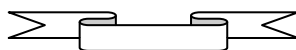




République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen



Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master  
En Génie Mécanique  
Spécialité : Maintenance Industrielle

## Thème

# Etude dynamique d'une poutre en matériaux composites

Présenté par : **BELABBES Mohammed Reda**

Le : 15 / 06 / 2015 devant le jury composé de :

Président	: Mr. A.BOUKHALFA	MC.A	Université de Tlemcen
Encadreur	: Mr. S.M HAMZA-CHERIF	MC.B	Université de Tlemcen
Co-encadreur	: Mr. S.GUEZZEN	MC.B	Université de Tlemcen
Examineur	: Mr. M. CHORFI	MC.B	Université de Tlemcen
Examineur	: Mr. SA.BELALIA	MC.A	Université de Tlemcen

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*À mes parents*

*À mes frères*

*À toute ma famille*

*À tous mes amis*

*Et*

*À toi...*

---

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

A messieurs les membres du jury

Je remercie :

Monsieur **SM HAMZA CHERIF** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail. Et monsieur **GUEZZEN SAMIR,**

Monsieur **A.BOUKHALFA** qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Messieurs les examinateurs **M. CHORFI** et **SA.BELALIA**

Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

## ملخص

يشمل هذا العمل دراسة حركة رافده من المواد المركبة. نظريا يستند إعداد الطاقة الحركية و طاقة التشوه للعمود على نموذج Timoshenko, ويتم الحصول على معادلات الحركة بمبدأ Hamilton . باستخدام طريقة العناصر المتناهية لحل هذه المعادلات لحساب المصفوفات العامة للطاقة الحركية و طاقة التشوه. وفي وقت لاحق ، و تحديد الترددات الطبيعية لنظام الدراسة. وأخيرا يتم التحقق من الصحة، و تتم مقارنة النتائج مع دراسات أخرى وجدت .

**الكلمات المفتاحية:** رافده، المواد المركبة، طريقة العناصر المتناهية.

## Résumé

Ce travail concerne l'étude des vibrations libres d'une poutre en matériaux composites. Théoriquement l'établissement de l'énergie cinétique et de déformation de la poutre est basé sur le modèle de Timoshenko, les équations de mouvements sont obtenues à partir du principe d'Hamilton.

La méthode des éléments finis hiérarchique est utilisée pour modéliser la structure, un élément fini hiérarchique de type poutre avec six degrés de liberté par nœud est développé. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres.

Enfin la validation est faite, les résultats trouvés sont comparés avec d'autres études de la littérature.

**Les mots clés :** poutre, matériaux composites, méthode des éléments finis.

## Abstract

This work concerns the study of free vibrations of a beam in composite materials. Theoretically, the establishment of kinetic energy and deformation of the beam is based on the model of Timoshenko, movement equations are obtained from Hamilton principle.

The hierarchical finite element method is used to model the structure; hierarchical finite element beam type with six degrees of freedom per node is expanded. A program is developed for the calculation of own frequencies.

Finally, the validation is made; the found results are compared with other literature studies.

**Keywords:** beam, composite materials, finite element method

## Table des matières

Résumé.....	i
Sommaire.....	iv
Liste de figures.....	v
Liste de tableaux.....	vi
Liste des symboles .....	vii
Introduction Général.....	1

### Chapitre I Généralité sur les matériaux composites

I.1. Introduction.....	4
I.2. Historique des matériaux composites.....	4
I.3. Définition.....	4
I.3.A. Matrice.....	8
I.3.B. Renfort .....	8
I.3.C .Exemples sur les fibres et les matrices.....	9

### Chapitre II théories de poutres de Timoshenko

II.1. Introduction.....	12
II.2. Relations contraintes-déformations.....	12
II.3. Energie de déformation.....	17
II.4. Energie cinétique.....	19
II.5. Equations du mouvement.....	21

### Chapitre III Formulation par la méthode des éléments finis hiérarchiques

III.1. Introduction.....	22
III.2. formulation par la méthode des éléments finis hiérarchiques.....	22
III.2.1 Choix de l'élément.....	22
III.2.2 Détermination de la matrice de rigidité [K].....	25
III.2.3 Détermination de la matrice masse.....	27
III.2.4 Forme finale des équations du mouvement.....	28



---

## Chapitre IV Organisation de la programmation

IV.1. Introduction.....	30
IV.2. Schéma de calcul.....	30
IV.3. Description du programme.....	32
IV.3.A-Fichier de données.....	32
IV.3.B-programme de calcul.....	32
IV.3.C-Formation des matrices...../.....	32
IV.3.D-calcul des fréquences propres .....	33

## Chapitre V Résultats et interprétations

V -1.Introduction.....	34
V -2. Validation et interprétation des résultats.....	34
V -2.1. Convergence .....	34
V.2.2. étude paramétriques .....	35
V-2-3. Interprétations .....	38
<b>Conclusion</b> .....	39
<b>Références bibliographiques</b> .....	40

## Listes des figures

<b>Figure 1</b> Citroën DS 1956 pavillons en verre/polyester.....	1
<b>Figure 2</b> Boeing 787 les matériaux composites constituant 50 % de la masse totale.....	2
<b>Figure 3</b> matériaux composites.....	6
<b>Figure 4</b> types de matrice.....	8
<b>Figure 5</b> types de renfort.....	8
<b>Figure 6</b> Fibre de verre.....	9
<b>Figure 7</b> Fibre de carbone.....	10
<b>Figure 8</b> Fibre de graphite.....	10
<b>Figure 9</b> Kevlar.....	10
<b>Figure 10</b> Matrice époxyde.....	11
<b>Figure 11</b> Poutre avant et après déformation.....	12
<b>Figure 12</b> Système de coordonnées cylindriques .....	15
<b>Figure 13</b> Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié.....	16
<b>Figure 14</b> Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ du stratifié.....	17
<b>Figure 15</b> Composantes des vecteurs des contraintes.....	17
<b>Figure 16</b> n-couches de l'arbre en matériaux composites.....	20
<b>Figure 17</b> Élément poutre à deux nœuds.....	23
<b>Figure 18</b> Schéma de calcul.....	32

---

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1</b> exemple des matériaux composites..... ;.....	7
<b>Tableau 2</b> Propretés d'un matériau composite.....	34
<b>Tableau 3</b> propriétés d'un matériau isotrope.....	35
<b>Tableau 4</b> Convergence des fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique p d'une poutre isotrope (E L).....	35
<b>Tableau 5</b> Convergence de première fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique p d'une poutre composite (E-L).....	36
<b>Tableau 6</b> Influence des conditions aux limites et le nombre de couches sur les fréquences propres.....	37

## Nomenclature

$U(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $x$ .
$V(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $y$ .
$W(x, y, z)$	Déplacement suivant la direction $z$ .
$\beta_x$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $y$ .
$\beta_y$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $z$ .
$\Phi$	Déplacement angulaire de la section droite autour de l'axe $x$ due à la déformation de torsion.
$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes.
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Axes des coordonnées cartésiennes.
$(x, r, \theta)$	Coordonnées cylindriques.
$(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$	Axes des coordonnées cylindriques.
$(1, 2, 3)$	Axes principaux d'une couche de stratifié.
$\bar{Q}$	Constants élastiques.
$E$	Module de Young.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\rho$	Masse volumique.
$K_S$	Facteur de correction de cisaillement.

---

$L$	Longueur de l'arbre.
$D$	Diamètre moyen de l'arbre.
$e$	Epaisseur de l'arbre.
$NC$	Nombre des couches
$r_i$	Le rayon intérieur de l'arbre composite
$r_{i+1}$	Le rayon extérieur de l'arbre composite.
$\eta$	Orientation des fibres.
$\theta$	Coordonnée circonférentielle.
$\xi$	Coordonnée locale.
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformation.
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contrainte.
$\omega$	Fréquence propres
$f(\xi)$	Fonction de forme.
$[N]$	Matrices des fonctions de forme.
$P$	Nombre des fonctions de forme.
$t$	le temps

$T_S$	Energie cinétique.
$U_S$	Energie de déformation.
$\{q_i\}$	Coordonnées généralisées. Avec ( $i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \varphi$ ).
$[M]$	Matrice masse.
$[K]$	Matrice de rigidité.
$P_U$	Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale x.
$P_V$	Nombre de fonction de forme de la direction transversale y.
$P_W$	Nombre de fonction de forme de la direction transversale z.
$P_{\beta_x}$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe y.
$P_{\beta_y}$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe z.
$P_{\varphi}$	Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe x.
$J_{mn}^{\alpha\beta}$	Formes des intégrales.
$I_m :$	Le moment d'inertie massique.
$I_d :$	Le moment d'inertie diamétral.

$I_p$  : le moment d'inertie polaire de l'arbre.

$\varepsilon_{xx}$  Déformation longitudinale.

$\sigma_{xx}$  Contrainte normale.

$\gamma_{r\theta}, \gamma_{xr}, \gamma_{x\theta}$  Déformation angulaire.

$\tau_{r\theta}, \tau_{xr}, \tau_{x\theta}$  Contrainte tangentielle.

## Introduction Général

L'application des matériaux composites est devenue de plus en plus stratégique, pour raison de leur vaste domaine d'utilisation qui s'étend de la construction automobile, navale, militaire, sport, et à l'aéronautique. L'étude des dynamiques des arbres s'impose pour les raisons de leur utilisation dans ces domaines.

Les matériaux composites ont été introduits progressivement, dans le domaine de l'automobile, nous prenons l'exemple de la Citroën DS (France) 1956 [1] qui avait un toit en verre/époxy, ou encore l'Alpine Renault (France) 1986 avec une carrosserie en verre/polyester, Pour l'application navale par l'exemple de Catamaran Elf Aquitaine (France) 1983 ou la coque est en carbone/époxyde, le bâtiment Océanique anti-mines BAMO (France) 250 tonnes en verre/polyester.

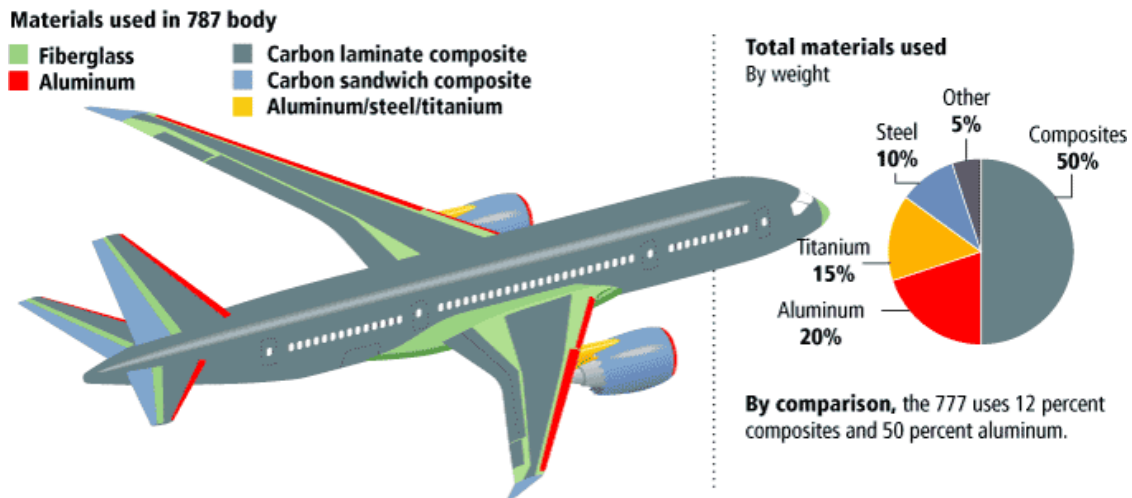
Et pour la coté des constructions aéronautiques, dans l'avion airbus A-310.300 le pourcentage des composites représente 13.8% de la masse de la structure, ou aussi le Boeing 787 ou les matériaux composites représente 50 % de la masse totale.

Les matériaux composites son très utiliser pour les avantages suivant, un coût de fabrication est moins de 50 % par rapport à la matériaux traditionnels, une très grande durée de vie, le moulage par assemblage de demi-coquilles sous pression pour les avions, l'allègement de véhicules de 1 kg induit un gain final de 1,5 kg du fait de l'allègement des organes mécaniques, la résistance à la corrosion des pièces composites, la facilité d'obtention des pièces complexes. [2]



**Figure 1.** Citroën DS 1956 pavillon en verre/époxy. [1]





**Figure 2.** Boeing 787 les matériaux composites constituant 50 % de la masse totale. [2]

L'arrivée des matériaux composites a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des machines industrielles (secteurs automobile, aéronautique et spatial) grâce à leurs qualités intrinsèques telles que la légèreté (associée à des caractéristiques de résistance élevée) et la bonne tenue à la corrosion. Le domaine d'utilisation des machines s'est élargi grâce au développement de matériaux nouveaux, élaborés à partir de nouvelles méthodes de conception et de fabrication.

Donc la maîtrise des caractéristiques des poutres en matériaux composites est nécessaire pour la conception des machines industrielles.

Dans ce travail nous avons fait une étude dynamique des arbres composites, ce travail à été divisé en six chapitres.

Dans le chapitre I nous avons fait une généralité sur les matériaux composites ou nous parlons sur la définition des constituants (matrices, fibre), et ces types, ensuite nous avons des exemples des matériaux composites.

Dans le chapitre II nous avons présenté la théorie des poutres et l'hypothèse de Timoshenko et la théorie des stratifiés, pour déterminer les expressions des énergies de déformation et cinétique de la poutre en matériaux composites.

Le chapitre IV est consacré à la formulation par la méthode des éléments finis avec sa version-p, pour déterminer les matrices masse et de rigidité.

Le quatrième chapitre présente l'organisation de la programmation avec ces différents sous programmes et étapes.

Le dernier chapitre est consacré à l'exploitation de la programmation.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale.

## Chapitre I Généralité sur les matériaux composites

### 1. Introduction

Les matériaux composites sont des matériaux à très hautes performances mécaniques, se développant aujourd'hui dans tous les domaines contrairement aux matériaux traditionnels,

Ils permettent d'augmenter la résistance mécanique et chimique et la durée de vie de l'équipement grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques, avec la résistance dans les températures élevées, ils offrent une meilleure isolation électrique et thermique, ... ils sont utilisés dans tous les domaines (automobile, aéronautique, électricité, équipements Industriels,...).

### 2. Historique des matériaux composites [3]

Les matériaux composites ont été connus dans tous les âges, les vendeurs d'Owens Corning Fiberglass Company ont commencé à vendre la fibre de verre aux États-Unis. La fibre de verre avait été faite, presque par accident en 1930, quand un ingénieur est devenu intrigué par une fibre qui a été formée pendant le processus d'application du lettrage à une bouteille à lait en verre.

Les vendeurs de fibre de verre se sont rendus compte que l'industrie aéronautique était, en particulier, un client probable pour ce nouveau type de matériel parce que les nombreuses petites et vigoureuses compagnies aériennes ont semblé créer de nouvelles conceptions d'avion et concepts innovateurs en fabriquant presque quotidiennement avec plusieurs de ces innovations exigeant de nouveaux matériaux.

D'autres applications pour l'avion ont aussitôt suivi. Plusieurs outils (des gabarits et des montages) pour former et tenir des sections et des ensembles d'avion, nécessaires pour être forts, légers, avec des formes courbées (compliquées). Les métaux disponibles n'ont pas pu facilement être réalisés avec ces critères et ainsi l'outillage phénolique renforcé par fibre de verre est devenu le matériau préféré pour ces applications de fabrication d'avion.

Le pas du développement des composites, déjà rapide, a été accéléré pendant la deuxième guerre mondiale dans le développement des avions, en conséquence, des composites plus largement

répandus dans l'outillage, mais l'utilisation des composites pour les pièces structurales et semi structurales était exploré et puis adopté.

Environ cette période (1942), le gouvernement des Etats-Unis est devenu intéressé que les approvisionnements en métaux pour l'avion ne peuvent pas être disponibles et ainsi ils ont instruit les ingénieurs à la base aérienne de Wright Patterson à inspecter tous les fabricants des pièces composites aux Etats-Unis et essayer de déterminer les meilleures conceptions de la fabrication des composites.

Certaines des applications orientées par la guerre ont été dirigées directement aux applications commerciales telles que les bateaux de polyester renforcés par les fibres de verre. En 1948, plus d'un millier de bateaux commerciaux avaient été faits.

Plusieurs méthodes de fabrication innovatrices ont été également développées vers la fin des années 40 et du début des années 50 du siècle dernier comprenant la pultrusion (par Goldsworthy), moulage au sac à vide, et l'enroulement filamentaire à grande échelle.

De nouvelles fibres ont été également introduites avec des filaments de bore devenant disponibles en 1965 et les fibres d'aramide (Kevlar®) ont offert commercialement par DuPont en 1971. Ces fibres avancées de performance, avec la fibre de verre et les fibres de carbone, ont mené aux développements énormes dans l'espace, l'armure (structurale et personnelle), l'équipement de sports, les dispositifs médicaux, et beaucoup d'autres applications.

Aujourd'hui, le marché de composites est très vaste. Le plus grand marché est toujours dans le transport, la construction, la marine, l'équipement électrique et électronique, le consommateur, et l'équipement d'application/business sont également de grands marchés.

### 3. Définition

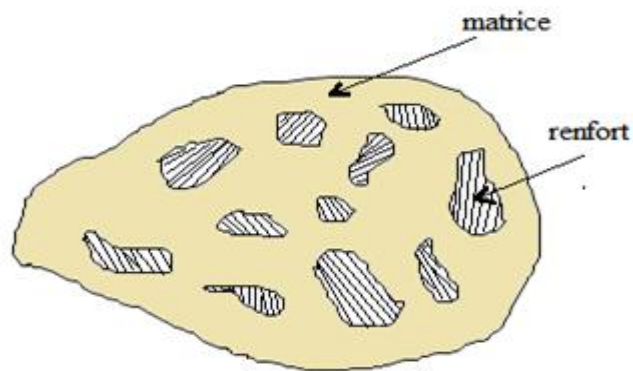
Un matériau composite (figure 1.1) consiste généralement d'une ou plusieurs phases discontinues appelée le renfort réparties dans une phase continue appelée la matrice. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue (Tableau 1).

Les propriétés des matériaux composites résultent

- Des propriétés des matériaux constitutants,
- De leur distribution géométrique,
- De leur interaction, etc.

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- La nature des constituants et leurs propriétés,
- La géométrie de renfort, sa distribution,
- La nature de l'interface matrice-renfort.



**Figure 1** matériau composite. [4]

**Tableau 1** exemple de matériaux composites. [4]

Type de composite	constituant	Domaines d'application
<b>1. composite à matrice organique</b>		
Papier, carton	Résine/charges/fibres Cellulosiques	Imprimerie, emballage, etc.
Panneaux de particules	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de fibres	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Toiles enduites	Résine souples/tissus	Sports, bâtiment
Matériaux d'étanchéité	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Pneumatiques	Caoutchouc/toile/acier	Automobile
Stratifiés	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Domaines multiples
Plastiques renforcés	Résines/microsphères	
<b>2. composite à matrice minérale</b>		
Béton	Ciment/sable/granulats	Génie civile
Composite carbone-carbone	Carbone/fibres de carbone	Aviation, espace, sports, biomédecine, etc.
Composite céramique	Céramique/fibres céramiques	Pièces thermo-mécaniques
<b>3. composite à matrice métallique</b>		
	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
<b>4. sandwiches</b>		
<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <span style="font-size: 2em;">{</span> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 0.5em;"> peaux  ames </div> </div>	Métaux, stratifiés, etc.  Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaine multiples

**A. Matrice:** Phase continue qui assure la cohésion, transfère et répartit les contraintes, protège des agressions extérieures les renforts et commande la mise en œuvre. (Figure 1.2)

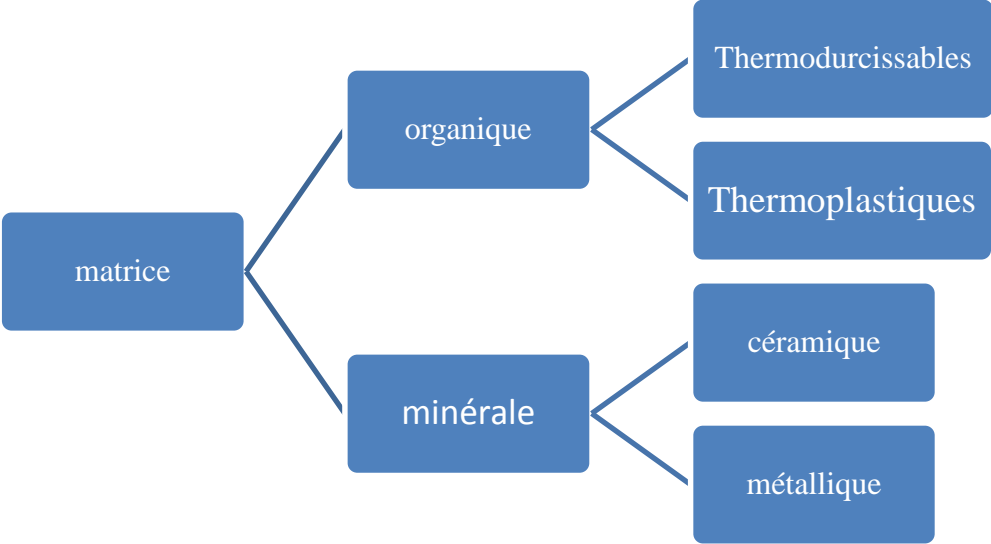


Figure 2 types de matrice. [5]

**B. Renfort** Phase discontinue et souvent filamentaire à très hautes caractéristiques mécaniques, qui assure le principal des contraintes mécaniques, du composite (résistance et rigidité, tenue aux chocs). (Figure 1.3)

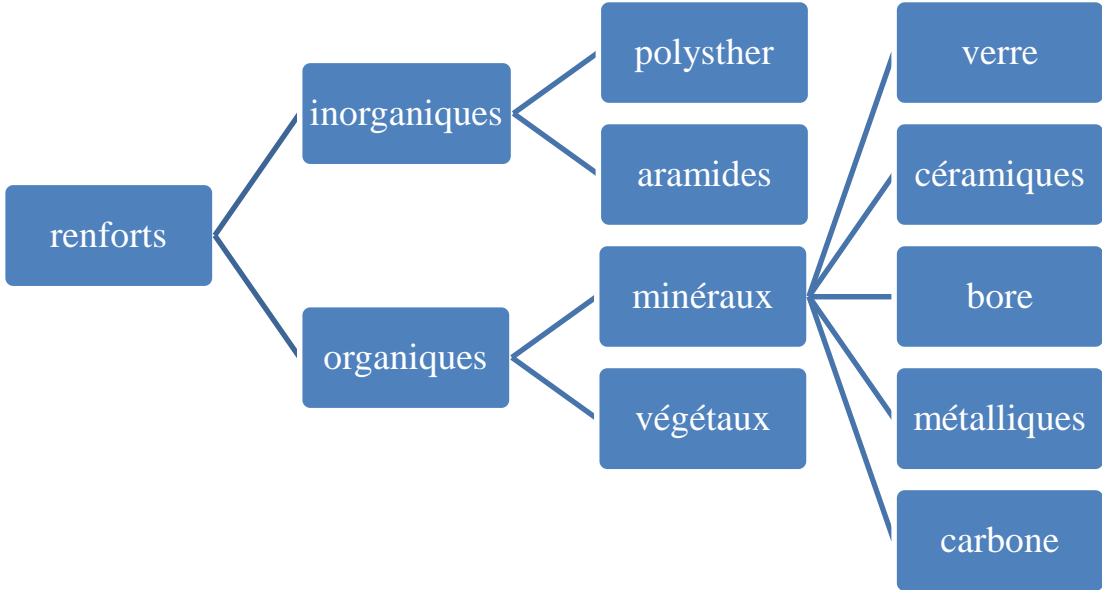


Figure 3 types de renfort. [5]

## C .Exemples sur les fibres et les matrices [3]

### C.1.Fibre de verre

Les fibres de verres sont bon rapport surface/poids. Cependant, l'ampleur de la surface les rend beaucoup plus vulnérables à des attaques chimiques. Les résistances du verre sont habituellement testées et considérées comme des fibres « vierges » qui ont juste été fabriquées. Les fibres les plus fraîches et les plus fines sont les plus résistantes et l'on pense que c'est dû au fait qu'il est plus facile aux fibres les plus fines d'être flexibles. Contrairement aux fibres de carbone, le verre peut supporter un grand allongement avant de rompre.



**Figure 4** Fibre de verre.

### C.2. Fibre de carbone

La fibre de carbone est constituée à 95% de carbone pur. Le carbone pur se trouve dans la nature sous forme de graphite ou de diamant. Ses propriétés mécaniques et dynamiques sont:

- Haute résistance
- Grand module d'élasticité
- Petite densité (léger)
- Presque pas de fatigue de la matière
- Presque pas de fluage
- Très bonne absorption des vibrations
- Résistance souvent plus grande que les métaux

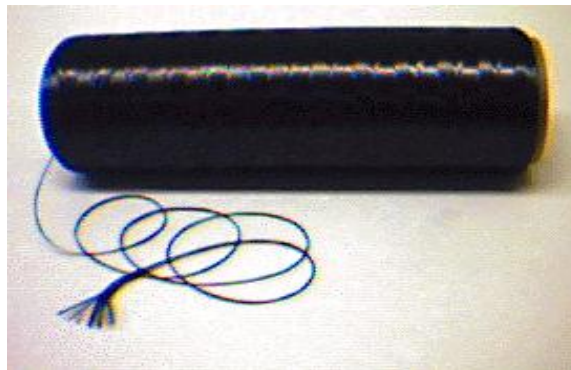
#### Exemples d'utilisations du carbone

- Pièce devant supporter de fortes contraintes (rigidité)
- Pièce de design
- Prototype
- Réparation





**Figure 5** Fibre de carbone.



**Figure 6** Fibre de graphite.

**C.3 Kevlar :** Le Kevlar est un polymère constitué de noyaux aromatiques (benzène) séparés par des groupements amides, d'où son appartenance au groupe des fibres d'aramides. Le Kevlar fut découvert en 1965 par des chercheurs de la société Du Pont. Il faut attendre 1971 pour que la première usine voit le jour et fabrique les premiers kilos de Kevlar.

### **Structure & Propriétés**

Le Kevlar est une fibre synthétique qui possède d'exceptionnelles qualités de résistance à la traction et à l'allongement. Seule la toile d'araignée propose de meilleures caractéristiques (3 fois plus résistante).



**Figure 7** Kevlar.

**C.4 Fibre de bore :** Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

**C.5 Epoxydes :** Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction :

- du durcissement à chaud ou à froid ;
- de la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).

Ses avantages sont :

- Tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue
- Faible retrait (1 à 2 %)
- Excellente adhérence sur fibres
- Auto-extinguibilité
- Mise en œuvre facile, sans solvant



**Figure 8** Matrice époxyde.

## Chapitre II Théorie des poutres de Timoshenko

## II-1. Introduction

L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul.

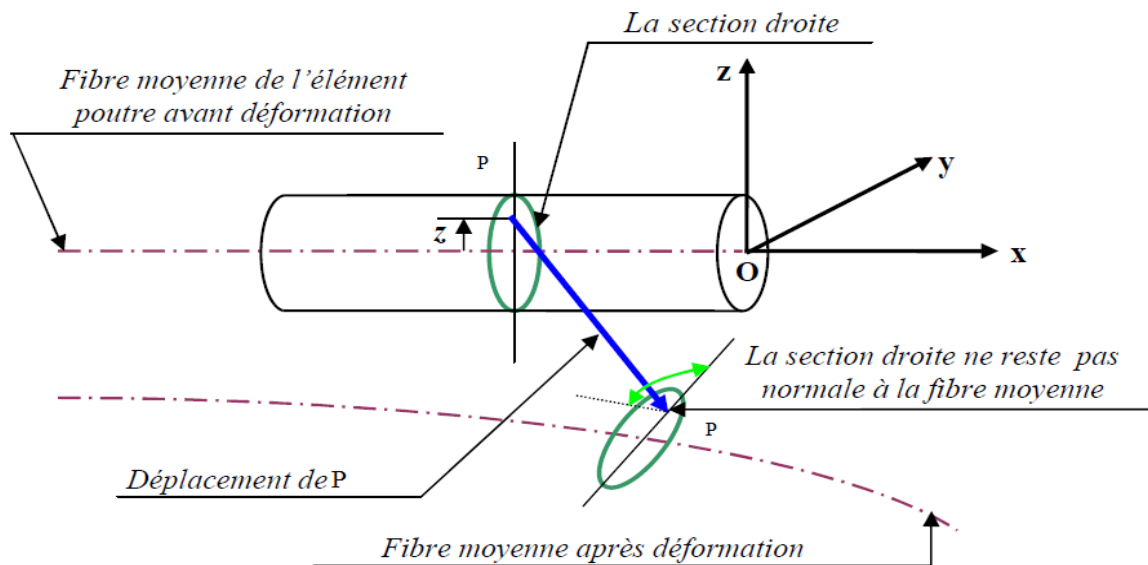


Figure 1 : Poutre avant et après déformation. [6]

## II-2. Equations cinématiques

Dans le modèle de Timoshenko, le champ de déplacement ( $U, V, W$ ) de l'élément poutre en fonction du temps est [3]

$$\begin{cases} U_x(x, y, z, t) = U(x, t) + z\beta_x(x, t) - y\beta_y(x, t) \\ U_y(x, y, z, t) = V(x, t) - z\varphi(x, t) \\ U_z(x, y, z, t) = W(x, t) + y\varphi(x, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec

$U(x, t)$  : Déplacement longitudinal.

$V(x, t)$  : Déplacement transversal horizontal.

$W(x, t)$  : Déplacement transversal vertical.

$z\beta_x(x, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe  $z$ .

$-y\beta_y(x, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section droite due à la flexion et au cisaillement suivant l'axe  $y$ .

$\beta_x(x, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe  $y$ .

$\beta_y(x, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe  $z$ .

$-z\varphi(x, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe  $z$ .

$y\varphi(x, t)$  : Déplacement dû à la rotation de la section due à la torsion suivant l'axe  $y$ .

$\varphi(x, t)$  : Rotation de la section droite autour de l'axe  $x$ .

### II.2.1. Relation déformation –déplacement

Les relations déformation-déplacement sont les suivant :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

Avec :  $(i, j = 1, 2, 3)$  ;  $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ ;  $(U_1 = U, U_2 = V, U_3 = W)$

La relation (2.2) sous forme développée est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le champ des déformation réduit du champ des déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - y \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( -\beta_y + \frac{\partial V}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \beta_x + \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

On a :  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$  et  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$

Le tenseur de déformation dans le système des coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$  illustré dans la figure 2.3 est : [7]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{xr} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & -2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 2\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

La relation (2.5) sous forme développée est :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + r \sin \theta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r \cos \theta \frac{\partial \beta_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} (\beta_y \sin \theta + \beta_x \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial V}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial x} + r \frac{\partial \varphi}{\partial x})$$

$$\varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} (\beta_x \sin \theta - \beta_y \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial W}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (2.6)$$

On a :  $\varepsilon_{xr} = \varepsilon_{rx}$  et  $\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{\theta x}$

Donc le tenseur des déformations dans la couche  $n$  en un point  $P$  du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{rx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

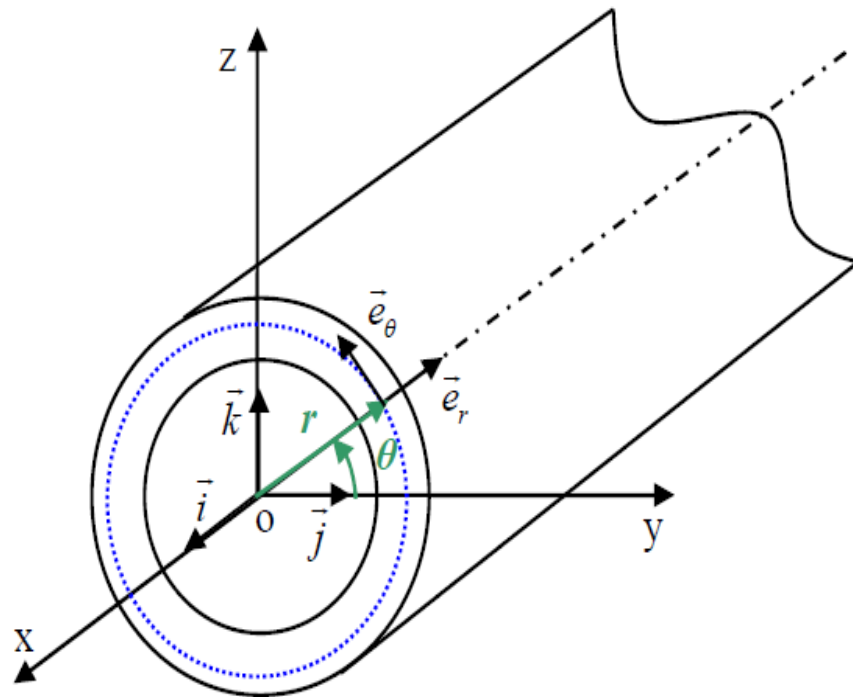


Figure 2 : Système de coordonnées cylindriques. [3]

### II.2.2. Relation contraintes –déformations

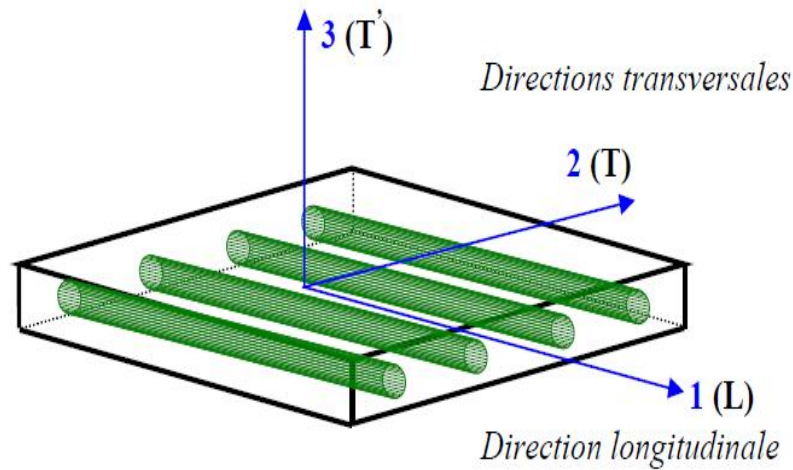
La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme

$$[\sigma] = [Q]\{\varepsilon\} \quad (2.8)$$

Cette loi, généralement appelée la loi de Hooke généralisée

Dans la base principale (1, 2, 3) illustrée dans la figure 3 comme suit [4] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$



**Figure 3** : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié [3].

Les contraintes dans la base de référence  $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  montrée dans la figure 4 sont :

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \quad (2.10)$$

Où  $[\bar{Q}]$  est la matrice des coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié  $(\vec{i}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , et  $[T]$  c'est la matrice de changement de base des contraintes exprimée en fonction de l'angle  $\eta$  appelé l'orientation des fibres [4] :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Avec  $n = \sin \theta$  et  $m = \cos \theta$

Les contraintes dans le système des coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$  dans la couche  $n$  illustrées dans la figure 5 s'expriment suivant la relation suivante [4] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{63} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

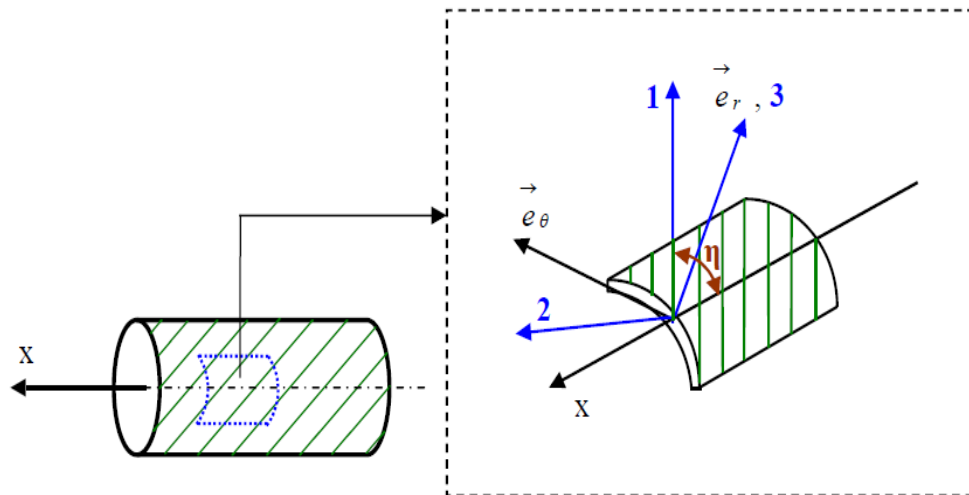


Figure 4 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ) du stratifié. [3]

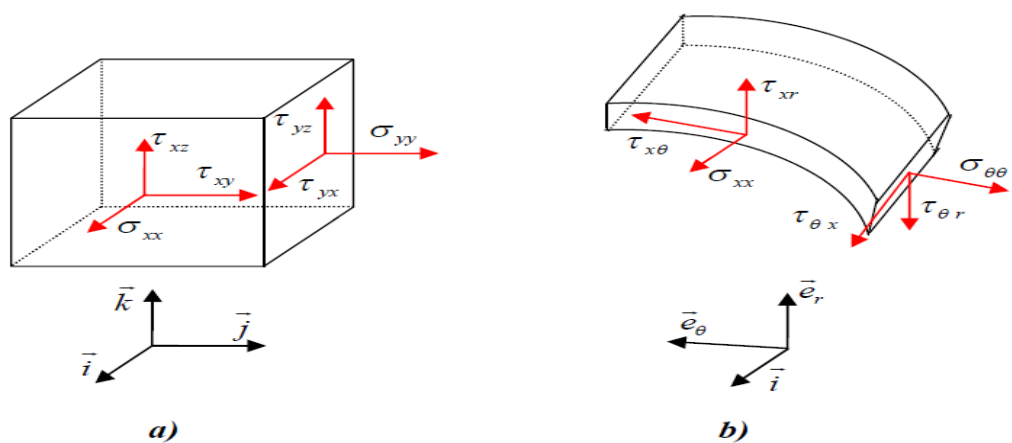


Figure 5: Composantes des vecteurs des contraintes ; [3]

- a) dans le système d'axes (x, y, z).
- b) dans le système d'axes (x, r,  $\theta$ ).



Donc les contraintes exprimées dans la relation (2.12) sous forme simplifiée sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & 0 & \bar{Q}_{66} \\ 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xr} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Et qu'on peut les écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{Q}_{11i} \varepsilon_{xx} + K_s \bar{Q}_{16i} \gamma_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} &= K_s \bar{Q}_{16i} \varepsilon_{xx} + K_s \bar{Q}_{66i} \gamma_{x\theta} \\ \tau_{xr} &= K_s \bar{Q}_{55i} \gamma_{xr} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où  $K_s$  est le facteur de correction de cisaillement.

Le tenseur des contraintes dans la couche  $n$  en un point P du stratifié en fonction des coordonnées cylindriques est

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ \tau_{rx} & 0 & 0 \\ \tau_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux sont [4] :

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{LT}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} = G_{LT} \\ Q_{44} = G_{TT} \\ Q_{55} = G_{LT} \end{cases} \quad (2.16)$$

Avec :

$$\begin{cases} (E_L; E_T; E_T) = (E_1; E_2; E_3) \\ (\nu_{LT}; \nu_{LT}; \nu_{TT}) = (\nu_{12}; \nu_{13}; \nu_{23}) \\ (G_{LT}; G_{LT}; G_{TT}) = (G_{12}; G_{13}; G_{23}) \\ E_T = E_T \\ \nu_{LT} = \nu_{LT} \\ G_{LT} = G_{LT} \end{cases} \quad (2.17)$$

Le plan transverse repéré par les directions 2 et 3 notées également T et  $T'$ , ces directions étant équivalentes.

$E_L ; \nu_{LT}$  : Module de Young et coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale.

$E_T ; \nu_{LT} ; \nu_{TT}$  : Module de Young et coefficient de Poisson mesurés dans un essai de traction transversale.

$G_{LT} ; G_{TT}$  : Modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transversal.

Les coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches sont exprimés en fonction de l'angle  $\eta$  fait par la direction principale 1 avec la direction x. [4] :

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = Q_{11} \sin^4 \eta + Q_{22} \cos^4 \eta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \eta \cos^2 \eta \\ \bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \eta \cos^3 \eta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \eta \cos \eta \\ \bar{Q}_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \eta \cos^2 \eta + Q_{66}(\sin^4 \eta + \cos^4 \eta) \\ \bar{Q}_{55} = Q_{44} \sin^2 \eta + Q_{55} \cos^2 \eta \end{cases} \quad (2.18)$$

### II-3. Energie de déformation

L'énergie de déformation de la poutre selon l'hypothèse de Timoshenko est donnée par l'expression suivante

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{ij}]^T [\varepsilon_{ij}] dv \quad (2.19)$$

En remplaçant (2.7) et (2.15) dans (2.19) on trouve :

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + 2\tau_{xr} \varepsilon_{xr} + 2\tau_{x\theta} \varepsilon_{x\theta}) dv \quad (2.20)$$

Qu'on peut l'écrire de la façon suivante :

$$U_s = \int_V \left\{ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + r \sin \theta \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - r \cos \theta \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \tau_{xr} \left( \sin \theta \beta_x - \cos \theta \beta_y + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{x\theta} \left( \cos \theta \beta_x + \sin \theta \beta_y - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} + r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} dv \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) sous forme développée prend la forme : [3]

$$\begin{aligned}
U_S = & \frac{1}{2} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} K_S B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2} K_S A_{16} \left[ 2 \int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int_0^L \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx \right] + \frac{1}{2} k_s (A_{55} + \\
& A_{66}) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \beta_x^2 dx + \int_0^L \beta_y^2 dx + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W}{\partial x} dx - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V}{\partial x} dx \right] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Avec

$$A_{11} = \pi \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{11i} (r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

$$A_{55} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{55i} (r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

$$A_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{66i} (r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

$$A_{16} = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{16i} (r_{i+1}^3 - r_i^3) \quad (2.23)$$

$$B_{11} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{11i} (r_{i+1}^4 - r_i^4)$$

$$B_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{66i} (r_{i+1}^4 - r_i^4)$$

Où  $n$  est le nombre des couches et  $i$  c'est l'indice des couches.

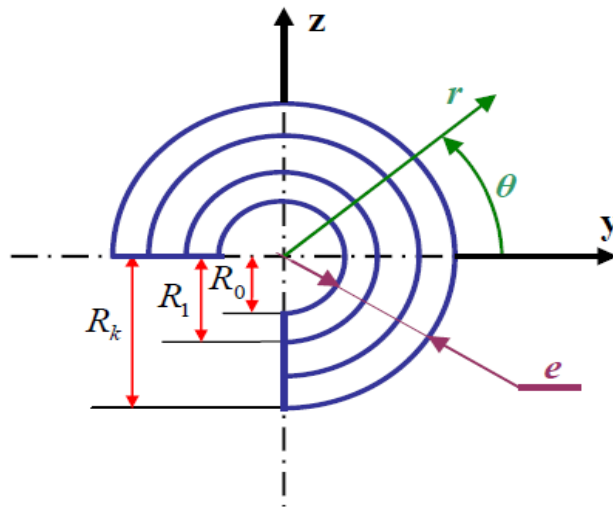


Figure 6 :  $n$ -couches de l'arbre en matériaux composites. [3]

#### II-4. Expression de l'énergie cinétique

$$T_S = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\vec{R}}_{p/0} \cdot \dot{\vec{R}}_{p/0}) dv \quad (2.24)$$

L'énergie cinétique de la poutre est donnée par l'expression suivante [7]

$$T_S = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\vec{R}}_{p/0} \cdot \dot{\vec{R}}_{p/0}) dv = \frac{1}{2} \int_0^L \{ I_m (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) + I_p (\dot{\varphi}^2) \} dx \quad (2.25)$$

Où

$\rho_n$  : la masse volumique

$I_m$  : Le moment d'inertie massique.

$I_d$  : Le moment d'inertie diamétral.

$I_p$  : le moment d'inertie polaire de l'arbre.

Avec

$$\begin{aligned} I_m &= \pi \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^2 - r_i^2) \\ I_d &= \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^4 - r_i^4) \\ I_p &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^4 - r_i^4) \end{aligned} \quad (2.26)$$

#### II-5. Equations du mouvement

Pour la détermination des équations différentielles du mouvement nous appliquons les équations de Lagrange : [3]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_i} + \frac{\partial U_S}{\partial q_i} = 0 \quad (2.27)$$

Avec :

$T_S$  : l'énergie cinétique de la poutre.

$U_S$  : Energie de déformation de la poutre.

$\{q_i\}$  : Coordonnées généralisées. Avec ( $i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \varphi$ ).

De (2.27) on sera :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_i} = [M] \{\ddot{q}\} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial q_i} = [K] \{q\} \quad (2.29)$$

Donc l'équation (2.27) devient :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad (2.30)$$

Avec :

[M] : Matrice masse de la poutre.

[K] : Matrice de rigidité de la poutre.

## Chapitre III Formulation par la méthode des éléments finis hiérarchiques

### III -1.Introduction

La détermination du comportement statique de structures réelles ne peut s'effectuer que numériquement à cause de la complexité des géométries et des conditions aux limites.

Dans ce cas la méthode des éléments finis hiérarchiques est utilisée, son concept est de convertir un problème avec un nombre infinis de degrés liberté en un autre problème de nombre finis de degrés de liberté, dont la résolution est beaucoup plus simple. [8]

### III -2.formulation par la méthode des éléments finis hiérarchiques

#### III -2.1.choix de l'élément

On utilise la méthode des éléments finis hiérarchiques avec des fonctions de forme trigonométrique [9]

Une poutre est modélisée par un élément poutre hiérarchique représenté sur la figure 1 à deux nœuds 1 et 2.

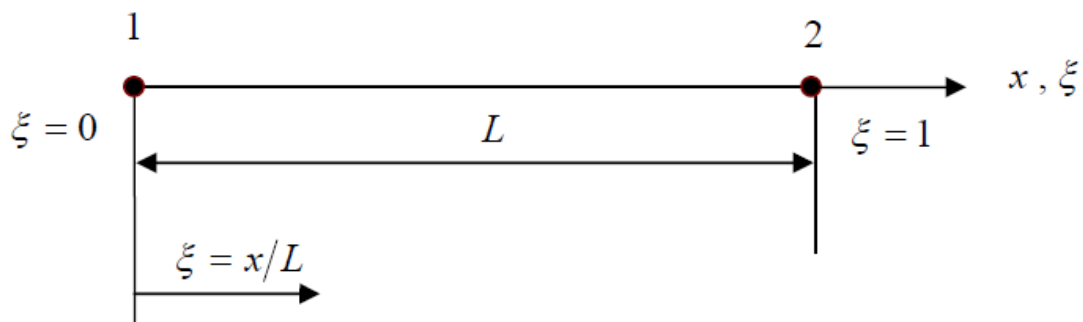


Figure 1 Elément poutre à deux nœuds.

Les coordonnées locales sont liées aux coordonnées adimensionnelles par la relation :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{Avec} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3.1)$$

Le groupe des fonctions de forme pour les déplacements U, V, W et les rotations

$\beta_x, \beta_y, \varphi$  est donné par

$$[f_1, f_2, \dots, f_{r+2}] \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} f_1 = 1 - \xi \\ f_2 = \xi \\ f_{r+2} = \sin(\delta_r \xi) \\ \delta_r = r\pi; \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Les fonctions (F1, F2) sont ceux de la méthode des éléments finis nécessaires pour décrire les déplacements nodaux de l'élément, alors que les fonctions trigonométriques  $f_{r+2}$  ne contribuent que dans le domaine de déplacement interne et ne portent pas atteinte déplacements nodaux. La particularité la plus intéressante des fonctions trigonométriques est qu'ils offrent une grande stabilité numérique. La poutre est modélisé par un seul élément appelé élément fini hiérarchique. [3]

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par

$$\{q\} = \{q_U, q_V, q_W, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_\varphi\}^T \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \{q_U\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{P_U}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_V\} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{P_V}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_W\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{P_W}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_x}\} = \{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \dots, \beta_{x_{P_{\beta_x}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_{\beta_y}\} = \{\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}, \dots, \beta_{y_{P_{\beta_y}}}\}^T \exp(j\omega t) \\ \{q_\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{P_\varphi}\}^T \exp(j\omega t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Et Le champ déplacement d'un point de la poutre est donné par

$$\begin{cases} U = [N_U]\{q_U\} = \sum_{m=1}^{P_U} x_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ V = [N_V]\{q_V\} = \sum_{m=1}^{P_V} y_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ W = [N_W]\{q_W\} = \sum_{m=1}^{P_W} z_m(t) \cdot f_m(\xi) \\ \beta_x = [N_{\beta_x}]\{q_{\beta_x}\} = \sum_{m=1}^{P_{\beta_x}} \beta_{xm}(t) \cdot f_m(\xi) \\ \beta_y = [N_{\beta_y}]\{q_{\beta_y}\} = \sum_{m=1}^{P_{\beta_y}} \beta_{ym}(t) \cdot f_m(\xi) \\ \varphi = [N_\varphi]\{q_\varphi\} = \sum_{m=1}^{P_\varphi} \varphi_m(t) \cdot f_m(\xi) \end{cases} \quad (3.6)$$

Et il peut être exprimé

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \varphi \end{Bmatrix} = [N]\{q\} \quad (3.7)$$

Où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme.

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_U] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_V] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [N_W] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_\varphi] \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme.

$$[N_{U,V,W,\beta_x,\beta_y,\varphi}] = [f_1 f_2 \dots f_{P_U, P_V, P_W, P_{\beta_x}, P_{\beta_y}, P_\varphi}] \quad (3.9)$$

Avec

$P_U$  : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale x.



$P_V$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale y.

$P_W$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale z.

$P_{\beta_x}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe y.

$P_{\beta_y}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe z.

$P_\varphi$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe x.

### III -2-2. Détermination de la matrice de rigidité [K]

D'après les équations (2.22) et (2.23) la forme de l'énergie de déformation est:

$$U_S = \frac{1}{2} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} K_S B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K_S A_{16} \left[ 2 \int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int_0^L \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} dx \right] + \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \beta_x^2 dx + \int_0^L \beta_y^2 dx + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W}{\partial x} dx - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V}{\partial x} dx \right] \quad (3.10)$$

L'expression de l'énergie de déformation en coordonnées adimensionnelles est donnée comme suit :

$$U_S = \frac{1}{2L} A_{11} \int_0^L \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2L} B_{11} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \int_0^L \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] + \frac{1}{2L} K_S B_{66} \int_0^L \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} K_S A_{16} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \int_0^L \beta_y \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} d\xi - \int_0^L \beta_x \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} d\xi \right] + \frac{1}{2} k_s (A_{55} + A_{66}) \left[ \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + L \int_0^L \beta_x^2 d\xi + L \int_0^L \beta_y^2 d\xi + 2 \int_0^L \beta_x \frac{\partial W}{\partial \xi} d\xi - 2 \int_0^L \beta_y \frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.11)$$

En remplace les matrices des fonctions de forme  $[N_{U,V,W,\beta_x,\beta_y,\varphi}]$  dans l'expression (3.11)

On trouve : [3]

$$\begin{aligned}
U_S = & \frac{1}{2L} A_{11} \int_0^1 \{q_U\}^T [N'_U]^T [N'_U] \{q_U\} d\xi + \frac{1}{2L} B_{11} \left[ \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi \right] + \\
& \frac{1}{2L} K_S B_{66} \int_0^1 \{q_\varphi\}^T [N'_\varphi]^T [N'_\varphi] \{q_\varphi\} d\xi + \frac{1}{2} K_S A_{16} \left[ \frac{2}{L} \int_0^1 \{q_\varphi\}^T [N'_\varphi]^T [N'_U] \{q_U\} d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi - \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi - \right. \\
& \left. \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_V\}^T [N'_V]^T [N'_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi - \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_W\}^T [N'_W]^T [N'_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi \right] + \frac{1}{2} K_S (A_{55} + \\
& A_{66}) \left[ \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_V\}^T [N'_V]^T [N'_V] \{q_V\} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \{q_W\}^T [N'_W]^T [N'_W] \{q_W\} d\xi + \right. \\
& \left. L \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} d\xi + L \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} d\xi + \right. \\
& \left. 2 \int_0^1 \{q_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N'_W] \{q_W\} d\xi - 2 \int_0^1 \{q_{\beta_y}\}^T [N_{\beta_y}]^T [N'_V] \{q_V\} d\xi \right] \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Où

$$[N'_i] = \frac{\partial [N_i]}{\partial \xi} \quad \text{avec } (i = U, V, W, \beta_x, \beta_y, \varphi) \quad (3.13)$$

De la formule (2.27), on trouve la forme de la matrice de rigidité [3]

$$\frac{\partial U_S}{\partial \{q_U\}} = \left[ \frac{1}{L} A_{11} \int_0^1 [N'_U]^T [N'_U] d\xi \right] \{q_U\} + \left[ \frac{1}{L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_\varphi]^T [N'_U] d\xi \right] \{q_\varphi\} = [K_U] \{q_U\} + [K_{U\varphi}] \{q_\varphi\} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial \{q_V\}} = & \left[ \frac{1}{L} K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_V]^T [N'_V] d\xi \right] \{q_V\} - \left[ \frac{1}{2L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_V]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} - \left[ K_S (A_{55} + \right. \\ & \left. A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N'_V] d\xi \right] \{q_{\beta_y}\} = [K_V] \{q_V\} + [K_{V\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} + [K_{V\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial \{q_W\}} = & \left[ \frac{1}{L} K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_W]^T [N'_W] d\xi \right] \{q_W\} + \left[ K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N'_W] d\xi \right] \{q_{\beta_x}\} - \\ & \left[ \frac{1}{2L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_W]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] \{q_{\beta_y}\} = [K_W] \{q_W\} + [K_{W\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} + [K_{W\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial \{q_{\beta_x}\}} = & \left( \left[ \frac{1}{L} B_{11} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] + \left[ L K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_x}\} - \\ & \left[ \frac{1}{2L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N'_V] d\xi \right] \{q_V\} + \left[ K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_W]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{q_W\} + \\ & \left( \left[ \frac{1}{2} K_S A_{16} \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_x}] d\xi \right] - \left[ \frac{1}{2} K_S A_{16} \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_y}\} = [K_{\beta_x}] \{q_{\beta_x}\} + \\ & [K_{V\beta_x}]^T \{q_V\} + [K_{W\beta_x}]^T \{q_W\} + [K_{\beta_x\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} \quad (3.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_S}{\partial \{q_{\beta_y}\}} = & \left( \left[ \frac{1}{L} B_{11} \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N'_{\beta_y}] d\xi \right] + \left[ L K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_y}\} - \\
& \left[ \frac{1}{2L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_V]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \{q_V\} + \left[ K_S (A_{55} + A_{66}) \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N'_W] d\xi \right] \{q_W\} + \\
& \left( \left[ \frac{1}{2} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_x}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] - \left[ \frac{1}{2} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_{\beta_y}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \right) \{q_{\beta_x}\} = [K_{\beta_y}] \{q_{\beta_y}\} + \\
& [K_{V\beta_y}]^T \{q_V\} + [K_{W\beta_y}]^T \{q_W\} + [K_{\beta_x\beta_y}]^T \{q_{\beta_x}\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial \{q_\varphi\}} = \left[ \frac{1}{L} B_{66} \int_0^1 [N'_\varphi]^T [N'_\varphi] d\xi \right] \{q_\varphi\} + \left[ \frac{1}{L} K_S A_{16} \int_0^1 [N'_U]^T [N'_\varphi] d\xi \right] \{q_U\} = [K_\varphi] \{q_\varphi\} + [K_{U\varphi}]^T \{q_U\} \tag{3.19}$$

Donc on peut écrire la matrice rigidité  $[K]$  sous la forme suivante

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{UU}] & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{U\varphi}] \\ 0 & [K_{VV}] & 0 & [K_{V\beta_x}] & [K_{V\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & [K_{WW}] & [K_{W\beta_x}] & [K_{W\beta_y}] & 0 \\ 0 & [K_{V\beta_x}]^T & [K_{W\beta_x}]^T & [K_{\beta_x\beta_x}] & [K_{\beta_x\beta_y}] & 0 \\ 0 & [K_{V\beta_y}]^T & [K_{W\beta_y}]^T & [K_{\beta_x\beta_y}]^T & [K_{\beta_y\beta_y}] & 0 \\ [K_{U\varphi}]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

### III -2-3. Détermination de la matrice masse $[M]$

D'après l'équation de l'énergie cinétique de l'élément poutre donnée par l'équation (2.25)

Sous forme simplifiée on a :

$$T_S = \frac{1}{2} \int_0^L \{ I_m (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + I_d (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) + I_p \dot{\varphi}^2 \} dx \tag{3.21}$$

L'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en coordonnées adimensionnelles et après l'introduction des fonctions de forme est donnée comme suit : **[3]**

$$\begin{aligned}
T_S = & \frac{1}{2} I_m L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_U\}^T [N_U]^T [N_U] \{\dot{q}_U\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_V\}^T [N_V]^T [N_V] \{\dot{q}_V\} d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^1 \{\dot{q}_W\}^T [N_W]^T [N_W] \{\dot{q}_W\} d\xi \right] + \frac{1}{2} I_d L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_{\beta_x}\}^T [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] \{\dot{q}_{\beta_x}\} d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^1 \{\dot{q}_{\beta_y}\}^T [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] \{\dot{q}_{\beta_y}\} d\xi \right] + \frac{1}{2} I_p L \left[ \int_0^1 \{\dot{q}_\varphi\}^T [N_\varphi]^T [N_\varphi] \{\dot{q}_\varphi\} d\xi \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

De la formule (2.27), on trouve les formes de la matrice masse de la poutre

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_U} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_U} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_U]^T [N_U] d\xi \right] \{\dot{q}_U\} = [M_U] \{\ddot{q}_U\} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_V} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_V} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_V]^T [N_V] d\xi \right] \{\dot{q}_V\} = [M_V] \{\ddot{q}_V\} \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_W} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_W} = \left[ I_m L \int_0^1 [N_W]^T [N_W] d\xi \right] \{\dot{q}_W\} = [M_W] \{\ddot{q}_W\} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_{\beta_x}} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_{\beta_x}} = \left[ I_d L \int_0^1 [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] d\xi \right] \{\dot{q}_{\beta_x}\} = [M_{\beta_x}] \{\ddot{q}_{\beta_x}\} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_{\beta_y}} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_{\beta_y}} = \left[ I_d L \int_0^1 [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] d\xi \right] \{\dot{q}_{\beta_y}\} = [M_{\beta_y}] \{\ddot{q}_{\beta_y}\} \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_\varphi} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_\varphi} = \left[ I_p L \int_0^1 [N_\varphi]^T [N_\varphi] d\xi \right] \{\dot{q}_\varphi\} = [M_\varphi] \{\ddot{q}_\varphi\} \quad (3.28)$$

Donc on peut écrire la matrice masse [M] sous la forme suivante

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{UU}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_{VV}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{WW}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_x\beta_x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_y\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [M_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

#### III-4. Forme finale des équations du mouvement

Après la discrétisation par la méthode des éléments finis et l'application des équations de Lagrange on a le système différentiel suivant

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (3.30)$$

Le système obtenu est linéaire [M] et [K] sont la masse de l'élément et matrice de rigidité finie hiérarchique classique.

Donc

$$\begin{bmatrix} [M_{UU}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M_{VV}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{WW}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_x\beta_x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [M_{\beta_y\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [M_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_U \\ \ddot{q}_V \\ \ddot{q}_W \\ \ddot{q}_{\beta_x} \\ \ddot{q}_{\beta_y} \\ \ddot{q}_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{UU}] & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{U\varphi}] \\ 0 & [K_{VV}] & 0 & [K_{V\beta_x}] & [K_{V\beta_y}] & 0 \\ 0 & 0 & [K_{WW}] & [K_{W\beta_x}] & [K_{W\beta_y}] & 0 \\ 0 & [K_{V\beta_x}]^T & [K_{W\beta_x}]^T & [K_{\beta_x\beta_x}] & [K_{\beta_x\beta_y}] & 0 \\ 0 & [K_{V\beta_y}]^T & [K_{W\beta_y}]^T & [K_{\beta_x\beta_y}]^T & [K_{\beta_y\beta_y}] & 0 \\ [K_{U\varphi}]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_U \\ q_V \\ q_W \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

On peut écrire les équations (3.4) et (3.5) de façon suivante

$$\{q\} = \{q_U, q_V, q_W, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_\varphi\}^T = \{w\} \exp(j\omega t) \quad (3.32)$$

$$\begin{Bmatrix} \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{P_U}\}^T \\ \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{P_V}\}^T \\ \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{P_W}\}^T \\ \{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \dots, \beta_{x_{P_{\beta_x}}}\}^T \\ \{\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}, \dots, \beta_{y_{P_{\beta_y}}}\}^T \\ \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{P_\varphi}\}^T \end{Bmatrix} \exp(j\omega t) \quad (3.33)$$

Donc de l'équation (3.33), le système différentiel (3.30) sera : **[3]**

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{w\} = 0 \quad (3.34)$$

Où  $\omega$  est la pulsation propre du système et  $\{w\}$  le vecteur propre correspondant.

**Chapitre IV Organisation de la programmation****IV -1.Introduction**

C'est un programme fait par le logiciel **MATCAD v14** a pour but de déterminer les fréquences propres d'une poutre en matériaux composites suivant les différentes conditions aux limites et différents paramètres physiques et géométriques.

Et pour l'exécution de notre programme en utilise un micro-ordinateur composé d'un processeur Intel (R) celeron (R) CPU 847 @1.10GHZ avec une mémoire de capacité de 4.00 Go (RAM).

Ce programme comporte

- Un fichier de données.
- Le programme de calcul.
- Un fichier de sortie.

**IV -2. Schéma de calcul**

La figure 1 représente les différentes étapes de programmation, ces étapes sont les suivantes

1. Lecture des données des paramètres élémentaires nécessaires physiques et géométriques du la poutre,
2. Introduction des conditions aux limites,
3. Formation du système d'équations algébrique,
4. Formation des matrices : [K] et [M],
5. calcul des fréquences propres.

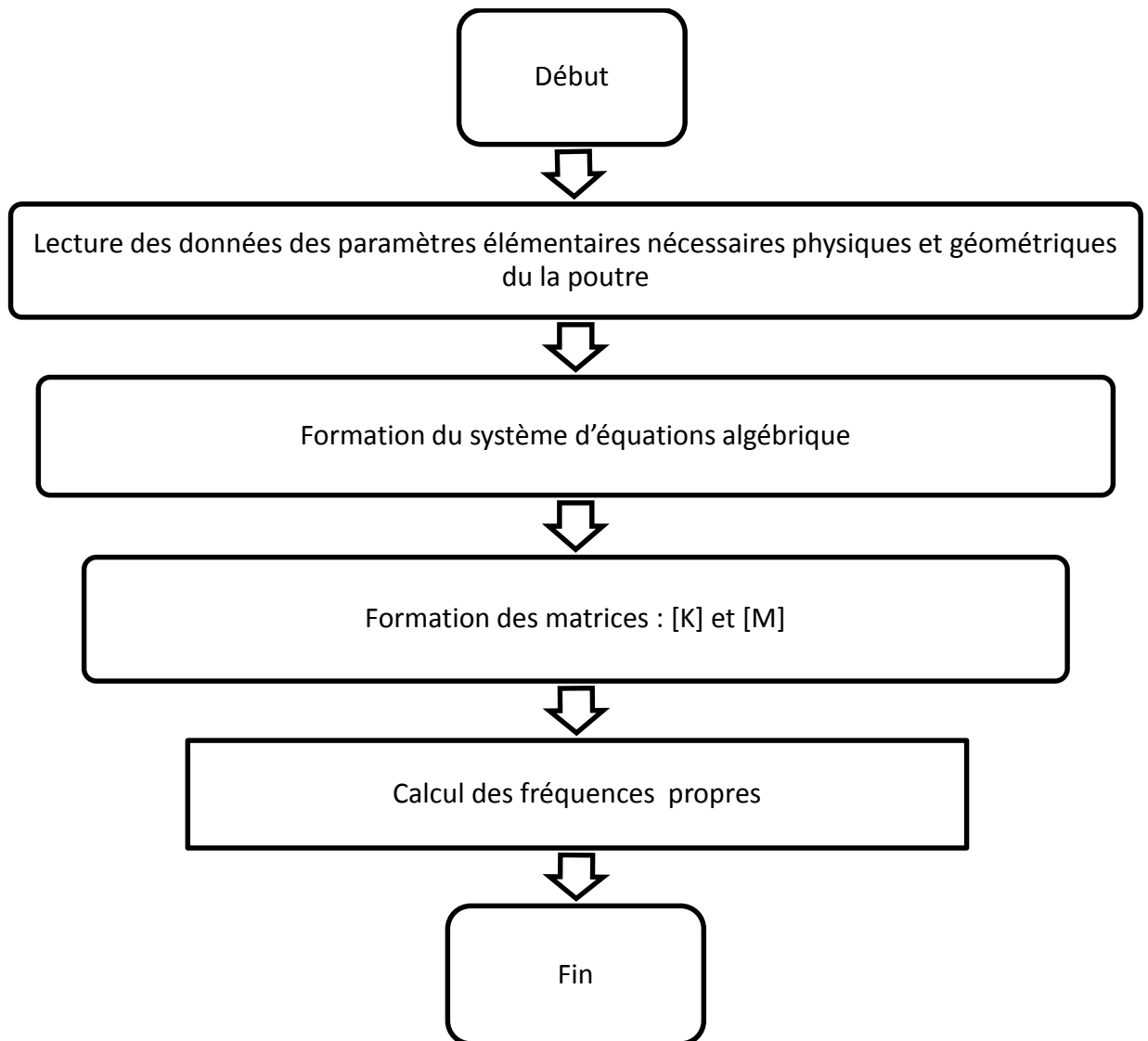


Figure 1.3 : Schéma de calcul.

### IV -3. Description du programme

#### A-Fichier de données

Toutes les données nécessaires pour le calcul des fréquences (paramètres élémentaires physiques et géométriques de la poutre en matériaux composites) sont introduites.

Ces données sont

E : module d'Young

$\nu$  : coefficients de poisson

$G$  : Module de cisaillement

$\rho$  : Masse volumique

$N_c$  : Nombre des couches de l'arbre.

$L$  : Longueur de l'arbre.

$D$  : diamètre de l'arbre

$K_s$  : est le facteur de correction de cisaillement

$P_U$  : Nombre de fonction de forme dans la direction longitudinale  $x$ .

$P_V$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale  $y$ .

$P_W$  : Nombre de fonction de forme de la direction transversale  $z$ .

$P_{\beta_x}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $y$ .

$P_{\beta_y}$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $z$ .

$P_\varphi$  : Nombre de fonction de forme de la direction de rotation autour de l'axe  $x$ .

## B-programme de calcul

Le programme "**poutre en composite**" permet de calculer les fréquences propres d'une poutre en matériaux composites dans le cas d'une vibration libre.

## C-Formation des matrices

Ce programme permet de calculer les matrices de masse, et de rigidité,

Ces matrices globales données par l'équation (3.34) sont

- La matrice masse  $[M]$  est calculée à partir des équations (3.29).
- La matrice de rigidité  $[K]$  est calculée à partir des équations (3.20).

## D- calcul les valeurs propres

Dans le cas des vibrations libres, le programme permet de calculer

- Les fréquences propres  $\omega$ .



## Chapitre V résultats et interprétations

### V -1.Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre une analyse des vibrations libres d'une poutre en matériaux composites. La première partie de ce chapitre met en évidence la validité du programme développé, ainsi une étude comparative est faite avec des travaux de différents auteurs. La deuxième partie en augmentant les nombres de fonctions de forme hiérarchiques pour un élément. L'étude de l'influence de paramètres physiques et géométriques sur les fréquences propres de la poutre en matériaux composites. [3]

Dans ce chapitre nous exposons les résultats obtenus par notre programme pour un exemple d'application.

Dans ce cas en prend

$$P_U = P_V = P_W = P_{\beta_x} = P_{\beta_y} = P_{\phi} = P$$

### V -2. Interprétation des résultats

Dans notre exemple, les propriétés physiques de poutre en Bore- époxyde sont définies dans le Tableau 1, le facteur de correction de cisaillement  $k_s$  est 0.503, et les paramètres géométriques sont :  $L = 2.47$  m,  $D = 12.69$  cm,  $e = 1.321$  mm, 10 couches à des épaisseurs égales ( $90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 6^\circ, 90^\circ$ ). Dans cet exemple poutre en Bore - époxyde est modélisé par un seul élément.

**Tableau 1** Propriétés d'un matériau composite. [7]

	<b>Bore-epoxyde</b>
$E_{11}$ (GPa)	211.0
$E_{22}$ (GPa)	24.1
$E_{33}$ (GPa)	211.0
$G_{12}$ (GPa)	6.9
$G_{23}$ (GPa)	6.9
$G_{13}$ (GPa)	6.9
$\nu_{12}$	0.36
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1967.0

**Tableau 2** propriétés d'un matériau isotrope.

	<b>Acier</b>
$E_{11}$ (GPa)	210
$E_{22}$ (GPa)	210
$E_{33}$ (GPa)	210
$G_{12}$ (GPa)	80
$G_{23}$ (GPa)	80
$G_{13}$ (GPa)	80
$\nu_{12}$	0.3
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7850

### V -2.1.convergence

Les résultats obtenus seront validés avec des résultats de la littérature, d'une poutre **E-L** (encastree-libre) :

#### V-2-1.1. Les Fréquences propres dans le cas d'un matériau isotrope

$$\theta = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

**Tableau 3** Convergence des fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'une poutre (E-L).

<b>Nombre de fonction de forme</b>	<b>Fréquence propre</b>
P=7	1,463
P=8	1,46
P=9	1,434
P=10	1,436

V-2-1.2. Les Fréquences propres dans le cas d'un matériau composite

A-  $\theta = [90 \ 45 \ -45 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 90]$

**Tableau 4** Convergence de première fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'une poutre (E-L).

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=7	89.728
P=8	89.721
P=9	89.717
P=10	89.715

B-  $\theta = [45 \ -45 \ 45 \ -45 \ 45 \ -45 \ 45 \ -45 \ 45 \ -45]$

**Tableau 5** Convergence de première fréquence en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'une poutre (E-L)

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=7	32.689
P=8	32.686
P=9	32.685
P=10	32.684

C-  $\theta = [90 \ 0 \ 90 \ 0 \ 90 \ 0 \ 90 \ 0 \ 90 \ 0]$

**Tableau 6** Convergence de première fréquence en fonction du nombre de fonctions de forme hiérarchique  $p$  d'une poutre (E-L).

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=7	79.99
P=8	79.984
P=9	79.981
P=10	79.979

## V-2-2. Etude paramétriques

1-  $N_c=2$  ,  $\theta = [0 \ 90]$

A- ENCASTREE- LIBRE

**Tableau 7** Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=10	12.47

B- ENCASTREE- ENCASTREE  $\theta = [0 \ 90]$

**Tableau 8** Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=10	41.519

2-  $N_c=3$  ,  $\theta = [45 \ -45 \ 45]$

A- ENCASTRE E- LIBRE

**Tableau 9** Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=10	16.432

B- ENCASTREE- ENCASTREE  $\theta = [45 \ -45 \ 45]$

**Tableau 10** Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.

Nombre de fonction de forme	Fréquence propre
P=10	61.4

### V-2-3 .Interprétations

#### V.2.3.1. Influence de l'orientation des fibres sur les fréquences propres

On varie les angles des stratifiés pour avoir leurs influences sur les fréquences propres de la poutre en matériaux composites **E-L**.

Les résultats trouvés montrent que lorsqu'on change l'empilement les fréquences changes.

Le changement de l'angle  $\eta$  on peut soit diminuer soit augmenter les fréquences.

#### V.2.3.1. Influence des paramètres sur les fréquences propres

On varie les paramètres de la poutre (nombre de couche, condition aux limites) pour avoir leurs influences sur les fréquences propres.

Les résultats trouvés montrent que lorsqu'on change le nombre de couche et les conditions aux limites les fréquences changes.

## **Conclusion Générale**

L'étude statique d'une poutre en matériaux composites en utilisant la version-  $p$  de la méthode des éléments finis, Les résultats obtenus concordent avec ceux disponibles dans la littérature.

Plusieurs exemples ont été traités pour déterminer l'influence de l'angle de l'orientation des fibres des poutres en matériau composite, Ce travail permet les conclusions suivantes :

- La convergence est vérifiée que en augmentant le nombre des fonctions de forme. avec des résultats qui s'accordent avec les solutions disponibles dans la littérature.
- Les résultats trouvés montrent que le matériau composite influe sur les fréquences propres de la poutre.
- Les résultats trouvés montrent que les paramètres de la poutre changer les fréquences.

### Références Bibliographiques

- [1] Marc François, Module M227 Matériaux non métalliques, Crédit 1ECTS, PDF
- [2] Serdoun Mohamed Nadjib, Etude dynamique d'une plaque stratifiée en matériaux composites sous l'effet de charges thermiques, mémoire de magister 2008.
- [3] Boukhalfa Abdelkrim, Comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites, mémoire de doctorat 2009.
- [4] Jean-Marie Berthelot, Matériaux Composites, Comportement mécanique et analyse des structures, 5<sup>eme</sup> édition, 2012
- [5] Laurent Gornet, généralité sur les matériaux composites (<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00470296v1>). 2008.
- [6] B. Drouin, J. M. Senicourt, F. Lavaste et G. Fezans, De La Mécanique Vibratoire à La Méthode des Eléments Finis, Volume 1, Afnor, 1993.
- [7] M. Y. Chang et al, A Simple Spinning Laminated Composite Shaft Model, International Journal of Solids and Structures. 41(2004) 637–662.
- [8] Guenifed Abdel Halim, étude et analyse par la méthode des éléments finis hiérarchiques des stratifiées en matériaux composites sous charges dynamiques. Mémoire de magister 2005
- [9] A. Houmat, A Sector Fourier p- element Applied to Free Vibration Analysis of Sector Plates, Journal of. Sound and Vibration, 243 (2001) 269-282.

## ملخص

يشمل هذا العمل دراسة حركة رافده من المواد المركبة. نظريا يستند إعداد الطاقة الحركية و طاقة التشوه للعمود على نموذج Timoshenko, ويتم الحصول على معادلات الحركة بمبدأ Hamilton . باستخدام طريقة العناصر المتناهية لحل هذه المعادلات لحساب المصفوفات العامة للطاقة الحركية وطاقة التشوه. وفي وقت لاحق، وتحديد الترددات الطبيعية لنظام الدراسة. وأخيرا يتم التحقق من الصحة، وتتم مقارنة النتائج مع دراسات أخرى وجدت.

**الكلمات المفتاحية:** رافده، المواد المركبة، طريقة العناصر المتناهية

## Résumé

Ce travail concerne l'étude des vibrations libres d'une poutre en matériaux composites. Théoriquement l'établissement de énergie cinétique et de déformation du la poutre est basée sur le modèle de Timoshenko, les équations de mouvements sont obtenues à partir de principe d'Hamilton.

La méthode des éléments finis hiérarchique est utilisée pour modéliser la structure, un élément fini hiérarchique de type poutre avec six degrés de liberté par nœud est développé. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences propres.

Enfin la validation est faite, les résultats trouvés sont comparés avec d'autres études de la littérature.

**Les mots clés :** poutre, matériaux composites, méthode des éléments finis.

## Abstract

This work concerns the study of free vibrations of a beam in composite materials. Theoretically, the establishment of kinetic energy and deformation of the beam is based on the model of Timoshenko, movement equations are obtained from Hamilton principle.

The hierarchical finite element method is used to model the structure; hierarchical finite element beam type with six degrees of freedom per node is expanded. A program is developed for the calculation of own frequencies.

Finally, the validation is made; the found results are compared with other literature studies.

**Keywords:** beam, composite materials, finite element method