

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



**THESE**

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTORAT 3<sup>ème</sup> Cycle**

**En : Génie Mécanique**

**Spécialité : Mécanique Computationnelle**

**Par : Belhadj Abdelkadir**

**Sujet**

**Analyse vibratoire d'un nano-arbre tournant**

Soutenue publiquement, le 14/07/2019, devant le jury composé de :

M. Houmat Abderrahim	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M. Boukhalfa Abdelkrim	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M. Belalia Sid Ahmed	Professeur	Univ. Tlemcen	Co- Directeur de thèse
M. Tounsi Abdelouahed	Professeur	Univ. Sidi Belabes	Examineur 1
M. Hamza Cherif Sidi Mohamed	MCA	Univ. Tlemcen	Examineur 2
M. Amirat Mohamed	MCA	C. Univ. Temouchent	Examineur 3

**Année Universitaire : 2018/2019**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**Popular & Democratic Republic of Algeria**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministry of Higher Education & Scientific Research**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Aboubakr Belkaïd University – Tlemcen –

Faculty of TECHNOLOGY



## **THESIS**

Submitted in candidacy for the **Degree of 3rd cycle Doctorate**

**In:** Mechanical Engineering

**Area:** Computational Mechanics

**By:** Belhadj Abdelkadir

### **Topic**

## **A vibratory analysis of a rotating nano-shaft**

Publicly defended on July 14<sup>th</sup>, 2019, head on the following board of examiners:

Mr. Houmat Abderrahim	Professor	Tlemcen University	Chairman
Mr. Boukhalfa Abdelkrim	Professor	Tlemcen University	Supervisor
Mr. Belalia Sid Ahmed	Professor	Tlemcen University	Co- Supervisor
Mr. Tounsi Abdelouahed	Professor	S. Belabes University	Examiner 1
Mr. Hamza Cherif Sidi Mohamed	MC-A	Tlemcen University	Examiner 2
Mr. Amirat Mohamed	MC-A	Ain Temouchent University .C	Examiner 3

**University Year : 2018/2019**



*Au nom de d'Allah, clément et miséricordieux*

*Il n'y a de force et de puissance qu'en Allah*

Je dédie ce modeste travail à l'âme de **mon père** (Allah yar7mou) que dieu lui bénisse et lui mette dans ses paradis éternels ; à ma **chère mère...**

**Chère mère** ... aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que tu as consenti pour mon instruction et mon bien être.

Puisse Dieu (Elkadir), le Très Haut (El Ally), le très grand (Elkabir) t'accorder santé, bonheur et longue vie.

A mon frère et mes deux sœurs.

... A ma femme que je n'ai pas encore trouvée.

# *Remerciements*

*Langage tout d'abord à dieu qui m'a donné la force*

*Pour terminer ce modeste travail.*

Je tiens tout d'abord à remercier particulièrement Mr. BOUKHALFA Abdelkrim et Mr BELALIA Sid Ahmed d'avoir acceptés l'encadrement de ce travail ainsi pour leurs directives et leurs soutiens moral tout ou long de la durée de mon travail ; Merci à vous Messieurs tout particulièrement pour la confiance que vous m'avez accordée, votre qualités pédagogiques et scientifiques, votre franchise et sympathie. J'ai beaucoup appris à votre côté et je vous adresse ma gratitude.

Je m'adresse mes sincères remerciements à toute l'équipe du laboratoire Mécanique Computationnelle MECACOMP plus particulièrement : Mr Abderrahim HOUMAT Directeur du laboratoire qui a également accepté de présider les jury, J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr. Tounsi Abdelouahed de l'université de Sidi Belabes qui m'a honoré par son acceptation d'examiner mon travail, Mr. Hamza Cherif Sidi Mohamed de l'université de Tlemcen, et Mr. Amirat Mohamed du centre universitaire de Ain Temouchent, et sans oublier de remercier Les invités.

Ma gratitude va à tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à ma formation, à leur tête Mr Saim Rachid le Directeur du conseil scientifique du département et mon encadrant de Master. Un remerciement spécial à mes chères : Abdeldjlil, Farouk, Mohamed, Sami, Alaedine, Mokhtar, Abdelkrim, Redouane, Toumi et Sayd.

Merci à ma petite et grande famille.

Merci à ma famille académique de l'université de Tlemcen

Merci à ma famille Professionnelle de L'EPM Sonatrach (Ex. ENC)

## ***Abstract:***

In this work, a vibratory analysis is elaborated in order to study the vibration behavior of a rotating nano-shaft considered as an Euler-Bernoulli beam based on Eringen's theory of nonlocal elasticity. The governing equations were generated by the Hamilton principle and are discretized by the semi-analytical differential quadrature method (DQM). The gyroscopic effect, the effect of the small-scale, the effect of the boundary conditions and the geometric parameters on the frequency parameters were discussed. As an application, the nano-shaft had been studied based single-walled carbon nanotube (SWCNT) first in free medium and then resting in a Winkler type elastic foundation. The results obtained in this work can serve as a guide for the design, development and production of future rotating nanomachines such as: nano-motors, nano-turbines, nano-robots.

**Keywords:** Vibration, nano-shaft, rotation, DQM, Nonlocal Elasticity, gyroscopic effect

## ملخص:

في هذا العمل، تم وضع تحليل اهتزازي من أجل دراسة السلوك الاهتزازي لعمود دوار نانومتري يعتبر كعارضة Euler-Bernoulli على أساس نظرية Eringen للمرونة غير الموضعية، تم إنشاء المعادلات الحاكمة اعتماداً على مبدأ هاملتون ويتم تمييزها بواسطة الطريقة شبه التحليلية للتربيع التفاضلي (DQM). تمت مناقشة التأثير الجيروسكوبي، وتأثير المقياس، وتأثير الشروط الحدية والمعاملات الهندسية على معاملات التردد الاهتزازي. كاحدى التطبيقات تم اعتبار النانودوار nanorotor كأنيوب كربون نانوي أحادي الجدار (SWCNT) حيث تمت دراسته ضمن وسط حر كذلك ضمن أساس مرن من نوع وينكلر. النتائج التي تم الحصول عليها في هذا العمل يمكن أن تكون بمثابة دليل لتصميم وتطوير وإنتاج آلات الدوارة النانوية المستقبلية مثل: محركات النانو، التوربينات النانوية، الروبوتات النانوية ...

**الكلمات المفتاحية:** اهتزاز, نانودوار, دوران, طريقة التربيع التفاضلي, نظرية المرونة اللاموضعية, التأثير الجيروسكوبي



## **Abstrakt :**

In dieser Arbeit wird eine Schwingungsanalyse erarbeitet, um das Schwingungsverhalten einer rotierenden Nanowelle, die als Euler-Bernoulli-Strahl betrachtet wird, auf der Grundlage der nichtlokalen Elastizitätstheorie von Eringen zu untersuchen. Die maßgeblichen Gleichungen wurden nach dem Hamilton-Prinzip erstellt und werden nach der semi-analytischen Differential-Quadratur-Methode (DQM) diskretisiert. Der Kreiseffekt, der Einfluss des kleinen Maßstabs, der Einfluss der Randbedingungen und der geometrischen Parameter auf die Frequenzparameter wurden diskutiert. Als Anwendung wurde das einwandige Kohlenstoffnanoröhrchen (SWCNT) auf der Basis eines Nano-Schafts in freiem Medium untersucht, das auf einem elastischen Winkler-Fundament ruht. Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse können als Leitfaden für das Design, die Entwicklung und die Produktion zukünftiger rotierender Nanomaschinen dienen, wie z. B. : Nanomotoren, Nanoturbinen, Nanoroboter.

**Schlüsselwörter:** Vibration, Nano-Welle, Rotation, DQM, nichtlokale Elastizität, Kreiseffekt

## Resumen

En este trabajo, se elabora un análisis vibratorio para estudiar el comportamiento de la vibración de un nano-eje giratorio considerado como un haz de Euler-Bernoulli basado en la teoría de la elasticidad no local de Eringen. Las ecuaciones de control fueron generadas por el principio de Hamilton y están discretizadas por el método de cuadratura diferencial semi-analítica (DQM). Se discutieron el efecto giroscópico, el efecto de la pequeña escala, el efecto de las condiciones de contorno y los parámetros geométricos en los parámetros de frecuencia. Como una aplicación, el nano-eje había sido estudiado a base de nanotubos de carbono de pared simple (SWCNT) en medio libre y descansaba en una base elástica de tipo Winkler. Los resultados obtenidos en este trabajo pueden servir como una guía para el diseño, desarrollo y producción de futuras nanomáquinas rotativas, tales como: nano-motores, nano-turbinas, nano-robots.

**Palabras clave:** Vibración, nano-eje, rotación, DQM, Elasticidad no local, efecto giroscópico.

## 抽象：

在這項工作中，為了研究基於埃林根非局部彈性理論的被認為是歐拉 - 伯努利樑的旋轉納米軸的振動特性，我們進行了振動分析。控制方程由漢密爾頓原理生成，並通過半解析微分求積法（DQM）進行離散化。討論了陀螺效應，小尺度效應，邊界條件和幾何參數對頻率參數的影響。作為一種應用，納米軸已經在自由介質中基於單壁碳納米管（SWCNT）進行了研究，並在溫克勒型彈性基礎中進行了研究。在這項工作中獲得的結果可以作為未來旋轉納米機器的設計，開發和生產的指南，例如：納米電機，納米渦輪機，納米機器人。

**关键词：** 振动， 纳米轴， 旋转， 微分求积法， 非局部弹性， 陀螺效应

## ***Résumé :***

Dans ce travail, une analyse vibratoire est élaborée afin d'étudier le comportement vibratoire d'un nano-arbre tournant considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli en se basant sur la théorie d'élasticité non locale développé par Eringen. Les équations gouvernantes sont générées par le principe de Hamilton et sont discrétisées par la méthode semi-analytique des quadratures différentielles (DQM). L'effet gyroscopique, l'effet de l'échelle, l'effet des conditions aux limites et les paramètres géométriques sur les paramètres de fréquence ont été discutés ; comme application, ce nano-arbre tournant est étudié en nanotube de carbone mono-feuillet (SWCNT) tout d'abord dans un milieu libre et ensuite suspendu dans un milieu élastique de type de Winkler. Les résultats obtenus dans ce travail peuvent servir comme guide pour le design, développement et production de future nano-machines tournantes telles que : les nano-moteurs, les nano-turbines, les nano-robots...

**Mots-clés :** Vibration, nano-arbre, rotation, DQM, élasticité non locale, effet gyroscopique

## SOMMAIRE :

Abstract.....	I
ملخص.....	II
Abstrakt.....	III
Resumen.....	IV
抽象.....	V
Résumé.....	VI
Sommaire.....	VII
Liste des figures.....	VIII
Liste des tableaux.....	X
Nomenclature.....	XI
Introduction générale.....	1

## CHAPITRE I : Revue bibliographique.

I.1. Dynamique des rotors.....	5
I.2. Généralités sur les sciences et technologies de nano.....	9
1.2.1. Généralités sur les sciences et technologies de nano.....	9
I.2.2. Les nanotechnologies.....	11
I.3. Nanomatériaux et nanostructures à base de.....	12
I.3. 1. Du graphite au fullerène.....	13
I.3.2. Nanotubes de carbone.....	14
1.3.3. Propriétés des nanotubes de carbone.....	17
1.3.3.1. Propriétés mécaniques.....	17
I.3.3.2. Propriétés électroniques.....	18
1.3.3.3. Propriétés Thermiques.....	19
I.3.3.4. Propriétés optiques.....	19
I.3.3.5. Propriétés de capillarité.....	19
I.3.3.6. Propriétés d'adsorption de gaz.....	20
I.3.4. Procédés de synthèse des nanotubes de carbone.....	20
I.4. Dynamique des nanostructures tournantes et nano-turbomachines.....	21

## CHAPITRE II : Théorie des nanostructures

II. 1. Les modèles continus (Mécanique des milieux continus) Classiques.....	29
II. 2. Structure poutre.....	30
II. 2. 1. Modèle d'Euler-Bernoulli (EBT).....	31
II. 2. 2. Modèle de Timoshenko (TBT).....	31
II. 3. Les modèles continus (Mécanique des milieux continus) simplifiés.....	33
II. 3. Théorie d'élasticité non locale.....	36
II. 4. Limites de la théorie d'élasticité non locale.....	37
II. 5. Types de non localité.....	37
II. 5. 1. Non localité spatiale.....	38

II. 5. 2. Non localité Temporelle.....	38
II. 5. 3. Non localité Mixte.....	38
II. 6. Théorie d'élasticité non-locale à gradient.....	39
II. 7. Théorie d'élasticité non-locale intégrale.....	39
II.8. Théorie d'élasticité non locale appliquée aux nanostructures.....	40
II. 8. 1. Nano-plaques.....	40
II. 8. 2. Nano-coques.....	41
II. 8. 3. Nano-poutres.....	41

### CHAPITRE III : Dynamique d'un nano-arbre tournant.

III. 1. Présentation du problème physique .....	44
III.1. 1. Equations cinématiques.....	44
III. 1. 2. Relation déformation –déplacement.....	45
III. 1. 3. Relations contrainte–déformation.....	45
III. 1. 4. Energie de déformation.....	46
III. 1. 5. Energie de cinétique.....	46
III. 1. 6. Equations gouvernantes.....	47
III. 1. 7. Conditions aux limites.....	48
III. 2. Applications sur les nanotubes de carbone.....	49
III. 2. 1. Nano-arbre tournant à base d'un nanotube de carbone mono-paroi (SWCNT).....	49
III. 2. 2. Nano-arbre tournant à base CNT dans une fondation élastique.....	50
III. 2. 2. 1. Modèle élastique à un seul paramètre.....	51
III. 2. 2. 2. Modèle élastique à deux paramètres.....	51
III. 2.3. Formulation mathématique.....	52
III. 3. Résolution du système d'équations.....	53

### CHAPITRE IV : Modélisation par quadratures différentielles (DQM)

IV. 1. Introduction aux quadratures différentielles (DQ).....	56
IV. 2. Quadrature intégrale :.....	56
IV. 3. Quadrature différentielle :.....	58
IV. 3. 1. Interpolation polynomiale.....	58
IV. 3. 2. Interpolation à base de Fourier.....	59
IV. 3. 3. Coefficients pondéraux de premier ordre.....	59
IV. 3. 4. Formulation de la récurrence d'ordre supérieure.....	64
IV. 4. Cas multidimensionnel.....	66
IV. 5. Types de Points de maillage (Grid point).....	69
IV. 6. Méthode des Quadratures différentielles généralisées (GDQM).....	71
IV. 7. Application du GDQM.....	73
IV. 8. Imposition des conditions aux limites.....	74

### CHAPITRE IV : Résultats et discussions.

V.1. Convergence des résultats .....	79
V.2. Validation des résultats .....	79
V.3. Résultats et Discussions.....	81
V. 3.1. Influence de l'effet gyroscopique.....	81
V.3.2. Influence de l'échelle réduit (paramètre non local).....	82

V. 3.2. Influence des paramètres géométriques et les conditions aux limites.....	84
V. 3.2.1. Influence du rapport L/D.....	84
V. 3.2.2. Influence du rapport h/D.....	86
V. 4. Deuxième mode de paramètre de fréquence .....	88
V. 5. Effet de l'échelle sur le mode supérieure.....	91
V. 6. Analyse vibratoire d'un nanorotor à base de CNT.....	93
V. 7. Analyse vibratoire d'un nanorotor à base de CNT intégré dans une fondation élastique.....	98
Conclusions et perspectives.....	106
Liste des références.....	109
Annexe I.....	117
Annexe II.....	118

# Liste des figures

## CHAPITRE . I

Figure. I.1. Rotor de Föppl/Jeffcott à masse rigide.....	6
Figure. I.2. Exemple d'une machine tournante : Compresseur centrifuge à deux étages.....	7
Figure I.3. Diagramme de Campbell.....	8
Figure I.4. Nanorobot avec un embryon par Christian Darkin.....	11
Figure I.5. «MIT Nanoluer » développé par un groupe d'étudiants de MIT.....	12
Figure I.6. Structure du : graphite, diamant, et fullerène.....	13
Figure I.7. Types CNTs : (a) mono-paroi (SWCNT), (b) double-parois (DWCNT), (c) multi-parois (MWCNT) .....	14
Figure I.8. Structure d'un plan de graphène en deux dimensions. Le réseau hexagonal est décrit à partir des deux vecteurs de base de $a_1$ et $a_2$ .....	15
Figure I.9. Les différents types d'enroulements de nanotubes de carbone.....	16
Figure I.10. Des molécules ( $C_{44}H_{24}$ ) avec deux roues tournantes (diamètre 0.8nm).....	22
Figure I.11. Un engrenage à base de nanotubes de carbone avec des dents en benzène.....	23
Figure I.12. Un nanorotor le plus vite en monde.....	24
Figure II.13. Schéma illustratif d'un rotor à base d'un MWCNT.....	25
Figure I. 14. Un nanorotor auto-excité à base de DWCNT lié à des atomes.....	25

## CHAPITRE . III

Figure III. 1. Géométrie d'un nanorotor en rotation.....	43
Figure III. 2. Élément nano-poutre et nœuds de grille.....	49
Figure III. 3. Un nanorotor à base d'un nanotube de carbone .....	51
Figure III. 4. Arbre tournant nanométrique embarqué dans un milieu élastique.....	53

## CHAPITRE . IV

Figure II.1. Différentes méthodes et théories pour étudier les nanostructures.....	35
--	----

## CHAPITRE . IV

Figure IV. 1. Intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ .....	58
Figure IV. 2. Discrétisation d'un problème unidimensionnel.....	59
Figure. IV. 3. Distribution des nœuds dans un domaine régulier.....	67
Figure IV. 4. Le sens graphique de la dérivée suivant $x$ .....	68
Figure IV. 5. Le sens graphique de la dérivée suivant $y$ .....	69
Figure IV. 6. le sens graphique de la dérivée mixte.....	69



## CHAPITRE . V

Figure V.1. Diagramme de Campbell pour différentes conditions aux limites.....	82
Figure V. 2. Paramètre de vitesse fondamentale pour différents paramètres de l'échelle.....	84
Figure V. 3. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec L/D d'un nanorotor bi-appuyé.....	85
Figure V.4. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec L/D d'un nanorotor bi-encasté.....	86
Figure V.5. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec L/D d'un nanorotor (AE).....	86
Figure V. 6. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec r/L d'un nanorotor bi-appuyé (AA) .....	87
Figure V. 7. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec r/L d'un nanorotor (EE).....	88
Figure V. 8. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec r/L d'un nanorotor (AE).....	88
Figure V. 9. Diagramme de Campbell pour le paramètre de fréquence de deuxième mode pour différentes conditions aux limites.....	91
Figure V. 10. Deuxième paramètre de la vitesse critique en fonction du paramètre non local	92
Figure V. 11. Variation des quatre premières fréquences de flexion inverse en fonction de $\mu^2$ Pour un nanorotor bi-appuyé.....	93
Figure V. 12. Variation des quatre premiers fréquences de flexion inverse en fonction de $\mu^2$ Pour un nanorotor bi-encasté.....	93
Figure V. 13. Variation des quatre premiers fréquences de flexion inverse en fonction de $\mu^2$ Pour un nanorotor appuyé-encasté.....	94
Figure V. 14. Schéma illustratif d'un nanorotor à base de CNT mono-feuillé.....	95
Figure. V.15. Diagramme Campbell pour différentes conditions aux limites pour le cas local.....	96
Figure. V. 16. Vitesse critique avec l'effet de l'échelle pour différentes conditions aux limites.....	97
Figure. V. 17. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé.....	98
Figure. V. 18. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-encasté.....	99
Figure. V. 19. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant appuyé-encasté.....	99
Figure. V. 20. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé pour différents paramètres de la fondation élastique.....	103
Figure. V. 21. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé pour différents paramètres non locaux.....	104
Figure. V. 22. Première Vitesse critique pour différents paramètre de l'échelle différentes condition aux limites et différents paramètres de coefficients élastique K....	105

## Liste des tableaux

Tableau I.1	Différents diamètres appliqués aux canaux.....	17
Tableau V.1	Convergence des paramètres de fréquence avec le nombre N.....	79
Tableau V.2	Validation des quatre premiers paramètres de fréquences avec les résultats de Chakraverty pour les différentes conditions aux limites.....	80
Tableau V.3.	Validation avec les résultats de Gibert.....	80
Tableau V.4.	Paramètres de fréquences fondamentales pour différents paramètres de vitesse angulaire pour $\mu=0$ . 48.....	81
Tableau V.5.	Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux.....	83
Tableau V.6.	Deuxième mode de flexion direct et inverse pour le cas local $\mu^2=0$ .....	89
Tableau V.7.	Paramètres de fréquences de 2ème mode pour différents paramètres non locaux.....	90
Tableau V.8.	Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (bi-appuyée).....	100
Tableau V.9.	Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (bi-encastée).....	101
Tableau V.10.	Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (appuyée-encastée)....	102

## Nomenclature

Variables	Description
$a$	Longueur intérieure caractéristique
$A$	Section
$A$	Premier dérivée
$B$	Deuxième dérivée
$C$	Troisième dérivée
$C^{(r)}$	Dérivée d'ordre r
$D$	Quatrième dérivée
$d$	Diamètre du nanorotor
$e_0$	Constante correspondante à la nature du matériau

$E$	Module de Young
$f$	Fonction
$G$	Module de cisaillement
$[G]$	Matrice de l'effet gyroscopique
$h$	Epaisseur
$I$	Moment d'inertie
$K$	Coefficient de raideur élastique
$[K]$	Matrice de rigidité
$(\vec{i} \vec{j} k)$	Axe de coordonnées cartésiennes
$L$	Longueur du nanorotor
$M_x$	Moment résultant selon une direction x
$[M]$	Matrice de la masse
$N_x$	Effort normal
$N$	Nombre de points suivant x
$(n, m)$	Chiralité de nanotube de carbone
$P$	Pression exercé par la fondation élastique
$Q$	Force de cisaillement (Poutre de Reddy)
$t$	temps
$U$	Déplacement adimensionnel suivant X
$u$	Déplacement dimensionnel suivant x
$\dot{u}$	Vitesse dimensionnelle suivant x
$\ddot{u}$	Accélération dimensionnelle suivant x
$V$	Déplacement adimensionnel suivant Y
$v$	Déplacement dimensionnel suivant y
$\dot{v}$	Vitesse dimensionnelle suivant y
$\ddot{v}$	Accélération dimensionnelle suivant y
$W$	Déplacement adimensionnel suivant Z
$w$	Déplacement dimensionnel suivant z
$\dot{w}$	Vitesse dimensionnelle suivant z
$\ddot{w}$	Accélération dimensionnelle suivant z

<b>Symboles grecs</b>	<b>description</b>
$\lambda$	Paramètre de fréquence
$\omega$	Fréquence propre
$\mu$	Paramètre non local
$\sigma$	Contrainte
$\rho$	Masse volumique (densité)
$\xi$	Point de distribution
$\phi$	Rotation de la section transversale
$\gamma$	Paramètre de vitesse angulaire
$\Omega$	Vitesse de rotation
$\delta$	Variation différentielle
$\{w\}$	Vecteur propre
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformation

### **Indices**

b	backward
ext	extérieur
f	forward
int	intérieur
l	local
n	ordre n correspondant au point N
nl	non local
x	suivant x
y	suivant y
z	suivant z

# Introduction Générale

Depuis une quinzaine d'années, Le monde de recherche scientifique et développement technologique a connu un formidable essor grâce aux sciences et technologies de « nano », ce monde de l'infiniment petit qui a révolutionné l'industrie aura encore des nouvelles perspectives et avancées à offrir. Presque, tous les domaines de sciences appliqués et d'ingénierie ont été impliqués à la compréhension et la maîtrise du monde de « nano ».

La mécanique est commettant une science de base a eu l'avancé à l'étude des nanosciences et nanotechnologies en modélisant, développant, analysant et produisant des nanostructures et des nanomatériaux ayant des propriétés exceptionnelles. L'ensemble de ces nanostructures et nanomatériaux constituent l'élément de base pour des applications de haute technologie.

Dans le contexte d'enrichir les travaux de recherches mécaniques en nanotechnologies, Ce travail de thèse étudie l'analyse des vibrations libres des nanostructures en rotation en matériaux isotropes, comme une avancée en recherches scientifiques, nous avons étudié un arbre tournant nanométrique pour divers applications technologiques. L'étude consiste à élaborer un code de calcul (programme numérique) pour analyser le comportement dynamique des nanostructures tournantes (nano-arbre tournant).

Le premier chapitre est consacré dans un premier temps à une courte description de la vibration des machines tournantes (dynamique des rotors). Dans un second temps nous faisons une présentation générale sur les sciences et technologies de « nano » en présentant les nanomatériaux à base de Carbone et Graphite. Nous terminons ce chapitre introductif sur l'intérêt que peut susciter l'étude de la dynamique des nanomatériaux pour différentes applications mécaniques.

La théorie des nanostructures (nano-poutres en particulier) est présentée dans le deuxième chapitre, on élaborant une investigation des poutres selon le modèle de Timoshenko et le modèle d'Euler-Bernoulli, ce dernier qui est bien adopté pour notre étude en considérant notre arbre tournant comme une nano-poutre d'Euler-Bernoulli, la formulation mathématique et les conditions aux limites sont rapportés.

Dans le troisième chapitre, on a présenté la théorie des nanorotors qui a comme but de modéliser notre problème physique, formuler mathématiquement les équations gouvernantes et avoir les différentes équations d'énergies en utilisant le principe de Hamilton. Un système de trois équations est obtenu régissant la vibration axiale (suivant OX), latérale (flexion suivant l'axe OY) et transversale (flexion suivant l'axe OZ), notre étude se focalisera sur la flexion du nanorotor pour les conditions aux limites suivantes (Appuyé-appuyé AA), (Encastré-encastré EE) et (Appuyé-encastré AE).

Dans le quatrième chapitre on va présenter la méthode semi-analytique des quadratures différentielles généralisés qui sera utilisé pour modéliser et discrétiser le système d'équations qui régissent notre problème dynamique. Il est à noter que la méthode DQM est souvent utilisée pour les problèmes dynamiques à l'échelle nanométrique.

Dans e dernier chapitre nous avons présenté les différents résultats de ce travail. Tout d'abord on a vérifié la convergence de la méthode DQM qui a donné des résultats fiables et exacts en les comparants avec d'autres résultats disponibles en littérature. On a illustré les différents graphes qui montrent l'effet des propriétés physiques (l'effet gyroscopique et le paramètre d'échelle) sur le comportement vibratoire (paramètres des fréquences propres de premier et second mode) du nano-arbre tournant. Et les propriétés géométriques en étudiant l'effet de  $(L/D)$  et  $(h/D)$  sur le paramètre de la vitesse critique. Ensuite on a pris un nanotube de carbone mono-paroi comme nanorotor pour différentes conditions aux limites, l'effet de la vitesse critique, l'effet de l'échelle, les conditions aux limites et les paramètres géométriques ont été discutés. Ce nanotube de carbone à base de SWCNT est aussi étudié suspendu dans une fondation élastique de type Winkler afin d'investiguer l'effet de la rigidité élastique sur le comportement vibratoire du nanorotor.

# Chapitre I

## Revue Bibliographique

### **Objectif :**

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à une courte description de la vibration des machines tournantes. Dans un second temps nous faisons une présentation générale sur les sciences et technologies de « nano » en présentant les nanomatériaux à base de Carbone et Graphite. Nous finalisons ensuite ce chapitre introductif par l'intérêt que peut susciter l'étude de la dynamique des nanomatériaux pour différentes applications mécaniques.



Les machines tournantes ou les turbomachines : turbines, compresseurs, pompes, ventilateurs..., jouent un rôle important dans le processus énergétique et industriel. Le progrès technique que connaît le monde d'aujourd'hui a tout révolutionné : la taille des systèmes, les performances, les matériaux et même les procédés. Pour cela, Les travaux de recherches qui prennent en sujet 'les turbomachines' se focalisent majoritairement sur leur comportement dynamique pour améliorer leurs performances et assurer leur fiabilité. La maîtrise de la dynamique des machines tournantes consiste à déterminer leur résonance et leur amplitude de déformation pour qu'ils puissent éviter tout endommagement.

### **I.1. Dynamique des rotors**

La dynamique des rotors est un axe d'étude d'ingénierie mécanique qui étudie le comportement vibratoire des arbres tournants avec l'objectif de prévoir les amplitudes de vibration hors limite. Toutes les machines tournantes se composent d'une partie tournante s'appelle « le rotor » et une partie fixe s'appelle dans la plupart des cas « stator ». Beaucoup d'applications industriels des machines tournantes ayant un rotor flexible avec une longueur importante et une géométrie mince afin de maximiser l'encombrement des autres composants en contact avec l'arbre comme les aubes à roues, les garnitures mécaniques, et les machines sont opérées à des vitesses de rotation très élevées pour avoir un rendement énergétique performant.

La première machine à avoir une vitesse critique de résonance est la turbine à vapeur développée par Gustav DeLaval en 1883 [1]. Les machines tournantes modernes fonctionnent au-dessus de la première vitesse critique qui est généralement le mode de vibration le plus important du système, bien qu'ils évitent encore de fonctionner en continu à des vitesses critiques ou proches de celles-ci.

Macquorn Rankine a exécuté la première analyse d'un arbre tournant en 1869 [2] où il a choisi un modèle infortuné et a prévu une certaine vitesse de rotation. L'arbre est considéré flexible. Il a défini une certaine vitesse comme vitesse de tourbillonnement "whirling speed" de l'arbre. En fait, il a montré qu'au-delà de cette vitesse de tourbillonnement que la déflexion radiale du modèle de Rankine augmente sans limite. Aujourd'hui, cette vitesse s'appellerait la vitesse de seuil "threshold speed" pour l'instabilité divergente. Cependant, Rankine a ajouté le terme tourbillonnant "whirling" au vocabulaire de la dynamique des rotors.

La théorie de la dynamique des rotors a été initiée pour la première fois en 1895 par l'ingénieur allemand August Föppl [3] et Henry Homan Jeffcott en 1919 [4] qui a étudié et opéré un mécanisme de rotation (rotor+ roulement), ils ont développé la théorie fondamentale de la dynamique des rotors en prévoyant et atténuant la vibration des rotors. Ce système simple

(rotor+roulements) qui est connu par le rotor de Föppl/Jeffcott est souvent employé pour évaluer les systèmes complexes des rotors.

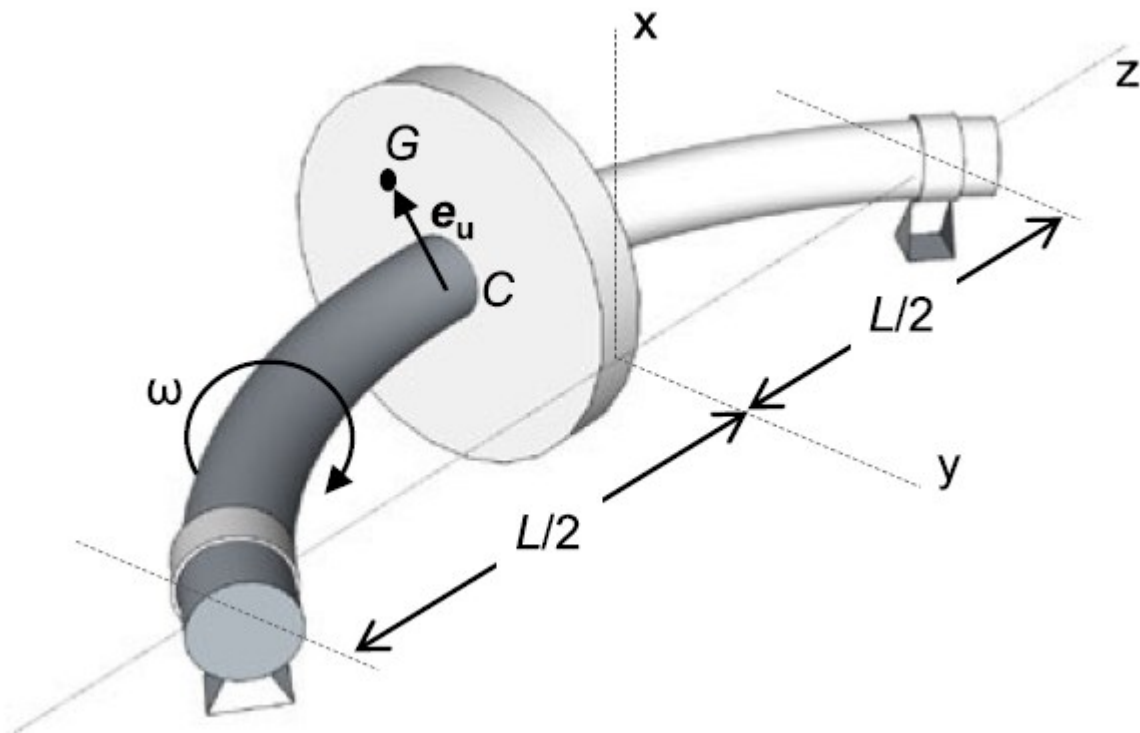


Figure I.1. Rotor de Föppl/Jeffcott à masse rigide [3]

Graduellement, avec l'évolution industrielle, le modèle de rotor de Jeffcott, dans ses nombreuses variations, est venu plus près des besoins pratiques des dynamistes des rotors. Beaucoup de rotors pratiques, particulièrement ceux étant conçus pour des turbines à gaz d'avion, n'étaient pas appropriés à un modèle de Jeffcott. Pour une chose, la distinction entre le disque et l'arbre est brouillée dans la turbine à gaz typique d'avion. Une technique modelant plus générale était nécessaire. Ceci a été fourni par Melvin Prohl vers la fin des années 30 et publié en 1945 [5] qui a développé la méthode de matrice de transfert (MMT). La MMT pour des rotors reste viable ; en effet, il paraît être toujours la méthode choisie pour la plupart des analyses dynamiques des rotors industriels.

Aujourd'hui, la théorie moderne des rotors a remplacé l'ancienne théorie après l'apparition des différentes machines tournantes actuelles : turbines à gaz, pompes, compresseurs (Figure 1.2) et ventilateurs. Et la coalescence des méthodes numériques appliquées à la dynamique des structures et les moyennes de calcul et de simulation en utilisant les code de calcul, les supercalculateurs, et le logiciels de simulation. L'application initiale de ces codes à la dynamique des rotors a été basée sur la MMT, mais dans les années 70 un autre algorithme

fondamental, la méthode des éléments finis (MEF), est devenu disponible pour la résolution des modèles poutre. Maintenant, dans le début du 21ème siècle, les dynamistes des rotors combinent les techniques de la MEF et les théories des solides pour étudier le comportement couplé des disques flexibles, des arbres flexibles et des supports flexibles dans un modèle simple, massif et multidimensionnel.

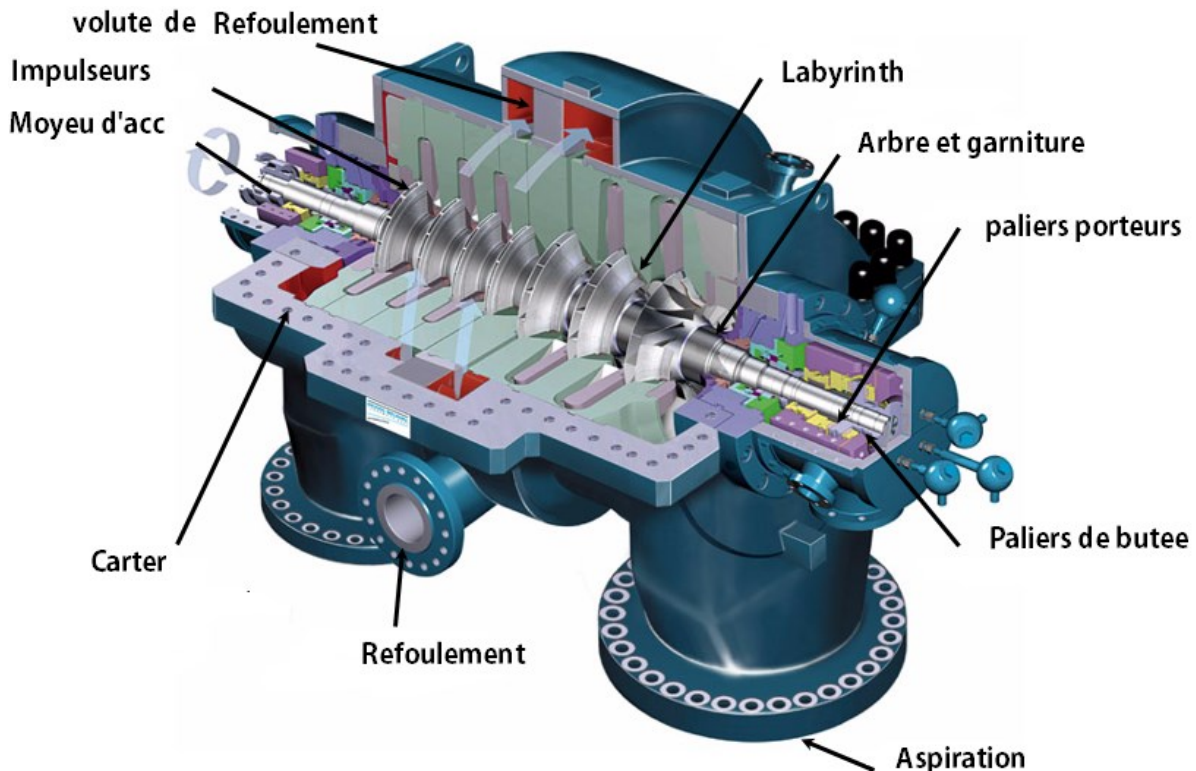


Figure. I.2. Exemple d'une machine tournante : Compresseur centrifuge à deux étages [6].

Aussi, les turbomachines ces dernières années ont vu un développement constant des modèles afin de prévoir et suivre le comportement dynamique et d'aboutir à une compréhension accrue des problèmes pratiques que fasse les machines tournantes [7]. Cette amélioration des modèles existants se caractérise tout d'abord par des modélisations plus fins et plus réalistes des différents organes linéaires et non linéaires constituant un système d'arbre tournant (tels que les roulements ou les amortisseurs de type de film d'huile par exemple). Ces modèles permettent alors d'avoir de meilleures estimations des amplitudes des réponses des systèmes tournants soumis à des balourds et de mieux comprendre les problèmes physiques propres à chaque composante tels que le contact et perte de contact au niveau des roulements présents sur une ligne d'arbre.

Parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors, on cite la notion de vitesse critique qui correspond à la vitesse de rotation par excitation qui se coïncide en valeur

avec la fréquence propre du rotor. Pour la plupart des machines tournantes, on constate une forte dépendance des modes propres en fonction de la vitesse de rotation due aux effets gyroscopiques. Ainsi, on observe le déphasage divergent des modes propres du système dû aux forces gyroscopiques qui donnent deux valeurs de modes propres :

- Des modes de flexion directes  $\omega_f$  où le rotor tourne dans le même sens que son mouvement de précession. Alors, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée s'amplifie.
- Des modes de flexion rétrogrades  $\omega_b$ , où le rotor tourne en sens inverse de son mouvement de précession, ce qui engendre un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.

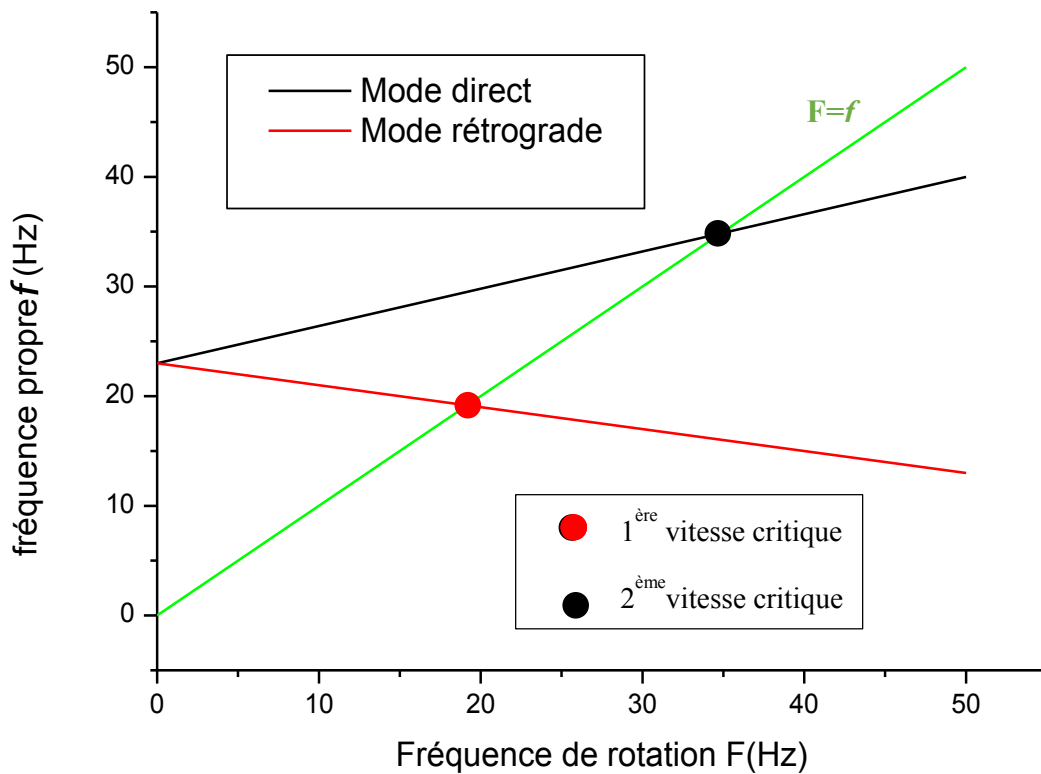


Figure. I.3. Diagramme de Campbell.

L'obtention de ces valeurs et l'identification de la vitesse critique se fait généralement par l'élaboration d'un graphique 2D constitué des valeurs de fréquences propres qui se subdivise en deux modes propres citées précédemment. Les deux modes de vibration de déformées identiques qui sont dans 2 plans orthogonaux s'intersectés sur l'axe longitudinal du rotor. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un

mode direct excitable par la force de balourd et un mode rétrograde non sollicité par l'excitation synchrone. Ce graphique est appelé « diagramme de Campbell » qui s'illustre dans la figure (I. 3), ou on voit les vitesses de rotation (en Hertz) en abscisses et les modes propres directes et indirectes en ordonnées. L'intersection de la courbe des vitesses critiques et les fréquences propres identiques avec la courbe croissante des modes rétrogrades et directes et donne la première, et la deuxième vitesse critique, respectivement.

Les avancées technologiques dans la conception et la fabrication des ordinateurs, ont permis à ces derniers de gagner du terrain dans le monde de la conception et de la simulation. Et depuis, les méthodes d'éléments finis ont connu beaucoup de succès suite aux progrès technologiques dans le domaine de l'informatique et des capacités croissantes des processeurs à traiter de gros calculs. Ces méthodes numériques ont permis aux ingénieurs le calcul et la simulation de produits assez complexes, et deviennent de plus en plus incontournables dans le monde de l'ingénierie et de la conception. On trouve aussi un besoin d'outils de simulation numérique et de conception fiables pour la conception des machines tournantes, du design (CAD) pour la fabrication, à la simulation structurale généralement par les éléments finis en utilisant des logiciels FEM/XFEM (Computational Structure Dynamics) et la simulation énergétique en simulant la structure dans son domaine d'application (fluide) avec l'approche computationnelle de la dynamique des fluides (Computational Fluid Dynamics).

Cette révolution industrielle qui est à l'origine d'un véritable engouement de la communauté scientifique pour la miniaturisation des composantes et les machines, ce qui a obligé les constructeurs et les fabricants de fournir des produits finis avec des performances optimales, des couts raisonnables et poids réduits. Pour cela, elle fait appel à des nouvelles techniques de fabrication et de production afin de réduire la tailles des composants qui ont passé du monde de « macro » au monde « nano » en passant par les microtechnologies.

## **1.2. Généralités sur les sciences et technologies de nano**

### **I.2. 1. Généralités sur les sciences et technologies de nano**

L'histoire des nanosciences a commencé, selon la plupart des commentateurs, le 29 décembre 1959, lorsque le célèbre physicien Richard Feynman [8] a prononcé, lors d'une réunion de l'American Physical Society au Caltech, une conférence dans le titre il y a beaucoup de place vers le bas, était explicite. L'idée de Feynman était que, si l'acide désoxyribonucléique (ADN) qui est une molécule que l'on retrouve dans tous les organismes vivants et qui est le support de l'hérédité, peut stocker un bit d'information à l'aide de quelques atomes, l'homme peut tenter de

faire le même. Et Feynman allait plus loin en évoquant la possibilité de réaliser des réarrangements atomiques et d'exploiter des propriétés de telles nouvelles structures.

Feynman justifiait son affirmation qu'y a beaucoup de place vers le bas, en calculant que les 1015 bits nécessaires pour avoir une version digitale d'une encyclopédie en 24 tomes tiendraient dans un volume équivalent à un grain de poussière si l'on savait stocker un bit d'information dans quelques atomes. Les nanosciences sont donc relatives, disait-il, au problème « de savoir manipuler et contrôler des objets de petite taille ». [9]

Le terme même de « nanotechnology » a été défini pour la première fois, en 1974 par le Professeur Norio Taniguchi [10] de l'université de Tokyo comme suit « les nanotechnologies consiste principalement en la réalisation, la séparation, la consolidation ou la déformation de matériaux par le biais d'un atome ou d'une molécule ».

Cependant, les nanotechnologies connaissent leur véritable essor à partir de 1981 lorsque l'Allemand Gerd Binnig et le Suisse Heinrich Rohrer inventent [11] le premier microscope en champ proche, le microscope à effet tunnel (STM : Scanning Tunneling Microscope). Cette nouvelle technique fournit des images en trois dimensions avec une très haute résolution, inférieure au dixième de nanomètre. Elle permet également la manipulation des atomes, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles expérimentations à l'échelle du nanomètre.

Éric Drexler [12] a publié le premier document de recherche sur les nanotechnologies en 1981 et dans la première édition de son livre « Engines of Creation : The coming Era of Nanotechnology », publié en 1986, Éric Drexler a estimé rapidement réalisables des « assembleurs moléculaires », capable de générer de nouvelles entités éventuellement capables d'autoreproduction, comme les virus biologiques.

Le 29 septembre 1989, D.M. Eiger et E.K. Schweizer [13] réalisèrent un pas vers la réalisation des rêves de Feynman. Ils réussirent à l'aide d'un microscope à effet tunnel à manipuler un à un des atomes de xénon pour écrire les trois lettres I-B-M sur une surface métallique. Cette expérience ouvre dès lors un très vaste champ d'investigations scientifiques au niveau atomique. Font leur apparition : « machines et moteurs nanométriques », « laboratoires sur puces », « délivrer les médicaments où il faut », « prothèse et implant biocompatibles », « vers des nano transistors », « les molécules, composants électroniques du futur », « davantage de mémoire avec le spin », « la physique quantique en boîtes », etc. Ce qui marque le début de l'ère des nanosciences.

### I.2.2. Les nanotechnologies

Les nanotechnologies ou les technologies de l'infiniment petit impliquent plusieurs disciplines scientifiques à l'échelle nanoscopique, les nanotechnologies et les nanosciences se trouvent pratiquement dans tous les domaines actuels, on les trouve en médecine, biologie, défense, industrie spatiale... Par exemple en *médecine*, est grâce aux techniques de dépistage, le patient a finalement pu avoir le bon médicament pour son état de santé selon son composition génétique. Des technique thérapeutiques modernes ont été conçu pour la lutte contre le cancer à base des nanotechnologies et d'autres procédés médicales [14] comme :

- Distribution ciblé de médicament (Target drug delivery systems for cancer therapy)
- Des vaccins Immunotherapique a base de nanomatériau (anticancer immune reaction
- « longboat » anticancer system
- Des nanomatériau qui attaquent la résistance de l'antivirus (T-cell (Treg)-specific receptors).
- Gène-Thérapie par délivrance d'ADN (Gene Therapy by DNA Delivery).
- Nanobiorobots : des nanorobots à base de bactéries magnétotactiques (Magnetococcus, Magnetospirillum magnetotacticum or Magnetospirillum magneticum)

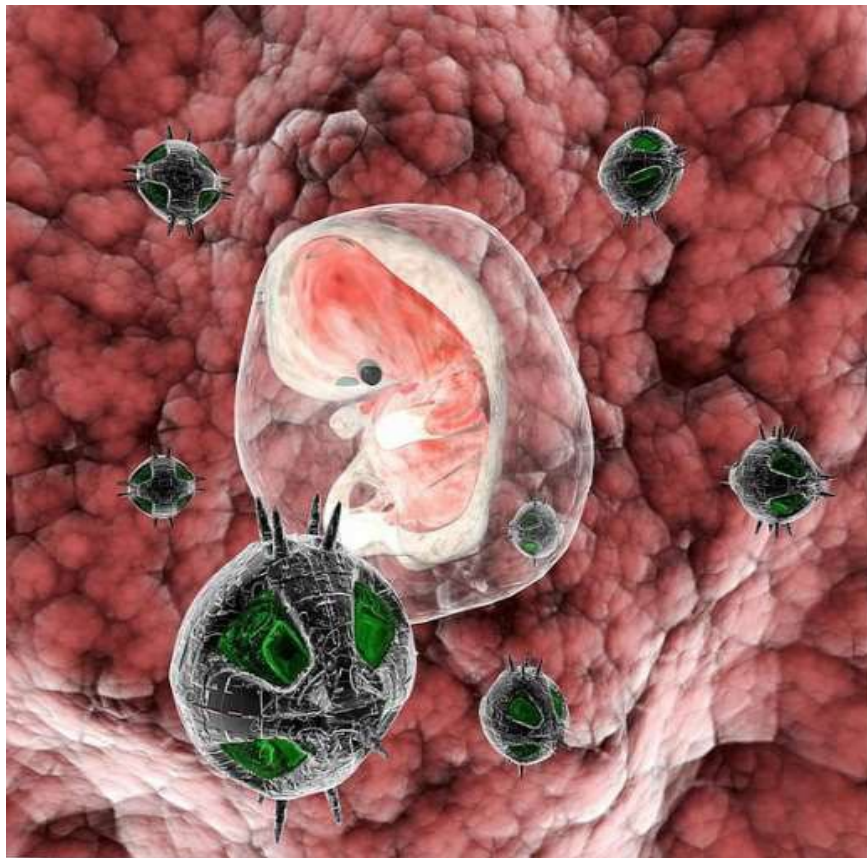


Figure I. 4. Nanorobot avec un embryon par Christian Darkin [15]

Dans le domaine de *l'environnement et des énergies nouvelles*, les nanotechnologies ont joué un rôle indispensable dans la préservation de l'environnement et la réduction des gaz à effet de serre en utilisant des nanomatériaux biodégradables et écologique. La nanotechnologie permettra l'utilisation complète et efficace de la technique de l'énergie de l'hydrogène, par l'utilisation de nouveaux nanomatériaux se caractérisent par une grande capacité de l'absorption de l'hydrogène gazeux. Et il nous permettra de se débarrasser des sources de pollution par l'utilisation meilleure et la plus efficace des ressources naturelles.

En *électronique et les microsystèmes embarqués*, la nanotechnologie a révolutionné le monde l'électronique et les procédés de transfert de l'information et de communication, en particulier les systèmes de conversion d'énergies comme les semi-conducteurs. Les micro/ nanosystèmes électromécaniques MEMS/NEMS ont aussi eu le grand intérêt en matière de recherche et développement. D'ailleurs, Un groupe d'étudiants de MIT ont développé une invention technique de pointe, l'instrument de râpage, de métrologie, d'échantillonnage et de caractérisation le plus performant et exacte en monde (Voir la figure I. 5)

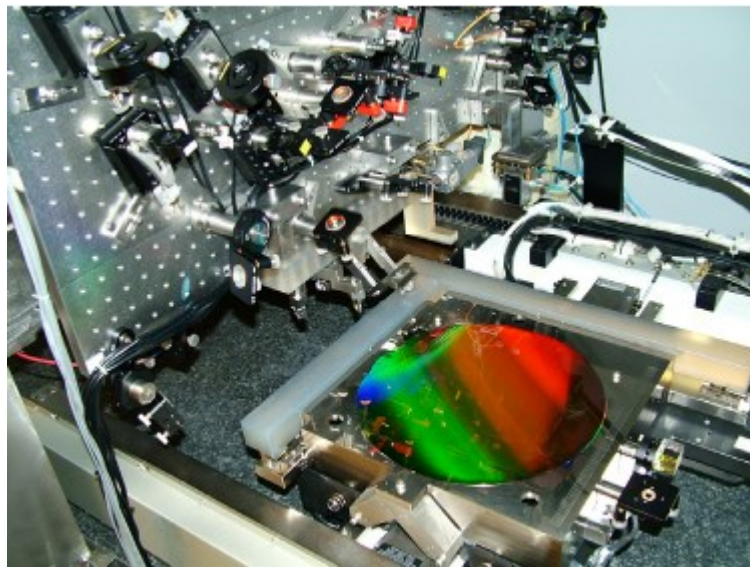


Figure I. 5. «MIT Nanoluer » développé par un groupe d'étudiants de MIT [16].

### I.3. Nanomatériaux et nanostructures à base de carbone

Le carbone est le quatrième élément le plus abondant dans le système solaire et le sixième plus abondant dans l'univers, bien qu'il ne soit que dixième au niveau de l'abondance terrestre. Il existe dans la croûte terrestre à la teneur moyenne de 180 ppm [17], la plupart du temps sous forme de composés, et dans l'atmosphère, sous forme de CO<sub>2</sub>, CO et de méthane.



[18] Il y a trois isotopes :  $^{12}\text{C}$  (98,89 %),  $^{13}\text{C}$  (1,11 %) et des traces de  $^{14}\text{C}$ , lequel est formé à partir de  $^{14}\text{N}$  dans la haute atmosphère, du fait du bombardement de neutrons. On peut distinguer trois formes allotropiques pour le carbone élémentaire : le graphite, le diamant et les fullerènes.

### I.3. 1. Du graphite au fullerène

Le graphite est un solide noir de structure hexagonale (forme cristalline stable) comme représenté sur la figure I. 6. Il est constitué de plans de graphène empilés suivant un mode ABAB avec une distance entre plans de 3,35 Å. Le graphite possède un point de sublimation élevé (3650°C) et est semi-conducteur. Tous les atomes de carbone sont hybridés  $sp^2$ , autorisant ainsi une délocalisation des électrons  $\pi$  et la conduction électrique au sein d'un plan.

Le diamant, quant à lui, ne comporte que des atomes de carbone dans un état d'hybridation  $sp^3$ , ce qui lui confère la dureté la plus élevée parmi les matériaux naturels. La structure cristalline la plus courante est le diamant cubique. Enfin, il possède une très grande conductivité thermique, c'est un très bon isolant et il est transparent.

Le fullerène a été découvert en 1985 conjointement par Harold Kroto (Université de Sussex, Royaume-Uni), Robert Curl et Richard Smalley (Université de Rice, Etats-Unis) en vaporisant un disque de graphite par ablation laser [19].

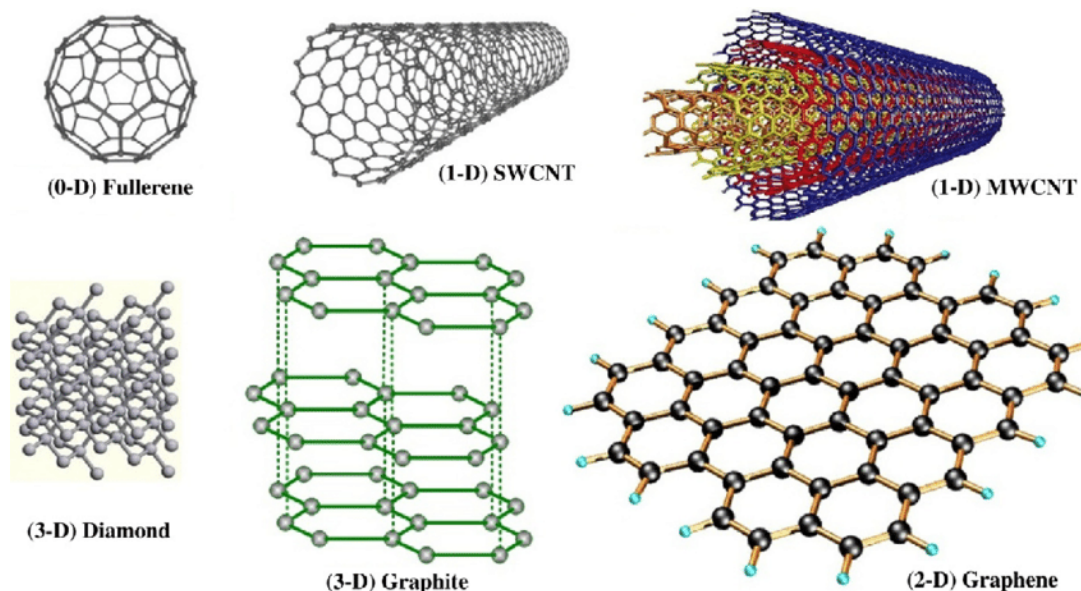


Figure I.6. Structure du : graphite, diamant, et fullerène [20]

Cette découverte leur valut le prix Nobel en 1996. Cette molécule, refermée sur elle-même comme une cage, a la forme d'un icosaèdre tronqué et est donc constituée de douze faces pentagonales, vingt faces hexagonales et soixante atomes de carbone. Elle fut nommée "bukminsterfullerène" [21] ou fullerène par analogie aux dômes géodésiques inventés par

l'architecte Richard Buckminster Fuller. D'autres formes de fullerènes ont été synthétisées et isolées depuis, parmi lesquelles le C<sub>70</sub>, le C<sub>76</sub>, le C<sub>84</sub>,... La figure 1. 6 illustre les différentes allotropies du carbone.

### I.3.2. Nanotubes de carbone

Un type de fullerène fut découvert avant le C<sup>60</sup> et demeure peu étudié à l'heure actuelle : il s'agit des oignons de carbone (ou buckyonions), constitués de plusieurs couches de graphène empilées les unes sur les autres en une structure fermée. L'intérêt porté aux oignons, découverts dès 1980 par Iijima [22], se développa en 1992 lorsque D. Ugarte [23] découvrit une technique de synthèse reproductible de ces nouvelles structures de carbone.

La technique proposée par Ugarte, qui reste à ce jour la plus connue, consiste à irradier dans les nanostructures de carbone qui se transforment progressivement en des objets nanométriques généralement décrits comme des arrangements de sphères de carbone concentriques séparées d'une distance de 3,4Å. Les études portant sur leurs propriétés physiques sont assez peu nombreuses car les différents modes de synthèse (techniques de recuit, de dépôt CVD, implantation ionique) ne peuvent encore en produire que de très faibles quantités. Plusieurs types de carbone filamenteux existent suivant leurs dimensions et l'arrangement des plans de graphène. Ils sont classiquement classés en deux grandes familles (Figure I.7) : les nanotubes de carbone, mono-paroi (SWNTCs), double parois (DWCNTs) et multi-parois (MWCNTs). Il y a aussi les nano-fibres de carbone (NFCs). Des structures intermédiaires, comme des NTCs de type "bamboo" sont parfois aussi obtenus.

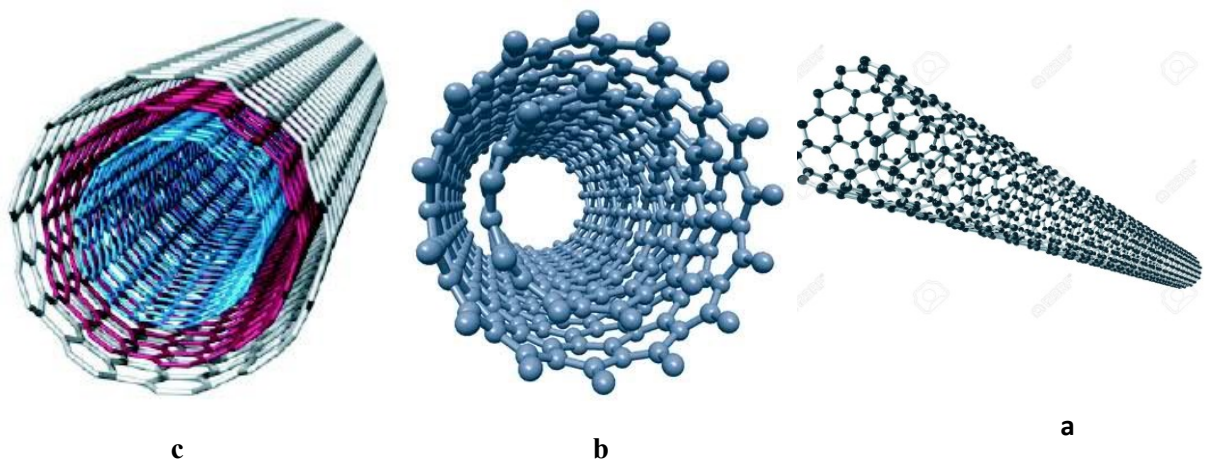


Figure. I.7. Types CNTs : (a) mono-paroi (SWCNT), (b) double-parois (DWCNT), (c) multi-parois (MWCNT) [23]

Un nanotube mono-feuillet (Figure 1. 8) est une feuille de graphène enroulée sur elle-même, de manière à former un cylindre unique. Le nano-objet obtenu est alors unidimensionnel. Les atomes de carbone restent dans un état d'hybridation  $sp^2$ . Le nanotube idéal ainsi formé présente deux extrémités, qui peuvent être fermées par deux dômes, comme des demi-fullerènes, mais pouvant comporter des défauts dans le cas d'un nanotube réel. L'enroulement de la feuille de graphène.

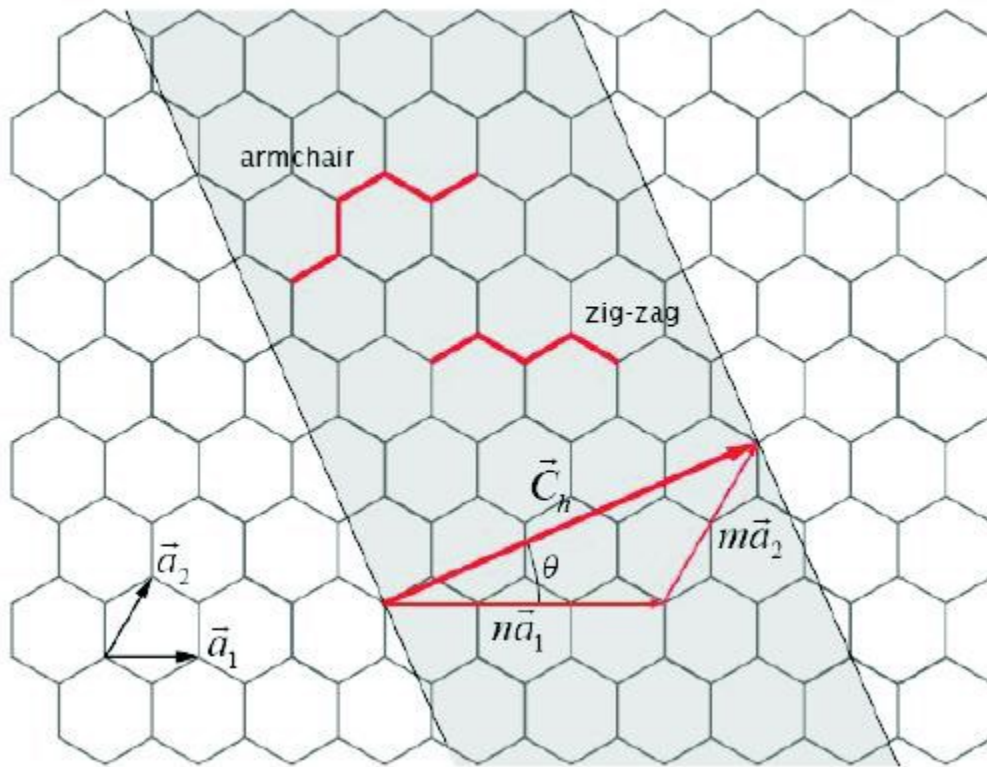


Figure. 1.8. Structure d'un plan de graphène en deux dimensions. Le réseau hexagonal est décrit à partir des deux vecteurs de base de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  [24]

Le nanotube de carbone présente une structure originale qui dérive, selon le regard qu'on lui porte, de la fibre de carbone ou du fullerène. Il n'existe pas une unique structure « nanotubes de carbone » mais on observe de multiples configurations possibles. C'est notamment cette diversité qui conduit à la richesse de ses propriétés et lui confère tout son intérêt. Cette partie s'attache à décrire cette structure, les formes carbonées dérivées ainsi que celles dont les nanotubes de carbone sont issus. Il existe une infinité de configurations possibles. Elles sont définies par un vecteur de chiralité noté  $C$  ou bien par un angle d'hélicité  $\theta$  et un diamètre (voir figure I.9). Aussi, les nanotubes de carbone mono-feuillet peuvent prendre la forme de groupe de cordes ou faisceaux [25].

Ch est exprimé dans la base définie par les vecteurs primitifs du réseau de la feuille du graphène ( $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ ) et correspond au vecteur AB des deux noeuds qui se superposent par enroulement. On a :

$$Ch = n \cdot \vec{a}_1 + m \cdot \vec{a}_2 \text{ avec } (n, m) \in \mathbb{N}^2$$

Trois types d'arrangements sont distingués :

- $\phi = 0^\circ$ , soit  $m = 0$ , les hexagones de carbone décrivent un cercle perpendiculaire à l'axe du tube ; cette forme est appelée **zigzag**.
- $\phi = 30^\circ$  soit  $m = n$ , les hexagones de carbone sont alignés parallèlement à l'axe du tube ; cette forme est dénommée **armchair**.
- $0 < \phi < 30^\circ$  ou  $n \neq m$ , les cycles forment une hélicité intermédiaire entre zig-zag et armchair. Le nanotube alors qualifié de **chiral**.

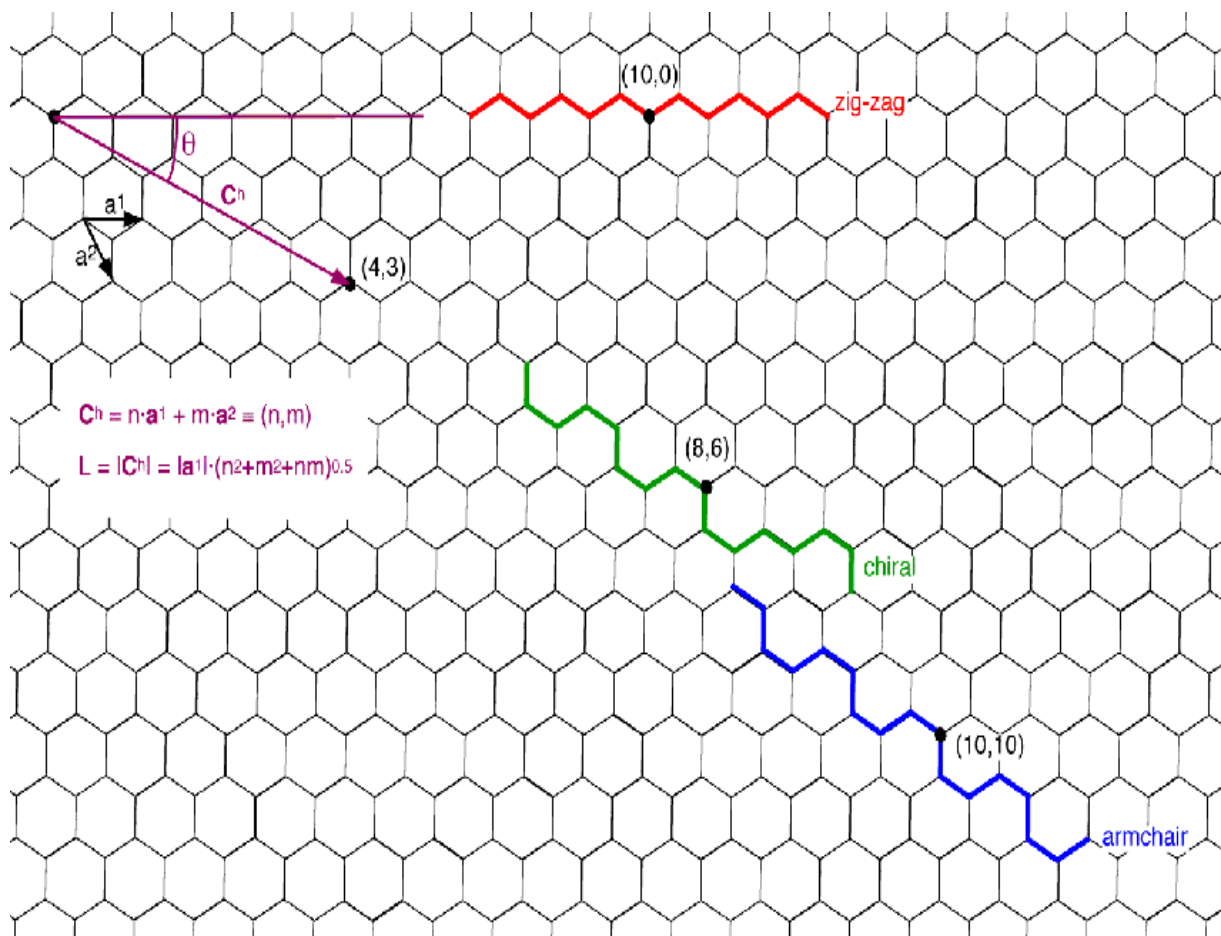


Figure. I. 9. Les différents types d'enroulements de nanotubes de carbone [24]

### 1.3.3. Propriétés des nanotubes de carbone

Les nanotubes de carbone ont des propriétés physiques exceptionnelles, Les principales propriétés des nanotubes et nanofibres (NFCs) de carbone sont résumées sur le Tableau I.1 :

Tableau I.1 : Propriétés physiques des nanotubes et des nanofibres de carbone [26]

	SWNTCs	MWNTCs	NFCs
Diamètre (nm)	0.5-2(1-1.5)	5-200(10-40)	10-500(50-100)
Longueur	De quelques $\mu m$ à 20 cm	Quelques centaines de $\mu m$	Quelques centaines de $\mu m$
$d_{002}(A)$	-	3.39-3.48	3.36-3.44
Densité apparente(g/ $cm^3$ )	0.5-1(film)	0.02-0.3	0.3-1.4
$S_{BET}$ ( $m^2/g$ )	400-900	150.450	10-250
Porosité ( $cm^3/g$ )	Porosité micro $V_{micro} : 0.15-0.3$	Porosité de Meso $V_{micro} : 0.5-2$	Porosité de Meso $V_{micro} : 0.2-2$
Module de Yong (TPa)	1.05-1.3	0.5-1.2	0.3-0.7
Résistivité électrique ( $\Omega.cm$ )	$6.10^{-4}$	$0.6-2.10^{-4}$	1.5-3
Conductivité électriques (S /cm)	550	80-1000	300
Conductivité thermique (M/K.m)	1000-6000 <sup>d</sup>	300-3000	800-2000

#### 1.3.3.1. Propriétés mécaniques

La force des liaisons C-C confère aux nanotubes des propriétés mécaniques exceptionnelles. Des calculs théoriques prédisent tout d'abord ces propriétés : des valeurs de 1 à 5 TPa furent calculées pour le module d'Young axial de SWNTs (des valeurs comparables à celle du module

d'Young tangentiel pour un feuillet graphène, à savoir  $\sim 1,0$  TPa). Les premières valeurs expérimentales du module d'Young ont été estimées sur des nanotubes multicouches isolés, par la mesure de leurs vibrations intrinsèques thermiques en microscopie électronique à transmission. Elles sont de l'ordre du TPa, avec une moyenne estimée à 1,8 TPa, mais avec des valeurs pouvant atteindre 4 TPa. D'autres mesures furent réalisées, en utilisant cette fois-ci la microscopie à force atomique. Elles donnèrent des valeurs de 1,3 TPa pour des MWNTs et de 1,0 TPa pour des SWNTs [27]. Les nanotubes peuvent subir en tension des déformations extrêmes (jusqu'à 10%- 20 %) sans montrer de signes de déformation plastique ou de rupture fragile. La forte capacité des nanotubes à subir des déformations réversibles est due à la flexibilité du feuillet graphène, à la possibilité qu'ont les atomes de carbone de se ré-hybridiser avec un degré d'hybridation  $sp^2/sp^3$  dépendant de la contrainte. Ces ré-hybridations permettent, lors de l'application d'une contrainte, la propagation des défauts dans les réseaux graphènes des parois. Notons enfin que la compression de nanotubes monocouches conduit à une réduction de volume exceptionnellement grande et réversible. La densité augmente rapidement avec la pression, jusqu'à approcher celle du graphite, et retrouve sa valeur initiale après l'arrêt de l'application de la pression. Cette capacité des SWNTs à absorber réversiblement de l'énergie mécanique a été attribuée à un changement de forme réversible de la section transversale des tubes, passant de circulaire à elliptique et vice-versa [28].

### I.3.3.2. Propriétés électroniques

Les propriétés électroniques des SWNTCs varient périodiquement de métallique (environ 1/3 des hélicités) à semi-conducteur (2/3 des hélicités possibles), en fonction de leur hélicité et de leur diamètre [29]. Les nanotubes mono-paroi peuvent être considérés comme des fils quantiques purs dans lesquels les électrons sont confinés le long de l'axe du tube, se comportant comme des conducteurs balistiques pouvant ainsi conduire les électrons sans échauffement. Une conductivité électrique de  $3.104 \text{ S.cm}^{-1}$  a été déterminée pour un faisceau de SWNTCs [30]. L'étude des propriétés électroniques des MWNTCs est beaucoup plus complexe. En effet, chaque paroi ayant sa propre hélicité, il est difficile de faire des calculs prédictifs. Cependant, à haute température, la conductivité de ces matériaux se rapproche des modèles semi-classiques utilisés pour le graphite et les fibres de carbone, tandis qu'à basse température, ils se comportent comme des conducteurs quantiques 2D [31].

### 1.3.3.3. Propriétés Thermiques

Le plan de graphène possède une conductivité comparable à celle du diamant (au voisinage de  $103 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  à  $300^\circ\text{K}$ ). La structure particulière des nanotubes permet de penser que leur conductivité doit également être importante le long de l'axe du nanotube. La mesure de la conductivité thermique des nanotubes est délicate, cependant, quelques études expérimentales ont permis de mesurer la conductivité thermique de nanotubes multi-feuillets. Leur conductivité est grande (de 600 à  $2000 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) mais significativement plus faible que celle du graphite.

### 1.3.3.4. Propriétés optiques

Les nanotubes possèdent des propriétés de limitation optique dans une large gamme de longueurs d'onde, depuis le visible jusqu'au proche infrarouge. Des seuils faibles de non linéarité et de grandes densités optiques ont été obtenues lors de l'étude de dispersions aqueuses de nanotubes monocouches. Ces performances égalent ou surpassent celles d'autres bons limiteurs optiques, comme le C60 ou le noir de carbone, que ce soit dans le visible ou le proche infrarouge. Les dispersions liquides de nanotubes monocouches apparaissent donc comme des systèmes prometteurs pour une limitation optique à bande large. D'autres solvants ont été essayés, comme l'éthylène glycol ou le chloroforme. Plusieurs phénomènes optiques non linéaires peuvent être à l'origine d'une limitation optique : réfraction, absorption, diffusion. L'origine de la limitation dans le cas des nanotubes est essentiellement une forte diffusion non linéaire engendrée par la formation de bulles de solvant à la surface des nanotubes et par une sublimation des tubes à plus forte fluence. Il est à noter que des MWNTs dispersés dans un film de polymère, en l'occurrence du PMMA, ont montré également des propriétés de limitation optique large bande [32].

### 1.3.3.5. Propriétés de capillarité

Le nanotube peut être considéré comme un « nano-fil » creux qu'il est possible de combler par capillarité. On peut ainsi encapsuler à l'intérieur du nanotube des métaux ou bien des macromolécules comme des fullerènes. Ces structures à base de fullerène appelées « peapods » ont été observées la première fois par Smith et al. Des métallo-fullerènes peuvent être aussi encapsulés dans les SWNT. De nombreux métaux (le plus souvent des terres rares) peuvent être ainsi isolés à l'état atomique et arrangés sous la forme d'une chaîne. Il s'agit là d'une des très rares structures où des atomes peuvent être observés et analysés de manière isolée.

### I.3.3.6. Propriétés d'adsorption de gaz

Lorsqu'on considère une assemblée de nanotubes, la surface accessible à des molécules de gaz se restreint a priori à leur surface externe. Cependant, après coupure des tubes, le canal central de chaque tube devient accessible. Si l'on considère une assemblée de nanotubes monocouches préalablement coupés, les surfaces sur lesquelles peuvent se produire l'adsorption sont :

- la surface externe des fagots ;
- les espaces interstitiels entre tubes au sein des fagots
- l'intérieur des nanotubes monocouches.

De telles surfaces, aux morphologies variées, rendent les nanotubes particulièrement attractifs pour des études de physisorption, d'autant plus que l'arrangement des atomes de carbone de leur surface est très voisin de celui d'un plan de graphène. Les objectifs de ces études sont :

- l'influence du confinement : l'adsorption dans le canal central d'un SWNT conduit à un système quasi-unidimensionnel.
- l'identification des différents sites d'adsorption ;
- l'effet de courbure du feuillet graphitique sur les propriétés d'adsorption.

### I.3.4. Procédés de synthèse des nanotubes de carbone

Jusqu'à présent, de nombreux procédés de synthèse des CNT ont été employées. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. Parmi ces méthodes on cite :

- *Décharge par arc électrique*

Ce procédé nécessite l'emploi de deux électrodes de graphite, qui sont toutes les deux disposées dans une atmosphère d'hélium ou d'un gaz rare sous une pression de l'ordre de 600 mbar. Les électrodes sont distantes l'une de l'autre de quelques millimètres (de l'ordre de 2 à 3 mm). Sur l'anode se trouve un trou, qui est rempli de poudre de carbone et d'un catalyseur du type cobalt (Co) ou nickel (Ni). Une décharge, créée par un courant de l'ordre de 100 A, produit une chute de tension de 30-40 V, qui se traduit par une élévation de la température à la surface de l'anode. Les CNT grandissent au passage du courant sur l'anode à la vitesse d'un millimètre par minute à des températures situées entre 1000 et 1400 °C. Ainsi le temps de déposition n'excède pas 2 minutes. Cette technique permet une production massive de CNT avec, en outre, un haut degré de graphitisation [33].



- **Ablation par laser**

L'ablation par laser est un procédé de synthèse utilisant des lasers ayant une puissance variant entre 4.2 kW et 1 MW. On utilise les lasers du type IR, CO<sub>2</sub>, UV ou encore ArF pouvant fonctionner de manière pulsée ou continue. Ils peuvent être couplés et ainsi élever la température effectuant la pyrolyse. En effet, le substrat et le mélange gazeux d'hydrocarbure sont chauffés simultanément par le laser et réagissent pour former la déposition sur le substrat. Les gaz utilisés sont le plus souvent le méthane (CH<sub>4</sub>) et l'acétylène (C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>). La température du substrat (par ex. Si, Inox ou Al) avoisine les 500 °C. Cette méthode permet de produire des couches de diamant mais aussi de CNT à une seule couche. Ce procédé permet de découvrir et d'observer pour la première fois les fullerènes en, or, depuis, cette technique s'est révélée très généreuse dans la synthèse de nanotubes fortement graphitisés et à une seule paroi, [34]

- **Elaboration par CVD (Chemical Vapor Deposition) [35]**

Le principe d'élaboration de nanotubes de carbone par CVD (Chemical Vapor Deposition) repose sur la décomposition d'un gaz carboné à la surface d'une particule catalytique nanométrique. Cette technique a déjà été utilisée en 1970 pour la croissance de nanofibres de carbone. Ce procédé a plusieurs avantages par rapport aux procédés de synthèse à haute température. Premièrement il permet une croissance localisée des tubes en contrôlant le positionnement des particules catalytiques. Ensuite il n'est plus utile de passer par des techniques de purification des nanotubes, ils sont directement utilisables.

#### **I.4. Dynamique des nanostructures tournantes et nano-turbomachines**

Dans cette section, nous allons entamer l'investigation des nanomatériaux et nanostructures étudiés en rotation. Il est à noter que les applications des nanostructures tournantes n'avaient pas eu un intérêt en étude et recherche. De nos jours, la miniaturisation est omniprésente : voitures, hélicoptères, satellites, calculateurs, mémoires, téléphones....

Aujourd'hui on commence à construire des nano-machines dont les domaines d'application concernent des disciplines telles que la biologie, la physique, l'automatique...

En fait, il y a bien longtemps qu'artisans puis ingénieurs s'évertuent à développer le savoir-faire d'une réduction en taille des machines pour nous faire bénéficier de ses avantages.

On s'émerveille encore du calculateur astronomique d'Anticythère qui deux siècles avant notre ère faisait entrer un système solaire en miniature dans la maison du philosophe grec Hipparchus. Il était fait d'une trentaine d'engrenages en bronze chacun d'un diamètre de quelques centimètres. Transmis par la science arabe aux horlogers de la fin du moyen âge puis revisités par un Blaise Pascal pour sa machine à calculer mais aussi par les amoureux des automates, ces

mécanismes miniatures ont longtemps tenu la technologie des machines sans trop se voir réduire en taille.

La technologie monolithique inventée avec la micro-électronique a ensuite donné une nouvelle impulsion à la miniaturisation des dispositifs électroniques et mécaniques

L'utilisation du mouvement de rotation d'une roue autour d'un axe a conduit à la conception de machineries mécaniques à engrenages multiples puis, plus tard, aux moteurs lançant ainsi la révolution industrielle. L'échelle d'un nanomètre, la plus petite échelle pour créer une roue, représente aux yeux des chimistes et des physiciens un véritable défi. Depuis quelques années, les chimistes du CEMES travaillent à la conception puis à la synthèse de molécule-machines munies de roues. Étape par étape, ils ont été les premiers à défricher ce domaine avec leurs collègues de l'Université Libre de Berlin (équipe du Dr Leonhard Grill). L'originalité [36] de l'approche consiste à travailler sur une seule molécule à la fois, choisie parmi un grand nombre, déposée sur une surface métallique.

Avec sa pointe ultra fine stabilisée à moins de 1 nm de la surface par un courant électrique induit par l'effet tunnel, le microscope à effet tunnel (STM) cartographie ces molécules. Cette pointe permet ensuite de les manipuler une à la fois afin d'étudier les propriétés mécaniques de chacune de ces molécule-machines.

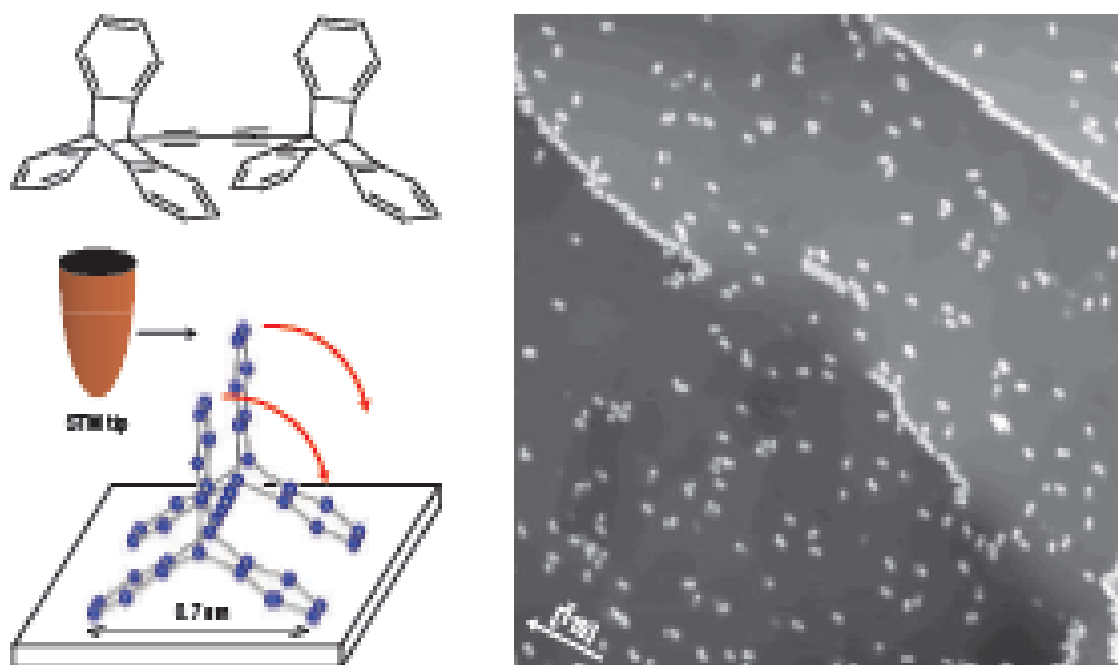


Figure. I. 10. Des molécules ( $C_{44}H_{24}$ ) avec deux roues tournantes (diamètre 0.8nm) [36]

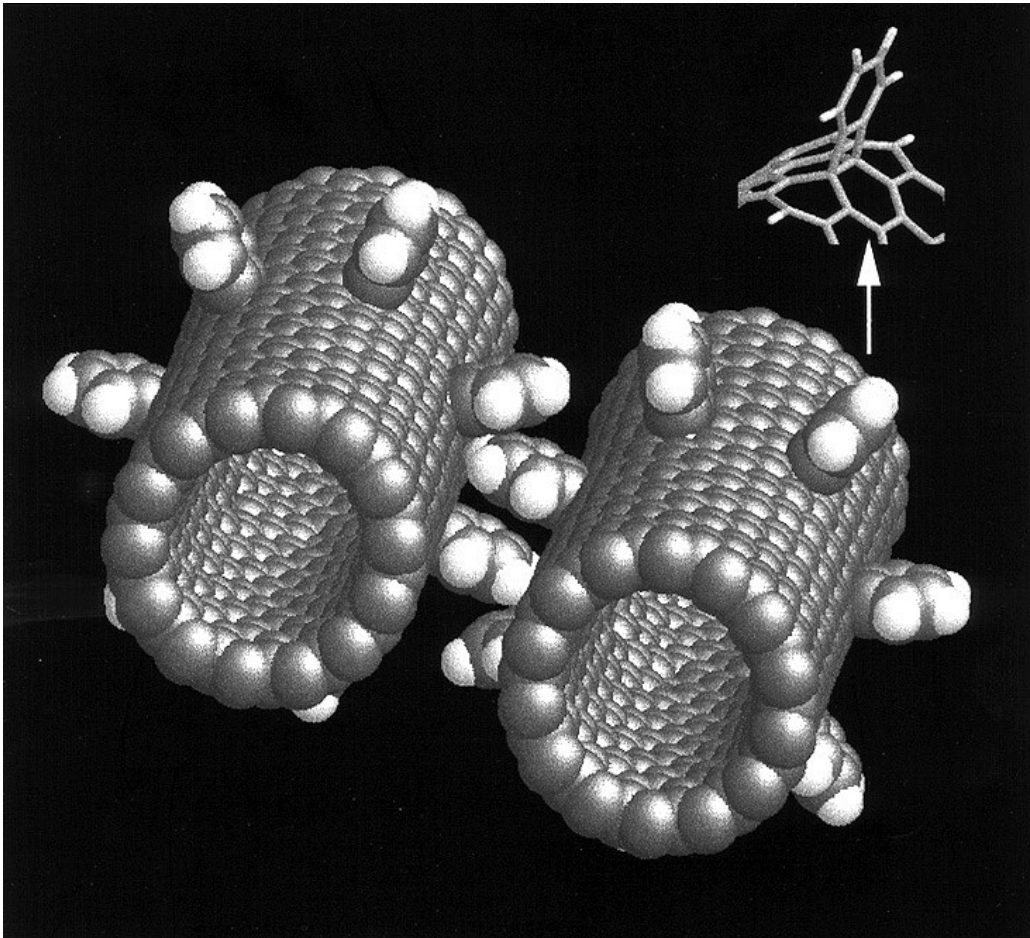


Figure I. 11. Un engrenage à base de nanotubes de carbone avec des dents en benzène [37]

Un groupe de chercheurs à l'agence spatiale américaine (NASA) [37] ont développé un mécanisme à engrenage à base de nanotubes de carbone avec des dents en benzène (figure I. 11) qui s'adhèrent parfaitement avec  $C^{60}$ , la théorie de la dynamique moléculaire a été employée pour étudier les interactions intermoléculaires.

Un nanorotor, développé par des ingénieurs et physiciens de l'université de Purdue (Indiana), effectue 60 milliards de tours par minute [38] ; c'est le rotor le plus rapide jamais construit jusqu'à maintenant, 100'000 fois plus rapide qu'une brosse à dents électrique moyenne. L'objet nano-particulaire fait la taille d'une bactérie : 170 nm de largeur pour 320 nm de longueur. Il est donc invisible à l'œil nu. « Généralement, les gens disent qu'il n'y a rien dans le vide, mais en physique on sait que ce n'est pas le cas » explique Li. « Le vide est rempli de nombreuses particules virtuelles qui apparaissent et disparaissent. Nous voulons mieux comprendre cette dynamique du vide, c'est pourquoi nous avons construit cette balance de torsion ultra-sensible ». L'avantage d'une nanoparticule en rotation suspendue dans le vide est que cela permet d'effectuer des mesures extrêmement précises, non perturbées par les courants d'air ou les

fluctuations de température. Bien qu'il s'agisse actuellement du rotor nano-particulaire le plus rapide, cette équipe n'est pas la seule à travailler sur les particules en rotation dans le vide. Un tel dispositif ouvre une fenêtre d'exploration inestimable sur la dynamique de la matière à l'échelle quantique. La figure I. 12 illustre le dispositif de l'étude, deux haltères à base silice de deux dimensions ont été étudiés : (a) haltères de silice de 200nm et (b) haltères de silice de 100nm, ils donnent un diagramme de balance de torsion (a) et une lévitation du pince optique polarisée linéairement sous vide (b).

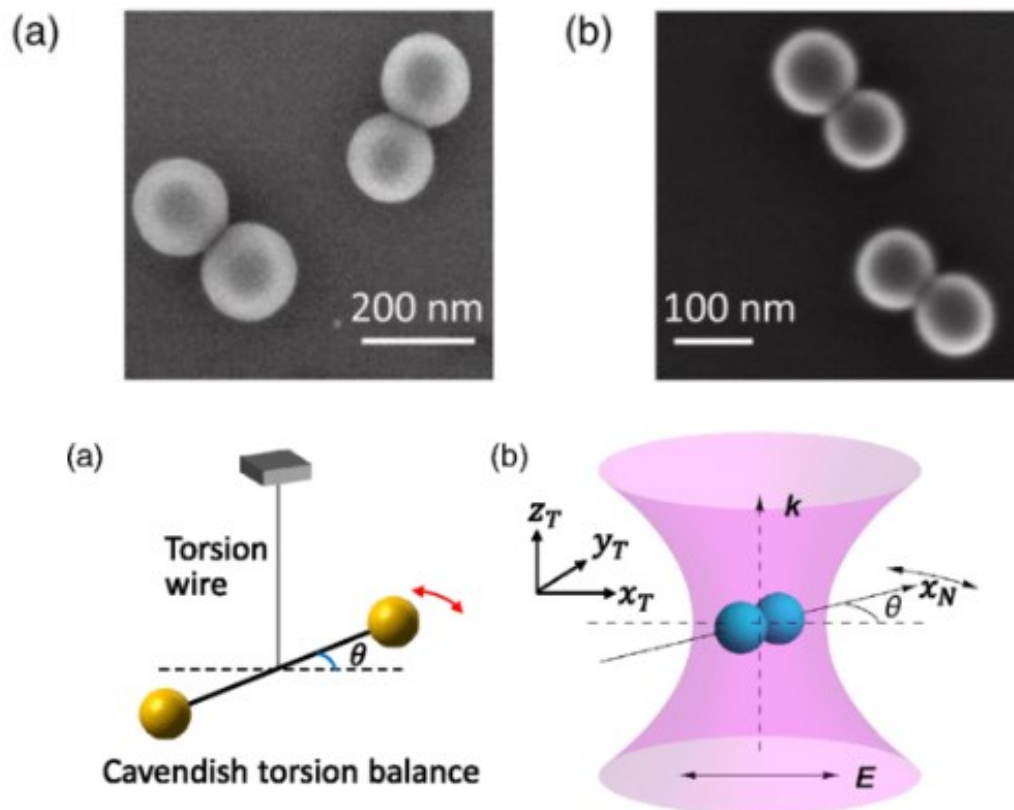


Figure. I. 12. Le nanorotor le plus rapide en monde [38]

Le dispositif pourrait servir à tester expérimentalement le fonctionnement de la gravité ou encore la friction dans le vide. « Cette invention a de multiples applications, dont la science des matériaux » explique Tongcang Li, physicien et auteur principal de l'étude. « Nous pouvons étudier la résistance des matériaux dans des conditions extrêmes ».

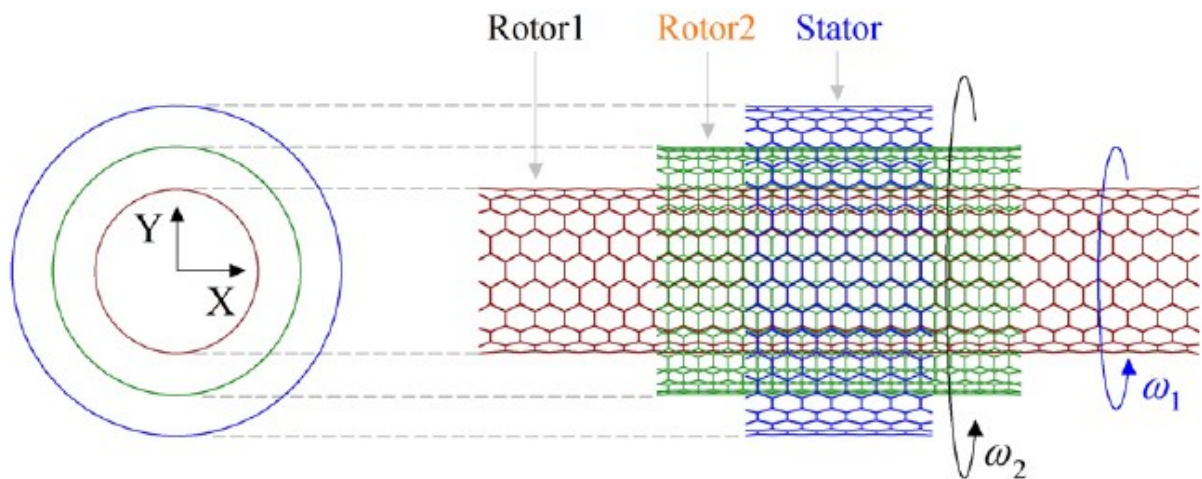


Figure. I. 13. Schéma illustratif d'un rotor à base d'un MWCNT

Shi et al. [39] ont développé un nano-système rotatif (nanorotor-nanostator), le rotor est à base de nanotube de carbone double-parois (DWCNT) et le stator est un SWCNT (voir Figure I.13). Le rotor tourne avec une fréquence très élevée pour s'échapper du stator. Ce mécanisme a été conçu pour être appliqué comme pallier ou roulement pour les nano-machines. La réalisation expérimentale a montré que l'évasion du rotor s'assurera quand le jeu radial entre les deux tubes en rotation dépassera 0,34nm et la vitesse de rotation du tube en milieu dépassera une valeur critique qui ne doit pas être dépassé par le rotor intérieur. Quand ces deux conditions sont présentes le déplacement du rotor intérieur a eu naissance après la perte de co-axialité entre les deux rotors, et la force centrifuge qui engendre des interactions axiales et radiales entre les deux rotors.

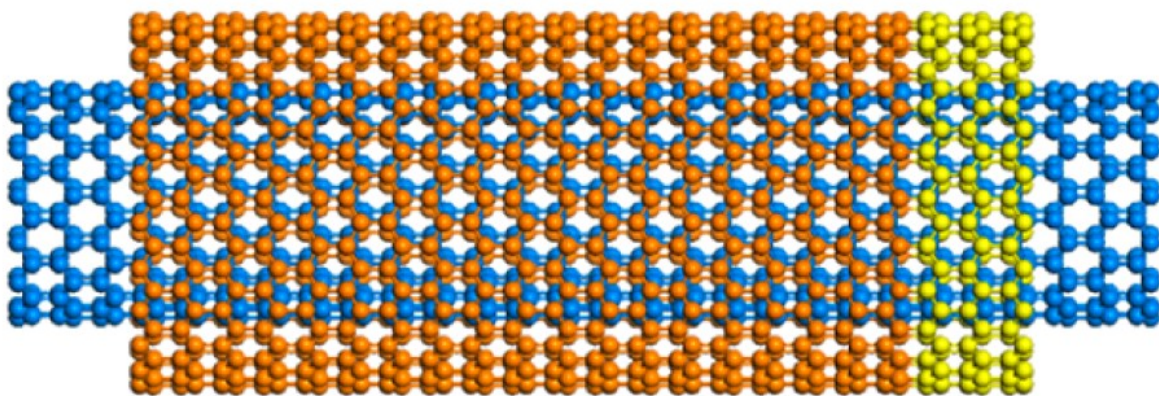


Figure. I. 14. Un nanorotor auto-excité à base de DWCNT lié à des atomes [40]

Wang et al. [40] ont examiné la possibilité de conduire des mouvements rotatifs à l'échelle nanométrique avec un tunnel d'électrons, ils ont utilisé la théorie du dynamique moléculaire pour modéliser le mécanisme composé d'un nanotube de carbone en rotation lié à des tiges moléculaires (lames) par des liaisons covalentes (figure I. 14), ce modèle proposé est efficace et applicable comme nano-moteur quand il y a du bruit et des défauts.

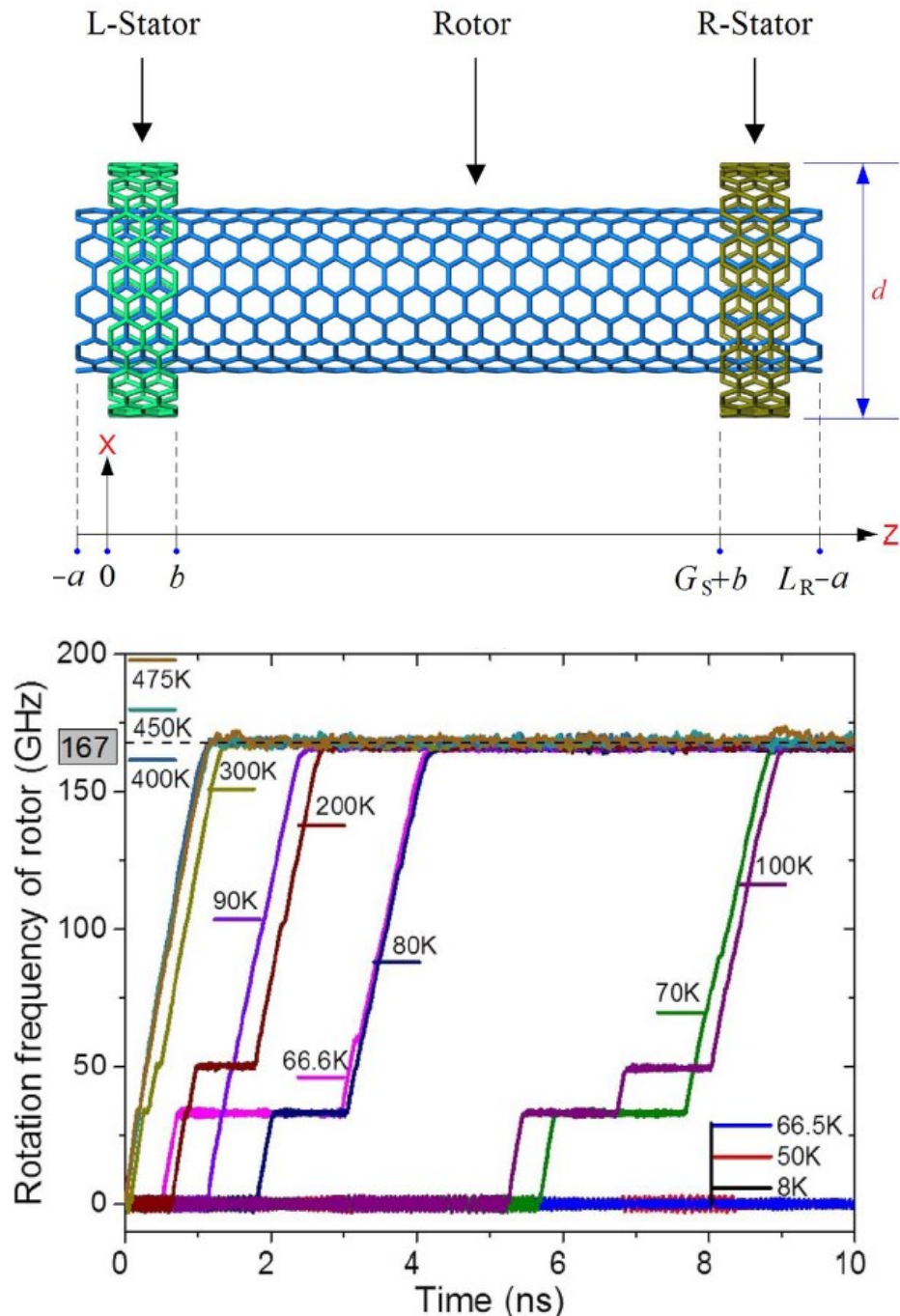


Figure. I. 15. Un nano-moteur (avec deux nano-stator et nanorotor à base de SWCNT) et sa fréquence de rotation [42]

Un autre modèle innovant proposé par des chercheurs chinois [41] qui ont examiné le comportement oscillatoire d'un CNT à double parois (DWCNT) par la simulation moléculaire (Dynamique moléculaire MD). La simulation a montré qu'une auto-excitation a eu naissance par une attraction déséquilibrée entre les deux tubes, l'oscillation se propage avec l'augmentation de la vitesse de rotation du tube intérieur jusqu'à naissance d'un zig-zag  $>0,335\text{nm}$  qui se comporte comme un oscillateur THz.

Les mêmes chercheurs [42] ont développé et étudié un nano-moteur à entraînement thermique à base de SWCNT, la simulation par dynamique moléculaire a montré l'influence de certains paramètres comme la température, la longueur du tube, le jeu axial entre les tubes, les diamètres des tubes, et la déviation radiale des atomes vers l'intérieur du stator, sur la stabilité fréquentielle (figure. I. 15) du nano-moteur.

Dans ce chapitre une revue bibliographique a été élaborée, en rapportant la théorie des turbomachines, une initiation aux technologies et sciences de « nano » et les nouvelles applications émergentes et innovantes au domaine de nanotechnologie et nano-mécanique à base des nanomatériaux et nanostructures majoritairement en nanotubes de carbone.

# Chapitre 2

## Théorie des nanostructures

**Objectif :**

L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie des nanostructures en particulier des nanopoutres. En réduisant l'échelle d'étude des structures un autre approche physique s'intervienne pour modéliser la structure à l'échelle « nano » ; le nouveau approche, nouveau par rapport son utilisation pour l'étude de la dynamique des structures, développé par Eringen qui explique exactement ce qui ce passe réellement à l'échelle infinitésimale comme phénomène dynamique, c'est la théorie d'élasticité non locale qui sera appliquée pour étudier notre nanorotor considéré comme nano-poutre.



## II.1. Les modèles continus (Mécanique des milieux continus) Classiques

Les modèles « continus » décrivent un tel system physique donné en terme de quelques variables comme : la température, la masse, le voltage... qui sont très convenables pour des mesures directes ; leur efficacité, exactitude, particularité étaient démontrées et testées à travers l'histoire des sciences de mécanique des structures, une branche d'étude très ancienne en mécanique, qui s'est développée pour répondre à des besoins de construction. Elle repose sur l'utilisation de modèles simplifiés, qui vont permettre l'analyse des structures de façon rapide.

Ces modèles exploitent une caractéristique essentielle des structures qui sont des solides déformables tridimensionnels : leurs trois dimensions ne sont pas du même ordre de grandeur. Il y a ainsi deux catégories de structures.

- les structures minces dont une dimension (l'épaisseur) est très petite devant les deux autres ;
- les structures élancées dont une dimension (la longueur) est très grande devant les deux autres.

Ces structures constituent aujourd'hui l'immense majorité des structures industrielles, et ce dans tous les domaines : aéronautique, automobile, construction ferroviaire et navale, génie civil, etc. Ces deux types de structures sont aussi souvent combinés entre elles, par exemple en renforçant des plaques par des poutres. La popularité de ces structures vient du fait qu'elles présentent des propriétés optimales en termes de raideur et de résistance, vis-à-vis de la quantité de matière utilisée.

La théorie de la Mécanique des Structures a été initiée au 17eme siècle, donc bien avant la Mécanique des Milieux Continus (MMC) dont le formalisme actuel a été mis au point au début de la seconde moitié du 20eme siècle. Les modèles simplifiés développés sont assis sur des hypothèses a priori validées à l'époque par l'expérience. Ce n'est seulement que dans la seconde moitié du 20eme siècle que ces modèles ont été justifiés a posteriori. En effet, les mathématiciens appliqués ont démontré leur bien fondé, au sens asymptotique du terme. Ainsi, lorsque la minceur d'une structure tend vers zéro ou son élancement vers l'infini, la différence entre la solution du problème de l'élasticité tridimensionnelle et du modèle simplifié tend vers zéro. Ces modèles simplifiés sont respectivement le modèle de Love-Kirchhoff pour les structures minces, et celui de Navier-Bernoulli pour les structures élancées.

Pour modéliser le solide, nous utiliserons une description lagrangienne du mouvement, c'est-à-dire par les trajectoires. De plus, nous utiliserons les hypothèses de l'élasticité linéaire. Cela nous permettra de décrire la loi de comportement du matériau de manière simplifiée. On ajoute

également les hypothèses de petits déplacements, petites déformations, et on considèrera le repère du laboratoire comme Galiléen. Enfin, aux vues des dimensions du rotor, nous ferons les hypothèses associées à la théorie des poutres.

## II. 2. Structure poutre

De manière générale, on peut considérer qu'une structure poutre ou un élément de structure sera de type poutre si l'une de ses dimensions (la longueur) est supérieure devant les deux autres. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

### Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres.

\*L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [43] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".

\* L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

\*L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

\*L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

### Remarques importantes

1) L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.

2) L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes  $\sigma_{ij}$  en chaque point de la section droite.

Dans ce chapitre, on va discuter tous les modèles qui traitent la théorie des poutres, sachant que notre étude prend en considération le modèle d'euler-Bernoulli.

Considérons un élément poutre de longueur  $L$  et de section transversale circulaire de rayon  $r$ . selon les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , les déplacements axial, latéral, et transversal sont, respectivement :  $u_x, u_y, u_z$ .

### II. 2. 1. Modèle d'Euler-Bernoulli (EBT)

La vibration se produit dans un des principaux plans de la flexion d'une poutre et dont les dimensions en coupe sont petites en comparaisant de sa longueur, le champ de déplacements donné par Reddy (2007) [44] est :

$$u_x(x, y, z, t) = z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

$$u_y(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (\text{II.3})$$

L'élément de déformation non nul est bien :

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.4})$$

Donc, l'équation gouvernante d'une poutre Euler-Bernoulli est :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q - \bar{N} \frac{d^2 w}{dx^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.5})$$

Où :  $q$  est la force transversale,  $N$  est la force normale de compression appliquée,  $M$  moment de flexion,  $m_0$  est l'inertie massique.

$$m_0 = \int_{dA} \rho dA = \rho A$$

### II.2. 2. Modèle de Timoshenko (TBT)

Cette théorie est une amélioration du modèle d'Euler-Bernoulli puisqu'elle tient compte également de l'inertie de rotation et de la déformation de cisaillement qui se produit dans une poutre pendant qu'il vibre. Le modèle implique deux équations différentielles de mouvement.

La théorie de Timoshenko (ou la théorie de modèle épais) explique tous les deux l'effet de la déformation rotatoire d'inertie et de cisaillement, qui est négligée une fois appliqué à la théorie d'Euler-Bernoulli appelée aussi la théorie du modèle mince.

Dans le paragraphe précédent les dimensions en coupe du modèle ont été considérées comme très petites en comparant de la longueur et l'équation qui a été employée pour la courbe de déflexion. Des corrections seront maintenant données, tenant compte de l'effet des dimensions en coupe sur la fréquence. Ces corrections peuvent être d'importance considérable en étudiant les modes de la vibration des fréquences plus élevées quand une poutre vibrante est subdivisée par les coupes nodales en parties comparativement courtes.

Le champ de déplacements décrit par Timoshenko est sous la forme suivante :

$$u_x(x, y, z, t) = z\phi(x, t) \quad (\text{II. 6})$$

$$u_y(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{II. 7})$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (\text{II. 8})$$

Avec :  $\phi$  est la rotation de la section transversale

Les déformations sont donc :

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{II. 9})$$

$$\gamma_{xz} = \phi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II. 10})$$

Selon Reddy :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{dw}{dx} \quad (\text{II. 11})$$

$$Q = K_s GA \left( \phi + \frac{dw}{dx} \right) \quad (\text{II. 12})$$

$K_s$  : facteur de correction de cisaillement.

Donc l'équation gouvernante d'une poutre de Timoshenko est :

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = m_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{II. 13})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{II. 14})$$

$$(m_0, m_2) = \int_{dA} (1, z^2) \rho dA$$

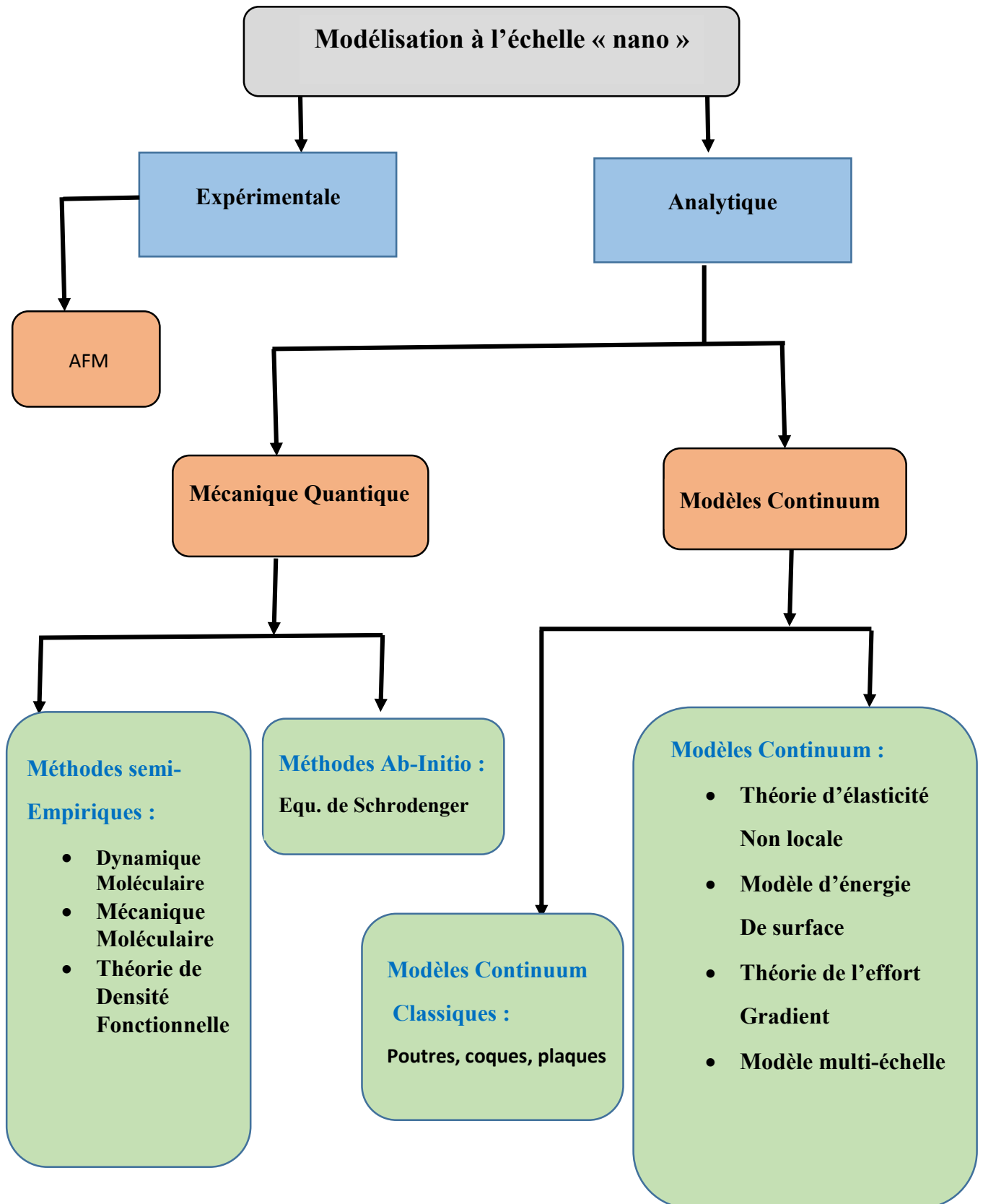
### II. 3. Les modèles continus (Mécanique des milieux continus) simplifiés

Contrairement à la théorie de relativité d'Einstein assimilant la continuité réelle. L'application de calcul différentiel de Newton est inadmissible pas uniquement dans les formulations modernes en physique des de la matière condensée le génie des matériaux mais aussi en philosophie [44, 45], cependant, on peut penser en zéro et à l'infinité et effectuer un calcul exacte sans admettre la validité de « naïve » le continuum de la géométrie de l'espace-temps [46-51]. Il est semblable que les ingénieurs en grosso modo surtout les mécaniciens sont les premiers à penser aux conséquences pratiques des concepts théoriques marginales comme la rotation d'un point. Les travaux des frères Cosserat [52, 53] pour le discret physique « granulaire » que ça soit élastique ou plastique ou comme connu « continua » en science et ingénierie, mécanique appliqué et les mathématiques [54, 56], Or, à l'exception de certaines extensions de la relativité, le concept profond de l'infini « granulaire » espace-temps est relativement loin et moins établi dans la physique quantique théorique et la cosmologie quantique [57].

Le monde physique est composé des atomes en mouvement sous l'effet des interactions entre eux, ces interactions à l'échelle microscopique sont l'origine de plusieurs phénomènes physiques à l'échelle macroscopique. Une investigation atomistique aide à identifier les quantités macroscopiques, leurs corrélations et à promouvoir la compréhension des théories physiques.

Pour expliquer le départ de mécanique des milieux continus (figure II. 1) à l'échelle micro/nanométrique de celle des théories classiques, une approche continuum non locale décrit ces interactions intermoléculaires. Donc, pour descendre à l'échelle atomique, il est nécessaire de trouver un modèle adéquat qui prend en considération l'effet de l'échelle infinitésimale, cela est répondu par la simulation par dynamique moléculaire qui est applicable pour quelques problèmes. Or, l'alternatif le plus utilisé est la théorie d'élasticité non locale développé par Eringen [58, 62]. Cette théorie prend en considération l'action des forces interatomiques, ce qui mène à la dépendance de la contrainte d'un un point aux contraintes de tous les points du corps.

Figure II. 1. Différentes méthodes et théories pour étudier les nanostructures



**AFM: Atomic Force Microscope**

## II. 4. Théorie d'élasticité non locale

La théorie d'Eringen adapte l'effet de l'interaction des adjacents proches, elle dit que le tenseur de contrainte à un point  $x = (x_1, x_2, x_3 \dots)$  ne dépend pas uniquement de la contrainte de point référentiel  $x$  mais de la contrainte au point  $x'$  du corps. La forme générale de la relation constitutive d'Eringen implique un intégral sur la totalité de la région d'application, l'intégral contient la fonction non locale de Kernel qui décrit l'influence relative de la déformation aux différentes locations sur la contrainte à une location donnée.

L'équation constitutive d'un solide élastique linéaire, homogène, isotropique, non local avec des forces nulles est de forme :

$$\sigma_{kl,l} + \rho(f_l \ddot{u}_l) = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\sigma_{kl}(x) = \int_{\Omega} \alpha(|x - x'|, \xi) \sigma_{kl}(x') d\Omega(x') \quad (\text{II.16})$$

$$\sigma_{kl}^c(x') = \lambda e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(x') \quad (\text{II.17})$$

$$e_{kl}(x') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(x')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(x')}{\partial x'_k} \right) \quad (\text{II.18})$$

L'équation (II.15) est l'équation d'équilibre, où  $\sigma_{kl,l}$ ,  $\rho$ ,  $f_l \ddot{u}_l$  sont le tenseur de contrainte, la densité et densité de force du corps et les déplacements, respectivement.

L'équation (II.17) est la relation constitutive classique,  $\sigma_{kl}^c(x')$  est le tenseur de contrainte classique à un point  $x'$  quelconque du corps.  $e_{kl}$  Tenseur des contraintes,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes élastiques.

L'équation (II.18) est la relation classique déformation-déplacement, la seule différence entre (II.15) et (II.18) est l'équation (II.17) qui rapporte le tenseur de contrainte global  $\sigma_{kl}(x)$  au tenseur de contrainte classique  $\sigma_{kl}^c(x')$  avec le module de non localité  $\alpha(|x - x'|, \xi)$  qui est la fonction de kernel.

$\Omega$  est l'espace occupé par le corps.

Or, le module de non localité peut être écrit sous la forme :

$$\alpha = \alpha(|x - x'|, \xi) \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$\xi = \frac{e_a a}{l}$$

$e_a$  coefficient correspondant à la nature de matériau.

$a$  : longueur intérieure caractéristique

En revenant à certaines hypothèses, les équations intègro-partielles différentielles de l'élasticité non local peut être simplifié à une équation différentielle comme suite [63] :

$$(1 - \xi^2 l^2 \nabla^2) \sigma_{kl}(x) = \sigma_{kl}^c(x) = C_{klmn} \xi_{mn}(x) \quad (\text{II. 20})$$

La validité de cette dernière équation était justifiée en comparant les expressions des fréquences du modèle non local avec celles du modèle de Born Karman pour le dynamique treillis [63].

Donc, pour la théorie d'élasticité non locale, il y a une forme différentielle comme suite :

$$[1 - (e.a)^2 \nabla^2] \sigma^{nl} = \sigma^l \quad (\text{II. 21})$$

Avec :  $\nabla^2$  c'est le laplacien  $(e.a)^2$  c'est le paramètre non local (paramètre de l'échelle).

## II. 5. Limites de la théorie d'élasticité non locale

D'après Eringen à travers son ouvrage « Nonlocal continuum theories » (2002), toutes les théories physiques possèdent un champ d'application en dehors duquel elles sont incapables de fournir des résultats précis et cohérents [62]. Cela se traduit par des prédictions numériques qui divergent de façon notable par rapport aux résultats expérimentaux ou des résultats théoriques présentant des singularités mathématiques inacceptables. De nombreux exemples viennent illustrer cette assertion. Dans le cadre de la théorie classique de l'élasticité, le champ de contrainte prédit sur le front d'une fissure ou sur une ligne de dislocation est infini. Le même type de singularité est constaté au point d'application d'une force ponctuelle ou au voisinage de défauts ponctuels. Les théories non-locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point de solide. Ce type d'approche, dont la formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

## II. 6. Types de non localité

La dépendance locale d'une quantité physique (effet  $r$ ) à un point  $x$  de l'espace à l'instant  $\tau$  ( $r(x, y, z, \tau)$ ). Une autre quantité physique (cause  $P$ ) au même point  $x$  et au même instant  $\tau$  ( $r(x, y, z, \tau)$ ) à la forme générale suivante :



$$r(x, y, z, \tau) = r(p(x, y, z, \tau)) \quad (\text{II. 22})$$

On peut distinguer les types de non localité suivants :

### II. 6. 1. Non localité spatiale

C'est à dire l'effet R au point x et à l'instant  $\tau$  dépend aux causes de différents points et au même instant  $\tau$ .

$$R(x, y, z, \tau) = \int_V (\alpha(|x - x'|, \xi)) r(p(x', y', z', \tau)) dx' dy' dz' \quad (\text{II. 23})$$

$\alpha(|x - x'|, \xi)$  Module de non localité spatiale, avec :

$$\xi = \frac{L_{int}}{L_{ext}}$$

### II. 6. 2. Non localité Temporelle

L'effet R à un point x et à l'instant  $\tau$  dépend à l'historique des causes du point x sur tous le temps précédent à l'instant présent.

$$R(x, y, z, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \beta(\tau - \tau', \zeta) r(p(x, y, z, \tau')) d\tau' \quad (\text{II.24})$$

$\beta(\tau - \tau', \zeta)$  Module de non localité temporelle, avec :

$$\zeta = \frac{T_{int}}{T_{ext}}$$

$T_{in}$  est le temps caractéristique interne (temps de relaxation, temps pour qu'un signal voyage entre les molécules),  $T_{ext}$  est le temps caractéristique externe (le temps d'application de l'action extérieure, période de vibration, etc.).

### II. 6. 3. Non localité Mixte

C'est l'effet simultané d'une non localité spatiale et temporelle pour ce cas on a un effet R à un point x et à l'instant  $\tau$  qui dépend aux causes à tous les points de l'espace et à tous les instants  $\tau \leq \tau'$

$$R(x, y, z, \tau) = \int_V \int_{-\infty}^{\tau} \gamma(|x - x'|, \tau - \tau', \zeta) r(p(x, y, z, \tau')) dx' dy' dz' d\tau' \quad (\text{II.25})$$

V le volume occupé,  $\gamma(|x - x'|, \tau - \tau', \zeta)$  module de non localité mixte.

## II. 7. Théorie d'élasticité non locale à gradient

Il existe deux formulations légèrement différentes de cette théorie. La première repose sur la philosophie suivante. Pour matérialiser l'influence de la microstructure interne, chaque point matériel du solide possède des degrés de liberté supplémentaires, qui correspondent à des micro-contraintes et des microdéformations additionnelles. Les bases de la théorie ont été posées dans les années 60 par plusieurs chercheurs. Dès le début des années 1970, Eringen a lui aussi contribué à son développement. Cette théorie a permis d'étudier de nouveaux modèles de comportement, à travers, notamment, la définition des milieux micro-morphes, micro-stretches ou micro-polaires. Dans ce type de modèle, le solide est constitué d'un ensemble de particules matérielles qui sont susceptibles de se dilater, se contracter ou tourner sur elles-mêmes. Ces degrés de libertés supplémentaires engendrent des micro-contraintes qui viennent s'ajouter à la contrainte classique prévue par la théorie locale.

Citons aussi les travaux de Gao qui introduit dans les équations d'équilibre non locales les moments liés aux rotations relatives des particules les unes par rapport aux autres [64]. Selon ces auteurs, l'introduction de gradients d'ordre supérieur permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau sur la loi de comportement.

Sous sa forme la plus simple, l'équation de comportement de la théorie des gradients s'écrit :

$$\sigma = C(\mathcal{E} - \mu^2 \nabla^2 \mathcal{E}) \quad (\text{II. 26})$$

Où  $\sigma$  et  $\mathcal{E}$  correspondent respectivement au tenseur de contrainte de Cauchy et au tenseur de déformation linéarisé. Rappelons que l'opérateur nabla ( $\nabla$ ) a pour composantes en coordonnées cartésiennes  $\nabla(\cdot) = (\partial \cdot / \partial x; \partial \cdot / \partial y; \partial \cdot / \partial z)$ . Le paramètre « $\mu$ » est homogène à une longueur, représentative de la microstructure interne du matériau. On peut d'ores et déjà remarquer que lorsque « $\lambda$ » s'annule, on retrouve le modèle classique de comportement élastique (loi de Hooke généralisée).

Par ailleurs, notons que des formulations plus élaborées de l'équation de comportement (II.26) ont été proposées.

## II. 8. Théorie d'élasticité non-locale intégrale

La théorie non-locale à gradients est une formulation non-locale souvent qualifiée de « faible ». Il y a une autre théorie non-locale c'est l'approche non-locale intégrale ou « théorie non-locale forte ». Cette formulation a été développée initialement dans les années 1960 par Krumhansl, Kroner, et Kunin [65-67]. Ces auteurs partent du même constat : dans le cadre de l'élasticité

classique, les forces de cohésion à l'intérieur d'un solide sont modélisées par des forces de contact dont la portée est nulle. Or, les forces de cohésion dans un matériau réel possèdent clairement une certaine portée et ont donc un rayon d'influence non nul. Pour remédier à cette insuffisance, Kroner propose d'affiner la théorie des milieux continus élastiques en y introduisant des forces d'interaction à longue distance. De son côté, Krumhansl a travaillé sur la conversion de la théorie des réseaux en une théorie continue.

Une formulation améliorée de l'approche non-locale, qui précise les relations de comportement dans le cadre de la thermodynamique, est présentée par Eringen et Edelen au début des années 1970 [68]. Dans le cadre non-local, l'énergie interne en un point dépend du champ de déformation dans tout le solide. De ce fait, le premier principe de la thermodynamique doit être intégré sur l'ensemble du domaine d'étude.

Edelen et Laws [69,70] ont proposé une formulation « locale » du premier principe dans laquelle apparaît un terme d'énergie résiduel supplémentaire. Ce résidu non-local représente l'énergie transmise en un point par tous les autres points du solide.

La loi de comportement proposée par Eringen peut se mettre sous la forme suivante :

$$t_{ij}(x) - C_{ijkl} = \int_{\Omega} \alpha(|x - x'|, l) \xi_{kl,l}(x') d\Omega(x') \quad (\text{II.27})$$

Où  $t$  et  $\varepsilon$  sont respectivement le tenseur de contrainte non-local et le tenseur des déformations linéarisé.

$C$  correspond au tenseur d'élasticité et  $\alpha(|x' - x|, l)$  est la fonction de caractérisation non-locale.

## II.9. Théorie d'élasticité non locale appliquée aux nanostructures.

### II. 9. 1. Nano-plaques

Plusieurs travaux de recherches ont été faits traitants l'analyse dynamique des nanostructures qui sont souvent utilisés dans les systèmes électromécaniques (NEMS/MEMS), généralement les structures plaques nanométriques étudiées sont les mono feuilles de graphène [71-73], Abdoulhai et Ghassimi [74] ont étudié ces nano-feuilles par la méthode d'élasticité non locale et en utilisant la méthode des quadratures différentielles (DQM). Le flambage de ces nano-feuilles est également étudié à part [75, 76] et avec la vibration [77].

Bachher et Sarkar [78] ont établi une nouvelle théorie non locale pour les matériaux thermoélastiques généralisés contenant du vide basé sur la théorie d'Eringen et la dérivative fractionnelle de Caputo pour étudier la propagation de l'onde dans les matériaux

thermoélastiques infinis. Récemment, l'analyse structurale des nano-plaques a attiré l'attention de plusieurs chercheurs en étudiant leur statique et dynamique et dans différents milieux et conditions [79-84].

### II. 9. 2. Nano-coques

Arefi et Zenkour [85] ont étudié une nano-coque en FGM avec des propriétés matériels supposé d'être du céramique avec un métal ayant une loi de distribution d'énergie basé sur la théorie non-local, ils ont utilisé l'approche FSDT (First\_order shear deformation theory) pour les déformations simultanées en axial et en radial. Farajpour [86] a analysé le flambage magnéto électro-élastique des nano-coques dans un environnement thermique. D'autres travaux de recherches traitants le sujet des nano-coques ont été menés récemment [87-91].

Torkman-asadi et al. [92] ont étudié les vibrations libres des nanotubes de carbone à hautes vitesses de rotation dans des fondations élastiques de type Winkler, ils ont employé la théorie des coques pour étudier la géométrie CNTs, les équations gouvernantes ont été engendré en introduisant la théorie de Love [93], ils ont étudié l'effet de la vitesse de rotation, de la fondation élastique et du paramètre nonlocal sur les fréquences naturels.

Hussain et al. [94] ont évalué les fréquences fondamentales des SWCNT à l'aide de WPA (wave propagation approach) sur la base de Théorie de la coquede Donnell. L'effet de la rigidité dans le plan, de la masse volumique par unité de surface latérale avec différents indices de fauteuil et de zigzag ont été pris en compte. Zeighampour et al. [95] a mené une étude sur la vibration des DWCNT en utilisant la théorie des contraintes de couple. L'équation du mouvement a été développée avec Théorie de la coque de Donnell utilisant des conditions aux limites libres simplement soutenues et bloquées. Les résultats ont été présentés pour la longueur, la vitesse et l'amortissement des nanotubes des fondations de Pasternak. Les effets de fréquences ont été présentés avec l'influence des forces de van der Walls et du fluide dans le DWCNT. La conclusion de ce travail est que les résultats prévus sont plus précis que celui des calculs antérieurs.

### II. 9. 3. Nano-poutres

La théorie d'élasticité non locale a été largement employée dans l'analyse structurale des nano-poutre. En effet, Apuzzo et al. [96] ont proposé une modélisation non locale pour les nano-poutres basé sur une forme spéciale d'énergie libre dépendante à un facteur qui mène à un problème structurale d'équation différentielle d'ordre six, ils ont utilisé la méthode des éléments finis et montré l'efficacité de cet approche. Bagdatli et Togun [97] ont employé une nano-poutre d'Euler-Bernoulli pour la vibration et l'analyse de stabilité de cette nano-poutre transmettant

un fluide. Barati [98] a étudié l'effet du surface et de l'échelle réduit sur la vibration non linéaire des nano-poutres flexoélastiques exposés à un champ magnétique, il a utilisé la méthode Galerkin pour satisfaire les conditions aux limites, il a montré l'effet significatif de certains paramètres comme : l'intensité du champ magnétique, l'effet de l'échelle, la fondation élastique et le voltage appliqué sur la vibration non linéaire.

Belhadj et al. [99] ont étudié la vibration linéaire d'une nano-poutre (SWCNT) dans un milieu élastique en utilisant la théorie d'élasticité non locale et la méthode DQM, ils ont montré l'effet de l'échelle et le milieu élastique sur la dynamique vibratoire du SWCNT. Ils ont [100] aussi étudié l'employabilité de l'élasticité non locale en vibration des nano-poutres.

Dans ce chapitre, une formulation mathématique pour la modélisation des nanostructures par la théorie non classique d'Eringen qui décrit l'élasticité non locale pour les corps solides à l'échelle réduite, est présenté basée sur la théorie des nano-plaques, nano-coques et nano-poutres. La théorie des nano-poutres D'Euler-Bernoulli sera employé ensuite pour modéliser notre nanostructure tournante.

# Chapitre III

## Dynamique d'un nano-arbre tournant

### **Objectif :**

Dans ce chapitre la formulation mathématique du problème est présentée pour modéliser la dynamique du nanorotor comportant une nano-poutre d'Euler-Bernoulli. La compréhension et la maîtrise du comportement vibratoire des nanostructures tournantes est bénéfique pour le développement des futures nano-machines tournantes pour différentes applications en médecine, biologie, défense, industrie spatiale et industrie mécaniques.

Dans cette partie, Une modélisation mathématique de la dynamique d'un nanorotor est présentée en se basant sur la théorie d'élasticité non locale. Les équations gouvernantes sont générées par le principe des travaux virtuels de Hamilton avant d'être discrétisée par la méthode des quadratures différentielles.

### III. 1. Présentation du problème

Notre structure étudiée est une nano-poutre en rotation employée comme un arbre tournant nanométrique. Le modèle d'Euler-Bernoulli est utilisé pour modéliser le champ de déplacements du nanorotor. La figure III.1 présente les différentes déformations que subit le nanorotor durant sa rotation par rapport à son état statique, dans la figure on a montré la dynamique du nanorotor que suivant la direction  $oy$ , si on présente son dynamique suivant  $oz$  on aura la même configuration avec un déplacement  $w(x)$  et une rotation  $-y \frac{\partial w(x)}{\partial x}$

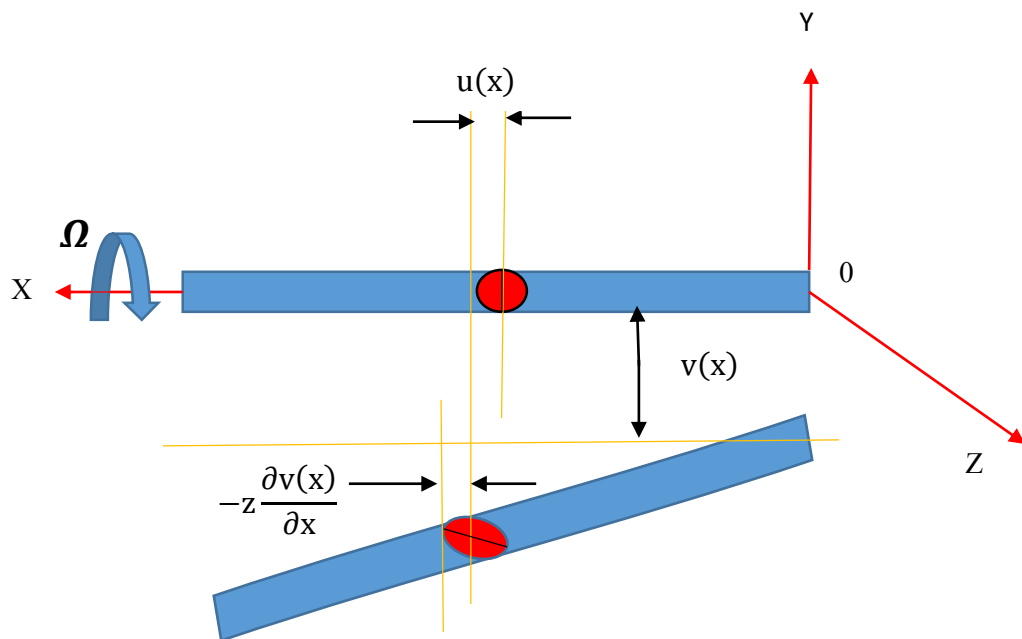


Figure III. 1. Géométrie du nanorotor en rotation.

#### III.1. 1. Equations cinématiques

Si la poutre a une longueur  $L$  est une section transversale de rayon  $r$ , et elle se tourne autour son axe axial avec une vitesse de rotation  $\Omega$ , Des études antérieures ont montré que la théorie de d'Euler-Bernoulli (EBT) offre un modèle fiable pour les nanostructures unidimensionnelles et bidimensionnelles telles que les Nanotubes de carbone, et que la section transversale reste plane pendant la flexion et que le déplacement en flexion est faible. La géométrie en rotation du nano-arbre est référée au système de coordonnées cartésien et modélisée sur la base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, les déplacements, en fonction de  $x, y, z$  et du temps  $t$  sont exprimés comme suit :

$$u_x(x, y, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - y \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{III. 1})$$

$$u_y(x, y, z, t) = v(x, t) \quad (\text{III. 2})$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (\text{III. 3})$$

Avec :  $u, v, w$  sont les déplacements suivant l'axe (ox), (oy) et (oz), respectivement.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \text{ Rotation de la section droite autour de l'axe (oz)}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \text{ Rotation de la section droite autour de l'axe (oy)}$$

### III. 1. 2. Relation déformation –déplacement

Dans le cas des petits déplacements, les relations déformation -déplacement sont les suivantes :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{III. 4})$$

### III. 1. 3. Relations contrainte–déformation

La relation d'élasticité linéaire entre les contraintes et les déformations, appelée loi de

Hooke généralisée, peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{III. 5})$$

Pour notre cas :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III. 6})$$

E: Module de Young..

En utilisant le principe des travaux virtuels de Hamilton [101], qui s'exprime sous la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III. 7})$$



Où :  $\delta U, \delta V, \delta K$  sont les variations de l'énergie de déformation, de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, respectivement.

### III. 1. 4. Energie de déformation

L'énergie de déformation peut se définir comme :

$$U = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dV \quad (\text{III. 8})$$

Or, sa variation est exprimée comme suit :

$$\delta U = \int_0^L \left( N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_y \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - M_z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx \quad (\text{III. 9})$$

Avec  $N_{xx}, M_y, M_z$  sont l'effort normal, et les deux moments résultants suivant oy et oz, respectivement.

$$\begin{cases} N_{xx} = \int_A \sigma_{xx} dA \\ M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA \\ M_z = \int_A y \sigma_{xx} dA \end{cases} \quad (\text{III. 10})$$

### III. 1. 5. Energie de cinétique

L'énergie cinétique est défini comme suit :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + 2\Omega \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + 2\Omega^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III. 11})$$

$$\begin{aligned} \delta K = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[ \dot{u} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \dot{v} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \dot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] + \rho I \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial t \partial x} \right\} \right. \\ \left. + 2\Omega \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\Omega^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III. 12})$$

$\rho$  est la densité,  $A$  est la section transversale,  $I$  est le moment d'inertie autour de la section transversale, et  $\Omega$  est la vitesse angulaire du nanorotor.

### III. 1. 6. Equations gouvernantes

A partir des expressions des énergies et en appliquant le principe de Hamilton, on déduit les équations gouvernantes suivantes :

Nous Remplaçons les équations (III. 9) et (III. 12) dans l'équation (II. 7), en intégrant par parties et en collectant les coefficients  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , On obtient les équations suivantes :

$$\delta u: \quad \rho A \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{dN}{dx} \quad (\text{III. 13. a})$$

$$\delta v: \quad \rho A_y \frac{\partial v^2}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \left(-\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 M_y}{\partial^2 x} \quad (\text{III. 13. b})$$

$$\delta w: \quad \rho A_z \frac{\partial w^2}{\partial t^2} + \rho I_z \frac{\partial w}{\partial t} + 2\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 M_z}{\partial^2 x} \quad (\text{III. 13. c})$$

$$A = \int_A dA, \quad A_y = \int_A z dA, \quad A_z = \int_A y dA$$

$A$ ,  $A_y$  et  $A_z$  sont les sections transversales suivant  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$ , respectivement.

Ces équations obtenues seront ensuite développés en appliquant la théorie d'élasticité non locale d'Eringen [61]. On aura donc le système d'équations suivantes :

$$N - (e. a)^2 \frac{d^2 N}{dx^2} = EA \frac{du}{dx} \quad (\text{III. 14. a})$$

$$M_y - (e. a)^2 \frac{d^2 M_y}{dx^2} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{III. 14. b})$$

$$M_y - (e. a)^2 \frac{d^2 M_y}{dx^2} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{III. 14. c})$$

Pour notre cas :  $I_y = I_z$

Remplaçons les équations (III. 13) chaque'une dans l'équation qui la correspond dans (III.14), on aura donc :

$$\rho A \left[ \ddot{u} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{u}}{dx^2} \right] = EA \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (\text{III. 15. a})$$

$$\rho A_y \left[ \ddot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{v}}{dx^2} \right] + \rho I \left[ \dot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right] - 2\Omega \left( \dot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right) = EI \frac{d^4 v}{dx^4} \quad (\text{III. 15. b})$$

$$\rho A_z \left[ \ddot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{w}}{dx^2} \right] + \rho I \left[ \dot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right] + 2\Omega \left( \dot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right) = EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (\text{III. 15. c})$$

Ces équations gouvernantes issues de l'intégration par partie sont données toujours avec les conditions aux limites décrites dans la partie ci-dessous.

### III. 1. 7. Conditions aux limites

Les conditions aux limites employées dans notre travail pour les deux équations de flexion sont :

Appuyé-Appuyé (A-A)

$$v(\xi = 0) = \frac{\partial^2 v(\xi = 0)}{\partial \xi^2} = v(\xi = 1) = \frac{\partial^2 v(\xi = 1)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{III. 16. a})$$

$$w(\xi = 0) = \frac{\partial^2 w(\xi = 0)}{\partial \xi^2} = w(\xi = 1) = \frac{\partial^2 w(\xi = 1)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{III. 16. b})$$

Encastré-Encastré (E-E):

$$v(\xi = 0) = \frac{\partial v(\xi = 0)}{\partial \xi} = v(\xi = 1) = \frac{\partial v(\xi = 1)}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{III. 17. a})$$

$$w(\xi = 0) = \frac{\partial w(\xi = 0)}{\partial \xi} = w(\xi = 1) = \frac{\partial w(\xi = 1)}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{III. 17. b})$$

Appuyé –Encastré (A-E)

$$v(\xi = 0) = \frac{\partial^2 v(\xi = 0)}{\partial \xi^2} = w(\xi = 1) = \frac{\partial v(\xi = 1)}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{III. 18. a})$$

$$w(\xi = 0) = \frac{\partial^2 w(\xi = 0)}{\partial \xi^2} = w(\xi = 1) = \frac{\partial w(\xi = 1)}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{III. 18. b})$$

Ces conditions aux limites sont exprimées sous la forme locale, la forme non locale sera ensuite introduite dans la méthode numérique utilisée.

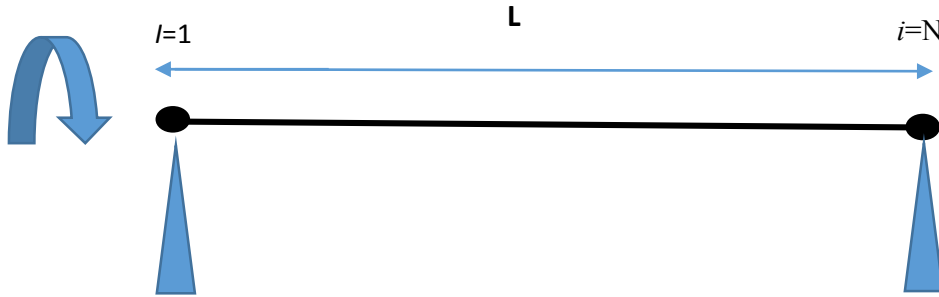


Figure. III. 2. Élément nano-poutre et nœuds de grille

Les déflexions longitudinale, latérale et transversal, respectivement, sont définies :

$$u(x, t) = ue^{i\omega t}, \quad v(x, t) = ve^{i\omega t}, \quad w(x, t) = we^{i\omega t}$$

Le système d'équations gouvernantes deviendra alors :

$$-\rho A \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) u - EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (\text{III.19. a})$$

$$\begin{aligned} -\rho A_y \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) v + \rho I \omega . j \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) v - 2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) j \omega w \\ - EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.19.b})$$

$$\begin{aligned} -\rho A_z \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) w + \rho I \omega . j \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) w + 2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) j \omega v \\ - EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.19. c})$$

## III. 2. Applications sur les nanotubes de carbone

### III. 2. 1. Nano-arbre tournant à base d'un nanotube de carbone mono-paroi (SWCNT)

A l'échelle technologique, la conception et la fabrication de ces blocs de construction nanométrique est très maîtrisé. Grâce à la technologie NEMS, les nano-machines tournantes comme les nano-turbines, les nano-moteurs ont été assemblés de bas en haut à partir d'échelle nanométrique des blocs de construction avec des nano-fils comme rotors, des nano-magnétiques à motifs comme roulements, et microélectrodes quadripolaires en tant que stators. Les tableaux de nano-moteurs peuvent être synchrones tourné avec une grande vitesse angulaire et chiralité contrôlés par courant électrique des champs. Les réalisées dans ce domaine, depuis la conception, jusqu'à l'application ont révolutionné la médecine, l'aérospatiale, la biologie, la fabrication mécanique et productique ainsi la défense.

Notre étude consiste en premier lieu d'étudier le comportement vibratoire d'un nanorotor d'une façon paramétrique sans citer les propriétés physiques du nanorotor en rapportant tous les paramètres à l'unité. Ensuite, L'étude sera appliquée en prenant les propriétés physiques d'un nanotube de carbone mono-paroi (Figure III. 3).

Dans cette section les propriétés de nanotube de carbone mono-paroi (SWCNT) sont prises comme :

Module de Young  $E=971\text{GPa}$ , la densité  $\rho=2300\text{Kg/m}^3$ , Moment d'inertie  $I=\pi d^4/64$ , SWCNT diamètre  $d=0.34\text{nm}$ , coefficient se poisson  $\nu=0.3$ , longueur  $L=10d$ .

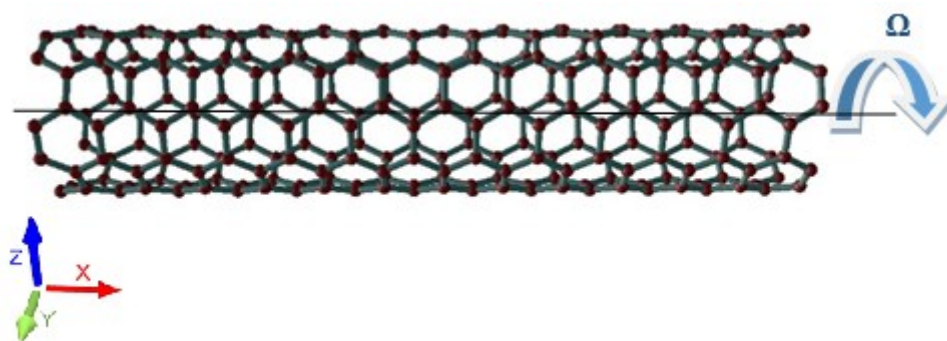


Figure. III. 3. Un nanorotor à base d'un nanotube de carbone

### III. 2. 2. Nano-arbre tournant à base CNT dans une fondation élastique.

La modélisation élastique du l'environnement (milieu étudié) repose sur une hypothèse de comportement de la réaction sous terre sous charge. La relation la plus populaire entre les forces

et les déformations est linéaire en raison de la simplicité de la solution des équations. La réaction élastique du sous-sol est représenté par :

- modèles à un, deux ou trois paramètres
- modèles de continuum
- Modèles mixtes.

### III. 2. 2. 1. Modèle élastique à un seul paramètre

Le modèle à un paramètre développé par Winkler [102] qui suppose que le déplacement vertical d'un point de la base élastique est proportionnel à la pression à cet endroit. et ne dépend pas de la pression aux points adjacents. Le modèle de Winkler peut être interprété comme un système de ressorts verticaux indépendants l'un de l'autre avec une rigidité  $k$ . L'énergie de la fondation élastique est :

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} kh w^2 dx \quad (\text{III. 20})$$

Où  $h$  et  $L$  sont respectivement l'épaisseur et la longueur de la zone déformée et  $w$  est le déplacement verticale. Le modèle de milieu de Winkler suppose que le déplacement n'apparaît que dans la zone chargée. En dehors de cette zone, les déviations sont nulles. Cette hypothèse conduit à un champ de déplacement discontinu, ce qui constitue le principal inconvénient du modèle de Winkler.

### III. 2. 2. 2. Modèle élastique à deux paramètres

Les modèles de sol à deux paramètres rétablissent la continuité de la fondation élastique en introduisant un deuxième paramètre. Les modèles à deux paramètres de Filonenko-Borodich [103], Hetenyi [104] et Pasternak [105] assure la continuité du sol en ajoutant un deuxième ressort qui interagit avec le premier. Dans [106], Kerr généralise le modèle de Pasternak en incluant un troisième ressort dans la direction verticale. L'expression générale de l'énergie de déformation dans les modèles à deux paramètres est :

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} kh w^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{III. 21})$$

La deuxième intégrale de (III.18) comprend le deuxième paramètre  $G$  qui représente la rigidité de un ressort de rotation généralisé. Il existe différentes interprétations de la signification physique de  $G$  et la relation avec le premier paramètre  $k$ :

- modèle de Filonenko-Borodich - le paramètre  $G$  est présenté comme une tension interne force dans un cordon élastique virtuel placé sur les ressorts transversaux qui contraint les déplacements verticaux des ressorts ;
- Modèle Hetenyi - contraint les déplacements verticaux en ajoutant un faisceau imaginaire en se pliant. Le deuxième paramètre représente la rigidité de la poutre ;
- modèle Pasternak - le paramètre  $G$  représente le module de cisaillement d'une couche virtuelle qui intègre les éléments à ressort verticaux ;
- modèle de Vlasov-Leontiev - les paramètres  $k$  et  $G$  sont obtenus à partir des valeurs de rapprochées d'élasticité continuum en faisant des hypothèses pour le champ de déplacement.

### III. 2.3. Formulation mathématique

Dans cette section, on essaye de modéliser un système d'une machine tournante nanométrique construite d'un arbre tournant (figure III. 4) embarqué dans un milieu élastique uniquement suivant la direction  $(oz)$  afin d'éviter le couplage des paramètres suivant  $(oy)$  et  $(oz)$ .

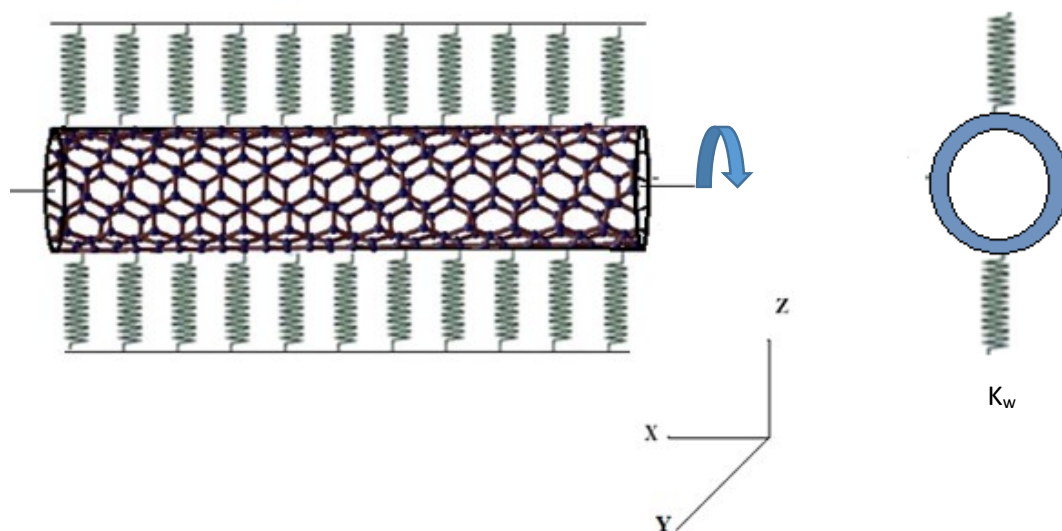


Figure. III. 4. Arbre tournant nanométrique embarqué dans un milieu élastique.

En introduisant, la fondation élastique ou situe le nano-arbre tournant (SWCNT) qui est une pression  $P(x) = -kx$  exercée sur le CNT en raison du milieu élastique qui est opposée aux déviations du CNT, cette pression est aussi sera modélisé par la théorie d'élasticité non locale.

$$P(x) - (e.a)^2 \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = -k \left[ w - (e.a)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (\text{III. 22})$$

En remplaçant (III.19) dans (III.15.c) on obtient le système d'équations suivant :

$$\rho A \left[ \ddot{u} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{u}}{dx^2} \right] - EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (\text{III. 23. a})$$

$$\rho A_y \left[ \ddot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{v}}{dx^2} \right] + \rho I \left[ \dot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right] - 2\Omega \left( \dot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right) - EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (\text{III. 23. b})$$

$$\begin{aligned} \rho A_z \left[ \ddot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \ddot{w}}{dx^2} \right] + \rho I \left[ \dot{w} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right] + 2\Omega \left( \dot{v} - (e.a)^2 \frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right) - EI \frac{d^4 w}{dx^4} \\ = -k \left[ w - (e.a)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III. 23. c})$$

En remplaçant les déflexions, on aura :

$$-\rho A \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) u - EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (\text{III.24. a})$$

$$\begin{aligned} -\rho A_y \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) v + \rho I \omega . j \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \dot{v} - 2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) j \omega w \\ - EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24.b})$$

$$\begin{aligned} -\rho A_z \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) w + \rho I \omega . j \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \dot{w} + 2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) j \omega v \\ - EI \frac{d^4 w}{dx^4} + k \left[ w - (e.a)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24. c})$$



### III. 3. Résolution du système d'équations

Le problème est régi par un système d'équations différentielles complexe sous la forme (Annexe .II) :

$$(-\lambda^2[M] + j\lambda[G] + K). (U, V, W)^T = 0 \quad (\text{III. 25})$$

Avec : M : la matrice de masse

G : la matrice de l'effet gyroscopique

K : la matrice de rigidité

Quand  $\Omega = 0$ , Le système sera réduit en éliminant la matrice de l'effet gyroscopique comme suit:

$$(-\lambda^2[M] + K). (U, V, W)^T = 0 \quad (\text{III. 26})$$

Pour une vitesse de rotation non nulle, l'équation (III. 26) sera transformée par un changement de variable matriciel pour simplifier le calcul. Après la transformation on obtient [107] :

$$-\lambda^2[A]\dot{u}_{tr} + [B]u_{tr} = 0 \quad (\text{III. 27})$$

Avec :

$$[A_{tr}] = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \quad (\text{III. 28})$$

$$[B_{tr}] = \begin{bmatrix} [G] & [K] \\ -[K] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 29})$$

Et le vecteur

$$\dot{u}_{tr} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ u \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 30})$$

Un code de calcul est développé sous Matlab pour la résolution de ce système matriciel. Dans ce chapitre, on a présenté la formulation mathématique du problème à étudier. Les résultats obtenus par le code de calcul développé seront présentés et discutés dans le prochain chapitre.

# Chapitre IV

## Modélisation par Quadratures Différentielles (DQM)

**Objectif :**

Dans ce chapitre on va présenter la méthode semi-analytique des quadratures différentielles généralisés qui sera utilisé pour modéliser et discrétiser le système d'équations qui régissent notre problème dynamique. Il est à noter que la méthode DQM est souvent utilisée pour les problèmes dynamiques à l'échelle nanométrique.

## IV. 1. Introduction aux quadratures différentielles (DQ)

La plupart des problèmes d'engineering sont gouvernés par un ensemble d'équations différentielles partielles (EDPs) avec des conditions aux limites propres. Les solutions sont présentées par des valeurs fonctionnelles (points de maillage), la connexion entre les dérivées d'un système de EDPs et ces valeurs fonctionnelles est appelée : technique de discrétisation.

De nos jours, plusieurs techniques de discrétisation numériques sont disponibles : Différences finis (FD), Eléments finis (FE), et volumes finis (VF) qui sont des méthodes numériques à petit ordre. La méthode spectrale et pseudo-spectrale est considérée comme méthodes globales.

Les différences finies sont basées sur l'expansion des séries de Taylor ou l'approximation polynomiale. Les éléments finis sont basés sur le principe de variation ou le principe des résidus pondéraux. Les volumes finis appliquent la loi de conservation physique directement à une cellule finie. La méthode spectrale est peut être considérée comme un développement de la classe des schémas de discrétisation qui est connu comme la méthode des résidus pondérés. Il y'a une relation qui relie la méthode des éléments finis et la méthode spectrale dans le sens où les deux méthodes utilisent un ensemble de fonctions et fonctions pondérées, le choix de la fonction de base et l'une des perspectives qui distingue la méthode spectrale de la méthode des éléments finis.

La plupart des simulations numériques des problèmes d'engineering sont élaborées par les méthodes des différences finis, éléments finis et volumes finis en utilisant un nombre suffisant de points de maillage. Cependant, dans quelques applications pratiques, les solutions numériques des EDPs sont demandées à des points spécifiques seulement, cette limitation du domaine d'application et les points de calcul pour trouver les solutions avec une exactitude acceptable peuvent se faire par une méthode introduit par Bellman et al. [108] en 1972, l'idée de base était issue de la quadrature de Gauss qui est une méthode d'intégration très utile. La quadrature de Gauss est caractérisée par l'approximation d'un intégral défini avec une somme pondérée des valeurs dans un groupe de points appelés les « points de Gauss » ou aussi « nœuds » ou « points de grille ».

## IV. 2. Quadrature intégrale :

La quadrature différentielle est inspirée de la notion de la quadrature intégrale conventionnelle, d'où le problème le plus répondu dans la mécanique des structures est bien l'intégrale d'une fonction.

$$\int_a^b f(x)dx \quad (IV.1)$$

Si F est une fonction telle que  $dF/dx=f$ , alors l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle finie et fermé  $[a, b]$  vaut  $F(b)-F(a)$  ; Dans plusieurs cas il est difficile de trouver une expression explicite pour F.

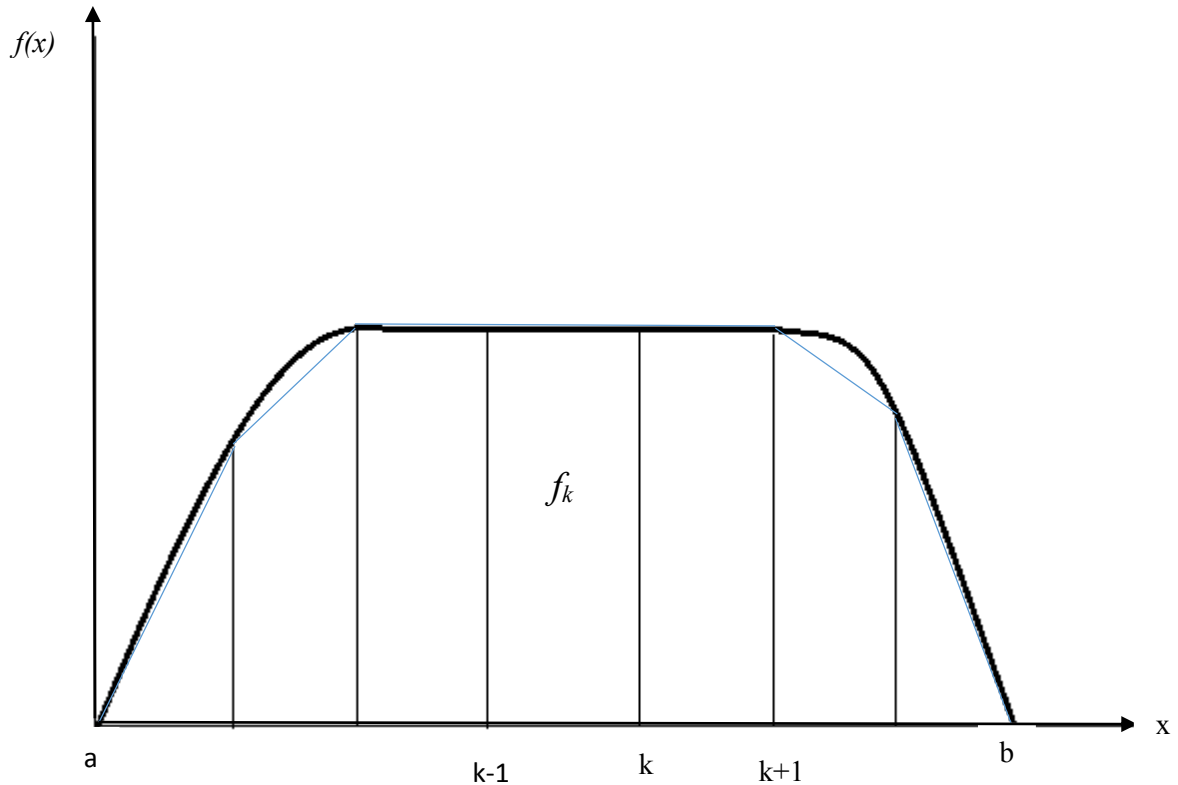


Figure IV. 1. Intégrale d'une fonction  $f(x)$  sur un intervalle  $[a, b]$ .

Comme il est connu dans la littérature, l'intégrale (IV.1) représente l'aire sous la courbe  $f(x)$  (figure IV.1), sauf que cette intégrale est l'équivalent de l'approximation de cette aire. En utilisant le principe de base, plusieurs méthodes ont été développées ou l'intégrale d'une façon générale est rapproché à :

$$\int_a^b f(x)dx = w_1f_1 + w_2f_2 + \dots W_n f_n = \sum_{k=1}^n w_k f_k \quad (IV.2)$$

Avec :  $w_1, w_2, \dots, w_n$  sont les coefficients de pondération,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sont les valeurs fonctionnelles aux points  $a=x_1, x_2, \dots, x_n=b$ .

L'expression (IV.2) est appelée quadrature intégrale.

### IV. 3. Quadrature différentielle :

Une fonction continue sur un domaine fini caractérisant un problème unidimensionnel ne doit pas avoir de singularité et doit être dérivable sur ce même domaine. En suivant l'idée de la quadrature intégrale, Bellman et al. [108] ont énoncé que la dérivée première de cette fonction  $f$  suivant les points  $x_i$  dans la direction  $x$  rapproche numériquement la somme linéaire de toutes les valeurs fonctionnelles de tout le domaine entier.

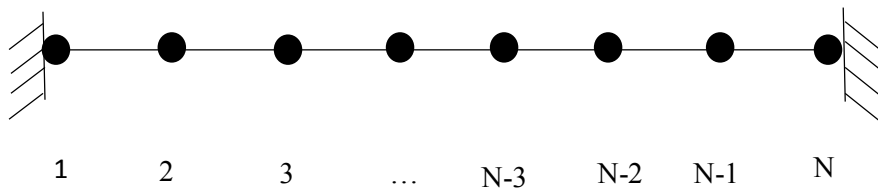


Figure IV. 2. Discrétisation d'un problème unidimensionnel

$$f_x(x_i) = \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 3})$$

$a_{ij}$  représente le coefficient pondéraux,  $N$  est le nombre de points de maillage du domaine (voir figure IV. 2). La quadrature différentielle est représentée dans l'expression (IV.3), il est à noter que les coefficients  $a_{ij}$  sont différents aux différents points du domaine.

La méthode de la quadrature différentielle n'est donc qu'une méthode d'interpolation linéaire. Deux méthodes d'interpolation sont utilisées :

#### IV. 3. 1. Interpolation polynomiale.

Par le théorème de Weierstrass, étant donné une fonction  $f(x)$  continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout  $\xi > 0$ , il existe un nombre entier  $n$  et un polynôme  $P_n$  tel que :

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \xi \quad (\text{IV. 4})$$

Or, Si  $[a, b] = [0, 1]$  le polynôme de Bernskin s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (\text{IV. 5})$$

### IV. 3. 2. Interpolation à base de Fourier

L'interpolation polynomiale est adéquate pour la majorité des problèmes d'ingénierie, mais pour quelques problèmes en particulier ceux avec un comportement périodique, les séries de Fourier peuvent être le bon choix pour des solutions justes au lieu de l'approximation polynomiale.

La transformée de Fourier s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (\text{IV. 6})$$

Les coefficients  $a_0$ ,  $a_k$  et  $b_k$  sont déterminés comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (\text{IV. 7})$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (\text{IV. 8})$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (\text{IV. 9})$$

La procédure principale dans l'approximation de la quadrature différentielle est de déterminer les coefficients pondéraux  $a_{ij}$ .

### IV. 3. 3. Coefficients pondéraux de premier ordre

Dans cette section, On présente une procédure de détermination des coefficients pondéraux pour les équations différentielles partielles de degré élevé par la technique de la quadrature différentielle (DQ). L'approximation par DQ est faite par une méthodologie appelée « quadrature différentielle polynomiale » (Polynomial based differential quadrature PDQ).

Considérons un problème unidimensionnel à travers un intervalle  $[a, b]$ , Bellman et al. Ont assumé que  $f(x)$  est dérivable à n'importe quel point du domaine et rapprochée par la formulation suivante :

$$f_x^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.10})$$

$f(x_j)$  Valeurs fonctionnelles des points  $a_{ij}$ .  $f_x^{(1)}(x)$  est la première dérivée de la fonction  $f(x)$  aux points  $x_i$ .

Afin de déterminer les coefficients pondéraux, on cite les approches de calculs suivants :

### **Approches de Bellman**

Bellman et al. Ont proposé deux approches basées sur l'utilisation des deux fonctions de test suivantes :

$$g_k(x) = x^k \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{IV.11})$$

Le nombre totale des coefficients pondéraux est de  $N \times N$  et sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N a_{ij} = 0 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^k = k x_i^{k-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ i = 1, 2, \dots, N \\ i = 2, \dots, N - 1 \end{array} \quad (\text{IV.12})$$

L'expression (IV.6) a une solution unique car c'est une matrice de forme de Vandermonde, si  $N$  est important cette matrice est considérée mal conditionnée et elle est difficile de l'inverser.

Dans la pratique de cette approche  $N$  est considéré inférieure à 13.

Le second approche de Bellman est similaire au précédant sauf qu'il a une fonction de teste différente.

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.13})$$

$L_N(x)$  est le polynôme de Legendre de degré  $N$ ,  $L_N^{(1)}$  est son dérivé premier.  $x_k$  est la racine du polynôme de Legendre.

Les coefficients pondéraux sont calculés comme suit :

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{L_N(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)} & j \neq i \\ a_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_{i-1})} \end{cases} \quad (\text{IV. 14})$$

Ces deux formulations servent à calculer les coefficients pondéraux, sauf que cette approche n'est pas flexible comme la précédente par cause de la difficulté du choix d'une cordonnée de points de maillage.

### Approche de Quan et Chang

Afin d'approuver l'approche de Bellman, plusieurs tentatives ont été élaborées par d'autres chercheurs, l'un des approches les plus efficaces a été introduit par Quan et Chang [109, 110]. Ils ont utilisé l'interpolation polynomiale de Lagrange comme une fonction de test.

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 15})$$

Avec :

$$\begin{aligned} M(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \\ M^{(1)} &= \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \end{aligned} \quad (\text{IV. 116})$$

On obtient donc la formulation algébrique suivante pour le calcul des coefficients pondéraux :

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{(x_j - x_i)} \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)} & j \neq i \\ a_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} \end{cases} \quad (\text{IV. 17})$$

### Approche générale de Shu

L'approche générale de Shu [111, 112] est inspiré de toutes les approches précédentes, elle montre qu'une solution d'une EDP peut s'approcher à un polynôme de degré élevé N-1.

$$f(x) = \sum_{k=1}^N C_k x^{k-1} \quad (\text{IV. 18})$$

$C_k$  est une constante.

Cette approche polynomiale constitue un espace vectoriel linéaire de  $V_N$  de N dimension, plusieurs ensembles de vecteurs de base existent dans  $V_N$ . Dans le présent cas, le vecteur est bien le polynôme, par conséquent, les vecteurs de base sont aussi appelés polynômes de base.



En général, deux ensembles de polynômes de base sont utilisés, d'où le premier polynôme de base est construit par l'interpolation polynomiale de Lagrange.

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.19})$$

$$M(x) = N(x, x_k)(x - x_k) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

avec :

$$N(x_i, x_j) = M^{(1)}(x_i)\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} \text{ l'opérateur de Kronecker.}$$

Donc  $r_k(x)$  peut-être simplifié comme suit :

$$r_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{M^{(1)}(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.20})$$

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (\text{IV.21})$$

De même,

$$M^{(m)}(x) = N^{(m)}(x, x_k)(x - x_k) + mN^{(m-1)}(x, x_k) \quad m=1, 2, \dots, N-1, k=1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.22})$$

$M^{(m)}, N^{(m)}(x, x_k)$  indiquent les la dérivée d'ordre  $m$  des fonctions  $M(x)$  et  $N(x, x_k)$ , ou :

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i, x_j)} \quad j \neq i \quad (\text{IV.23})$$

$$N^{(2)}_k(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2}$$

L'obtention des coefficients pondéraux est faite en remplaçant (IV. 23 ) dans (IV. 21).

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i, x_j)M^{(1)}(x_j)} & j \neq i \\ a_{ii} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Il est remarquable que pour un  $x_i$  donné, il est facile de calculer  $M^{(1)}(x_i)$ . Par conséquence, le calcul de  $a_{ij}$  est facile pour  $i \neq j$ . Or, le calcul de  $a_{ij}$  est basé sur le calcul de la seconde dérivée  $M^{(2)}(x_i)$  qui est difficile. Cette difficulté peut être éliminée par l'utilisation de second ensemble des polynômes de base. Le système d'équations pour la détermination de  $a_{ij}$  est dérivé de

l'interpolation polynomiale de Lagrange qui doit être équivalente à celle dérivée d'autres polynômes de base  $x^{k-1}$  que les coefficients pondéraux doit le satisfaites.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0$$

Ou (IV.25)

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$$

### IV. 3. 2. Coefficients pondéraux d'ordre supérieur

Pour la discrétisation de la deuxième dérivée, l'approche est basée sur des étapes similaires à celles présentés pour les coefficients pondéraux du premier ordre.

$$f_x^{(2)}(x) = \sum_{j=1}^N b_{ij} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (IV. 26)$$

$f_x^{(2)}$  est la deuxième dérivée de  $f(x)$  aux points  $x_i$ ,  $b_{ij}$  les coefficients pondéraux de la deuxième dérivée qui est une combinaison linéaire ayant la même forme que l'équation (IV.10).

#### *Approche de Quan et Chan*

Quan et Chan ont utilisé l'interpolation polynomiale de Lagrange comme fonctions de test suivantes :

$$b_{ij} = \frac{2}{(x_j - x_i)} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)} \sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{(x_i - x_l)} \quad j \neq i \quad (IV. 27)$$

$$b_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^N \left( \frac{1}{(x_i - x_k)} \sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{(x_i - x_l)} \right)$$

#### *Approche générale de Shu*

En suivant la même idée de la première dérivée, l'approche générale de Shi est aussi basé sur l'interpolation polynomiale de Lagrange et sur l'analyse linéaire de l'espace vectoriel. Deux polynômes de base sont utilisés :

$$b_{ij} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (IV. 28)$$

Avec

$$\begin{cases} N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{(x_i, x_j)} & j \neq i \\ N^{(2)}_k(x_i, x_i) = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3} \end{cases} \quad (IV. 29)$$

En remplaçant (IV.28) dans (IV.27) :

$$\begin{cases} b_{ij} = \frac{M^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{(x_i, x_j)M^{(1)}(x_j)} & j \neq i \\ b_{ii} = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3M^{(1)}(x_i)} \end{cases} \quad (IV. 30)$$

Finalement, en remplaçant (IV. 18) dans (IV. 24) on obtient :

$$b_{ij} = 2a_{ij} \left( a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right) \quad j \neq i \quad (IV. 31)$$

Au contraire du cas  $j \neq i$ , ou le calcul des coefficients pondéraux est facile. Pour  $i=j$  on doit faire appel à la dérivée d'ordre 3 qui est difficile à la calculer, cette difficulté est levée en introduisant les propriétés de l'espace vectoriel linéaire ; le système d'équations  $b_{ij}$  est issu de l'interpolation polynomiale de Lagrange comme on a vu pour la première dérivée.

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} = 0$$

Ou (IV.32)

$$b_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$$

#### IV. 3. 4. Formulation de la récurrence d'ordre supérieure

Pour la discrétisation des dérivatives d'ordre élevé, les formules linéaires suivantes sont appliquées :

$$f_x^{(m-1)}(x_i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(m-1)} f(x_j) \quad (IV. 33)$$

$$f_x^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(m)} f(x_j)$$

$m=2, 3 \dots N-1$

$f_x^{(m-1)}$  et  $f_x^{(m)}$  sont les dérivées d'ordre  $(m-1)$  et  $m$  de  $f(x)$  aux points  $x_i$ .

$w_{ij}^{(m-1)}$  et  $w_{ij}^{(m)}$  deux ensemble de polynomes qui constituent les coefficients pondéraux pour les dérivatives d'ordre  $(m-1)$  et  $m$ . Ils ont calculés comme suit :

$$\begin{cases} w_{ij}^{(m-1)} = \frac{N^{(m-1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \\ w_{ij}^{(m)} = \frac{N^{(m)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \end{cases} \quad (IV.34)$$

En réécrivant la première partie de (IV. 33)

$$N^{(m-1)}(x_i, x_j) = w_{ij}^{(m-1)} M^{(1)}(x_j) \quad (IV.35)$$

A partir de la formule récurrente (IV. 21) on aura donc :

$$\begin{cases} N^{(m-1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(m)}(x_i)}{m} \\ N^{(m)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(m)}(x_i) - mN^{(m-1)}(x_i, x_j)}{mx_i - x_j} \quad i \neq j \\ N^{(m)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(m+1)}(x_i)}{m+1} \end{cases} \quad (IV.36)$$

Par remplacement l'une dans l'autre, on aura :

$$N^{(m)}(x_i, x_j) = \frac{m \left( N^{(m)}(x_i, x_j) - N^{(m-1)}(x_i, x_j) \right)}{x_i - x_j} \quad i \neq j \quad (IV.37)$$

Cette formule peut être simplifiée comme suit :

$$N^{(m)}(x_i, x_j) = \frac{m \left( w_{ij}^{(m-1)} N^{(1)}(x_i) - w_{ij}^{(m-1)} N^{(1)}(x_j) \right)}{x_i - x_j} \quad i \neq j \quad (IV.38)$$

Remplaçons ensuite (IV. 37) dans (IV. 33) et en utilisant (IV.34), on aura la formule récurrente suivante :

$$w_{ij}^{(m)} = m \left( a_{ij} w_{ij}^{(m-1)} - \frac{w_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad m = 2, \dots, N-1 \quad (IV.39)$$

$a_{ij}$  est le coefficient pondéral de la première dérivée décrite précédemment.

$$w_{ii}^{(m)} = \frac{M^{(m+1)}}{(m+1)M^{(1)}(x_i)} \quad (IV.40)$$

Malheureusement cette formulation ne donne pas d'exactes valeurs, en utilisant les propriétés de l'espace vectoriel linéaire on obtient les deux formules suivantes :

$$\sum_{j=1}^N w_{ij}^{(m)} = 0$$

Ou

(IV.41)

$$w_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}^{(m)}$$

#### IV. 4. Cas multidimensionnel

Dans la plupart des problèmes pratiques, le domaine physique étudié est de deux ç trois dimensions, pour cela, il est nécessaire de prolonger l'approximation DQ d'un cas unidimensionnel à un cas multidimensionnel.

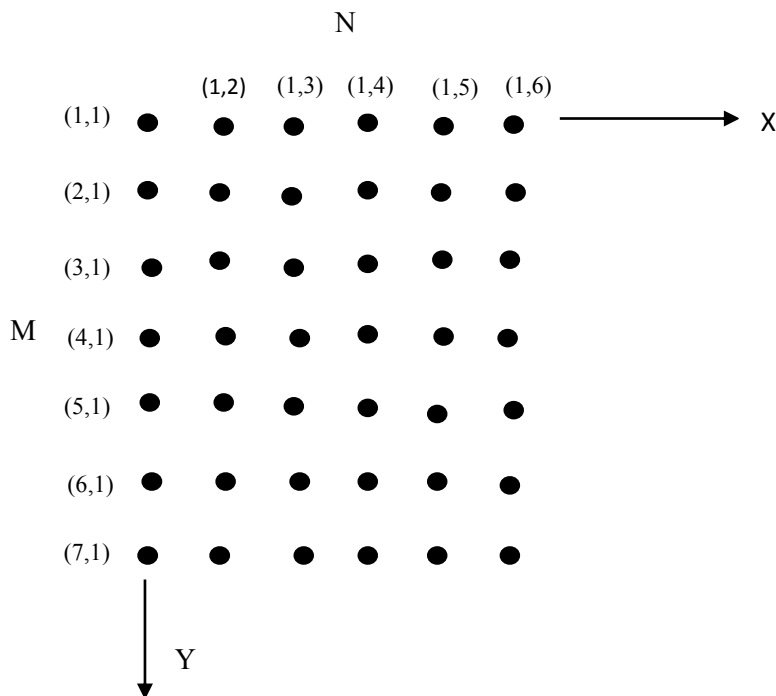


Figure IV. 3. Distribution des nœuds dans un domaine régulier

Selon Shi [111, 112], la formulation quadrature différentielle polynomiale unidimensionnelle peut être s'étendu directement à un cas multidimensionnel si le domaine est régulier. Ce domaine d'application peut être un rectangle ou une autre forme régulière. Considérons une fonction à deux dimensions  $f(x, y)$  définie sur un domaine rectangulaire (IV. 3),  $N$  est le nombre de points suivant  $x$  et  $M$  est le nombre de points suivant  $y$ , on peut avoir  $N \neq M$ .

La dérivée d'une fonction par DQ à un point fixe peut être exprimée comme fonction des autres points du domaine, deux types de dérivées peuvent être utilisés, une dérivée suivant x ou y et une autre dérivée mixte qui combine x et y.

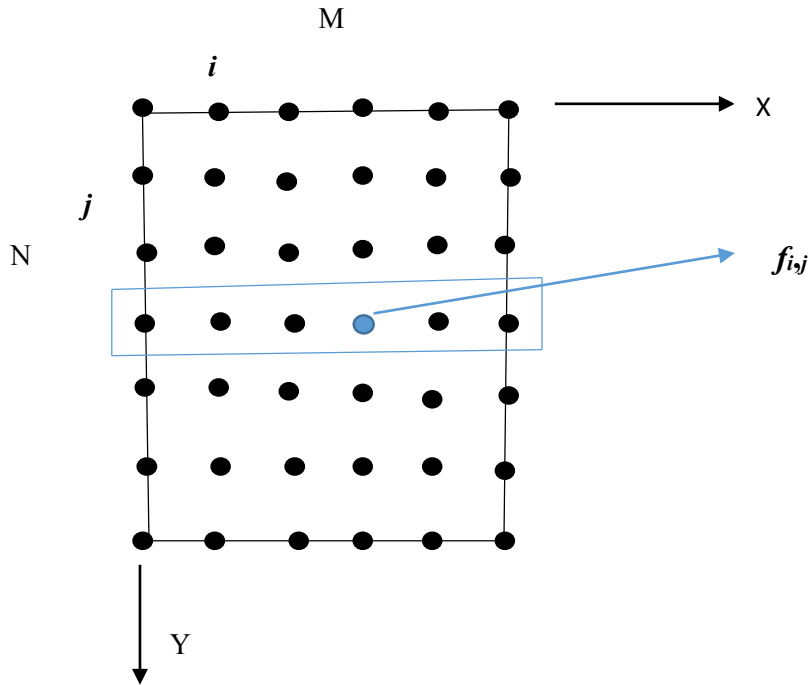


Figure IV. 4. Le sens graphique de la dérivée suivant x

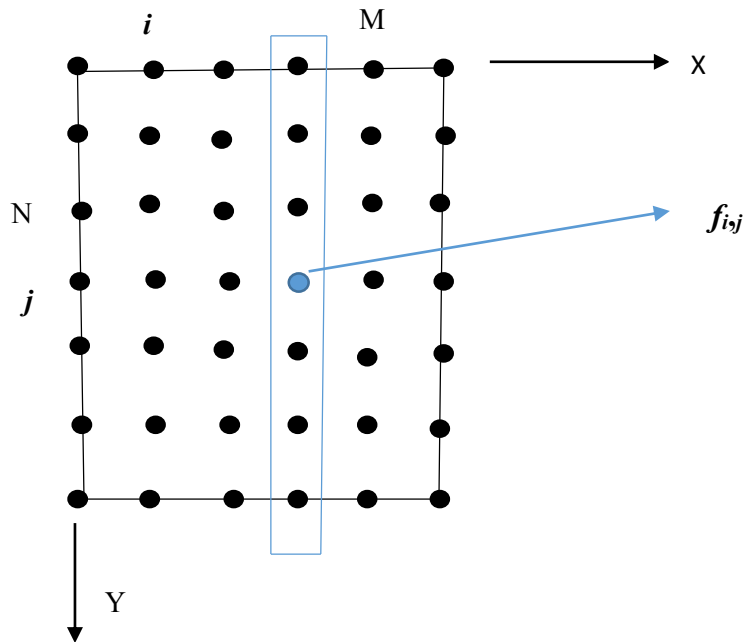


Figure IV. 5. Le sens graphique de la dérivée suivant y

La représentation graphique d'une dérivée d'ordre quelconque est illustrée dans les deux figures suivantes, le point ou on veut calculer la dérivée est représentée par une fonction (figure IV.4) et le rectangle longitudinale représente l'ensemble des points impliqués dans le calcul ; pour une dérivée suivant x au point  $(x_i, y_j)$ , le polynôme résultant varie seulement avec l'index i.

Pour une dérivée suivant y au point  $(x_i, y_j)$ , le polynôme résultant varie seulement avec l'index j. et le rectangle transversale représente l'ensemble des points impliqués dans le calcul de la dérivé de  $f(x, y)$  au point  $(x_i, y_j)$ , par rapport à y (figure IV. 5).

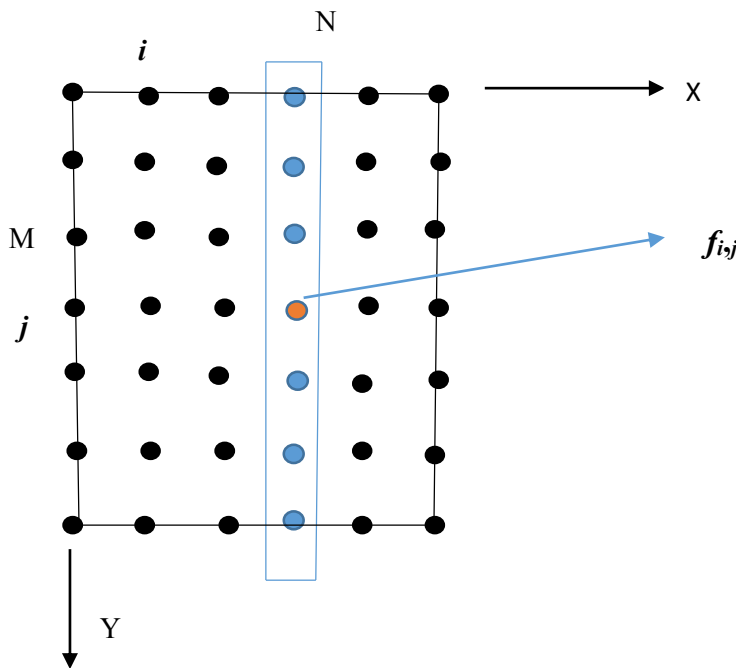


Figure IV. 6. le sens graphique de la dérivée mixte

La formulation mathématique d'une dérivée par DQ suivant une direction :

$$\begin{cases} f_x^{(1)}(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{k=1}^N a_{ik} f(x_i, y_j) \\ f_y^{(1)}(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{l=1}^M \bar{a}_{jl} f(x_i, y_j) \end{cases} \quad (IV. 42)$$

$a_{ik}$  et  $\bar{a}_{ik}$  sont les premiers coefficients pondéraux suivant x et y respectivement.

Pour le cas d'une dérivée mixte, le calcul implique tous les points du domaine, la première dérivée prend tous les points le long d'une direction (ligne rectangulaire) et la dérivée seconde implique les autres points dans la deuxième direction (toutes les lignes suivant x) (figure IV. 6).

Pour une dérivée d'ordre générale et en utilisant l'approche de Shi :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x^{(n)}(x_i, y_i) = \frac{\partial f^{(n)}(x, y)}{\partial x^n} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{k=1}^N w_{ik}^{(n)} f(x_i, y_j) \\ \quad i = 1, 2, \dots, N \quad n = 1, 2, \dots, N - 1 \\ f_y^{(m)}(x_i, y_i) = \frac{\partial f^{(m)}(x, y)}{\partial y^m} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{l=1}^N \bar{w}_{jl}^{(m)} f(x_i, y_j) \\ \quad j = 1, 2, \dots, M \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \end{array} \right. \quad (\text{IV. 43})$$

$w_{ik}^{(n)}$  et  $\bar{w}_{jl}^{(m)}$  sont les coefficients pondéraux d'ordre n et m suivant x et y respectivement.

De même, la dérivée mixte d'ordre générale est exprimée comme suit :

$$f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_i) = \frac{\partial f^{(n+m)}(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{k=1}^N w_{ik}^{(n)} \left( \sum_{l=1}^N \bar{w}_{jl}^{(m)} f(x_i, y_j) \right) \quad (\text{IV. 44})$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad m = 1, 2, \dots, M - 1$$

#### IV. 5. Types de Points de maillage (Grid point)

Un autre point important pour une application réussie du GDQM est de savoir comment distribuer les points de la grille. En fait, la précision de cette méthode est généralement sensible à technique de distribution des points. La distribution optimale des points de la grille dépend de l'ordre des dérivées dans la condition aux limites et le nombre de points de la grille utilisés. La distribution de points joue également un rôle crucial dans la détermination de la vitesse de convergence et stabilité du GDQM. Le choix naturel et le plus simple des points du domaine est celui ayant des points équidistants dans la coordonnée suivant une direction du domaine d'application. Cependant, il a été démontré que des mesures non uniformes de la distribution des points donnent généralement de meilleurs résultats que la distribution équidistante.

On distingue alors les différentes distributions suivantes :

- **Distribution uniforme**

$$\xi_i = \frac{k-1}{N-1} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 45})$$



- **Distribution de Chebyshev-Gauss-Lobatto**

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 46})$$

- **Discrétisation Quadratique**

$$\xi_i = 2 \left( \frac{K-1}{N-1} \right)^2 \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} \quad (\text{IV. 47})$$

$$\xi_i = -2 \left( \frac{K-1}{N-1} \right)^2 + 4 \left( \frac{K-1}{N-1} \right) - 1 \quad k = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N$$

- **Racines de Polynôme de Chebyshev de premier type**

$$\xi_i = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1} \quad r_k = \cos \left( \frac{2k-1}{2N} \pi \right) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 48})$$

- **Racines de Polynôme de Chebyshev de second type**

$$\xi_i = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1} \quad r_k = \cos \left( \frac{k}{N+1} \pi \right) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 49})$$

- **Racines Polynôme Legendre**

$$\xi_i = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1} \quad r_k = \left( 1 - \frac{1}{8N^2} + \frac{1}{8N^3} \right) \cos \left( \frac{4K-1}{4N+2} \pi \right) \quad (\text{IV. 50})$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

Il est à noter que toutes ces distributions peuvent être utilisées pour le cas multidimensionnel, il y a une autre distribution qui pourrait faire l'affaire ou les points sont moins raffinés comme une fonction de paramètre. Cette technique s'appelle la formulation d'étréage dont les points sont situés comme suite :

$$\zeta_k = (1 - \alpha) (3\xi_k^2 - 2\xi_k^3) + 2\xi_k \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV. 51})$$

Avec :  $\alpha$  le paramètre d'étréage.

Si  $\alpha = 1$  alors :  $\zeta_k = \xi_k$

Quand  $\alpha < 0$  quelques valeurs peuvent y aller au de-là de l'intervalle  $[a, b]$ , pour cela les points de distribution au voisinage des bornes de l'intervalle doivent satisfaire :

$$\zeta_k < 0, \quad \text{et} \quad \zeta_{k+1} > 0 \quad k=1, 2, \dots, (N+1)/2.$$

Et ils sont raffinés comme :

$$\zeta_k = \beta \zeta_{k+1} \quad \text{et} \quad \zeta_{N-K+1} = 1 - \zeta_k$$

$\beta$  : Constante positive qui vérifie,  $\zeta_k - \zeta_{k-1} < \zeta_{k+1} - \zeta_k$

$\beta$  est fréquemment pris égale à 0,1.

#### IV. 6. Méthode des Quadratures différentielles généralisées (GDQM)

La quadrature différentielle est une technique simple et efficace afin de trouver des solutions rapides pour des équations intégro-différentielles linéaires et non linéaires. La DQM discrétise n'importe qu'elle dérivée des valeurs fonctionnelles à leurs points adjacents. Le challenge de la DQM est de déterminer les coefficients de pondération pour n'importe quel ordre de dérivation. Bellman et al [108] ont proposé deux méthodes pour déterminer les coefficients pondérés d'ordre d'unité, d'une façon générale, Shi et Richard [111] et Shi [112] ont présenté la méthode des quadratures différentielles généralisées (GDM), ils l'ont appliqué pour résoudre quelques problèmes de la mécanique des fluides.

Dans la GDQM, les coefficients pondérés d'ordre d'unité sont déterminés par une simple formulation algébrique sans restriction du choix de nombre de points du grille. Tandis que le coefficient pondéré de seconde ordre et de l'ordre supérieur de dérivation sont déterminés par une relation de récurrence. Donc, en point de vue simplicité de calcul et efficacité la GDQM est avantageuse par rapport aux DQ. Les travaux pionniers des applications de DQM en mécanique structurale [113-122] et en mécanique des fluides [123-128].

La méthode GDQM est la version des DQM la plus utile pour la solution des problèmes dynamique structurale et énergétique, la technique GDQM consiste à calculer les coefficients pondérés en suivant l'approche générale de Shi.

L'expression polynomiale de l'ensemble des dérivées de la fonction  $f(x)$  est écrite comme suit :

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (\text{IV. 52})$$

avec  $C_{ij}^{(n)}$  c'est coefficient pondéré de la dérivé d'ordre  $n$  et  $N$  c'est le nombre totale de points de la grille du domaine,  $(a = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N = b)$

Les coefficients de pondérations aux directions  $\xi$ ,  $(\xi = \frac{x}{L})$  sont déterminés comme :

$$\begin{cases} C_{i,j}^{(1)} = \frac{M(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j) \cdot M(\xi_j)} & i, j = 1, 2 \dots N, i \neq j \\ C_{i,j}^{(1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{i,j}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{IV. 53})$$

Avec :

$$M(\xi_i) = \prod_{j=1}^N (\xi_i - \xi_j) \quad i \neq j \quad (IV.54)$$

La dérivée deuxième et d'ordres supérieurs sont calculés comme suit :

$$C_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^N C_{i,k}^{(1)} \cdot C_{k,j}^{(1)} \quad i = j = 1, 2 \dots N. \quad (IV.55)$$

$$C_{i,j}^{(r)} = \sum_{k=1}^N C_{i,k}^{(1)} \cdot C_{k,j}^{(r-1)} \quad i = j = 1, 2 \dots N. r = 2, 3 \dots m \quad (m < N) \quad (IV.56)$$

Pour la dynamique des structures. Plusieurs recherches ont été élaborées en utilisant la méthode généralisée de la quadrature différentielle (GDQM) [129-132] nous a aidé à comprendre comment employer et exploiter cette méthode.

A ce qui suit, la discrétisation des points de maillage (nœuds) est construit à base de modèle de Chebyshev-Gauss-Lobatto :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right) \quad i = 1, 2 \dots N \quad (IV.57)$$

Pour des raisons de commodité et de généralité, les variables non dimensionnelles suivantes sont introduites comme suit : emplacement de l'élément, paramètre non local, hubradius, paramètre de fréquence, paramètre de vitesse angulaire, paramètre de moment d'inertie et déflexions non dimensionnelles.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (IV.58)$$

$$\mu = \frac{e \cdot a}{L} \quad (IV.59)$$

$$\delta = \frac{r}{L} \quad (IV.60)$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI} \quad (IV.61)$$

$$\gamma^2 = \frac{\rho A L^4 \Omega^2}{EI} \quad (IV.62)$$

$$\Gamma = \frac{I}{A L} \quad (IV.63)$$

$$U = \frac{u}{x} \quad (IV.64)$$

$$V = \frac{v}{x} \quad (IV.65)$$

$$W = \frac{w}{x} \quad (\text{IV. 66})$$

Pour le cas de la fondation élastique, on définit le paramètre de coefficient relatif au milieu élastique, qui est en fonction du coefficient élastique  $k$ .

$$K = \frac{kL^4}{EI} \quad (\text{IV. 67})$$

#### IV. 7. Application du GDQM

En admettant que :  $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}$  sont respectivement la première, la deuxième, la troisième et la quatrième dérivée, la discrétisation des équations gouvernantes non locale en utilisant la méthode GDQM (**Annexe I**) donne le système d'équations suivant

$$-\frac{\lambda^2}{L^2} \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) U_j - EA \sum_{j=1}^N B_{i,j} U_j = 0 \quad (\text{IV. 68.a})$$

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) V_j + \Gamma \cdot \lambda \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) V_j - \frac{2\gamma^2}{\rho\pi\delta^2 L^2} \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) W_j \\ - \sum_{j=1}^N D_{i,j} V_j = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV. 68.b})$$

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) W_j + \Gamma \cdot \lambda \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) W_j + \frac{2\gamma^2}{\rho\pi\delta^2 L^2} \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) V_j \\ - \sum_{j=1}^N D_{i,j} W_j = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV. 68.c})$$

Pour le cas du nano-arbre tournant dans un milieu élastique, la troisième équation suivant la direction (oz) a besoin d'être reformuler par DQM, l'équation (III. 21. c) devient donc :

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) W_j + \Gamma \cdot \lambda \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) W_j + \frac{2\gamma^2}{\rho\pi\delta^2 L^2} \cdot j \left( 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) V_j \\
& - \sum_{j=1}^N D_{i,j} W_j + K \left[ 1 - \mu^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right] W_j = 0
\end{aligned}
\tag{IV. 69}$$

#### IV. 8. Imposition des conditions aux limites

Le grand défi en utilisant GDQM est l'imposition des conditions aux limites, qui se fait par la modification des coefficients pondérés. En effet, tous les éléments dans la colonne qui correspond aux points de condition à la limite dans la matrice des coefficients de pondération s'annulent. Les conditions aux limites locales considérées dans notre étude sont (en prenant l'exemple des déplacements transversaux  $w$ ) :

Appuyé-Appuyé (A-A)

$$\begin{aligned}
v(\xi = 0) &= \frac{\partial^2 v(\xi = 0)}{\partial \xi^2} \quad \text{and} \quad v(\xi = 1) = \frac{\partial^2 v(\xi = 1)}{\partial \xi^2} \\
w(\xi = 0) &= \frac{\partial^2 w(\xi = 0)}{\partial \xi^2} \quad \text{and} \quad w(\xi = 1) = \frac{\partial^2 w(\xi = 1)}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

Encastré-Encastré (E-E):

$$\begin{aligned}
v(\xi = 0) &= \frac{\partial v(\xi = 0)}{\partial \xi} \quad \text{and} \quad v(\xi = 1) = \frac{\partial v(\xi = 1)}{\partial \xi} \\
w(\xi = 0) &= \frac{\partial w(\xi = 0)}{\partial \xi} \quad \text{and} \quad w(\xi = 1) = \frac{\partial w(\xi = 1)}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

Appuyé -Encastré(A-E)

$$\begin{aligned}
v(\xi = 0) &= \frac{\partial^2 v(\xi = 0)}{\partial \xi^2} \quad \text{and} \quad v(\xi = 1) = \frac{\partial v(\xi = 1)}{\partial \xi} \\
w(\xi = 0) &= \frac{\partial^2 w(\xi = 0)}{\partial \xi^2} \quad \text{and} \quad w(\xi = 1) = \frac{\partial w(\xi = 1)}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

L'application des conditions aux limites non locales dans la méthode DQM consiste à reformuler les coefficients pondérés [133].

Si les quatre premières dérivées de la fonction déplacement sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j^{(1)} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot V_j \\ V_j^{(2)} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \cdot V_j \\ V_j^{(3)} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \cdot V_j \\ V_j^{(4)} = \sum_{j=1}^N D_{ij} \cdot V_j \end{array} \right. \quad (\text{IV.70})$$

On définit alors, les coefficients pondérés comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,N-1} & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN-1} & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ V_N^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.71})$$

Le coefficient pondéré modifié  $\bar{A}$ , est une combinaison des deux matrices suivante  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_2$  :

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1,N-1} & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_{N2} & \dots & A_{NN-1} & A_{NN} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN-1} & 0 \end{bmatrix}$$

**Pour la condition simplement appuyé AA:**  $V_1=V_N=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_{N2} & \dots & A_{NN-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1^{(1)} \\ \vdots \\ V_N^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.72})$$

Ou :

$$\{V_j'\} = [\bar{A}]\{V_j\} \quad (\text{IV.73})$$

Pour la deuxième dérivée :

$$\{V_j^{(2)}\} = [A]\{V_j'\} \quad (\text{IV.74})$$

En utilisant la formule (IV. 73) :

$$\{V_j^{(2)}\} = [A][\bar{A}]\{V_j\} = [\bar{B}]\{V_j\} \quad (\text{IV.75})$$

Puisque  $V_1^{(3)}=V_N^{(3)}=0$ , la dérivée d'ordre 3 du déplacement peut être obtenue comme suit :

$$\{V_j^{(3)}\} = [\bar{A}]\{V_j^{(2)}\} = [\bar{A}][\bar{B}]\{V_j\} = [\bar{C}]\{V_j\} \quad (IV.76)$$

De même, la dérivée d'ordre 4 du déplacement est :

$$\{V_j^{(4)}\} = [\bar{A}]\{V_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{V_j\} = [\bar{D}]\{V_j\} \quad (IV.77)$$

**Pour la condition bi-encastree EE**

$$\begin{aligned} \{V_j'\} &= [\bar{A}]\{V_j\} \\ \{V_j^{(2)}\} &= [\bar{A}]\{V_j\} = [\bar{B}]\{V_j\}, [\bar{B}] = [\bar{A}][\bar{A}] \\ \{V_j^{(3)}\} &= [A]\{V_j^{(2)}\} = [A][\bar{B}]\{V_j\} = [\bar{C}]\{V_j\}, [\bar{C}] = [\bar{A}][\bar{B}] \\ \{V_j^{(4)}\} &= [\bar{A}]\{V_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{V_j\} = [\bar{D}]\{V_j\}, [\bar{D}] = [A][\bar{C}] \end{aligned} \quad (IV.78)$$

**Pour la condition simplement appuyé-encastree AE**

$$\begin{aligned} \{V_j'\} &= [\bar{A}]\{V_j\} \\ \{V_j^{(2)}\} &= [\bar{A}_2]\{V_j\} = [\bar{A}_2][\bar{A}]\{V_j\} = \overline{B}\{V_j\}, [\bar{B}] = [\bar{A}_2][\bar{A}] \\ \{V_j^{(3)}\} &= [\bar{A}_1]\{V_j^{(2)}\} = [\bar{A}_1][\bar{B}]\{V_j\} = [\bar{C}]\{V_j\}, [\bar{C}] = [\bar{A}_1][\bar{B}] \\ \{V_j^{(4)}\} &= [\bar{A}]\{V_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{V_j\} = [\bar{D}]\{V_j\}, [\bar{D}] = [A][\bar{C}] \end{aligned} \quad (IV.79)$$

De même pour le déplacement W suivant (oz), les conditions aux limites sont :

**Pour la condition bi-appuyée AA**

$$\begin{aligned} \{W_j'\} &= [\bar{A}]\{W_j\} \\ \{W_j^{(2)}\} &= [A]\{W_j'\} \\ \{W_j^{(3)}\} &= [\bar{A}]\{W_j^{(2)}\} = [\bar{A}][\bar{B}]\{W_j\} = [\bar{C}]\{W_j\} \\ \{W_j^{(4)}\} &= [\bar{A}]\{W_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{W_j\} = [\bar{D}]\{W_j\} \end{aligned} \quad (IV.80)$$

**Pour la condition bi-encastree EE**

$$\begin{aligned} \{W_j'\} &= [\bar{A}]\{W_j\} \\ \{W_j^{(2)}\} &= [\bar{A}]\{W_j\} = [\bar{B}]\{W_j\}, [\bar{B}] = [\bar{A}][\bar{A}] \\ \{W_j^{(3)}\} &= [A]\{W_j^{(2)}\} = [A][\bar{B}]\{W_j\} = [\bar{C}]\{W_j\}, [\bar{C}] = [\bar{A}][\bar{B}] \end{aligned}$$

$$\{W_j^{(4)}\} = [\bar{A}]\{W_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{W_j\} = [\bar{D}]\{W_j\}, [\bar{D}] = [A][\bar{C}] \quad (\text{IV.81})$$

*Pour la condition simplement appuyé-encastree AE*

$$\begin{aligned} \{W_j'\} &= [\bar{A}]\{W_j\} \\ \{W_j^{(2)}\} &= [\bar{A}_2]\{W_j\} = [\bar{A}_2][\bar{A}]\{W_j\} = \overline{B}\{W_j\}, [\bar{B}] = [\bar{A}_2][\bar{A}] \\ \{W_j^{(3)}\} &= [\bar{A}_1]\{W_j^{(2)}\} = [\bar{A}_1][\bar{B}]\{W_j\} = [\bar{C}]\{W_j\}, [\bar{C}] = [\bar{A}_1][\bar{B}] \\ \{W_j^{(4)}\} &= [\bar{A}]\{W_j^{(3)}\} = [\bar{A}][\bar{B}][\bar{C}]\{W_j\} = [\bar{D}]\{W_j\}, [\bar{D}] = [A][\bar{C}] \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Dans ce chapitre, la méthode des quadratures différentielles généralisées est présentée pour discrétiser les équations qui régissent notre problème, une technique innovante pour l'imposition des conditions aux limites a été implantée. Un code de calcul sous Matlab donne de fiables résultats qui vont être présentés dans le chapitre suivant.



# Chapitre V

## Résultats et Interprétations

### Objectif

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de calcul obtenus à l'issue de la computation du comportement vibratoire des nano-arbres tournants. Le code de calcul développé dans ce travail rassemble un système complexe d'équations qui modélisent le problème physique à étudier. Afin de vérifier l'exactitude du problème, une étude de convergence est menée en calculant les paramètres de fréquence pour un nombre de subdivision (Sampling point N) croissant. Ensuite, nos résultats seront validés par des résultats obtenus récemment étudiant le comportement vibratoire des nano-poutres.

L'analyse vibratoire d'un nano-arbre tournant consiste à calculer les paramètres de fréquences pour différents paramètres de vitesses angulaires et étudier l'effet des différents paramètres géométriques et physiques sur le comportement vibratoire. Notre travail est basé sur l'étude de l'influence de l'échelle infinitésimale (paramètre non local) sur les paramètres de la vibration (Paramètre de fréquence, et paramètre de vitesse critique). Un nanotube de carbone mono-feuillet est étudié comme nanorotor dans un milieu élastique.

### V.1. Convergence des résultats

En prenant le modèle d'Euler-Bernoulli d'une poutre macroscopique en flexion simple et notre modèle mathématique d'une nano-poutre soumise à une vitesse de rotation angulaire autour de son axe longitudinal, l'annulation de la vitesse angulaire  $\Omega = 0$  et la pose du paramètre non local à l'unité  $\mu = 0$ . On obtient la même modélisation mathématique avec le modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli. En augmentant le nombre de points d'échantillonnage sur l'étendu de la poutre, on aura le tableau suivant qui illustre la variation du paramètre de fréquence avec le nombre N.

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}}$$

Tableau V.1 Convergence des paramètres de fréquence propre  $\lambda$  avec le nombre N

N	4	6	8	12	16	20	24
$\lambda$	3.13432	3.1416	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415
	6.9282	6.2859	6.2833	6.2831	6.2831	6.2831	6.2831
	8.8417	9.1288	9.4202	9.4247	9.4247	9.4247	9.4247
	154.3598	16.0982	12.7319	12.5662	12.5663	12.5663	12.5663
	176.4111	17.2856	14.8290	15.7027	15.7079	15.7079	15.7079
	198.4536	154.3598	28.3974	18.9325	18.8496	18.8495	18.8495

A partir du tableau V.1, on remarque que les six premiers paramètres de fréquence se stabilisent à partir du N=16, ce qui montre qu'on peut prendre un nombre  $N \geq 16$  pour avoir un calcul exact et fiable.

### V.2. Validation des résultats

Pour raison d'absence de travaux de recherches étudiant la rotation des nano-poutres ou les nanorotors en littérature, la validation de nos résultats se limite sur les résultats d'une poutre en flexion simple sans rotation.

Chakraverty et al. [134] ont étudié la vibration des nano-poutres en utilisant la théorie d'Euler-Bernoulli, ils ont montré l'influence de l'échelle réduit sur les paramètres de vibration. En comparant nos résultats avec leurs résultats on trouve une bonne équivalence entre eux. (Voir Tableau V.2). Il est à noter que notre étude a inclut également la condition au limite (Libre-libre), mais comme on a obtenu des résultats illogiques, on a éliminé ce cas.

Tableau V.2 Les quatre premiers paramètres de fréquences pour les différentes conditions aux limites et différents paramètres non locaux (nano-poutre d'Euler-Bernoulli).

CL	$\mu^2 = 0$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
	Présent	[134]	Présent	[134]	Présent	[134]
AA	3.1416	3.1416	2.6800	2.6800	2.3022	2.3022
	6.2832	6.2832	4.3013	4.3013	3.4404	3.4604
	9.4243	9.4248	5.4413	5.4422	4.2885	4.2941
	15.5035	15.5665	6.3646	6.3633	4.9731	4.9820
EE	4.3687	4.3700	3.9092	3.9184	3.3155	3.3153
	7.8528	7.8532	5.1888	5.1963	4.1548	4.1561
	10.9939	10.9956	6.2309	6.2317	4.9264	4.9328
	14.1363	14.1372	7.0456	7.0482	5.5117	5.5213
AE	3.9266	3.9266	3.2828	3.2828	2.7899	2.7899
	7.0686	7.0686	/////	4.7668	3.8325	3.8325
	10.2102	10.2102	5.8371	5.8371	4.6105	4.6105
	13.3518	13.3518	6.7143	6.7143	5.2632	5.2632

En essayant de valider le modèle d'Euler-Bernoulli en rotation, Ce problème consiste à chercher les fréquences de vibration d'une poutre appuyée à chacune de ses extrémités, sur des appuis infiniment rigides. La poutre est pleine, de section circulaire et soumise à une vitesse de rotation constante. Elle ne comporte aucun disque. René-Jean GIBERT [135] a étudié le comportement vibratoire d'une poutre d'Euler-Bernoulli en rotation. La comparaison de notre modèle en adoptant les mêmes données utilisées par lui, donne des résultats semblables en quelques sortes à ses résultats.

$L=0.9\text{m}$ ,  $d=0.05\text{m}$ ,  $E= 2.10^{11}\text{ Pa}$ ,  $\rho=7800\text{kg/m}^3$ .

Tableau V.3. Trois premières fréquences de modes directs d'un rotor à l'arrêt et en rotation

$\Omega = 0$		$\Omega = 10^4\text{rd/s}$	
Présent	[135]	Présent	[135]
121,3343	125,8150	120,1744	119,7448
507,3333	503,2598	532,4400	479,0191
939,4000	1132,3346	993,6666	1077,3971

### V.3. Résultats et Discussions

#### V. 3.1. Influence de l'effet gyroscopique

Dans la présente section, les différents résultats obtenus sont présentés en montrant l'influence de paramètre de vitesse de rotation (l'effet gyroscopique).

Le tableau V.4. montre les paramètres des fréquences pour différents paramètres de fréquences variant de 0 à 5 pour le cas local (macroscopique), L'effet gyroscopique (la matrice contenant la vitesse angulaire) provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences en rotation en deux branches, mode en précession directe et mode en précession inverse. Dans tous les cas, les modes directs  $\lambda_f$  augmentent avec l'augmentation de la vitesse de rotation, et cependant les modes indirectes (inverses)  $\lambda_b$  diminuent. Le couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre.

En comparant les valeurs des paramètres de fréquences pour différentes conditions aux limites, on remarque que celles de la poutre bi-encasté (EE) est grande en valeur par rapport aux autres.

Tableau V.4. Paramètres de fréquence fondamentales pour différents paramètres de vitesse angulaire et  $\mu = 0$ .

$\gamma$	AA		EE		AE	
	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
0	3.1416	3.1416	4.3687	4.3687	3.9266	3.9266
1	2.7723	3.632	4,033	4,6832	3,5345	4,3248
2	2.4232	3.9022	3,3667	5,2043	3,0664	4,8633
3	2.182	4.0663	2.2134	6,0154	2,8932	5,2396
4	1.6722	4.4680	1,8930	6,9865	2,5280	5,6777
5	1.2227	4.7507	0,8995	7,8644	1,9456	6,3234

L'investigation de l'influence des vitesses de rotation sur les fréquences propres de flexion, peut être exprimée graphiquement par le diagramme de Campbell illustré dans la figure V.1, cette présentation graphique qui visualise la divergence de la fréquence propre de flexion  $\omega$  en deux modes : mode de flexion direct ( forward frequency) et mode de flexion inverse (backward frequency), cette présentation sert à déterminer la vitesse critique ou dite « fréquence de résonance » à laquelle la structure vibre en violence et peut s'endommager.

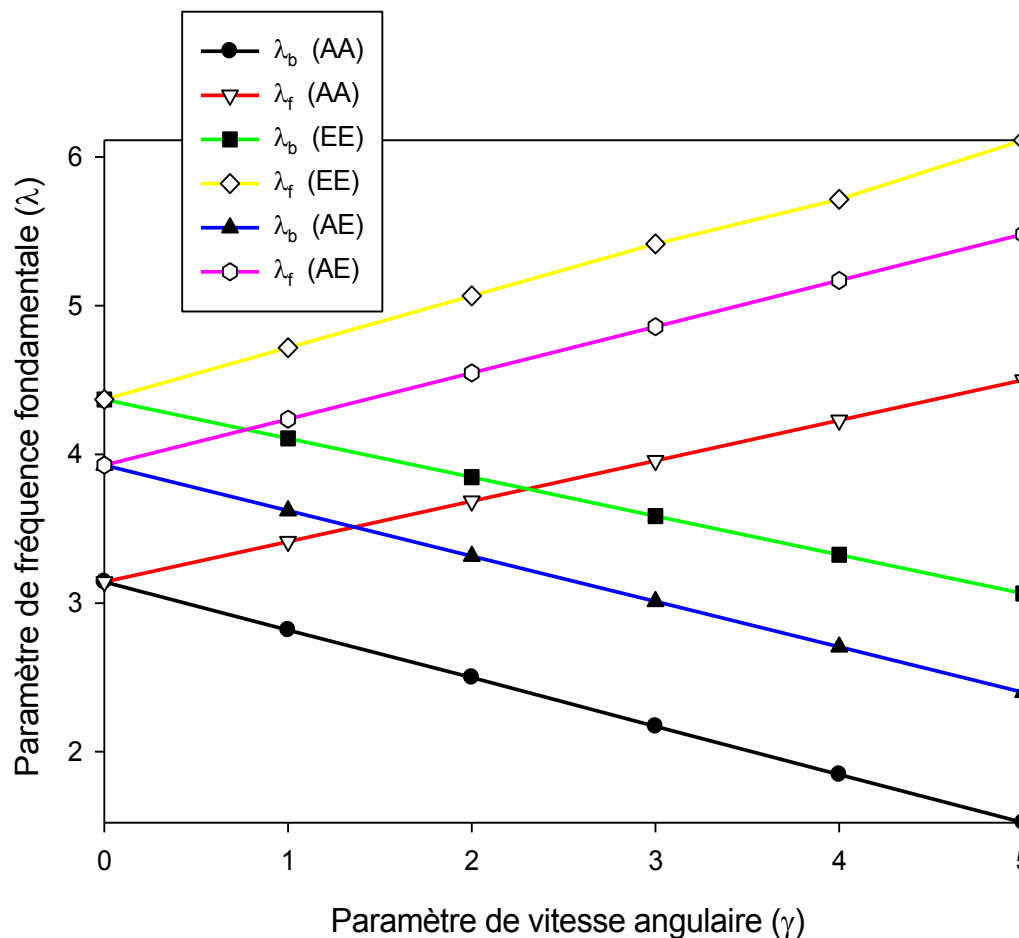


Figure V.1. Diagramme de Campbell pour différentes conditions aux limites

### V.3.2. Influence de l'échelle réduit (paramètre non local)

Contrairement à la théorie d'élasticité classique, la théorie d'élasticité non locale consiste à étudier les systèmes mécaniques ayant des propriétés physiques variables à l'échelle nanométrique. L'effet de l'échelle réduit ou dit paramètre non local (nonlocal parameter or small scale parameter) est primordial, le tableau V.5 montre le comportement des paramètres de fréquence qui se diminuent avec l'augmentation du paramètre non local  $\mu$ . Au fur et à mesure que le paramètre l'échelle ( $e_0 a$ ) augmente, les fréquences obtenues par le modèle non local d'Euler-Bernoulli deviennent inférieure à celle des fréquences du modèle local. Cette réduction est spécialement significative pour les modes élevés de vibration, et par conséquent l'effet 'échelle ne peut pas être négligé. La réduction peut être expliquée comme suit :

L'effet de l'échelle rend les nano-poutre plus flexibles car le modèle non local peut être considéré comme des atomes liés par des ressorts élastiques, tandis que le modèle local suppose que la raideur du ressort est de valeur infinie. Par conséquent, le modèle non local doit être utilisé lorsqu'on a besoin des prédictions exactes des hautes fréquences des nanostructures.

Tableau V.5. Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux

C.L	$\gamma$	$\mu^2 = 0.1$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
		$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
<b>AA</b>	0	3.0111	3.0111	2,6800	2,6800	2,3022	2,3022
	1	2.6873	3.5439	2,3940	2,9860	2,0258	2,6118
	2	2.3687	3.8156	2,1440	3,2920	1,7494	2,9214
	3	2.0400	4.0873	1,8220	3,5980	1,4730	3,2310
	4	1.7167	4.3590	1,5360	3,9040	1,1966	3,5406
	5	1.3927	4.6307	1,2500	4,2100	0,9202	3,8502
<b>EE</b>	0	4.3687	4.3687	3,9100	3,9100	3,3155	3,3155
	1	3.9977	4.2177	3,6780	4,2780	3,0766	3,7004
	2	3.8367	5.1765	3,4460	4,6460	2,8377	4,0853
	3	3.4757	5.5256	3,2140	5,0140	2,5988	4,4702
	4	3.2147	5.8243	2,9820	5,3820	2,3599	4,8551
	5	2.9537	6.2232	2,7500	5,7500	2,1200	5,2400
<b>AE</b>	0	3.8036	3.8036	3,2828	3,2828	2,7899	2,7899
	1	3.4983	4.3603	3,0022	3,6062	2,5219	3,1301
	2	3.1930	4.6710	2,7216	3,9296	2,2539	3,4703
	3	2.8877	4.9817	2,4410	4,2530	1,9859	3,8105
	4	2.5824	5.2924	2,1604	4,5764	1,7179	4,1507
	5	2.2771	5.6031	1,8789	4,9000	1,4500	4,4910

L'effet de l'échelle sur le comportement vibratoire du nanorotor est aussi primordial sur sa vitesse de rotation critique qui est bien la fréquence de résonance, En utilisant le diagramme de Campbell, l'intersection des deux droites  $\lambda$  et  $\gamma$  ou ( $\gamma = \lambda$ ) détermine la vitesse critique. La figure V.2 montre la variation de la vitesse critique pour les différents paramètres non locaux. Comme la fréquence en mode de flexion inverse qui se diminue avec la vitesse critique, cette dernière diminue aussi avec l'augmentation du paramètre de l'échelle, ce qui diminue la fréquence de résonance. Donc, plus en descendant en échelle vers l'infiniment petit « nano » plus en évitant la résonance (l'endommagement des structures).

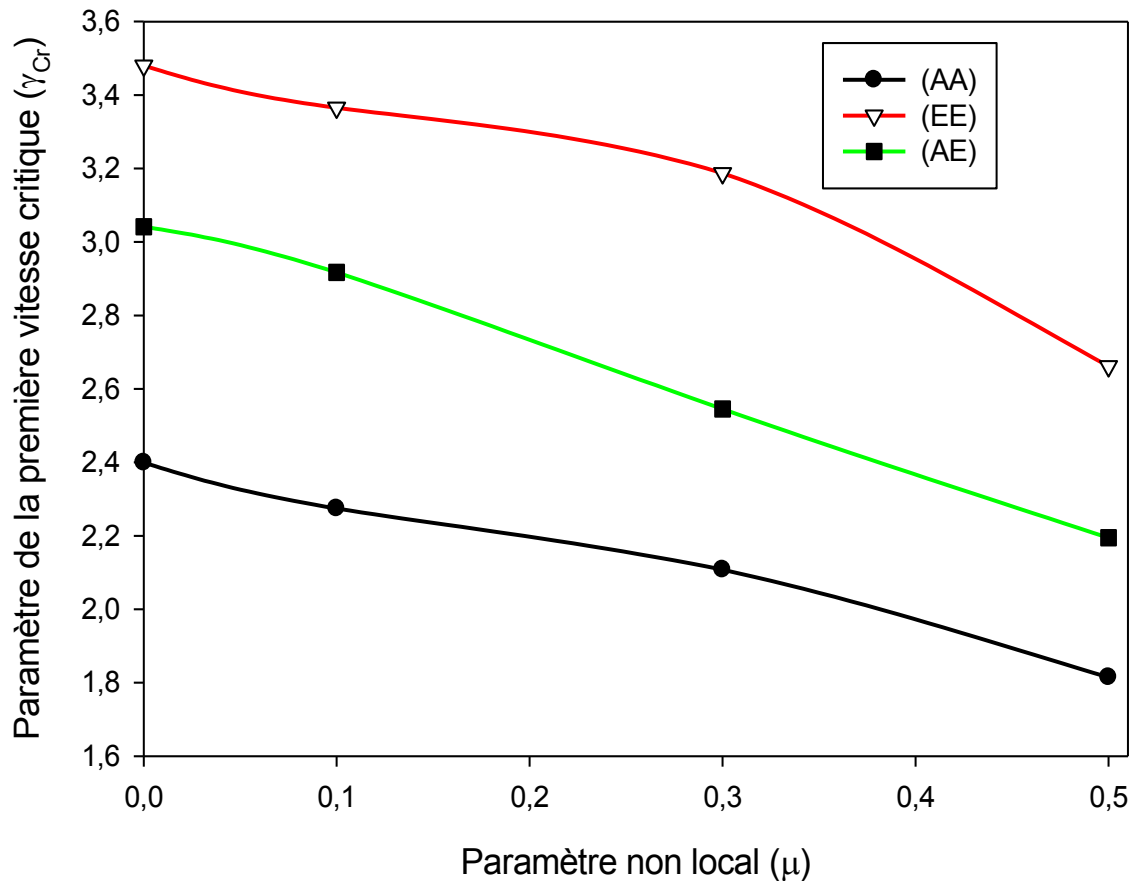


Figure V. 2. Paramètre de vitesse fondamentale pour différents paramètres de l'échelle.

### V. 3.2. Influence des paramètres géométriques et les conditions aux limites

#### V. 3.2.1. Influence du rapport L/D

Afin d'étudier l'effet des paramètres géométriques sur les paramètres de fréquence du nanorotor, on varie la géométrie de l'arbre (rapport entre la longueur et le diamètre moyen) pour avoir ses influences sur les paramètres de fréquence du nano-arbre tournant en matériaux anisotrope.

Les figures (V.3), (V.4) et (V.5) illustrent la variation des paramètres de la vitesse critique par rapport au rapport (L/D) qui est permuté par le rapport  $1/\delta$  comme on travaille par les paramètres adimensionnels.

D'après les figures, les vitesses critiques diminuent avec l'augmentation du paramètre (aspect ratio L/D) et elles se stabilisent plus en augmentant la longueur de la nanostructure ou diminuant son diamètre, le paramètre de l'échelle a toujours un effet décroissant sur les vitesses critiques qui ont un profil géométrique presque identique pour les différentes conditions aux limites.

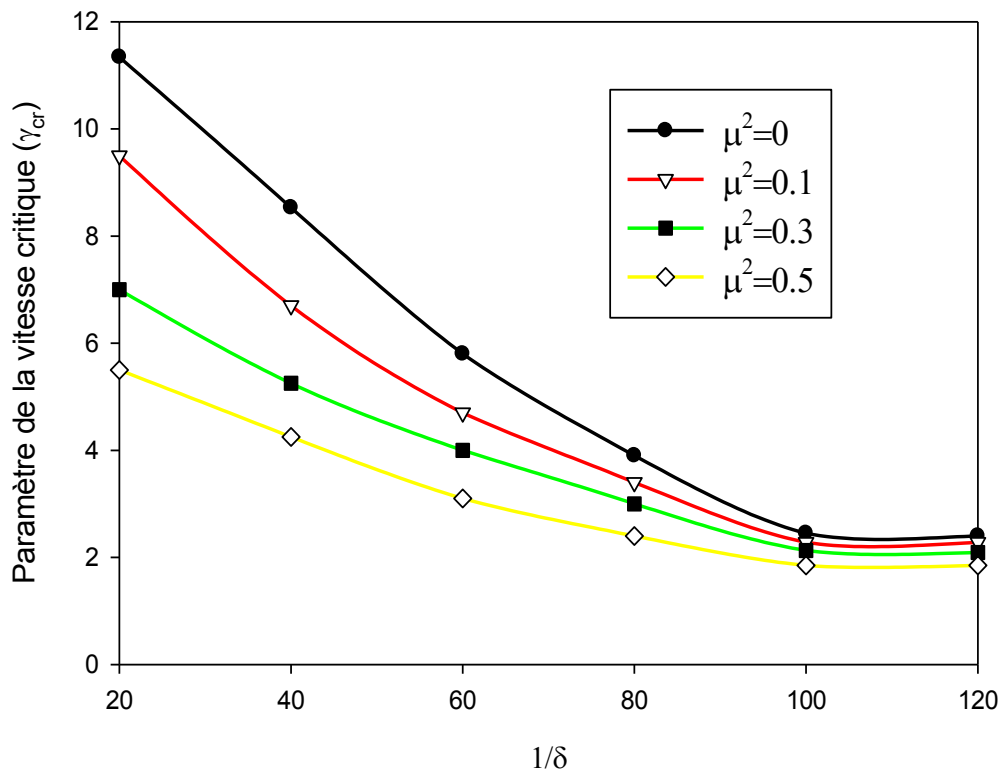


Figure IV.3. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec L/D d'un nanorotor bi-appuyé

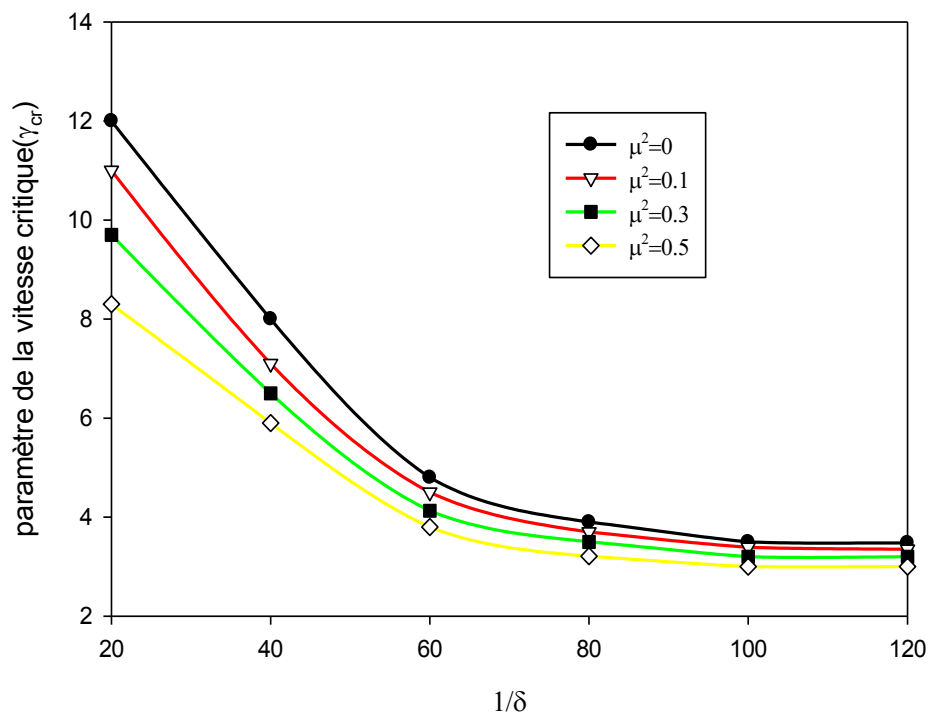


Figure V.4. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec L/D d'un nanorotor bi-encasté



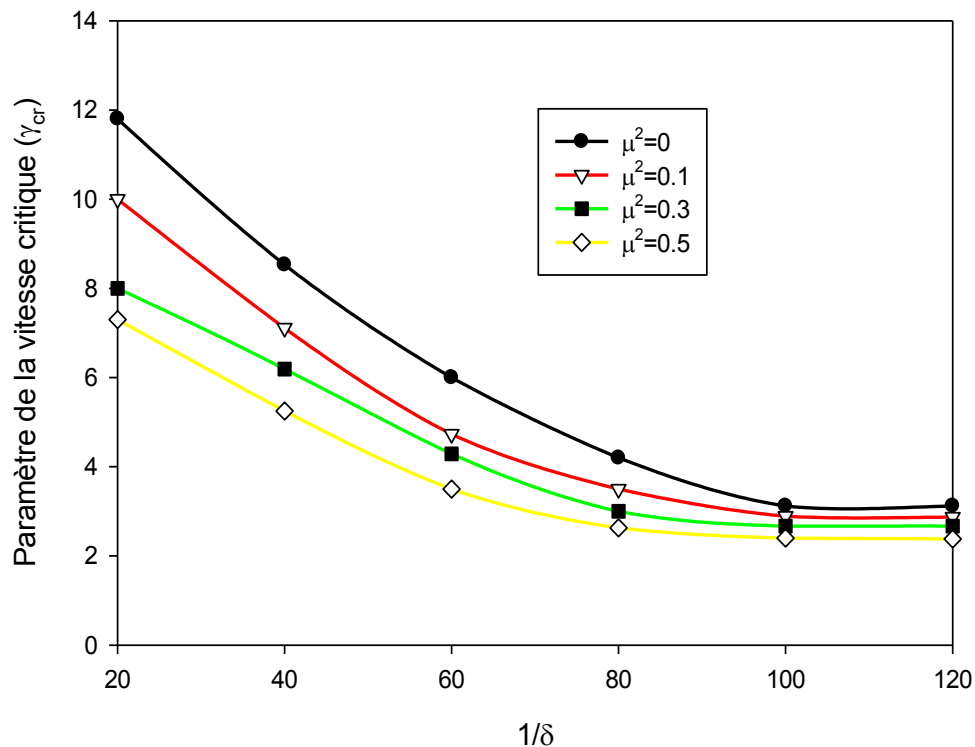


Figure.V.5. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec  $L/D$  d'un nanorotor (AE)

V. 3.2.2. Influence du rapport  $h/D$

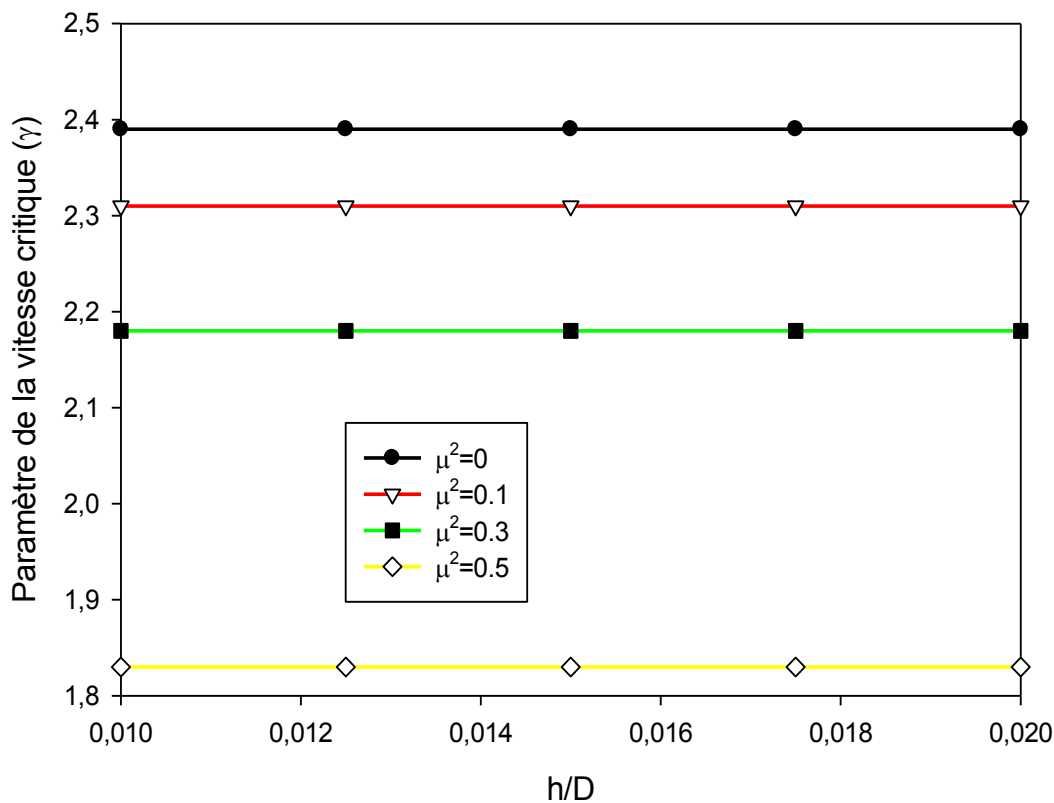


Figure V. 6. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec  $h/D$  d'un nanorotor bi-appuyé (AA)

L'effet du rapport  $h/D$  concerne les nanorotors à section tubulaire ou annulaire, les figures (V.6), (V.7) et (V.8) présentent la variation de vitesse critique adimensionnelle par rapport le ratio  $h/D$  pour les différentes conditions aux limites. Il est clairement remarquable que l'influence du rapport  $h/D$  est négligeable puisque les vitesses critiques restent constantes.

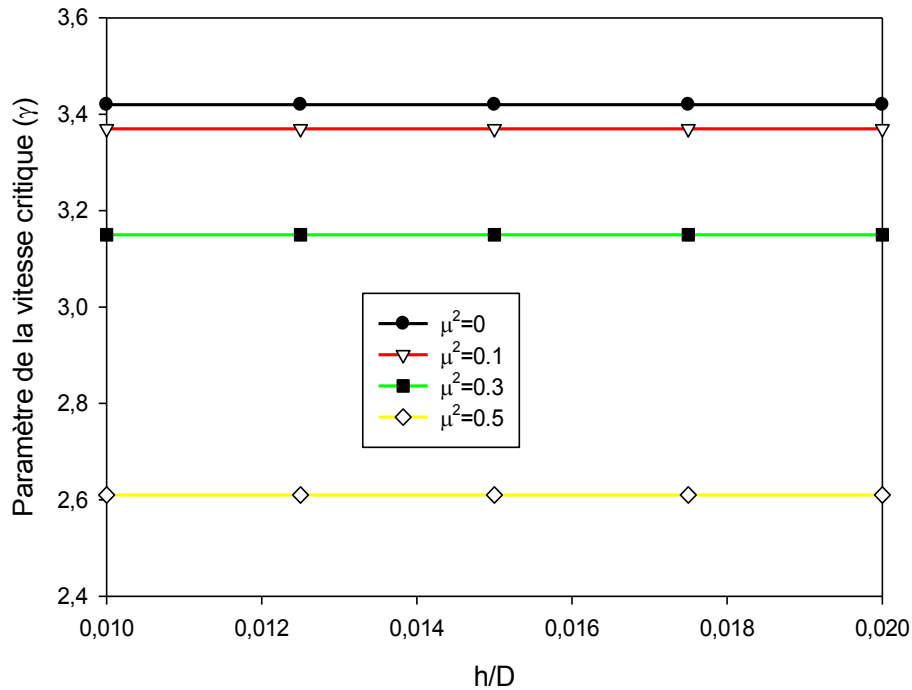


Figure V. 7. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec  $h/D$  d'un nanorotor (EE)

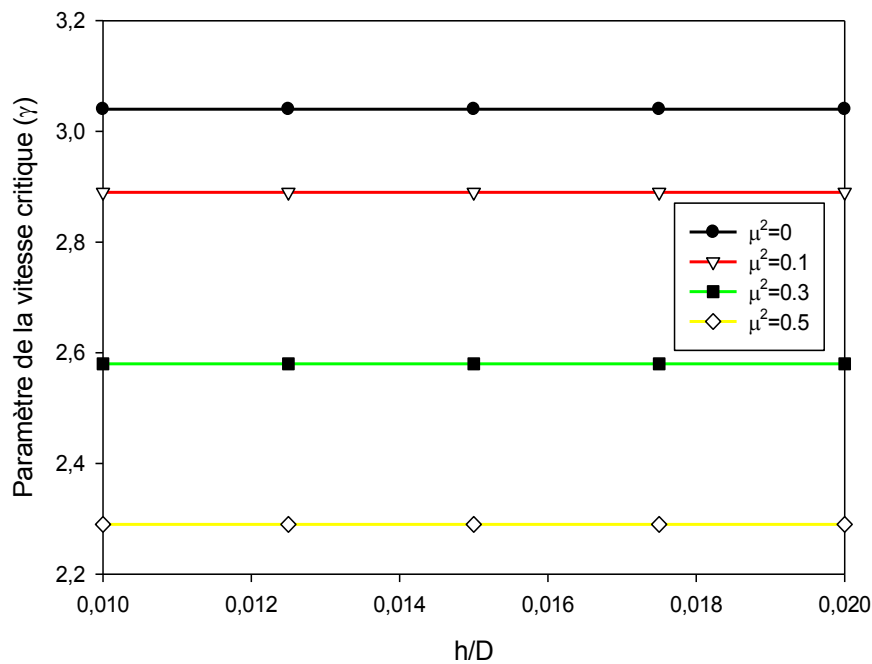


Figure V. 8. Variation du paramètre de la vitesse critique fondamentale avec  $r/L$  d'un nanorotor (AE)

#### V. 4. Deuxième mode de paramètre de fréquence

Dans cette section, le deuxième mode de la fréquence est étudié afin de voir le comportement des paramètres vis-à-vis les modes de vibration. Le tableau V.6 présente les paramètres de fréquence de deuxième mode. On remarque que plus la vitesse de rotation augmente les paramètres de la fréquence propre de flexion  $\omega$  en deux modes : mode de flexion direct ( forward frequency) et mode de flexion inverse (backward frequency).

L'effet de l'échelle sur les paramètres de fréquence est présenté dans le tableau V. 7 qui montre que l'augmentation des paramètres non locaux diminue les paramètres de fréquences. Afin d'évaluer cet effet des paramètres non locaux on doit comparer les fréquences de premier mode et du deuxième mode. D'après le tableau, on peut remarquer que l'élévation du paramètre de l'échelle donne une diminution des paramètres de fréquences de deuxième mode moins considérable que la diminution des paramètres de premier mode.

Tableau V.6. Deuxième mode de flexion direct et inverse pour le cas local  $\mu^2 = 0$

$\gamma$	AA		EE		AE	
	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
0	6.2832	6.2832	7.8586	7.8586	7.0686	7.0686
1	5.8854	6.6503	7.5021	8.2077	6.679	7.4442
2	5.4733	6.9622	7.1352	8.6075	6.2969	7.797
3	5.1501	7.4631	6.7555	8.9288	5.9441	8.207
4	4.7394	7.8154	6.4154	9.3239	5.6505	8.5323
5	4.3643	8.2022	6.0328	9.6728	5.2486	8.8886
6	3.9883	8.5022	5.7334	9.9945	4.8635	9.2267

La figure V. 9 illustre le diagramme de Campbell de deuxième mode d'un nano-arbre avec un paramètre non local nul pour différentes conditions aux limites, l'effet des conditions aux limites pour le deuxième mode reste le même comme le premier mode. Il remarquable que la vitesse critique de deuxième mode devient plus importante par rapport à la première vitesse critique. La variation de la deuxième vitesse critique avec les différents paramètres de l'échelle est présente sur la figure V.10 qui montre que la vitesse critique diminue avec l'augmentation des paramètres non locaux.

Tableau V.7. Paramètres de fréquences de 2<sup>ème</sup> mode pour différents paramètres non locaux

C.L	$\gamma$	$\mu^2 = 0.1$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
		$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
<b>AA</b>	0	6.1236	6.1236	6.0006	6.0006	5.9136	5.9024
	1	5.6854	6.8503	5.5624	6.7273	5.4754	6.6291
	2	5.2733	7.1622	5.1503	7.0392	5.0633	6.941
	3	4.9501	7.6631	4.8271	7.5401	4.7401	7.4419
	4	4.5394	8.0154	4.4164	7.8924	4.3294	7.7942
	5	4.1643	8.4022	4.0413	8.2792	3.9543	8.181
	6	3.7883	8.7022	3.6653	8.5792	3.5783	8.481
<b>EE</b>	0	7.7788	7.7788	7.6114	7.6114	7.5244	7.5244
	1	7.3791	8.3397	7.2117	8.1641	7.1247	6.9573
	2	7.0122	8.7395	6.8448	8.5639	6.7578	6.5904
	3	6.6325	9.0608	6.4651	8.8852	6.3781	6.2107
	4	6.2924	9.4559	6.125	9.2803	6.038	5.8706
	5	5.9098	9.8048	5.7424	9.6292	5.6554	5.488
	6	5.6104	10.1265	5.443	9.9509	5.356	5.1886
<b>AE</b>	0	7.0686	7.0686	7.0686	7.0686	7.0686	7.0686
	1	6.545	7.5782	6.534	7.5902	6.516	7.6072
	2	6.1629	7.931	6.1519	7.943	6.1339	7.9652
	3	5.8101	8.341	5.7991	8.353	5.7811	8.3711
	4	5.5165	8.6663	5.5055	8.6783	5.4875	8.6953
	5	5.1146	9.0226	5.1036	9.0346	5.0856	9.0516
	6	4.7295	9.3607	4.7185	9.3727	4.7005	9.3897

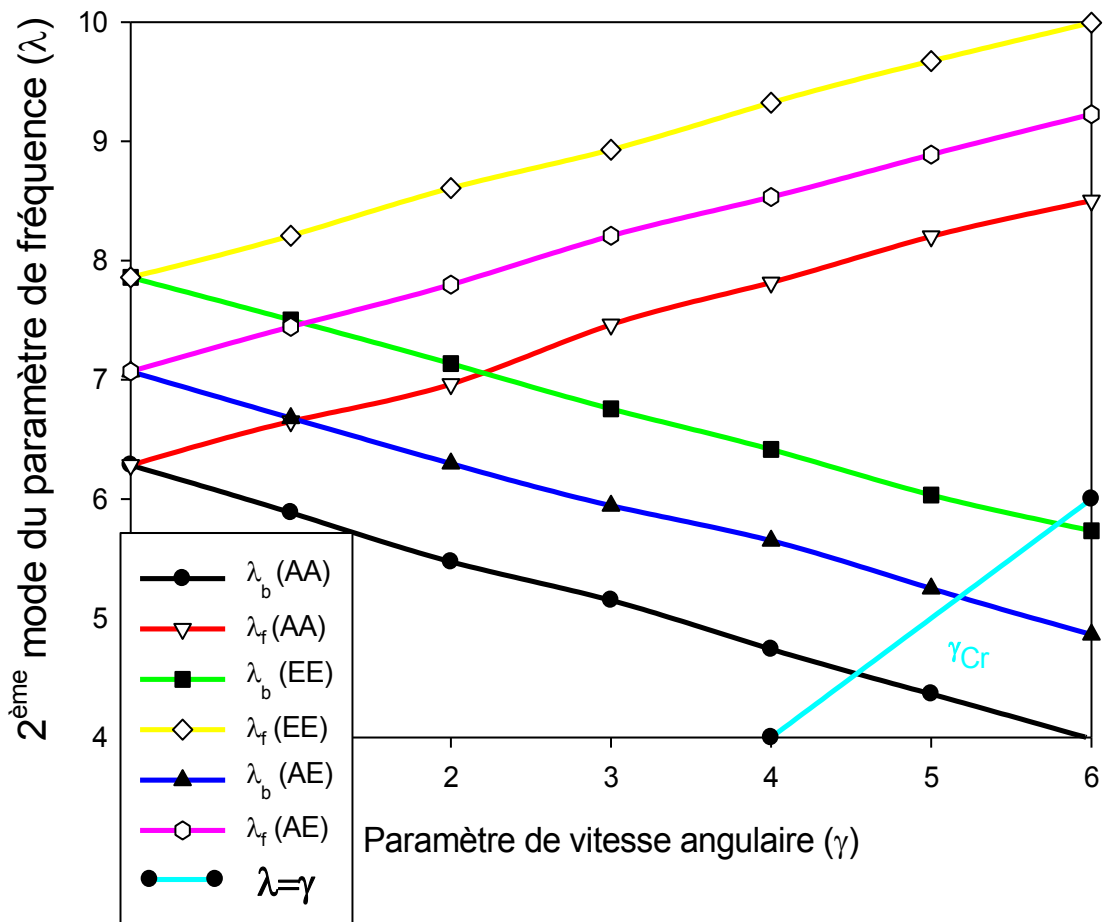


Figure V. 9. Diagramme de Campbell pour le paramètre de fréquence de deuxième mode pour différentes conditions aux limites.

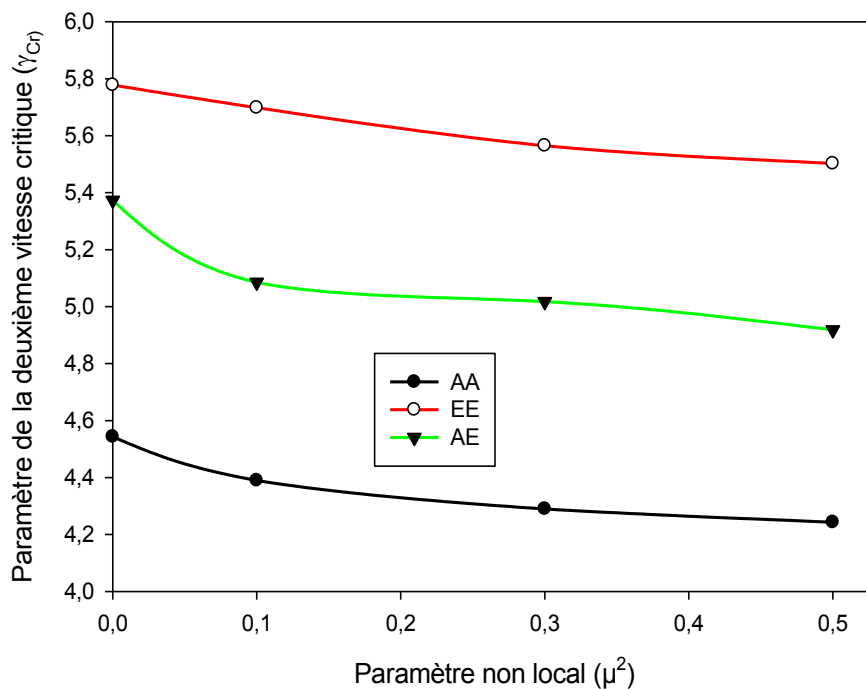


Figure V. 10. Deuxième paramètre de la vitesse critique en fonction du paramètre non local.

### V. 5. Effet de l'échelle sur le mode supérieure

L'investigation de l'effet du paramètre non local sur les paramètres de fréquence de mode supérieure consiste à suivre le comportement des paramètres de fréquence de flexion inverse  $\lambda_b$  (Backward frequency). En effet, D'après la figure V.11 on remarque que les paramètres de fréquences de flexion inverse du nanorotor bi-appuyé diminuent avec l'augmentation du paramètre de l'échelle, la figure montre aussi que la diminution du premier mode de fréquence diminue plus que les deux modes suivants, alors que le quatrième mode se comporte comme le premier.

La figure V.12 montre la variation des paramètres de fréquences pour un nanorotor bi-encasté, la diminution de fréquence de premier mode est considérable par rapport aux autres modes, la même remarque reste valide pour un nanorotor appuyé-encasté illustré dans la figure V. 13

On peut dire, que le paramètre non local a un fort effet sur les paramètres de fréquence de premier mode par rapport aux modes suivants.

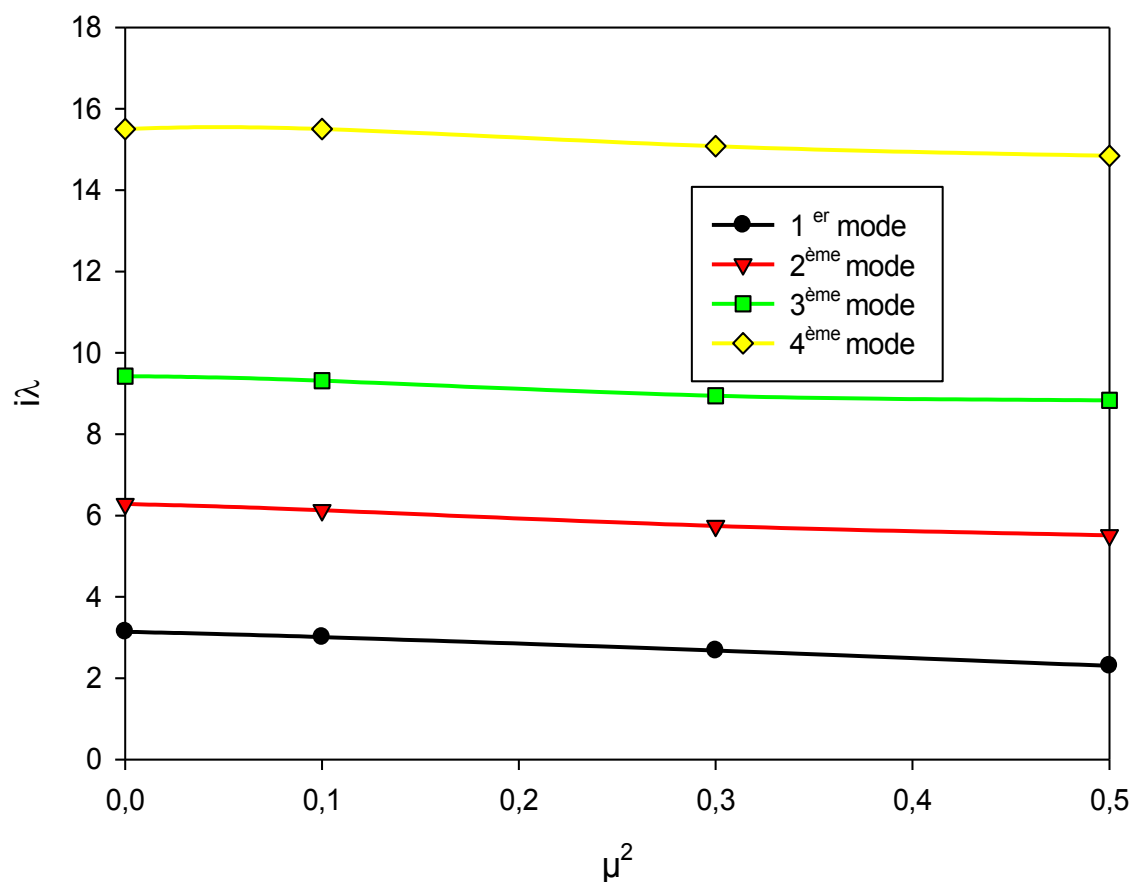


Figure V. 11. Variation des quatre premières fréquences de flexion inverse en fonction de  $\mu^2$  Pour un nanorotor bi-appuyé.

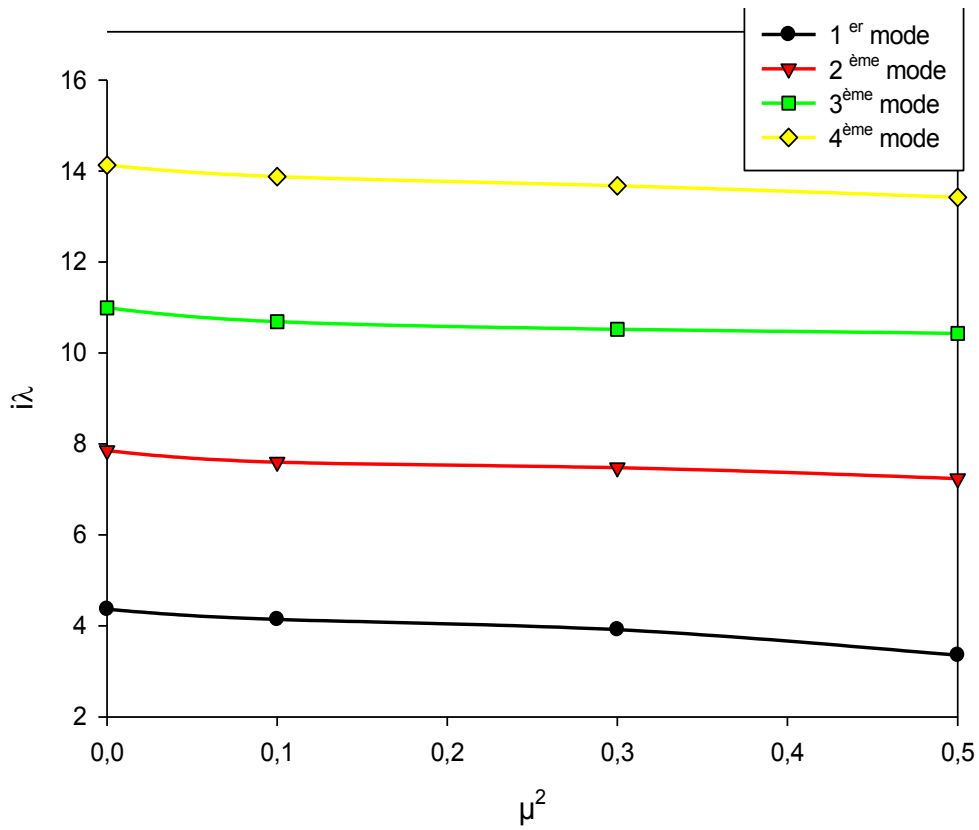


Figure V. 12. Variation des quatre premières fréquences de flexion inverse en fonction de  $\mu^2$  Pour un nanorotor bi-encasté.

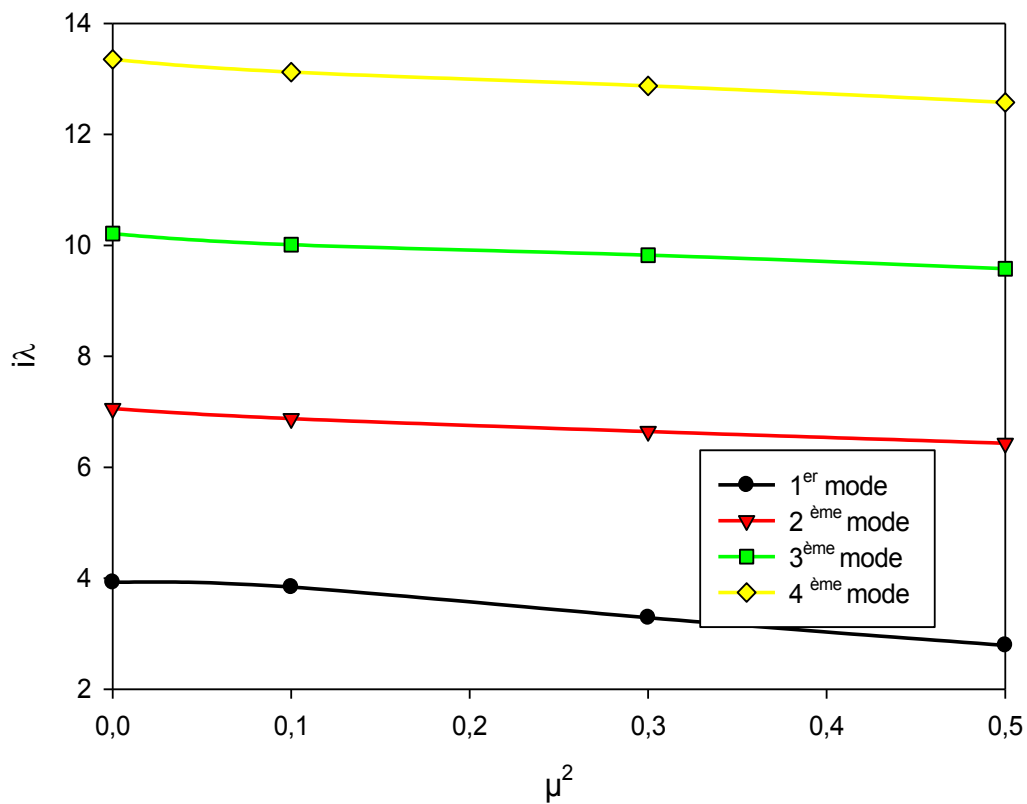


Figure V. 13. Variation des quatre premières fréquences de flexion inverse en fonction de  $\mu^2$  Pour un nanorotor appuyé-encasté.

## V. 6. Analyse vibratoire d'un nanorotor à base de CNT

Dans cette section, notre étude sera réservée exclusivement à l'étude d'un nanotube de carbone mono-paroi en rotation (Figure. IV. 14) sert comme arbre tournant pour les nano-machines tournante de différentes applications.

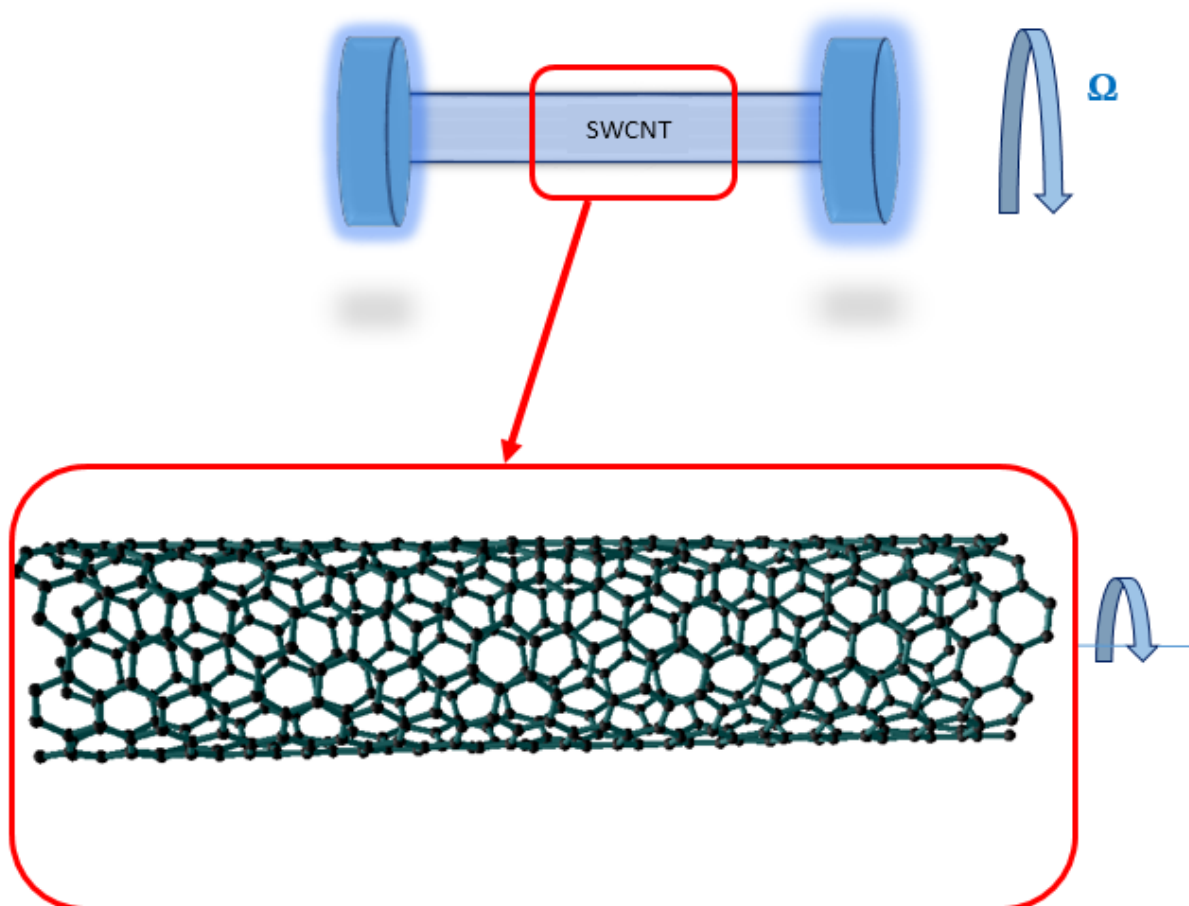


Figure V. 14. Schéma illustratif d'un nanorotor à base de CNT mono-feuillé

Pour mieux comprendre et discuter les paramètres du comportement dynamique du nano-arbre tournant. Le diagramme de Campbell est employé en augmentant la vitesse critique et variant le paramètre de l'échelle. L'effet gyroscopique (vitesse critique). La résolution du système différentielle complexe qui se suit contenant la matrice de l'effet gyroscopique par la technique des quadratures différentielles en admettant propriétés du nanotubes (SWCNT) suivantes [136]:

Module de Young  $E=971\text{GPa}$

Densité  $\rho=2300\text{Kg/m}^3$

Moment d'inertie  $I=\pi d^4/64$ .

Diamètre du SWCNT  $d=1\text{nm}$



Ratio de poisson  $\nu=0.3$

Longueur  $L=100\text{nm}$ .

La figure. V.15 illustre le diagramme de Campbell pour différentes conditions aux limites ; il est bien remarqué que la fréquence fondamentale a une relation linéaire avec la vitesse angulaire du SWCNT. La vitesse de rotation (l'effet gyroscopique) a augmenté les fréquences fondamentales. Les modes de flexion directes augmentent et les modes inverses décroissent.

Il est à noter que les fréquences de la condition (E-E) sont plus importantes que les autres conditions aux limites. Ce qui montre l'effet des conditions aux limites sur la matrice de rigidité du système.

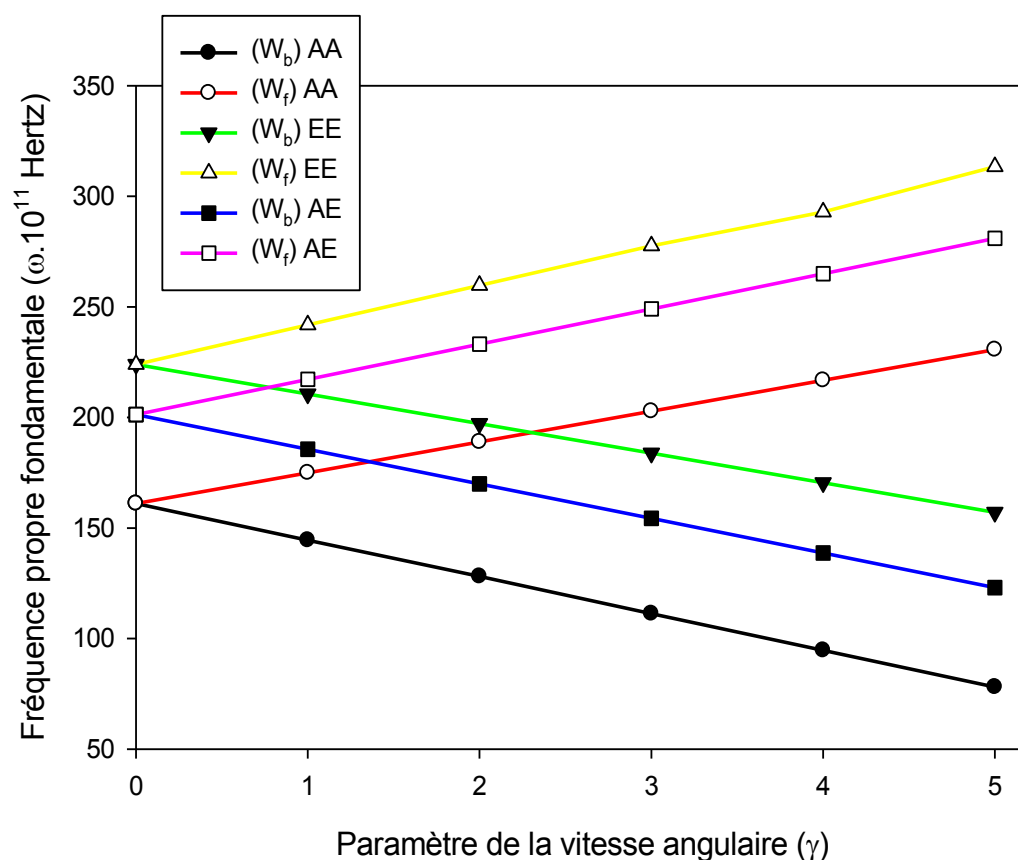


Figure. V.15. Diagramme Campbell pour différentes conditions aux limites pour le cas local.

Le diagramme de Campbell sert à déterminer la vitesse critique  $\gamma_{cr}$  dans laquelle le nanorotor vibre violemment. C'est la vitesse correspond à l'intersection de la courbes des fréquences et la vitesse de rotation ( $\omega=\gamma$ ). Une augmentation de la vitesse critique entraîne à la fois une amélioration du paramètre de fréquence direct et une chute du paramètre de fréquence inverse.

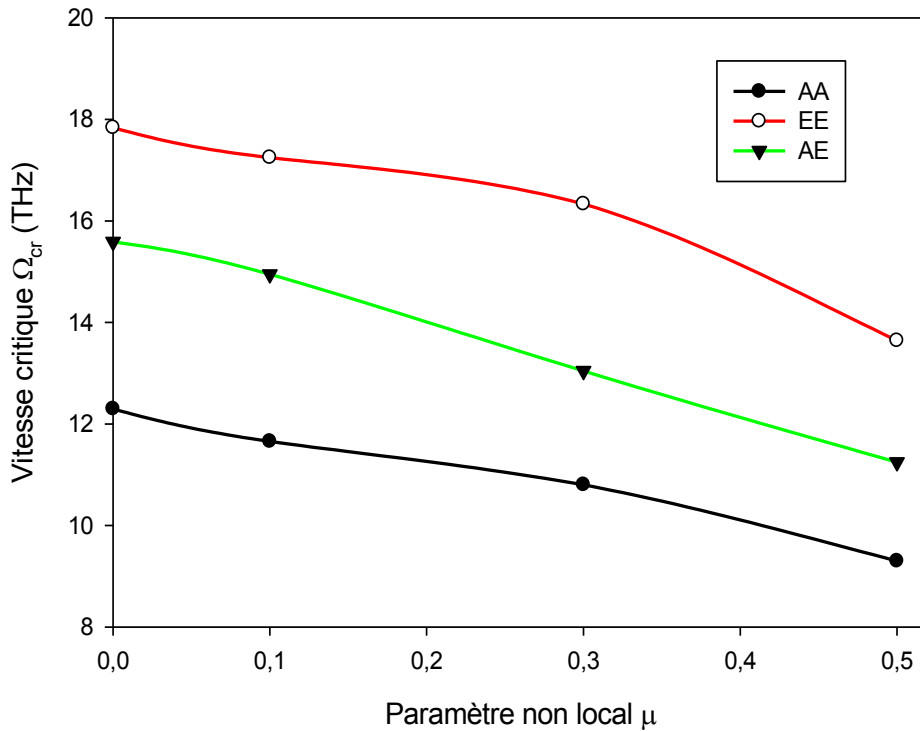


Figure. V. 16. Vitesse critique avec l'effet de l'échelle pour différentes conditions aux limites.

La détermination des vitesses critiques du nanorotor est présentée comme suit :

$$\Omega^2 = \frac{EI}{\rho AL^4} \gamma^2 \quad (V. 1)$$

La figure V.17 présente la variation des vitesses critiques du nanorotor avec différents paramètres non locaux. Nous remarquons que les vitesses critiques sont très élevées (9-18 Tira hertz) ; Cela peut montrer les propriétés mécaniques exceptionnelles des CNT et leur capacité à participer à la construction de nano-machines en rotation. L'effet à petite échelle est dominant. En fait les vitesses critiques diminuent lorsque le paramètre non local augmente. La condition aux limites (E-E) donne des vitesses critiques plus élevées que les conditions aux limites (A-E) et (A-A). Respectivement.

La figure(V.17) illustre la variation des fréquences fondamentales avec les paramètres de vitesse angulaire. Lorsque le paramètre non local augmente on assiste à une diminution de la fréquence fondamentale, l'augmentation de la vitesse angulaire affecte de plus en plus la fréquence fondamentale directe et la fréquence inverse diminue.

Les figures (V.18 et V.19) illustrent le diagramme de Campbell pour le nanorotor SWCNT pour les conditions aux limites(E-E) et (A-E), respectivement. Pour les deux figures. Les fréquences fondamentales sont affectées par le paramètre de vitesse angulaire et le paramètre non local.

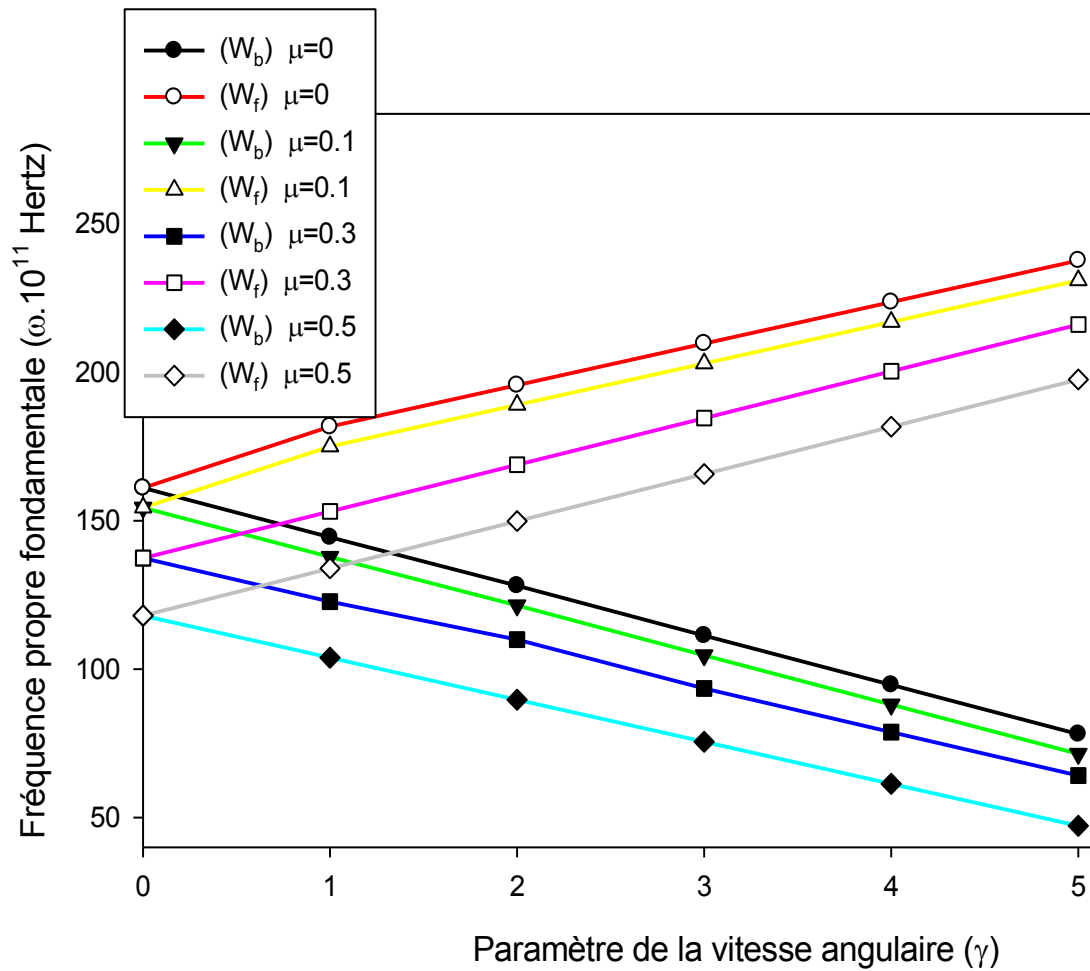


Figure. V. 17. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé

Cependant, les paramètres de vitesse angulaire augmentent les fréquences propres de flexion directe et diminuent les fréquences inverses. Ainsi, la vitesse de rotation critique dans le nanorotor pour les ondes inverses devrait être la principale préoccupation pour l'assurance de la sécurité et de la surveillance de la santé des nano-machines en rotation.

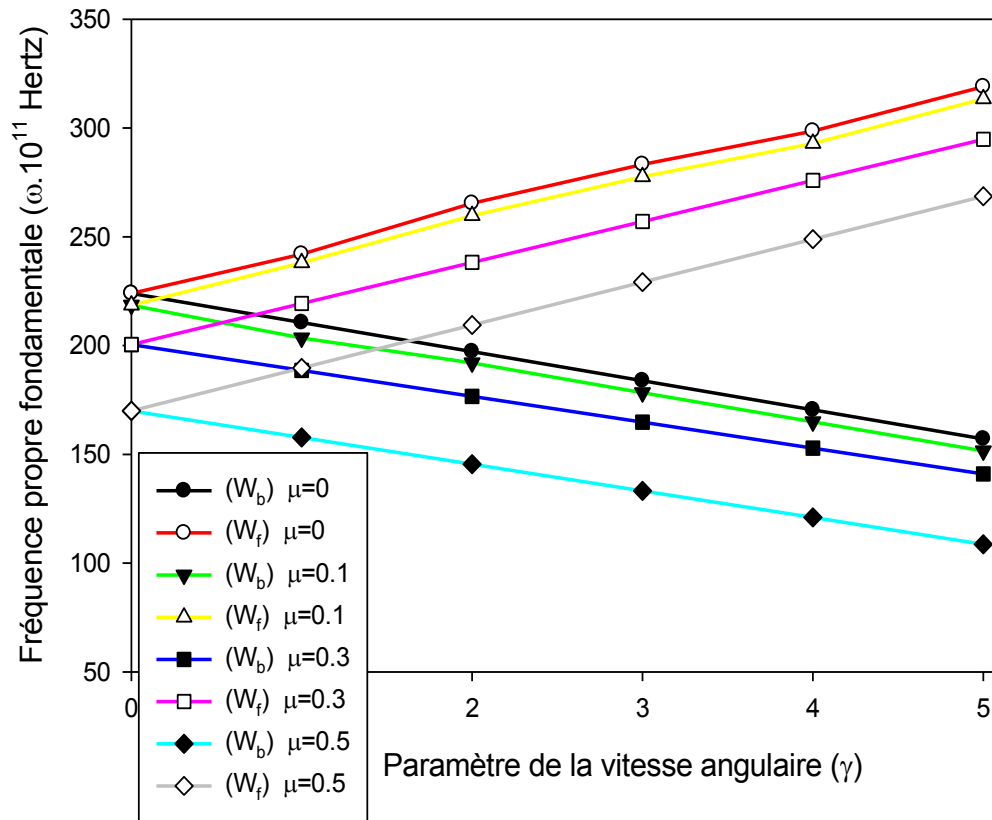


Figure. V. 18. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-encasté

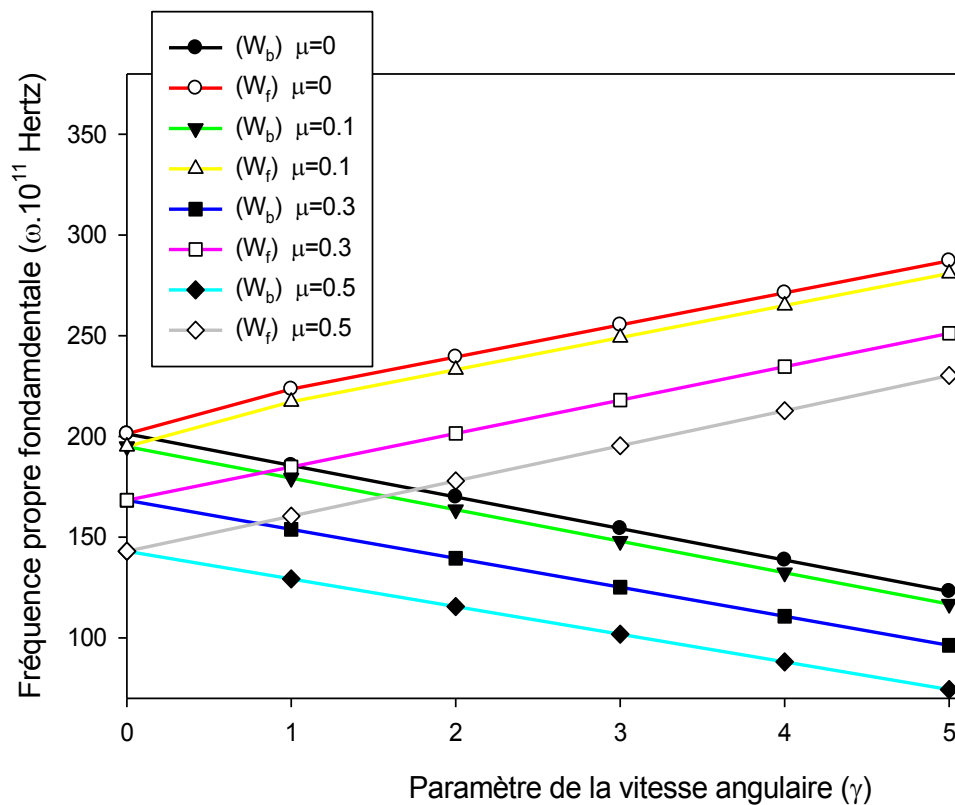


Figure. V. 19. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant appuyé-encasté

### V. 7. Analyse vibratoire d'un nanorotor à base de CNT intégré dans une fondation élastique

Dans cette section, la vibration du nanorotor d'un nanorotor suspendu dans une fondation élastique de type de Winkler est étudiée en montrant l'effet des paramètres non locaux, les paramètres de la fondation élastique, et la vitesse de rotation sur les paramètres de fréquence propres directes et rétrogrades.

Tableau V.8. Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (bi-appuyée)

K	$\gamma$	$\mu^2 = 0.1$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
		$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
$10^2$	1	2,7341	2,7341	2,4031	2,4031	2,0252	2,0252
	1	2,4103	3,2669	2,1174	2,7093	1,7488	2,3345
	2	2,0917	3,5386	1,8674	3,0152	1,4724	2,6444
	3	1,763	3,8103	1,5453	3,3217	1,1961	2,9542
	4	1,4397	4,082	1,2590	3,6277	0,9193	3,2636
	5	1,0341	4,3537	0,9733	3,9333	0,6434	3,5732
$10^3$	0	2,6198	2,6198	2,1785	2,1785	1,8409	1,8409
	1	2,296	3,1526	1,8547	2,7113	1,5171	2,3737
	2	1,9774	3,4243	1,5361	2,983	1,1985	2,6454
	3	1,6487	3,696	1,2074	3,2547	0,8698	2,9171
	4	1,3254	3,9677	0,8841	3,5264	0,5465	3,1888
	5	1,0198	4,2394	0,7785	3,7981	0,3809	3,4605
$10^4$	0	2,5203	2,5203	2,142	2,142	1,7847	1,7847
	1	2,1965	3,0531	1,8182	2,6748	1,4609	2,3175
	2	1,8779	3,3248	1,4996	2,9465	1,1423	2,5892
	3	1,5492	3,5965	1,1709	3,2182	0,8136	2,8609
	4	1,2259	3,8682	0,8476	3,4899	0,4903	3,1326
	5	1,1203	4,1399	0,7142	3,7616	0,3847	3,4043

Le tableau suivant V.8 présente la variation des paramètres de fréquence propre directe et indirecte en variant les paramètres de l'échelle pour un nanorotor bi-appuyé, et le coefficient de la fondation élastique K.

On remarque que les paramètres de fréquence propres se décroissent dès que le nanorotor soit suspendu dans un milieu élastique. En augmentant le coefficient du milieu élastique K ( $K=10^2$ ,

$10^3, 10^4$ ) les paramètres de fréquence se décroissent légèrement. Quand on descend dans l'échelle (augmentation de  $\mu^2$ ) les fréquences propres deviennent moins importantes que celles du cas local ( $\mu^2 = 0$ ). Les mêmes remarques restent valides pour les tableaux V.9 pour un nanorotor bi-encasté et le tableau V.10 pour un nanorotor appuyé-encasté.

Tableau V.9. Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (bi-encastée)

K	$\gamma$	$\mu^2 = 0.1$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
		$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
<b>10<sup>2</sup></b>	0	4,2456	4,2456	3,968	3,968	3,2002	3,2002
	1	3,8746	4,0946	3,5974	3,8172	2,8292	3,0492
	2	3,7136	5,0534	3,4366	4,7758	2,6682	4,008
	3	3,3526	5,4025	3,0755	5,1249	2,3072	4,3571
	4	3,0916	5,7012	2,8143	5,4236	2,0462	4,6558
	5	2,8306	6,1001	2,5533	5,8225	1,7852	5,0547
<b>10<sup>3</sup></b>	0	4,15107	4,15107	3,8306	3,8306	3,1125	3,1125
	1	3,78007	4,0127	3,4432	3,6798	2,74150	2,9615
	2	3,61907	4,9588	3,2992	4,6384	2,58052	3,92031
	3	3,25807	5,3079	2,9381	4,9875	2,21951	4,26942
	4	2,99707	5,6066	2,6769	5,2862	1,95853	4,56816
	5	2,73607	6,0055	2,4159	5,6851	1,69751	4,96703
<b>10<sup>4</sup></b>	0	3,2534	3,25347	2,933	2,933	2,2149	2,2149
	1	2,8822	3,1151	2,5456	2,7822	1,8439	2,0639
	2	2,7214	4,0612	2,4016	3,7408	1,6829	3,0271
	3	2,3603	4,4103	2,0405	4,0899	1,3219	3,3712
	4	2,0994	4,709	1,7793	4,3886	1,0609	3,6705
	5	1,83847	5,1079	1,5183	4,7875	0,7999	4,0694

Pour vérifier l'effet du coefficient élastique et le paramètre de l'échelle réduite, on définit le paramètre de variation des paramètres de fréquences propres  $\lambda^*$ :

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

$\lambda_0$  : Le paramètre de fréquence correspondant à une vitesse angulaire nulle.  $\lambda_0 = \lambda_{0f} = \lambda_{0b}$

$\lambda$  : Le paramètre de fréquence correspondant aux différentes vitesses de rotation.

A partir des résultats précédents du nanorotor SWCNT, On définit alors, le paramètre de variation de la vitesse angulaire  $\gamma^*$  :

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\lambda_0}$$

Tableau V.10. Paramètres de fréquences pour différents paramètres non locaux et différents coefficients élastique K pour la condition à la limite (appuyée-encastree)

K	$\gamma$	$\mu^2 = 0.1$		$\mu^2 = 0.3$		$\mu^2 = 0.5$	
		$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$	$\lambda_b$	$\lambda_f$
<b>10<sup>2</sup></b>	0	3,6771	3,6771	3,353	3,353	2,6047	2,6047
	1	3,3718	4,2338	3,0477	3,9097	2,2994	3,1614
	2	3,0665	4,5445	2,7424	4,2204	1,9941	3,4721
	3	2,7612	4,8552	2,4371	4,5311	1,6888	3,7828
	4	2,4559	5,1659	2,1318	4,8418	1,3835	4,0935
	5	2,1506	5,4766	1,8265	5,1525	1,0782	4,4042
<b>10<sup>3</sup></b>	0	3,565	3,565	3,2409	3,2409	2,5144	2,5144
	1	3,2597	4,1217	2,9356	3,7976	2,2096	3,0716
	2	2,9544	4,4324	2,6303	4,1083	1,9044	3,3823
	3	2,6491	4,7431	2,3253	4,4192	1,5904	3,6930
	4	2,3438	5,0538	2,0197	4,7297	1,2937	4,0037
	5	2,0385	5,3645	1,7144	5,0404	0,9884	4,3144
<b>10<sup>4</sup></b>	0	3,46822	3,46822	2,37312	2,37312	2,4287	2,4287
	1	3,16292	4,02492	2,06782	2,92982	2,1240	2,9860
	2	2,85762	4,33562	1,76252	3,24052	1,8188	3,2967
	3	2,55232	4,64632	1,45752	3,55142	1,5039	3,6074
	4	2,24702	4,95702	1,15192	3,86192	1,2083	3,9181
	5	1,94172	5,26772	0,84662	4,17262	0,9027	4,2288

La figure V.20 présente le diagramme de Campbell pour un nanorotor suspendu dans une fondation élastique de paramètre élastique variant de  $10^2$  à  $10^4$ . Contrairement aux paramètres de fréquence propre qui donnent des fréquences propres directes croissantes et des fréquences propres décroissantes avec l'augmentation de la vitesse de rotation, la variation de ces paramètres définit précédemment donne des fréquences directes décroissantes et des fréquences propres rétrogrades croissantes (l'effet de rapport mathématique). La vitesse de rotation peut

avoir des effets importants sur la stabilisation du système à faible fondations élastiques (faibles valeurs de  $K$ ) tandis que pour les fondations élastiques dures, cet effet de stabilisation est minimisé. Donc, plus on augmente le coefficient de la fondation élastique (rigidité) plus les paramètres de fréquences propres diminuent. Il est à noter que le point  $\gamma^* = 1$  caractérise la rentrée en monde rigide.

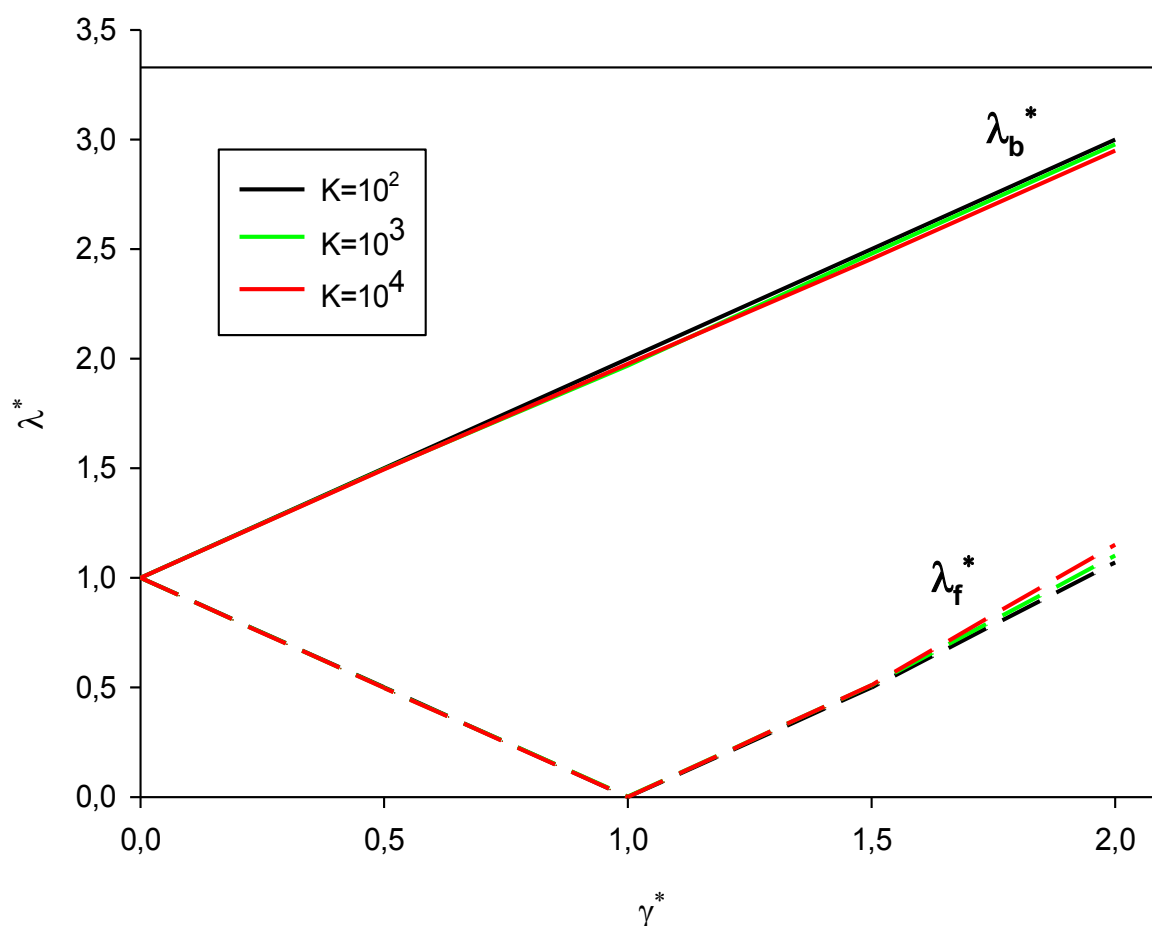


Figure. V. 20. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé pour différents paramètres de la fondation élastique

Dans la figure V.21, illustre le diagramme de Campbell qui montre l'effet du paramètre de l'échelle sur les paramètres des fréquences propres, on remarque que la variation des paramètres des fréquences propres directes se décroît et les fréquences rétrogrades se croissent.

Quand on réduit l'échelle, les paramètres des fréquences rétrogrades  $\lambda_b^*$  augmentent ; la même chose pour les paramètres des fréquences propres directes  $\lambda_f^*$  sauf que pour ces derniers s'inversent dans une plage de paramètre de vitesse angulaire entre une et une fois et demi le



paramètre de la fréquence propre ( $\lambda_0$ ) ou  $\lambda_f^*$ , il est à noter que la vitesse angulaire critique est au voisinage de  $\gamma^* = 1,5$ .

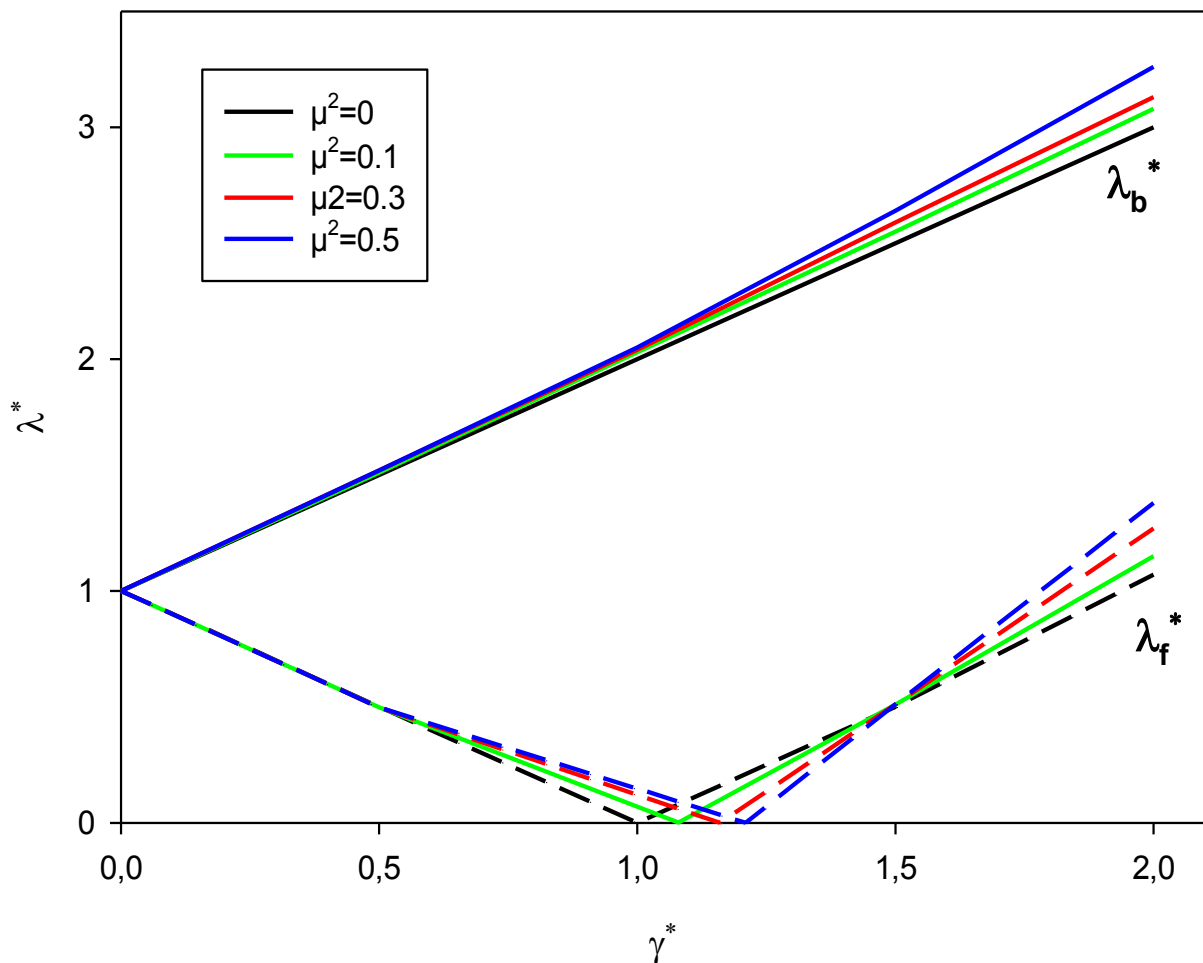


Figure. V. 21. Diagramme Campbell pour un nano-arbre tournant bi-appuyé pour différents paramètres non locaux.

Faisons un calcul inverse pour avoir les valeurs de la vitesse de rotation en Hertz à partir des paramètres de la vitesse de rotation. La figure V. 22 illustre les vitesses angulaires critiques en fonction du paramètre de l'échelle pour différents coefficients de fondations élastique et différentes conditions aux limites. On peut remarquer que la vitesse de rotation critique diminue en fonction des paramètres de l'échelle, donc plus en descendant en échelle plus la vitesse critique diminue en valeur. Contrairement au paramètre non local, on remarque qu'avec une augmentation de raideurs de la fondation élastique, la vitesse de rotation augmente. Mais en réalité, c'est évident que la rigidité de la fondation n'a à peu près rien à faire avec aux vitesses de rotation et elle provoque de minuscules changements dans la vitesse de rotation critique.

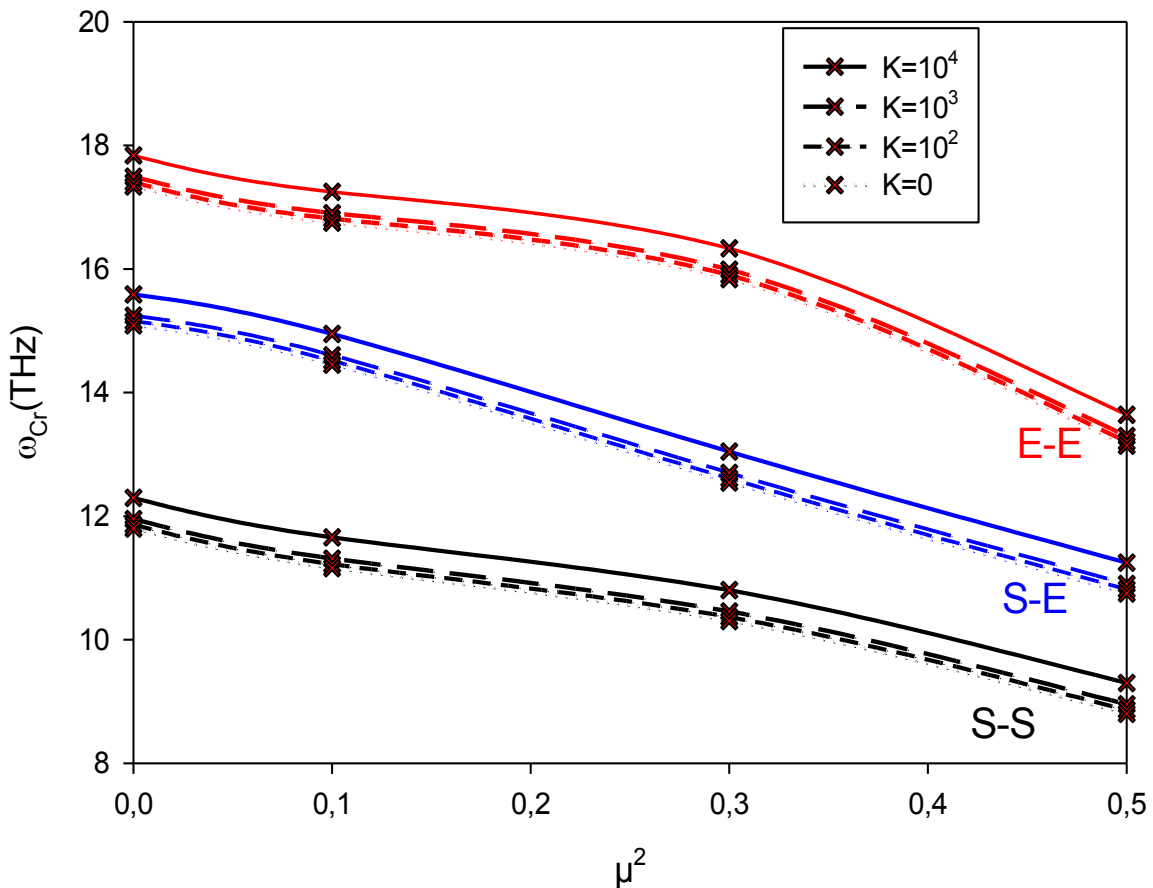


Figure. V. 22. Première Vitesse critique pour différents paramètre de l'échelle, différentes condition aux limites et différents paramètres de coefficients élastique K.

Dans ce chapitre. On a présenté les résultats obtenus suite à la computation vibratoire d'un nano-arbre tournant ; en présentant une étude paramétrique qui a montré l'effet de l'échelle infinitésimale et certains paramètres géométriques sur la dynamique vibratoire des nanorotor. Ensuite. Le nanotube de carbone est étudié en tant que nano-poutre en rotation sur la base du modèle d'Euler-Bernoulli et de la théorie d'élasticité non locale par une méthode semi analytique : la méthode de la quadrature différentielle généralisée (GDQM). L'effet de la petite échelle, de la vitesse angulaire et des conditions aux limites sur les fréquences fondamentales et les vitesses critiques était confirmé. Cette étude a montré ainsi les propriétés mécaniques exceptionnelles qu'offrent les nanotubes de carbone (fréquences en THz).

Dans un second lieu, le nano-arbre tournant a été étudié intégré dans une fondation élastique de type de Winkler, l'effet de la fondation élastique, conditions aux limites, paramètre non local et la vitesse de rotation est étudiée.

# Conclusion générale

Ce travail a été élaboré afin d'étudier le comportement vibratoire libre d'un nanorotor pour différentes applications, le nanorotor a été modélisé commettant une poutre d'Euler-

Bernoulli. Les équations gouvernantes sont générées par le principe des travaux virtuels de Hamilton.

Pour tenir en compte de l'effet de l'échelle réduite et étudier le comportement mécanique des nanostructures, l'approche de la mécanique des milieux continus offre la possibilité d'analyser les nanostructures avec des moyennes computationnelles moins coûteuses et moins occupantes en capacité que les deux autres approches (atomistique et semi continu).

Les théories continus classiques (Théorie des poutres en particulier) est incapable d'analyser les nanostructures toute seule. Or, ces théories classiques nécessitent la considération de l'effet de l'échelle réduite, chose qui est répondu par le couplage avec la théorie d'élasticité non locale d'Eringen.

La théorie d'élasticité non locale est une version modifiée de la théorie d'élasticité classique. Dans la mécanique continue non locale, il est supposé que la contrainte dans un point donné est une fonction des déformations dans tous les points du corps ; Après l'application de la théorie d'élasticité non locale aux équations gouvernantes, le système d'équations différentielles obtenu sera ensuite discrétisés en utilisant la méthode semi-analytique des quadratures différentielles généralisées (GDQM) qui est souvent utilisée par les chercheurs pour les problèmes dynamiques des nanostructures.

Comme résultats obtenus, on a illustré les différents graphes qui montrent les effets du paramètre d'échelle ainsi le paramètre de la vitesse critique sur le comportement vibratoire du nano-arbre tournant. Ensuite on a pris un nanotube de carbone mono-paroi comme nanorotor pour différentes conditions aux limites, l'effet de la vitesse critique, l'effet de l'échelle, les conditions aux limites et les paramètres géométriques ont été discutés, cela nous mène à conclure le suivant :

- L'utilisation de la méthode GDQM était un bon choix pour ce type de problème (Eigen-problem).
- Les résultats obtenus ont été validé dans le cas d'absence de rotation, pour le cas de rotation les résultats étaient proches de celles cités en littérature.
- La rotation partage les paramètres de fréquence en deux, un mode de flexion directe et un mode inverse.
- La vitesse angulaire croissante augmente le mode de flexion directe et démunie le mode inverse (rétrograde)
- L'effet de l'échelle a une influence signifiante sur les paramètres de fréquence et la vitesse critique en les diminuant
- le rapport  $L/D$  (Aspect ratio) démunie la vitesse critique, quand ce rapport dépasse une certaine valeur son effet devient négligeable.
- l'effet de du rapport  $h/D$  sur les vitesses de rotation critiques est négligeable
- Pour les nanorotor suspendu dans une fondation élastique, on peut clairement en déduire que la vitesse de rotation peut avoir des effets importants sur la stabilisation du système à faible fondations élastiques (faibles valeurs de  $K$ ) tandis que pour des fondations élastiques dures, cet effet de stabilisation est minimisé.

- la rigidité de la fondation n'a aucun effet sur les vitesses de rotation mais elle provoque de minuscules changements dans la vitesse de rotation critique.

D'après plusieurs études qui ont utilisé la théorie d'élasticité non locale, cette dernière a des limites dans l'étude des structures comme elle ne prend pas en considération l'effet de la surface (pour les nanostructures, leur surface est souvent supérieure à leur volume). De nombreux chercheurs ont essayé de développer d'autres théories d'élasticité non classiques. Ainsi, de nombreuses recherches ont été effectuées sur les nano-poutres, nano-plaques, nano-cellules, nanotubes, nano-rodés et etc. basés sur l'élasticité non locale, la théorie du gradient de contrainte, la théorie du couple de stress, théorie de l'effet de surface et la dynamique moléculaire. Ce travail accorde une attention particulière au comportement mécanique des nanorotors dans le cadre des théories d'élasticité non locale.

L'examen des articles dans ce domaine montre que beaucoup de travail a été fait dans les années récentes. Ce fait reflète le rythme croissant de la plupart des travaux effectués sur la base des théories d'élasticité non locale à gradient de contrainte a coïncidait avec le principe de Hamilton. Les résultats ont montré que le paramètre d'échelle, la longueur de la nanostructure ne peut pas être ignoré pour les matériaux à l'échelle micro / nanométrique. Malheureusement, peu de travail expérimental a été fait sur le terrain en nano-mécanique.

Comme future perspectives de recherche, le thésard invite l'ensemble des chercheurs de traiter des sujets en mécanique des nanostructures en examinant d'autres théories comme la théorie du gradient de contrainte et le couple théorie du stress, effet de surface et dynamique moléculaire et en changeant le type des nanostructures (nano-coques, nano-rodés, nano-plaques, nano-feuilles, nano-cellules...) dans différents environnement et avec d'autres types de matériaux (FGM, composite...).

**Références :**

1. A. D. Dimarogonas, A Brief History of Rotor Dynamics, Rotordynamics '92 pp 1-10 (1992).
2. W. J. McQ. Rankine, On the Centrifugal Force of Rotating Shafts, Engineer, 27 (1869)
3. A. Foppl, Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle, Der Civilingenieur, 41 (1895) 335-342.
4. H. H. Jeffcott, The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed, Phil. Mag, 37, 6 (1919) 304-314.
5. M. A. Prohl, A General Method for Calculating the Critical Speeds of Flexible Rotors, J. Appl. Mech, 12, 3 (1945)142-148.
6. A. Belhadj, Etude d'ingénierie d'un compresseur centrifuge : Dimensionnement, Simulation et Maintenance, Mémoire de fin d'étude : Ingénieur spécialisé en Mécanique pétrolière IAP Boumerdes 2017. Sonatrach.
7. D. Childs, Turbomachinery Rotordynamics, Wiley & Sons, (1993) 430.
8. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. III (Reading, MA, Addison-Wesley, (1977).
9. J. Samuéli, "Par-delà les nanosciences et les nanotechnologies", ellipses. (2007).
10. Taniguchi, N. (1974), "On the Basic Concept of Nano-Technology", Proc .Intl. Conf .Prod .Eng. Tokyo, Part II, Japan Society of Precision Engineering.
11. G. Binnig, H. Rohrer, Scanning-tunneling microscopy from birth to adolescence, Reviews of modern physics, 389, 409. (1987).
12. Eric, Drexler K. "Engines of Creation. The Coming Era of Nanotechnology." Anchor Book (1986).
13. D. M. Eigler and E. K. Schweizer, Positioning single atoms with a scanning tunnelling microscope, Nature, 344, pp. 524-526, (1990).
14. A. Belhadj, H. Boudjemaa, Recent Advances of Mechanical Engineering Applications in Medicine and Biology, Medical Technologies Journal, (3) 62-75, 2017.
15. C. Darkin, Nanorobots With Human Embryo,  
<https://fineartamerica.com/featured/nanorobots-with-human-embryo-christian-darkin.html>
16. P.T. Konkola, C. G. Chen, R.K. Heilmann, C. Joo, J.C. Montoya JC, C.H. Chang, M.L Schattenburg, Nanometer-level repeatable metrology, J Vac SciTechnol B 21 (6):3097–3101(2003).

17. M. Zidour, Etude du comportement mécanique des nanotubes en carbone entourés par une matrice polymère, thèse doctorat, université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2012.
18. E. Garrido, fonctionnalisation de nanotubes de carbone pour leur incorporation dans des matrices métalliques, thèse doctorat, Université de Bordeaux, 2010.
19. Kadish, K. M. & Ruoff, R. S. Fullerenes: Chemistry, Physics, and Technology ix, 968Wiley-Interscience, New York, 2000.
20. R. Arjmandi, A. Hassan, No. Othman, Z. Mohamad, Chapter 3: Characterizations of Carbon-Based Polypropylene Nanocomposites, 57-78, Carbon-Based Polymer Nanocomposites for Environmental and Energy Applications (2018). Elsevier Inc.
21. S. Rizk, Elaboration Et Caractérisation De Nanostructures Carbonées Par Procédé CDV Assisté Par Plasma Microonde, thèse, Université Henri Poincaré, Nancy I.
22. S. Iijima, T. Ichihashi, Nature 363, 603 (1993).
23. Ugarte, Daniel. "Curling and closure of graphitic networks under electron-beam irradiation." Nature 707, 359.6397 (1992).
24. L. Boumia, Les propriétés physiques et mécaniques des nanotubes en carbone, thèse doctorat, université Djilali Liabes de Sidi bel abbes, 2017.
25. X. Blase, L. X. Benedict, E. L. Shirley & S.G. Louie, "Hybridization effects and metallicity in small radius carbon nanotubes", Phys. Rev. Lett. 72 (1994), 1878–1881
26. B. Aoumeur, Propriétés thermiques et électriques de composites à base de nanotubes de carbone et application à la détection de gaz, thèse de Doctorat, Université du Littoral-Côte d'Opale, 2011.
27. M.-F. Yu, B. S. Files, S. Arepalli, R. S. Ruoff, Tensile loading of ropes of single wall carbon nanotubes and their mechanical properties, Phys. Rev. Lett., 2000, 84, 5552-5555.
28. K. Rakrak, Etude de la vibration libre D'un nanotube en carbone, Thèse de doctorat, Université de Sidi Belabes, 2018.
29. R. Saito, M. Fujita, G. Dresselhaus, M.S. Dresselhaus, Phys. Rev. B 45 (1992) 6234-6242.
30. T. White, T.N. Todorov, Nature 393 (1998) 240-242.
31. M. Ouyang, J.L. Huang, C.M. Lieber, Acc. Chem. Res. 35 (2002) 1018-1025.
32. X. Sun, R. Q. Yu, G. Q. Xu, T. S. A. Hor, W. Ji, Broadband optical limiting with multiwalled carbon nanotubes, , Appl. Phys. Lett., 1998, 73, 3632-3634.

33. M. I. Mohammad, A. A. Moosa, J.H. Potgieter, M.K. Ismael, M, Carbon nanotubes synthesis via arc discharge with a Yttria catalyst. *ISRN Nanomaterials*, (2013).
34. O. Jost et al. *Appl. Phys. Lett.*, 1999, 75, 2217.
35. K. Koziol, B. Boskovic, N.Yahya, Synthesis of Carbon Nanostructures by CVD, *Method, Adv Struct Mater* 5, 2010
36. L. Grill, K.H. Rieder, F. Moresco, G. Rapenne, S. M. Stojkovic, X. Bouju, C. Joachim, Rolling a single molecular wheel at the atomic scale, *Nature Nanotechnology*, 2007.
37. J. Hany, A. Globus, R. Jaffe, G. Deardorf, Molecular dynamics simulations of carbon nanotube-based gears, *Nanotechnology* 8, 95–102 (1997).
38. A. Jonghoon, X. Zhujing, B., Jaehoon, D. Yu-Hao, Hoang,, Optically Levitated Nanodumbbell Torsion Balance and GHz Nanomechanical Rotor, *Phys. Rev. Lett.*, 121, 3, 2018.
39. J. Shi, L. N. Liu, K. Cai, Q. H. Qin, "Conditions for escape of a rotor in a rotary nanobearing from short triple-wall nanotubes", *Scien. Repor.*, vol.7: 6772, 2017.
40. Wang, B., Vuković, L. & Král, P. Nanoscale rotary motors driven by electron tunneling. *Phys. Rev. Lett.* 101, 186808 (2008).
41. Cai, K., Yin, H., Qin, Q. H. & Li, Y. Self-excited oscillation of rotating double-walled carbon nanotubes. *Nano Lett.* 14, 2558–2562 (2014).
42. Cai, K., Yu, J., Shi, J., & Qin, Q.-H. (2017). Robust rotation of rotor in a thermally driven nanomotor. *Scientific Reports*, 7(1). doi:10.1038/srep46159
43. T. Iwiński, *Theory of Beams* 2<sup>nd</sup> Edition, Elsevier, 1967.
44. Reddy, J. N. (2007) Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, 45, 288-307.
45. L. Graham, J.M. Kantor, *Naming Infinity*, The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, USA (2009). (In particular see pages 87-89).
46. M. Heller, W.H. Woodin (Editors), *Infinity*, Cambridge University Press, Cambridge (2011).
47. R. Penrose, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London, 2004.
48. M. Jammer, *Concepts of Space*, Dover Publications, New York, (1993).
49. M.S. El Naschie, Einstein's dream and fractal geometry. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(1)(2005) 1-5.



- 
50. M.S.El Naschie. On twistors in Cantorian E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(4)(2001) 741-746.
  51. M. L. MONTAGERAND, “Éloge de M. Cosserat, Mémoires de l’académie des Sciences de Toulouse,” 12 Sér. Tome X (1932).
  52. E. and F. COSSERAT, “Sur la théorie de l’élasticité,” *Ann. Toulouse* 10, 1-116 (1896).
  53. M.S. El Naschie, The VAK of vacuum fluctuation, spontaneous self-organization and complexity theory interpretation of high energy particle physics and the mass spectrum. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(2003) 401-420. N.
  54. Challamel, C. M.Wang, I. Elishakoff, Discrete systems behave as nonlocal structural elements; bending buckling and vibration analysis. *Euro. J. Mech. A/Solids*, 44(2014) 125-135.
  55. M.S. El Naschie, *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*. McGraw Hill Int. Editions Civil Eng. Series, London, Tokyo (1990).
  56. M.S. El Naschie, Pinched material Einstein spacetime produces accelerated cosmic expansion. *Int. J. Astron. & Astrophys.* 4(1), 80-90 (2014).
  57. Eringen A.C., Non-local polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science* 10, 1-16, 1972
  58. A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J. Appl. Phys.* 54, 4703 (1983)
  59. A.C. Eringen, *Non-local Polar Field Models* (Academic Press, New York, 1996)
  60. A.C. Eringen, Linear theory of non-local elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Eng.Sci.* 10, 425–435 (1972)
  61. Eringen A.C., *Nonlocal continuum field theories*, Springer New-York, 2002.
  62. Toupin R.A., Elastic materials with couple-stresses, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* 11, 385-414, 1963.
  63. Gao J., An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 2 : Continuum field, *International Journal of Solids and Structures* 36, 2959-2971, 1999
  64. Krumhanls J.A., Generalized continuum field representation for lattice vibrations, In : Wallis R.F. (Ed.), *Lattice Dynamics*, Proc. of Int. Conference, Pergamon Press, London, 1963.
  65. Kroner E., Elasticity theory of materials with long-range cohesives forces, *International Journal of Solids and Structures* 3, 731-742, 1967.

67. Kunin I.A., The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM symposium, SpringerVerlag, 1967.
68. A. C. Eringen, D.G. Edelen, On nonlocal elasticity. Int. J. Eng. Sci., 10 (3) 233-248 (1972).
69. Edelen D.G.B., Laws N., On the thermodynamics of systems with nonlocality, Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 24-35, 1971.
70. Edelen D.G.B., Green A.E., Laws N., Nonlocal continuum mechanics, Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 36-44, 1971.
71. Lu P, Zhang PQ, Lee HP, Wang CM, Reddy JN. Non-local elastic plate theories. Proc Roy Soc A 2007;463(2088):3225–40.
72. Pradhan SC, Phadikar JK. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates. J Sound Vib 2009;325:206–23.
73. Ansari R, Sahmani S, Arash B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. Phys Lett A 2010;375:53–62.
74. F. Abdollahi, A. Ghassemi, Surface and Nonlocal Effects on Coupled In-Plane Shear Buckling and Vibration of Single-Layered Graphene Sheets Resting on Elastic Media and Thermal Environments using DQM, Journal of Mechanics, pp. 1-16, 2018
75. Pradhan SC. Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory. Phys Lett A 2009;373:4182–8.
76. Samaei AT, Abbasian S, Mirsayar MM. Buckling analysis of a single-layer graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory. Mech Res Commun 2011;38:481–5.
77. Aksencer T, Aydogdu M. Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory. Physica E 2011;43:954–9.
78. M. Bachher, N. Sarkar, Nonlocal theory of thermoelastic materials with voids and fractional derivative heat transfer, Waves in Random and Complex Media, pp. 1-19, 2018.
79. M. R. Barati, H. Shahverdi, Nonlinear vibration of nonlocal four-variable graded plates with porosities implementing homotopy perturbation and Hamiltonian methods, Acta Mechanica, Vol. 229, No. 1, pp. 343- 362, 2018.

80. M. Bastami, B. Behjat, Free vibration and buckling investigation of piezoelectric nano-plate in elastic medium considering nonlocal effects, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 40, No. 6, pp. 281, 2018.
81. A. Daneshmehr, A. Rajabpoor, A. Hadi, Size dependent free vibration analysis of nanoplates made of functionally graded materials based on nonlocal elasticity theory with high order theories, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 95, pp. 23-35, 2015.
82. S. Dastjerdi, B. Akgöz, New static and dynamic analyses of macro and nano FGM plates using exact three-dimensional elasticity in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 192, pp. 626-641, 2018.
83. M. Goodarzi, M. N. Bahrami, V. Tavaf, Refined plate theory for free vibration analysis of FG nanoplates using the nonlocal continuum plate model, *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 1, pp. 123-136, 2017.
84. N. Despotovic, Stability and vibration of a nanoplate under body force using nonlocal elasticity theory, *Acta Mechanica*, Vol. 229, No. 1, pp. 273-284, January 01, 2018.
85. M. Arefi, A. M. Zenkour, Size-dependent thermoelastic analysis of a functionally graded nanoshell, *Modern Physics Letters B*, Vol. 32, No. 03, pp. 1850033, 2018.
86. A. Farajpour, A. Rastgoo, M. Farajpour, Nonlinear buckling analysis of magneto-electro-elastic CNT-MT hybrid nanoshells based on the nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 180, pp. 179-191, 2017.
87. H. Zeighampour, Y. T. Beni, I. Karimipour, Wave propagation in double-walled carbon nanotube conveying fluid considering slip boundary condition and shell model based on nonlocal strain gradient theory, *Microfluidics and Nanofluidics*, 21 (2017) 85.
88. B. Karami, M. Janghorban, A. Tounsi, Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory, *Thin-Walled Structures*, 129 (2018) 251-264.
89. F. Tornabene, E. Viola, D. J. Inman, 2-D Differential Quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures, *Journal of Sound and Vibration*, 328 (2009) 259-290.
90. F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, R. C. Batra, Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equivalent single layer theory, *Composite Structures*, 119 (2015) 67-89.

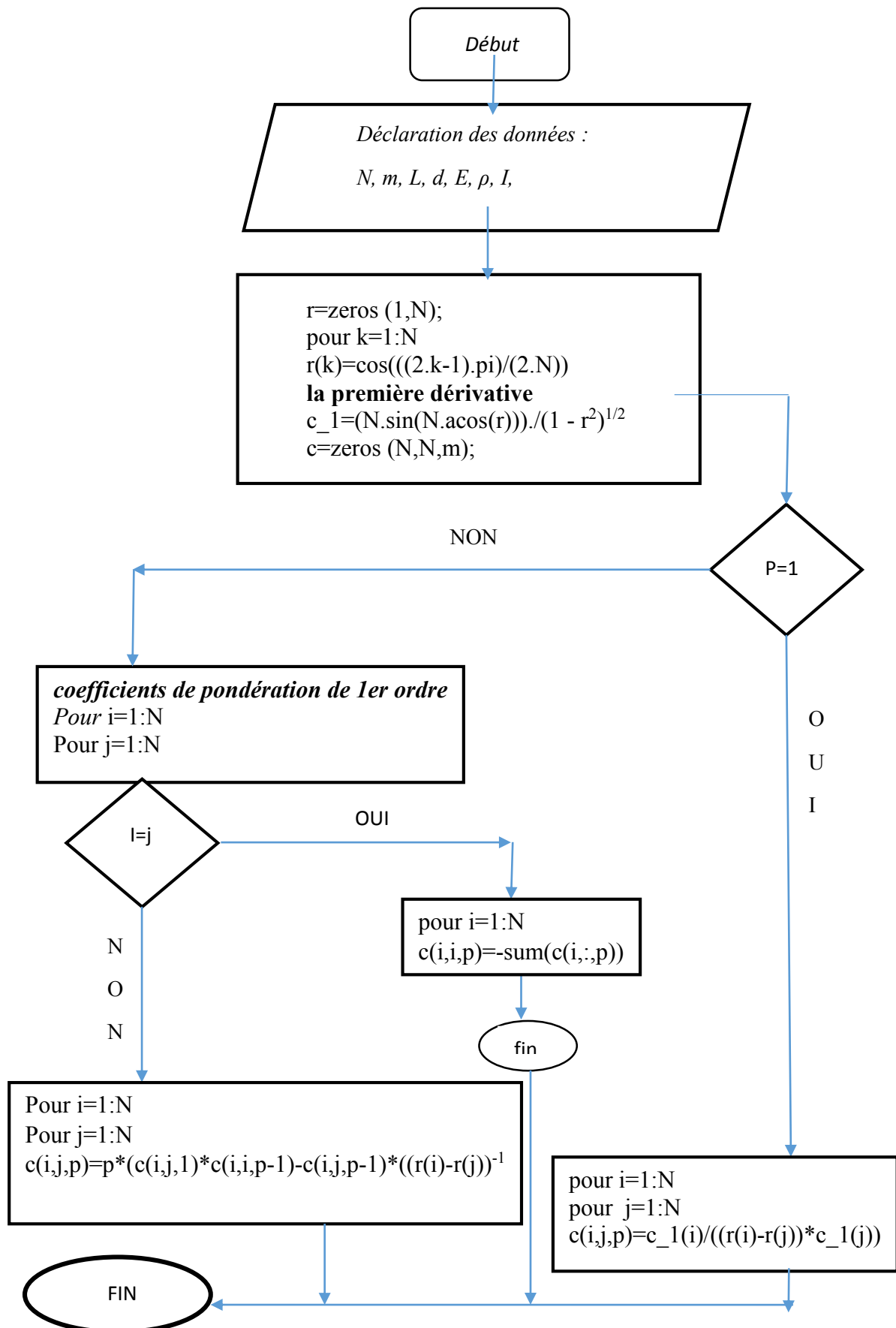
91. A. Apuzzo, F. Fabbrocino, E. Russo, P. Russo, On Small Scale Effects for Nanobeams, in: *Experimental Characterization, Predictive Mechanical and Thermal Modeling of Nanostructures and their Polymer Composites*, Eds., pp. 253-272: Elsevier, 2018.
92. M.A. Torkaman-Asadi, M. Rahmanian, R.D. Firouz-Abadi, Free vibrations and stability of high-speed rotating carbon nanotubes partially resting on Winkler foundations, *Composite Structures* 126, 52–61, 2015.
93. A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th Edn, Cambridge (1952).
94. Hussain M, Naeem MN, Shahzad A and He M. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach. *AIP Advances* 7 (2017) 045114.
95. H. Zeighampour, Y.T Beni, Size-dependent vibration of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes using couple stress shell theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 61 (2014) 28–39.
96. A. Apuzzo et al., Free vibrations of elastic beams by modified nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Engineering Science*, 133 (2018), 99-108.
97. S. M. Bağdatlı, N. Togun, Stability of fluid conveying nanobeam considering nonlocal elasticity, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 95, pp. 132- 142, 2017/10/01/, 2017.
98. M. R. Barati, Closed-form nonlinear frequency of flexoelectric nanobeams with surface and nonlocal effects under closed circuit electric field, *Materials Research Express*, Vol. 5, No. 2, pp. 025008, 2018.
99. A. Belhadj, A. Boukhalfa, S.A. Belalia " Free vibration modelling of single walled carbon nanotube using the differential quadrature method", *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, Vol.4, no.1, pp. 33-37, 2017.
100. A. Belhadj et A. Boukhalfa, S.A. Belalia "Free vibration analysis of nanobeams based on the theory of non-local Elasticity", *Le 4ème Séminaire sur les Technologies Mécaniques Avancées*, Tlemcen le14 et 15 Novembre 2017.
101. J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons Inc. 2002.
102. E. Winkler, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, Prague, 1867

- 
- 103.M. M. Filonenko-Borodich, A very simple model of an elastic foundation capable of spreading the load, *Sbornik Moskovskovo Elektro Instituta*, 1945
- 104.M. Hetenyi, *Beams on elastic foundation*, University of Michigan Press, 1946
- 105.P. L. Pasternak, On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Architekture*, Moskva, 1954.
- 106.A. D. Kerr, A study of a new foundation model, *Acta Mechanica*, vol. 1 (135–147), 1965.
- 107.A. Boukhalfa, *Comportement vibratoire des arbres tournants en matériaux composites*, thèse de doctorat, Université de Tlemcen, 2009.
- 108.Bellman, R., Kashef, B.G. and Casti, J, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *J. Comput. Phys.* 10 (1972). 40-52.
- 109.J. R. Quan, C. T. Chang, New insights in solving distributed system equation by the quadrature method, *I. Comput. Chem. Engin.* 13 (1989). 779-788.
- 110.J. R. Quan, C. T. Chang, New insights in solving distributed system equation by the quadrature method, *II. Comput. Chem. Engin.* 13 (1989). 1017-1024.
- 111.Shu, C. and Richards, B.E., 1990. High Resolution of Natural Convection in a Square Cavity by Generalized Differential Quadrature. *Proceedings of 3rd International Conference on Advanced in numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*, Swansea, 2: 978-985.
- 112.Shu, C., 1991. *Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation*. Ph.D. Thesis, University of Glasgow, Glasgow. Bert, C. W., Jang, S. K. and Striz A. G. 1988. Two new methods for analyzing free vibration of structure components. *AIAA Journal*, 26: 612–618.
- 113.Jang, S. K., Bert, C. W. and Striz A. G., 1989. Application of differential quadrature to static analysis of Structural components. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 28: 561–577.
- 114.Bert, C., Wang, X. and Striz, A. G. 1993. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. *International Journal of Solids Structures* 30: 1737– 1744.
- 115.Bert, C., Wang, X. and Striz, A. G. 1994. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica* 102: 11–24.

116. Du, H., Lim, M. K. and Lin, R. M., 1994. Application of Generalized Differential Quadrature to Structural problems. *Journal of Sound and Vibrations* 181: 279–293.
117. Du, H., Lim, M. K. and Lin, R. M., 1995. Application of Generalized Differential Quadrature to Vibration Analysis. *Journal of Sound and Vibrations* 181: 279–293.
118. A. Belhadj, A. Boukhalifa, S.A. Belalia "Carbon Nanotube Structure Vibration Based on Non-local Elasticity", *Journal of Modern Materials*, Vol.3, no.1, pp. 9-13, 2017.
119. A. Belhadj, A. Boukhalifa, S.A. Belalia. "Computation de la Vibration Libre d'une Structure avec la Méthode des Quadratures Différentielles (DQM)", *Les 3èmes Journées d'Etudes sur La Mécanique des Structures et des Matériaux : Approches Expérimentales & Simulations Numériques*, Sidi Bel Abbes les 11-12 Avril 2017.
120. A. Krowiak, Methods Based on the Differential Quadrature in Vibration Analysis of Plates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 46: 123-139, 2008.
121. M. Ramzy, Abumandour, M. H. Kamel, M. M. Nassar, Application of the GDQ Method to Vibration Analysis. *International Journal of Mathematics and Computational Science* 1: 242-249, 2015.
122. A. Belhadj, A. Boukhalifa, S.A. Belalia, On the vibration behavior of rotating nanostructures, *International Conference on Nanomaterials Science and Mechanical Engineering*, University of Aveiro, Portugal, July 16-18, 2018.
123. Shu, C. and Richards, B., 1992. Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 15: 791-798.
124. Al-Saif, A.S.J. and Zhu, Z.Y., 2003. Application of Mixed Differential Quadrature Method for Solving the Coupled Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equation and Heat Equation. *Journal of Shanghai University* 7: 343-351.
125. Al-Saif, A.S.J. and Zhu, Z.Y., 2006. Differential Quadrature Method for Steady Flow of an Incompressible Second-Order Viscoelastic Fluid and Heat Transfer Model. *Journal of Shanghai University* 9: 298-306.
126. Eldesoky, I. M., Kamel, M. H., Reda M. Hussien and Ramzy M. Abumandour, 2013. Numerical study of Unsteady MHD Pulsatile Flow through Porous Medium in an Artery using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM). *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing* 1: 200-206.

127. Eldesoky, I. M., Kamel, M. H. and Abumandour, R. M., 2014. Numerical Study of Slip Effect of Unsteady MHD Pulsatile Flow through Porous Medium in an Artery Using Generalized Differential Quadrature Method (Comparative Study). *World Journal of Engineering and Technology* 2: 117-134.
128. Eldesoky, I. M., Kamel, M. H., EL-Zahar, E. R. and Abumandour, R. M., 2015. Numerical Solution of Unsteady MHD Pulsating Flow of Couple Stress Fluid through Porous Medium between Permeable Beds using Differentia Quadrature Method (DQM). *Asian Journal of Mathematics and Computer Research* 9: 8-28.
129. Marzani, A, Tornabene, Viola. E, Nonconservative stability problems via generalized differential quadrature method, *J. Soun. Vib.* 315 (2008) 176-196.
130. Tornabene. F, Fantuzzi, N, Baccocchi, M, The local GDQ method applied to general higher-order theories of doubly-curved laminated composite shells and panels: The free vibration analysis, *Compos. Struct.* 116 (2014). 637-660.
131. Tornabene. F, Fantuzzi, N, Baccocchi, M, The local GDQ method for the natural frequencies of doubly-curved shells with variable, *Composites Part B* 92 (2016).265-289.
132. N. Fantuzzi, *Generallized Differential Quadrature Finite Element Method applied to advanced structural mechanics*, PhD thesis, University of Bologna, Italy, 2013.
133. S. K. Jena and S. Chakraverty, Free Vibration Analysis of Single Walled Carbon Nanotube with Exponentially Varying Stiffness, *Curved and Layer. Struct.* 2018; 5:201–212.
134. S. Chackraverty, L. Behera, Free vibration of non-uniform nanobeams using Rayleigh–Ritz method, *Physica E.* vol. 67, 38-46, 2015.
135. René-Jean GIBERT, *Vibrations des structures*, n°69 de la collection R&D d’EDF chez EYROLLES, p.235-237 (1988).
136. A. Belhadj, A. Boukhalifa, S. A. Belalia, "Free vibration analysis of a rotating nanoshaft based SWCNT", *Eur. Phys. J. Plus*, vol.132: 513, 2017.

## ANNEXE. I : Organigramme simplifié de la méthode GDQM





## ANNEXE. II

M : matrice de masse

G : Matrice de l'effet gyroscopique

K : Matrice de rigidité

$$M = \begin{bmatrix} \rho A \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \rho A_y \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \rho A_z \omega^2 \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \rho I \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) & -2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) \\ [\mathbf{0}] & -2\Omega \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) & \rho I \left( 1 - (e.a)^2 \sum_{j=1}^N B_{i,j} \right) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} EA \sum_{j=1}^N B_{i,j} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & EI \sum_{j=1}^N D_{i,j} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & EI \sum_{j=1}^N D_{i,j} \end{bmatrix}$$

$B_{i,j}$  et  $D_{i,j}$  matrices de dimension  $N \times N$

Le code de matlab qu'on a développé résoudre le système différentielle suivant:

$$-\omega^2 [M] \{\ddot{u}\} + j\omega [G] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = 0$$

$u$  vecteur de déplacements

Si vous l'avez apprécié ...c'est grâce au dieu.

Sinon, toute erreur est de moi-même... l'erreur est humain

الحمد لله الذي به تتم صالحات...

**Abstract:**

In this work, a vibratory analysis is elaborated in order to study the vibration behavior of a rotating nano-shaft considered as an Euler-Bernoulli beam based on Eringen's theory of nonlocal elasticity. The governing equations were generated by the Hamilton principle and are discretized by the semi-analytical differential quadrature method (DQM). The gyroscopic effect, the effect of the small-scale, the effect of the boundary conditions and the geometric parameters on the frequency parameters were discussed. As an application, the nano-shaft had been studied based single-walled carbon nanotube (SWCNT) first in free medium and then resting in a Winkler type elastic foundation. The results obtained in this work can serve as a guide for the design, development and production of future rotating nanomachines such as: nano-motors, nano-turbines, nano-robots

**Keywords:** Vibration, nano-shaft, rotation, DQM, Nonlocal Elasticity, gyroscopic effect

**ملخص:**

في هذا العمل، تم وضع تحليل اهتزازي من أجل دراسة السلوك الاهتزازي لعمود دوران نانومتري يعتبر كعارضة Euler-Bernoulli على أساس نظرية Eringen للمرونة غير الموضعية، تم إنشاء المعادلات الحاكمة اعتماداً على مبدأ هاملتون ويتم تمييزها بواسطة الطريقة شبه التحليلية للتربيع التفاضلي (DQM). تمت مناقشة التأثير الجيروسكوبي، وتأثير المقياس، وتأثير الشروط الحدية والمعاملات الهندسية على معاملات التردد الاهتزازي. كاحدى التطبيقات تم اعتبار النانودوار nanorotor كأنيوب كربون نانوي أحادي الجدار (SWCNT)) حيث تمت دراسته ضمن وسط حر كذلك ضمن أساس مرن من نوع وينكلر. النتائج التي تم الحصول عليها في هذا العمل يمكن أن تكون بمثابة دليل لتصميم وتطوير وإنتاج آلات الدوارة النانوية المستقبلية مثل: محركات النانو، التوربينات النانوية، الروبوتات النانوية ...

**الكلمات المفتاحية:** اهتزاز، نانودوار، دوران، طريقة التربيع التفاضلي، نظرية المرونة اللاموضعية، التأثير الجيروسكوبي

**Résumé:**

Dans ce travail, une analyse vibratoire est élaborée afin d'étudier le comportement vibratoire d'un nano-arbre tournant considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli en se basant sur la théorie d'élasticité non locale développé par Eringen. Les équations gouvernantes sont générées par le principe de Hamilton et sont discrétisées par la méthode semi-analytique des quadratures différentielles (DQM). L'effet gyroscopique, l'effet de l'échelle, l'effet des conditions aux limites et les paramètres géométriques sur les paramètres de fréquence ont été discutés ; comme application, ce nano-arbre tournant est étudié en nanotube de carbone mono-feuillet (SWCNT) tout d'abord dans un milieu libre et ensuite suspendu dans un milieu élastique de type de Winkler. Les résultats obtenus dans ce travail peuvent servir comme guide pour le design, développement et production de future nano-machines tournantes telles que : les nano-moteurs, les nano-turbines, les nano-robots...

**Mots-clés :** Vibration, nano-arbre, rotation, DQM, élasticité non locale, effet gyroscopique