

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie



جامعة أبي بكر بلقايد

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER
EN MATHÉMATIQUES

Option : PROBABILITÉS APPROFONDIES ET STATISTIQUES

Thème :

Normalité asymptotique locale pour
des variables aléatoires indépendantes

Soutenu publiquement le 18/Juillet/2019 par

HENNANE SALAH eddine

Devant le Jury composé de :

Président : M. F. Boukhari, université de Tlemcen .

Examineur :M. A.Allam, Université de Tlemcen.

Encadreur : M. N.Kara Terki , Centre Universitaire Ain Timouchent.

Année universitaire : 2018 – 2019

Remerciements

"Certains auteurs parlent de leurs ouvrages disent : « Mon livre, mon commentaire, mon histoire, etc. » Ils feraient mieux de dire : « Notre livre, notre commentaire, notre histoire, etc. », vu que d'ordinaire il y a plus en cela du bien d'autrui que du leur.

Blaise Pascal Pensée 64

Louanges à Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur de mémoire Mme.N. Merzagui, Professeur au département de mathématiques de l'Université de Tlemcen, elle m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ce mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme .

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Mme.Hadj Slimane Djamila Professeur à l'université de Tlemcen, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées, aussi je le remercie vivement pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier Monsieur M. Derhab Professeur à université de Tlemcen, pour avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse à Monsieur Benmiloud Mebkhout, enseignant au département de mathématiques à de l'université de Tlemcen, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, merci à tous ceux et celles qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail de mémoire .

Dédicace

A mes parents

A mes frères

A ma famille et mes amis

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.0.1	Dérivation au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet	4
1.1	Espace de Sobolev et la formulation variationnelle des problèmes aux limites	5
1.1.1	Espaces de Sobolev	5
1.1.2	Formulation variationnelle pour BVP	7
1.1.3	Le théorème du Col de la montagne	10
1.2	Quelques notions sur le calcul fractionnaire [13]	11
1.2.1	Fonction Gamma	11
1.2.2	Fonction Bêta	12
1.2.3	Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	12
1.2.4	Propriétés des opérateurs fractionnaires	12
1.3	Structure variationnelle pour FBVP	13
1.3.1	Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $s \in \mathbb{R}$	14
1.3.2	Formulation variationnelle de problème fractionnaire	16
2	Recherche de solutions pour un BVP par approche variationnelle	18
2.1	Exemple	24
3	Recherche de solutions pour un FBVP par approche variationnelle	28
3.1	Exemple explicatif	35
	Bibliographie	38

Absract

Résume

Notations

Introduction

Chapitre 1

Préliminaires

Théorème 1. (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*).

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

b) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

1.0.1 Dérivation au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_E$. $A \subset \mathbb{E}$, une partie de \mathbb{E} .

Définition 1. Soit f une fonction définie sur A à valeurs réelles. Si $u \in A$ et $v \in \mathbb{E}$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on ait, $u + tv \in A$, on dit que f admet (au point u) une dérivée dans la direction v si la limite suivante existe

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t}$$

On notera cette limite $f'(u)$.

Remarque 1. On notera qu'une fonction f peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $v \in \mathbb{E}$, sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directionnelle de f existe pour certains $v \in \mathbb{E}$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

Définition 2. On dit que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au sens de Gâteaux en $u_0 \in \mathbb{E}$ si elle admet au point u_0 une dérivée directionnelle dans la direction de tout vecteur v de \mathbb{E} c.à.d

$$f'(u_0)(v) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t}.$$

Définition 3. f est dite différentiable (ou dérivable) au point $u_0 \in A$ (au sens de Fréchet) s'il existe $df(u_0) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + h) - f(u_0) - df(u_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

On notera que si f est différentiable au sens de Fréchet, alors f est continu.

Pour la définition de la topologie faible sur un espace vectoriel normé, nous renvoyons à [2]. Nous nous limiterons ici à la seule notion de convergence faible.

Définition 4. Soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite de l'espace $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$. On dit que $\{x_n\}$ converge faiblement dans \mathbb{E} s'il existe un élément $x \in \mathbb{E}$ tel que

$$\forall f \in \mathbb{E}' \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x). \quad (1.1)$$

Notation. On notera $x_n \rightharpoonup x$, la convergence faible dans \mathbb{E} .

On notera de même $x_n \rightarrow x$, ou $x_n \xrightarrow{\mathbb{E}} x$, la convergence forte dans \mathbb{E} (c'est à dire la convergence en norme).

Définition 5. Soient $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$: deux espaces de Banach. On dit que \mathbb{F} injecte continûment dans \mathbb{E} si $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ et l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ x &\longrightarrow g(x) = x \end{aligned}$$

est continue, c'est-à-dire sil existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{F}$

$$\|x\|_{\mathbb{E}} \leq C \|x\|_{\mathbb{F}}.$$

On note $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{E}$.

1.1 Espace de Sobolev et la formulation variationnelle des problèmes aux limites

1.1.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations différentielles. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [14] et de Brezis [2], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [2].

Définition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1 \dots N \right\}.$$

où les dérivées sont au sens des distributions.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ dénote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour $1 \leq p < \infty$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées, elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

Définition 6. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que les dérivées $\partial^\alpha u$ au sens des distributions (avec α un multi-indice vérifiant $|\alpha| \leq k$) soient des fonctions de L^p . On muni $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty \\ \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{\infty} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Théorème 2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in [1, \infty[$. on a

1. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$
2. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.
3. $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, \infty[$

Remarque 2. Pour $N = 1$ et $p=2$, $\Omega =$ intervalle I borné, on a le résultat suivant
Il existe une constante C dépendant de $|I| < \infty$ telle que

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}; \forall u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p < \infty \tag{1.2}$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue $\forall 1 \leq p < \infty$. De plus, si I est borné, on a l'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $1 \leq p < \infty$.

L'inégalité de Poincaré

L'inégalité de Poincaré (du nom du mathématicien français Henri Poincaré) est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. Ces estimations sont d'une grande importance pour la méthode du calcul des variations.

Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p , telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

L' inégalité de Poincaré dans le cas où $\Omega = I$ est un intervalle de \mathbb{R} inclus dans $]-T, T[$ s'écrit pour tout $u \in H_0^1(I)$,

$$\|u\|_{L^2} \leq 2T \|\nabla u\|_{L^2} . \tag{1.3}$$

Grace à l'inégalité de Poincaré, on peut considérer une norme équivalente à $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ sur $H_0^1(I)$ définie par

$$\|u\| = \|u'\|_{L^2}$$

1.1.2 Formulation variationnelle pour BVP

La théorie du point critique et les méthodes variationnelles se sont révélées être des outils très efficaces pour déterminer l'existence de solutions pour les équations différentielles d'ordre entier. L'idée est de trouver des solutions d'un problème aux limites donné en recherchant des points critiques d'une fonctionnelle (fonction d'énergie) appropriée définie sur un espace de Banach. Au cours des 30 dernières années, la théorie des points critiques est devenue un outil de taille pour étudier l'existence de différents types de solutions pour des équations différentielles présentant une structure variationnelle, nous référons le lecteur aux livres [24], [16].

Posons $I = [0, T]$, considérons le problème de Dirichlet (BVP) associé à une équation différentielle du second ordre suivant :

$$\begin{cases} u'' + f(t, u) = 0 & t \in I \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Solution classique

Définition 7. Une solution classique (solution forte) du problème (1.4) est une fonction de classe C^2 sur I vérifiant (1.4).

Selon les données de problème (ordre de régularité de f), la formulation classique peut poser malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence de solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (1.4) par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse.

La formulation variationnelle d'un problème aux limites (elliptique) prend toujours une forme du type : $u \in \mathbb{E}$ $a(u, v) = L(v)$ où \mathbb{E} est un espace vectoriel, $a(u, v)$ est une forme bilinéaire et $L(v)$ une forme linéaire.

Écrire un problème aux limites sous forme variationnelle c'est déterminer l'espace \mathbb{E} où l'on cherche la solution, Trouver une forme bilinéaire $a(u, v)$ et la forme linéaire $L(v)$.

Considérons le problème aux limites (1.4). Soit u , une solution du problème (1.4) ayant la régularité : $u \in W^{2,2}(I)$. Soit $v \in H_0^1(I)$ quelconque. On multiplie l'équation par v et on intègre. On vérifie, compte tenu de nos hypothèses, que cette intégration est possible. On a alors

$$\int_0^T u''(t) v(t) dt + \int_0^T f(t, u(t)) v(t) dt = 0 \quad (1.5)$$

par intégration par parties et utilisant $v(0) = v(T) = 0$, on obtient :

$$\int_0^T u'(t) v'(t) dt = \int_0^T f(t, u(t)) v(t) dt \quad (1.6)$$

Déterminer une fonction $u \in H_0^1(I)$ qui vérifie (1.6) est la formulation variationnelle du problème (1.4).

La formulation variationnelle du problème (1.4) a été donc donnée par $\mathbb{E} = H_0^1(I)$ et $a(u, v) = Lv$ avec

$$a(u, v) = \int_0^T u' v' dt,$$

et

$$Lv = \int_0^T f v dt.$$

Supposons que l'on ait résolu ce problème. A-t-on résolu le problème de départ ?

Interprétation de la formulation variationnelle.

On a le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $u \in W^{2,2}(I)$. u est solution du problème aux limites (1.4) si et seulement si elle est solution du problème variationnel (1.6).*

Démonstration. . Nous avons déjà montré que u est solution de (1.4) implique u solution de (1.6). Montrons la réciproque. Soit $u \in H_0^1(I)$ solution de (1.6). Comme l'équation (1.6) est vérifiée pour toute fonction $v \in H_0^1(I)$, elle est en particulier vraie pour toute fonction $v \in D(I)$ (espace des fonctions C^∞ à support compact). Ce qui permet d'interpréter (1.6) au sens des distributions. Ainsi pour toute fonction v de $D(I)$, on a :

$$\int_0^T u'' v dt + \int_0^T f v dt = 0.$$

Chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc

$$\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a :

$$\langle u'', v \rangle + \langle f, v \rangle = \langle u'' + f, v \rangle = 0$$

On a donc, au sens des distributions :

$$u'' + f = 0$$

On retrouve donc l'équation (1.4) mais en un sens faible. Mais de l'égalité précédente, on déduit que $u'' \in L^2(I)$ et que l'égalité a donc lieu dans $L^2(I)$ et donc presque partout. Quand à la condition aux limites, elle est naturellement satisfaite, puisque $u \in H_0^1$. \square

Au lieu d'adopter une écriture variationnelle, on peut aussi chercher $u \in E$ comme fonction minimisant une énergie ou du moins comme point critique de fonctionnelle dite équation d'énergie. Pour le problème (1.4), on pose

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'(t)|^2 dt - \int_0^T F(t, u(t)) dt,$$

où $F(t, u) = \int_0^u f(t, s) ds$.

Définition 8. Soient \mathbb{E} un espace de Banach, soit $A \subset \mathbb{E}$ un ouvert et $f \in C^1(A, \mathbb{R})$. On dit que $u \in A$ est **point critique** de f si $f'(u) = 0$.

Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de f .

Pour $c \in \mathbb{R}$ on dit que c est une valeur critique de f s'il existe $u \in A$ tel que $f(u) = c$, et $f'(u) = 0$.

Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière.

Proposition 2. Tout point critique de \mathcal{J} est une solution du problème (1.4) et réciproquement.

Démonstration. Pour tout $u, v \in H_0^1$ et $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u + hv) - \mathcal{J}(u) &= \int_0^T \frac{1}{2} [(u(t) + hv(t))']^2 dt - \int_0^T F(t, u + hv) dt - \int_0^T \left[\frac{1}{2} u'(t) + F(t, u(t)) \right] dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{1}{2} u'^2 + \frac{h^2}{2} v'^2 + hu'v' \right] dt - \int_0^T \left[\frac{1}{2} u'^2 + F(t, u(t)) - F(t, u + hv) \right] dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{h^2}{2} v'^2 + hu'v' \right] dt - \int_0^T [F(t, u(t) + hv(t)) - F(t, u(t))] dt \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t, u(t) + hv(t)) - F(t, u(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{u+hv} f(t, s) ds - \int_0^u f(t, s) ds}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t, s) ds}{h}$$

Par un résultat basique d'analyse on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t, s) ds}{h} = f(t, u)v$$

De la pour tout $v \in H_0^1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u + hv) - \mathcal{J}(u)}{h} = \int_0^T [u'(t)v'(t) - f(t, u(t))v(t)] dt$$

D'où

$$\mathcal{J}'(u).v = \int_0^T [u'(t)v'(t) - f(t, u(t))v(t)] dt.$$

Soit \bar{u} est un point critique de \mathcal{J} pour tout $v \in H_0^1$

$$\langle \mathcal{J}'(\bar{u}), v \rangle = 0$$

ce qui implique

$$\int_0^T \bar{u}'(t)v'(t) = \int_0^T f(t, \bar{u}(t))v(t) dt$$

Nous retrouvons (1.5), et le résultat en découle. □

Un outil essentiel dans le calcul variationnels, une condition de compacité est la condition de Palais-Smale, c'est une condition à priori, à vérifier pour la fonctionnelle . Elle est utilisé pour montrer l'existence des valeurs critiques dans plusieurs cas.

Définition 9. On appelle suite minimisante de \mathcal{J} dans A une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim \mathcal{J}(u_n) = \inf \mathcal{J}(x)$.

Définition 10. Soit \mathbb{E} un espace de Banach et $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que \mathcal{J} vérifie la condition de

Palais-Smale (au niveau c) et on le note $(PS)_c$, si de toute suite $(u_n)_n$ de A telle que

$$\mathcal{J}(u_n) \longrightarrow c \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{E},$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 3. La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite (u_n) , celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X \mathcal{J}$, on peut parfaitement avoir une suite minimisante (u_n) , telle que $\mathcal{J}'(u_n) \not\rightarrow 0$. Il suffit de prendre :

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}, \mathcal{J}(u) = \sin(u^2),$$

$$c = -1 \quad \text{et} \quad u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \right) \frac{1}{2},$$

on a

$$\mathcal{J}(u_n) \longrightarrow -1 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'(u_n) \longrightarrow 2.$$

Théorème 3. Soit $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inférieurement et $c = \inf J$. Supposons que \mathcal{J} satisfait la condition $(PS)_c$. Alors c est atteint en un point $x_0 \in X$ telle que $J'(x_0) = 0$.

Remarque 4. Ce dernier théorème a une généralisation basée sur une autre condition (PS) introduite par G. Cerami [5].

Un outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existences de solutions pour des problèmes admettant une formulation variationnelle est le théorème du col utilisé dans ce mémoire comme moyen pour établir la solvabilité des BVP considérés.

1.1.3 Le théorème du Col de la montagne

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de minmax est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration : si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0 , entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B . Pour le trouver il suffit de prendre parmi tous les chemins allant de A à B , celui qui monte le moins haut.

Théorème 4. (Ambrosetti & Rabinowitz, 1973)

Soit X un espace de Banach réel et $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$ Supposons que \mathcal{J} satisfait la condition (PS) , et

(i) $\mathcal{J}(0) = 0$

(ii) il existe des constantes $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $\mathcal{J}(u) > \alpha$ si $\|u\| = \rho$,

(iii) il existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$, tel que $\mathcal{J}(e) < 0$. Alors \mathcal{J} a une valeur critique $c > \alpha$ qui peut être caractérisée comme suit

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{J}(\gamma(t))$$

où,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Remarque 5. a) On comprend mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col, quand on interprète géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions (i) à (iii) dans le cas où $X = \mathbb{R}^2$ et $J(u)$ représente l'altitude dans \mathbb{R}^3 d'un point u . Les conditions (i) et (ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins α . La condition (iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point e situé moins haut que les dites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment 0 à e en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.

b) Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand $X = \mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand $X = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. Ainsi, par exemple, la fonction

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur \mathbb{R}^2 , à savoir l'origine où $J = 0$. Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car $\inf_{\mathbb{R}^2} J = -\infty$. C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global. Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.

Le situation du théorème est expliqué dans la figure ci-dessous.

FIGURE 1.1 : Graphe de \mathcal{J} dans $X \times \mathbb{R}$

1.2 Quelques notions sur le calcul fractionnaire [13]

1.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonction de base dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeur non entières.

Définition 11. La fonction Gamma d'Euler est définie sur \mathbb{C} par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad \text{ou} \quad (\Re(z) > 0),$$

Propriétés

1 Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

2 La fonction Gamma généralise le factoriel i.e :

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

1.2.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$$

La relation entre la fonction Gamma d'Euler et Bêta d'Euler est donnée par

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)}$$

1.2.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 12. Soit $u \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ On définit l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Riemann-Liouville (à gauche) notée ${}_a I_t^\alpha u(t)$ par

$${}_a I_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Définition 13. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha \geq 0$ est définie par

$${}_t I_b^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Théorème 5. [13] Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [a, b]$, et de plus $I_a^\alpha \in L^1([a, b])$.

Définition 14. Soit u une fonction définie sur $[a, b]$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche notée ${}_a D_t^\alpha$ est définie par

$${}_a D_t^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_a I_t^{n-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s) ds$$

Définition 15. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre est définie par

$${}_t D_b^\alpha u(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} {}_t I_b^{n-\alpha} u(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} u(s) ds$$

1.2.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre redonne l'identité, la

dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable

Dans la suite, nous donnons quelques résultats utilisés dans ce mémoire pour les démonstrations et pour plus de détails nous référons le lecteurs à [13].

Proposition 3. Soit $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in L^1[a, b]$ alors

$${}_a I_t^\alpha ({}_a I_t^\beta u(t)) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} u(t) \quad t \in [a, b]$$

et

$${}_t I_b^\alpha ({}_t I_b^\beta u(t)) = {}_t I_b^{\alpha+\beta} u(t) \quad t \in [a, b]$$

Proposition 4. Soit $\alpha \geq 0$ et $u \in L^1[a, b]$ alors

$${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha u(t)) = u(t) \quad t \in [a, b]$$

et

$${}_t D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha u(t)) = u(t) \quad t \in [a, b]$$

Proposition 5. Soit $n - 1 \leq \alpha < n$

$${}_a I_t^\alpha ({}_a D_t^\alpha u(t)) = u(t) - \sum_{k=1}^n [{}_a I_t^{k-\alpha} u(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

$${}_t I_b^\alpha ({}_t D_b^\alpha u(t)) = u(t) - \sum_{k=1}^n [{}_t I_b^{k-\alpha} u(t)]_{t=b} \frac{(-1)^{n-k} (b-t)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

1.3 Structure variationnelle pour FBVP

Récemment, on discute des équations comprenant des dérivées fractionnaires à gauche et à droite. Outre leurs applications possibles, les équations avec dérivées gauche et droite sont un champ intéressant et nouveau dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Dans ce sujet, de nombreux résultats sont obtenus dans le cadre de l'existence et de la multiplicité des solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires en utilisant des techniques d'analyse non linéaire, telles que la théorie du point fixe [4] (y compris l'alternative non linéaire Leray-Schauder), la théorie du degré topologique [11] et la méthode de comparaison [29] (y compris les solutions supérieures et inférieures et la méthode itérative monotone) et ainsi de suite. Motivé par les travaux classiques, la théorie du point critique a été une approche efficace pour aborder l'existence de solutions pour des problèmes aux limites fractionnaires faisant intervenir les dérivées fractionnaires à gauche et à droite voir [12] et [7].

Pourquoi des équations avec dérivées fractionnaire à gauche et à droite ?

Vincent J. Ervin et John Paul Roop ont étudié l'approximation de Galerkin pour l'étude de l'équation de dispersion d'advection fractionnaire à l'état stationnaire (FADE) suivante

$$Da(p_a D_x^{-\beta} + q_x D_1^{-\beta})Du + b(x)Du + c(x)u = f; \quad (1.7)$$

D représente la dérivation classique, ${}_a D_x^{-\beta}, {}_x D_1^{-\beta}$, opérateurs intégrales fractionnaire, avec $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq p, q \leq 1$ telle que $p + q = 1$.

L'intérêt pour (1.7) découle de son application comme modèle pour des phénomènes physiques pré-

sentant une diffusion anormale, c'est-à-dire une diffusion non modélisée avec précision par l'équation de dispersion d'advection habituelle. La diffusion "anormale" a été utilisée dans la modélisation de la dynamique turbulente et chaotique des systèmes conservateurs classiques. En viscoelasticité, les opérateurs différentiels fractionnaires ont été utilisés pour décrire les équations constitutives des matériaux [15]. Récemment, les articles impliquant des opérateurs différentiels fractionnaires sont apparus dans Physics Today [25]. L'application importante est celle du transport de contaminants dans l'écoulement des eaux souterraines. À ce jour, la plupart des techniques de solution pour les équations impliquant des opérateurs différentiels fractionnaires ont exploité les propriétés des transformées de Fourier et de Laplace des opérateurs.

La méthode des différences finies a également été appliquée pour construire l'approximation numérique [28]. D'autres documents dans la littérature étudient l'approximation de Galerkin et l'analyse d'erreur associée pour le FADE.

Il ya deux propriétés qui rendent difficile l'application du calcul de variation aux équations différentielles fractionnaires. Ces propriétés sont

- (i) les opérateurs différentiels fractionnaires ne sont pas des opérateurs locaux,
- (ii) l'adjoint d'un opérateur différentiel fractionnaire n'est pas le négatif de lui-même.

En raison de (i) et (ii), la détermination d'espace de fonctions correct pour la solution variationnelle n'est pas évident.

Dans [7] les auteurs introduisent, en relation avec la dérivée fractionnaire gauche, l'espace J_L^α et l'espace J_R^α correspondant à la dérivée fractionnaire à droite et relie ces espaces à l'espace de Sobolev fractionnaire H^α à travers un espace intermédiaire J_S^α de mouvement brownien. Cela donne lieu à un mouvement superdiffusant.

En imposant des conditions sur l'ordre de dérivation ils montrent une équivalence entre la structure d'espace de Sobolev fractionnaire et les espaces J_L^α , J_S^α , J_R^α . (voir théorème 2.1, théorème 2.3, théorème 2.13) dans [7].

Dans ce mémoire nous étudions, le problème fractionnaire non linéaire de Dirichlet donné par :

$$\begin{cases} {}_i D_T^\alpha ({}_0 D_t^\alpha u(t)) = f(t, u(t)), t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie des hypothèses qui sont spécifiées dans la suite.

1.3.1 Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $s \in \mathbb{R}$

Considérons l'opérateur

$$(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} f(\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $\hat{f}(\xi)$ = transformée de Fourier de f .

Définition 16. Soient $1 < p < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ est l'image par $(I - \Delta)^{(s/2)}$ de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérées. C'est un espace de Banach pour la norme héritée de $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| (I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f \right\|_{L^p}.$$

Il est à remarquer que

$$\begin{cases} H_p^s(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) & \text{si } s = 0, \\ H_p^s(\mathbb{R}^n) = W^{N,p}(\mathbb{R}^n) & \text{si } s = N \end{cases}$$

Grâce au travail V. Ervin et J. Roop [7], en particulier le théorème (2.13) dans [7] où il montre l'égalité entre l'espace de Sobolev $H_0^\alpha([0, T])$ et l'espace $J_{s,0}^\alpha$ qui est noté $E_0^{\alpha,p}$ dans les travaux de [12] et [27] est établie. Cet espace $E_0^{\alpha,p}$ est défini comme suit,

Espace $E_0^{\alpha,p}$

Afin d'établir une structure variationnelle pour FBVP (1.8), il est nécessaire de construire des espaces fonctionnels appropriés. Désignons par $C^\infty([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions $u \in C^\infty([0, T], \mathbb{R})$ avec $u(0) = u(T) = 0$. Le résultat suivant exprime le fait que l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann - Liouville de l'espace $L^p([0, T], \mathbb{R})$ à l'espace $L^p([0, T], \mathbb{R})$, est borné, où $1 \leq p < \infty$. Il convient de mentionner ici que les résultats similaires ont été présentés dans [13]. Pour la preuve de la proposition suivante voir [13]

Proposition 6. *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p < \infty$. pour tout $u \in L^p([0, T], \mathbb{R})$, on a*

$$\|D_0^{-\alpha}u\|_{L^p} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{L^p}. \quad (1.9)$$

Suite à (1.9), pour tout $u \in C_0^\infty([0, T], \mathbb{R})$ et $1 < p < \infty$, on a $u \in L^p([0, T], \mathbb{R})$ et $D_0^\alpha u \in L^p([0, T], \mathbb{R})$. Par conséquent, l'espace $E_0^{\alpha,p}$ peut être construit en utilisant la L^p -intégrabilité de la dérivée fractionnaire.

Définition 17. ([10]) *Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p < \infty$. L'espace fractionnaire $E_0^{\alpha,p}$ est défini par la fermeture de $C_0^\infty([0, T], \mathbb{R})$, par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ i.e :*

$$E_0^{\alpha,p} = \overline{C_0^\infty([0, T])}^{\|\cdot\|_{\alpha,p}},$$

où $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ est définie par :

$$\|u\|_{\alpha,p} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{ pour } u \in E_0^{\alpha,p}. \quad (1.10)$$

Il est clair que l'espace $E_0^{\alpha,p}$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p([0, T], \mathbb{R})$ possédant une dérivée fractionnaire d'ordre α , ${}_0D_t^\alpha u \in L^p([0, T], \mathbb{R})$ et $u(0) = u(T) = 0$.

Proposition 7. [10] *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p \leq \infty$. L'espace $E_0^{\alpha,p}$ est réflexif et séparable.*

On note $E^\alpha = E_0^{\alpha,2}$.

Proposition 8. [10] *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p < \infty$. pour tout $u \in E_0^{\alpha,p}$, si $\alpha > \frac{1}{p}$ alors*

$${}_0I_t^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t)) = u(t).$$

Proposition 9. [10] *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p < \infty$. pour tout $u \in E_0^{\alpha,p}$, si $\alpha > \frac{1}{p}$ alors*

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p} \quad (1.11)$$

si $\alpha > \frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha - 1)q + 1)^{\frac{1}{q}}} \|{}_0D_t^\alpha\|_{L^p} \quad (1.12)$$

D'après (1.11), on peut considérer une norme équivalente à (1.10) sur $E_0^{\alpha,p}$ définie par

$$\|u\|_{\alpha,p} = \|{}_0D_t^\alpha\|_{L^p}.$$

Proposition 10. [10] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < p < \infty$. si $\alpha > \frac{1}{p}$ et $\{u_k\} \rightarrow u$ dans $u \in E_0^{\alpha,p}$. Alors $u_k \rightarrow u$ dans $C[0, T]$, i.e

$$\|u_k - u\|_\infty \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

1.3.2 Formulation variationnelle de problème fractionnaire

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [13] apparaît une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvés dans [27].

Théorème 6 (intégration par parties). Si $u \in L^p[0, T]$, $v \in L^q[0, T]$ avec

$$p \geq 1, q \geq 1 \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \alpha$$

ou

$$p \neq 1, q \neq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$$

Alors

$$\langle {}_0D_t^{-\alpha} u, v \rangle = \langle u, {}_tD_T^{-\alpha} v \rangle \quad (1.13)$$

Et

$$\langle {}_0D_t^\alpha u, v \rangle = \langle u, {}_tD_T^\alpha v \rangle \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.14)$$

avec

$$u(0) = u(T) = 0, u' \in L^\infty[0, T], v \in L^1[0, T]$$

ou

$$v(0) = v(T) = 0, v' \in L^\infty[0, T], u \in L^1[0, T]$$

Remarque 6. Les opérateurs intégrales à droite et à gauche de Riemann Liouville fractionnaires sont adjoints dans le sens L^2 .

Nous allons établir la formulation variationnelle du problème aux limites (1.8), on considère comme dans le cas classique, on multiplie (1.8) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(I)$, On obtient

$${}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t))v = f(t, u(t))v,$$

et d'après (1.14) on a

$$\int_0^T {}_t D_T^\alpha ({}_0 D_t^\alpha u(t)) v(t) dt = \int_0^T ({}_0 D_t^\alpha u(t)) ({}_0 D_t^\alpha v(t)) dt,$$

d'où

$$\int_0^T ({}_0 D_t^\alpha u(t)) ({}_0 D_t^\alpha v(t)) dt = \int_0^T f(t, u(t)) v(t) dt, \quad (1.15)$$

l'équation (1.15) est une formulation variationnelle du problème aux limites (1.8).

Chapitre 2

Recherche de solutions pour un BVP par approche variationnelle

Dans ce chapitre , nous étudions l' existence de solutions faibles du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t)), & 0 < t < T \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où f vérifie les hypothèse suivantes

(H1) (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en u et mesurable en t .

(ii) $f(t, u) = o(|u|)$ quand $u \rightarrow 0$,

(iii) il existe $p \geq 1$, il existe des fonctions $a_1, a_2 \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$|f(t, u)| \leq a_1(t) + a_2(t)|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

(H2) Soit pour tout $u \in \mathbb{R}$, $F(t, u) = \int_0^u f(t, s)ds$. Il existe $\theta > 2$ et \mathbf{R}_0 tel que

$$0 < \theta F(t, u) < f(t, u)u \quad \text{si } |u| > \mathbf{R}_0.$$

Bien sûr, ce problème a toujours la solution triviale $u = 0$ et nous intéressons à l'existence de solution non triviale .

Dans ce qui suit on désigne par H_0^1 l'espace de Sobolev des fonction $u \in W^{1,2}$ vérifiant la condition de Dirichleté $u(0) = u(T) = 0$. on peut définir la fonctionnelle d'énergie associée au (2.1) $J : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(u'(t))^2 - F(t, u(t)) \right] dt. \quad (2.2)$$

Lemme 1. La fonctionnelle \mathcal{J} est bien définie et de classe C^1 sur H_0^1 , sa dérivée est la fonctionnelle $\mathcal{J}'(u)$ définie par :

$$\mathcal{J}'(u).v = \int_0^T [u'(t)v'(t) - f(t, u(t))v(t)] dt. \quad (2.3)$$

Démonstration. De **(H1)** \mathcal{J} est bien définie sur H_0^1 .

Pour la différentielle de \mathcal{J} voir proposition (2) chapitre 1.

Montrons que \mathcal{J} est différentiable au sens de Fréchet

Nous commençons par rappeler la différentiabilité de la norme dans $L^2(I)$

L'application $J_1 : L^2(I) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $J_1(u) = \int_0^T (u(t))^2 dt$ est différentiable en $u \in L^2(I)$ et on

$$d_u J_1(h) = J_1'(h) = \int_0^T 2u(t)h(t) dt,$$

en effet,

$$\begin{aligned} \left| J_1(u+h) - J_1(u) - \int_0^T 2u(t)h(t) dt \right| &= \left| \int_0^T (u(t)+h(t))^2 dt - \int_0^T (u(t))^2 dt - \int_0^T 2u(t)h(t) dt \right| \\ &= \int_0^T (h(t))^2 dt \\ &= \|h\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que,

$$\lim_{\|h\|_{L^2} \rightarrow 0} \frac{\left| J_1(u+h) - J_1(u) - \int_0^T 2u(t)h(t) dt \right|}{\|h\|_{L^2}} = \lim_{\|h\|_{L^2} \rightarrow 0} \|h\|_{L^2} = 0$$

Par suite, nous obtenons la différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle définie sur $H_0^1(I)$ par $\frac{1}{2} \int_0^T (u'(t))^2 dt$.

Montrons la différentiabilité de l'application $u \rightarrow I(u) = \int_0^T F(t, u) dt$ c-à-d on montre

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

. avec

$$r(v) = I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t, u)v dt.$$

Tout d'abord, nous remarquons

$$F(t, u+v) - F(t, v) = \int_0^1 \frac{d}{dx} F(t, u+xv) dx = \int_0^1 f(t, u+xv)v dx,$$

pour tout $u, v \in H_0^1$

$$\begin{aligned} I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t, u)v dt &= \int_0^T (F(t, u+v) - F(t, u)) dt - \int_0^T f(t, u)v dt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^1 (f(t, u+xv) - f(t, u)) v dx \right] dt \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit donc que

$$\left| I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t, u) v dt \right| \leq \|v\|_{L^2} \left[\int_0^T \left[\int_0^1 (f(t, u+xv) - f(t, u)) dx \right]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, toujours par Cauchy-Schwarz, on a

$$\left[\int_0^1 (f(t, u+xv) - f(t, u)) dx \right]^2 \leq \int_0^1 (f(t, u+xv) - f(t, u))^2 dx$$

Donc on a finalement obtenu l'estimation

$$\begin{aligned} \left| I(u+v) - I(v) - \int_0^T f(t, u) v dt \right| &\leq \int_0^1 \|f(t, u+xv) - f(t, u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2} dx \\ &\leq \int_0^1 \|f(t, u+xv) - f(t, u)\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} dx \end{aligned}$$

alors

$$\frac{r(v)}{\|v\|_{H_0^1}} \leq \int_0^1 \|f(t, u+xv) - f(t, u)\|_{L^2} dx$$

Pour chaque x fixé et par continuité de f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(t, u+xv_n) - f(t, u)|^2 = 0$$

et

$$|f(t, u+xv_n) - f(t, u)|^2 \leq 4 \|f\|_{\infty} \in L^1[0, T].$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne donc le résultat.

À l'aide du même type d'arguments, on vérifie que l'application $u \rightarrow \mathcal{J}'$ est continue, et par suite \mathcal{J} est différentielle aux sens de Fréchet. \square

Afin de pouvoir appliquer les techniques du calcul de variations, il est tout d'abord important de se demander comment se comporte les suites de Palais-Smale de \mathcal{J} .

Proposition 11. *Sous (H1), la fonctionnelle \mathcal{J} vérifie la condition de Palais-Smale.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H_0^1 telle que $\{\mathcal{J}(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\mathcal{J}'(u_n)$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. i.e. il existe une constante $c_1 > 0$ et une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ tel que, pour n assez grand et pour tout $v \in H_0^1$,

$$\left| \int_0^T \left[\frac{1}{2} (u_n'(t))^2 - F(t, u_n(t)) \right] dt \right| \leq c_1, \quad (2.4)$$

et

$$\left| \int_0^T [u_n'(t) v'(t) - f(t, u_n(t)) v(t)] dt \right| \leq \varepsilon_n \|v\|. \quad (2.5)$$

Nous allons montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1 .

Considérons

$$\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\theta} \mathcal{J}'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_0^T (u_n')^2 dt + \int_0^T \frac{1}{\theta} [f(t, u_n)u_n - F(t, u_n)] dt \quad (2.6)$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_0^T (u_n')^2 dt, \quad (2.7)$$

car le troisième terme est positif et borné par une constante indépendante de n d'après **(H2)**.

D'autre part, on a pour $v = u_n$ dans (2.5)

$$\left| \mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\theta} \mathcal{J}'(u_n)u_n \right| \leq c_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \|u_n\| \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8) découle que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 \leq c_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \|u_n\|$$

ce qui implique

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 - \frac{\varepsilon_n}{\theta} \|u_n\| \leq c_1 \quad (2.9)$$

comme $\theta > 2$ si l'on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = +\infty$, on arrive à une contradiction avec (2.9), par suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Nous sommes maintenant prêt pour étudier la condition de Palais-Smale ; montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans H_0^1 . D'après (2.3) nous avons

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u \rangle = \int_0^T |u_n' - u'|^2 dt - \int_0^T [f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))] (u_n(t) - u(t)) dt \quad (2.10)$$

puis que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1 , de la réflexivité de H_0^1 on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers un élément $u \in H_0^1$ ($u_n \rightharpoonup u$ dans H_0^1), pour la simplicité des notations, on dénote encore cette sous suite par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par théorème d'injection de Sobolev on a :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2$$

D'après inégalité de Hölder on a

$$\int_0^T |f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| (u_n(t) - u(t)) dt \leq \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\|_{L^2} \|u_n(t) - u(t)\|_{L^2}$$

Et comme

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

Alors

$$\int_0^T [f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))] (u_n(t) - u(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.11)$$

De $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}'(u_n) = 0$ et $u_n \rightharpoonup u$, on a

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), (u_n - u) \rangle \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

(2.12) et (2.11) et $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(I)$ entraînent que, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fortement convergente vers u dans H_0^1 , ce qui signifie que \mathcal{J} satisfait la condition de Palais-Smale. \square

Proposition 12. *La fonctionnelle \mathcal{J} a une géométrie du col de montagne.*

Démonstration. par définition de \mathcal{J} , nous avons $J(0) = 0$.

Sous **(H1) (ii)**, on a

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |u| \leq \delta \implies |F(t, u)| \leq \varepsilon \frac{|u|^2}{2},$$

et d'après **(H1) (iii)**, il existe une constante $A = A(\delta)$ tel que $|u| \geq \delta$ implique

$$|F(t, u)| \leq A |u|^{p+1}$$

Combinons les deux estimations, on obtient

$$|F(t, u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |u|^2 + A |u|^{p+1},$$

on a donc

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2 - A \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

et par l'inégalité de Poincaré et l'injection de Sobolev, il vient que

$$\|u\|_{L^2} \leq 2T \|u\|_{H_0^1},$$

il vient alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - 2T \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - AC^{p+1} \|u\|_{H_0^1}^{p+1} \quad (2.13)$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon 2T - AC^{p+1} \|u\|_{H_0^1}^{p-1} \right) \|u\|_{H_0^1}^2. \quad (2.14)$$

Il suffit de choisir ε de sorte que $\left(\frac{1}{2} - T\varepsilon \right) = \frac{1}{4}$, comme $p > 1$ il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\|u\| \leq \rho_0$ alors

$$AC^{p+1} \|u\|_{H_0^1}^{p-1} \leq \frac{1}{8}.$$

Ainsi

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{8} \|u\|_{H_0^1}^2 \quad \|u\| \leq \rho_0,$$

en particulier si $\|u\| = \rho_0$

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{8} \rho_0^2 = \alpha.$$

Nous allons établir que \mathcal{J} est minoré.

Montrons tout d'abord que F croit au moins aussi vite que $|u|^\theta$ c'est-à-dire dire qu'il existe $C > 0$

$$F(t, u) \geq C |u|^\theta \quad (2.15)$$

Ceci résulte en fait l'hypothèse **(H3)**. En effet

$$0 < \theta F(t, u) < \frac{dF(t, u)}{du} u \quad \text{si } |u| > \mathbf{R}_0,$$

Nous avons $\frac{d}{du}(|u|^{-\theta} F(t, u)) = -\theta |u|^{\theta-1} F(t, u) + \frac{dF}{du}(t, u) |u|^{-\theta}$

qui implique $\frac{d}{du}(|u|^{-\theta} F(t, u)) \geq 0$ si $|u| > \mathbf{R}_0$,
(2.15) découle aisément.

On peut alors utiliser un argument d'homogénéité. On a pour $u \in H_0^1$,

$$\mathcal{J}(\lambda u) := \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T u'^2 dt - \int_0^T F(\lambda u) dt \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T u'^2 dt - \lambda^\theta \int_0^T |u|^\theta \quad (\text{par 2.15}),$$

comme $\theta > 2$ si $u \neq 0$ on voit que

$$\mathcal{J}(\lambda u) \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque } |\lambda| \longrightarrow \pm\infty$$

il suffit de choisir un vecteur u non nul quelconque, et poser $e = \lambda u$ pour λ assez grand.

Nous venons de vérifier que les conditions du théorème de col sont satisfaites, on peut donc dire si $c > \alpha$ est une valeur critique de \mathcal{J} et par suite elle est une solution non triviale de (1.4). \square

2.1 Exemple

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = |u|^{\lambda-1} u & 2 < \lambda + 1 \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

1^{ere} étape : Mise sous la forme variationnelle

Introduisons la primitive F de f

$$F(t, u) = \int_0^u f(s) ds = \int_0^u |s|^{\lambda-1} s ds = \frac{1}{\lambda+1} |u|^{\lambda+1}.$$

On vérifie que f satisfait les hypothèses

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|u|^{\lambda-1} u}{u} = 0.$$

On vérifie (H2)

$$uf(u) = |u|^{\lambda+1} \geq \frac{\theta}{\lambda+1} |u|^{\lambda+1},$$

et comme $\lambda + 1 > 2$, il existe une constante θ telle que $2 < \theta < \lambda + 1$, d'où le résultat nous introduisons maintenant la fonction \mathcal{J} définie sur H_0^1 par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'|^2 dt - \frac{1}{\lambda+1} \int_0^T |u|^{\lambda+1} dt. \quad (2.17)$$

et

$$\mathcal{J}'(u)v = \langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \int_0^T u'v' dt - \int_0^T |u|^{\lambda-1} uv dt. \quad (2.18)$$

2^{eme} étape La suite de Palais Smale est bornée.

Soit $\{u_n\}$ une suite de Palais Smale pour J , $\exists c > 0$ tel que

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c, \quad (2.19)$$

$$\|\mathcal{J}'(u_n)\|_{H^{-1}} \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

D'autre part, pour $v = u_n$

$$\mathcal{J}'(u_n)u_n = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle \quad (2.21)$$

$$= \int_0^T |u_n'|^2 dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda+1} dt \quad (2.22)$$

$$\leq \|\mathcal{J}'(u_n)\| \|u_n\|. \quad (2.23)$$

En multipliant (2.22) par $\frac{-1}{\lambda+1}$, et en ajoutant (2.17), on obtient

$$\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{\lambda+1} \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda+1} \right) \int_0^T |u_n'|^2 dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda-1}{2(\lambda+1)} \right) \|u_n\|^2 &\leq |\mathcal{J}(u_n)| + |\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle| \\ &\leq c + \frac{1}{\lambda+1} \|\mathcal{J}'(u_n)\| \|u_n\| \\ &\leq c + d \|u_n\|, \end{aligned}$$

il résulte que (u_n) est borné.

3^{eme} étape on montre que $\mathcal{J}'(\bar{u}) = 0$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}'(u_n)v = 0 \implies \int_0^T u_n' v' dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n v dt \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad (2.24)$$

d'autre part, on a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1 , on peut extraire une sous suite qui vérifiée

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans } H_0^1, \quad (2.25)$$

par la définition (4), $\forall v \in H_0^1$, on a

$$\int_0^T u_n' v' dt \longrightarrow \int_0^T u' v' dt, \quad (2.26)$$

et de (2.25), il existe sous suite telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^\theta \quad \forall \theta, \quad (2.27)$$

alors par la définition de convergence faible, il vient que

$$\int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n dt \longrightarrow \int_0^T |u|^{\lambda-1} u dt, \quad (2.28)$$

(2.24), (2.26) et (2.28), d'où le résultat.

4^{eme} étape on montre que \mathcal{J} vérifie les conditions de Palais Smale.

Comme $\{u_n\}_n$ est bornée dans H_0^1 , de la réflexivité de H_0^1 , on peut extraire une sous suite tel que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1,$$

et par théorème d'injection de Sobolev, on a :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(I),$$

et d'autre part, on a

$$\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n - u \rangle = \int_0^T u'_n (u'_n - u') dt - \int_0^T |u_n|^{\lambda-1} u_n (u_n - u) dt \quad (2.29)$$

$$\langle \mathcal{J}'(u), u_n - u \rangle = \int_0^T u' (u'_n - u') dt - \int_0^T |u|^{\lambda-1} u (u_n - u) dt, \quad (2.30)$$

de (2.30) et (2.29), il vient que

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u \rangle = \int_0^T (u'_n - u')^2 dt - \int_0^T (|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u) (u_n - u) dt,$$

comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$, et

$$\int_0^T (|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u) (u_n - u) dt \leq \|u_n - u\|_\infty \int_0^T (|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u) dt,$$

alors

$$\int_0^T (|u_n|^{\lambda-1} u_n - |u|^{\lambda-1} u) (u_n - u) dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (2.31)$$

de plus $u_n \rightharpoonup u$, d'où

$$\langle \mathcal{J}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u \rangle \rightarrow 0, \quad (2.32)$$

il résulte de (2.32) et (2.31) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{H_0^1} = 0,$$

et la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Montrons que \mathcal{J} est minorée

On a

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'|^2 dt - \frac{1}{\lambda+1} \int_0^T |u|^{\lambda+1} dt \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{\lambda+1} \|u\|_{L^{\lambda+1}}^{\lambda+1}, \quad (2.34)$$

comme $2 < \lambda + 1$ par injection compact de Sobolev

$$\|u\|_{L^{\lambda+1}} \leq C \|u\|_{H_0^1},$$

il vient alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1} \|u\|_{H_0^1}^{\lambda+1} = \|u\|_{H_0^1}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C^{\lambda-1}}{\lambda+1} \|u\|_{H_0^1}^{\lambda-1} \right),$$

il existe $\rho_0 > 0$ tel que, si $\|u\| = \rho_0$, alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \|\rho_0\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1} \|\rho_0\|^{\lambda-1} \right),$$

on choisit $\rho < \min \left\{ \rho_0, \left(\frac{\lambda+1}{2C^{\lambda+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda-1}} \right\}$, et $\alpha = \frac{\rho_0^2}{2} - \frac{C^{\lambda+1}}{\lambda+1} \rho_0^{\lambda+1}$,

et alors

$$\mathcal{J}(u) \geq \alpha \quad \text{si} \quad \|u\| = \rho$$

comme $\lambda+1 \geq \theta$ alors

$$\frac{1}{1+\lambda} |u|^{\lambda+1} \geq \frac{1}{1+\lambda} |u|^\theta \implies F(t, u) \geq D |u|^\theta$$

Par homogénéité

$$\mathcal{J}(\xi u) = \frac{\xi^2}{2} \int_0^T |u'|^2 dt - \frac{1}{\lambda+1} \int_0^T |\xi u|^{\lambda+1} dt \leq \frac{\xi^2}{2} \int_0^T |u'|^2 dt - D |\xi u|^\theta$$

comme $\theta > 2$ et si $u \neq 0$ on voit que

$$\mathcal{J}(\xi u) \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad |\xi| \longrightarrow \pm\infty$$

il suffit de choisir un vecteur u non nul quelconque, et de poser $e = \xi u$ pour ξ assez grand.

Puisque les hypothèses de théorème du col sont satisfaites, on peut donc dire que $c > \alpha > 0$ est une valeur critique de (2.16).

Chapitre 3

Recherche de solutions pour un FBVP par approche variationnelle

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions faibles du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions de Dirichlet (FBVP) :

$$\begin{cases} {}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t)) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H3) $f \in C([0, T] \times \mathbb{R})$

(H4) il existe une constante $\theta > 2$ telle que

$$0 < \theta F(t, u) < f(t, u)u \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et } u \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

où, $F(t, s) = \int_0^s f(t, u)du$ est la primitive de f .

Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, Motivé par les travaux classiques présentés dans le chapitre précédent, la théorie des points critiques est utilisée pour aborder l'existence de solutions pour le problème (FBVP) (3.1).

Définition 18. Soit $u \in E^\alpha$ est une solution faible de (3.1) si

$$\int_0^T {}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha v(t) dt = \int_0^T f(t, u(t))v(t) dt \quad \forall v \in E^\alpha \quad (3.2)$$

De (3.2), on peut définir la fonctionnelle d'énergie associée à (3.1) $\mathcal{J} : E^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 dt - \int_0^T F(t, u(t)) dt \quad (3.3)$$

Lemme 2. Si f vérifie **(H4)** alors pour tout $t \in [0, T]$, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$F(t, u) \leq F(t, \frac{u}{|u|})u^\theta \quad \text{si } 0 < |u| \leq 1, \quad (3.4)$$

et

$$F(t, u) \geq F(t, \frac{u}{|u|})u^\theta \quad \text{si } |u| \geq 1. \quad (3.5)$$

Démonstration. On a d'après **(H4)** et pour tout $\sigma \in]0, \infty[$:

$$\theta F(t, \sigma u) \leq \sigma u f(t, \sigma u).$$

Soit $h(\sigma) = F(t, \sigma u)$.

Montrons tout d'abord

$$\frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta}) \geq 0 \quad (3.6)$$

on a :

$$h'(\sigma) = \frac{dF}{d\sigma}(t, \sigma u) = u f(t, \sigma u)$$

Et il résulte que :

$$\frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta}) = h'(\sigma)\sigma^{-\theta} - \theta\sigma^{-\theta-1}h(\sigma) = u f(t, \sigma u)\sigma^{-\theta} - \theta\sigma^{-\theta-1}F(t, \sigma u)$$

D'où l'inégalité (3.6).

Maintenant, on intègre (3.6) de 1 jusqu'à $\frac{1}{|u|}$ pour conclure (3.4),

$$\int_1^{\frac{1}{|u|}} \frac{d}{d\sigma}(h(\sigma)\sigma^{-\theta}) = h(\frac{1}{|u|})(\frac{1}{|u|})^{-\theta} - h(1),$$

et d'après la définition de h et (3.6), on conclut (3.4).

De même, on conclut (3.5) en intégrant de $\frac{1}{|u|}$ jusqu'à 1. \square

Lemme 3. Soit $m = \inf \{F(t, u) : t \in [0, T], |u| = 1\}$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $u \in E^\alpha - \{0\}$, on a

$$\int_0^T F(t, \xi u(t)) dt \geq m |\xi|^\theta \int_0^T |u(t)|^\theta dt - Tm.$$

Démonstration. Pour chaque $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $u \in E^\alpha$, on définit les ensembles suivants

$$A = \{t \in [0, T] / |\xi u(t)| \leq 1\},$$

et

$$B = \{t \in [0, T] / |\xi u(t)| \geq 1\}.$$

D'après (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T F(t, \xi u(t)) dt &= \int_A F(t, \xi u(t)) dt + \int_B F(t, \xi u(t)) dt \\
&\geq \int_B F(t, \xi u(t)) dt \\
&\geq \int_B F(t, \frac{\xi u(t)}{|\xi u(t)|} |\xi u(t)|^\theta dt \\
&\geq m \int_B |\xi u(t)|^\theta dt \\
&= m \int_0^T |\xi u(t)|^\theta dt - m \int_A |\xi u(t)|^\theta dt \\
&\geq m |\xi|^\theta \int_0^T |u|^\theta dt - mT.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4. *Sous l'hypothèse (H3) la fonctionnelle définie par (3.3) est bien définie et de classe C^1 , i.e $\mathcal{J} \in C^1(E^\alpha, \mathbb{R})$ et*

$$\mathcal{J}'(u)v = \int_0^T {}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha v(t) dt - \int_0^T f(t, u(t))v(t) dt \quad \forall v \in E^\alpha \quad (3.7)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que la fonctionnelle $G : \mathbb{E}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(u) = \int_0^T F(t, u) dt$$

est $C^1(\mathbb{E}^\alpha, \mathbb{R})$

On démontre que G est différentiable au sens de Fréchet i.e

$$\lim_{\|v\|_\alpha \rightarrow 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|_\alpha} = 0$$

Où

$$r(v) = \int_0^T [G(u+v) - G(u)] dt - \int_0^T f(t, u(t))v dt$$

On peut écrire

$$G(u+v) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv) dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
r(v) &= G(u+v) - G(u) - \int_0^T f(t, u(t))v dt \\
&= \int_0^T \left[\int_0^1 (f(t, u+xv) - f(t, u)) v dx \right] dt
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$|r(v)| \leq \int_0^T \left[\int_0^1 |f(t, u+xv) - f(t, u)| |v| dx \right] dt,$$

puisque f est continue alors

$$|f(t, u + xv) - f(t, v)|^2 \leq 4 \|f\|_\infty^2.$$

D'après le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |r(v)| &\leq \int_0^1 \left[\int_0^T |f(t, u + xv) - f(t, u)| |v| dt \right] dx \\ &\leq \int_0^1 \|f(t, u + xv) - f(t, u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2} dx \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \|f(t, u + xv) - f(t, u)\|_{L^2} \|v\|_\alpha dx \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|_\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \|f(t, u + xv) - f(t, u)\|_{L^2} dx$$

pour chaque x fixé et soit $v_n \in \mathbb{E}^\alpha$ telle que $v_n \rightarrow 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f(t, u + xv_n) - f(t, u)|^2 dt = 0$$

$$\|f(t, u + xv_n) - f(t, u)\|_{L^2} \leq \|f(t, u + xv_n)\|_{L^2} + \|f(t, u)\|_{L^2} \leq 2 \|f\|_\infty T^{\frac{1}{2}} \in L^1.$$

D'après théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f(t, u + xv_n) - f(t, u)\|_{L^2} dt = 0 \implies \|f(t, u + xv_n) - f(t, u)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ dans } L^1[0, T].$$

D'où le résultat.

Prouvons maintenant que G' est continue.

Soit $\{v_n\} \in \mathbb{E}^\alpha$ telle que $v_n \rightarrow 0$ d'après proposition (10)

$$v_n \rightarrow 0 \text{ } \mathbb{L}^2 \text{ et } v_n \rightarrow 0 \text{ p.p sur } [0, T]$$

et puisque f est continue alors

$$f(t, u + v_n) \rightarrow f(t, u) \text{ p.p sur } [0, T],$$

Ce qui implique

$$|f(t, u + v_n) - f(t, u)|^2 \rightarrow 0 \text{ p.p sur } [0, T].$$

Et d'autre part on a

$$|f(t, u + v_n) - f(t, u)|^2 \leq 4 \|f\|_\infty^2 \in L^1$$

Et d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f(t, u + v_n) - f(t, u)|^2 = 0.$$

nous utilisons l'inégalité de Hölder et la proposition(9)

$$\begin{aligned} |\langle G'(u + v_n) - G'(u), v \rangle| &= \int_0^T (f(t, u + v_n) - f(t, u)) v dt \\ &\leq \left(\int_0^T |f(t, u + v_n) - f(t, u)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |v|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(t, u + v_n) - f(t, u)\|_{L^2} \|v\|_\alpha dx \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|G'(u + v_n) - G'(u)\| &= \sup_{\|v\|_\alpha \leq 1} |\langle G'(u + v_n) - G'(u), v \rangle| \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(t, u + v_n) - f(t, u)\|_{L^2} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

D'où la continuité de G' .

Maintenant on démontre (3.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u + hv) &= \frac{1}{2} \int_0^T [{}_0D_t^\alpha(u + hv)(t)]^2 dt - \int_0^T F(t, (u + hv)(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [{}_0D_t^\alpha u(t) + h {}_0D_t^\alpha v(t)]^2 dt - \int_0^T F(t, (u + hv)(t)) dt \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [{}_0D_t^\alpha u(t)]^2 dt - \int_0^T F(t, (u)(t)) dt$$

D'où

$$\mathcal{J}(u + hv) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[h^2 ({}_0D_t^\alpha v(t))^2 + 2h {}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha v(t) \right] dt - \left[\int_0^T (F(t, u + hv) - F(t, u)) dt \right]$$

Et comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t, u(t) + hv(t)) - F(t, u(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{u+hv} f(t, s) ds - \int_0^u f(t, s) ds}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t, s) ds}{h}$$

Par un résultat basique d'analyse on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_u^{u+hv} f(t, s) ds}{h} = f(t, u)v$$

Il résulte que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u + hv) - \mathcal{J}(u)}{h} = \int_0^T {}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha v(t) dt - \int_0^T f(t, u) v dt.$$

□

On démontre que \mathcal{J} satisfait les conditions de Palais-Smale.

Soit $\{u_k\}_k \in E^\alpha$ telle que

$$|\mathcal{J}(u_k)| \leq M, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}'(u_k) = 0 \quad (3.8)$$

Premièrement, on montre que $(u_k)_k$ est bornée .on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u_k) &= \frac{1}{2} \|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T F(t, u_k(t)) dt \\ \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle &= \|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T f(t, u_k(t)) u_k(t) dt \end{aligned}$$

Utilisons (3.8), les calculs étant les même que le cas des BVP, on obtient

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_k\|_\alpha^2 \leq \mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle \leq M + M_1 \|u_k\|$$

Comme $\theta > 2$, on en déduit que u_k est bornée dans \mathbb{E}^α . On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée u_k) tel que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{dans } \mathbb{E}^\alpha$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle &= \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k - u \rangle - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \\ &\leq \|\mathcal{J}'(u_k)\| \|u_k - u\|_\alpha - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quand $k \rightarrow \infty$. D'après (1.12) et la proposition (10), on obtient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C[0, T]$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_\infty = 0$$

De plus

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle &= \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k - u \rangle - \langle \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle \\ &= \int_0^T [{}_0D_t^\alpha u_k(t) {}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t) - f(t, u_k(t)) (u_k - u)(t)] dt \\ &\quad - \int_0^T [{}_0D_t^\alpha u(t) {}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t) - f(t, u(t)) (u_k - u)(t)] dt \\ &= \int_0^T |{}_0D_t^\alpha (u_k - u)(t)|^2 dt - \int_0^T (f(t, u_k(t)) - f(t, u(t))) (u_k(t) - u(t)) dt \\ &= \|u_k - u\|_\alpha^2 - \int_0^T (f(t, u_k(t)) - f(t, u(t))) (u_k(t) - u(t)) dt \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\|u_k - u\|_\alpha^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty$$

D'où $\{u_k\}$ converge fortement vers u dans \mathbb{E}^α .

Théorème 7. Soit $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, supposant que f satisfait les condition (H3) et (H4). L'équation (3.1) admet une solution faible non trivial $u \in \mathbb{E}^\alpha$.

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant

Lemme 5. La fonctionnelle \mathcal{J} vérifie les hypothèses du théorème du col.

Démonstration. En effet, $\mathcal{J}(0) = 0$. D'après (1.12) on a

$$\max |u(t)| \leq C \|u\|_\alpha \quad \forall u \in \mathbb{E}^\alpha$$

avec $C = \frac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{\frac{1}{2}}}$. Soit $C_1 = \frac{1}{C}$, d'après inégalité précédent et (3.4), si $\|u\|_\alpha \leq C_1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T F(t, u(t)) &\leq \int_0^T F(t, \frac{u(t)}{|u(t)|}) |u(t)|^\theta dt \\ &\leq M \|u\|^\theta \leq MTC^\theta \|u\|_\alpha^\theta \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - \int_0^T F(t, u(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - MTC^\theta \|u\|_\alpha^\theta \end{aligned}$$

il résulte que

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} C_1^2 - MTC^\theta C_1^\theta \quad \text{si } \|u\|_\alpha = C_1$$

Soit $\rho < \min \left\{ C_1, \left(\frac{1}{2MTC^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta-2}} \right\}$ et $\beta = \frac{\rho^2}{2} - MTC^\theta \rho^\theta$

il résulte que

$$\mathcal{J}(u) \geq \beta \quad \|u\|_\alpha = \rho$$

D'après le lemme (3), pour chaque $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $u \in E^\alpha - \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi u) &= \frac{\xi^2}{2} \|u\|_\alpha^2 - \int_0^T F(t, \xi u(t)) dt \\ &\leq \frac{\xi^2}{2} \|u\|_\alpha^2 - m |\xi|^\theta \int_0^T |u|^\theta dt + mT \end{aligned}$$

il suffit de choisir un vecteur non nul quelconque, et poser $e = \xi u$ pour ξ assez grand on a $\mathcal{J}(e) \leq 0$. Dans ce cas \mathcal{J} satisfait les conditions de théorème de col (Pass mountain). D'où l'existence de solution faible pour (3.1). \square

3.1 Exemple explicatif

Afin illustrer le résultat obtenu auparavant, nous donnons l'exemple suivant

$$\begin{cases} {}_t D_T^\alpha ({}_0 D_t^\alpha u(t)) = h(t)u(u^2 + 1) \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $h(\cdot)$ est une fonction positive continue sur $[0, T]$.

donc l'hypothèse (H3) est vérifiée .

étape1 Montrons que (H4) est satisfaite,

a) Introduisant la primitive F ,

$$\begin{aligned} F(t, u) &= \int_0^u f(t, \sigma) d\sigma \\ &= \int_1^u h(t)\sigma^2(\sigma - 1) d\sigma \\ &= h(t) \left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right) \end{aligned}$$

b) montrons l'existence de θ tel que $G(t, u) \leq \theta$, où $G(t, u) = \frac{uf(t, u)}{F(t, u)}$

$$G(t, u) = \frac{u^2(u^2 + 1)}{\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}} = \frac{4(u^2 + 1)}{(u^2 + 2)}$$

d'où

$$\frac{\partial G(t, u)}{\partial u} = \frac{8u}{(u^2 + 2)^2}$$

il est bien que G admet un minimum en 0 qui vaut 2, d'où l'existence d'un $\theta \leq 2$ tel que $G(t, u) \leq \theta$.

étape 2 La formulation variationnelle

Introduisons la fonction d'énergie \mathcal{J} sur E^α définie par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |{}_0 D_t^\alpha u(t)|^2 dt - \int_0^T h(t) \left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right) dt$$

on a bien que $\mathcal{J} \in C^1(E^\alpha, \mathbb{R})$, et que

$$\mathcal{J}'(u)v = \int_0^T {}_0 D_t^\alpha u(t) {}_0 D_t^\alpha v(t) dt - \int_0^T h(t)u(u^2 + 1)v dt.$$

étape 3 Recherche de point critique pour \mathcal{J}

Nous avons vu que les solutions dans E^α de (3.10) étaient les points critiques de \mathcal{J} , vérifions que \mathcal{J} satisfait la condition de Palais-Smale de sorte que le résultat sera établi en vertu du théorème du col.

Tout d'abord, montrons que la suite de Palais-Smale $\{u_k\}$ est bornée.

Soit $(u_k) \in E^\alpha$ tel que

$$|\mathcal{J}(u_k)| \leq M, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}'(u_k) = 0$$

$$\mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_k\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t) \left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right) dt + \frac{1}{\theta} \int_0^T h(t) u^2 (u^2 + 1) v dt \quad (3.11)$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_k\|_\alpha^2 \quad (3.12)$$

De plus nous avons

$$\mathcal{J}(u_k) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle \leq |\mathcal{J}(u_k)| + |\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle| \quad (3.13)$$

il résulte de (3.12) et (3.13) que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_k\|_\alpha^2 &\leq |\mathcal{J}(u_k)| + |\langle \mathcal{J}'(u_k), u_k \rangle| \\ &\leq M + \bar{C} \|u_k\| \end{aligned}$$

$$\frac{\theta - 2}{2\theta} \|u_k\|_\alpha^2 - \bar{C} \|u_k\| \leq M \implies \|u_k\| \leq \bar{C}.$$

Afin de prouver que \mathcal{J} satisfait la condition de (PS), montrons que si $u_k \rightharpoonup u$ dans E^α , alors

$$\int_0^T (h(t)u_k(u_k^2 + 1) - h(t)u(u^2 + 1)) (u_k - u) dt \longrightarrow 0 \quad (3.14)$$

En effet, d'après l'étape précédente, $(u_k)_k$ est bornée dans E^α . On peut donc extraire une sous-suite (notée aussi (u_k)) qui converge faiblement dans E^α vers un élément $u \in E^\alpha$, *i.e.*

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{dans } E^\alpha$$

et par la proposition (10),

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{dans } C([0, T]), \quad (3.15)$$

il résulte de la continuité de f que

$$h(t)u_k(u_k^2 + 1) \longrightarrow h(t)u(u^2 + 1). \quad (3.16)$$

De plus via l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\langle h(t)u_k(u_k^2 + 1) - h(t)u(u^2 + 1), (u_k - u) \rangle \leq \|h(t)u_k^2(u_k - 1) - h(t)u^2(u - 1)\| \|u_k - u\|.$$

On conclut grâce à (3.15) et (3.16).

$$\langle \mathcal{J}'(u_k) - \mathcal{J}'(u), u_k - u \rangle = \|u_k - u\|^2 - \int_0^T h(t)u_k^2(u_k - 1) - h(t)u^2(u - 1)(u_k - u) dt. \quad (3.17)$$

nous utilisons (3.9) et (3.14), par conséquent $\|u_k - u\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$. Cela implique la convergence forte de u_k vers u dans E^α .

Nous allons appliquer le théorème du col à la fonctionnelle \mathcal{J} . Il s'agit alors de trouver une "cuvette", et un point bas.

- **l'existence d'une cuvette**

Soit $C = \frac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{\frac{1}{2}}}$ et $C_1 = \frac{1}{C}$, si $\|u\|_\alpha \leq C_1$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 dt - \int_0^T h(t) \left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t) \left(\frac{u^4}{4|u|^4} + \frac{u^2}{2|u|^4} \right) |u|^4 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - \int_0^T h(t) \left(\frac{u^4}{4|u|^4} + \frac{u^2}{2|u|^2} \right) |u|^4 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - M \|u\|_{L^4}^4 \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\alpha^2 - MTC^4 \|u\|_\alpha^4 \quad \text{si } \|u\|_\alpha \leq C_1, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{1}{2} C_1^2 - MTC^4 C_1^4 \quad \text{si } \|u\|_\alpha = C_1$$

On peut choisir C_1 suffisamment petit tel que

$$\frac{1}{2} - MTC^4 C_1^2 > 0,$$

pour que

$$\mathcal{J}(u) \geq C_1^2 \left(\frac{1}{2} - MTC^4 C_1^2 \right) =: \beta > 0.$$

- **Existence du point bas,**

Nous allons établir que \mathcal{J} n'est pas minorée, ce qui fournit automatiquement le point bas u_1 .

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda u) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 dt - \int_0^T h(t) \left(\frac{\lambda^4 u^4}{4} + \frac{\lambda^2 u^2}{2} \right) dt \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2 dt - \int_0^T h(t) \left(\frac{\lambda^4 u^4}{4} + \frac{\lambda^2 u^2}{8} \right) dt \end{aligned}$$

si $u \neq 0$, on voit que

$$\mathcal{J}(\lambda u) \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque } |\lambda| \longrightarrow \pm\infty$$

il suffit de choisir un vecteur non nul quelconque, et de poser $u_1 = \lambda u$, pour λ assez grand. Comme toutes les hypothèses du théorème de col sont satisfaites, nous avons donc obtenu une solution non triviale de (3.10).

Conclusion

Nous avons montré à travers ce mémoire que l'approche variationnelle peut être appliquée à des équations différentielles ordinaires et fractionnaires, si elles ont une structure variationnelle. En considérant la même famille de non linéarités, nous avons pu appliquer le lemme du col dans les deux cas suivant les mêmes étapes, bien sûr en respectant la spécificité de chaque cas et en faisant intervenir les espaces de Sobolev d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire a souligné l'analogie entre le cas fractionnaire et le cas ordinaire et la possibilité de généraliser l'application de l'approche variationnelle pour une certaine classe d'opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

- [1] D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, and M.M. Meerschaert. The fractional order governing equations of levy motion. *Water Resour. Res.*, 36 :1413-1423, 2000.
- [2] H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications* ; Editions Masson, Paris 1983..
- [3] K.W., Blayneh, "Analysis of age structured host-parasitoid model", *Far East J. Dyn. Syst.*, Vol. 4, pp. 125-145, 2002.
- [4] Z. Bai and H. Lú, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 311, 495-505, 2005.
- [5] Cerami : G. Cerami, Un criterio di esistenza per i punti critici su variet'a ilimitate, *Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett.* 112 (1978), p. 332-336.
- [6] Daoudi-Merzagui N, , *Méthodes topologiques et variationnelles pour l'étude de problème aux limites périodiques*, thèse de doctorat d'état univercité de Tlemcen, 1999
- [7] V. Ervin and J. Roop, Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation, *Numer. Meth. Part. Diff. Eqs.* Vol. 22, 58-76, 2006.
- [8] W.G., Glockle, T.F., Nonnenmacher, "A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics", *Biophys. J.*, Vol.68, pp. 46-53, 1995.
- [9] R., Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics", *World Scientific, Singapore*, 2000.
- [10] F. Jiao , and Y. Zhou, "Existence result for fractional boundary value problem via critical point theory ,Intern .Journal of bif .and chaos Vol .22,No 4,1-17,2012
- [11] W. Jang, The existence of solutions for boundary value problems of fractional differential equations at resonance, *Nonlinear Anal.* Vol. 74, 1987-1994, 2011.
- [12] F. Jiao and Y. Zhou, Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory, *Intern. Journal of Bif. and Chaos* Vol. 22, No 4, 1-17, 2012.
- [13] A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Amsterdam, 2006.
- [14] O. Kavian, *Introduction 'a la thteorie des points critiques et applications aux probl'emes elliptiques.* (French) [Introduction to critical point theory and applications to elliptic problems.] *Mathématiques and Applications [Mathematics and Applications] Series*, Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [15] F. Mainardi. Fractional calculus. In A. Carpinteri and F. Mainardi, editors, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, New York, 1997. Springer-Verlag.
- [16] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, New York. 74 (1989)
- [17] J. Mawhin and M. Willem, Origin and evolution of the Palais-Smale condition in critical point theory, www.researchgate.net/profile/Jean_Mawhin/publication/225147695_Origin_and_evolution_of_the_Palais

-
- [18] K.S., Miller, B., Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations", *John Wiley, New York*, 1993.
- [19] R., Magin "Fractional calculus in bioengineering", *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol.32(1), pp.1-104, 2004.
- [20] R., Metzler, K., Joseph, "Boundary value problems for fractional diffusion equations", *Physica. A.*, Vol.278, pp.107-125, 2000.
- [21] N., Nyamoradi, D., Baleanu, RP., Agarwal, "Existence and uniqueness of positive solutions to fractional boundary value problems with nonlinear boundary conditions",
- [22] K.B., Oldham, "Fractional differential equations in electrochemistry", *Advances in Engineering software*, Vol. 41, pp. 9-12, 2010.
- [23] K.B., Oldham, J., Spanier, "The Fractional Calculus", *Academic Press, New York, London*, 1974.
- [24] P. Rabinowitz, Minimax method in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Amer. Math. Soc., No 65, 1986.
- [25] I.M. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen. Fractional kinetics. *Physics Today*, Nov. :48-53, 2002.
- [26] S.G., Samko, A.A., Kilbas, O.I., Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives", *Theory and applications, Gordon and Breach, Yverdon*, 1993.
- [27] C. Torres, Mountain pass solution for a fractional boundary value problem, *Journal of Fractional Calculus and Applications* 5(1) (2014), 110.
- [28] B., Vintagre, I., Podlybni, A., Hernandez, V. Feliu, "Some approximations of fractionalorder operators used in control theory and applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 3(3), pp.231-248, 2000.
- [29] S. Zhang, Existence of a solution for the fractional differential equation with nonlinear boundary conditions, *Comput. Math. Appl.* Vol. 61, 1202-1208, 2011