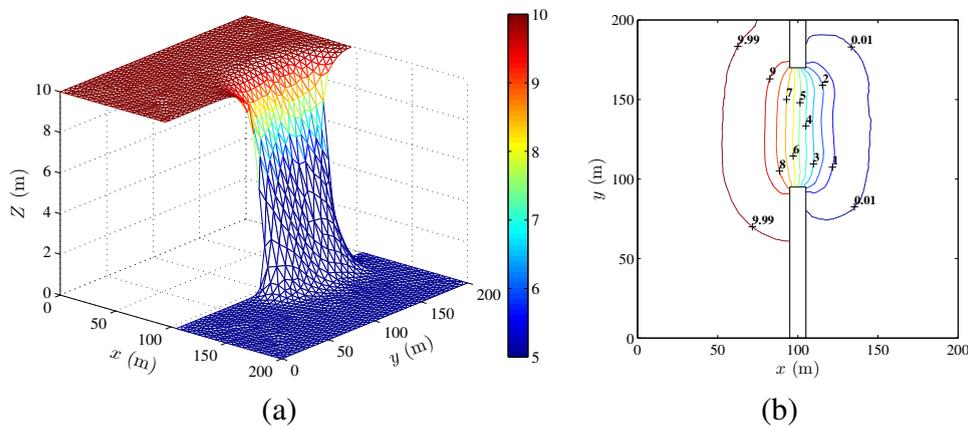


FIGURE 6.22 – Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 2$ s.

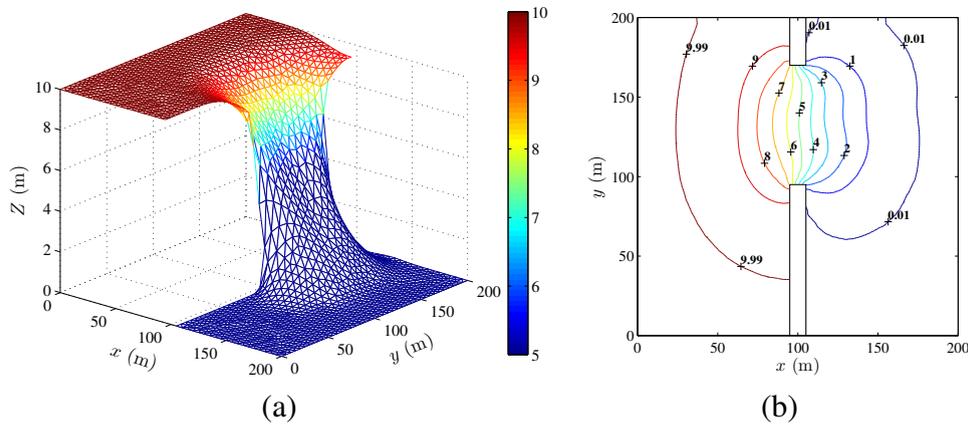


FIGURE 6.23 – Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 4$ s.

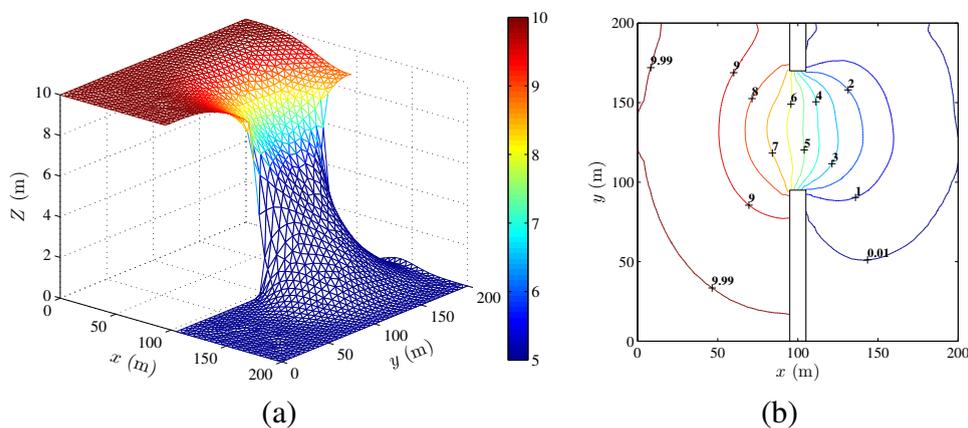


FIGURE 6.24 – Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 5.5$ s.

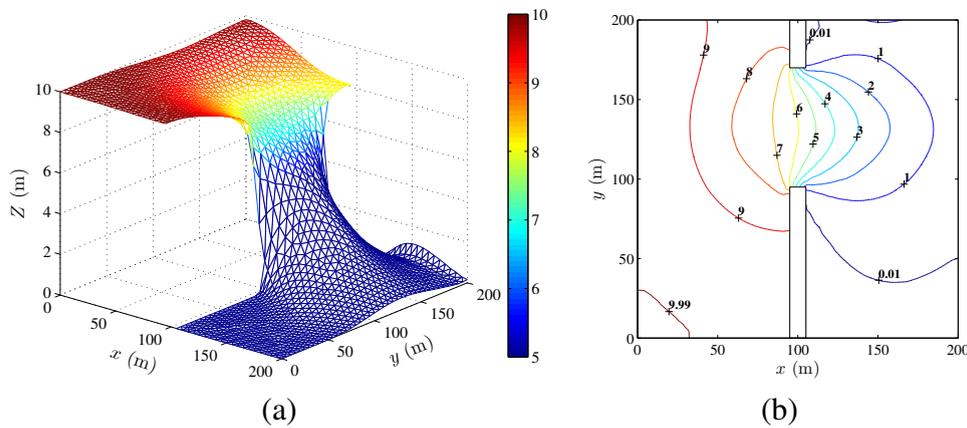


FIGURE 6.25 – Rupture partielle de barrage sur un fond sec : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 8$ s.

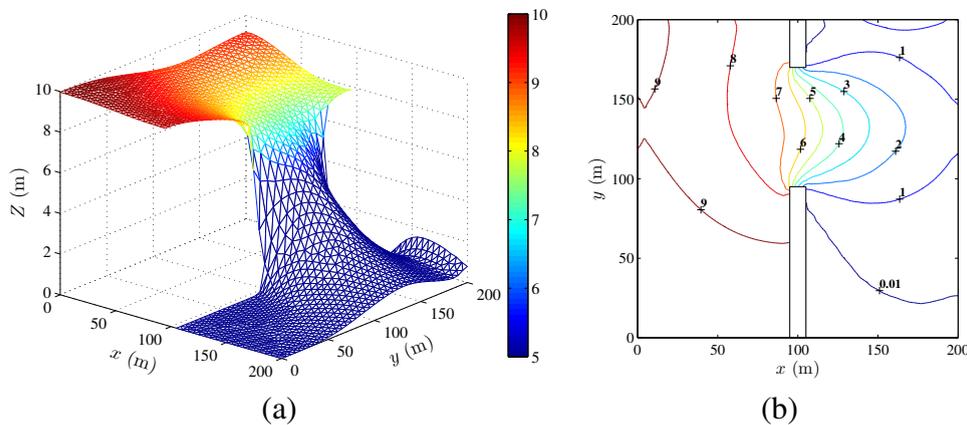


FIGURE 6.26 – Rupture partielle de barrage sur un fond mouillé : (a) présentation 3D, (b) courbe de niveau à $t = 10$ s.

6.6.5 Rupture partielle de barrage (résultats expérimentaux)

Afin d'enregistrer les résultats expérimentaux pour le problème d'une rupture partielle de barrage, *Fraccarollo et Toro (1995)* ont réalisé un modèle réduit. Il s'agit d'un domaine qui comporte un réservoir et un bassin d'inondation (Fig. 6.27) dont il est installé conventionnellement des stations d'observation (points de jaugeages) (Tab. 6.2). Le réservoir est de 1 m de longueur et de 2 m de largeur, alors que le bassin d'inondation est de 3 m de longueur et de 2 m de largeur. Les frontières du bassin d'inondation sont toutes ouvertes. La rupture partielle de 0.4 m est localisée au milieu du barrage. Le lit du canal est horizontal. La hauteur initiale dans le réservoir à l'amont du barrage est de 0.6 m. Le bassin d'inondation est initialement sec. Les valeurs de profondeur ont été obtenues en convertissant les valeurs de mesure de pression. En outre, certaines stations ont également été équipées d'un dispositif de mesure directe de la profondeur. On trouvera dans le travail de *Fraccarollo et Toro (1995)* tous les détails sur les données expérimentales.

Le domaine étudié a été discrétisé en 1663 triangles et le pas de temps $\Delta t = 0.01$ s. La

TABLE 6.2 – Disposition expérimentale du réservoir et du bassin d’inondation (*Fraccarollo et Toro, 1995*).

Location	Stations									
	-5A	-4B	C	O	4	4A	8A	10A	5B	9B
x (m)	0.18	0.155	0.48	1	1.00	1.322	1.722	2.02	1.454	1.802
y (m)	1.00	0.500	0.40	1	1.16	1.000	1.000	1.00	1.250	1.450

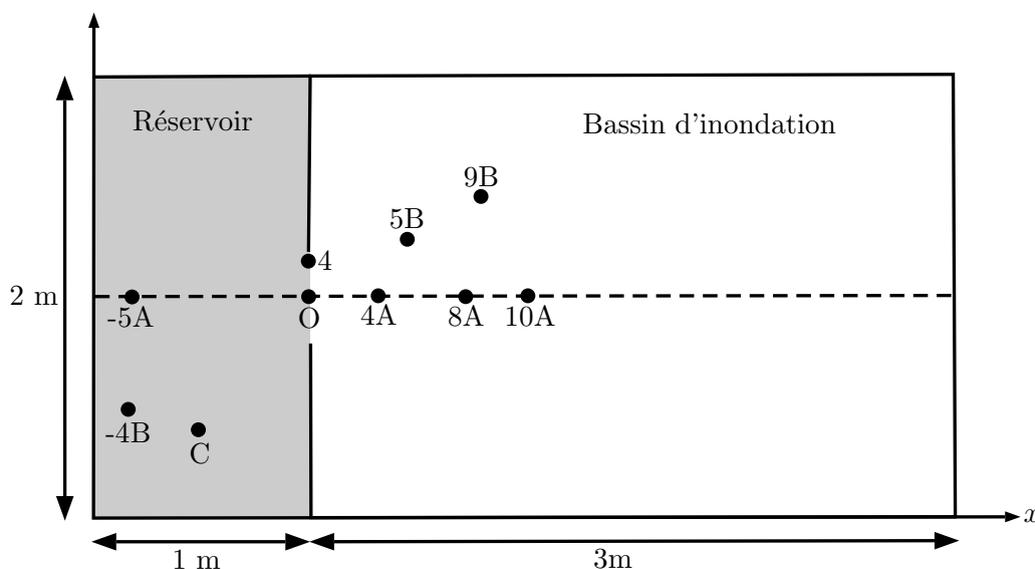
FIGURE 6.27 – Disposition expérimentale du réservoir et du bassin d’inondation (*Fraccarollo et Toro, 1995*).

Figure 6.28 confrontent les valeurs numériques et expérimentales de la hauteur d’eau pendant 10 s aux sondes indiquées au tableau 6.2. Ces figures montrent que la variation de la profondeur est très bien décrite dans tous les points par le modèle numérique. À l’intérieur du réservoir et aux stations -4B, -5A et C, la profondeur calculée s’accorde parfaitement avec les données observées. La variation de la profondeur au centre de la brèche (emplacement O) est également bien prédite par les modèles. Peu après la rupture de barrage, le niveau d’eau à la brèche tombe brusquement et ensuite augmente pour se corriger. La chute initiale est dû au fait qu’à l’instant de la rupture pendant que l’eau au voisinage du barrage est relâchée instantanément, il existe un certain décalage dans le temps avant que les zones latérales commencent à contribuer à l’écoulement. Le modèle capture correctement ce phénomène. Un phénomène similaire est remarqué à un autre point dans la section de rupture (emplacement 4). *Fraccarollo et Toro (1995)* ont notés que ce point se caractérise par une forte déviation par rapport à la distribution supposée de la pression hydrostatique. Les résultats en 3D à ce point est très important en raison de l’impact du coin et de la courbure des lignes de courant dans la verticale. Malgré le fait que les équations ne sont pas capables de traiter ces effets, les profondeurs calculées ne diffèrent pas significativement de la surface de l’eau observée. En aval de la brèche, on observe,

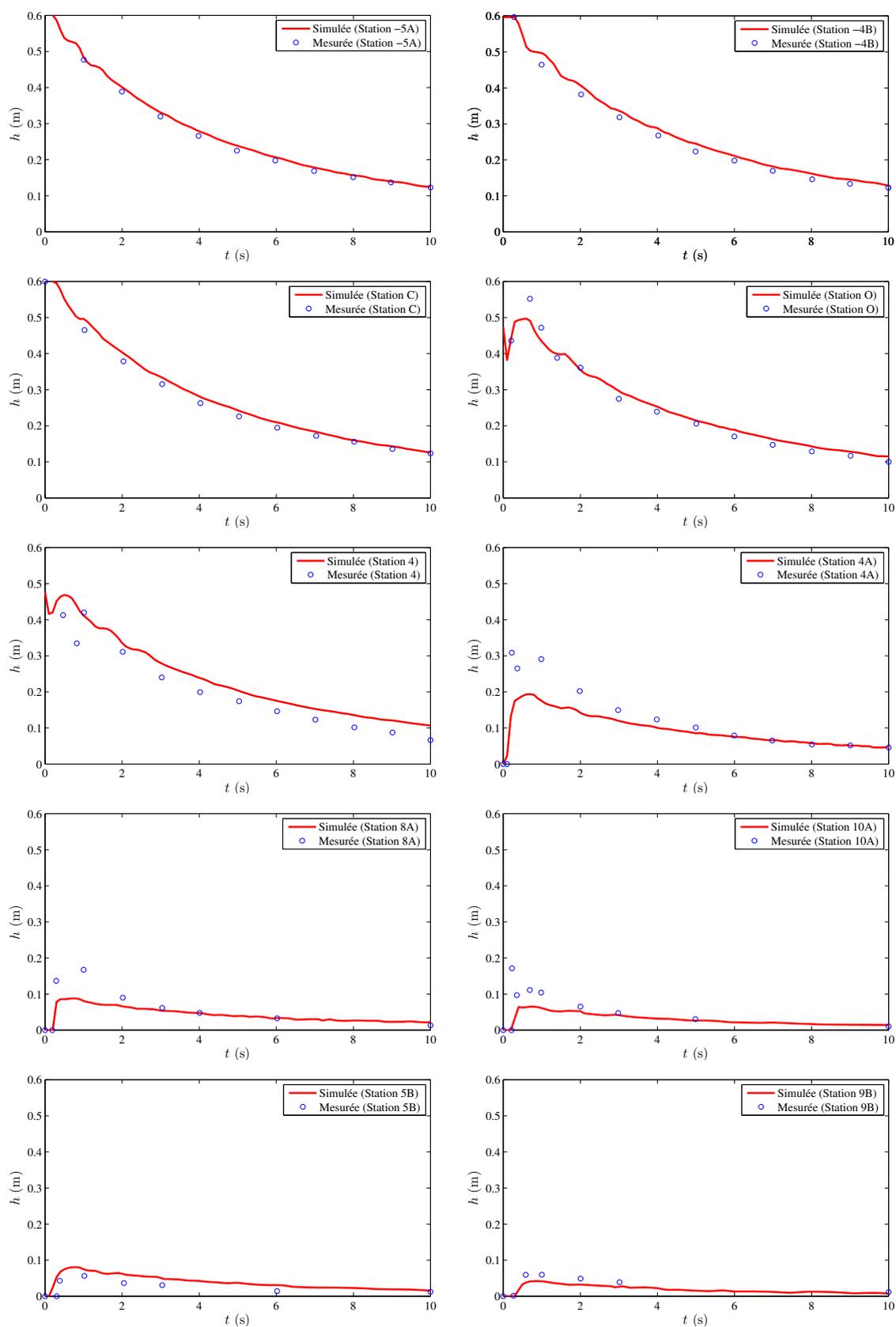


FIGURE 6.28 – Rupture partielle de barrage (résultats expérimentaux) : Hauteurs d’eau calculées et observées sur les différentes stations.

à tous les points, au début, une augmentation brusque de la profondeur suivie d'une forte baisse. Par la suite, la profondeur d'eau continue à baisser. L'augmentation brusque de la profondeur indique l'arrivée du front d'onde dont le temps d'arrivée est correctement prédit par le modèle. Le manomètre indique, au niveau de trois stations plus près de la section de rupture, 4A, 5B et 8A, une profondeur beaucoup plus grande que celle calculée pendant l'arrivée du front d'onde. Cela concorde avec les conclusions de *Fraccarollo et Toro (1995)*. L'écart est expliqué par le fait qu'au voisinage de la brèche en aval du réservoir, la courbure des lignes de courant ainsi que l'impact de l'eau arrivant du réservoir donne une pression supérieure à la pression hydrostatique. À la station 8A, les mesures de pressions ont été vérifiées expérimentalement en comparant ces mesures avec les valeurs des profondeurs mesurées directement (*Fraccarollo et Toro, 1995*). Une fois que le front d'onde passe, la pression hydrostatique règne et les résultats de calcul sont conformes aux observations. Dans les stations plus éloignées de la section de rupture, 9B et 10A, l'effet de courbure des lignes de courant est diminué et le modèle prédire avec précision les hydrogrammes de profondeurs observées.

6.6.6 Rupture d'un barrage dans un canal venturi

Un modèle physique a été établi au sein du LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbonne, Portugal) en collaboration avec IST (Instituto Superior Técnico) par *Bento (1996)* afin d'étudier les écoulements dus à une rupture de barrage dans un canal convergent divergent sur un fond sec et rugueux (avec frottement). Une configuration simple du canal est présentée dans la Figure 6.29.

Le canal est rectangulaire de 19.3 m de long avec un fond plat. La section transversale est rectangulaire de 0.50 m de large. Une écluse démontable est posée dans le canal à 6.1 m de l'extrémité gauche pour créer un réservoir qui maintient l'eau initialement au repos. Un segment de canal rétréci est situé à 7.70 m en aval de l'écluse. Ce segment se compose de :

- une partie de rétrécissement de 0.2 m de long qui ramène la largeur du canal de 0.50 m à 0.20 m. Les deux parois latérales de cette partie sont symétriques par rapport à l'axe du canal avec lequel elles font donc un angle de 45 degré ;
- une partie rectangulaire de 1.00 m de long et de 0.20 m de large ; et
- une partie d'élargissement de 0.20 m de long qui augmente la largeur de 0.20 m à 0.50 m.

En aval de l'écluse, le fond est sec. On enlève l'écluse en 0.2 s approximativement pour simuler la rupture du barrage.

Cette configuration provoque : i) une onde de choc qui se propage depuis la brèche vers l'aval et une onde de raréfaction qui se propage vers l'amont ; ii) une onde de réflexion due au rétrécissement du canal. En effet, lorsque l'onde de choc arrive au niveau du rétrécissement, elle se réfléchit partiellement et crée l'onde de réflexion qui fait monter le niveau d'eau et y dresse, à nouveau, un front d'onde se propageant vers l'amont. Dans ce contexte, l'écoulement peut passer, à plusieurs reprises, d'un régime à l'autre : de fluvial à torrentiel avec la propagation de l'onde de choc, de super critique à sous critique (ressaut hydraulique) avec la propagation vers l'amont du front de réflexion et ensuite l'élargissement brusque après le rétrécissement

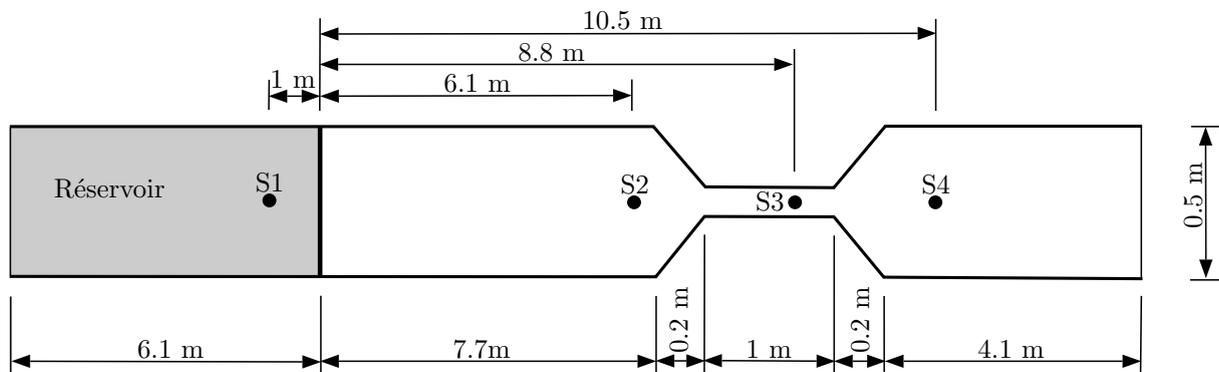


FIGURE 6.29 – Rupture d’un barrage dans un canal venturi : Géométrie du canal et positions des points de mesure.

fait changer encore le régime d’écoulement. Ce phénomène physiquement compliqué rend la modélisation plus complexe et crée probablement des oscillations numériques inattendues.

Ce cas-test, qui a été également étudié par nombreux auteurs (*Brufau et García-Navarro, 2003; Murillo et al., 2005; Shi, 2006; Ghostine et al., 2009; Korichi, 2013*) nous permet donc de vérifier la capacité du présent modèle à reproduire un tel phénomène bidimensionnel et complexe : changement du régime de l’écoulement, et capture des fronts discontinus dans une géométrie arbitraire.

La hauteur d’eau initiale est de 0.3 m dans le réservoir, et de 0.003 m en aval de l’écluse. L’eau est initialement au repos, la vitesse est donc imposée zéro partout dans le canal (Figure 6.29). Dans la partie en aval du segment rétréci, l’écoulement est en régime torrentiel. En conséquence, à la frontière ouverte à l’extrémité droite du canal, $x=19.3$ m, aucune contrainte ni sur la hauteur d’eau ni sur la vitesse n’est imposée. La dénivellation de la surface libre et la vitesse sont calculées par la méthode des caractéristiques. Une condition de glissement a été imposée sur toutes les parois du canal.

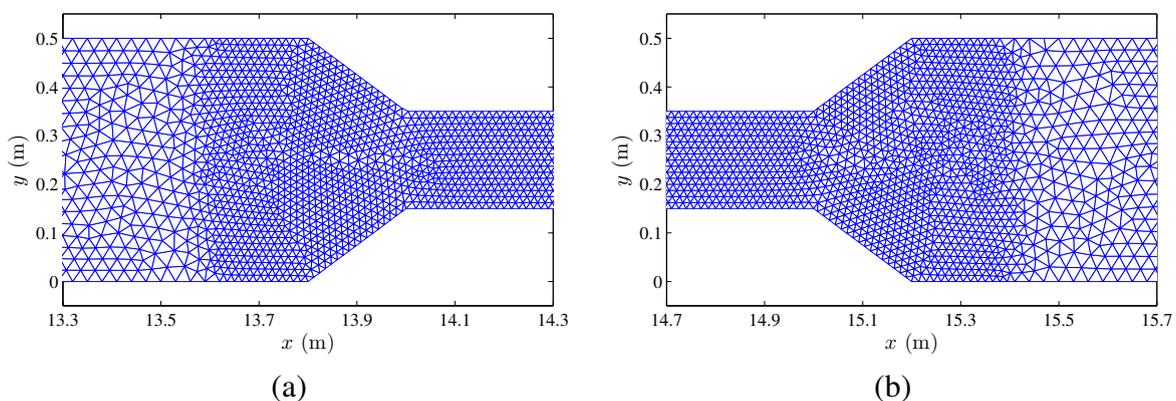


FIGURE 6.30 – Raffinement du maillage dans le segment rétréci du canal venturi : (a) entrée et (b) sortie.

Le domaine de calcul est discrétisé par une grille non structurée de 28855 triangles de tailles différentes et de 15155 nœuds. La grille est plus raffinée à l’entrée et à la sortie du segment

rétréci (voir Fig. 6.30). *Murillo et al. (2005)* ont utilisés une grille de 42621 triangles et *Shi (2006)* a utilisé 39067 triangles. La durée de simulation est de 10 s. Le pas de temps est de 0.001 s.

Afin de maintenir une solution stable, une valeur de tolérance de profondeur d'eau $h = 0.003$ m est définie. La zone sera déclarée sèche lorsque la profondeur d'eau $h < 0.0001$ m. Le même coefficient de Manning $n_m = 0.01$ s/m^{1/3} est utilisé par *Murillo et al. (2005)* pour le frottement sur fond.

L'évolution de la hauteur d'eau a été mesurée par quatre sondes dont les positions sont données dans la Figure 6.29 : La sonde S1 se trouve à l'intérieur du réservoir à 1.0 m en amont de l'écluse ; la sonde S2 se situe à 6.10 m en aval de l'écluse, avant le rétrécissement ; la sonde S3 est à 8.8 m en aval de l'écluse, à l'intérieur même du segment rétréci ; la sonde S4 se trouve dans la partie d'élargissement à 10.50 m en aval de l'écluse.

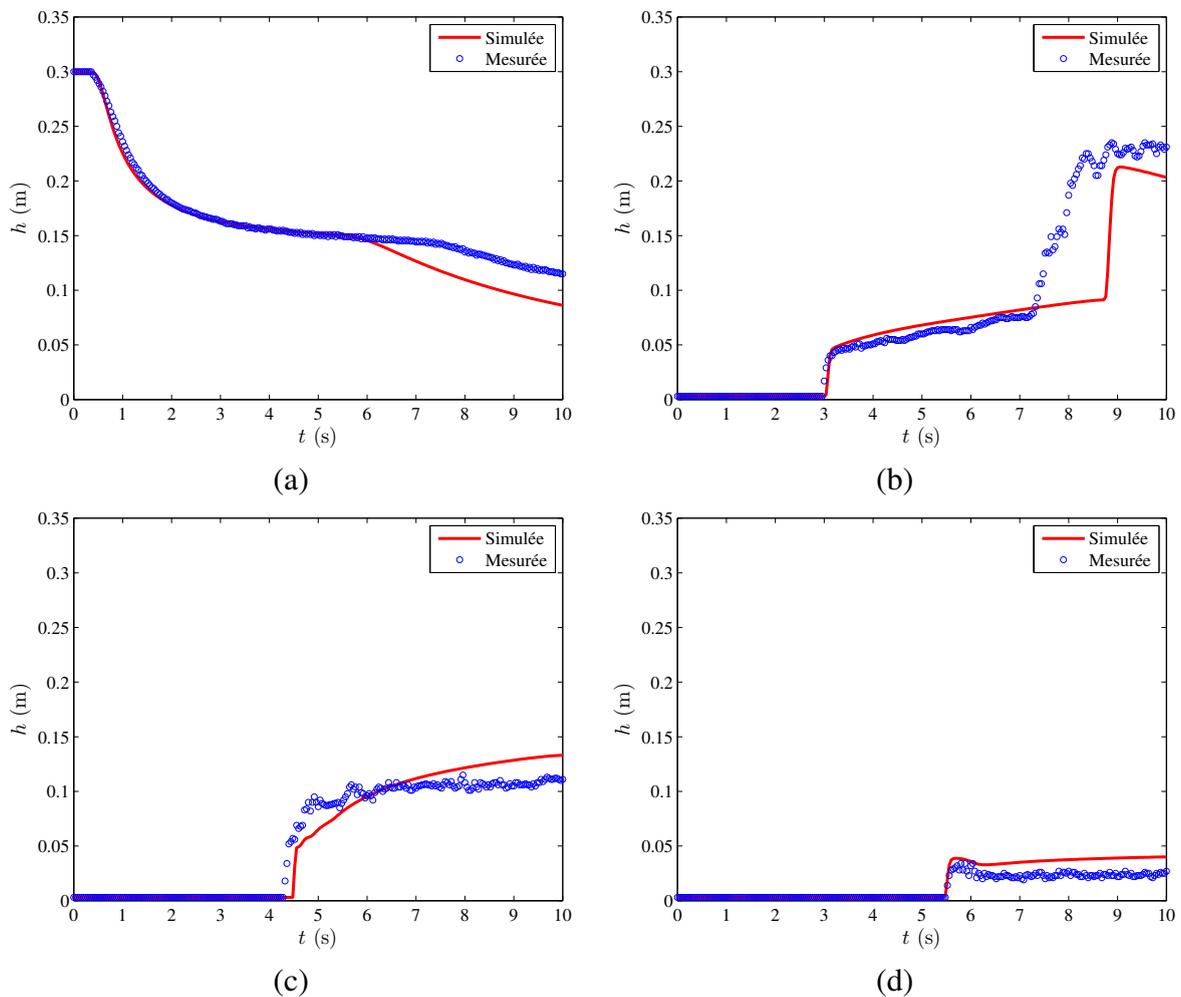


FIGURE 6.31 – Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d'eau aux points de jaugeage S1 (a), S2 (b), S3 (c) et S4 (d) du problème de rupture d'un barrage dans un canal venturi.

La Figure 6.31 confrontent les valeurs numériques et expérimentales de la hauteur d'eau pendant 10 s aux sondes S1 à S4. La Figure 6.31 (a) présente l'évolution de la hauteur d'eau dans

le réservoir à la sonde S1. Jusqu'à la 6^{ème} seconde, les valeurs numérique et expérimentale se rapprochent bien. Elles se décalent après avec une descente nette de la surface libre calculée par rapport à celle de mesures. À la sonde S1, les résultats de *Brufau et García-Navarro (2003)*; *Shi (2006)* et *Korichi (2013)* affichent le même phénomène. La Figure 6.31 (b) montre clairement l'arrivée à S2 de l'onde de choc due au l'enlèvement de l'écluse, qui crée à 3 secondes plus tard, une onde de réflexion marquée par une montée d'eau (front de choc). On remarque que l'arrivée de l'onde de choc à S2 calculée par le modèle est en accord avec celle de mesures. À $t = 4$ s, le front de l'onde atteint la constriction. Une onde de réflexion est ainsi créée. Elle commence à se propager en amont, tandis que l'onde de choc poursuit sa propagation en aval. L'onde de réflexion passe par la sonde S2 au temps $t = 8.80$ s. On remarque que l'arrivée de l'onde de réflexion à S2 calculée par le modèle est en avance de 1.5 seconde par rapport aux mesures. On constate également un léger décalage entre les deux profils calculés et mesurés après 9 s. La Figure 6.31 montre l'arrivée du front de choc aux sondes S3 et S4. Le temps d'arrivée est correctement estimé. Cependant, de légers décalages entre les deux profils calculés et mesurés ont été constatés aux sondes S3 et S4. Ce décalage est également présent dans les résultats de *Brufau et García-Navarro (2003)* et *Korichi (2013)*.

6.6.7 Rupture d'un barrage sur un canal en forme L

Quand un écoulement permanent se déplace autour d'une courbe, le niveau de l'eau monte auprès de la rive extérieure et un abaissement correspondant se produit auprès de la rive interne. Pour un écoulement rapidement varié autour d'un coude brusque, un onde peut former et entraîner d'importantes pertes de charge locales qui affecteront la progression de l'eau en aval du coude. La forme de la vallée à une grande influence sur la vitesse de propagation. Les coudes peuvent ralentir le front mais provoquer aussi une augmentation du niveau d'eau en amont ou même conduire à la formation d'ondes se déplaçant vers l'amont (*Frazão et al., 1998*).

Cette expérience a été réalisée par une équipe de recherche dans le département du génie civil à l'Université Catholique de Louvain en Belgique (*Morris, 2000*). Il s'agit d'un dispositif composé par un réservoir semi-enterré dont les dimensions sont 2.44 m x 2.39 m lié à un canal rectangulaire en forme L d'une longueur de 4 m et une largeur de 0.494 m (cf. Figure 6.32). La deuxième tranche du canal forme un angle de 90° avec la première, elle mesure 0.33 m. Le fond du canal est surélevé à 0.33 m par rapport au fond du réservoir. L'extrémité aval du canal est ouverte. Le niveau d'eau initial dans le réservoir est de 0.20 m au-dessus du fond du canal. On considère pour ce test deux configurations : dans la première configuration, le canal est mouillé avec une lame d'eau initiale égale à 0.01 m. Dans la deuxième configuration, le canal est à sec. Le coefficient de rugosité Manning de $0.0095 \text{ s/m}^{1/3}$ est utilisé pour le lit du canal et $0.0195 \text{ s/m}^{1/3}$ pour les parois du canal. La vanne à la sortie du réservoir représente le barrage. Nous supposons une rupture instantanée. Ce test est largement utilisé par de nombreux modélisateurs (*Lai, 2012*; *Jha, 2006*; *Zhou et al., 2004*; *Gottardi et Venutelli, 2004*; *Liang et al., 2004*; *Ercicum et al., 2010*). Les observations expérimentales ont été effectuées au niveau de six points de mesures réparties conventionnellement sur le domaine. Les positions des stations de mesure sont données dans le tableau 6.3 et la figure 6.32.

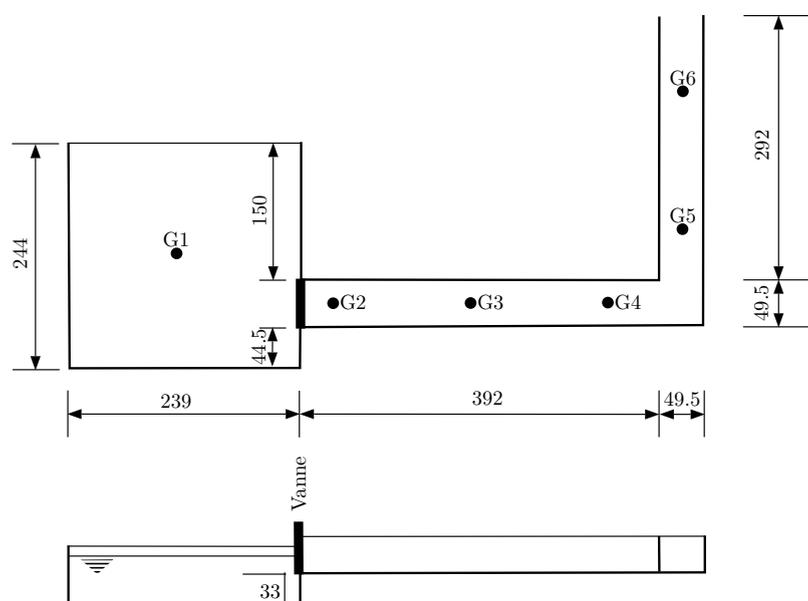


FIGURE 6.32 – Rupture d’un barrage sur un canal en forme de L : Vues en plan et transversale.

TABLE 6.3 – Rupture d’un barrage sur un canal en forme de L : localisation des points de jaugeage.

points de jaugeage	G1	G2	G3	G4	G5	G6
x (m)	1.19	2.74	4.24	5.74	6.56	6.56
y (m)	1.20	0.69	0.69	0.69	1.51	3.01

Le domaine étudié a été discrétisé en 8471 triangles. Le pas de temps $\Delta t = 0.001$ s pour toutes les simulations. La durée de simulation est de 40 s comptée à partir de la rupture de barrage.

Figures 6.33 et 6.34 confrontent les valeurs numériques et expérimentales du niveau d’eau en fonction du temps aux différents points de mesures, respectivement pour un fond mouillé et sec. En conséquence de la position non centrée de la vanne le front circulaire de vidange ne parvient pas à toutes les parois en même temps, en produisant des réflexions et des oscillations non symétriques. Toutefois, cela ne semble pas avoir une grande influence sur l’écoulement dans le canal, en particulier pendant les premières secondes lorsque le phénomène le plus fort est constitué de l’onde de rupture de barrage. Après la rupture instantané l’onde de rupture se propage dans le canal et frappe le coude à environ 2.9 s ce qui provoque une onde de réflexion qui se propage dans le sens inverse vers le réservoir. C’est pourquoi qu’on voit dans les stations G2, G3 et G4 deux pic. Le premier représente l’onde de rupture et l’autre l’onde de réflexion. Pour les deux stations G4 et G5 situé en aval du coude on voit un seul pic qui représente l’onde déviée par le coude. Après 16 s, l’onde réfléchi par le coude atteint le réservoir et disparaît. L’écoulement devient alors quasi permanent. La forme générale de la surface d’eau est préservée, mais

le niveau d'eau diminue progressivement.

Dans les deux cas d'écoulements sur fond mouillé et sec, les résultats à la station G1 représente la courbe de vidange du réservoir. La courbe présente une chute brusque de la surface libre dans le réservoir de 0 à 15 s après la rupture du barrage, suivie d'une diminution plus progressive de la surface libre de 20 à 40 s. L'évolution du niveau d'eau est bien prédite, ce qui signifie que le modèle numérique calcule le vrai débit entrant dans le canal. Après le passage de l'onde aux stations G2, G3 et G4, l'évolution temporelle du niveau d'eau est semblable à celle dans le réservoir, et représente la vidange progressive du système. Une des différences entre les résultats des modèles numériques et les mesures sont dans les temps d'arrivée de l'onde. Un retard approximatif de 2 s est remarqué aux stations G2, G3 et G4. La principale différence entre les résultats numériques et expérimentaux est à la station G5, où le niveau d'eau numérique est plus élevé que le niveau d'eau expérimentale. Cette différence est probablement due à la perte de charge locale supplémentaire causée par le coude de 90°, pas pris en compte dans le modèle numérique. Ces écarts sont également évidentes dans les résultats présentés par [Lai \(2012\)](#); [Jha \(2006\)](#); [Zhou et al. \(2004\)](#); [Gottardi et Venutelli \(2004\)](#); [Liang et al. \(2004\)](#); [Ercicum et al. \(2010\)](#)

6.6.8 Rupture de barrage dans un canal WES

Le présent cas-test sert à évaluer la capacité du modèle proposé à calculer les écoulements torrentiels bidimensionnels sur un fond sec en grande pente ainsi que le traitement du passage d'une zone sèche à une zone mouillée. Il s'agit ici des expériences physiques conduites au *Waterways Experiment Station (WES)* (1960), de l'U. S. Army Corps of Engineers, pour lesquels on possède un certain nombre de mesures de vitesses et de hauteurs d'eau dans un canal de laboratoire.

Le canal étudié est de 121.914 m de long, 1.219 m de large. Le fond en pente de 0.005 est relativement lisse avec un coefficient de frottement de Manning $n=0.009 \text{ s/m}^{1/3}$ ([Khan, 2000](#)). Un barrage d'épaisseur infiniment petite, de 0.305 m de hauteur est situé à mi-longueur du canal. Sur les deux côtés latéraux du canal, une condition de non glissement est imposée. On considère les deux cas de destruction partielle et totale du barrage. Dans le cas d'une rupture partielle, la largeur de la brèche est de 0.366 m.

Ce test est également utilisé par [Bellos et al. \(1991\)](#); [Lai \(2012\)](#); [Khan \(2000\)](#); [Lin et al. \(2003\)](#); [Ying et al. \(2004\)](#); [Liao et al. \(2007\)](#); [Shi \(2006\)](#); [Catella et al. \(2008\)](#); [Chang et al. \(2011\)](#). Initialement la surface d'eau en amont du barrage est aussi haute que le barrage (0.305 m) et le fond en aval est sec. On suppose que, à $t=0$ s s'ouvre brusquement une brèche dont la position et la dimension ont été citées en dessus. La figure 6.35 présente le canal et les conditions initiales.

À l'extrémité amont $x = 0$ m, le niveau de la surface libre $Z = 0.61$ m est imposé et inchangé en cours de calcul. Comme l'écoulement est supercritique dans toute la partie aval du barrage, à l'extrémité aval $x = 122$ m, la dénivellation de la surface libre et la vitesse sont déterminées par une méthode de caractéristiques. Sur les deux côtés latéraux du canal, une condition de non glissement est imposée.

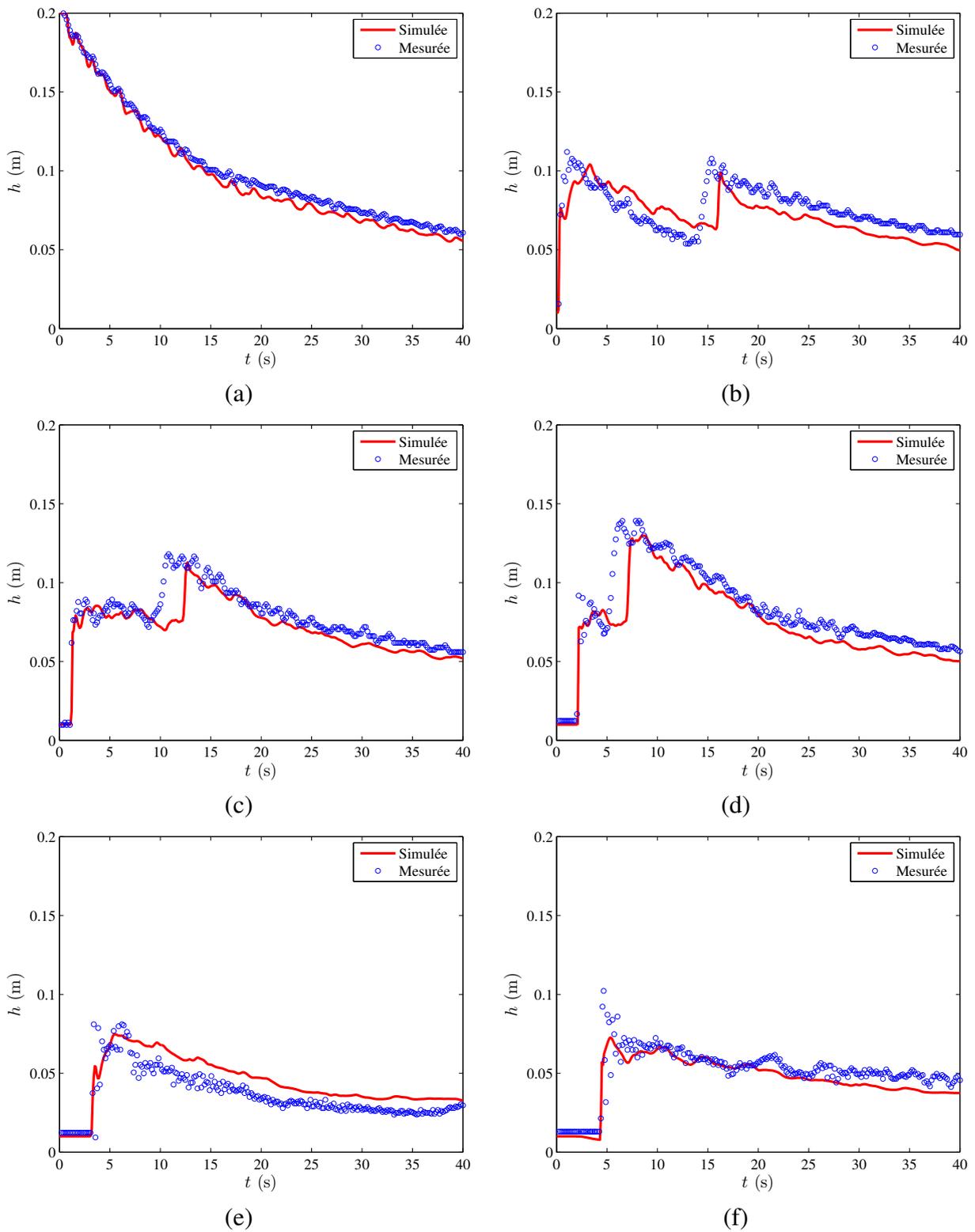


FIGURE 6.33 – Rupture d’un barrage sur un canal en forme L sur un fond mouillé : Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d’eau aux points de jaugeage G1 (a), G2 (b), G3 (c), G4 (d), G5 (e) et G6 (f).

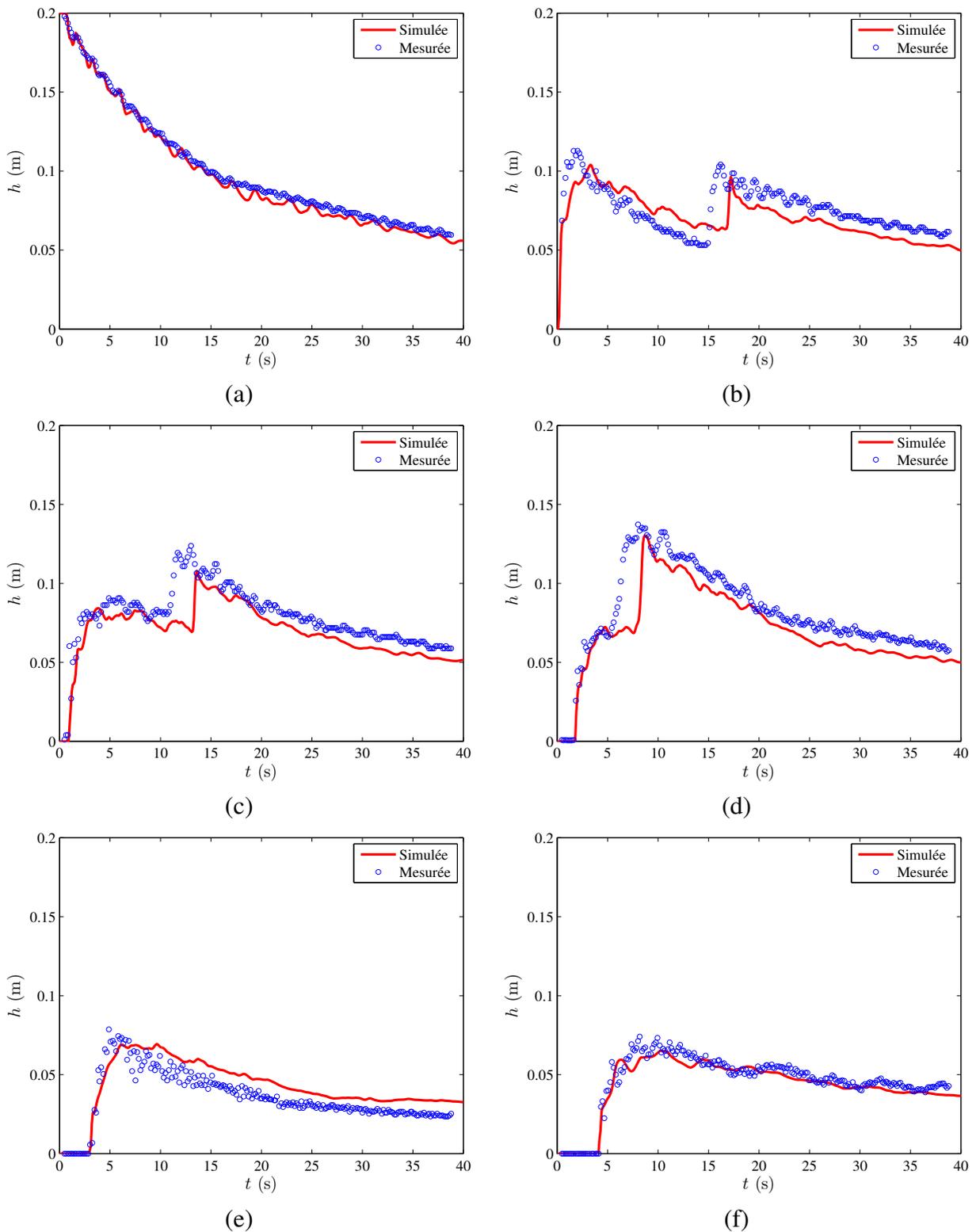


FIGURE 6.34 – Rupture d’un barrage sur un canal en forme L sur un fond sec : Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques de la profondeur d’eau aux points de jaugeage G1 (a), G2 (b), G3 (c), G4 (d), G5 (e) et G6 (f).

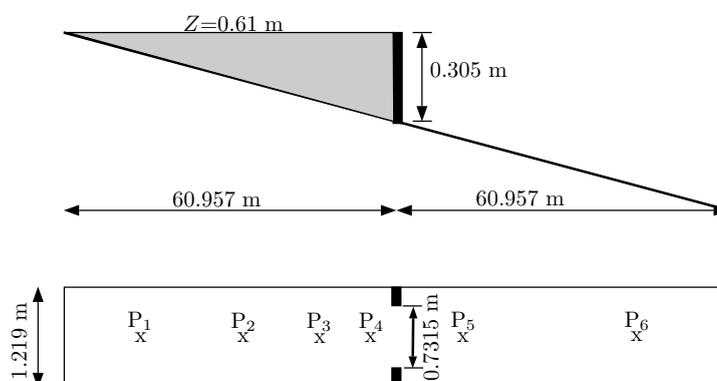


FIGURE 6.35 – Rupture de barrage dans un canal WES, Configuration du canal.

Le domaine est discrétisé en 5000 éléments pour une rupture totale et 6000 éléments pour une rupture partielle. Le pas de temps utilisé est $\Delta t = 0.0125$ s et le critère du lit sec est fixé à $h_{dry} = 10^{-4}$ m. La durée de simulation est de 200 s.

Les niveaux d'eau ont été mesurés aux stations P_1 jusqu'au P_6 . Les positions des stations de mesure sont données dans la Figure 6.35. Les distances entre ces stations et l'extrémité gauche du bassin sont 30.48, 45.72, 59.44, 68.58, 85.34 et 106.68 m, respectivement.

La Figure 6.36 nous permet de comparer la hauteur d'eau h obtenue par notre modèle avec les mesures pour une rupture totale du barrage. Le modèle numérique donne des valeurs de h presque identiques aux valeurs mesurées. Sur la Figure 6.36 nous pouvons constater que le modèle numérique prévient exactement l'arrivée de l'onde de dépression aux stations P_1 , P_2 et P_3 et donc simule parfaitement la vidange progressive du système. Nous pouvons constater aussi que la hauteur d'eau soit légèrement supérieure aux valeurs de mesures à la station P_2 . En aval de la brèche, on observe, aux trois stations (P_4 , P_5 et P_6), au début, une augmentation brusque de la profondeur suivie d'une baisse légère. L'augmentation brusque de la profondeur indique l'arrivée du front d'onde dont le temps d'arrivée est correctement prédit par le modèle. La Figure 6.37 nous permet de comparer la hauteur d'eau h obtenue par notre modèle avec les mesures pour une rupture partielle du barrage. Les mêmes remarques peuvent être faites sauf que dans ce cas la vidange du réservoir est plus progressive et nécessite plus de temps puisque la largeur de la brèche représente 30% de la largeur totale du barrage.

Dans cette section, nous avons étudié un écoulement dû à une rupture de barrage sur un fond rugueux et en grande pente. À la sortie du bassin, l'écoulement reste torrentiel. La frontière ouverte est donc supposée libre de toute contrainte, ni sur la hauteur d'eau ni sur la vitesse ou débit sortant. Un accord global entre les valeurs calculées et mesurées est obtenu. Le cas-test confirme la capacité du modèle à reproduire les écoulements bidimensionnels en présence d'un front discontinu sur un fond incliné avec frottement. Les domaines découvrants et recouvrants sont bien traités par le modèle.

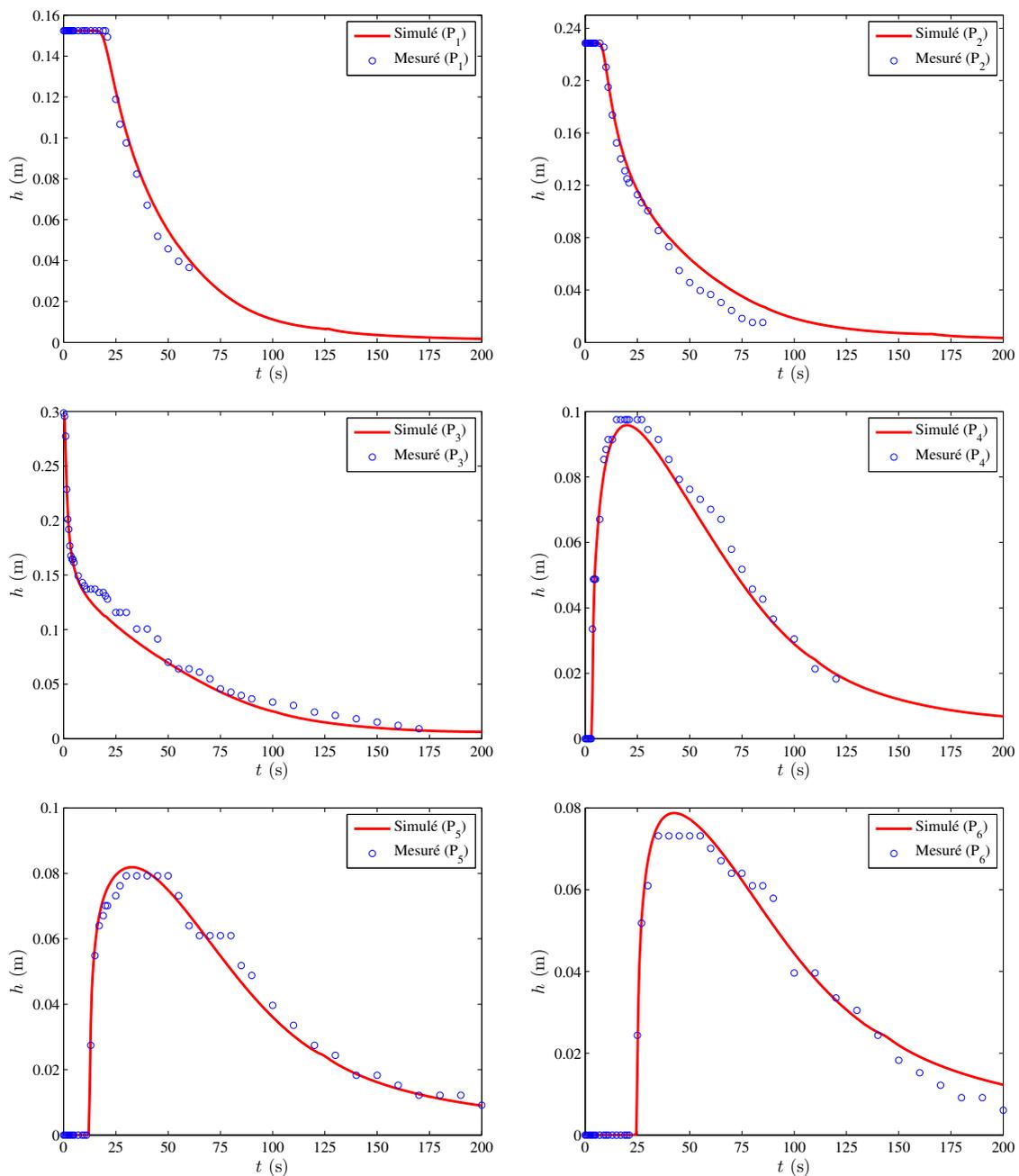


FIGURE 6.36 – Rupture totale de barrage dans un canal WES : Comparaison des hauteurs d’eau calculées et observées aux différentes stations.

6.6.9 Rupture de barrage sur une bosse triangulaire

Un cas de test en laboratoire d’une onde de rupture de barrage en interaction avec un obstacle triangulaire est considéré pour vérifier la capacité du schéma numérique à simuler l’écoulement sur un lit non uniforme et des phénomènes de couvremet/découvremet. L’expérience a été menée à l’Université de Bruxelles en Belgique (*Hiver, 2000*) et recommandé par la commission européenne du projet CADAM (*Morris, 2000*) comme un test de référence. Le modèle physique comprenait la simulation des phénomènes hydrauliques complexes tels que les chocs, transitions

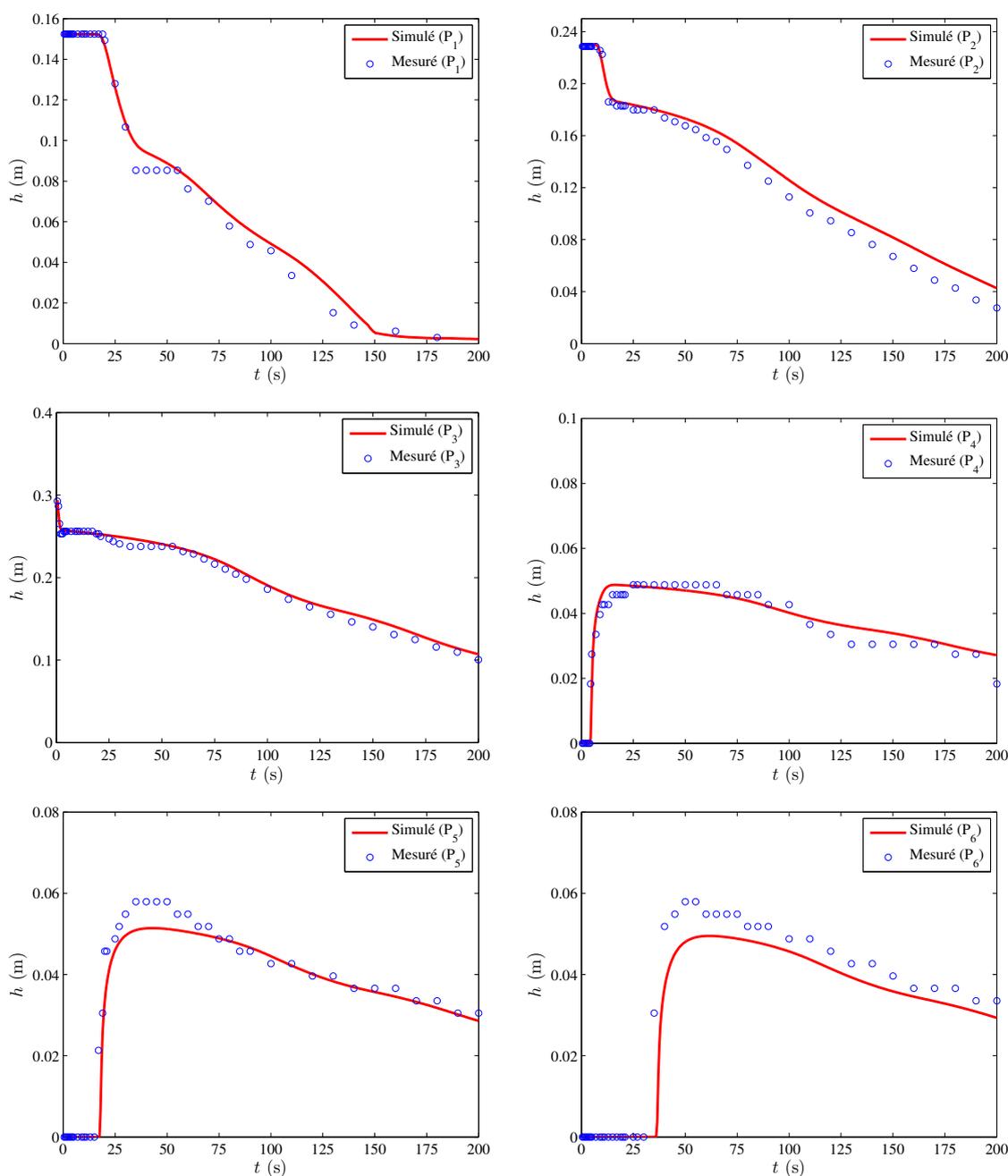


FIGURE 6.37 – Rupture partielle de barrage dans un canal WES : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées aux différentes stations.

entre des zones humides et sèches et l'écoulement sur un obstacle. Le dispositif expérimental, dont le dessin est représenté dans la figure (6.38), se compose d'un canal rectangulaire fermé de 38 m de long et 1.75 m de large. Une vanne sépare le réservoir d'un canal droit de 22.5 m de longueur. Cette vanne peut être tirée rapidement vers le haut afin de simuler une rupture de barrage instantanée. Une bosse triangulaire symétrique de 0.4 m de haut et de 6 m de longueur se situe à 13 m en aval de la vanne. Six points de jaugeage (G2, G8, G10, G11, G13 et G20), situés sur le lit du canal à distances différentes du barrage, sont utilisés pour mesurer l'élévation

de l'eau à chaque 0.1 s pour une période de 90 s. Les numéros des points de jaugeage indiquent la distance de la vanne, par exemple, G2 est situé à 2 m en aval de la vanne. Le coefficient de rugosité de Manning pour le lit du canal est de $0.0125 \text{ s/m}^{1/3}$.

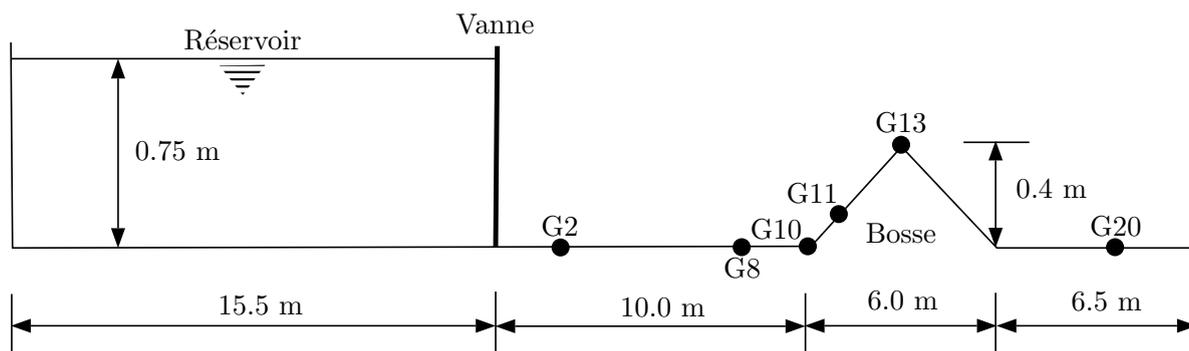


FIGURE 6.38 – Rupture d'un barrage sur une bosse triangulaire : Profil en long du canal.

Comme il concerne la comparaison des résultats numériques et les données expérimentales, ce cas de test a été souvent considéré par de nombreux chercheurs (*Loukili et Soulaïmani, 2007; Kuiry et al., 2010; Wood, 2010; Lai, 2012; Aricò et al., 2013; Kesserwani et Liang, 2010; Wang, 2011; Singh et al., 2011; Zhou et al., 2004; Chang et al., 2011; Črnjarić-Žic et al., 2004; Erpicum et al., 2010; Liao et al., 2007; Lai et Khan, 2012b; Prestininzi et al., 2014*).

L'extrémité amont est considérée comme une paroi solide. Les conditions aux limites aval sont étudiées expérimentalement selon trois cas :

- le premier cas est une sortie libre à l'aval ;
- le second cas consiste en un écoulement au-dessus d'un seuil à l'aval ;
- le troisième cas consiste en un écoulement de l'eau dans le canal avec un obstacle à l'aval empêchant l'eau de s'écouler à l'aval du canal.

La vanne est brusquement retiré à $t=0$ s et l'écoulement résultant est simulé pendant 90 s sur un maillage uniforme avec 22 800 éléments triangulaires réguliers et 12 176 nœuds. La simulation est effectuée avec $C = 0.8$.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'un résultat expérimental,
- de plusieurs conditions aux limites externes,
- d'une condition aux limites internes,
- d'un débit négatif en transitoire.

Après la rupture, l'eau emprisonnée dans le réservoir se propage en aval sur la plaine d'inondation. Après environ 3 s, le front d'onde atteint l'obstacle triangulaire et passe au-dessus de ceci. Il se forme une onde de choc due à l'interaction entre le flux entrant et la topographie du lit et commence à se propager dans une direction opposée vers la limite amont. Pendant que l'onde de choc se déplace en amont, une onde de raréfaction se développe et se déplace vers aval, ce qui diminue la profondeur d'eau au-dessus de la bosse. Plusieurs ondes de choc et de raréfaction

se déplacent dans des directions opposées le long du canal se réfléchies soit par la paroi amont, soit par la bosse. Ces interactions et processus de couvremet/découvremet continuent jusqu'à ce que l'écoulement soit amorti par des effets de frottement.

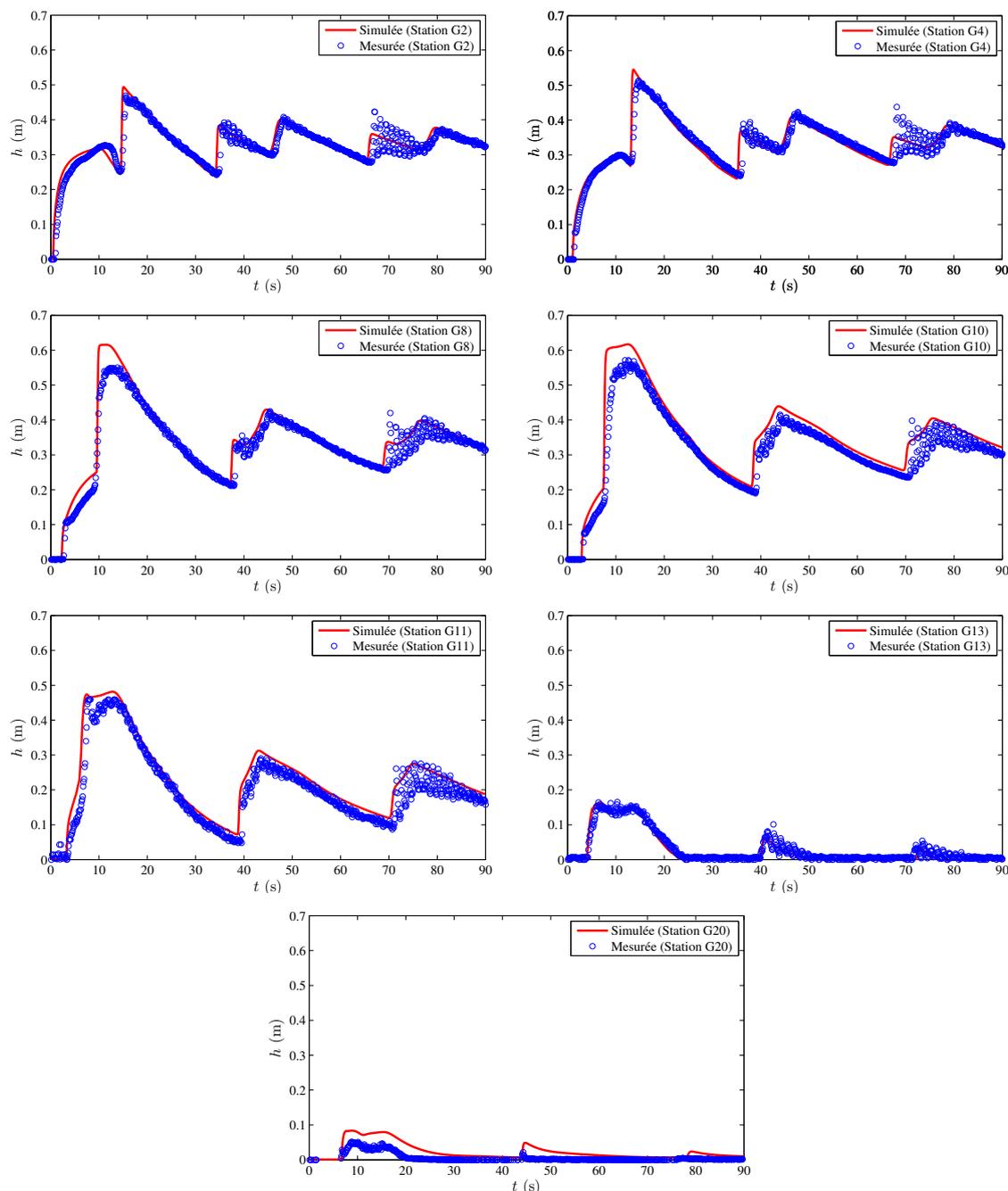


FIGURE 6.39 – Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d'un fond sec : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.

La figure 6.39 compare les profondeurs d'eau simulées avec celles mesurées aux points de jaugeage pour le cas d'un fond sec. Les résultats simulés sont en bon accord avec les données de mesures. Le temps d'arrivée de l'onde et la profondeur d'eau sont bien prédits à tous les points de mesure. Au point G2 situé en aval de la vanne, le temps d'arriver et la profondeur d'eau

sont précisément prédites. L'effet de couvrement/découvrement au point critique de mesure G13 situé au sommet de la bosse est modélisé correctement. Les profondeurs d'eau maximales prévue aux points G8, G10 et G11 sont plus élevées que les mesures expérimentales. Cela peut être dû à l'effet de la turbulence, l'entraînement d'air, ou la différence de rugosité à la transition au niveau de la bosse. Un petit écart est observé au point G20 (après la bosse) entre les valeurs numériques et mesurées en termes de profondeur d'eau. Ceci est également observé par d'autres chercheurs utilisant schémas numériques. La raison est peut-être liée au fait que la forme d'onde en aval de l'obstacle devient très complexe et instable, de sorte que l'hypothèse de la distribution hydrostatique de développent des équations de *Saint-Venant* n'est plus valable. Cependant, le temps d'arriver est précisément modélisé et cela est le facteur le plus important dans la simulation du problème de rupture de barrage.

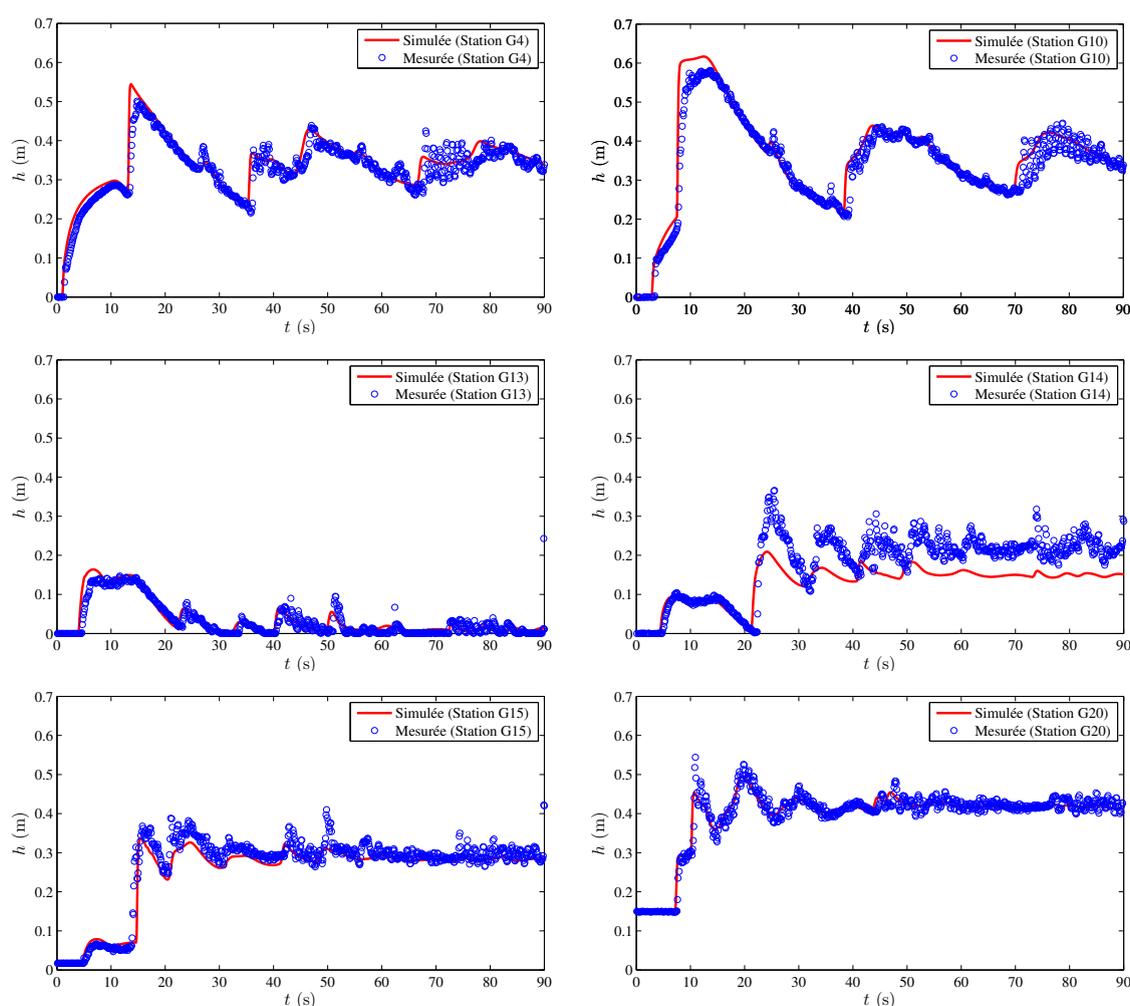


FIGURE 6.40 – Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d'un fond mouillé avec frontière fermée en aval : Comparaison des hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations.

Les figure 6.40 et 6.41 comparent les profondeurs d'eau simulées avec celles mesurées aux points de jaugeage pour le cas d'un fond mouillé. On enregistre alors un très bon accord entre les valeurs numériques et expérimentales en termes de temps d'arrivée de l'onde de rupture

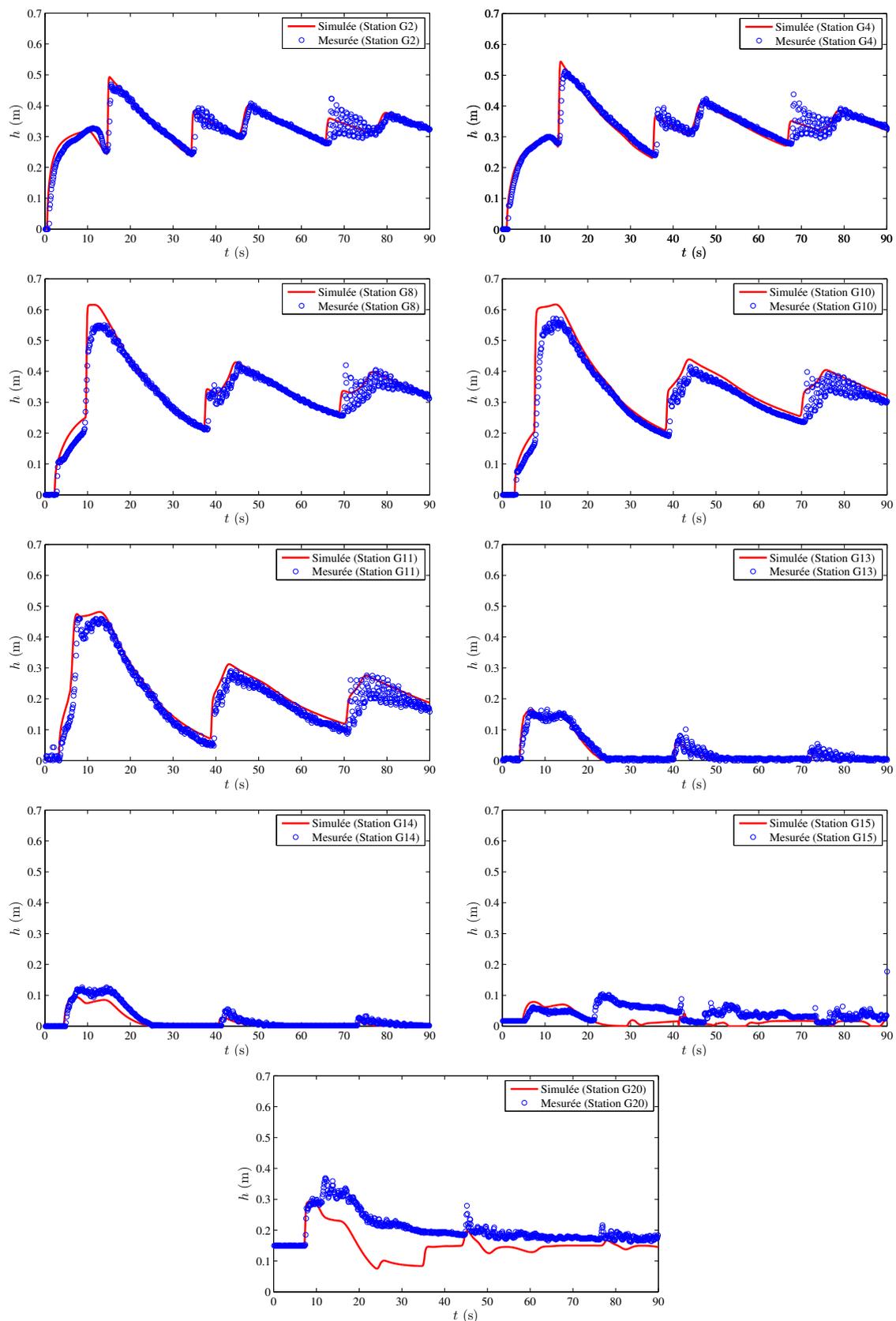


FIGURE 6.41 – Rupture de barrage sur une bosse triangulaire pour le cas d’un fond mouillé avec déversoir en aval : Comparaison des hauteurs d’eau calculées et observées sur les différentes stations.

et l'ampleur de cette onde, notamment au niveau de points de jaugeage (G2 jusqu'à G13). Puisque le niveau d'eau dans le réservoir et le fond (sec) dans les trois configurations sont les mêmes on observe les mêmes allures dans les stations G2 jusqu'à G11 que pour le cas d'un fond sec.

Pour le cas d'un fond mouillé avec frontière fermée en aval on observe des perturbations et une augmentation de niveau d'eau en aval du point de jauge G14. Ceci est dû à l'interaction de l'onde de rupture avec la frontière fermée en aval. Malgré ces perturbations on observe un très bon accord entre les valeurs numériques et expérimentales. Pour le cas d'un fond mouillé avec déversoir en aval, le désaccord est très bien remarqué surtout au niveau des deux points de jauge G15 et G20.

6.6.10 Rupture d'un barrage sur un fond à trois bosses

Ceci est un cas de test plus réaliste. Il est considéré ici pour donner une vision sur la performance globale du schéma RKDG dans la modélisation des inondations. Il concerne la simulation d'une onde de rupture de barrage sur une plaine initialement sèche contenant trois bosses. Ce test a été proposé dans *Kawahara et Umetsu (1986)* et a été reconsidérée par d'autres chercheurs (*Kesserwani et Liang, 2012; Lai et Khan, 2012b; Benkhaldoun et al., 2010; Nikolos et Delis, 2009*). Le domaine fermé rectangulaire s'étend sur une superficie de 75 mx30 m où la topographie du lit est définie par :

$$z_b(x,y) = \max \left[0, 1 - \frac{1}{8} \sqrt{(x-30)^2 + (y-6)^2}, \right. \\ \left. 1 - \frac{1}{8} \sqrt{(x-30)^2 + (y-24)^2}, \right. \\ \left. 3 - \frac{3}{10} \sqrt{(x-47.5)^2 + (y-15)^2} \right] \quad (6.33)$$

Le barrage se situe à une distance $x = 16$ m, la hauteur initiale de l'eau égale à $h = 1.875$ m tandis que le reste de canal est considéré comme sec ($h_{dry} = 0.001$ m). La topographie du fond est constituée de deux petits bosses symétriques et une grande qui se situe à l'aval. Le coefficient de rugosité de Manning est fixé à $n = 0.01$. Les conditions aux limites transmissives sont appliquées dans les parois latérales. En amont et en aval on fixe une limite fermé. Un pas de temps de 0.01 s et un maillage de 5015 éléments triangulaires sont utilisés dans la simulation (voir figure 6.42).

La Figure 6.43 montre l'évolution temporelle de la propagation de l'onde de la rupture à différents temps après la rupture du barrage. Juste après l'effondrement du barrage, une onde conduite par l'interface mouillée-sèche commence à inonder le bassin. À $t = 2$ s, le front de l'onde atteint les deux premiers bosses. Une onde de réflexion est ainsi créée. Elle commence à se propager en amont, tandis que le front mouillé/sec poursuit sa propagation en aval. A $t = 6$ s, les petites collines sont entièrement submergées, et le front de l'onde atteint la grande bosse. Une autre onde de réflexion est aussi créée juste après. Elle se déplace en amont et interfère les ondes de rupture en sens inverse. A $t = 12$ s, l'onde entoure totalement la grande bosse. Les réflexions créées par les deux petites collines sont unifiées pour former un front droit. Le

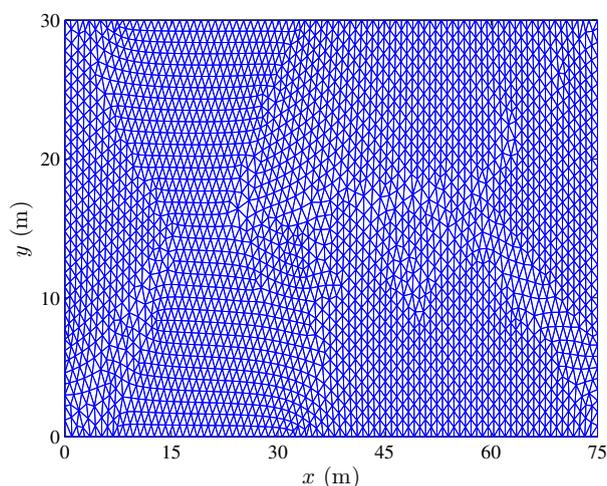


FIGURE 6.42 – Rupture d’un barrage sur un fond à trois bosses : maillage.

niveau d’eau autour la grande colline diminue à mesure que l’onde de réflexion s’éloigne. On montre sur la même figure et à $t = 30$ s, l’interaction de l’onde avec la paroi aval où une onde de réflexion est créée et se propage vers l’amont. Les interactions compliquées entre les différentes ondes, le mur et le fond ainsi que la dissipation d’énergie due au frottement avec le lit, mènent l’écoulement vers l’équilibre. A $t = 300$ s, l’état d’équilibre est atteint. Les crêtes de petites collines ne sont pas complètement submergées. Le modèle numérique simule avec précision les processus compliqués de mouillage et de séchage et produit des résultats qui sont très semblables à d’autres chercheurs (*Kesserwani et Liang, 2012; Lai et Khan, 2012b; Benkhaldoun et al., 2010; Nikolos et Delis, 2009*).

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode RKDG est appliquée à la simulation des écoulements à surface libre en deux dimensions dans les canaux naturels. Différents traitements des termes de flux numériques ont été discutés. On a décrit, aussi, la méthode de traitement du terme source et le limiteur de pente utilisé pour stabiliser le schéma numérique. Dix problèmes d’écoulements à surface libre ont été utilisés pour valider ce schéma. Les solutions numériques sont comparées avec des solutions analytiques ou avec des mesures en laboratoire. La méthode RKDG a été confrontée dans le cadre de différentes applications, qu’il s’agisse aussi bien du calcul des hauteurs d’eau que des débits, notamment dans des problèmes présentant des discontinuités dues à des ressauts hydrauliques ou des ruptures de barrages. Des comparaisons à la fois d’ordre quantitatives et qualitatives montrent que la méthode donne des résultats de bonne qualité. La méthode RKDG permet de considérer plus naturellement des phénomènes incluant des chocs et des ressauts hydrauliques.

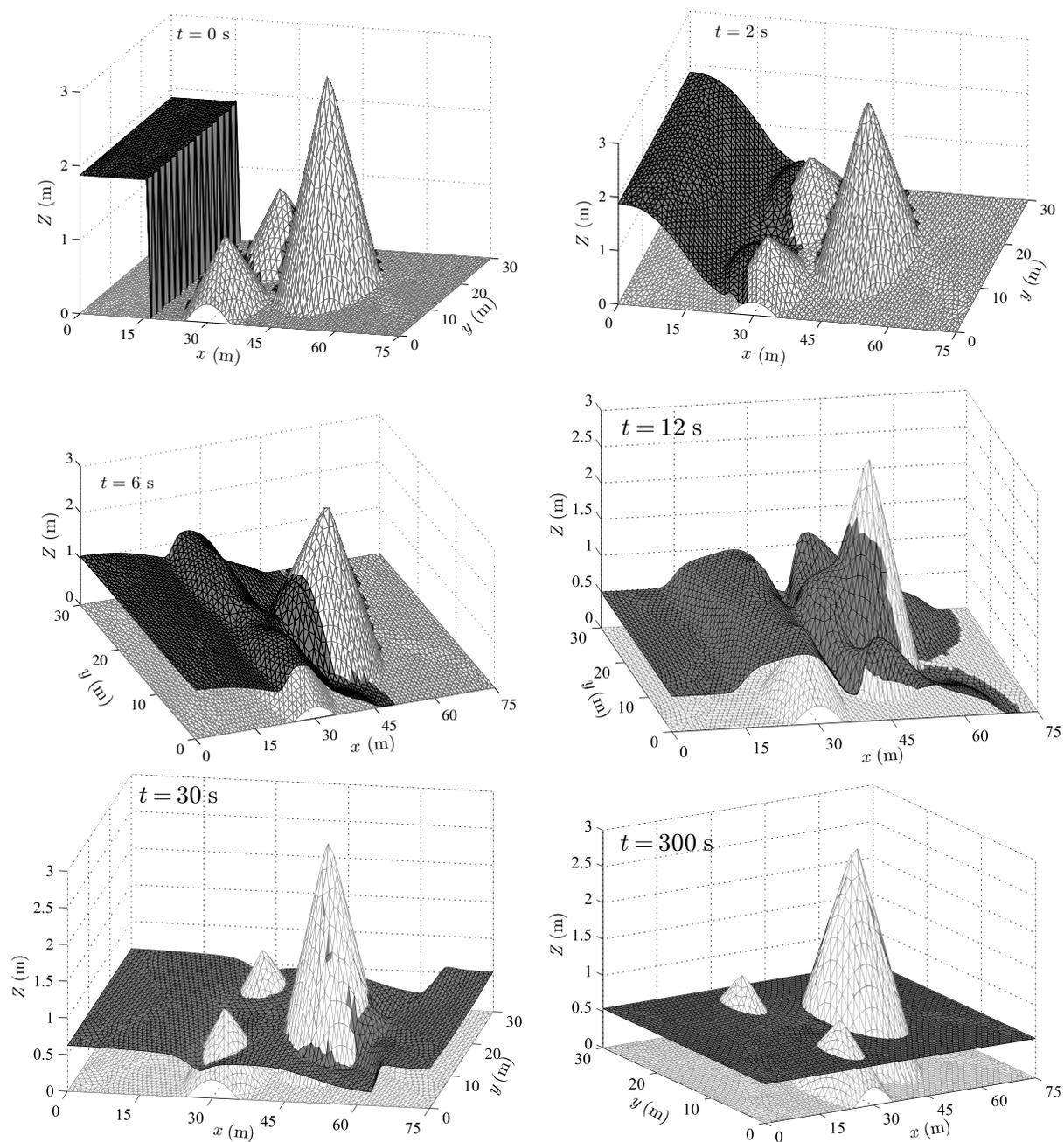


FIGURE 6.43 – Rupture d’un barrage sur un fond à trois bosses : Évolution de l’onde de rupture.

Chapitre 7

Application aux cas réels des problèmes de rupture de barrages

7.1 Introduction

Au cours du siècle dernier, il y avait plus de 200 ruptures de barrages de plus de 15 m de haut (*Singh, 1996; Zoppou et Roberts, 2000*). Ils ont causé une perte de plus de 8000 victimes et des millions de dollars de dommages (*Dutykh et Mitsotakis, 2010*). L'analyse de 534 ruptures de barrages dans 43 pays avant 1974 a indiqué que les ruptures de barrage en terre-enrochement représentaient la plus grande proportion. Dans ce type de barrages, 49% de ruptures sont causés par submersion, 28% est due aux infiltrations dans le corps du barrage et 29% aux infiltrations dans les fondations (*You et al., 2012*). Les écoulements dus aux crues produites par la rupture d'un barrage, de segments de digues, ou d'autres structures sont de nature torrentielle avec la présence d'un front discontinu qui se propage vers l'aval et une onde de raréfaction (de dépression) qui se propage vers l'amont. Les caractéristiques de ces écoulements tels que la vitesse, le niveau d'eau ainsi que le temps d'arrivée de crues doivent être déterminés en avance pour une gestion des crues et une réduction de leur impact sur l'environnement et l'infrastructure économique.

L'accident de Malpasset est un rare exemple de rupture totale et instantanée d'un barrage-voûte. À cause de la complexité de sa topographie et la disponibilité des données observées, le problème de la rupture du barrage de Malpasset est proposé par CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling) comme un cas-test typique de grandeur nature pour les modèles numériques qui ont pour but de simuler les écoulements dus à une rupture de barrage (*Goutal, 1999*). Ce chapitre présente les résultats de l'application du modèle proposé au cas du barrage de Malpasset.

L'accident de Malpasset a donné lieu à une enquête très approfondie qui fournit encore aujourd'hui de nombreuses données de bonne qualité portant sur l'inondation maximale engendrée et la propagation de l'onde et issues de relevés effectués sur le terrain par les forces de police, d'informations en provenance du réseau électrique et de mesures faites sur un modèle réduit non distordu à l'échelle 1/400, réalisé en laboratoire pour reconstituer et documenter l'inondation de rupture. Ces données permettront une validation du présent modèle. Cette validation pourrait

prouver la robustesse du modèle mais aussi le bon fonctionnement de la technique traitant les zones sèches et mouillées.

Les modèles numériques qui ont déjà été appliqués au cas de Malpasset dévoilent une grande variété de techniques numériques. La plupart de ces modèles sont basés sur la méthode des volumes finis (*Hervouet, 2003; Kesserwani et Liang, 2012; Zhang et Wu, 2011; Lai, 2012; Singh et al., 2011; Valiani et al., 2002; Yoon et Kang, 2004; Shi, 2006; Khan, 2010; Wang, 2011; Lai et Khan, 2012b; Ying et al., 2009*).

7.2 Histoire du barrage de Malpasset

Le barrage de Malpasset, d'une capacité de $55 \times 10^6 \text{ m}^3$ a été construit pour l'irrigation et pour approvisionner la réserve d'eau potable. La conception et la construction de ce barrage remonte aux années 1950, sur le cours du Reyran, dans le département du Var dans le sud-est de la France. Le site du barrage se situait à environ 12 km en amont de la ville côtière de Fréjus sur la Côte d'Azur, dans un rétrécissement marqué de la vallée. Ce site avait permis le développement d'un barrage techniquement très audacieux, constitué d'une voûte mince à double courbure de 66.5 m de hauteur et de 223 m de longueur en crête. L'épaisseur variait de 1.55 m à 6.77 m.

La retenue se remplissait progressivement vers la fin de l'année 1959 lorsque de fortes pluies enregistrées durant les derniers jours de novembre ont achevé le premier remplissage des quatre derniers mètres en trois jours. Le 2 décembre à 18 h, on décidait d'ouvrir la vanne de fond pour freiner la montée des eaux mais, à 21 h 14, le barrage explosait littéralement. À 1.5 km, on nota de fortes vibrations du sol et on entendit un bref grondement, suivi d'un fort courant d'air. Puis une première vague descendant vers la vallée de Reyran, suivie d'un véritable mur d'eau. La crue de rupture, dont on évalue le débit maximal à la brèche à plus de $30\,000 \text{ m}^3/\text{s}$, descendait la vallée du Reyran en transportant des blocs de béton énormes issus du barrage sur plusieurs centaines de mètres. La marque de trace d'élévation d'inondation a monté à un niveau jusqu'à 20 m au-dessus du niveau original de lit. La vague se répandit sur des zones habitées et l'on dénombra 433 victimes, modifiant la morphologie des lieux et détruisit des constructions civiles. Un kilomètre et demi en aval, l'autoroute de l'Esterel fut détruite sur 800 m et un pont fut emporté (*Hervouet, 2003; Shi, 2006; Marche, 2008*).

Après le drame, une faible portion de la voûte restait en place en rive droite, comme le montre la figure 7.1. Les investigations ont montré que la principale cause de l'accident est une faille dans le sous-sol à l'aval du barrage. Sous le poids de l'eau, la voûte s'est séparée de ses fondations et a pivoté en bloc sur sa partie droite, tandis que la partie gauche s'effondrait, puis la partie centrale (*Hervouet, 2003; Shi, 2006*).

Après cet accident, une enquête de terrains a été faite par la police locale. En outre, un modèle physique a été réalisé par LNHE/EDF pour étudier l'écoulement de rupture de barrage en 1964.

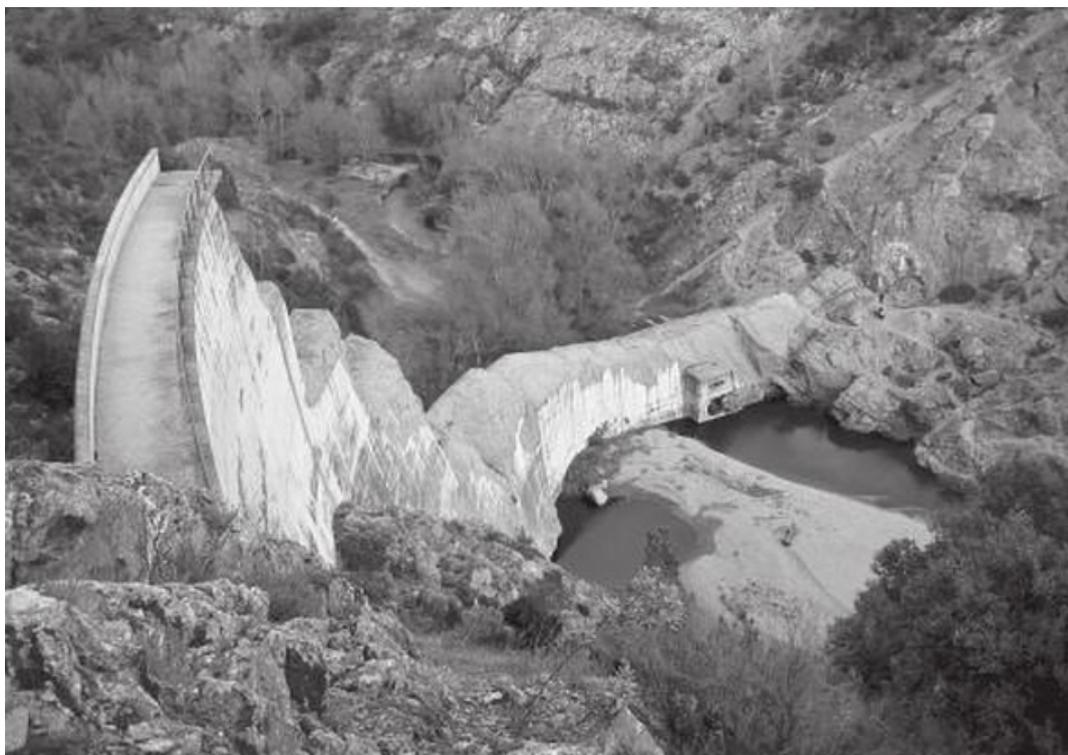


FIGURE 7.1 – État du site après la rupture du barrage de Malpasset (*Marche, 2008*).

7.3 Topographie de Malpasset

Les changements drastiques de morphologie dans la vallée de Reyran, ont rendu nécessaire l'utilisation d'une carte antérieure à l'accident. En conséquence, l'élévation de fond est dérivée la carte IGN (Institut Géographique National) à l'échelle de 1 :20000 de Saint-Tropez n°3, 1931, et numérisée par LNHE (*Alcrudo et Gil, 1999*) (Figure 7.2).

La vallée est très encaissée en aval du barrage, avec deux courbes à angle droit. Elle s'élargit ensuite en recevant quelques petits affluents, puis se rétrécit à nouveau avant d'atteindre finalement la plaine côtière.

La dimension du domaine étudié est de 17500 mx9000 m . La cote du fond va de -20 m (fond de la mer) à 100 m. La dernière valeur est estimée de la cote de la surface libre initiale dans le réservoir, sur la quelle il existe une incertitude de ± 50 cm, mais des tests ont cependant montré que cette erreur n'avait qu'une incidence de 1% sur le temps de propagation de l'onde (*Hervouet, 2003*). La Figure 7.2 présente la topographie de Malpasset.

7.4 Données de calcul et points de comparaison

La Figure 7.2 présente une carte des points où les données sont disponibles : les positions des transformateurs (A, B et C), des points d'observations par la police (P1-P17) et des points de mesures issues du modèle physique (G6- G14).

Après l'accident, des données d'observations ont été rendues disponibles par l'Électricité

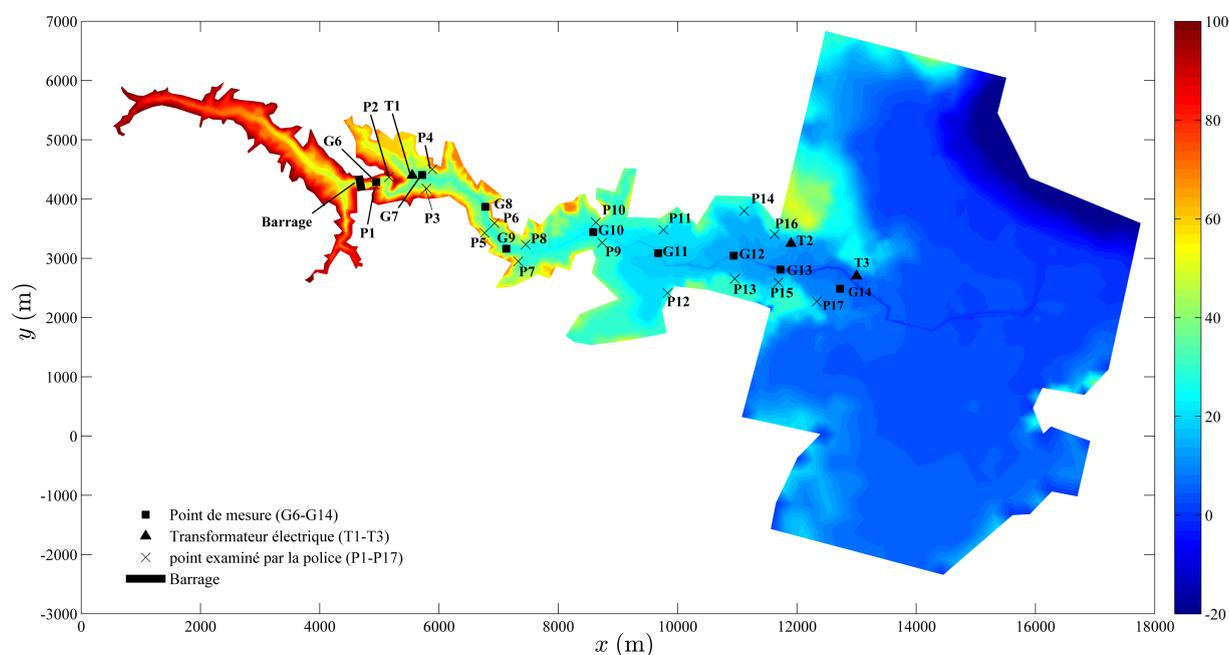


FIGURE 7.2 – Rupture du barrage de Malpaset : topographie et positions des transformateurs (A, B et C), des points examinés par la police (P1-P17) et des points de mesures issues du modèle physique (G6- G14).

De France (EDF). Parmi elles, la propagation de l'onde de crue a pu être repérée à l'aide des positions de trois transformateurs électriques. En effet, l'onde a successivement détruit sur son passage trois transformateurs, A, B et C, et l'instant de la coupure électrique de chacun de ses trois transformateurs a été précisément enregistré.

Le Tableau 7.1 donne les coordonnées des trois transformateurs électriques. Le transformateur A, qui se trouvait dans la vallée près du barrage, a été frappé environ 100 s après la rupture. L'instant de la frappe peut représenter le temps d'arrivée de l'onde de crue. Ce chiffre est cependant entaché d'erreurs sur l'heure de la rupture à 21h14. Les transformateurs B et C étaient en aval de vallée. Les instants des frappes sont probablement entre le temps d'arrivée de l'onde et le temps auquel l'onde a atteint son sommet. Le temps de transit entre A et B est beaucoup mieux connu : 1140 s, et servira pour la validation. L'onde de crue a atteint la mer à 21h50 environ.

TABLE 7.1 – Coordonnées des trois transformateurs électriques (*Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010*).

Transformateurs électriques	Coordonnées x (m)	Coordonnées y (m)
A	5550	4400
B	11900	3250
C	13000	2700

Après l'accident, une enquête a été effectuée par la police locale. Les cotes maximales de la surface libre atteintes en rives gauche et droite de la vallée ont été recueillies. Les points examinés les plus significatifs sont notés comme P1-P17. Le Tableau 7.2 donne les coordonnées de 17 points examinés par la police.

TABLE 7.2 – Coordonnées de points examinés par la police (*Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010*).

	Points Examinés par la Police	Coordonnées x (m)	Coordonnées y (m)
Rive Droite	P1	4913.1	4244.0
	P3	5790.6	4177.7
	P5	6763.0	3429.6
	P7	7326.0	2948.7
	P9	8735.9	3264.6
	P12	9832.9	2414.7
	P13	10957.2	2651.9
	P15	11689.0	2592.3
	P17	12333.7	2269.7
Rive Gauche	P2	5159.7	4369.6
	P4	5886.5	4503.9
	P6	6929.9	3591.8
	P8	7451.0	3232.1
	P10	8628.6	3604.6
	P11	9761.1	3480.3
	P14	1115.7	3800.7
	P16	11626.0	3406.8

En outre, un modèle physique à l'échelle 1/400 a été réalisé par le Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE) de l'EDF en 1964 et calibré avec les données d'observations. On dispose donc des mesures effectuées sur ce modèle, dont la calibration a amené à estimer que le coefficient de Manning dans la vallée était dans l'intervalle de 0.025–0.033. Dans le modèle, ont été recueillis 14 points de mesure des cotes de la surface libre, dont 5 dans le réservoir. Les coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage sont données dans le Tableau 7.3. La cote maximum de la surface libre sur chaque point de mesure a été relevée.

7.5 Application

Initialement, une masse d'eau à la cote de 100 m est retenue dans le réservoir. Le niveau de la mer est égal à zéro. Excepté dans le réservoir et en mer, le fond est sec bien que la porte de sortie ait été ouverte au départ du calcul. Au temps $t=0$ s, il y a ainsi un mur d'eau de 55 m de haut à l'emplacement du barrage. Les vitesses sont nulles partout dans le domaine.

TABLE 7.3 – Coordonnées de 9 points de mesure en aval du barrage par le modèle physique (*Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010*).

Points de mesure par le modèle physique	Coordonnées x (m)	Coordonnées y (m)
G6	4947.4	4289.7
G7	5717.3	4407.6
G8	6775.1	3869.2
G9	7128.2	3162.0
G10	8585.3	3443.1
G11	9675.0	3085.9
G12	10939.1	3044.8
G13	11724.4	2810.4
G14	12723.7	2485.1

Le débit propre du fleuve de Reyran de 20–40 m³/s est négligeable en comparaison du débit d'inondation de 45 000 m³/s provoquée par la rupture de barrage. La rupture fut totale et instantanée. En conséquence, en amont du réservoir, un débit constant égal à zéro est imposé.

À la mer, les frontières sont libres et donc "transparentes". Une condition de radiation est utilisée pour déterminer les dénivellations de la surface libre sur ces frontières ouvertes à l'entrée ou à la sortie vers la mer.

Les deux côtés de la vallée sont considérés comme des parois imperméables. Une condition de non glissement est imposée.

Le domaine est discrétisé par un maillage de 26000 triangles et de 13541 points, utilisé par le LNHE (*Hervouet, 2003*) et par d'autres auteurs (*Hervouet, 2003; Shi, 2006; Khan, 2010*). La taille des mailles varie de 5 m à 300 m (Figure 7.3). La figure 7.4 montre les conditions initiales utilisées dans la simulation.

Comme le suggère *Goutal (1999)*, la brèche du barrage est modélisée par une ligne droite entre les points de coordonnées (4701.18 m, 4143.41 m) et (4655.5 m, 4392.10 m) et les restes du barrage après la rupture ne sont pas prises en compte.

La durée de simulation est de 4000 s, après la rupture du barrage. Les différentes valeurs du coefficient de frottement sont utilisées pour étudier la sensibilité de ce paramètre à la propagation du front de choc et le temps de transit entre les transformateurs. Nous les présenterons plus tard.

7.6 Résultats et discussions

7.6.1 Résultats numériques aux différents instants

Les Figure 7.5 à Figure 7.10 présentent les résultats calculés par le modèle proposé à t=60 s, 5 min, 10 min, 20 min, 40 min et 4000 s, respectivement.

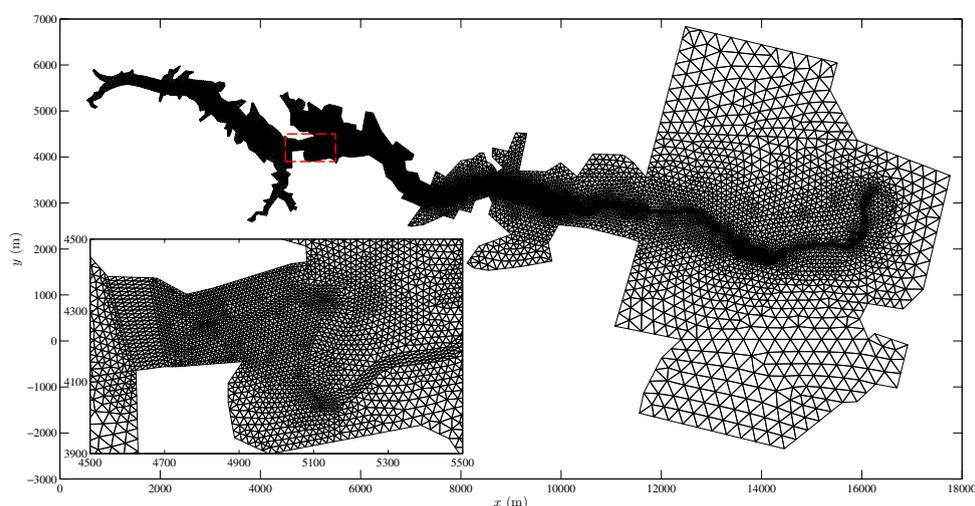


FIGURE 7.3 – Rupture du barrage de Malpasset : maillage du domaine.

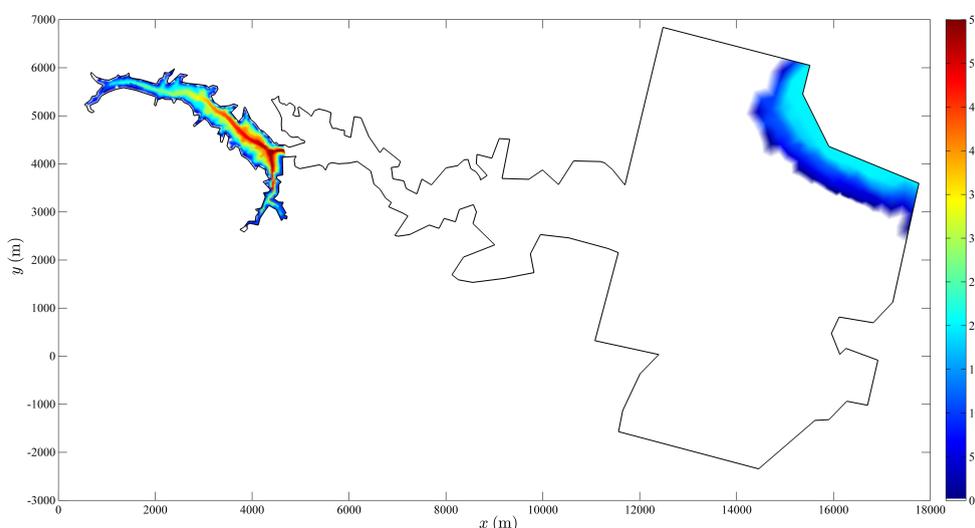


FIGURE 7.4 – Rupture du barrage de Malpasset : Profondeur d'eau initiale.

La Figure 7.5 donne le champ de vitesse à l'aval du barrage, une minute après la rupture. L'effet du virage est déjà notable, avec un début d'une recirculation en rive droite. La vitesse maximum est de 34 m/s, ce qui comparé à une rupture unidimensionnelle sur le fond plat donnerait une vitesse de 23.2 m/s (*Hervouet, 2003*), montre un effet d'accélération due à la pente et au rétrécissement de la vallée. Les vitesses à $t=20$ min sont représentées dans la Figure 7.8. Sur cette figure, nous observons que, au niveau de deux virages en rive droite, l'écoulement n'occupe pas toute la section transversale. Au premier virage, il se concentre en rive droite, et en rive gauche au deuxième virage. Ceci est dû aux importantes pentes transversales (4 m entre les deux rives). Ces phénomènes sont aussi notés par le modèle physique et par *Hervouet (2003)*. Les Figures 7.9 représentent la profondeur d'eau et les contours de vitesses à $t = 40$ min, quand l'onde commence à atteindre la mer.

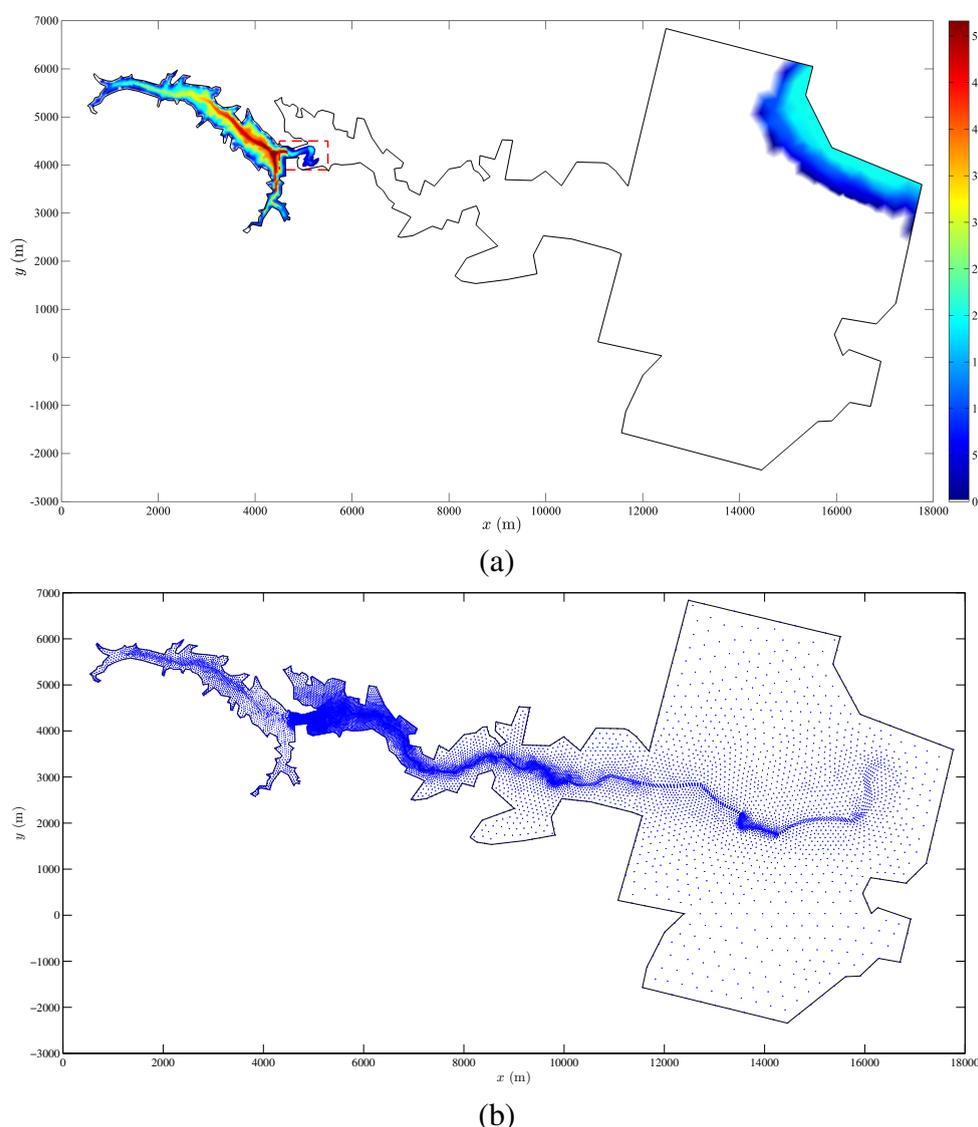
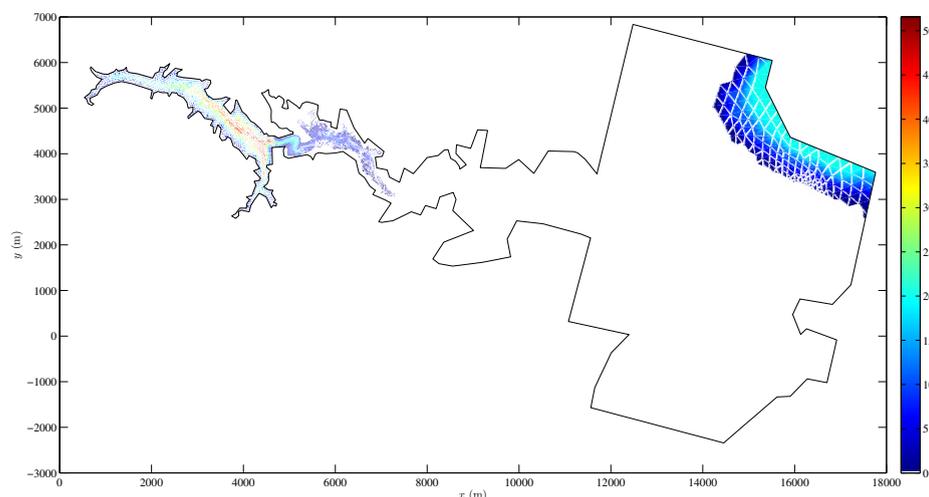
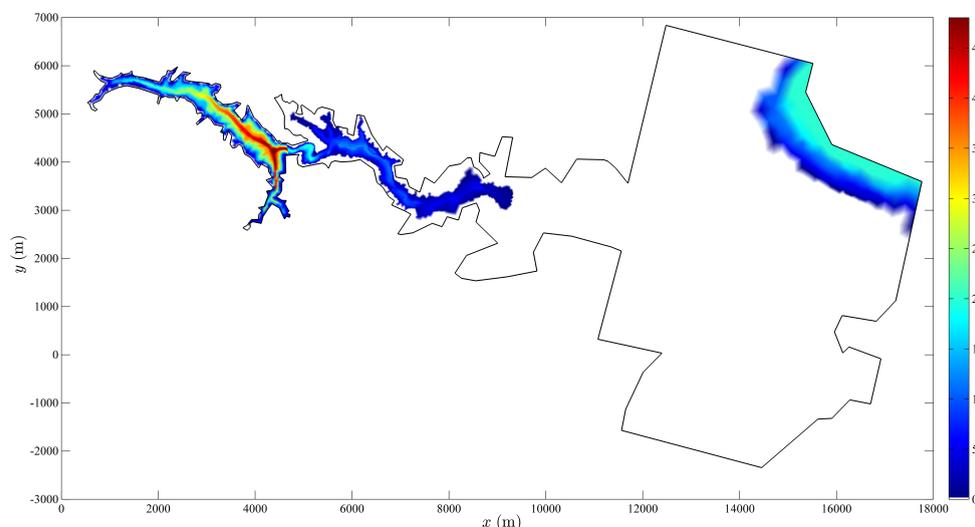


FIGURE 7.5 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 60$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.

7.6.2 Temps de propagation

La prévision de temps d'arrivée de l'onde sur les trois transformateurs électriques n'est pas une tâche facile car le moment auquel la profondeur d'eau à ces endroits devient non nulle ne peut pas être considéré comme un critère rigoureux. Il est nécessaire de proposer un critère clair concernant le temps d'arrivée de l'onde. Le temps d'arrivée de l'onde à un endroit est marqué quand la profondeur d'eau h atteint à une hauteur préalablement définie. Elle est de 0.5 m dans *Alcrudo et Gil (1999)* et 0.20 m dans cette application.

Le Tableau 7.4 présente l'influence du coefficient de frottement Manning sur les temps de transit entre les transformateurs électriques. Nous observons que les résultats du temps d'arrivée au transformateur A s'écartent légèrement de celui d'observation. Ces écarts peuvent être dus à l'incertitude sur l'instant exact de la rupture du barrage (*Alcrudo et Gil, 1999*). C'est pour cela

FIGURE 7.6 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 300$ s : Profondeur d'eau en 2D.FIGURE 7.7 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 600$ s : Profondeur d'eau en 2D.

que non seulement les temps d'arrivée de l'onde de crue aux transformateurs électriques, mais aussi les temps de parcours de l'onde de crue entre deux points sont des critères importants pour juger si le modèle reproduit les phénomènes d'écoulement avec précision ou non. Quand le coefficient de Manning est égal à $0.033 \text{ s/m}^{1/3}$, l'erreur de calculs sur le temps de transit de A à B est seulement de -0.44% et de -0.45% de A à C. L'accordance entre les résultats calculés et les observations est très satisfaisante lorsque $n_m=0.033 \text{ s/m}^{1/3}$.

Le Tableau 7.5 compare les temps de coupure des transformateurs électriques avec les temps d'arrivée de l'onde jusqu'aux transformateurs obtenus par le présent modèle et par les autres travaux tels que de :

- [Hervouet \(2003\)](#) qui a utilisé un logiciel de type élément finis, Telemac-2D développé par électricité de France (EDF). Le nombre des éléments utilisé est 26000 éléments.
- [Valiani et al. \(2002\)](#) qui ont utilisé la méthode des volumes finis et le solveur de Riemann

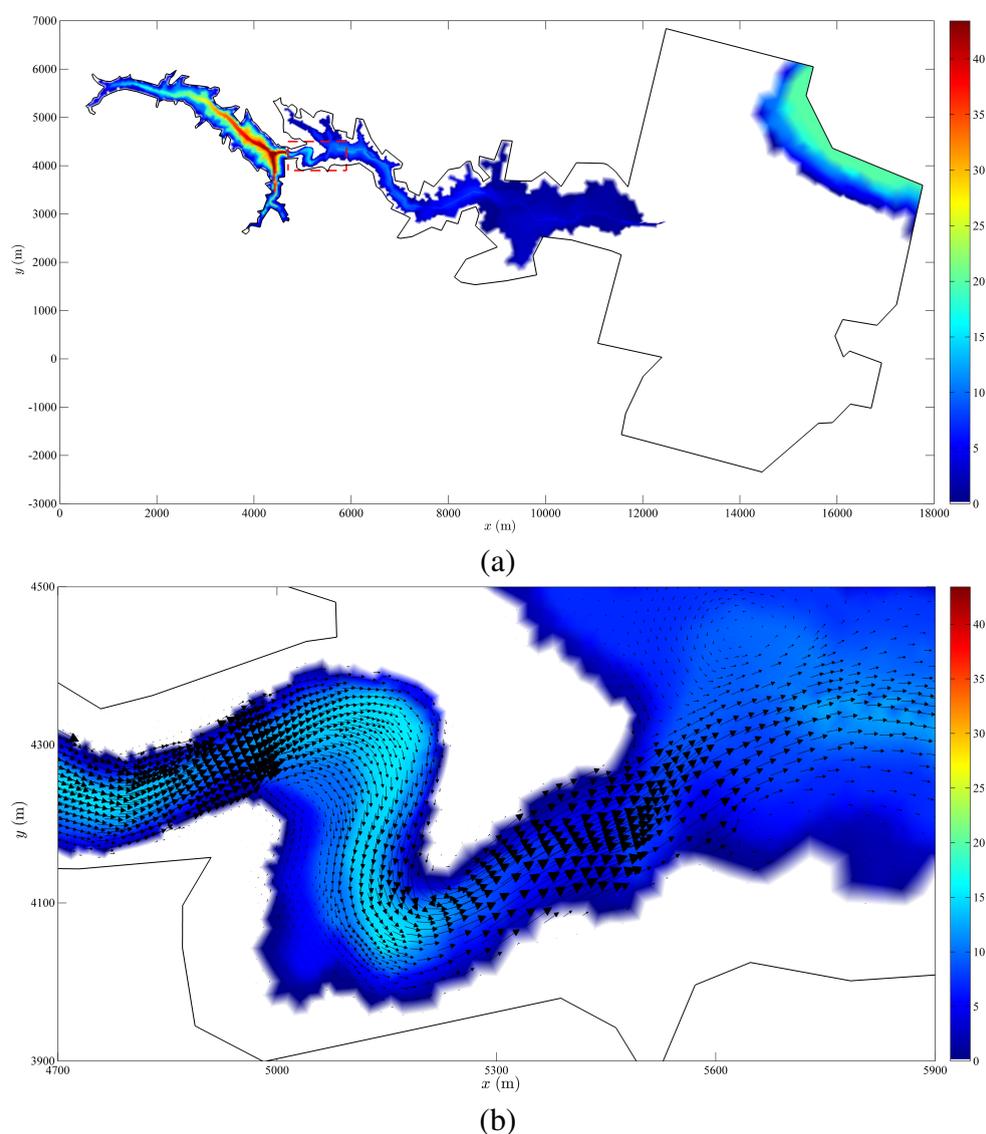


FIGURE 7.8 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 1200$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.

approché de type HLL sur une grille de calcul de 10696 éléments.

- [Yoon et Kang \(2004\)](#) qui ont également utilisé la méthode des volumes finis et le solveur de Riemann approché de type HLL mais sur un maillage triangulaire non structuré. Le nombre des éléments utilisé est de 70000 éléments.
- [Li \(2008\)](#) qui a utilisé le modèle de simulation PIHM-Hydro basé sur la méthode des volumes finis décentrée. Ce modèle utilise les solveurs de Riemann approchés de type Roe et HLL sur une grille triangulaire non structurée de 38208 éléments.
- [Gonzalez-Ramirez \(2010\)](#) qui a utilisé le logiciel RiverFLO-2D basé sur la méthode des éléments finis sur maillages triangulaires non structurés. Le nombre des éléments utilisé est de 30935 éléments.
- [Huang et al. \(2013\)](#) qui ont utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre le système

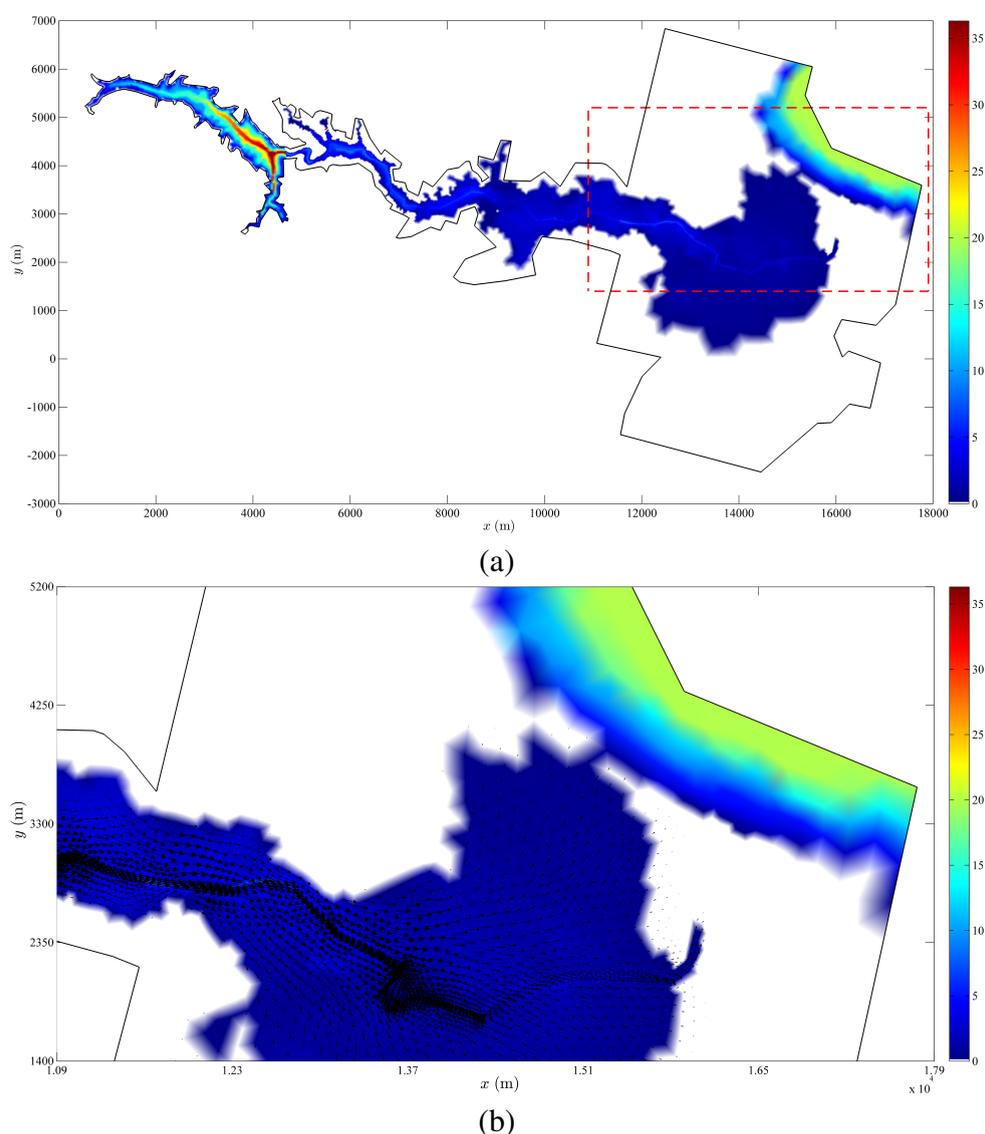


FIGURE 7.9 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 2400$ s : (a) Profondeur d'eau en 2D et (b) Champ de vitesses tracé sur les contours de la profondeur d'eau.

des équations de *Saint-Venant*. Les flux numériques sont calculés par un solveur de Riemann de type HLLC. Les auteurs ont utilisé un maillage hybride non structuré constitué de 2553 de quadrangles pour le cours d'eau et de 19412 triangles ailleurs.

Les temps d'arrivée aux transformateurs fournis par ces travaux sont obtenus en utilisant un coefficient de Strickler $K_s = 30 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, qui correspond à un coefficient de Manning $n_m = 0.033 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$. Les temps d'arrivée de l'onde obtenus par notre modèle est plus tôt que ceux obtenus par *Hervouet (2003)* et *Yoon et Kang (2004)*. Clairement, l'accord entre nos résultats calculés et les observations est très satisfaisant lorsque $n_m = 0.033 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$.

Le Tableau 7.6 compare les temps d'arrivée de l'onde calculés par le présent modèle à ceux obtenus à partir du modèle physique (points S6–S14). Une série de 5 valeurs du coefficient de Manning a été utilisée, afin d'étudier la sensibilité du modèle à la variation du coefficient de frottement. Dans le Tableau 7.6 on note que plus la valeur de Manning est petite, plus tardive

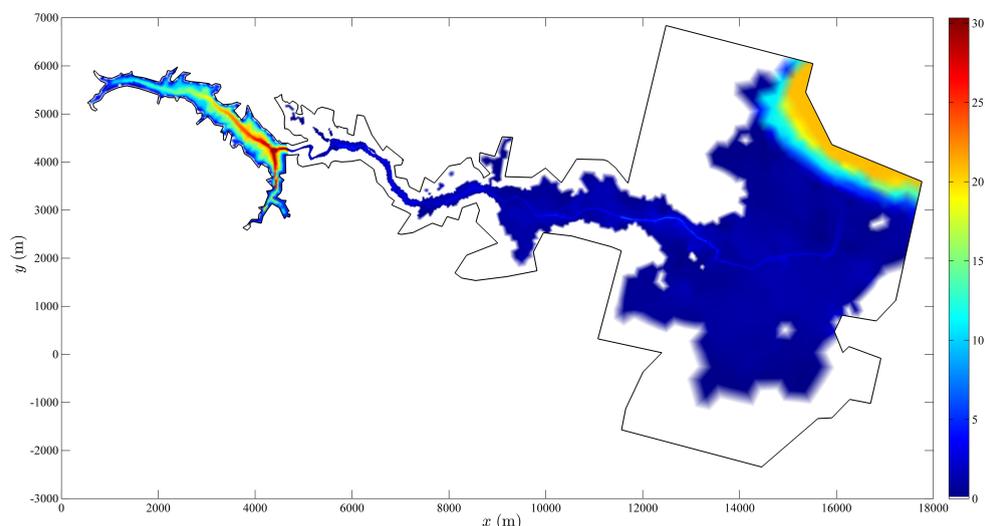
FIGURE 7.10 – Rupture du barrage de Malpasset à $t = 4000$ s : Profondeur d'eau en 2D.

TABLE 7.4 – Influence du coefficient de Manning sur les temps de transit (en secondes) entre les transformateurs électriques.

Coefficient de Manning n_m (s/m ^{1/3})	A	B	C	B-A	C-A
Observations	100.0	1240.0	1420.0	1140.0	1320.0
0.025	113.0	1080.0	1239.0	967.0 (-15.18%)	1126.0 (-14.70%)
0.029	104.0	1146.0	1312.0	1042.0 (-8.60%)	1208.0 (-8.48%)
0.031	103.0	1186.0	1358.0	1083.0 (-5.00%)	1255.0 (-4.92%)
0.033	97.0	1332.0	1411.0	1135.0 (-0.44%)	1314.0 (-0.45%)
0.040	95.0	1349.0	1543.0	1254.0 (+10.00%)	1448.0 (+9.70%)

TABLE 7.5 – Comparaison du temps d'arrivée de l'onde aux transformateurs électriques.

Modèle	A	B-A	C-A
Observations	100.0	1140.0	1320.0
<i>Valiani et al. (2002)</i>	98.0 (-2.0%)	1207.0 (+5.88%)	1303.0 (-1.29%)
<i>Hervouet (2003)</i>	110.5 (+10.5%)	1176.5 (+3.20%)	1325.0 (+0.38%)
<i>Yoon et Kang (2004)</i>	103.0 (+3.0%)	1170.0 (+2.63%)	1333.0 (+0.98%)
<i>Li (2008)</i>	130.0 (+30.0%)	1095.0 (-3.95%)	1270.0 (-3.79%)
<i>Gonzalez-Ramirez (2010)</i>	108.0 (+8.0%)	1152.0 (+1.05%)	1192.0 (-9.70%)
<i>Huang et al. (2013)</i>	98.0 (-2.0%)	1167.0 (+2.37%)	1304.0 (-1.21%)
Notre Modèle	97.0 (-3.0%)	1135.0 (-0.44%)	1314.0 (-0.45%)

sera l'arrivée de l'onde. La valeur de $n_m = 0.033$ m^{-1/3}/s donne une meilleure estimation entre le temps d'arrivée calculé et celui observé.

TABLE 7.6 – Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure.

Points	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Observations	10.2	102.0	182.0	263.0	404.0	600.0	845.0	972.0	1139.0
0.025	10.0	92.0	171.0	259.0	412.5	573.0	771.0	882.5	1054.5
0.029	10.0	92.0	186.5	282.5	440.0	618.0	843.5	966.5	1214.5
0.031	10.0	92.5	195.0	287.5	451.5	633.0	868.0	995.5	1255.0
0.033	10.0	92.5	203.5	292.5	462.5	648.0	892.5	1024.5	1295.0
0.040	10.0	94.0	232.5	310.5	501.5	701.0	979.0	1126.6	1436.0

La Figure 7.11 compare l'évolution du temps d'arrivée de l'onde obtenue par notre modèle (avec différents valeurs de coefficient de Manning n_m) aux données mesurées à partir du modèle physique. La valeur de $n_m = 0.033 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$ donne une bonne concordance.

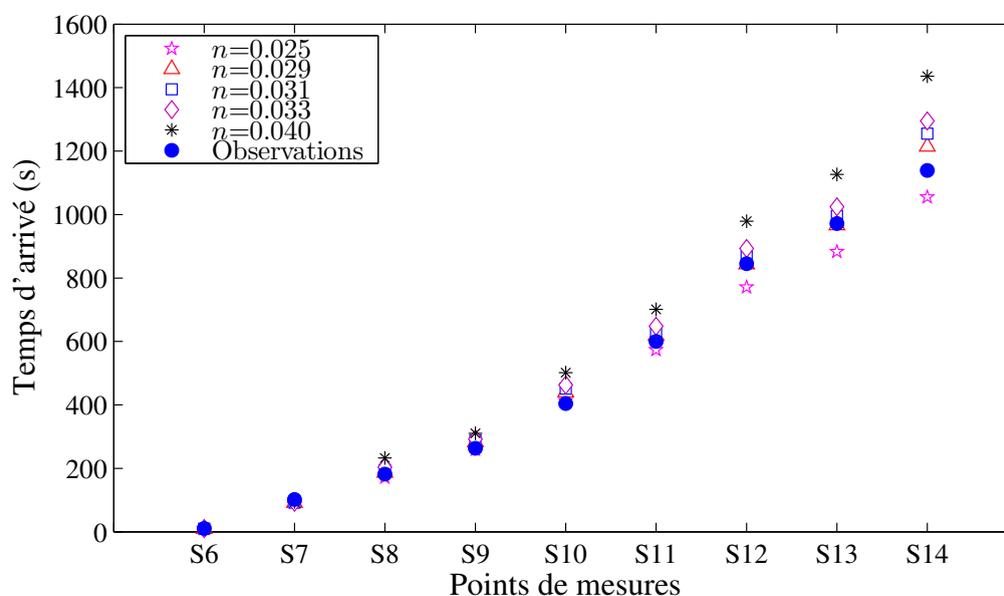


FIGURE 7.11 – Rupture du barrage de Malpasset : Temps d'arrivée de l'onde aux points de mesure.

7.6.3 Niveau d'eau maximum

Le profil des cotes maximales de la surface libre, passé par les points observés, représente une enveloppe du front de l'onde qui se propage pendant l'accident (Tableau 7.7). Ces profils en rive droite et gauche obtenus par les modèles numériques comparés avec les observations données par la police sont tracés dans les Figure 7.12 et Figure 7.13, respectivement. Nous observons que la plupart de nos résultats numériques aux deux rives droite et gauche sont plus près des observations de la police.

La Figure 7.14 présente la même comparaison mais confrontés, cette fois, aux points de me-

TABLE 7.7 – Comparaison de la cote maximale de la surface libre aux points observés par la police.

Cote maximale de la surface libre (m)									
Rive Droite									
Points	P1	P3	P5	P7	P9	P12	P13	P15	P17
Observations	79.15	54.90	51.10	44.35	31.90	24.90	17.25	18.60	14.00
<i>Valiani et al. (2002)</i>	75.96	53.77	45.56	42.86	32.44	27.35	23.58	19.37	14.23
<i>Yoon et Kang (2004)</i>	75.13	55.09	47.11	40.47	33.16	25.96	24.41	19.08	16.00
<i>Li (2008)</i>	88.09	52.92	47.61	42.49	33.10	28.23	21.82	19.36	15.87
<i>Gonzalez-Ramirez (2010)</i>	84.69	57.18	50.47	38.81	31.91	26.69	25.55	18.94	16.44
<i>Huang et al. (2013)</i>	91.46	52.05	48.39	39.64	32.87	26.01	23.22	18.85	13.89
Notre modèle	90.81	52.92	46.46	41.15	32.39	26.08	23.06	19.33	15.79
Rive Gauche									
Points	P2	P4	P6	P8	P10	P11	P14	P16	
Observations	87.20	64.70	43.75	38.60	40.75	24.15	20.70	17.25	
<i>Valiani et al. (2002)</i>	89.34	59.64	44.85	34.61	38.12	25.37	23.19	20.39	
<i>Yoon et Kang (2004)</i>	87.38	57.41	45.74	32.58	38.29	25.16	20.58	17.04	
<i>Li (2008)</i>	84.99	56.98	45.67	31.73	37.70	23.77	21.28	20.20	
<i>Gonzalez-Ramirez (2010)</i>	87.38	60.60	47.88	36.80	37.73	25.41	21.03	19.78	
<i>Huang et al. (2013)</i>	91.15	63.70	47.06	36.63	38.93	25.62	20.90	18.63	
Notre modèle	90.10	57.80	43.59	32.82	38.13	24.07	21.48	20.38	

TABLE 7.8 – Comparaison de la cote maximale de la surface libre aux points de mesures sur le modèle physique.

Points	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Observations	84.20	49.10	54.00	40.20	34.90	27.40	21.50	16.10	12.90
<i>Valiani et al. (2002)</i>	81.98	53.86	53.80	48.39	36.88	25.54	18.48	17.43	12.60
<i>Hervouet (2003)</i>	87.97	54.43	53.25	47.91	36.51	25.37	19.13	17.65	12.76
<i>Yoon et Kang (2004)</i>	80.85	55.80	53.54	48.68	37.00	25.70	19.23	17.12	12.86
<i>Li (2008)</i>	88.89	52.76	53.51	48.52	37.68	25.54	18.07	18.35	12.66
<i>Gonzalez-Ramirez (2010)</i>	86.16	56.65	54.79	48.20	36.82	26.49	20.08	18.15	13.48
<i>Huang et al. (2013)</i>	88.68	54.57	55.42	47.94	37.08	26.26	19.63	18.11	13.22
Notre modèle	88.68	54.57	55.42	47.94	37.08	26.26	19.63	18.11	13.22

sure obtenus par le modèle physique. L'écart entre les résultats numériques et ceux du modèle physique est maximal au point S9. Les auteurs précités font la même remarque dans leurs résultats. On remarque qu'aux stations de mesures, nos résultats sont similaires à ceux de *Huang et al. (2013)*. Il semble aussi qu'aux points S10, S11 et S12, c-à-d plus vers l'aval les résul-

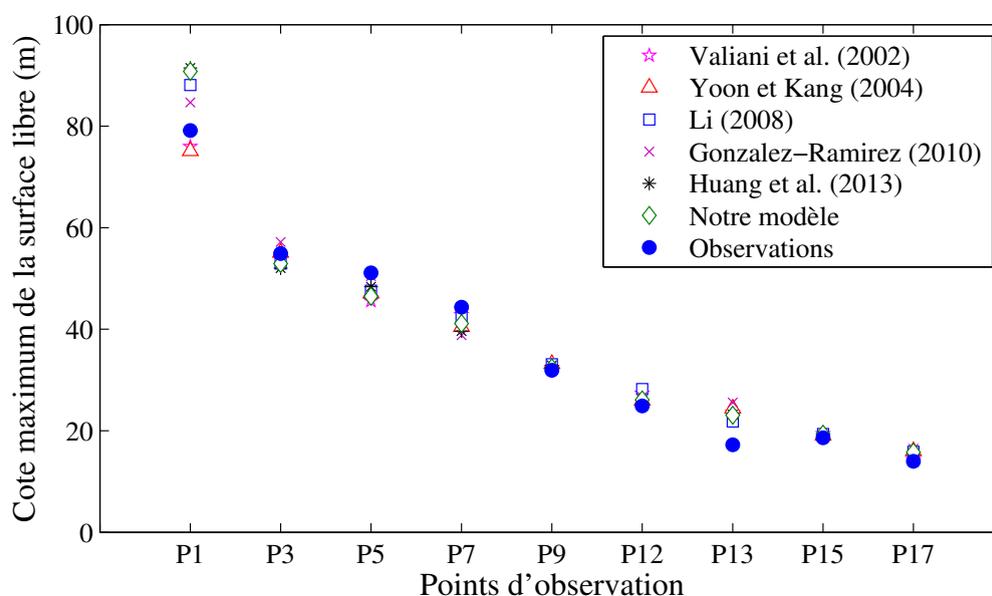


FIGURE 7.12 – Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points d’observation en rive droite.

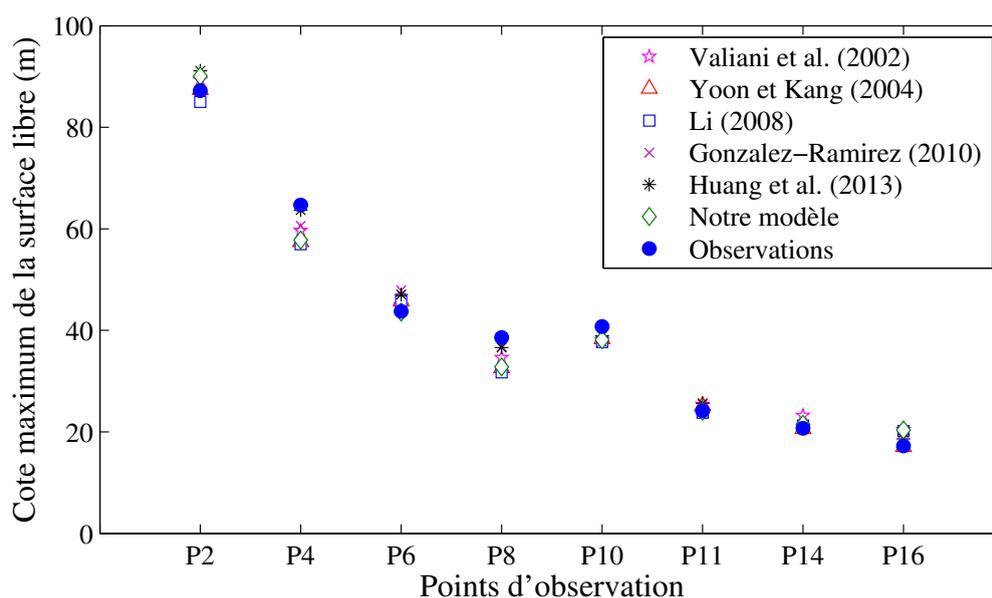


FIGURE 7.13 – Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points d’observation en rive gauche.

tats de notre modèle approchent mieux les mesures physiques qu’aux points situés plus vers l’amont. De façon générale, une bonne concordance entre les résultats des mesures effectuées et les observations, et les résultats calculés par le schéma GD est obtenue sauf aux points S6 et S9.

Les cotes maximales de la surface libre calculées par le présent modèle, utilisant le coefficient de Manning dont la variation est importante de 0.025 à 0.040, sont comparées aux ob-

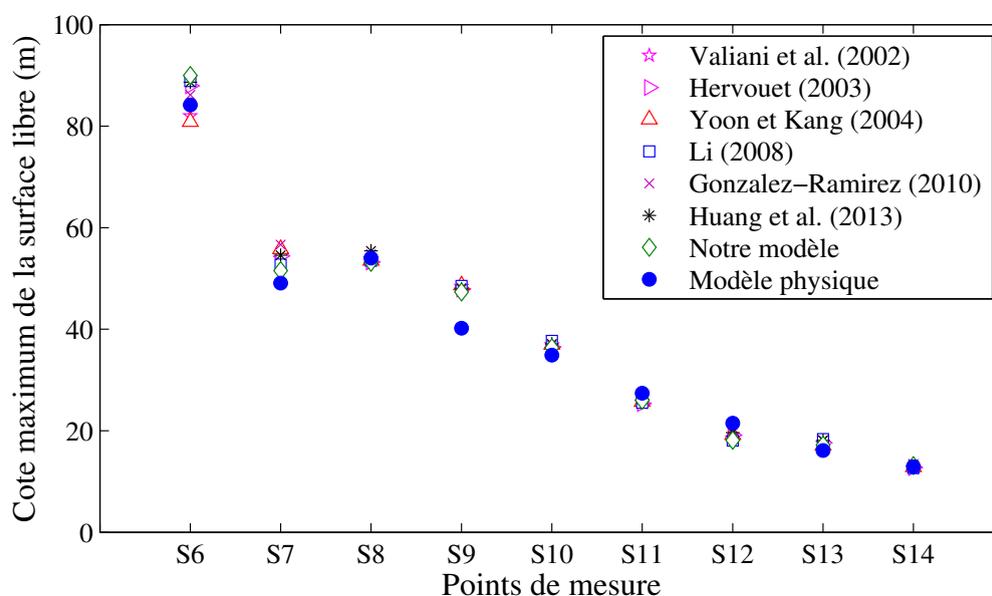


FIGURE 7.14 – Rupture du barrage de Malpasset : Cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique.

servations par la police (Figures 7.15 et 7.16) et aux mesures obtenues par le modèle physique (Figure 7.17). Nous observons que les courbes des cotes maximales de la surface libre calculées avec les coefficients de Manning se concordent bien. Un décalage léger est observé entre les résultats calculés et les autres résultats. En générale, l'influence du coefficient de frottement reste faible.

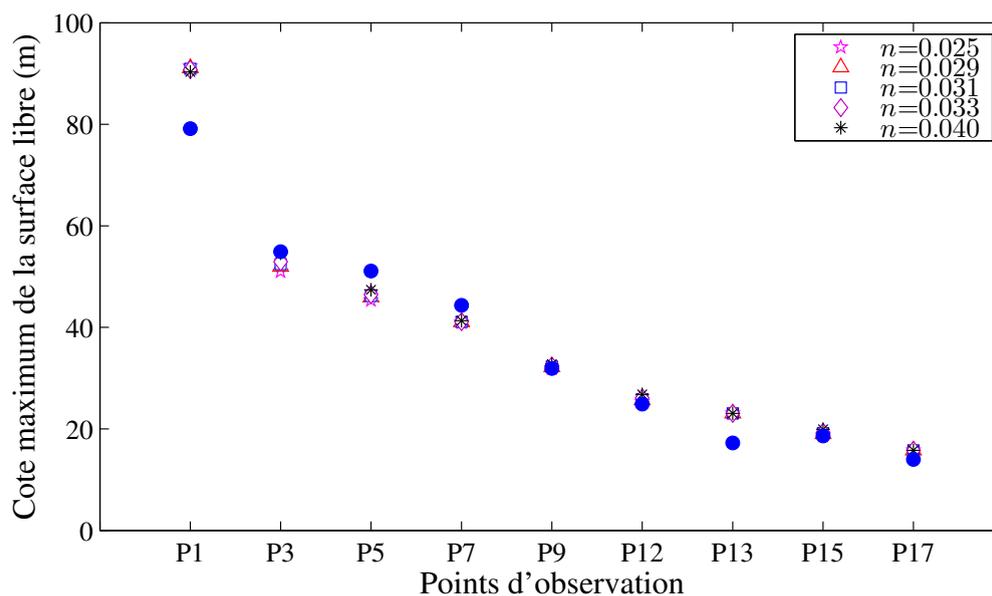


FIGURE 7.15 – Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive droite.

Les comparaisons précédentes nous indiquent que le coefficient de frottement peut modifier

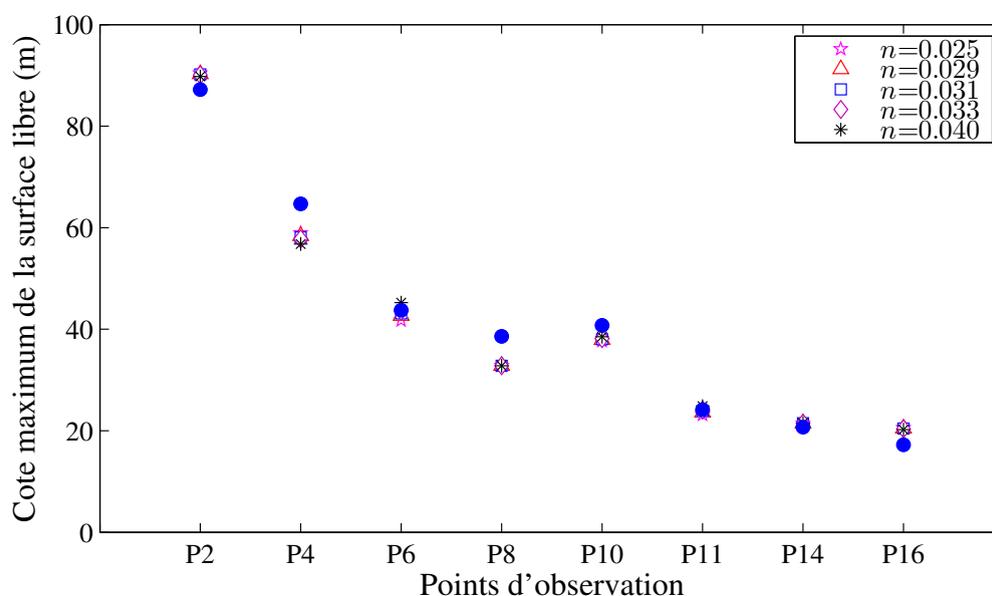


FIGURE 7.16 – Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points d'observation en rive gauche.

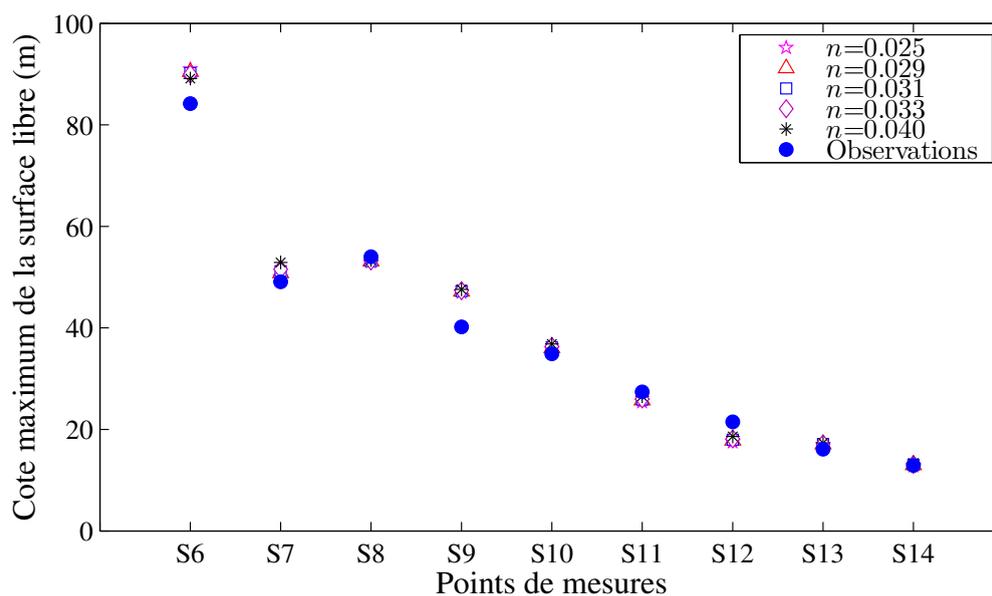


FIGURE 7.17 – Rupture du barrage de Malpasset : Influence du coefficient de Manning sur la cote maximum de la surface libre aux points de mesure sur le modèle physique.

le temps d'arrivée de l'onde (Tableaux 7.4 et 7.6) mais n'affecte que peu la cote maximale de la surface libre. La même remarque est également donnée par *Alcrudo et Gil (1999)* et *Valiani et al. (2002)*. (*Hervouet, 2003*) note qu'un étalonnage plus précis nécessiterait de faire varier en espace le coefficient de frottement dans les études d'ondes de rupture. Ce coefficient est en fait fixé par le CTPB, selon un barème qui tient compte de la nature des terrains sur lesquels l'onde se propage (villes, forêts, etc.).

7.7 Conclusion

La précision et la robustesse du présent modèle sont prouvées par le cas-test de la rupture du barrage de Malpasset. Globalement, une bonne concordance entre les résultats numériques du présent modèle, les mesures et les résultats obtenus par les autres modèles, est obtenue. Le temps d'arrivée de l'onde aux transformateurs électriques et aux points de mesure du modèle physique ainsi que les cotes maximales de la surface libre sont correctement reproduits. Par ailleurs, l'expérience numérique prouve que le coefficient de frottement a une forte influence sur le temps d'arrivée de l'onde mais n'affecte pratiquement guère les niveaux d'eau maximum.

On remarque cependant que les positions réelles des points d'observation et de mesure ne coïncident pas exactement avec les centres des mailles de calcul. Les valeurs numériques sont donc déterminées par une interpolation entre les centres des mailles non structurées dans le présent modèle. *Valiani et al. (2002)* utilisent les valeurs au centre de la maille la plus proche du point de mesure étudié. Cette simplification peut être une des causes des écarts entre les résultats numériques et les données observées. Ceci comprend l'interpolation du niveau de la surface libre mais également de la bathymétrie du fond de vallée, qui peut être très grande. Ce dernier effet est accentué par l'interpolation du fond sur les nœuds du maillage de calcul qui n'est pas exempte d'erreurs d'approximations.

Ce cas-test prouve que le modèle est bien capable de reproduire avec précision un évènement réel. Le traitement du terrain découvrant et recouvrant, qui est un problème délicat, a bien fonctionné.

Chapitre 8

Applications aux crues de l'Oued Mekerra

8.1 Introduction

La ville de Sidi Bel Abbès et l'ensemble des localités de la plaine du bassin versant de Mekerra sont confrontés de manière récurrente aux problèmes des inondations générées par les crues cycliques de l'Oued Mekerra. Ces débordements dévastateurs font suite aux événements pluvieux de fortes intensités enregistrés entre les mois d'octobre et d'avril comme ce fut le cas lors de la crue du 18 avril 2007 où la hauteur pluviométrique atteinte était de 40 mm en une heure (ce qui est relativement très important comparé à la moyenne de la wilaya qui est de 39 mm pour l'ensemble du mois d'avril) (*Hallouche et al., 2010*). Pour remédier à cette situation de nombreuses actions ont été engagées, dont une étude d'avant-projet détaillé de la protection de la ville de Sidi Bel Abbès contre les inondations réalisée en 2001 (*SPI Infra, 2001*). Cette étude a permis de préciser le régime des crues de l'Oued Mekerra, et de modéliser la propagation de l'onde de la crue centennale (estimée à 950 m³/s) dans la plaine. Le schéma d'aménagement résultant de cette étude a porté sur les endiguements, le re-calibrage des cours d'eau et la création de canaux de dérivations.

8.2 Présentation de la zone d'étude

8.2.1 Situation géographique

Le bassin versant de l'oued Mekerra fait partie du bassin versant de la Macta qui est situé au Nord-Ouest d'Algérie. Ce bassin est limité au nord par les marais de la Macta, au sud par le Chott Chergui, à l'est par le sous-bassin de Oued El Hammam (Macta) et à l'ouest par le bassin côtier Oranais Central (*Cherif et al., 2009*). Le bassin versant de l'oued Mekerra occupe une surface d'environ 3000 km² et de périmètre d'environ 391.3 km. Le bassin est orienté du Sud au Nord sa cote en amont est de 1500 m au Sud-Ouest de la ville de Ras El Maä, en aval est de 450 m dans la ville de Sidi Bel Abbes au Nord. Ce bassin est drainé par l'oued Mekerra qui développe un thalweg d'une longueur de 134 Km et prend sa source aux pieds des monts des Djebel Teniet El Baroud (1136 m), Djouazène (1356 m), Beghra (1414 m), Rokbet En Naama (1140 m) (*Meddi et Sadeuk Ben Abbes, 2014*).

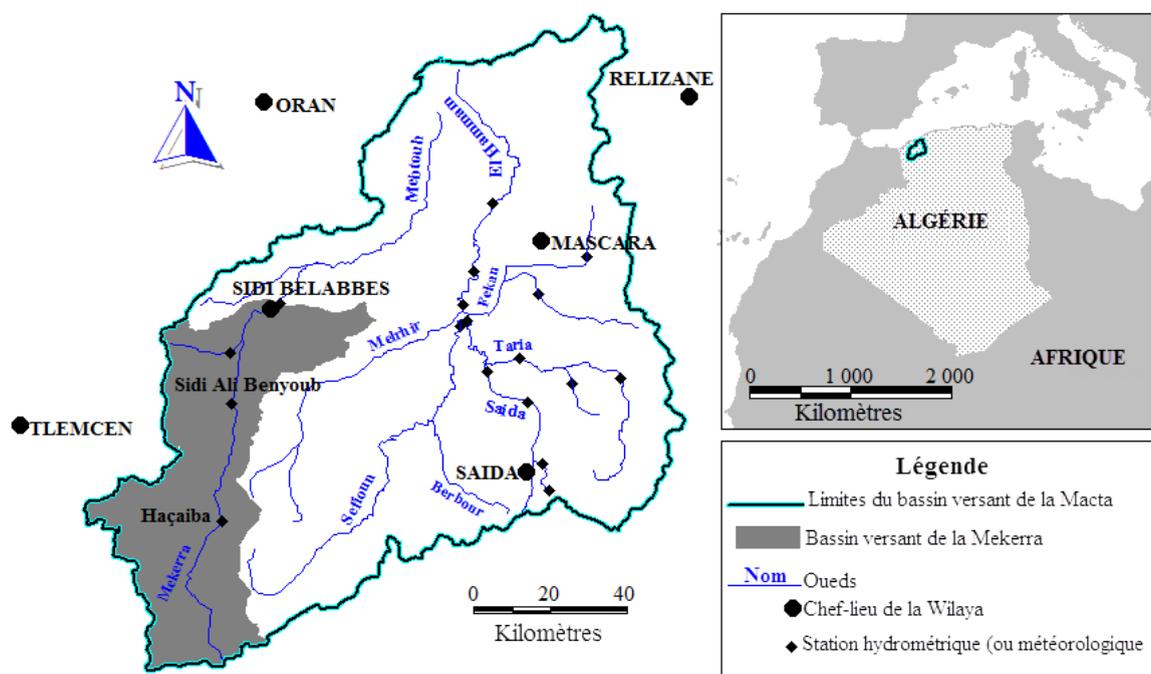


FIGURE 8.1 – Situation du bassin versant de l'oued Mekerra.

8.2.2 Description topographique

Le bassin versant, a une forme allongée du Sud au Nord (Figure 8.1). La superficie du bassin est à 50% située à une côte dépassant les 1000 m. L'oued Mekerra traverse deux zones de reliefs bien distinctes (Hallouche, 2007) :

- Le massif montagneux du Daya au Sud avec une altitude qui varie entre 1500 m et 800 m. La pente moyenne de l'oued jusqu'à Sidi Ali Ben Youb est d'environ 1 à 1.5%.
- L'oued débouche en aval de Boukhanafis dans la plaine alluviale avec une pente de 0.3 à 0.8% engendrant des vitesses d'écoulement relativement faibles. De Boukhanafis jusqu'à Sidi Bel Abbès, l'oued Mekerra reçoit une série d'affluents comme Oued Tissaf, Oued Negadi, Oued Nadjen et autres qui sont à sec durant presque toute l'année.

Globalement, le bassin versant peut-être subdiviser en trois sous-bassins selon les stations d'observations hydrométriques que sont : Haçaïba, Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbès (Korichi et al., 2016). L'utilisation des différents types de paramètres morphométriques (Tableau 8.1) a pour but la quantification des facteurs caractéristiques du milieu physique du bassin versant. La valeur de l'indice de compacité de Gravelius indique que le bassin a une forme assez allongée, elle implique par conséquent un temps de concentration lent. Les altitudes caractéristiques et la dénivelée sont déduites de la courbe hypsométrique du bassin versant. L'objet de l'indice de pente de Roche est de caractériser la pente moyenne avec les données réelles du bassin versant. La densité de drainage renseigne sur l'importance du drainage du bassin et son aptitude au ruissellement superficiel. Au vu de la valeur de ce paramètre, on conçoit que le bassin draine bien sa superficie.

TABLE 8.1 – Caractéristiques des sous bassins de l'oued Mekerra.

Caractéristiques	Unité	Station de Haçaïba	Station de Sidi Ali Benyoub	Station de Sidi Bel Abbès
Surface	Km ²	957	1890	3000
Indice de compacité	-	1.15	1.29	1.43
Altitude maximale	m	1440	1715	1714
Altitude minimale	m	925	635	437
Indice de pente de Roche	%	0.099	0.0936	0.0913
Longueur de l'oued	Km	54	92	144
Densité de drainage	Km/Km ²	0.06	0.050	0.02
Coefficient de torrentialité	-	0.20	31.25	6.86
Temps de concentration	h	6.369	10.560	13.448

8.2.3 Climat

Le bassin versant de l'oued Mekerra se situe sous l'influence d'un climat méditerranéen semi-aride qui se caractérise par un été chaud et sec, et un hiver relativement doux et humide (Yahiaoui, 2012). Le diagramme ombrothermique qui présente conjointement les données relatives aux précipitations et à la température pour la station de Sidi Bel Abbès est représenté sur la figure 8.2. Il permet d'identifier la période sèche et celle humide durant l'année hydrologique. Ce diagramme montre que la période humide s'étend depuis le début d'Octobre jusqu'à la fin d'Avril et le reste de l'année représente la période sèche.

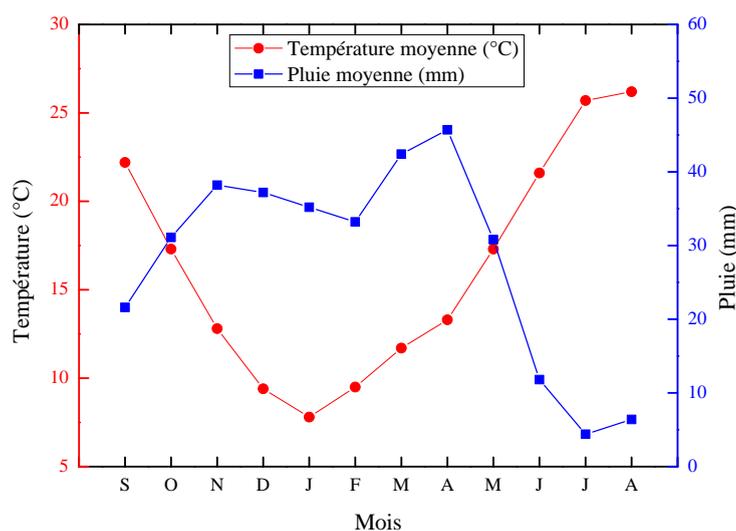


FIGURE 8.2 – Diagramme ombrothermique de l'oued Mekerra.

Du point de vue pluviométrique, la quantité moyenne interannuelle des précipitations est de l'ordre de 390 à 400 mm, mais elle peut diminuer jusqu'à 110 mm/an pour les années particulièrement sèches, d'où la variation annuelle des apports liquides de l'oued Mekerra. À titre

indicatif, ce cours d'eau a véhiculé 13 millions de mètres cubes durant l'année hydrologique 1960-1961 et 92 millions de mètres cubes durant l'année 1950-1951, ce qui constitue un apport exceptionnel par rapport à la moyenne interannuelle estimée à 57 millions de mètres cubes (*SPI Infra*, 2001; *Hallouche et al.*, 2010). L'essentiel des précipitations se répartit entre l'hiver et le printemps (70% de la pluviométrie annuelle). Durant les années pluvieuses, la somme des précipitations peut atteindre les 800 mm (le poste de Sidi Ali Benyoub durant la journée du 25 mai 1929, a enregistré 104 mm), et durant les années sèches, elle peut diminuer jusqu'à 110 mm (*Yahiaoui*, 2012).

La température annuelle moyenne de l'air est de l'ordre de 15°C, et le nombre moyen interannuel de jour de gelée est de l'ordre de 35 jours (*Yahiaoui*, 2012). En terme saisonnier, les températures varient entre 7.8°C au mois de Janvier, généralement accentuées, par la proximité des effets continentaux et 26.2°C aux mois de Juillet et Août, dont les entrées sahariennes envahissent pratiquement l'ensemble de la région en été. L'évaporation est importante aux mois de Juin, Juillet et Août et elle est faible aux mois de Novembre, Décembre, Janvier et Février. Dans notre région l'humidité relative décroît du Nord au Sud, pendant l'hiver. Elle atteint des valeurs relativement élevées surtout dans les zones montagneuses. La valeur moyenne annuelle est de 69.5% à Sidi Bel Abbes (*Hallouche*, 2007). Les vents dominants sont de Nord-Ouest et Ouest. La vitesse maximale moyenne interannuelle est de l'ordre de 20 m/s (*Yahiaoui*, 2012). Ils soufflent durant toute la saison pendant 10 à 15 jours par mois. Le sirocco (vent du Sud, chaud et chargé de sable) souffle environ 15 jours par an lors des mois de juillet et août.

8.2.4 Géologie

Dans le bassin versant de l'oued Mekerra il existe des formations quaternaires et du plio-quaternaires caractérisées essentiellement par des alluvions et des conglomérats. Les sols calcaires humifères sont prédominants (Figure 8.3). Cette croûte calcaire est perméable et joue un rôle important lors de la montée des crues. La partie Nord du bassin est beaucoup plus perméable que la partie Sud. Il y a un contact de surface avec le chenal conglomératique qui contient la nappe phréatique. Nous trouvons en plus des sols calcaires humifères qui occupent la plus part du bassin versant, des sols calcaires, des sols calciques et des sols alluviaux. L'écoulement torrentiel laisse apparaître dans quelques endroits la roche mère à nue (*Cherif et al.*, 2009).

Dans la coupe géologique effectuée suivant la direction Sud-Nord qui traverse l'oued Mekerra sur sa longueur apparaît trois failles du Sud vers le centre jouant ainsi un rôle important dans l'atténuation des crues, par la diminution du débit maximum qui s'infiltré.

8.2.5 Couvert végétal

A l'instar de la plus part des régions de l'Ouest algérien, le couvert végétal du bassin versant de l'oued Mekerra a été largement dégradé et défriché par les incendies et par une petite agriculture extensive et un surpâturage endémique. Ce qui a entraîné une perte d'eau par évaporation et une accélération de l'érosion (*SPI Infra*, 2001).

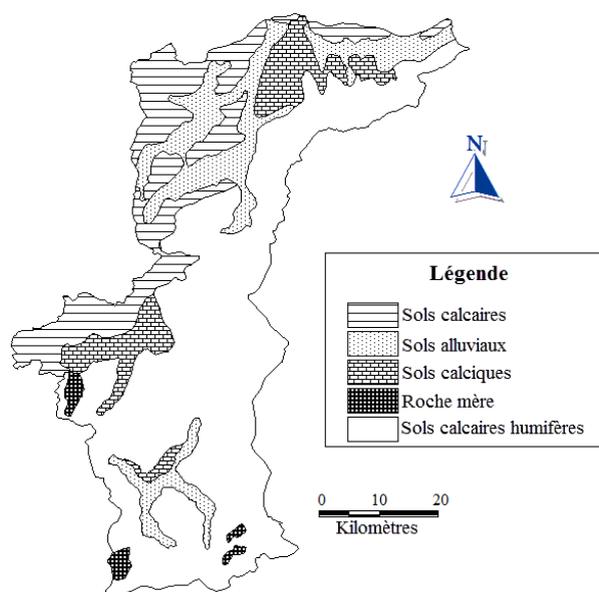


FIGURE 8.3 – Carte pédologique du bassin versant de l'oued Mekerra.

Dans le bassin de la Mekerra, les aires d'irrigation sont localisées principalement dans la plaine de Sidi Bel Abbas et celle de Sfisef. Les cultures pratiquées sont dominées par des cultures maraîchères et quelques vergers d'arbres fruitiers. Les forêts, les maquis et les broussailles occupent pratiquement toute la bande des monts situés dans la zone de la haute Mekerra.

Seule une partie du bassin versant (20%) est couvert de forêts, principalement au niveau des massifs montagneux de la région comprise entre Haçaïba et Mouley Slissen et peut s'étendre jusqu'à Sidi Ali Benyoub, ainsi qu'en périphérie du bassin, dans les zones collinaires non cultivables. Elles sont constituées essentiellement de pins d'Alep, et de chênes verts. Cette couverture forestière n'assure qu'une très faible protection des sols vis-à-vis d'érosion

Entre Ras El Ma et El Haçaïba, où l'alfa couvrait par le passé des surfaces importantes, a été remplacé ces dernières décennies par des cultures céréalières. Entre Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbés, dans la plaine de la Mekerra, où les cultures céréalières sont en général associées à des cultures secondaires types vergers ou oliveraies, parfois irriguées (vignes) (*Hallouche, 2007*).

8.2.6 Réseau hydrographique

Il est très développé et représenté fréquemment par des cours d'eau temporaires. Les oueds sont alimentés par des précipitations et par des sources dont la plus importante est localisée à Sidi Ali Benyoub. Tous ces oueds rejoignent l'Oued Mekerra, qui est saisonnier et constitue le plus important de la wilaya, d'un chenal long de 113 km et prenant ses sources avant Ras El Ma, (d'où l'origine de son nom (Ma : eau, Kerra : steppe saharienne, signifiant ainsi l'eau se déversant du Sahara), et traverse la ville de Sidi Bel Abbas en aval, où il conflue avec oued Sarno et devient oued Mebtouh (barrage des Cheurfas, wilaya de Mascara), devenant ensuite oued Sig, en aval du barrage de cette commune, avant d'aboutir dans les marais de la Macta,

près de la Méditerranée (*Benyahia et al.*, 2011).

Plusieurs Oueds drainent le bassin de Mekerra. Les plus importants sont classés du Sud au Nord (cf. Figure IV .4). Ils sont classés comme suit :

Oued Touifza C'est l'affluent du rive gauche de l'Oued Mekerra avec une longueur de 37 km. Il prend sa source dans Djebel El Beya (1337 m), Djebel Ouargla (1714 m) et Djebel Sidi Oussef (1493 m). Il représente la conjonction de six Oueds, à savoir . Oued El Atatiche Oued Tadjemout, Oued Guelt El Baïda, Oued Faïd El Taga, Oued El Oustate et Oued Hamida.

Oued El Madene C'est l'affluent du rive droite de l'Oued Mekerra avec une longueur de 18.4 km. Il prend sa source à Aïn Tindamine et Argoub El Mansour (1155 m) au pied de Djebel Bou Lehaf au Sud-Est du bassin versant de Mekerra.

Oued Mkitla C'est l'affluent du rive gauche de l'Oued Mekerra avec une longueur estimée à 8.8 km. Il prend sa source dans la région de Djorf El Agab (1152 m), auprès de Sidi Mohammed.

Oued Tissaf C'est l'affluent du rive gauche de l'Oued Mekerra avec une longueur estimée à 11.2 km Il représente la conjonction de trois Oueds, qui sont Oued Bon Khannam Oued Lamtar et Oued Ane Fress au pied de Djbel El Touil à une altitude d'environ de (791 m) auprès de Sidi Abd Er Rahmane (cimetière) au Sud-Ouest du bassin de Mekerra.

8.2.7 Organisation et fonctionnement du bassin versant de Mekerra

Du point de vue hydrogéomorphologique, le bassin versant constitue l'unité morphologique principale qui structure et cloisonne les paysages et fournit le cadre privilégié de l'analyse hydrogéomorphologique. Son organisation conditionne le déroulement des crues. Schématiquement le bassin versant de Mekerra (cf. Figure 8.4) peut être subdivisé en trois grandes zones en fonction de leurs rôles (*Hallouche*, 2007; *Hallouche et al.*, 2010; *Benyahia et al.*, 2011; *Korichi*, 2013; *Korichi et al.*, 2016) :

- Zone de production appelée aussi de réception
- Zone de transfert
- Zone d'expansion

a) Zone de réception ou de production des crues

Cette zone est comprise entre l'origine de l'Oued Mekerra au sud de Ras El Ma et Mouley Slissen. Elle correspond à la partie supérieure montagneuse du bassin versant où se forment généralement les crues en réponse à des précipitations intenses. C'est une zone de forme allongée (sud-nord) liée à l'organisation du réseau hydrographique. Celui ci est particulièrement dense et composé d'Oueds intermittents et de ravins drainant des vallons encaissés, qui confluent vers la vallée principale plus large. Les versants et les talwegs présentent des pentes fortes (donc un coefficient de ruissellement important) et une couverture pédologique peu épaisse. Soumise

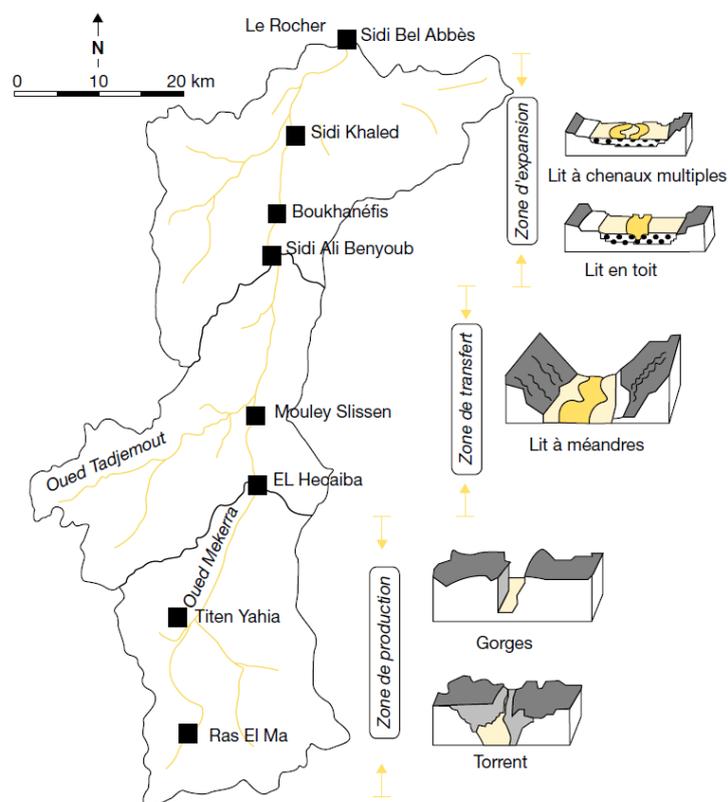


FIGURE 8.4 – Organisation hydrogéomorphologique du bassin versant de Mekerra (*Hallouche et al., 2010*).

à une érosion intense, la zone de production des crues fournit l'essentiel de la charge solide transportée par le cours d'eau. Cette zone peut être divisée en deux tronçons :

le tronçon 1 qui s'étend du sud de Ras El Ma jusqu'à la station de Titen Yahia. Il est constitué par les vastes surfaces des hauts plateaux où les pentes moyennes à faibles ne compensent pas la fragilité du sol et sa sensibilité à l'érosion. Les Oueds qui forment des torrents incisent ces surfaces régulières de talwegs profondément marqués, aux zones inondables bien délimitées ;

le tronçon 2 en aval de Titen Yahia, la vallée de la Mekerra pénètre dans des massifs montagneux. Ce sous-tronçon assure la transition avec la zone de transfert qui débute à Mouley Slissen. La densité du réseau hydrographique diminue légèrement et la Mekerra reçoit moins d'affluents, tandis que sa vallée s'encaisse dans les massifs calcaires.

b) Zone de transfert des crues

Le bassin de réception est relayé par une section de gorges qui assure le transfert des débits liquides et solides vers l'aval du bassin versant. Sur ce tronçon, la plaine s'organise et les différents lits s'individualisent et l'Oued principal présente un chenal unique qui méandre au fond de la vallée au sein d'une petite plaine alluviale étroite et encaissée dominée par les versants rocheux. La diminution de pente permet le dépôt d'une partie de la charge solide, dépôts qui

peuvent être repris lors des crues. Lors des ruptures de pentes fortes l'Oued Mekerra décrit des sinuosités en cherchant à dissiper son excès d'énergie.

C'est sur ces tronçons, on peut rencontrer les dynamismes érosifs les plus intenses (les berges de l'Oued sont particulièrement instables, et soumises à des érosions latérales importantes au niveau des méandres). L'incision verticale est limitée, puisque les formations les plus résistantes affleurent dans le lit mineur.

Au niveau de Sidi Ali Benyoub, l'Oued quitte les massifs montagneux et poursuit son cheminement jusqu'à Boukhanéfis qui fait partie de la zone de transfert puisque la Mekerra est très encaissée dans d'anciens sédiments. Ainsi la vallée conserve son profil en gorges.

c) Zone d'expansion des crues

C'est la zone la plus exposée aux effets des inondations périodiques dont les conséquences sont catastrophiques. Ce secteur est situé à l'aval de Boukhanéfis où la vallée change brutalement de forme. La vallée encaissée et étroite s'ouvre très rapidement. Un lit majeur se met en place. En aval de la localité de Boukhanéfis commence la plaine alluviale de la Mekerra. Elle constitue une vaste zone d'expansion des crues de l'Oued Mekerra très ancienne, puisqu'on y trouve plusieurs niveaux alluviaux étagés. Sa largeur atteint généralement plusieurs centaines de mètres et peut atteindre 3 kilomètres par endroits. Elle s'étend jusqu'à Sidi Bel Abbès où elle est fermée par des collines de marnes et de grès du Miocène (lieu-dit le Rocher). La dynamique générale de cette zone est caractérisée par l'accumulation des sédiments, d'où un exhaussement du plancher alluvial. Ce plancher est parfois non négligeable notamment dans le lit majeur. Cette large plaine concentre les enjeux du bassin versant, avec plusieurs localités concernées par la problématique des inondations à savoir ; Boukhanéfis, Sidi Khaled Sidi Lahcen et Sidi Bel Abbès. Mise en valeur depuis plusieurs siècles, elle est traversée par des aménagements anthropiques, (routes, canaux, voie ferrée), qui constituent autant d'obstacles derrière lesquels l'eau peut s'accumuler. L'influence des infrastructures ferroviaires et routières sur l'écoulement des crues, rares et exceptionnelles, est particulièrement sensible en aval de Sidi Lahcen. Dans cette zone, la voie ferrée, qui longe la Mekerra à l'amont, s'en écarte pour contourner Sidi Bel Abbès par le sud. Lors des inondations de la ville en 1986 et 1994 cette voie ferrée a joué un rôle fondamental, puisqu'elle a guidé les eaux de crues vers les quartiers sud de la ville.

En termes d'inondabilité, la plaine de la Mekerra n'est pas inondée uniformément sur toute sa largeur. Pour chaque crue, les eaux débordant du lit mineur s'écoulent dans le lit majeur en faveur des chenaux plus ou moins marqués et de faibles profondeurs (inférieures à 1 mètre).

8.3 Régime d'écoulement de l'Oued Mekerra

En se référant à la littérature pour la caractérisation des régimes d'écoulements des Oueds pour les régions arides et semi-arides, on note l'existence de plusieurs classifications pour caractériser les régimes d'écoulement. Certains d'entre eux couvrent le monde entier d'autres sont continentales. *Davies et al.* (1994) ont fait remarqué que les cours d'eau dans les zones arides et semi-arides peuvent être soit : éternels (permanant) "perennial", intermittents "intermittent" ou

éphémère (occasionnel) "ephemeral". Un cours d'eau éphémère se caractérise généralement par des périodes d'écoulement courtes, générée par des pluies intenses qui tombent brusquement sur le bassin versant (Day, 1990). Par contre, le cours d'eau intermittent est défini par son écoulement relativement régulier et intermittent suivant la variation saisonnière où la phase sèche à une durée variable. Les cours d'eaux dont le nombre des jours à écoulement constituent moins de 20% de l'année peuvent être considérés comme éphémères. Cependant, celles qui s'écoulent entre (20 à 80%) de l'année sont intermittents (Matthews, 1988).

Durant la période qui s'étale de 1942–2001 le taux moyen de l'écoulement journalier de l'Oued Mekerra- qui est le rapport des jours où l'Oued est en écoulement aux jours de l'année hydrologique- est relativement faible. Il est de l'ordre de 10%, ce qui correspond environ de 37 jours où l'Oued est en écoulement et 328 jours pendant lesquelles il est à sec. L'Oued Mekerra peut être donc considéré comme étant éphémère. Toutefois, durant la période qui s'étale entre 1997 jusqu'à 1999 il est devenu intermittent avec un taux d'écoulement journalier atteignant la valeur de 73% en 1999 (Maref, 2010; Korichi, 2013).

Au niveau du bassin de Mekerra, les crues sont plus fréquentes et plus fortes en automne qu'au printemps. Elles se caractérisent par une montée rapide des eaux en phase de crue et une descente plus lente et régularisée, en phase de décrue. Cette régularisation est justifiée par les étendues d'épandage situées en aval. Dans la phase de décrue, les eaux des étendues d'épandage ainsi que les eaux emmagasinées dans les alluvions (des berges et du lit) retournent par un trop plein dans le cours d'eau. La réalimentation est relativement lente, ce qui favorise le remplissage de la nappe phréatique et la décantation des éléments naturels fertilisants. Les débits de pointe sont plus grands dans la haute Mekerra (Sidi Ali Benyoub) que dans sa partie basse (Sidi Bel Abbes ville), où l'on enregistre un aplatissement (laminage ou régularisation naturelle) de l'onde de crue (Sadeg, 2003).

La Figure 8.5 donne la variation interannuelle des débits dans le bassin étudié. Une forte fluctuation des débits d'une année à l'autre est observée. Durant la période de 1942 à 2001 l'Oued Mekerra a passé par deux longues périodes sèches. La première s'étend sur neuf (9) ans ; de 1952 à 1962 où le débit moyen annuel pour cette période est de $0.221 \text{ m}^3/\text{s}$ avec, comme année sèche caractérisante celle de 1956 ($0.039 \text{ m}^3/\text{s}$). La deuxième a duré dix sept (17) ans de 1968 à 1985 avec des débits moyens qui sont de l'ordre de ($0.141 \text{ m}^3/\text{s}$). L'année la plus sèche était 1978 ($0.022 \text{ m}^3/\text{s}$) (Maref, 2010; Korichi, 2013).

Il est intéressant de souligner que la sécheresse survenue avant 1945 coïncide avec la période de sécheresse qu'a connue le globe terrestre entre 1932 et 1945 (481 et correspond au pic thermique annuel mondial enregistré en 1940 (Tardy et Probst, 1992). Le manque des apports pluviométriques observé à partir du milieu des années soixante-dix, confirme la sécheresse qui sévit sur le Nord de l'Afrique ces quatre dernières décennies (Mitchell et Murray, 1963). Il s'est manifesté notamment par une baisse dramatique des apports en eau drainés par les Oueds Maghrébins. Meddi et al. (1998), évaluent une baisse de 67% par rapport aux écoulement normaux dans le Nord-Ouest de l'Algérie.

La variation des débits moyens mensuels dans l'Oued Mekerra, montre que l'écoulement est souvent constaté aux mois Septembre à Octobre et parfois au mois Mai (cf. Figure 8.6). Ces périodes correspondent aux périodes de crues de l'Oued durant lesquelles les débits sont

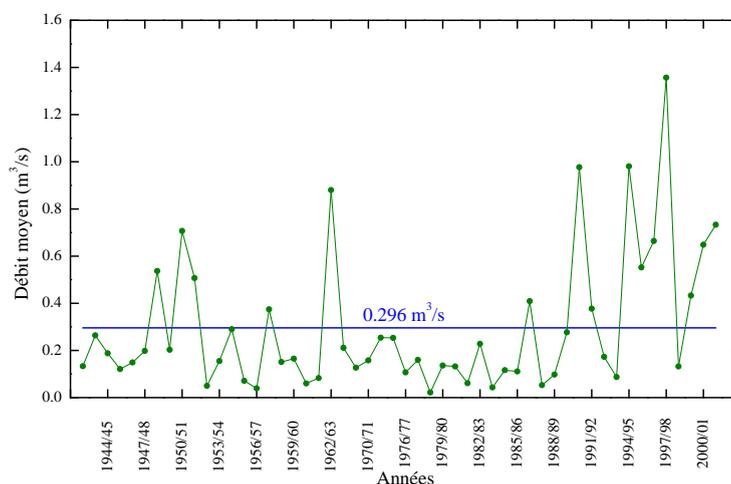


FIGURE 8.5 – Variation interannuelle des débits dans le bassin de l'Oued Mekerra.

considérables. Ils peuvent atteindre la valeur de $0.721 \text{ m}^3/\text{s}$ au mois de Septembre et $0.789 \text{ m}^3/\text{s}$ au mois d'Octobre. Pour cette période le coefficient mensuel du débit est de l'ordre de 2.44 en Septembre, 2.67 en Octobre et 1.14 en Mai. Ceci explique le fait que les débits dans ces mois sont supérieurs à la moyenne annuelle.

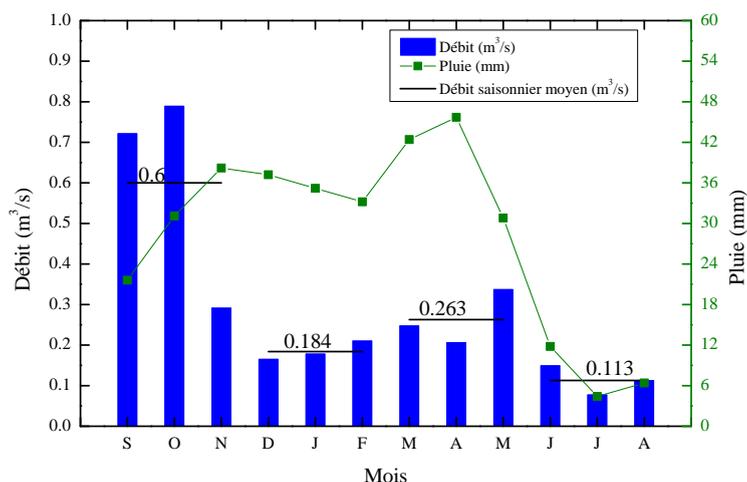


FIGURE 8.6 – Variation interannuelle des débits dans le bassin de l'Oued Mekerra.

La variation saisonnière des débits moyens mensuels, est présentée dans la Figure 8.6. Elle indique que l'Oued Mekerra s'écoule avec un débit moyen mensuel assez important en automne ($0.6 \text{ m}^3/\text{s}$) où les pluies dans cette saison sont orageuses et intenses. Le printemps est aussi caractérisé par un débit relativement important. Ceci est lié vraisemblablement à la fois à l'intervention des pluies qui tombent dans cette saison et au fait que le sol du bassin se caractérise par une saturation dû aux pluies de l'hiver.

Bien que l'hiver soit la saison la plus pluvieuse (cf. Figure 8.6), elle représente la saison de faible hydraulicité de l'Oued Mekerra. Tandis que l'automne est la saison de la période sèche mais elle donne une hydraulicité importante pour l'Oued Mekerra. Cette hydraulicité est le résultat des crues qui caractérisent cette saison. La réponse hydrologique de l'Oued semble dé-

pendre fortement de l'intensité des pluies. À l'instar de la majorité des crues méditerranéennes, les crues observées dans notre bassin, en particulier les crues automnales se caractérisent par un temps de montée des eaux assez bref. Ce constat caractérise les crues de la région méditerranéenne (*Bontron et Obled, 2003*).

8.4 Aperçu des crues de l'Oued Mekerra

La conjonction des facteurs naturels (vaste plaine inondable) et humains (infrastructures), avec un développement exponentiel de l'urbanisation, a favorisé ces dernières décennies la multiplication des inondations catastrophiques dans les localités longeant l'oued Mekerra. À quelques exceptions près, les crues principales se produisent au début de l'automne, à cause de la fréquence des orages accompagnés de pluies torrentielles, ce qui nous mène à parler des inondations ravageuses de la Mekerra, qui est le théâtre d'une crue régulière au mois d'Octobre de chaque année.

TABLE 8.2 – Statistiques des inondations de la wilaya de Sidi Bel Abbes entre 1986 et 2007 (*Yahiaoui, 2012; Benyahia et al., 2011*).

Date	Lieu	Nombre de sinistre	
		Morts	familles sans abris
04 Octobre 1986	Sidi Bel Abbes	1	200
30 Avril 1990	Sidi Bel Abbes	2	130
29 Septembre 1994	Sidi Bel Abbes	2	22
	Sidi Bel Benyoub	1	-
5 Décembre 1995	Sidi Bel Abbes	-	3
17 Août 1997	Moulay Slissen	1	34
27 Septembre 1997	Sidi Bel Abbes	1	-
13 Décembre 1997	Sidi Bel Abbes	1	5
27 Juillet 2000	Ras El Ma	-	100
	Sidi Bel Abbes	1	7
	Sidi Lahcen	-	50
23 Octobre 2000	Boukhanefis	-	31
	Sidi Khaled	-	50
	Toute la wilaya	-	200
Août 2002	Toute la wilaya	-	200
	Moulay Slissen	-	10
08 Juin 2003	Ras El Ma	-	23
	Sidi Khaled	-	9
27 Mai 2006	Boukhanefis	-	5
	Moulay Slissen	-	50
Avril 2007	Moulay Slissen	-	50

Le Tableau 8.2 résume les principaux dégâts, en pertes humaines, des blessés et sans abris, causés par les crues de l'Oued de Mekerra entre 1986 et 2007. À l'examen de ce tableau, on

remarque qu'aucun endroit du bassin versant n'est à l'abri de ce du phénomène de crue. Que ce soit en amont ou en aval, les crues ont ravagé plusieurs localités de la wilaya de Sidi Bel Abbès dont les plus importantes sont celles de 1986 qui ont envahis le chef lieu de la wilaya, de 2002 où toute la wilaya été sinistré et celles de 2007 à Moulay Slissen avec un débit de 800 m³/s (*Benyahia et al., 2011*).

Le problème des inondations générées par les crues cyclique de l'Oued Mekerra a constitué depuis toujours l'une des principales préoccupations des responsables de la Wilaya de Sidi Bel Abbès. Suite aux observations faites lors des différentes crues enregistrées, on peut lier ces inondations aux plusieurs causes, à savoir : (1) Averses intenses et irrégulières au niveau de la haute Mekerra peut atteindre 200 mm/h. (2) Morphologie du bassin versant de Mekerra, particulièrement allongée d'où un temps de concentration très réduit (9 heures). (3) Rétrécissement de la section de l'Oued au niveau de certains tronçons et ouvrages (Ponts). (4) Obstruction quasi totale de la section de l'Oued par des sédiments charriés et déposés par les crues antérieures. (5) Les affluents en aval ont une très faible pente voir négatives. (6) Urbanisation anarchique au niveau des berges de l'Oued. Ce dernier facteur influe sérieusement sur l'ampleur des crues (*Korichi, 2013*).

TABLE 8.3 – Répartition en % du nombre des crues de l'Oued Mekerra entre 1942 et 2001 (*Maref, 2010*).

Classes de débits (m ³ /s)	>200	200-100	100-50	50-10	<10
Fréquence (%)	0.01	0.50	1.44	5.29	92.77

La Figure (8.7) présente les principales crues de l'Oued Mekerra. On observe notamment que l'ampleur des crues a remarquablement augmenté durant la décennie (1990-2001). Dans son étude statistique, *Maref (2010)* et en tenant compte de 34577 observations des débits instantanés pour la période de (1942-2001), réparties sur les trois stations hydrométriques (Haçaïba, Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbès) a montré que la classe des débits prépondérante est celle de moins de 10 m³/s. Tandis que les forts débits (plus de 200 m³/s) ne représente que 0.01% (*Korichi et al., 2016*) (cf. Tableau 8.3).

8.5 Simulations unidimensionnelles

Le tronçon utilisé dans cette étude est situé dans la basse Mekerra entre les stations hydrométriques de Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbès. La longueur du tronçon étudié est de 52 km. Les données de base comprennent les détails du profil du lit, des sections transversales et des caractéristiques de résistance hydraulique de l'oued.

La figure 8.8 montre le profil du lit obtenu à partir de la carte topographique en identifiant les points d'intersection du chenal principal avec les courbes de niveau. Certaines sections transversales mesurées, représentées par des lignes droites à travers l'oued, sont présentées sur la

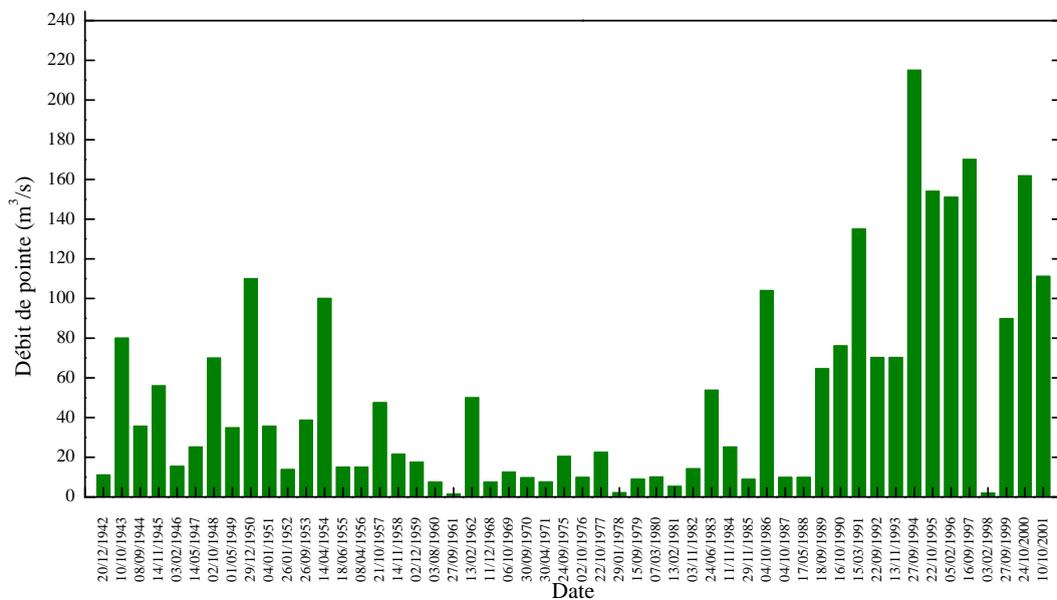


FIGURE 8.7 – Historique des crues de l’Oued Mekerra au niveau de la station hydrométrique de Sidi Bel Abbas(1942-2001).

figure 8.9. La figure 8.10 montre les sections transversales mesurées à la station hydrométrique de Sidi Ali Banyoub et dans le centre de la ville de Sidi Bel Abbas. Les sections transversales utilisées dans le calcul sont interpolées à partir des données disponibles.

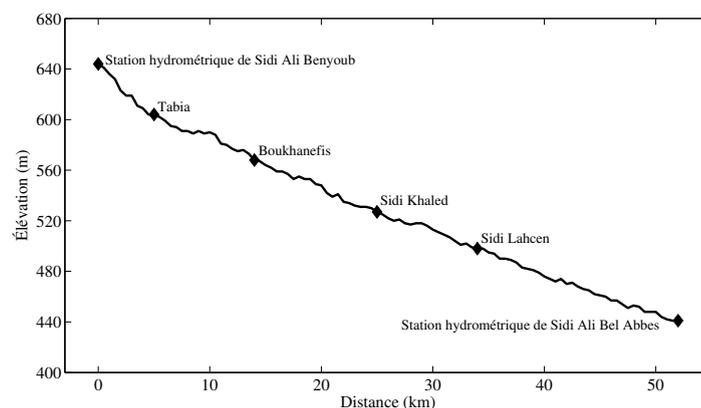


FIGURE 8.8 – Profile au long de l’Oued Mekerra entre la station de Sidi Ali Banyoub et celle de Sidi Bel Abbas.

La résistance du canal, représentée par le coefficient de Manning (n_m), représente la rugosité composite du canal et des plaines inondables, y compris les effets du stockage associés à l’inondation des plaines inondables (Atallah et Hazzab, 2013). Le tableau 8.4 présente les valeurs du coefficient de Manning utilisées dans les différents sous-trançons. Ces valeurs sont établies en tenant compte des résultats d’études de Atallah et Hazzab (2013); Atallah et al. (2016) et selon les indications rapportées dans la littérature scientifique (voir par exemple Chow (1959)) sur la base des caractéristiques physiques de l’oued.

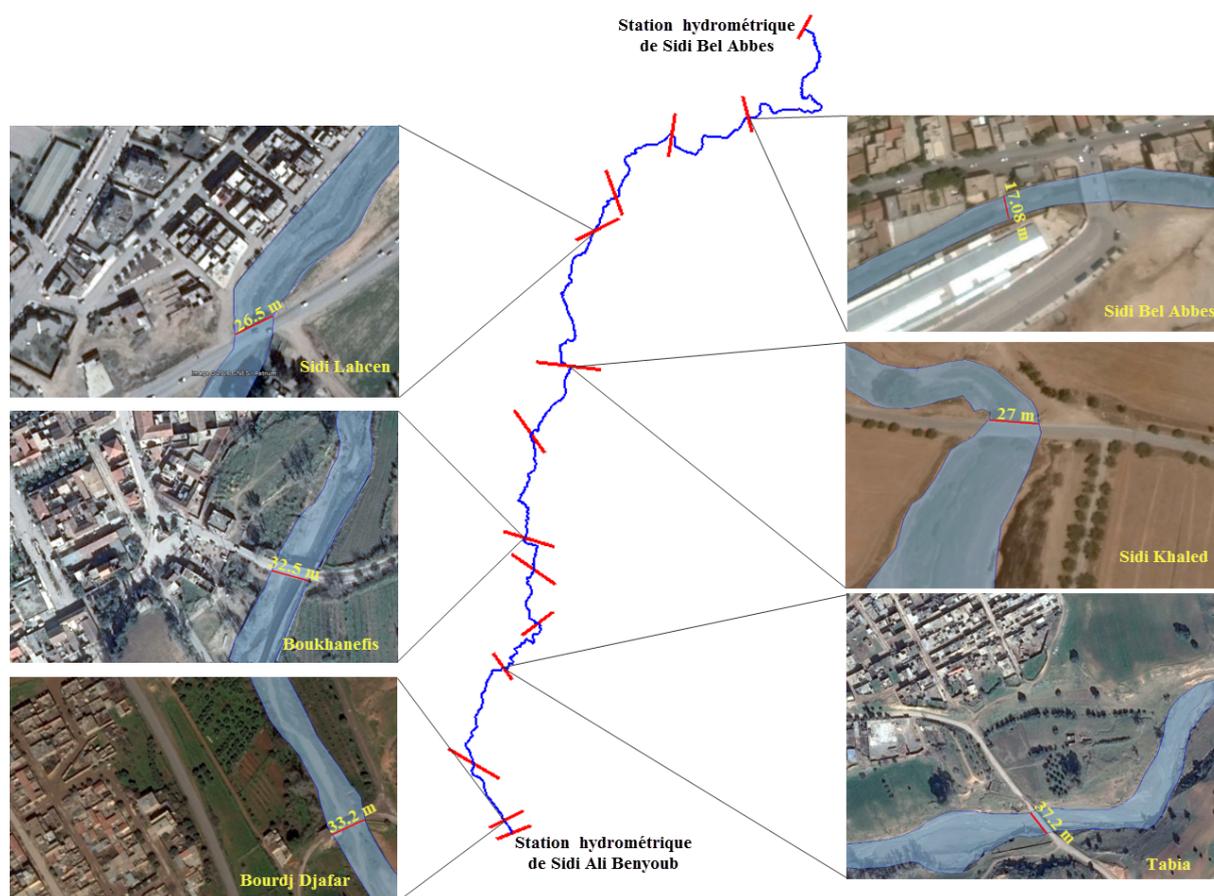


FIGURE 8.9 – Vue en plan du tronçon étudié et la localisation de certaines sections transversales de l'oued.

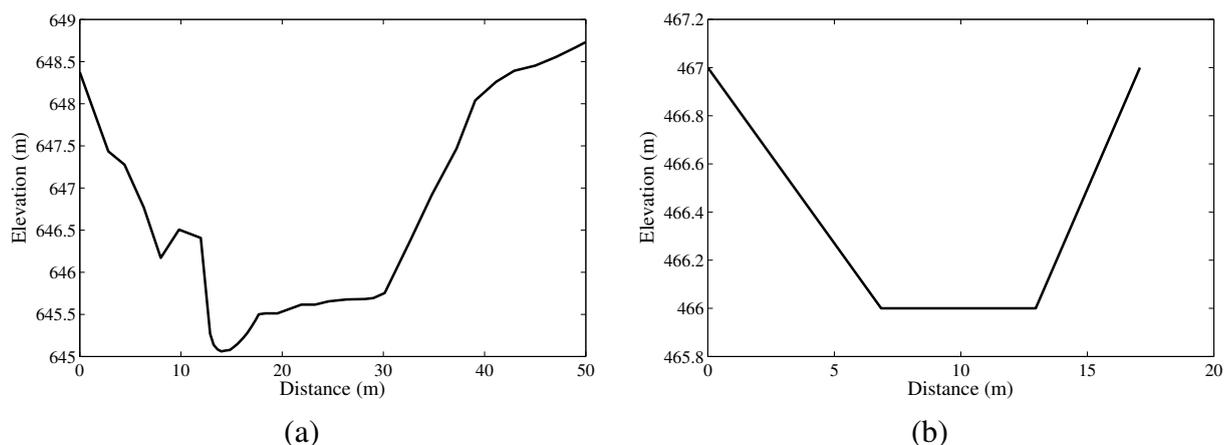


FIGURE 8.10 – Sections transversales (a) à la station de Sidi Ali Benyoub et (b) à la station de Sidi Bel Abbas.

Les événements utilisés dans cette analyse sont les inondations d'été de 1983 et celle de l'automne de 1995. Les entrées latérales le long du tronçon étudié ont été négligées. Un lit sec a été supposé comme une condition initiale dans cette simulation. En amont du tronçon étudié on

TABLE 8.4 – Valeurs du coefficient de Manning utilisées dans les différents sous-tronçons (*Atallah et Hazzab, 2013*).

Tronçons (km)	0-13	13-22	22-32	32-41	41-52
Coefficient de Manning n_m	0.040	0.100	0.035	0.030	0.010

utilise l'hydrogramme de la crue observée au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub comme condition de bord amont. L'hydrogramme observé au niveau de la station de Sidi Bel Abbès sert à évaluer la performance du modèle en comparant ceci avec les résultats de simulation.

La figure 8.11(a) présente la condition à la limite amont utilisée pour l'inondation survenue le 24 juin 1983. Le débit maximal enregistré lors de cet événement était de $100 \text{ m}^3/\text{s}$. Les résultats de simulation sont présentés sur la même figure pour $t=47 \text{ h}$. Le pic de la crue prédite par le modèle était de $7.36 \text{ m}^3/\text{s}$ plus élevé que le débit de pointe mesuré ($53.8 \text{ m}^3/\text{s}$). Les valeurs maximales du débit pour l'hydrogramme mesuré et calculé arrivent simultanément au temps $t=6 \text{ h}$ à la station de Sidi Bel Abbès après le pic observé à Sidi Ali Benyoub.

La figure 8.12(a) présente la condition à la limite amont utilisée pour l'inondation survenue le 11 Octobre 1995. Le débit maximal enregistré lors de cet événement était de $155 \text{ m}^3/\text{s}$. Les résultats de simulation sont présentés sur la même figure pour $t=47 \text{ h}$. Les résultats de la simulation ont été comparés ensuite avec l'hydrogramme observé au niveau de la station de Sidi Bel Abbès (sortie) où le débit de pointe mesurée était de $116 \text{ m}^3/\text{s}$. Les résultats montrent que l'hydrogramme simulé est très proche de celui observé au niveau de la station de Sidi Bel Abbès. Les mêmes résultats révèlent une diminution d'environ $37.64 \text{ m}^3/\text{s}$ dans la valeur maximale de débit d'écoulement entre les nœuds d'extrémité. Le temps nécessaire, pour que l'onde atteigne la station de Sidi Bel Abbès, est estimé à 7 heures. La différence entre les deux hydrogrammes (simulée et mesurée) est d'environ 1.17%.

Pour les deux événements, on remarque que les valeurs des débits simulés sont plus grandes que celles du débit mesuré au niveau de la station de Sidi Bel Abbès (Tableau 8.5). Ceci peut être dû à la régularisation naturelle (laminage) des eaux en phase de décrue par la formation d'une multitude d'étendues d'épandage caractéristiques à la topographie particulière de la région. Les caractères géomorphologiques, géologiques et lithologiques de la partie du bassin versant située entre Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbès aident à la régularisation naturelle très nette de l'écoulement de crue. Les eaux superficielles contribuent aussi à la réalimentation des eaux souterraines par infiltration. À noter que dans la simulation nous avons supposé qu'il n'y ait pas d'entrée ou sortie d'écoulements pendant la simulation (*Atallah et Hazzab, 2013*).

8.6 Simulations bidimensionnelles

L'objectif principal de cette partie est d'exposer les capacités du modèle numériques dans la cartographie des résultats présentant ainsi un outil très ambitieux en matière de l'aide à la décision dans un contexte de gestion de risque. La démarche est appliquée comme exemple

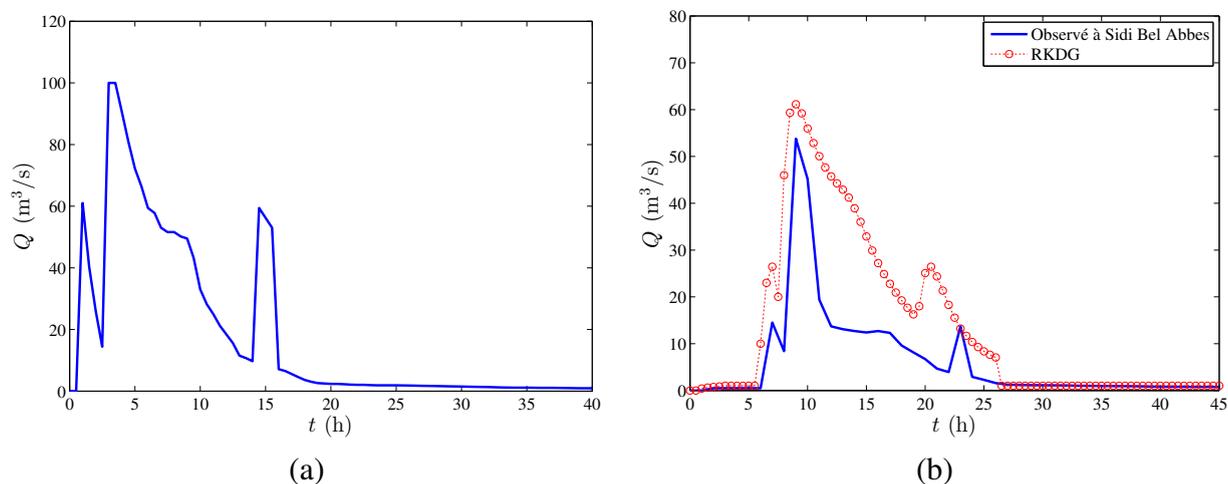


FIGURE 8.11 – La crue de l’été de 1983 : (a) l’hydrogramme mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub et (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées au niveau de la station de Sidi Bel Abbas.

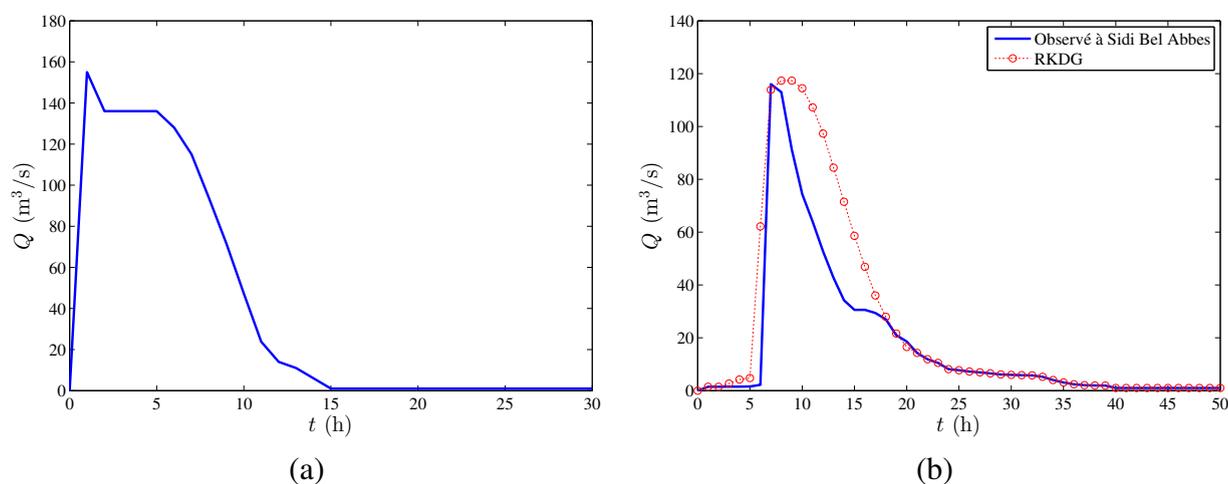


FIGURE 8.12 – La crue de l’automne de 1995 : (a) l’hydrogramme mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub et (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées au niveau de la station de Sidi Bel Abbas.

TABLE 8.5 – Comparaison de la précision de débit de pointe pour les deux événements -cas 1 : crue de l’été de 1983 ; cas 2 : crue de l’automne de 1995.

Hydrogramme	Cas 1	Cas 2
Observé à la station de Sidi Ali Benyoub	100.00	155.00
Simulé à la station de Sidi Bel Abbas	61.16	117.36
Observé à la station de Sidi Bel Abbas	53.80	116.00

sur l’agglomération de Sidi Bel Abbas et effectuée à l’aide du modèle bidimensionnel de type RKDG comme instrument de modélisation hydraulique et du système d’information géogra-

phique comme outil de cartographie des zones exposées. Ce choix est bien argumenté puisque la ville de Sidi Bel Abbès est confrontée continuellement aux inondations générées par les crues d'oued Mekerra. Le modèle (2D) RKDG montrera bien sa capacité en matière de représentation de l'étendue de l'inondation et le système d'information géographique permettra de bien spatialiser les éléments exposés à ce risque et par conséquent aboutir à une meilleure décision pour leur gestion.

Le modèle mis en œuvre permet d'obtenir une description précise du champ des vitesses et des axes d'écoulement. Autrement dit, il est possible de simuler les crues en temps réel, les vitesses, les directions d'écoulement et les hauteurs d'eau étant connues en tout point et à chaque instant et ensuite la cartographie des résultats de la modélisation hydraulique en vue de réaliser le zonage des aléas (Atallah *et al.*, 2018). Notons que, par hypothèse, les calculs sont réalisés à fond fixe. Aucune modélisation du transport sédimentaire ni aucune variation du fond du lit n'est modélisée dans la présente étude.

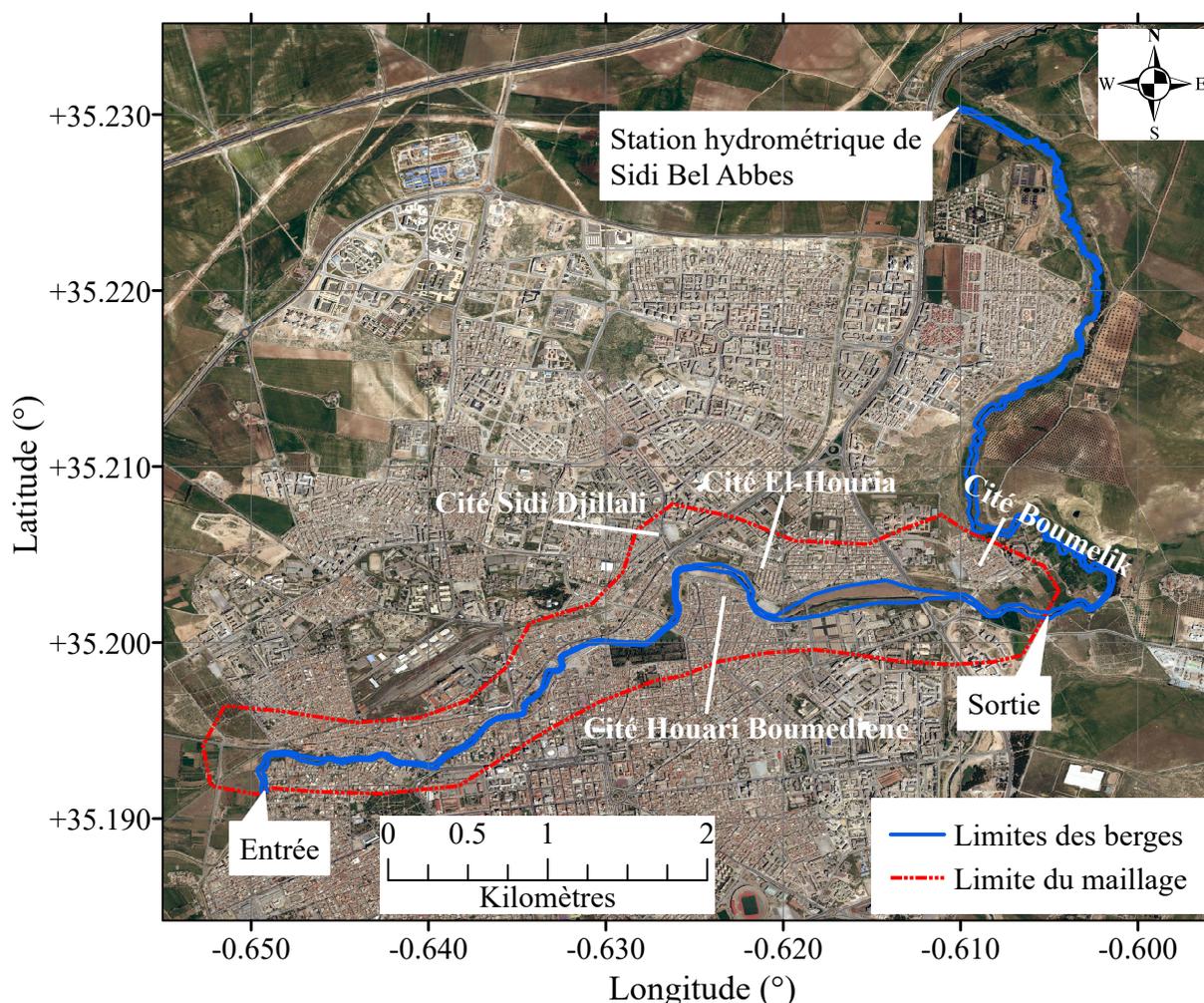


FIGURE 8.13 – Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbès : Délimitation de la zone d'étude (Atallah *et al.*, 2018).

La figure 8.13 représente la délimitation de la zone d'étude sur une photo de Google Earth. On a représenté, aussi, sur la même figure, les limites de la zone de maillage utilisée dans le cal-

cul. Cette figure a été géoréférencée dans le logiciel QGIS 2.14 (gratuit ; <http://www.qgis.org>), en utilisant le système géodésique mondial 1984 (WGS84), le même système de coordonnées utilisé dans Google Earth. La longueur de la partie étudiée de l'oued est d'environ 5380 m. Cette partie contient plusieurs méandres, la largeur variant de 13 à 142 m avec une faible pente de 0.3%.

Des levés topographiques récents ont été couplés avec les données des cartes topographiques afin d'obtenir le modèle numérique du terrain (MNT) avec une résolution de 10x10 m en utilisant un logiciel de cartographie (Figure 8.14). Le maillage horizontal est composé d'éléments triangulaires non structurés qui ont été préparés à l'aide du logiciel de préparation, d'analyse et de visualisation des données Blue Kenue (gratuit, <http://www.nrc-cnrc.gc.ca>). Les données bathymétriques ont été chargées dans Blue Kenue (sous forme de fichier ASCII où les coordonnées x , y et z sont représentées en mètres) et mappées (via un interpolateur) sur le maillage de sorte qu'une seule valeur d'altitude est attribuée à chaque nœud. Le maillage représenté sur la figure 8.15 est composé de 8960 nœuds et de 17434 éléments triangulaires. Sur cette figure, les coordonnées x et y sont transformées en degrés décimaux pour normaliser la présentation de toutes les figures. La zone d'étude comprend deux parties : le chenal principal et la plaine inondable. Le pas du maillage est pris égale à 12 m pour le chenal principal et 24 m pour la plaine inondable. Le chenal et la plaine d'inondation sont initialement secs et le débit de l'oued est considéré comme être nul. Les conditions aux limites sont créées en fonction du maillage généré. Les conditions aux limites comportent un hydrogramme du débit à l'entrée amont et de la courbe du tarage à l'aval (figure 8.16).

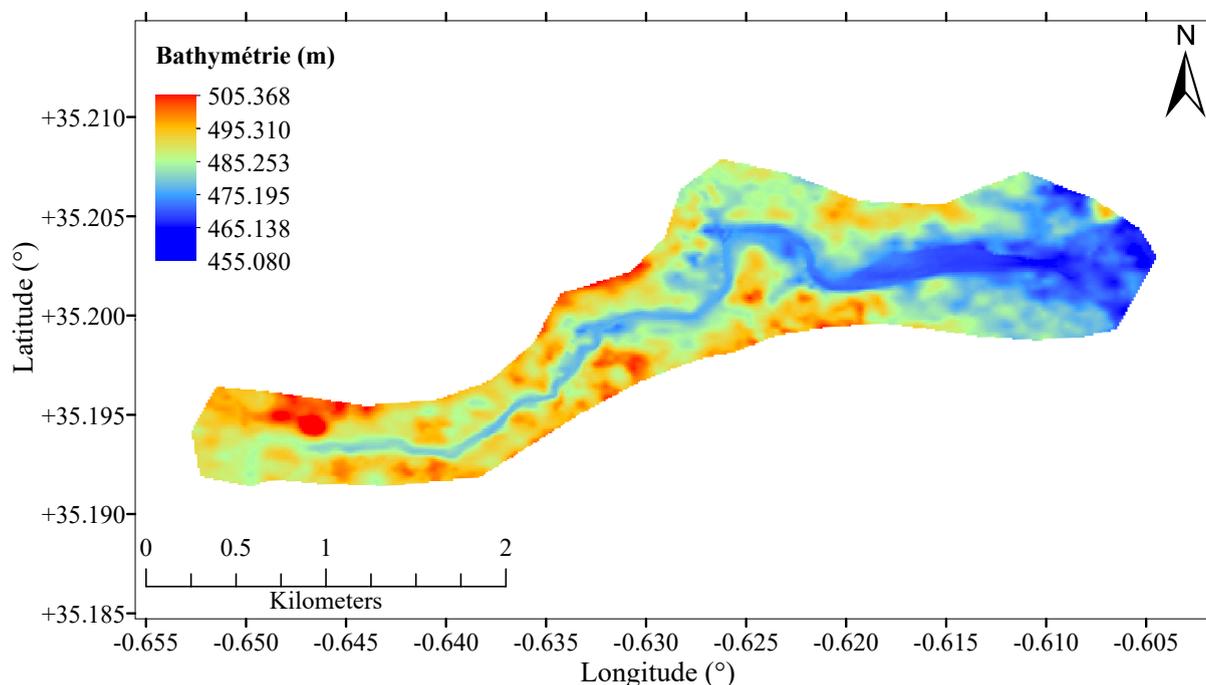


FIGURE 8.14 – Simulations bidimensionnelles de l'inondation de la ville de Sidi Bel Abbas : Topographie de la zone d'étude (Atallah *et al.*, 2018).

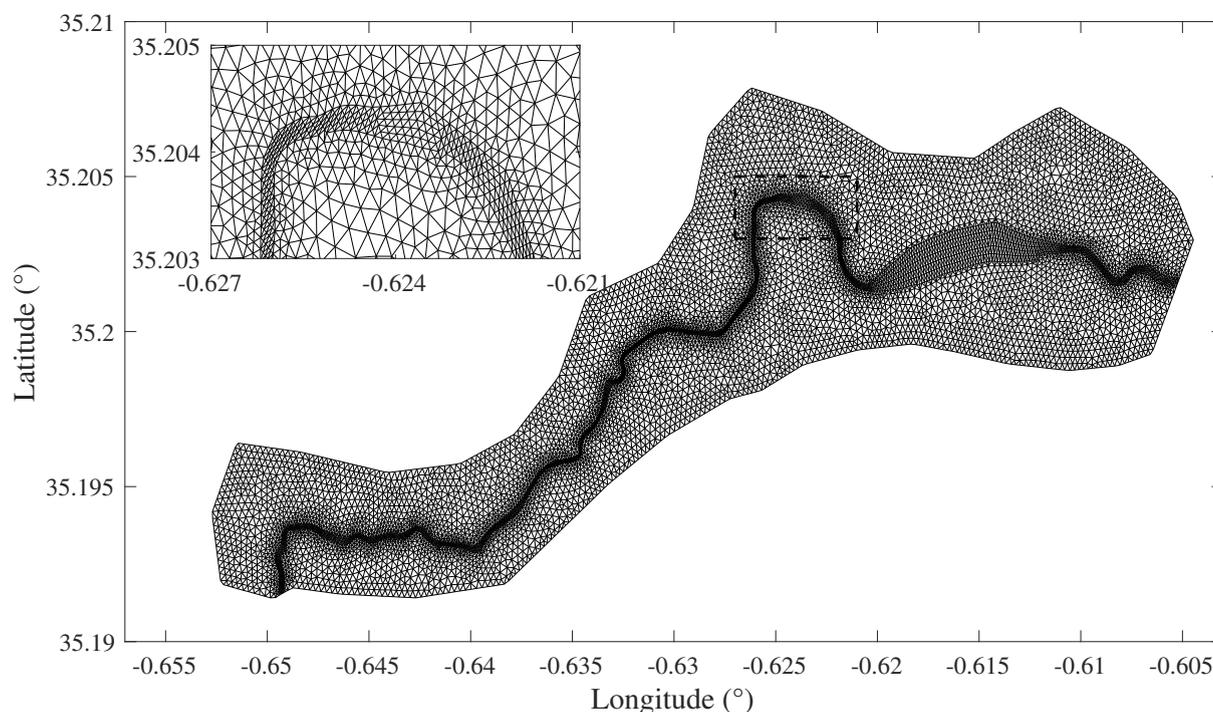


FIGURE 8.15 – Simulations bidimensionnelles de l’inondation de la ville de Sidi Bel Abbas : Maillage de la zone d’étude (*Atallah et al., 2018*).

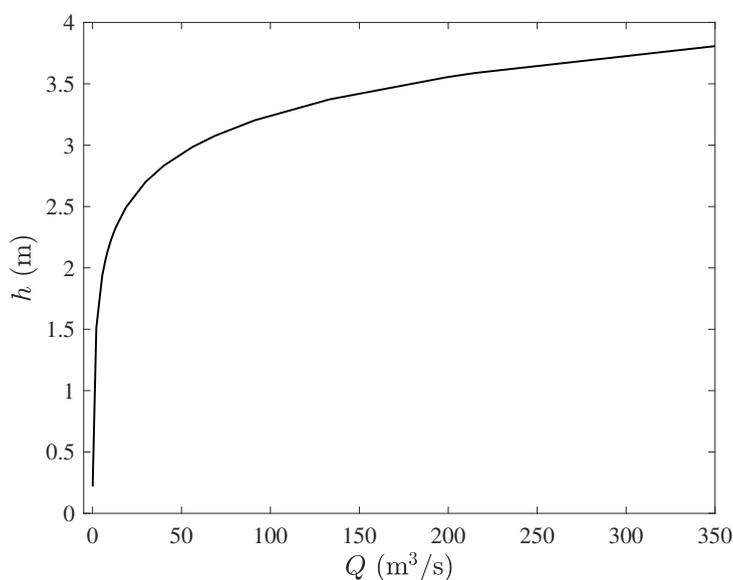


FIGURE 8.16 – Simulations bidimensionnelles de l’inondation de la ville de Sidi Bel Abbas : Courbe de tarage (*Atallah et al., 2018*).

a) Calage du modèle

En général, le coefficient de rugosité est une mesure de l’effet du matériau du lit, de la géométrie du canal, du type et de la densité de la végétation et d’autres facteurs sur la résistance à l’écoulement. Pour le développement de modèles hydrauliques, les coefficients de rugosité

de Manning sont ajustés en utilisant les niveaux d'eau et les débits enregistrés au niveau des stations de jaugeage (Wang *et al.*, 2010). Plusieurs chercheurs ont simulé les crues en utilisant les valeurs de Manning n_m ajustées pour reproduire les paramètres mesurés à l'aide de différents modèles hydrauliques calés tels que HEC-RAS (Berghout et Meddi, 2016; Boulomytis *et al.*, 2017), MIKE FLOOD (Ballesteros *et al.*, 2011), et SWAT (Yesuf *et al.*, 2016).

Les débits et les profondeurs d'eau sont mesurés à la station de jaugeage de Sidi Bel Abbes située à 4.9 km en aval de la zone d'étude. Cependant, la station de jaugeage amont la plus proche est située à Sidi Ali Benyoub (42 km en amont de la zone d'étude). Par conséquent, le calage du coefficient de Manning a été effectué en utilisant une méthodologie hybride. En particulier, nous avons utilisé une approche 1D pour simuler les écoulements dans l'oued, entre Sidi Ali Benyoub et l'entrée de Sidi Bel Abbes. L'hydrogramme obtenu à l'entrée de Sidi Bel Abbes est ensuite adopté comme condition à la limite d'entrée pour le modèle 2D de la zone exposée aux inondations. L'approche 1D-2D présente l'avantage de prédire l'inondation en évitant la description onéreuse de la géométrie du lit de l'oued en 2D et, par conséquent, de réduire le temps de calcul (Aureli *et al.*, 2006).

L'inondation survenue le 11 octobre 1995 a été utilisée pour le calage du modèle. L'hydrogramme de cet événement de crue est présenté à la figure 8.12(a). Le débit maximal enregistré lors de cet événement était de $155 \text{ m}^3/\text{s}$. La simulation s'effectue en utilisant la même procédure décrite dans la section 8.5. La longueur du tronçon simulé, dans ce cas, est 42 Km. Pour les conditions aux limites, nous avons utilisé l'hydrogramme de la crue du 11 octobre 1995 observé à l'extrémité amont du tronçon (Sidi Ali Benyoub) et la courbe de tarage dérivée à l'extrémité aval du tronçon (Sidi Bel Abbes). Les valeurs du coefficient de Manning sont les même décrite dans le tableau 8.4. L'hydrogramme obtenu à l'entrée d'une zone inondable est illustré à la figure 8.17.

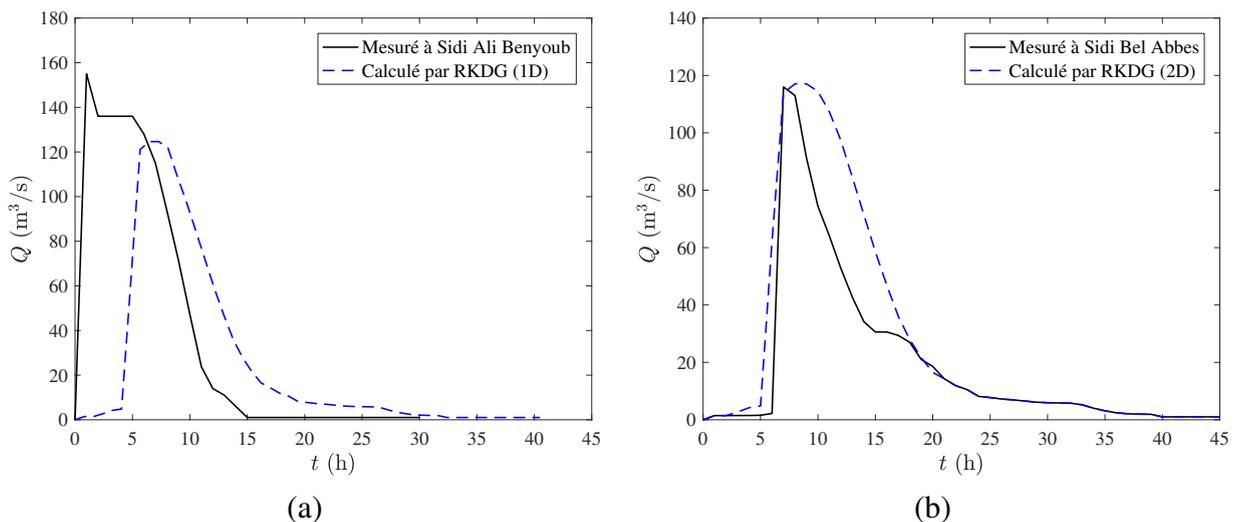


FIGURE 8.17 – Calage du modèle : (a) l'hydrogramme calculé par RKDG 1D (b) Comparaison entre les valeurs des débits mesurées et simulées par RKDG 2D au niveau de la station de Sidi Bel Abbes.

Le modèle 2D a ensuite été utilisé pour simuler le débit dans la zone exposé d'inondations.

Le maillage a été prolongé jusqu'à la station de jaugeage de Sidi Bel Abbas. Dans le but de calage, on a utilisé les valeurs des niveaux d'eau et les débits liquides calculés par le modèle 1D et les valeurs des niveaux d'eau et les débits liquides mesurés à la station de Sidi Bel Abbas lors de l'événement de la crue automnale de 1995. Différentes valeurs du coefficient de rugosité de Manning non homogène ont été testées dans le processus du calage du modèle 2D : 0.025 à 0.035 $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ pour le chenal principal et 0.06 à 0.1 $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ pour la plaine inondable.

Après simulation et calcul des erreurs (entre les variables simulées et mesurées), les coefficients de Manning ont été choisis pour minimiser les erreurs. Les valeurs optimales obtenues pour le coefficient de rugosité de Manning étaient de 0.028 $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ pour le chenal principal et de 0,071 $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ pour les zones d'habitation. Les hydrogrammes calculé et mesuré au niveau de la station de jaugeage de Sidi Bel Abbas sont présentés à la figure 8.17(b). Les résultats montrent que l'hydrogramme simulé était très proche de celui enregistré à la station de jaugeage de Sidi Bel Abbas. L'erreur maximale avec ces coefficients est inférieure à 1%.

8.6.1 Résultats et discussion

Après le calage du modèle pour le premier événement du 11 octobre 1995 (par ajustement des coefficients de Manning), le modèle a été utilisé pour analyser le comportement d'inondation de la ville de Sidi Bel Abbas lors de la deuxième crue survenue entre le 27 et le 30 septembre 1994. Le débit de pointe enregistré lors de cette inondation au niveau de la station de jaugeage de Sidi Ali Benyoub était 236.6 m^3/s (figure 8.18(a)). Pour la même période, le débit maximal enregistré au niveau de la station de Sidi Bel Abbas était 215 m^3/s . C'est la plus grande valeur enregistrée au niveau de cette station entre 1942 et 2006 (figure 8.7). La simulation a été effectuée en utilisant la même méthodologie hybride décrite dans le processus de calage du modèle. Nous avons utilisé l'approche 1D pour simuler l'écoulement dans l'oued, entre Sidi Ali Benyoub et l'entrée de Sidi Bel Abbas. L'hydrogramme obtenu (figure 8.18(b)) à l'entrée de Sidi Bel Abbas a été adopté comme condition au limite amont pour le modèle 2D de la zone exposée aux inondations.

La simulation est exécutée jusqu'à ce que les ondes sortent du domaine. Les profondeurs d'eau maximales obtenues par la simulation ont été transformés en cartes d'inondation à l'aide d'un logiciel de cartographie. À travers la superposition des cartes d'inondation sur la carte de la ville de Sidi Bel Abbas, on peut voir les maisons susceptibles d'être inondées. Ce résultat est très utile pour les autorités locales afin de tracer les cartes des risques d'inondation et d'informer la population. La figure 8.19 montrent les zones susceptibles d'être inondées sous l'effet d'une crue similaire à celle survenue entre le 27 et le 30 septembre 1994. La partie amont du tronçon étudié a une pente d'environ 0.45%, plus raide que la pente de la partie aval, qui est d'environ 0.15%. Par conséquent, la profondeur de l'écoulement en amont est relativement plus faible que celle de la partie aval. Les zones les plus touchées sont El-Houria, Sidi Djillali, Houari Boumediene et Boumelik (Figure 8.13). L'inondation des cités El-Houria, Sidi Djillali et Houari Boumediene est causée par les écoulements à haute vitesse, le rétrécissement de la section d'écoulement et la courbure du chenal principal. Évidemment, lorsque l'eau s'écoule dans une courbure, en raison de la force centrifuge, le niveau d'eau augmente près de la berge

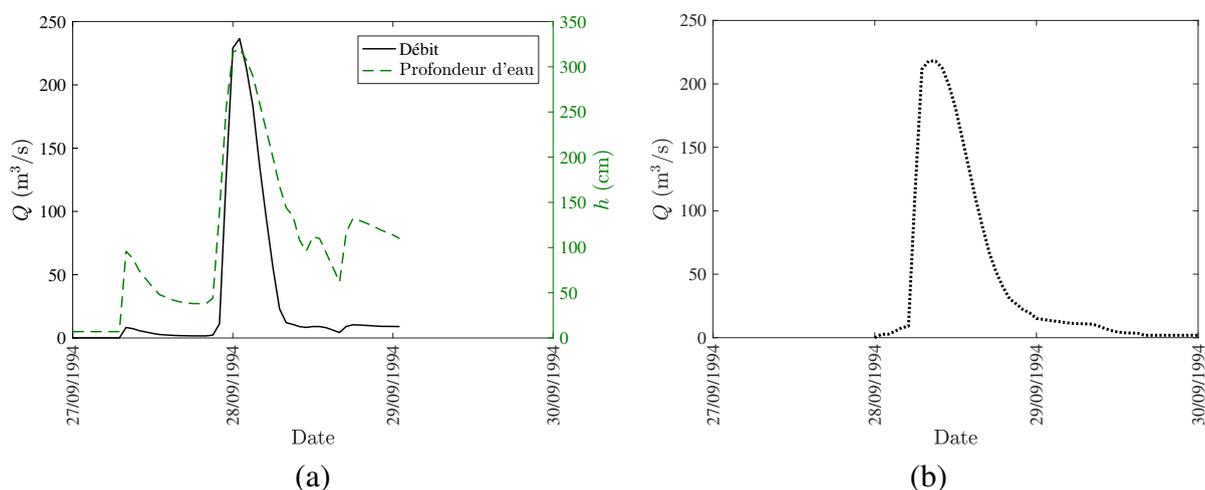


FIGURE 8.18 – Hydrogrammes : (a) mesuré au niveau de la station de Sidi Ali Benyoub (b) Calculé à l'entrée de la zone exposée aux inondations par RKDG (1D).

extérieure que de la berge interne. La vitesse d'écoulement est également plus élevée sur la rive extérieure de l'oued que sur la rive intérieure. Cela conduit à une augmentation plus importante du niveau d'eau vers la rive extérieure. La carte de distribution des vitesses (figure 8.20) montre que l'événement est caractérisé par des vitesses très élevées, en particulier dans les 2 premiers kilomètres. L'inondation de la région de Boumelik est due à l'augmentation du niveau d'eau qui est lui-même dû au rétrécissement de la section d'écoulement. Le rétrécissement de la section transversale d'écoulement de 142 m à 21 m provoquerait également une augmentation de la vitesse de l'eau. La profondeur d'eau dans l'oued, juste en amont de Boumelik, peut atteindre 12.3 m, ce qui peut causer de sérieux dommages.

Les menaces pour la sécurité des personnes et des dommages structurels bruts causés par les inondations dépend largement de la vitesse et de la profondeur des eaux de crue. Plus ces facteurs deviennent importants, plus le danger pour les personnes et les biens devient grand. Afin de tracer les cartes des risques d'inondation pour la zone étudiée nous avons utilisé la procédure décrite par *New South Wales (NSW) Government* (2005). Cette procédure combine entre la profondeur et la vitesse de la crue pour élaborer les cartes de risques d'inondation. Comme le montre la figure 8.21, l'indice de risque d'inondation est réparti en trois groupes (élevé, moyen et faible). La figure 8.22 présente la carte des risques résultant de l'inondation de 1994. Cette carte a été produite dans un logiciel de cartographie en combinant des cartes de profondeur et de vitesse selon le diagramme présenté à la Figure 8.21. Le risque d'inondation généré par l'oued Mekerra reflète les effets de la profondeur et de la vitesse d'écoulement. La figure 8.22 montre que la plus grande zone est liée à la classe à risque élevé alors que la classe à faible risque a la plus petite superficie. Le schéma des cartes des aléas d'inondation de la figure 8.22 prouve que la topographie de l'oued et de la plaine inondable est un facteur important. Dans la partie aval de la zone d'étude où la plaine d'inondation est relativement basse, le risque d'inondation de l'oued est plus élevé que dans les autres parties. En cas d'inondation, le débit d'inondation dépasse les berges et déborde dans la plaine d'inondation.

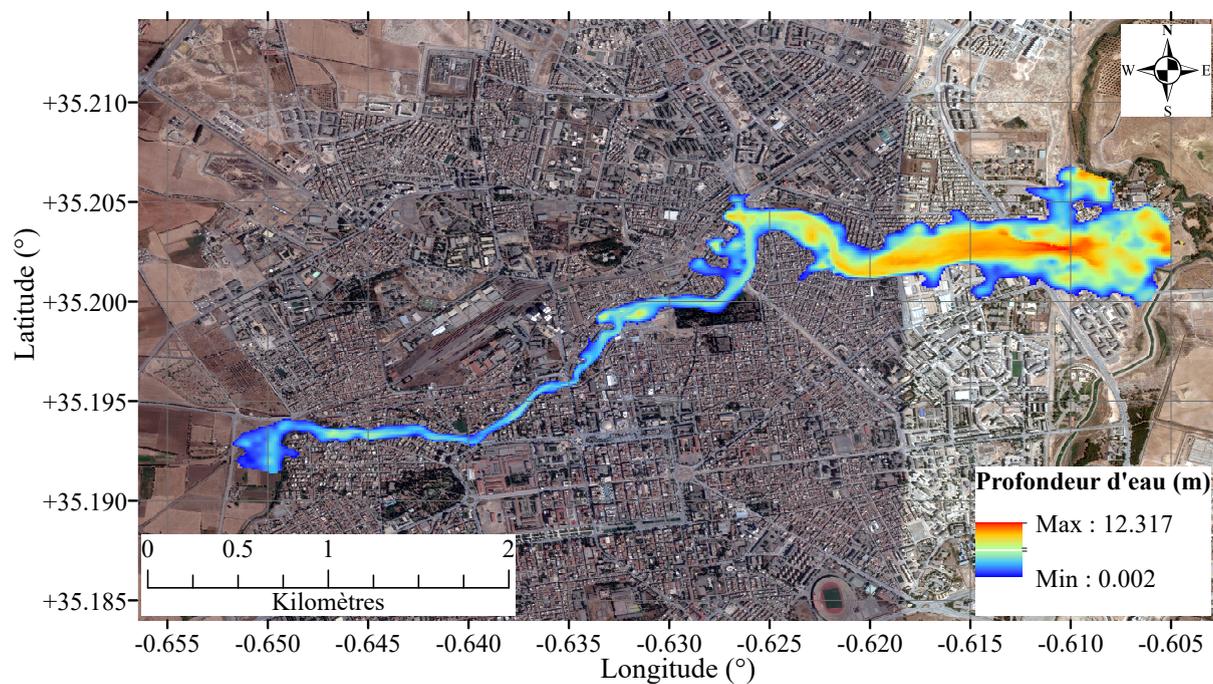


FIGURE 8.19 – Distributions des profondeurs d'eau maximales atteintes pour l'inondation de 1994.

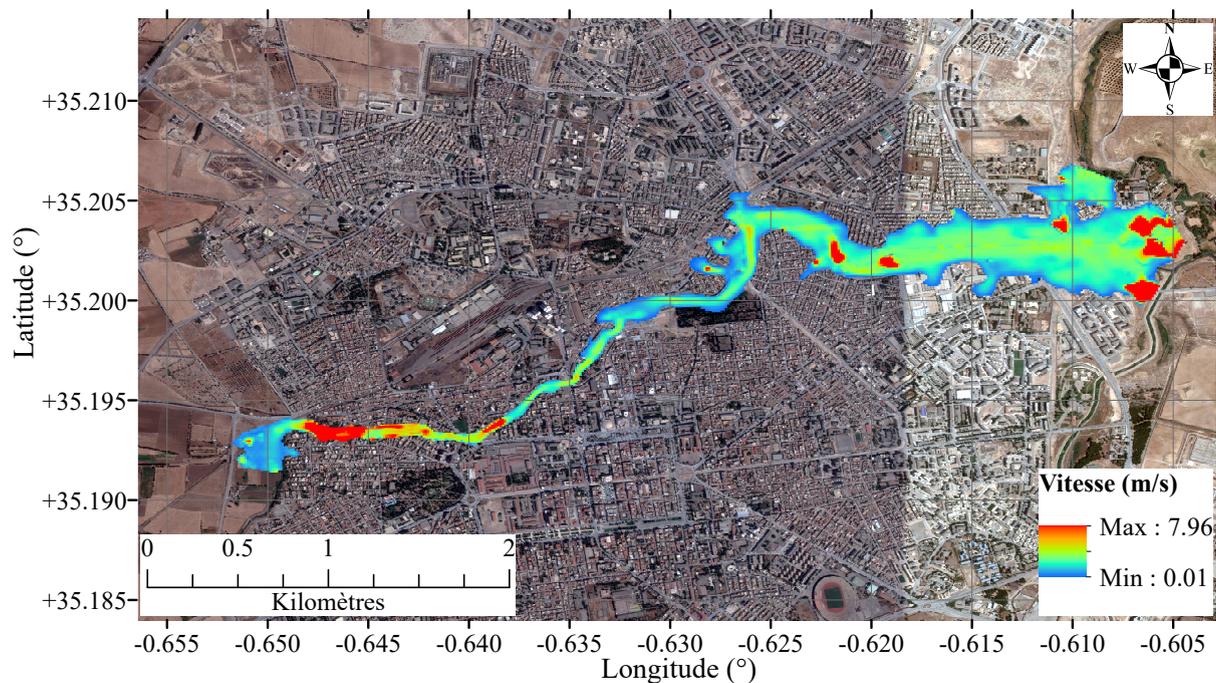


FIGURE 8.20 – Distributions des vitesses d'eau maximales atteintes pour l'inondation de 1994.

8.7 Conclusion

L'oued Mekerra, situé dans le nord-ouest de l'Algérie dans une zone semi-aride, est un cours d'eau éphémère. Les inondations soudaines et catastrophiques qui se produisent dans

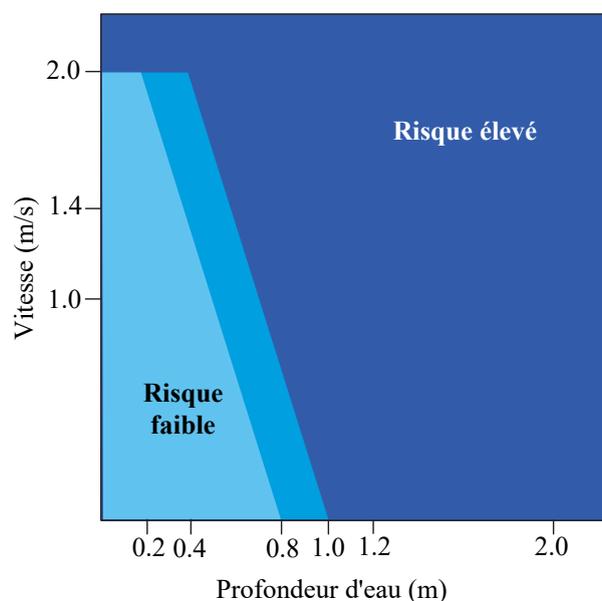


FIGURE 8.21 – Classification des risques d'inondation selon *New South Wales (NSW) Government* (2005).

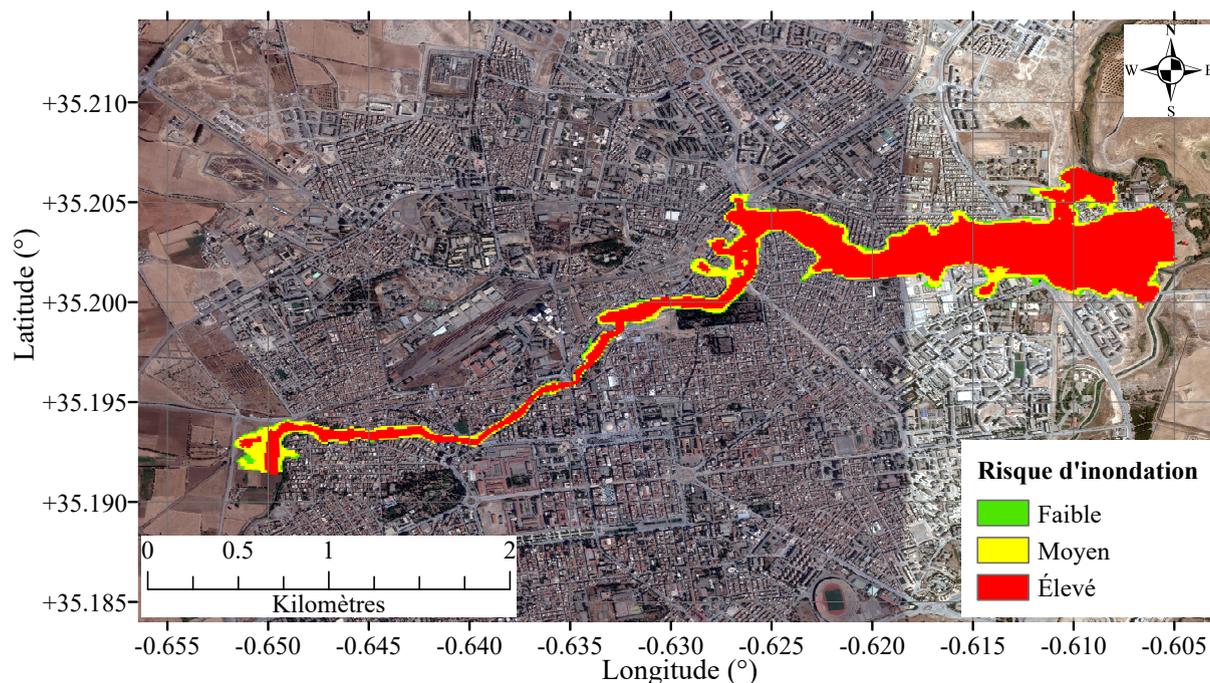


FIGURE 8.22 – Carte de risque d'inondation pour l'inondation de 1994.

l'oued constituent une menace pour plusieurs agglomérations. L'inondation, dans cette région, est causée par des précipitations intenses ou extrêmes sur une courte période, en particulier au début de l'automne.

La première partie, dans ce chapitre été consacré à la modélisation unidimensionnelle. Une comparaison entre les résultats mesurés et simulés a montré que le modèle utilisé est approprié pour déterminer l'hydrogramme de crue à la sortie du cours d'eau.

Dans la deuxième partie, on a étudié une section de l'oued Mekerra à travers la ville de Sidi Bel Abbès en exploitant des levés bathymétriques et les données de mesure des écoulements lors de deux événements du 11 octobre 1995 et 27-30 septembre 1994 enregistrés aux stations de jaugeage de Sidi Ali Benyoub et Sidi Bel Abbès. En utilisant les données du premier événement (inondation du 11 octobre 1995), on a pu faire le calage du modèle à travers la détermination du coefficient de Manning approprié. Ce calage a été effectué en utilisant une méthodologie hybride ; l'approche 1D est utilisée pour simuler l'écoulement dans l'oued, entre Sidi Ali Benyoub et l'entrée de Sidi Bel Abbès. L'hydrogramme obtenu à l'entrée de Sidi Bel Abbès a été adopté comme condition au limite amont pour le modèle 2D de la zone exposée aux inondations. La simulation du deuxième événement (inondation du 27-30 septembre 1994) a été réalisée en utilisant la même méthodologie hybride. Les valeurs de paramètres hydrodynamiques calculées (profondeurs et vitesses d'eau maximales) sont utilisées pour dessiner des cartes des risques d'inondation. L'analyse de ces cartes a conduit aux conclusions suivantes :

- L'inondation de certaines zones est causée par les écoulements à grande vitesse, le rétrécissement de la section transversale de l'écoulement et la courbure de l'oued.
- La topographie de l'oued et de la plaine d'inondation est un facteur important dans la cartographie des risques d'inondation. Dans la partie aval de la zone d'étude où la plaine d'inondation est relativement plate, le risque d'inondation est plus élevé que dans les autres localités. En cas d'inondation, le débit d'inondation dépasse les berges et déborde dans la plaine d'inondation.
- La distribution de risque d'inondation généré par l'oued est plus influencée par la profondeur d'eau et la vitesse d'écoulement.
- Les autorités locales peuvent utiliser un tel modèle comme outil de pronostic dans l'élaboration de plans d'urgence en cas d'inondation et prendre les mesures de défense appropriées.

Conclusions générales et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la simulation numérique des écoulements à surface libre en général (des inondations en particulier). Le modèle résout les équations de *Saint-Venant* en utilisant la formulation de Galerkin discontinue. Cette formulation présente des avantages aux méthodes traditionnelles d'éléments finis en facilitant l'implémentation de l'ordre élevé et donne des souplesses par rapport à l'adaptation de maillage. En simulations numériques, un des challenges est de disposer d'un code robuste et précis en calcul capable de simuler des écoulements uni et bidimensionnels à surface libre en prenant en compte la complexité de la topographie et la présence des épisodes de couvrent/découvrent. Une des applications est la simulation de la propagation des ondes de crues et le phénomène réel de rupture de barrage. Une partie de notre recherche s'articule sur l'application de cette méthode à la simulation des ondes de crue de l'Oued Mekerra. C'est un Oued à écoulement temporel dans une région semi-aride. Les schémas de Galerkin discontinue, que nous avons considérés, ont prouvé leurs capacités à capturer le choc aux frontières des discontinuités.

Nous avons tous d'abord établi le modèle mathématique de *Saint-Venant* qui représente un système des lois de conservation régissant les écoulements à surface libre. Ces lois de conservation sont celles de la masse et de la quantité de mouvement dont elles combinent entre les effets des forces d'inertie, de gravité, de pressions et de frottement sous certaines hypothèses et approximations fondamentales. Les équations de *Saint-Venant* donnent une solution aux écoulements non permanent et non uniforme à surface libre. Toutefois, ces approximations sont souvent très restrictives et ne permettent pas de prendre en considération certains problèmes pratiques notamment lorsqu'il s'agit d'un domaine vaste.

Nous avons adapté une méthode de type éléments finis Galerkin discontinus (RKDG) associée à une limitation de pente. Notre schéma est ainsi basé sur une discrétisation de type éléments finis discontinus de Galerkin en espace et une intégration temporelle de type Runge-Kutta. Cette méthode permet également d'obtenir des schémas d'ordre élevé basés sur le choix d'une base locale et des formules de quadrature. Différents schémas d'approximation des flux numériques ont été présentés, à savoir celui de Lax-Friedrichs (LF), celui de Harten, Lax, et van Leer (HLL), celui de Harten-Lax-van Leer Contact (HLLC) et celui de de Roe. La méthode RKDG est conçue avec une procédure de limitation de pente qui permet d'éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. Trois limiteurs de pente unidimensionnels, ceux de Godunov, minmod, et le limiteur de pente MC (Monotonized Central) sont aussi présentés et détaillés. Nous avons opté pour l'utilisation du dernier limiteur de pente. La procédure de limiteur de pente, dans le cas 1D, est appliquée à la profondeur d'eau et noté

(LP- h), au niveau d'eau et noté (LP-Z) ou à la section d'écoulement et noté (LP-A). Les limiteurs ainsi choisis améliorent l'exactitude de la solution, réduisent au maximum les oscillations non-physiques au sein des discontinuités et préserve l'ordre supérieur du schéma numérique.

Nous avons par ailleurs comparé le schéma RKDG avec la méthode CDG (Characteristic Dissipative Galerkin), une méthode de type éléments finis continue dans le cadre de plusieurs problèmes hydrauliques stationnaires et transitoires admettant des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux. Nous avons constaté que dans les régions « lisses », les deux méthodes donnent des résultats similaires. Cependant on peut remarquer que la formulation éléments finis discontinus de Galerkin est plus précise dans les régions où il y a des discontinuités. Pour chaque type de limiteur de pente utilisé, les solveurs approximatifs de Riemann de type HLL, LF, et Roe sont évalués. Les résultats prouvent que le meilleur limiteur de pente est LP-Z. Les tests montrent que le solveur de type Roe donne les résultats les plus précis tandis que les résultats le moins précis est obtenus avec le solveur de type LF. Dans le cas où il existe des transitions du régime torrentiel au fluvial suivies d'un ressaut hydraulique les deux procédures de limitation de pente donnent des résultats similaires. Cependant, les résultats oscillatoires sont observés dans le débit avec le solveur LF. Pour les deux procédures de limitation de pente, le solveur de type Roe conserve le débit avec plus de précision. Cependant, l'utilisation de limiteur de pente LP-Z avec un solveur de type Roe fournit de meilleures solutions. Nous avons aussi appliqué la méthode GD à la modélisation unidimensionnelle des écoulements à surface libre dans les canaux naturels. Nous avons détaillé la méthode GD utilisée pour résoudre ces équations. La méthode de traitement des lits secs est aussi présentée. Nous avons validé et comparé le schéma numérique décrits et ceci sur différents problèmes hydrauliques transitoires et stationnaires.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la simulation numérique des écoulements à surface libre en deux dimensions dans les canaux naturels. Différents traitements des termes de flux numériques ont été discutés. On a décrit, aussi, la méthode de traitement du terme source et le limiteur de pente bidimensionnel de Tu et Aliabadi (2005) pour des discrétisations triangulaires utilisé pour stabiliser le schéma numérique. Ce schéma numérique est appliqué aux divers problèmes d'écoulements à surface libre. Les solutions numériques sont comparées avec des solutions analytiques ou avec des mesures en laboratoire. La méthode RKDG a été confrontée dans le cadre de différentes applications, qu'il s'agisse aussi bien du calcul des hauteurs d'eau que des débits, notamment dans des problèmes présentant des discontinuités dues à des ressauts hydrauliques ou des ruptures de barrages. Des comparaisons à la fois d'ordre quantitatives et qualitatives montrent que la méthode donne des résultats de bonne qualité. La méthode RKDG permet de considérer plus naturellement des phénomènes incluant des chocs et des ressauts hydrauliques. Les fonctions de flux HLL et Roe donnent, pour les problèmes étudiés, des résultats avec précisions de même ordre de grandeur. Les résultats obtenus à partir des deux limiteurs de pente, LP-A et LP-Z, produisent les mêmes résultats pour les essais effectués dans des canaux prismatiques et non prismatiques rectangulaires sur des lits mouillés et secs. Pour les canaux naturels avec lit sec, le limiteur de pente LP-A donne de meilleures solutions que le limiteur de pente LP-Z. Dans l'ensemble, le limiteur de pente LP-A est capable de fournir des résultats précis pour les canaux rectangulaires, non rectangulaires et naturels sur des lits mouillés et secs.

Les résultats des cas-tests sont satisfaisants et nous permettent d'envisager avec confiance

le passage à des applications grandeur nature : la rupture du barrage de Malpasset (France). Dans cette application, les comparaisons très complètes donnent une bonne cohérence entre les résultats numériques et ceux issus du modèle physique ou observé. Elles confirment la fiabilité et le bon fonctionnement du code même pour un cas grandeur nature. Dans le but d'appliquer ces méthodes numériques pour des cas réels tel que l'onde de crue, une étude générale du bassin versant de Mekerra, nous a fourni un aperçu général sur les différents paramètres hydrologiques, climatologiques et hydrologiques de ce bassin. Ce dernier est caractérisé par un relief variant entre fort et très fort et une forme allongée. Le réseau hydrographique montre que notre bassin est relativement drain. Ce bassin se caractérise par un climat semi-aride. L'oued Mekerra est un oued éphémère avec un taux moyen d'écoulement journalier de l'ordre de (10%). L'oued Mekerra se caractérise par des crues violentes et ravageuses qui se manifestent de façon périodique à l'automne, généralement de Septembre à Octobre et accompagnées par des pluies torrentielles dont l'intensité peut atteindre jusqu'à (120 à 190 mm/h).

On a, aussi, étudié une section de l'oued Mekerra à travers la ville de Sidi Bel Abbas en exploitant des levés bathymétriques et les données de mesure des écoulements. Les valeurs de paramètres hydrodynamiques calculées (profondeurs et vitesses d'eau maximales) sont utilisées pour dessiner des cartes des risques d'inondation. L'analyse de ces cartes a conduit aux conclusions suivantes : (a) L'inondation de certaines zones est causée par les écoulements à grande vitesse, le rétrécissement de la section transversale de l'écoulement et la courbure de l'oued, (b) La topographie de l'oued et de la plaine d'inondation est un facteur important dans la cartographie des risques d'inondation. Dans la partie aval de la zone d'étude où la plaine d'inondation est relativement plate, le risque d'inondation est plus élevé que dans les autres localités. En cas d'inondation, le débit d'inondation dépasse les berges et déborde dans la plaine d'inondation, (c) La distribution de risque d'inondation généré par l'oued est plus influencée par la profondeur d'eau et la vitesse d'écoulement. Les autorités locales peuvent utiliser un tel modèle comme outil de pronostic dans l'élaboration de plans d'urgence en cas d'inondation et prendre les mesures de défense appropriées. Dans cette étude, nous avons seulement considéré les termes source dus à la topographie du fond et aux pertes par frottement. Cependant, le système de *Saint-Venant* sont soumis à une grande variété de forces externes telles que la force de Coriolis, la contrainte de vent de surface et le gradient de pression atmosphérique. Par conséquent, ces termes peuvent être ajoutés aux équations de quantité de mouvement pour présenter une gamme plus large de processus physiques qui peuvent contribuer aux écoulements de la plaine inondable. Dans de nombreuses situations, ce modèle sera résolu sur des domaines complexes et sur des bathymétries irrégulières telles que les zones côtières. La méthode des éléments finis est particulièrement avantageuse pour ces types d'applications. Le modèle peut également être combiné avec quelques équations supplémentaires (par exemple, transport, réaction) pour la simulation de la propagation des contaminants, du transport de la température et de la salinité et d'autres problèmes d'ingénierie. une autre perspective de ce travail est de poursuivre le développement de l'approche RKDG, notamment au niveau du temps de calcul (en utilisant par exemple un pas de temps local (Local Time Stepping) pour réduire le temps de calcul. Ces questions et d'autres feront l'objet de futures investigations.

Bibliographie

- Abdallah, M. (2005), Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint–Venant pour la modélisation de l’hydraulique en réseau d’assainissement, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, https://engees.unistra.fr/fileadmin/user_upload/pdf/shu/These_Maher.pdf. 8, 72
- Aizinger, V., et C. Dawson (2002), A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water, *Advances in Water Resources*, 25(1), 67–84, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0309-1708\(01\)00019-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0309-1708(01)00019-7). 5, 38
- Akoh, R., S. Ii, et F. Xiao (2010), A multi-moment finite volume formulation for shallow water equations on unstructured mesh, *Journal of Computational Physics*, 229(12), 4567–4590, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.02.023>. 80, 86, 127
- Alcrudo, F., et P. García-Navarro (1993), A high resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16, 489–505, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1650160604>. 119, 124
- Alcrudo, F., et E. Gil (1999), The Malpasset dam break case study, dans *The Proceeding of the 4th CADAM meeting*, pp. 95–109, Zaragoza, Spain. 155, 160, 169
- Ambati, V. R., et O. Bokhove (2007), Space–time discontinuous Galerkin finite element method for shallow water flows, *Journal of computational and applied mathematics*, 204(2), 452–462, doi :<https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.047>. 38
- Amiri, S. M., N. Talebbeydokhti, et A. Baghlani (2013), A two-dimensional well-balanced numerical model for shallow water equations, *Scientia Iranica*, 20(1), 97–107, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.scient.2012.12.001>. 124, 126
- Anastasiou, K., et C. T. Chan (1997), Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24(11), 1225–1245, doi :[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19970615\)24:11<1225::AID-FLD540>3.0.CO;2-D](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19970615)24:11<1225::AID-FLD540>3.0.CO;2-D). 119, 124, 126
- Anderson, D. A., J. C. Tannehill, et R. H. Pletcher (1984), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw Hill, New York. 7

- Aricò, C., M. Sinagra, et T. Tucciarelli (2013), Anisotropic potential of velocity fields in real fluids : Application to the MAST solution of shallow water equations, *Advances in Water Resources*, 62(A), 13–36, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2013.09.010>. 124, 126, 146
- Atallah, M., et A. Hazzab (2013), A Petrov–Galerkin scheme for modeling 1D channel flow with varying width and topography, *Acta Mechanica*, 224(4), 707–725, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s00707-012-0781-2>. xvii, 8, 35, 60, 68, 72, 73, 74, 80, 84, 86, 183, 185
- Atallah, M., A. Hazzab, A. Seddini, A. Ghenaim, et K. Korichi (2016), Hydraulic flood routing in an ephemeral channel : Wadi Mekerra, Algeria, *Modeling Earth Systems and Environment*, 2(182), 1–12, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s40808-016-0237-0>. 2, 183
- Atallah, M., A. Hazzab, A. Seddini, A. Ghenaim, et K. Korichi (2018), Inundation maps for extreme flood events : case study of Sidi Bel Abbes city, Algeria, *Journal of Water and Land Development*, 37(IV–VI), accepté. xv, 187, 188, 189
- Audusse, E. (2004), Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes, thèse de doctorat, Université Paris VI, Pierre et Marie Curie, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008047/document>. 8
- Aureli, F., P. Mignosa, C. Ziveri, et A. Maranzoni (2006), Fully-2D and quasi-2D modelling of flooding scenarios due to embankment failure, dans *River Flow 2006 : Proceedings of the international conference on fluvial hydraulics*, édité par R. M. L. Ferreira, E. C. T. L. Alves, J. G. A. B. Leal, et A. H. Cardoso, pp. 1473–1482, Taylor & Francis Group, UK, Lisbon, Portugal. 190
- Ballesteros, J., J. Bodoque, A. Díez-Herrero, M. Sanchez-Silva, et M. Stoffel (2011), Calibration of floodplain roughness and estimation of flood discharge based on tree-ring evidence and hydraulic modelling, *Journal of Hydrology*, 403(1), 103–115, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.03.045>. 190
- Bassi, F., et S. Rebay (1997), A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations, *Journal of computational physics*, 131(2), 267–279, doi :<https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5572>. 37
- Bellos, C., V. Soulis, et J. Sakkas (1992), Experimental investigation of two-dimensional dam-break induced flows, *Journal of Hydraulic Research*, 30(1), 47–63, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221689209498946>. 108
- Bellos, C. V., J. V. Soulis, et J. G. Sakkas (1991), Computation of two-dimensional dam-break induced flows, *Advances in Water Resources*, 14(1), 31–41, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0309-1708\(91\)90028-M](http://dx.doi.org/10.1016/0309-1708(91)90028-M). 140

- Benkhaldoun, F., et M. Seaid (2010), A simple finite volume method for the shallow water equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1), 58–72, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.12.005>. 73, 80, 84, 86, 88
- Benkhaldoun, F., I. Elmahi, et M. Seaid (2010), A new finite volume method for flux-gradient and source-term balancing in shallow water equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52), 3324–3335, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.003>. 88, 119, 150, 151
- Bento, F. A. (1996), Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens, thèse de doctorat, UTL, Instituto Superior Técnico, Lisboa. 135
- Benyahia, M., M. A. Bouzidi, K. Moueddene, B. Hallouche, I. Attaoui, H. Meliani, et F. Derrouni (2011), Comprehension de l'inondabilité de la plaine de Sidi Bel Abbes par l'oued Mekerra (ouest Algerien), *Le Journal de l'Eau et de l'Environnement*, 18, 27–46, <http://share.ensh.dz/index.php/ljee/article/download/558/249>. xvii, 176, 181, 182
- Berghout, A., et M. Meddi (2016), Sediment transport modelling in wadi Chemora during flood flow events, *Journal of Water and Land Development*, 31(1), 23–31, doi :<https://doi.org/10.1515/jwld-2016-0033>. 190
- Blackburn, J., et F. E. Hicks (2002), Combined flood routing and flood level forecasting, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 29(1), 64–75, doi :<https://doi.org/10.1139/101-079>. 35
- Bontron, G., et C. Obled (2003), Prévision à moyenne échéance des pluies intenses en zone méditerranéenne par recherche de situations analogues, dans *International conference on hydrology of the Mediterranean and semi-arid regions*, pp. 257–262, International Association of Hydrological Sciences, http://hydrologie.org/redbooks/a278/iahs_278_257.pdf. 181
- Boris, J. P., et D. L. Book (1973), Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works, *Journal of computational physics*, 11(1), 38–69, doi :[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(73\)90147-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(73)90147-2). 59
- Boulomytis, V. T. G., A. C. Zuffo, J. G. Dalfré Filho, et M. A. Imteaz (2017), Estimation and calibration of Manning's roughness coefficients for ungauged watersheds on coastal floodplains, *International Journal of River Basin Management*, 15(2), 199–206, doi :<https://doi.org/10.1080/15715124.2017.1298605>. 190
- Brooks, A. N., et T. J. R. Hughes (1982), Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199–259, doi :[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8). 35, 69

- Brufau, P., et P. García-Navarro (2003), Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique, *Journal of Computational Physics*, 186(2), 503–526, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00072-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00072-X). 136, 138
- Brunner, G. W. (2010), HEC-RAS river analysis system : Hydraulic reference manual, *Rapport Technique CPD-68*, U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/documentation/HEC-RAS_4.1_Reference_Manual.pdf. 6
- Bunya, S., E. J. Kubatko, et C. D. J. J. Westerink and (2009), A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(17–20), 1548–1562, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.008>. 8, 38
- Burguete, J., et P. García-Navarro (2004), Improving simple explicit methods for unsteady open channel and river flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(2), 125–156, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.619>. 7
- Buyer, M. (2001), Transport de flux en réseau d’assainissement : modèle 1d pour l’hydraulique des collecteurs et déversoirs avec prise en compte des discontinuités, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 238 pages. 57
- Carey, G. F., et B. N. Jiang (1988), Least-Squares Finite Element for First-Order Hyperbolic Systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 81–93, doi :<https://doi.org/10.1002/nme.1620260106>. 35
- Catella, M., E. Paris, et L. Solari (2008), Conservative scheme for numerical modeling of flow in natural geometry, *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(6), 736–748, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2008\)134:6\(736\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2008)134:6(736)). 75, 80, 86, 96, 106, 140
- Chaabelasri, E. M. (2011), Contribution à la modélisation des écoulements en eaux peu profondes, avec transport de polluant. (application à la baie de tanger), thèse de doctorat, Université Mohamed Premier – Oujda, Maroc, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00575138/document>. 4, 88
- Chambers, Z. (2000), A characteristics finite element algorithm for computational open channel flow analysis, Thèse de doctorat, University of Tennessee, Knoxville, pp. 1-8. 35
- Chang, T.-J., H.-M. Kao, K.-H. Chang, et M.-H. Hsu (2011), Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Hydrology*, 408(1–8), 78–90, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.07.023>. 140, 146
- Chaudhry, M. H. (2008), *Open-channel flow*, Springer Science+Business Media, LLC. 23, 70

-
- Chavent, G., et B. Cockburn (1987), Consistance et stabilité des schémas LRG pour les lois de conservation scalaire, *Rapport Technique 710*, INRIA, <https://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00075842/document>. 58
- Chavent, G., et G. Salzano (1982), A finite–element method for the 1D water flooding problem with gravity, *Journal of Computational Physics*, 45(3), 307–344, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90107-3](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(82)90107-3). 36, 37, 38, 58
- Chen, Y. H. (1973), Mathematical modeling of water and sediment routing in natural channels, thèse de doctorat, Colorado State University, Ft. Collins, CO. 7
- Cherif, E. A., M. Errih, et H. M. Cherif (2009), Modélisation statistique du transport solide du bassin versant de l’Oued Mekerra (Algérie) en zone semi-aride méditerranéenne, *Hydrological sciences journal*, 54(2), 338–348, doi :<http://dx.doi.org/10.1623/hysj.54.2.338>. 171, 174
- Chow, V. T. (1959), *Open-Channel hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, New York, N. Y., 680 p. 119, 183
- Clark, C. L. (1995), Economic aspects of disasters and sustainable development : an introduction, dans *Disaster prevention for sustainable development : Economie and policy issues*, édité par M. Munasinghe et C. Clarke, pp. 1–10, The International Decade for Natural Disaster Reduction (IDN DR) and The World Bank. 1
- Clough, R. W. (1960), The finite element method in plane stress analysis, dans *Proceedings of the Second Conference on Electronic Computation*, pp. 345–378, Pittsburgh, PA. 34
- Cockburn, B., et C. W. Shu (1989), TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II : General framework, *Mathematics of Computation*, 52, 411–435, doi :<http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4>. 36, 37
- Cockburn, B., et C.-W. Shu (1991), The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 25(3), 337–361, <https://conservancy.umn.edu/bitstream/handle/11299/4761/388.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. 36, 37
- Cockburn, B., et C.-W. Shu (1998), The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V : multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 141(2), 199–224, doi :<https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5892>. 37
- Cockburn, B., et C. W. Shu (2005), Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, *Journal of Scientific Computing*, 22(1–3), 1–2, doi :<https://doi.org/10.1007/s10915-004-4131-y>. 37
-

-
- Cockburn, B., et C. W. Shu (2009), Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, *Journal of Scientific Computing*, 40(1–3), 1–3, doi :<https://doi.org/10.1007/s10915-009-9298-9>. 37
- Cockburn, B., S. Y. Lin, et C. W. Shu (1989), TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III : One dimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 84(1), 90–113, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90183-6](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(89)90183-6). 36
- Cockburn, B., S. Hou, et C.-W. Shu (1990), The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case, *Mathematics of Computation*, 54(190), 545–581, doi :<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1990-1010597-0>. 37
- Cockburn, B., G. Karniadakis, et C. SHU (2000), *Discontinuous Galerkin Methods : Theory, Computation and Applications*, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 11, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 37
- Colella, P., et P. R. Woodward (1984), The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations, *Journal of Computational Physics*, 54(1), 174–201, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8). 65
- Courant, R. (1943), Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bulletin of the American mathematical Society*, 49(1), 1–23. 34
- Courant, R., K. Friedrichs, et H. Lewy (1928), Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 1(100), 32–74, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/BF01448839>. xviii, 7
- Črnjarić-Žic, N., S. Vuković, et L. Sopta (2004), Balanced finite volume WENO and central WENO schemes for the shallow water and the open-channel flow equations, *Journal of Computational Physics*, 200(2), 512–548, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.04.012>. 18, 146
- Cunge, J. A., F. M. Holly, et A. Verwey (1980), *Practical Aspect of Computational River Hydraulics*, Bitman Publishing Company, London, England, 420 pages. 7, 71
- Davies, B. R., M. C. Thoms, K. F. Walker, J. H. O’keeffe, et J. A. Gore (1994), Dryland rivers : Their ecology, conservation and management, dans *The Rivers Handbook : Hydrological and Ecological Principles*, vol. 2, édité par P. Calow et G. E. Petts, chap. 25, pp. 484–511, Blackwell scientific publications, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/9781444313871.ch25>. 178
- Dawson, C. (2006), Special issue on discontinuous Galerkin methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25–28), 3183, doi :<https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.06.010>. 37
-

- Day, J. A. (1990), Environmental correlates of aquatic faunal distribution in the Namib Desert, *Namib ecology*, 25, 99–107. 179
- Delestre, O. (2010), Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles, thèse de doctorat, l'université d'Orléans, http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/56/16/76/PDF/olivier.delestre_1878.pdf. 81, 103
- Delis, A. I., et T. Katsaounis (2005), Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods, *Applied Mathematical Modelling*, 29(8), 754–783, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2004.11.001>. 4, 124, 126, 127
- Dhatt, G., et G. Touzot (1981), *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*, Maloine Éditeurs, Paris, France, 540 pages. 32, 42
- DHI (2009), *MIKE 11, A modelling system for rivers and channels, Reference manual*, Danish Hydraulic Institute. Water & Environment, Hørsholm, Denmark, http://euroaquae.tu-cottbus.de/hydroweb/Platform/Notes/Mike11_Reference.pdf. 6
- DHI (2011), *MIKE 21 flow model, Hydrodynamic module, User guide*, Danish Hydraulic Institute, Water & Environment, Hørsholm, Denmark, http://euroaquae.tu-cottbus.de/hydroweb/Platform/Notes/Mike11_UserManual.pdf. 6
- Donea, J. (1984), A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 101–119. 34
- Donnell, B. P., J. V. Letter Jr., W. H. McAnally Jr., et A. W. Thomas (2011), *Users guide to RMA2 WES Version 4.5*, US Army, Engineer Research and Development Center Waterways Experiment Station, Coastal and Hydraulics Laboratory, Vicksburg, Miss., <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.193.9116&rep=rep1&type=pdf>. 6, 36
- Duran, A., et F. Marche (2014), Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms, *Computers & Fluids*, 101, 88–104, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.05.031>. 8, 38, 73, 127
- Dutykh, D., et D. Mitsotakis (2010), On the relevance of the dam break problem in the context of nonlinear shallow water equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 3(2), 799–818, doi :<http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2010.13.799>. 153
- Ern, A., S. Piperno, et K. Djadel (2008), A well-balanced Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the shallow-water equations with flooding and drying, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(1), 1–25, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1674>. 8, 38
- Epicum, S., B. J. Dewals, P. Archambeau, et M. Piroton (2010), Dam break flow computation based on an efficient flux vector splitting, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(7), 2143–2151, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.110>. 138, 140, 146

-
- Eskilsson, C., et S. J. Sherwin (2004), A triangular spectral/hp discontinuous Galerkin method for modelling 2D shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(6), 605–623, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.709>. 38, 113
- Evans, E. P., J. M. Wicks, C. D. Whitlow, et D. M. Ramsbottom (2007), The evolution of a river modelling system, dans *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Water Management*, vol. 160, pp. 3–13, doi :<http://dx.doi.org/10.1680/wama.2007.160.1.3>. 6
- Fennema, R. J., et M. H. Chaudhry (1990), Explicit methods for 2-D transient free surface flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, 116, 1013–1034, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1990\)116:8\(1013\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1990)116:8(1013)). 127
- Fortin, M., et A. Fortin (1989), A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 32(3), 295–310, doi :[https://doi.org/10.1016/0377-0257\(89\)85012-8](https://doi.org/10.1016/0377-0257(89)85012-8). 36
- Fraccarollo, L., et E. F. Toro (1995), Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems, *Journal of hydraulic research*, 33(6), 843–864, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221689509498555>. xiii, xvii, 64, 96, 113, 132, 133, 135
- Frazão, S. S., X. Sillen, et Y. Zech (1998), Dam-break flow through sharp bends physical model and 2d boltzmann model validation, dans *Proceedings of the CADAM meeting*, pp. 151–169, Wallingford, United Kingdom. 138
- Froehlick, D. C. (1985), Discussion of A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow by Nikolaos D. Katapodes (April, 1984), *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(8), 1200–1204, doi :[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1985\)111:8\(1200\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1985)111:8(1200)). 69
- Gabutti, B. (1983), On two upwind finite-difference schemes for hyperbolic equations in non-conservation form, *Computers & Fluids*, 11(3), 207–230, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930\(83\)90031-2](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930(83)90031-2). 7
- Galerkin, B. G. (1915), Rods and plates : series in some questions of elastic equilibrium of rods and plates, *Engineers Bulletin (Vestnik Inzhenerov)*, 19, 897–908. 33
- Gallardo, J. M., C. Parés, et M. Castro (2007), On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas, *Journal of Computational Physics*, 127(1), 574–601, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2007.08.007>. 4, 79, 86
- Gallouet, T., J.-M. Herard, et N. Seguin (2003), Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography, *Computers & Fluids*, 32(4), 479–513, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7930\(02\)00011-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7930(02)00011-7). 79, 86
- Gander, M. J., et G. Wanner (2012), From Euler, Ritz, and Galerkin to modern computing, *Siam Review*, 54(4), 627–666, doi :<https://doi.org/10.1137/100804036>. 33
-

- Garcia-Navarro, P., et M. E. Vazquez-Cendon (2000), On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations, *Computers & Fluids*, 29(8), 951–979, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7930\(99\)00038-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7930(99)00038-9). 5, 19, 96
- Gérald, S. (2013), Méthode de Galerkin Discontinue et intégrations explicites-implicites en temps basées sur un découplage des degrés de liberté. Applications au système des équations de Navier–Stokes, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00943621/document>. 3
- Gharangik, A. M., et M. H. Chaudhry (1991), Numerical simulation of hydraulic jump, *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(9), 1195–1211, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1991\)117:9\(1195\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1991)117:9(1195)). x, 75, 77
- Ghostine, R. (2009), Contribution à la résolution numérique des équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles par une méthode de type éléments finis discontinus : application à la simulation des écoulements au sein des carrefours dans la ville, thèse de doctorat, Université de Strasbourg, France, http://scd-theses.u-strasbg.fr/1726/01/GHOSTINE_Rabih_2009r.pdf. 3, 4, 8, 38
- Ghostine, R., G. Kesserwani, R. Mosé, J. Vasquez, et A. Ghenaim (2009), An improvement of classical slope limiters for high-order discontinuous Galerkin method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 59(4), 423–442, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1823>. 8, 38, 119, 136
- Godunov, S. K. (1959), Finite difference methods for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Mathematicheskii Sbornik*, 47, 271–306. 7, 9
- Gokpi, K. (2013), Modélisation et Simulation des Écoulements Compressibles par la Méthode des Éléments Finis Galerkin Discontinus, thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, url=<http://www.theses.fr/2013PAUU3005/document>. 117
- Gonzalez-Ramirez, N. (2010), Simulating flood propagation in urban areas using a two dimensional numerical model, thèse de doctorat, University of Miami, USA, http://scholarlyrepository.miami.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1652&context=oa_dissertations. 162, 164, 166
- Goodman, J. B., et R. J. LeVeque (1985), On the accuracy of stable schemes for 2D conservation laws, *Mathematics of Computation*, 45(171), 15–21, <http://www.jstor.org/stable/2008046>. 37, 59
- Gottardi, G., et M. Venutelli (2004), Central scheme for two-dimensional dam-break flow simulation, *Advances in Water Resources*, 27(3), 259–268, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2003.12.006>. 124, 126, 138, 140
- Gottlieb, S., et C.-W. Shu (1998), Total variation diminishing Runge–Kutta schemes, *Mathematics of Computation*, 67(221), 73–85, doi :<http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2>. 58

- Goutal, N. (1999), The Malpasset dam failure - An overview and test case definition, dans *Proceeding of the 4th CADAM meeting*, pp. 1–8, Zaragoza, Spain. 153, 158
- Goutal, N., et F. Marel (1997), Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation, *Rapport Technique HE-43/497/016/B*, Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale, Electricité de France, France. 73, 79, 88, 89
- Graf, W. H., et M. S. Altinakar (2009), *Hydraulique fluviale : écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, vol. 16, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne. 7, 70
- Gresho, P. M., et R. L. Lee (1981), Don't suppress the wiggles—They're telling you something!, *Computers & Fluids*, 9(2), 223–253, doi :[https://doi.org/10.1016/0045-7930\(81\)90026-8](https://doi.org/10.1016/0045-7930(81)90026-8). 34
- Guha-Sapir, D., F. Vos, R. Below, et S. Penserre (2012), Annual disaster statistical review 2011 : the numbers and trends, *Rapport technique*, Université catholique de Louvain, http://www.preventionweb.net/files/27782_adsr2011.pdf. 1
- Guinot, V., et S. Soares-Frazão (2006), Flux and source term discretization in two-dimensional shallow water models with porosity on unstructured grids, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50(3), 309–345, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1059>. 6
- Habert, M. J. (2016), Prévisions des crues en temps réel sur le bassin de la Marne : assimilation in situ pour la correction du modèle hydraulique mono-dimensionnel Mascaret, thèse de doctorat, Université de Toulouse. 1
- Hager, W. H., M. Schwalt, O. Jimenez, et M. H. Chaudry (1994), Supercritical flow near an abrupt wall deflection, *Journal of Hydraulic Research*, 32(1), 103–118, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221689409498792>. 119
- Hallouche, B. (2007), Cartographie des zones inondables de la plaine de Sidi Bel Abbes par l'approche hydrogéomorphologique, Mémoire de magister, Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes. 172, 174, 175, 176
- Hallouche, B., M. Benyahia, K. Moueddene, et A. Marok (2010), Apport de l'hydrogéomorphologie dans la cartographie des zones inondables-Exemple de la plaine de Sidi Bel Abbès (Algérie Nord occidentale), *Science et changements planétaires/Sécheresse*, 21(3), 219–224. xiv, 171, 174, 176, 177
- Harten, A. (1983), High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of computational physics*, 49(3), 357–393, doi :[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5). 57
- Harten, A. (1984), On a class of high-resolution total variation stable finite difference schemes, *SIAM Journal Numerical Analysis*, 21, 1–23, doi :<https://doi.org/10.1137/0721001>. 57, 59

- Harten, A., P. D. Lax, et B. van Leer (1983), On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Review*, 25(1), 35–61, doi :http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7_4. xviii, 53
- Hasbaia, M., et L. Benayada (2010), Simulation numérique des crues par un modèle 1D (étude du cas d'un oued algérien et de trois autres rivières), *Science et changements planétaires/Sécheresse*, 21(3), 225–231, doi :<http://dx.doi.org/10.1684/sec.2010.0242>. 3, 4
- Henderson, F. M. (1966), *Open-Channel Flow*, MacMillan Publishing Co., New York, N. Y., 522 pages. 99
- Hervouet, J. M. (2003), *Hydrodynamique des écoulements à surface libre - Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*, 311 pages. xvii, 3, 6, 8, 22, 36, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 161, 163, 164, 166, 169
- Hicks, F. E., et P. M. Steffler (1990), Finite Element Modeling of Open Channel Flow, *Rapport Technique 90-6*, University of Alberta, Alberta, Canada, 356 pages. 34, 35, 68, 69
- Hicks, F. E., et P. M. Steffler (1992), A Characteristic Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(2), 337–352, doi :[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:2\(337\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:2(337)). 35
- Hicks, F. E., et P. M. Steffler (1995), Comparison of finite element methods for the St. Venant equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(2), 99–113, doi :<https://doi.org/10.1002/flid.1650200202>. 35
- Hiver, J. M. (2000), Adverse-slope and slope (bump), dans *Concerted action on dam break modelling : objectives, project report, test cases, meeting proceedings*, édité par S. Soares Frazão, M. Morris, et Y. Zech, Université catholique de Louvain, Civ. Eng. Dept., Hydraulics Division, Louvain-la-Neuve, Belgium, CD-ROM. 144
- Hood, P., et C. Taylor (1974), *Finite Element Methods in Flow Problems*, chap. Navier–Stokes equations using mixed interpolation, pp. 121–132, UAH Press, Huntsville, Alabama. 34
- Huang, J. V., et B. Greimann (2011), SRH-1D 2.8 User's Manual, *Rapport Technique SRH-2012-03*, Environmental Protection Agency (EPA) and Bureau of Reclamation (Reclamation), ftp://aidea.org/AEASuWaEnvironmental/Protocols_&_Models/FluvialGeomorphology/SRH-1D/SRH-1D%20users%20manual%202_8.pdf. 6
- Huang, Y., N. Zhang, et Y. Pei (2013), Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 7(1), 40–54, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/19942060.2013.11015452>. 162, 164, 166
- Iacono, R. (2005), Analytic solutions to the shallow water equations, *Physical Review E*, 72(1), 017,302.1–017,302.4, doi :<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.72.017302>. 4

- Ippen, A. T., et J. H. Dawson (1951), Design of channel contraction, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 326–346. 121
- Jamet, P. (1978), Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(5), 912–928, doi :<https://doi.org/10.1137/0715059>. 36
- Jauregui, R., et F. Silva (2011), Numerical validation methods, dans *Numerical Analysis–Theory and Application*, édité par J. Awrejcewicz, pp. 155–174, In Tech, Croatia, <https://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/19916.pdf>. 72
- Jawahar, P., et H. Kamath (2000), A High-resolution procedure for Euler and Navier–Stokes computations on unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, 164(1), 165–203, doi :<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6596>. 116
- Jha, A. (2006), Object-oriented hyperbolic solver on 2D-unstructured meshes applied to the shallow water equations, thèse de doctorat, Loughborough University, U.K., <https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/bitstream/2134/2709/1/Jha%20PhD%20thesis.pdf>. 73, 138, 140
- Jia, Y., et S. S. Y. Wang (2001), CCHE2D : Two-dimensional hydrodynamic and sediment transport model for unsteady open channel flows over loose bed, *Rapport Technique NCCHE-TR-2001-1*, School of Engineering, Univ. of Mississippi, Oxford, Miss. 6, 36
- Johnson, C., et J. Pitkäranta (1986), An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *Mathematics of computation*, 46(173), 1–26, doi :<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1986-0815828-4>. 36
- Kanschat, G. (2008), *Discontinuous Galerkin methods for viscous incompressible flow*, Teubner. 38
- Katopodes, N. D. (1984), A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(4), 450–466, doi :[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1984\)110:4\(450\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:4(450)). 35, 69
- Katsaounis, T., et C. Makridakis (2003), Relaxation models and finite element schemes for the shallow water equations, dans *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*, vol. I, édité par T. Y. Hou et E. Tadmor, pp. 621–631, Springer, doi :http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55711-8_58. 8
- Kawahara, M., et T. Umetsu (1986), Finite element method for moving boundary problems in river flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6(6), 365–386, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1650060605>. 150
- Kesserwani, G. (2008), Modélisation des équations 1D de Barré de Saint Venant par la méthode des éléments finis de type discontinus de Galerkin à discrétisation temporelle de Runge-Kutta, thèse de doctorat, l'Université Louis Pasteur Strasbourg I, 225 pages. 3, 4, 8, 17, 18, 38

-
- Kesserwani, G., et Q. Liang (2010), Well-balanced RKDG2 solutions to the shallow water equations over irregular domains with wetting and drying, *Computers & Fluids*, 39(10), 2040–2050, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.07.008>. 8, 38, 146
- Kesserwani, G., et Q. Liang (2012), Dynamically adaptive grid based discontinuous Galerkin shallow water model, *Advances in Water Resources*, 37, 23–39, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.11.006>. 8, 38, 150, 151, 154
- Khalifa, A. M. (1980), Theoretical and experimental study of the radial hydraulic jump, thèse de doctorat, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada. 105
- Khan, A. A. (2000), Modeling flow over an initially dry bed, *Journal of Hydraulic Research*, 38(5), 383–388, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221680009498319>. 140
- Khan, A. A., et W. Lai (2014), *Modeling Shallow Water Flows Using the Discontinuous Galerkin Method*, CRC Press. 38, 39
- Khan, F. A. (2010), Two-dimensional shock capturing numerical simulation of shallow water flow applied to dam break analysis, thèse de doctorat, Loughborough University. xvii, 154, 156, 157, 158
- Kinnmark, I. P. E. (1984), The shallow water wave equations : Formulation, analysis and application, dans *Lecture Notes in Engineering*, C. A. Brebbia and S. A. Orszag, Eds., p. 187, Berlin. 34
- Kinnmark, I. P. E., et W. G. Gray (1982), Time-weighting of the momentum equation in explicit wave equation models of surface water flow, dans *Proc. 4th Intl. Conf. on Finite Elements in Water Resources*, K. P. Holz, U. Meissner, W. Zielke, C. A. Brebbia, G. Pinder, and W. Gray, Eds., pp. 5.67–5.77, Berlin. 34
- Korichi, K. (2013), Développement d'un schéma adaptif raffiné appliqué à la méthode des volumes finis pour la simulation numérique des inondations et la propagation des ondes de crues, thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Mohamed BOUDIAF, Oran, Algérie. 136, 138, 176, 179, 182
- Korichi, K., A. Hazzab, et M. Atallah (2016), Flash floods risk analysis in ephemeral streams : a case study on wadi mekerra (northwestern algeria), *Arabian Journal of Geosciences*, 9(11), 589, doi :<https://doi.org/10.1007/s12517-016-2624-2>. 172, 176, 182
- Kovacs, Y. (1988), Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00520785/document>. 7
- Kubatko, E. J., J. J. Westerink, et C. Dawson (2006), An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution, *Ocean modelling*, 15(1), 71–89, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2005.05.005>. 38
-

- Kubatko, E. J., S. Bunya, C. Dawson, et J. J. Westerink (2009), Dynamic p -adaptive Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21), 1766–1774, doi :<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.007>. 38
- Kuiry, S. N., Y. Ding, et S. S. Y. Wang (2010), Modelling coastal barrier breaching flows with well-balanced shock-capturing technique, *Computers & Fluids*, 39(10), 2051–2068, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.07.015>. 127, 146
- Lai, J.-S., G.-F. Lin, et W.-D. Guo (2005), An upstream flux-splitting finite-volume scheme for 2D shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(10), 1149–1174, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.974>. 73, 119, 124, 126
- Lai, W. (2010), Discontinuous Galerkin method for 1D shallow water flow with water surface slope limiter, Mémoire de maîtrise, Clemson University, http://tigerprints.clemson.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2007&context=all_theses. 8, 38, 80, 86
- Lai, W. (2012), modeling one- and two dimensional shallow water flows with discontinuous Galerkin method, thèse de doctorat, Clemson University, http://tigerprints.clemson.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1910&context=all_dissertations. 8, 38, 73, 115, 116, 124, 126, 127, 138, 140, 146, 154
- Lai, W., et A. A. Khan (2012a), Discontinuous Galerkin method for 1D shallow water flows in natural rivers, *Eng. Appl. Comput. Fluid Mech.*, 6(1), 74–86, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/19942060.2012.11015404>. 8, 38, 96
- Lai, W., et A. A. Khan (2012b), Modeling dam–break flood over natural rivers using discontinuous Galerkin method, *Journal of Hydrodynamics*, 24(4), 467–478, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S1001-6058\(11\)60268-0](http://dx.doi.org/10.1016/S1001-6058(11)60268-0). 8, 38, 146, 150, 151, 154
- Lai, W., et A. A. Khan (2012c), A discontinuous Galerkin method for two dimensional shallow water flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(8), 939–960, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.2721>. 8, 38, 115, 116
- Laney, C. B. (1998), *Computational Gasdynamics*, Cambridge University Press, New York. 52
- Larson, L. W. (1996), The Great USA Flood of 1993, dans *Destructive Water : Water-Caused Natural Disasters - Their Abatement and Control*, IAHS, Anaheim, California, http://www.nwrfc.noaa.gov/floods/papers/oh_2/great.htm. 1
- Lax, P., et B. Wendroff (1960), Systems of conservation laws, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, 217–237, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160130205>. 7
- Lee, H. (2014), Application of Runge–Kutta Discontinuous Galerkin finite element method to shallow water flow, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 18(5), 1554–1562, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s12205-014-0068-3>. 8, 38, 116

- Lee, H., et N. Lee (2015), Wet–dry moving boundary treatment for Runge–Kutta discontinuous Galerkin shallow water equation model, *KSCE Journal of Civil Engineering*, pp. 1–12, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s12205-015-0389-x>. 8, 38
- Lee, J. K., et D. C. Froehlich (1986), Review of the literatur on the finite element solution of the equations of two-dimensional surface-water flow in the horizontal plane, *Rapport technique*, U. S. Geological Survey Circular, pp. 359-369. 34
- Leer, B. V. (1979), Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method, *Journal of Computational Physics*, 23, 101–136, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1). 59, 65
- LeSaint, P., et P. A. Raviart (1974), On a finite element method for solving the neutron transport equation, dans *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, vol. II, edité par C. Boor, pp. 89–145, Academic Press, New York. 36
- LeVeque, R. J. (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press. 8
- Li, B. Q. (2006), *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Springer-Verlag, London. 8, 38, 39, 66
- Li, H., et R. Liu (2001), The discontinuous Galerkin finite element method for the 2D shallow water equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 56(3), 223–233, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754\(01\)00277-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754(01)00277-4). 38, 124, 126
- Li, S. (2008), Integrated modeling of multi–scale hydrodynamics, sediment and pollutant transport, thèse de doctorat, The Pennsylvania State University, USA. 117, 162, 164, 166
- Liang, Q., et A. G. L. Borthwick (2009), Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet–dry fronts over complex topography, *Computers & Fluids*, 38(2), 221–234, doi :<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.02.008>. 80, 86
- Liang, Q., A. G. L. Borthwick, et G. Stelling (2004), Simulation of dam- and dyke-break hydrodynamics on dynamically adaptive quadtree grids, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46(2), 127–162, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.748>. 138, 140
- Liao, C. B., M. S. Wu, et S. J. Liang (2007), Numerical simulation of a dam break for an actual river terrain environment, *Hydrological Processes*, 21(4), 447–460, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/hyp.6242>. 140, 146
- Lin, G.-F., J.-S. Lai, et W.-D. Guo (2003), Finite-volume component-wise TVD schemes for 2D shallow water equations, *Advances in Water Resources*, 26(8), 861–873, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0309-1708\(03\)00075-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0309-1708(03)00075-7). 73, 124, 126, 140
- Lin, G. F., J. S. Lai, et W. D. Guo (2005), High-resolution TVD schemes in finite volume method for hydraulic shock wave modeling, *Journal of Hydraulic Research*, 43(4), 376–389, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221680509500133>. 122

- Lin, Q., et A. H. Zhou (1993), Convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *Acta Mathematica Scientia*, 13(2), 207–210. 36
- Loukili, Y., et A. Soulaïmani (2007), Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume WAF approximation, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8, 1–14, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/15502280601149577>. 127, 146
- Lynch, D. A., et W. G. Gray (1979), A wave equation model for finite element tidal computations, *Computers and Fluids*, 7(3), 207–228. 34
- Ma, D.-J., D.-J. Sun, et X.-Y. Yin (2007), Solution of the 2-D shallow water equations with source terms in surface elevation splitting form, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 55, 431–454, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1462>. 88, 127
- MacCormack, R. W. (1969), The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, *Rapport Technique 69-354*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Cincinnati, Ohio. 7
- MacDonald, I. (1996), Analysis and computation of steady open channel flow, thèse de doctorat, University of Reading, http://www.rdg.ac.uk:8081/web/FILES/maths/I_macdonald-thesis.pdf. 4, 77
- MacDonald, I., M. J. Baines, N. K. Nichols, et P. G. Samuels (1995), Steady open channel test problems with analytic solutions, *Numerical Analysis Report 3/95*, University of Reading, <http://www.reading.ac.uk/web/files/maths/03-95.pdf>. 4, 77
- MacDonald, I., M. J. Baines, N. K. Nichols, et P. G. Samuels (1997), Analytic benchmark solutions for open-channel flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11), 1041–1045, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:11\(1041\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:11(1041)). 4, 5, 77
- Marche, C. (2008), *Barrages, crues de rupture et protection civile*, 2nd ed., Presses internationales Polytechnique, Canada. xiv, 154, 155
- Maref, N. (2010), Éstimation du transport solide dans les cours d’eaux à écoulement temporaire- Étude du cas de bassin versant de l’oued mekerra (sidi bel abbes), Mémoire de magister, Université Aboubekr Belkaid, Tlemcen. xvii, 179, 182
- Martinez, M. L. (1997), A priori error estimates of finit element models of systems of shallow water equations, Thèse de doctorat, Rice University, Houston TX, pp. 1-21. 34
- Matthews, W. J. (1988), North American prairie streams as systems for ecological study, *Journal of the North American Benthological Society*, pp. 387–409, doi :<http://dx.doi.org/10.2307/1467298>. 179
- Meddi, M., et A. Sadeuk Ben Abbes (2014), Analyse statistique et prévision des débits de crues dans le bassin versant de l’Oued Mekerra (Ouest de l’Algérie), *Nature & Technologie*, (10), 21–31, http://www.univ-chlef.dz/revueNatec/Issue_10_Art_C_04.pdf. 171

- Meddi, M., et S. Toumi (2015), Spatial variability and cartography of maximum annual daily rainfall under different return periods in Northern Algeria, *J Mt Sci*, 12(6), 1403–1421, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s11629-014-3084-3>. 2
- Meddi, M., A. Khaldi, et H. Meddi (1998), Contribution à l'étude du transport solide en algérie du nord, dans *Modelling Soil Erosion, Sediment Transport and Closely Related Hydrological Processes*, édité par W. Summer, E. Klaghofer, et W. Zhang, 249, pp. 393–397, IAHS Publication, http://hydrologie.org/redbooks/a249/iahs_249_0393.pdf. 179
- Medeiros, S. C., et S. C. Hagen (2013), Review of wetting and drying algorithms for numerical tidal flow models, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(4), 473–487, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.3668>. 97
- Meselhe, E. A., et F. M. Holly Jr. (1997), Invalidity of Preissmann scheme for transcritical flow, *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, 123(7), 652–655, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:7\(652\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:7(652)). 7
- Mitchell, J., et J. Murray (1963), On the world-wide pattern of secular temperature change, dans *Changes of climate*, vol. 20, p. 161, UNESCO, Paris. 179
- Moretti, G. (1979), The λ -scheme, *Computers & Fluids*, 7(3), 191–205, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930\(79\)90036-7](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930(79)90036-7). 7
- Morris, M. W. (2000), Concerted Action on Dambreak Modelling-CADAM, *Rapport Technique SR 571*, HR Wallingford Group Ltd., <http://eprints.hrwallingford.co.uk/577/1/CADAM.pdf>. 138, 144
- Murillo, J., P. García-Navarro, P. Brufau, et J. Burguete (2005), Extension of an explicit finite volume method to large time steps (CFL>1) : application to shallow water flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50(1), 63–102, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.1036>. 136, 137
- New South Wales (NSW) Government (2005), Floodplain development manual : the management of flood liable land, *Sydney, australia*, Department of Infrastructure, Planning and Natural Resources, adresse :<http://www.environment.nsw.gov.au/~media/E85646A053E246B18010C098618746AB.ashx>. xv, 192, 194
- Nikolos, I. K., et A. I. Delis (2009), An unstructured node-centered finite volume scheme for shallow water flows with wet/dry fronts over complex topography, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 3723–3750, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.006>. 150, 151
- Ortiz, P., O. C. Zienkiewicz, et J. Szmelter (2006), Hydrodynamics and transport in estuaries and rivers by the CBS finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(10), 1569–1586, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1695>. 8

-
- Perthame, B., et C. Simeoni (2001), A kinetic scheme for the Saint–Venant system with a source term, *Calcolo*, 38(4), 201–231, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s10092-001-8181-3>. 96
- Peterson, T. E. (1991), A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1), 133–140, doi :<https://doi.org/10.1137/0728006>. 36
- Pilotti, M., M. Tomirotti, G. Valerio, et B. Bacchi (2010), Simplified method for the characterization of the hydrograph following a sudden partial dam break, *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, 136(10), 693–704, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000231](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000231). 124, 126
- Preissmann, A. (1961), Propagation des intumescences dans les canaux et rivières, dans *Ist Congress of the French Association for Computation*, pp. 433–442, Grenoble, France. 7
- Prestininzi, P., M. La Rocca, A. Montessori, et G. Sciortino (2014), A gas-kinetic model for 2D transcritical shallow water flows propagating over dry bed, *Computers & Mathematics with Applications*, 68(4), 439–453, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2014.06.022>. 146
- Rahmani Firoozjaee, A., et M. H. Afshar (2011), Discrete Least Squares Meshless (DLSM) method for simulation of steady state shallow water flows, *Scientia Iranica*, 18(4), 835–845, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.scient.2011.07.016>. 4, 8
- Reddy, J. N. (1993), *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York. xvi, 42, 50, 51
- Reed, W. H., et T. R. Hill (1973), Triangular mesh methods for the neutron transport equation, *Rapport Technique LA-UR-73-479; CONF-730414-2*, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA). 36
- Reid, R. O., et B. R. Bodine (1968), Numerical model for storm surges in galveston bay, *Journal of the Waterways and Harbors Division*, 94(1), 33–58. 97
- Rhebergen, S., O. Bokhove, et J. J. van der Vegt (2008), Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, 227(3), 1887–1922, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.10.007>. 38
- Richter, G. R. (1988), An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method, *Mathematics of Computation*, 50(181), 75–88, doi :<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1988-0917819-3>. 36
- Rider, W. J. (1992), The design of high resolution upwind shock-capturing methods, thèse de doctorat, University of New Mexico, USA. 59

-
- Ritter, A. (1892), Die fortpflanzung der wasserwellen, *Verein Deutscher Ingenieure Zeitschrift*, 36(2), 947–954, el Allemand. 4
- Ritz, W. (1909), Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik*, 333(4), 737–786, doi :<https://doi.org/10.1002/andp.19093330403>. 33
- Roe, P. L. (1981), Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, 43, 357–372, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5). 55
- Roe, P. L. (1986), Characteristic-based schemes for the Euler equations, *Annual review of fluid mechanics*, 18(1), 337–365, doi :<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.18.010186.002005>. 59
- Rogers, B. D., A. G. Borthwick, et P. H. Taylor (2003), Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to using roe’s approximate riemann solver, *Journal of Computational Physics*, 192(2), 422–451, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.020>. 79, 86
- Rosatti, G., L. Bonaventura, A. Deponti, et G. Garegnani (2011), An accurate and efficient semi-implicit method for section-averaged free-surface flow modeling, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(4), 448–473, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/flid.2191>. 80, 86, 106
- Sadeg, M. (2003), Contribution à l’étude des hydrogrammes de crue en zone semi-aride : Application au modèle de l’hydrogramme unitaire, Mémoire de magister, Université de Mascara. 179
- Saint-Venant, A. J. C. (1871), Théorie de mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leurs lits, *Comptes Rendus des séances de l’Académie des Sciences*, 73(4), 237–240. xvi, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 21, 30, 64, 71, 86, 148, 163
- Sampson, J. (2008), Some solutions of the shallow water wave equations, thèse de doctorat, Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia. 103
- Sanders, B. F. (2001), High-resolution and non-oscillatory solution of the St. Venant equations in non-rectangular and non-prismatic channels, *Journal of Hydraulic Research*, 39(3), 321–330, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/00221680109499835>. 98, 99, 101
- Sardou, M., S. Maouche, et H. Missoum (2016), Compilation of historical floods catalog of northwestern Algeria : first step towards an atlas of extreme floods, *Arabian Journal of Geosciences*, 9(6), 1–15, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/s12517-016-2490-y>. 2
- Schubert, J. E., et B. F. Sanders (2012), Building treatments for urban flood inundation models and implications for predictive skill and modeling efficiency, *Advances in Water Resources*, 41, 49–64, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.02.012>. 3
-

- Schwanenberg, D., et M. Harms (2004), Discontinuous Galerkin finite-element method for transcritical two-dimensional shallow water flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(5), 412–421, doi :[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:5\(412\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:5(412)). 38
- Schwanenberg, D., et J. Köngeter (2000), A discontinuous Galerkin method for the shallow water equations with source terms, dans *Discontinuous Galerkin Methods, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 11, édité par B. Cockburn, G. Karniadakis, et W. C. W. Shu, pp. 419–424, Springer, Berlin, Heidelberg, doi :https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_42. 38
- Selmin, V., J. Donea, et L. Quartapelle (1985), Finite element methods for nonlinear advection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1-3), 817–845, doi :[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90016-7). 35
- Shi, Y. (2006), Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré, thèse de doctorat, Université de Caen. xvii, 4, 7, 73, 88, 136, 137, 138, 140, 154, 156, 157, 158
- Shu, C. W. (1987), TVB uniformly high order schemes for conservation laws, *Mathematics of Computation*, 49, 105–121, doi :<http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1987-0890256-5>. 37
- Siegel, P. (1995), Transfert de masse en milieu poreux fortement hétérogène : modélisation et estimation de paramètres par éléments finis mixtes hybrides et discontinus, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France. 36
- Singh, J., M. S. Altinakar, et Y. Ding (2011), Two-dimensional numerical modeling of dam-break flows over natural terrain using a central explicit scheme, *Advances in Water Resources*, 34(10), 1366–1375, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.07.007>. 146, 154
- Singh, V. P. (1996), *Dam Breach Modelling Technology*, vol. 17, Springer Science & Business Media, Dordrecht, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-8747-1>. 153
- SPI Infra (2001), Étude d’avant-projet détaillé de la protection de la ville de Sidi Bel Abbès contre les inondations, Phase II–Schéma directeur des aménagements, Étude de faisabilité du barrage d’écroulement [de Tabia], *Rapport technique*. 171, 174
- Steffler, P., et J. Blackburn (2002), *River2D : Two-dimensional depth averaged model of river hydrodynamics and fish habitat-Introduction to depth averaged modeling and user’s Manual*, University of Alberta, <http://www.river2d.ca/Downloads/documentation/River2D.pdf>. 6, 36
- Stelling, G. S., et A. Verwey (2005), Numerical flood simulation, dans *Encyclopedia of Hydrological Sciences*, vol. 1, édité par M. G. Anderson et J. J. McDonnell, pp. 257–270, John Wiley & Sons Ltd, U.K, doi :<http://dx.doi.org/10.1002/0470848944.hsa025a>. 5

-
- Stoker, J. J. (1957), *Water waves : The mathematical theory with applications, Pure and Applied Mathematics*, vol. IV, Interscience Publishers, Inc, New York, 609 p. 4, 7, 73
- Sweby, P. K. (1984), High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal Numerical Analysis*, 21, 995–1011, doi :<https://doi.org/10.1137/0721062>. ix, 59, 60
- Tardy, Y., et J.-L. Probst (1992), Sécheresses, crises climatiques et oscillations téléconnectées du climat depuis cent ans, *Science et changements planétaires/Sécheresse*, 3(1), 25–36. 179
- Thacker, W. C. (1981), Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 107(1), 499–508, doi :<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112081001882>. 4, 103
- Toro, E., M. Spruce, et W. Speares (1989), Restoration of the contact surface in the HLL–Riemann solver, *Shock Waves*, 4(1), 25–34, doi :<http://dx.doi.org/10.1007/BF01414629>. 54
- Toro, E. F. (1990), The dry-bed problem in shallow-water flows, *Rapport Technique 9007*, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, Cranfield, U.K. 97
- Toro, E. F. (2001), *Shock-capturing methods for free surface flows*, John Wiley & Sons, Chichester, England and New York. 5
- Toro, E. F. (2009), *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 8, 39, 53, 65
- Tu, S., et S. Aliabadi (2005), A slope limiting procedure in discontinuous Galerkin finite element method for gasdynamics applications, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2(2), 163–178, <http://www.math.ualberta.ca/ijnam/Volume-2-2005/No-2-05/2005-02-03.pdf>. 59, 116, 118
- Valiani, A., et L. Begnudelli (2006), Divergence form for bed slope source term in shallow water equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(7), 652–665, doi :[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2006\)132:7\(652\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:7(652)). 79, 86
- Valiani, A., V. Caleffi, et A. Zanni (2002), Case Study : Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method, *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(5), 460–472, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2002\)128:5\(460\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:5(460)). 154, 161, 164, 166, 169, 170
- Van Albada, G., B. Van Leer, et W. Roberts Jr (1982), A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics, *Astronomy and Astrophysics*, 108, 76–84, <http://adsabs.harvard.edu/full/1982A%26A...108...76V>. 59
- Van Leer, B. (1974), Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme, *Journal of Computational Physics*, 14, 361–370, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9). 59
-

- Vasiliev, O. F. (1970), Numerical solution of the non-linear problems of unsteady flows in open channels, dans *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, vol. 8, édité par M. Holt, pp. 410–421, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berkeley, California, doi :http://dx.doi.org/10.1007/3-540-05407-3_58. 7
- Vázquez-Cendón, M. E. (1999), Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry, *Journal of Computational Physics*, 148(2), 497–526, doi :<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1998.6127>. 5, 80
- Vieira, D. A., et W. Wu (2002), One-dimensional channel network model : CCHE1D 3.0, *Rapport Technique CCHE-TR-2002-02*, National Center for Computational, Hydroscience and Engineering, University of Mississippi. 6
- Vila, J.-P. (1986), Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires : applications aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. 5
- Villani, C. (2011), Il faudra toujours de l'intelligence derrière l'ordinateur, *La lettre de BULL : Bull Direct*, 50, 3–4. 3
- Walters, R. A., et G. F. Carey (1983), Analysis of spurious oscillation modes for the shallow water and Navier-Stokes equations, *Computer & Fluids*, 11(1), 51–68, doi :[https://doi.org/10.1016/0045-7930\(83\)90013-0](https://doi.org/10.1016/0045-7930(83)90013-0). 34
- Wang, J.-W., et R.-X. Liu (2000), A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2D shallow water wave problems, *Mathematics and Computers in Simulation*, 53(3), 171–184, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754\(00\)00173-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754(00)00173-7). 114, 119
- Wang, X., T. Liu, S. Shang, D. Yang, et A. M. Melesse (2010), Estimation of design discharge for an ungauged overflow-receiving watershed using one-dimensional hydrodynamic model, *International Journal of River Basin Management*, 8(1), 79–92, doi :<https://doi.org/10.1080/15715121003714886>. 190
- Wang, Y. (2011), Numerical improvements for large-scale flood simulation, thèse de doctorat, Newcastle University, <https://theses.ncl.ac.uk/dspace/bitstream/10443/1247/1/Wang%20Y.%202011.pdf>. 88, 146, 154
- Waterways Experiment Station (WES) (1960), Flood resulting from suddenly breached dams, *Miscellaneous paper 2(374)*, US Army Engineer Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Vicksburg, Mississippi, <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=AD0268411>. 140
- Wellford, L., et J. Oden (1975), Discontinuous finite-element approximations for the analysis of shock waves in nonlinearly elastic materials, *Journal of Computational Physics*, 19(2), 179–210, doi :[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90087-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90087-X). 36

- White, W. R. (2001), Water in rivers : flooding, dans *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water and Maritime Engineering*, vol. 148, pp. 107–118, doi :<http://dx.doi.org/10.1680/wame.2001.148.2.107>. 1
- Wood, A. L. (2010), Two-dimensional dam-break analysis : ADI based curvilinear hydrodynamic model, thèse de doctorat, University of Houston. 127, 146
- Wu, C., G. Huang, et Y. Zheng (1999), Theoretical solution of dam-break shock wave, *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(11), 1210–1215, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1999\)125:11\(1210\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1999)125:11(1210)). 4, 73
- Xing, Y., et C. W. Shu (2006), High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms, *Journal of Computational Physics*, 214(2), 567–598, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.10.005>. 8, 38, 79, 80, 86
- Yahiaoui, A. (2012), Inondations torrentielles : Cartographie des zones vulnérables en Algérie du Nord (Cas de l'oued Mekerra, Wilaya de Sidi Bel Abbès), thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique. xvii, 1, 2, 173, 174, 181
- Yesuf, H. M., A. M. Melesse, G. Zeleke, et T. Alamirew (2016), Streamflow prediction uncertainty analysis and verification of SWAT model in a tropical watershed, *Environmental Earth Sciences*, 75(9), 806, doi :<https://doi.org/10.1007/s12665-016-5636-z>. 190
- Ying, X., J. Jorgeson, et S. S. Y. Wang (2009), Modeling dam-break flows using finite volume method on unstructured grid, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 3(2), 184–194, doi :<http://dx.doi.org/10.1080/19942060.2009.11015264>. 116, 154
- Ying, X. Y., A. A. Khan, et S. S. Y. Wang (2004), Upwind conservative scheme for the Saint Venant equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(10), 977–987, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:10\(977\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:10(977)). 20, 75, 79, 86, 96, 98, 99, 115, 140
- Yoon, T. H., et S.-K. Kang (2004), Finite volume model for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(7), 678–688, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:7\(678\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:7(678)). 116, 154, 162, 163, 164, 166
- You, L., C. Li, X. Min, et T. Xiaolei (2012), Review of dam-break research of earth-rock dam combining with dam safety management, *Procedia Engineering*, 28, 382–388, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2012.01.737>. 153
- Zarmehi, F., A. Tavakoli, et M. Rahimpour (2011), On numerical stabilization in the solution of Saint–Venant equations using the finite element method, *Computers & Mathematics with Applications*, 62(4), 1957–1968, doi :<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.06.039>. 34

- Zhang, M., et W. M. Wu (2011), A two dimensional hydrodynamic and sediment transport model for dam break based on finite volume method with quadtree grid, *Applied Ocean Research*, 33(4), 297–308, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.004>. 127, 154
- Zhang, Y. X. X., et C.-W. Shu (2010), Positivity-preserving high order well-balanced discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations, *Advances in Water Resources*, 33(12), 1476–1493, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2010.08.005>. 8, 38
- Zhou, J., et P. Stansby (1999), 2D shallow water flow model for the hydraulic jump, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(4), 375–387, doi :[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990228\)29:4<375::AID-FLD790>3.0.CO;2-3](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990228)29:4<375::AID-FLD790>3.0.CO;2-3). 77
- Zhou, J. G., D. M. Causon, C. G. Mingham, et D. M. Ingram (2001), The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations, *Journal of Computational physics*, 168(1), 1–25, doi :<https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6670>. 79, 86, 88
- Zhou, J. G., D. M. Causon, C. G. Mingham, et D. M. Ingram (2004), Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(4), 332–340, doi :[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:4\(332\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:4(332)). 9, 138, 140, 146
- Zienkiewicz, O., et P. Ortiz (1995), A split-characteristic based finite element model for the shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(8-9), 1061–1080, doi :<https://doi.org/10.1002/flid.1650200823>. 35
- Zokagoa, J. M. (2011), Modélisation numérique des écoulements à surface libre avec bancs couvrants-découvrants par les volumes finis et la décomposition orthogonale aux valeurs propres, Thèse de doctorat, École de technologie supérieure, université du Québec, Canada, http://espace.etsmtl.ca/947/1/ZOKAGOA_Jean-Marie.pdf. 3, 5
- Zoppou, C., et S. Roberts (2000), Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break, *Applied Mathematical Modelling*, 24, 457–475, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(99\)00056-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00056-6). 73, 153

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est de proposer un modèle numérique de simulation des écoulements à surface libre en général (des inondations en particulier). Le modèle résout les équations de *Saint-Venant* en utilisant la formulation de *Galerkin* discontinue. Différents schémas d'approximation des flux numériques ont été étudiés. Différents limiteurs de pente ont été testés et leurs effets étaient comparés. Un banc d'essai numérique des différents problèmes hydrauliques stationnaires, transitoires, uni et bidimensionnels, est effectué. La comparaison du schéma numérique avec les mesures expérimentales ou les solutions analytiques montre une très bonne corrélation. On a, aussi, étudié une section de l'oued Mekerra à travers la ville de Sidi Bel Abbes en exploitant des levés bathymétriques et les données de mesure des écoulements. Les valeurs de paramètres hydrodynamiques calculées (profondeurs et vitesses d'eau maximales) sont utilisées pour dessiner des cartes des risques d'inondation. Les résultats obtenus confirment la capacité du schéma numérique à simuler les événements réels. Ils permettent non seulement de fournir des informations sur la prévision de la crue et le suivi de l'évolution de l'ampleur de l'écoulement dans l'Oued mais aussi la délimitation des zones à risques et la quantification des pertes.

Mots clés : Équation de *Saint-Venant*, Méthode des éléments finis, Méthode de *Galerkin* discontinue de type *Runge–Kutta*, Inondation, Oued Mekerra.

Abstract

The main objective of this thesis is to propose a numerical simulation model of free-surface flows in general (floods in particular). The model solves the *Saint-Venant* equations using the discontinuous *Galerkin* formulation. Different numerical flow approximation schemes have been studied. Different slope limiters were tested and their effects were compared. A variety of tests for shallow water flows in different flow regimes including steady and transient of one and two-dimensional hydraulic problems is carried out. The comparison of the numerical scheme with the experimental measurements or the analytical solutions shows a very good agreement. A section of wadi Mekerra was also studied through Sidi Bel Abbes city using bathymetric surveys and flow measurement data. Calculated hydrodynamic parameter values (maximum depths and water velocities) are used to draw flood hazard maps. The results obtained confirm the ability of the numerical scheme to simulate real events. They allow not only provide information on flood forecasting and monitoring the evolution of the extent of flow in the Wadi but also the delimitation of risk areas and the quantification of losses.

Keywords: *Saint-Venant* equations, Finite element method, *Runge–Kutta* discontinuous *Galerkin* method, flood, inundation, Wadi Mekerra.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو اقتراح نموذج محاكاة عددية للسريان الحر للمياه السطحية بشكل عام (الفيضانات على وجه الخصوص). هذا النموذج يحل معادلات *سان فونان* باستخدام طريقة *غاليركين* المتقطعة. في هذا الصدد قمنا بدراسة مختلف طرق الحساب التقريبي للتدفق العددي و اختبار محددات الميلان المختلفة ومقارنة آثارها. و قد أجرينا مجموعة من الاختبارات العددية لدراسة الجريان الدائم و المتغير للمياه أحادية و ثنائية البعد. المقارنة بين النتائج الرقمية و القياسات التجريبية أو الحلول التحليلية أظهرت التقارب الشديد بين النتائج. كما تمت دراسة جزء من وادي المكرا المار بمدينة سيدي بلعباس باستخدام معطيات مسح الأراضي وبيانات قياس التدفق. يتم استخدام القيم المحسوبة للعوامل الهيدروديناميكية (أعماق و سرعات المياه القصوى) لرسم خرائط مخاطر الفيضانات. النتائج التي تم الحصول عليها تؤكد قدرة المخطط العددي على محاكاة الأحداث الحقيقية. وهي لا تسمح فقط بالتنبؤ بالفيضانات ورصد تطور مدى التدفق في الوادي، بل تسمح أيضا بتعيين مناطق الخطر وتحديد حجم الخسائر.

الكلمات المفتاحية: معادلات *سان فونان*، طريقة العناصر المنتهية، طريقة *غاليركين* المتقطعة من نوع *رانج-كوتا*، الفيضانات، وادي المكرا.