République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Probabilités et statistiques

QUELQUES LOIS FORTES DES GRANDS NOMBRES.

Présenté Par : BOUKHALFA Asma

Mémoire soutenu le date devant le jury composé de :

M A. Allam	MCB UABB Tlemcen	Président
M^{me} W. Benyelles	MCB UABB Tlemcen	Examinatrice
M F. Boukhari	MCA UABB Tlemcen	Encadreur

Année universsitaire : 2018 – 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui m'ont doté d'une éducation digne et qui m'ont donné tout le courage et le soutient, en témoignage de mon profond amour et ma grande reconnaissance. Que Dieu vous garde.

A ma chère grand-mère.

A mon cher frère Mounir.

A mes adorables soeurs Fatima et Sarah.

A mes très chéres amies Noura, Amira, Yasmine, Fatima et Khadidja.

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH de m'avoir donné le courage et la patience d'entamer et de finir ce mémoire.

Je remercie vivement mon encadreur Monsieur F. BOUKHARI maître de conférences à l'Université Abou bekr Belkaid-Tlemcen, pour son aide précieux et conseils éclairés durant la réalisation de ce travail, ainsi que le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur A. ALLAM maître de conférence et chef de département à l'Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, pour sa compétence, sa disponibilité et son soutient durant ces deux années de Master, et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciement s'adresse aussi à Madame W. BENYELLES maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkai-Tlemcen, d'avoir accepter d'examiner ce mémoire et faire partie du jury.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail, qu'ils trouvent ici la traduction de mon gratitude et ma reconnaissance.

Abréviations & Notations

$\mathbb{P}(A)$	: La probabilité de l'évènement A.
$\mathbb{E}(X)$	: L'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
$\mathbb{I}(A)$	: La fonction indicatrice de l'ensemble A
$Var(X)$	: La variance de la variable aléatoire X.
$cov(X,Y)$	: La covariance entre les variablrs aléatoires X et Y.
$\|x\|$	: Valeur absolue de la variable x.
$[x]$	: Partie entière de x.
$\max(A)$	: Maximum de l'ensemble A.
$\min(A)$	: Minimum de l'ensemble A.
$x \wedge y$	: Le minimum entre x et y.
$x \vee y$	: Le maximum entre x et y.
A^c	: Complémentaire de A.
x^+	: $\max(x,0)$.
x^-	: $\min(-x,0)$.
S_n	: La somme partielle des X_n pour $n \geq 1$.
$\sim$	: Le rapport des quantités de chaque coté tend vers 1.
$v.a$	: Variable aléatoire.
$i.i.d$	: Indépendentes et identiquement distribuées.
$p.s$	: Presque sûrement.
L.F.G.N	: La loi forte des grands nombres.
ND	: Négativement dépendantes.
NQD	: Négativement dépendantes par quadrant.
NA	: Négativement associées.
$X_n \xrightarrow{p.s} X$	: La suite de variables aléatoires(X_n) converge presque sûrement vers X .
$X_n \xrightarrow{L^r} X$	: La suite de variables aléatoires(X_n) converge dans L^r vers X .
$\square$	: Fin de démonstration.

Table des matières

Introduction

La loi forte des grands nombres (L.F.G.N) est l'un des résultats les plus importants en théorie de probabilités, elle concerne la convergence des moyennes arithmétiques de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cependant la condition d'indépendance n'est pas vérifiée dans de nombreuses situations, pour cette raison plusieurs notions de dépendances ont été introduites. Dans ce mémoire on s'intéresse particulièrement aux deux concepts suivants :

- La dépendance négative.

- L'association négative.

Ce manuscrit est composé de trois chapitres et un appendice. Dans le premier chapitre on commence par définir la notion d'équivalence entre deux suites de variables aléatoires et ces conséquences, on donne aussi la loi fable pour le maximum de variables aléatoires i.i.d et on termine par prouver deux lois des grands nombres dues à Marcinkiewicz-Zygmund.

Le deuxième chapitre consacré à l'étude des variables aléatoires négativement dépendantes et négativement associées, après avoir introduit ces deux notions, on présente quelques exemples de ces variables, puis on étudie la hiérarchie entre ces deux notions. Enfin nous généralisons la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli aux variables aléatoires deux à deux négativement dépendantes par quadrant.

Dans le dernier chapitre, on montre que la célèbre loi forte des grands nombres de Kolmogorov reste vraie pour des variables négativement dépendantes par quadrant, on généralise ensuite l'inégalité maximale de Kolmogorov ainsi que le théorème des trois séries aux variables négativement associées.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité complet. Toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace de probabilité.

Chapitre 1

La loi forte de Marcinkiewicz-Zygmund

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la loi forte des grand nombres de Marcinkiewicz-Zygmund pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, cette loi est une généralisations de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov (L.F.G.N) apparue en 1937 [14]. On commence par donner la loi faible pour le maximum de variables aléatoires dans le premier paragraphe, ensuite on énonce et on démontre deux lois des grands nombres de M-Z, notre principale référence pour ce chapitre est le livre de A. Gut [3].

1.1 La loi faible pour le maximum de variables aléatoires

Dans plusieurs démonstrations dans ce mémoire, nous allons utiliser la troncature, cette technique consiste à créer une nouvelle suite de variables aléatoires équivalente à la suite de départ et qui est plus facile à traiter. On commence donc par donner la définition d'équivalence entre deux suites de variables aléatoires et quelques propriétés utiles.

Définition 1.1.1. *On dit que deux suites de variables aléatoires* $\{X_n,\ n \geq 1\}$ *et* $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ *sont équivalentes si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) < \infty.$$

L'exemple suivant, représente deux suites de variables aléatoires équivalentes.

Exemple 1.1.1. *Si $\{X_n,\ n \geq 1\}$ est une suite de v.a telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > a) < \infty,$$

alors elle est équivalente à la suite de v.a.r définie par

$$(Y_n = X_n \mathbb{I}\{|X_n| \leq a\})_{n\geq 1}.$$

La définition précédente et le lemme de Borel-Cantelli, nous donne ce qui suit.

Proposition 1.1.1. *Si $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ sont deux suites de v.a équivalentes, alors*

(i) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \neq Y_n\}) = 0$ *;*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n)$ *converge p.s ;*

(iii) *si $b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ et $b_n \nearrow \infty$, alors*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$$

Démonstration. La première proposition vient du lemme de Borel-Cantelli, elle signifie que X_n et Y_n sont différentes pour un nombre fini de n, en effet ;

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \neq Y_n\}) = 0 \iff$$

$$1 = \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{X_k = Y_k\}) := \mathbb{P}(\Omega^*)$$

$\forall\ \omega \in \Omega^*$, $\exists\ n_0 = n_0(\omega) \geq 1$ tel que $\forall\ k \geq n_0$

$$X_k(\omega) = Y_k(\omega),$$

ce qui entraîne que la somme en (ii) ne contient qu'un nombre fini de terme p.s, d'où elle converge. La dernière proposition suit le même argument plus le fait que $b_n \nearrow \infty$ quand $n \to \infty$. □

Proposition 1.1.2. *Supposons que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.i.i.d, et soit $r > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ *;*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n^{1/r}\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$ *;*

(iii) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_1| > n^{1/r}\varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ *;*

(iv) $\frac{X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0.$

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Soit X une variables aléatoires positive, alors*

$$\mathbb{E}X < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < \infty.$$

Démonstration. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} x dF(x) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(n-1 < X \leq n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k-1) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)
\end{aligned}$$

Pareille, pour l'autre coté, puisque

$$\mathbb{E}X \geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\mathbb{P}(n-1 < X \leq n).$$

□

Démonstration. de la Proposition 1.1.2
D'après le lemme précédant on a

$$\mathbb{E}|X_1|^r < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1|^r \geq n) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq n^{1/r}\varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc (i) est équivalente à (ii) ce qui est équivalent à (iii) par le lemme de Borel-Cantelli.
L'équivalence entre (iii) et (iv) est une conséquence du lemme de Borel-Cantelli et la définition de convergence presque sûre. □

La proposition suivante représente un autre exemple de deux suites de v.a équivalentes.

Proposition 1.1.3. *Supposons que* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont des v.a.r.i.i.d., telles que* $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ *pour* $r > 0$*, et soit*

$$Y_n = X_n \mathbb{I}\{|X_n| \leq n^{1/r}\}, n \geq 1.$$

Alors $\{X_n,\ n \geq 1\}$ *et* $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \mathbb{I}\{|X_n| > n^{1/r}\}),$$

d'après la proposition précédentes

$$\mathbb{E}|X_1|^r < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n^{1/r}\varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \mathbb{I}\{|X_n| > n^{1/r}\}) < \infty.$$

□

Dans la proposition suivante, nous mettons en évidence une relation entre les sommes de variables aléatoires symétriques et leurs maximum.

Proposition 1.1.4. *Soient* $X_1, X_2, ..., X_n$ *des v.a.r indépendantes, symétriques, et soient*

$$Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|, \quad et \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

Alors

$$\mathbb{P}(Y_n > 2x) \leq \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_n| > x) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| > x), \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Démonstration. Puisque
$$X_n = S_n - S_{n-1}$$
alors
$$|X_n| \leq |S_n| + |S_{n-1}|,$$
d'où
$$Y_n \leq 2 \max_{1\leq k\leq n} |S_n|.$$
Maintenant, il suffit d'appliquer l'inégalité de Lévy, voir le Théorème 3.1 dans l'appendice. □

Proposition 1.1.5. *Soient $r > 0$, X une v.a.r positive. Alors*
$$\mathbb{E}X^r < \infty \implies x^r \mathbb{P}(X > x) \to 0 \quad quand \quad x \to \infty.$$
La réciproque est fausse en général.

Démonstration. On a
$$x^r \mathbb{P}(X > x) = x^r \int_x^\infty dF(y) \leq \int_x^\infty y^r dF(y) \to 0 \quad \text{quand} \quad x \to \infty,$$
car c'est le reste d'une intégrale convergente.

Voici un contre exemple qui montre que la réciproque n'est pas vraie en général. Soit X une v.a.r de fonction de densité
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{r+1}\log x} & \text{si } x > e, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où c est une constante, alors
$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \frac{c}{y^{r+1}\log y} dy$$
par intégration par partie, on a
$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{c'}{x^r \log x} + \int_x^\infty \frac{c'}{y^{r+1}(\log y)^2} dy$$
donc
$$\mathbb{P}(X > x) \sim \frac{c'}{x^r \log x}$$
ce qui implique
$$x^r \mathbb{P}(X > x) \sim C x^r \frac{1}{x^r \log x} = \frac{c'}{\log x} \to 0 \text{ quand } x \to \infty$$

mais

$$\mathbb{E}X^r = c\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\log x} = \infty.$$

□

Remarques 1.1.1.

(i) *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r.i.i.d centrées, alors*

$$\mathbb{E}X_1\mathbb{I}\{|X_1| \leq a\} = -\mathbb{E}X_1\mathbb{I}\{|X_1| > a\} \quad \forall a > 0, \tag{1.2}$$

et

$$\left|\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} X_k\mathbb{I}\{|X_k| \leq a\}\right| \leq n\mathbb{E}|X_1|\mathbb{I}\{|X_1| > a\}. \tag{1.3}$$

L'égalité (1.2) *vient du fait que l'espérance est nulle :*

$$0 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_1\mathbb{I}\{|X_1| \leq a\} + \mathbb{E}X_1\mathbb{I}\{|X_1| > a\}.$$

L'inégalité (1.3) *est une conséquence de* (1.2) *et l'inégalité triangulaire*

(ii) *Soit $a > 0$. Si X est une v.a.r centrée, alors $Y = X\mathbb{I}\{|X| \leq a\}$ n'est pas en général centrée. Cependant, si X est symétrique, alors $\mathbb{E}Y = 0$ car toute fonction impaire d'une variable symétrique est symétrique.*

On termine cette section par donner la loi faible pour le maximum de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 1.1.1. *Soient $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite des variables aléatoires i.i.d, $Y_n = \max_{1\leq k\leq n}|X_n|$ pour $n \geq 1$. Si $\{b_n,\ n \geq 1\}$ est une suite des réels strictement positifs et croissants, alors*

$$\frac{Y_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \iff n\mathbb{P}(|X_1| > b_n\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

En particulier, pour $r > 0$

$$\frac{Y_n}{n^{1/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \iff n\mathbb{P}(|X_1| > n^{1/r}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. La démonstration est basée sur les deux inégalités suivantes

$$\frac{1}{2}n\mathbb{P}(|X_1| > b_n\varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_n > b_n\varepsilon) \leq n\mathbb{P}(|X_1| > b_n\varepsilon), \quad \text{pour n assez grand.}$$

La première inégalité, vient du fait que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n > b_n\varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}(Y_n \leq b_n\varepsilon)\\ &= 1 - \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \leq b_n\varepsilon)\\ &= 1 - (\mathbb{P}(|X_1| \leq b_n\varepsilon))^n\\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(|X_1| > b_n\varepsilon))^n.\end{aligned}$$

Il reste qu'appliquer le Lemme 3.2, pour $\delta = 1/2$, pour avoir l'inégalité.
La deuxième inégalité est immédiate, puisque

$$\{Y_n > b_n\varepsilon\} \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{|X_k| > b_n\varepsilon\}.$$

□

1.2 Le théorème de Marcinkiewicz-Zygmund

La loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund est une généralisation de L.F.G.N de Kolmogorov qui consiste à normaliser différemment les sommes partielles S_n, en considérant non plus la suite $\{S_n/n, \quad n \geq 1\}$ mais la suite $\{S_n/n^{1/r}, \quad n \geq 1\}$ pour $r \in]0, 2[$, dans cette section on va étudier deux types de convergence de la suite $\{S_n/n^{1/r}, \quad n \geq 1\}$, la convergence dans L^r et la convergence presque sûre.

On commence par rappeler le théorème des deux séries de Kolmogorov, qui est un théorème très utile pour examiner la converge presque sûre des séries de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 1.2.1. *(Critère de convergence de Kolmogorov)*
Soit $\{X_n, \ n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} VarX_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}X_n) \quad \textit{converge p.s.} \tag{1.4}$$

Si de plus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n \quad \textit{converge,}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \textit{converge p.s.}$$

Remarque 1.2.1. *Si les v.a dans le théorème précédant, sont uniformément bornées, alors la condition nécessaire est aussi suffisante.*

On rappelle aussi, la loi forte des grands nombres due à Kolmogorov(1929).

Théorème 1.2.2. *(L.F.G.N de Kolmogorov)*
Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles i.i.d.*

(i) *Si* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ *et* $\mathbb{E}X_1 = \mu$, *alors*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mu \quad \textit{quand} \;\; n \to \infty.$$

(ii) *Si* $S_n/n \xrightarrow{p.s} c$ *avec* c *une constante, quand* $n \to \infty$, *alors*

$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \quad \textit{et} \;\; c = \mathbb{E}X_1.$$

(iii) *Si* $\mathbb{E}X_1 = \infty$, *alors*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty.$$

Remarque 1.2.2. *Etemadi [11] a montré que l'indépendance deux à deux des variables aléatoires suffit pour avoir la loi forte des grands nombres.*

On va étudier, dans le théorème qui suit, la convergence dans L^r de la suite des v.a $\{S_n/n^{1/r},\ n \geq 1\}$.

Théorème 1.2.3. *(Loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund)*
Soit $0 < r < 2$. *Supposons que* $(X_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d, et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *pour* $n \geq 1$.

Si $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, *et* $\mathbb{E}X = 0$ *quand* $1 \leq r < 2$, *alors*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{L^r} 0 \quad \textit{quand} \;\; n \to \infty.$$

Démonstration. Soit M un réel strictement positif assez grand tel que

$$G(M) = \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}\{|X_1| > M\} < \varepsilon,$$

qui est possible pour $\varepsilon > 0$ quelconque puisque $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, ce qui entraîne que

$$G(M) \to 0 \quad \text{quand} \;\; M \to \infty.$$

Soit

$$Y_k = X_k \mathbb{I}\{|X_k| \leq M\} \;\; \textit{et} \;\; Z_k = X_k \mathbb{I}\{|X_k| > M\}, \quad k = 1, 2, ...$$

On va traiter deux cas :
Premier cas : $0 < r < 1$
En utilisant le Théorème 3.2 dans l'appendice, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|S_n\right|^r &= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}(Y_k + Z_k)\right|^r \\
&\leq \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right|^r + \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right|^r \\
&\leq (nM)^r + n\mathbb{E}|Z_1|^r \\
&= (nM)^r + n\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}\{|X_1| > M\} \\
&\leq (nM)^r + n\varepsilon
\end{aligned}$$

en divisant par n et en prenant la limite sup, on trouve

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}|S_n|^r}{n} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \to 0 \quad dans \quad L^r \quad quand \quad n \to \infty.$$

Deuxième cas : $1 \leq r < 2$
On va utiliser dans ce cas l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund, Théorème 3.3 puis l'inégalité du Théorème 3.2 dans l'appendice, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|S_n|^r &\leq B_r\mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2|^{r/2} \\
&\leq {B_r}^*\mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} {Y_k}^2|^{r/2} + {B_r}^*\mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} {Z_k}^2|^{r/2} \\
&\leq {B_r}^*(nM^2)^{r/2} + {B_r}^*n\mathbb{E}(({Z_1}^2)^{r/2}) \\
&= {B_r}^*n^{r/2}M^r + {B_r}^*n\mathbb{E}|Z_1|^r \\
&\leq {B_r}^*n^{r/2}M^r + {B_r}^*n\varepsilon,
\end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}|S_n|^r}{n} \leq {B_r}^*\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 1.2.1. *Soient* $0 < r < 2$, $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles identiquement distribuées et*

$$Y_n = X_n\mathbb{I}\{|X_n| \leq n^{1/r}\}, \quad n \geq 1.$$

Si $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarY_n}{n^{2/r}} < \infty. \tag{1.5}$$

La démonstration de ce lemme est basée sur la technique de troncature et le lemme 3.1(i) dans l'appendice.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n^{1/r}}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{n^{2/r}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{|X_1| \leq n^{1/r}\})}{n^{2/r}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{(k-1)^{1/r} < |X_1| \leq k^{1/r}\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{|X_1| \leq 1\}) \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2/r}}\right) \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{(k-1)^{1/r} < |X_1| \leq k^{1/r}\}) \\
(*) \quad &\leq C + \frac{2^{(2/r)-1}}{(2/r)-1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{(2/r)-1}} \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{(k-1)^{1/r} < |X_1| \leq k^{1/r}\}) \\
&\leq C + C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2/r)-1}} (k^{1/r})^{2-r} \mathbb{E}(|X_1|^r \mathbb{I}\{(k-1)^{1/r} < |X_1| \leq k^{1/r}\}) \\
&= C + C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}\{(k-1) < |X_1|^r \leq k\} \\
&= C + C\mathbb{E}|X_1|^r < \infty.
\end{aligned}$$

Pour $(*)$ on a utilisé le lemme 3.1(i) sans préciser la constantes C. □

On s'intéresse maintenant, à la convergence ponctuelle de la suite $\{S_n/n^{1/r},\ n \geq 1\}$.

Théorème 1.2.4. *(Loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund) Soient* $0 < r < 2$, $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles i.i.d avec* $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$.

Supposons aussi que $\mathbb{E}X_1 = 0$ *lorsque* $1 \leq r < 2$. *Alors*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0.$$

Inversement, Si $\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0$, *alors* $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, *et* $\mathbb{E}X_1 = 0$ *si* $1 \leq r < 2$.

Démonstration. Commençons par la condition suffisante.
Soient

$$Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq n^{1/r}\}} = \begin{cases} X_n & \text{si } |X_n| \leq n^{1/r} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$S_n^{'} = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Vu que $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ et par la proposition 1.1.3, alors les deux suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont équivalentes.
Le lemme 1.2.1 nous donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var(\frac{Y_n}{n^{1/r}}) < \infty,$$

en vertu du théorème de deux séries de Kolmogorov 1.2.1 on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{Y_n - \mathbb{E}Y_n}{n^{1/r}}) \quad \text{converge p.s,}$$

en utilisant encore le lemme de Kronecker, Lemme 3.4, on trouve

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mathbb{E}Y_k) \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Maintenant, on veut montrer que

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_k \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

afin de conclure que

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

On va traiter deux cas :

Soit $0 < r < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}S_n^{'}| &= |\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} Y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|Y_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|\mathbb{I}_{\{|X_k|\leq k^{1/r}\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|\mathbb{I}_{\{|X_k|\leq k^{1/2r}\}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|\mathbb{I}_{\{k^{1/2r}<|X_k|\leq k^{1/r}\}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (k^{1/2r})^{1-r}\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{|X_1|\leq k^{1/2r}\}} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} (k^{1/r})^{1-r}\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{k^{1/2r}<|X_1|\leq k^{1/r}\}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (k^{\frac{1-r}{2r}})\mathbb{E}|X_1|^r + \sum_{k=1}^{n} (k^{\frac{1-r}{r}})\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{|X_1|>k^{1/2r}\}} \\
(*) &\leq Cn^{\frac{(1+r)}{2r}}\mathbb{E}|X_1|^r + \sum_{k=1}^{n} (k^{\frac{1-r}{r}})\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{|X_1|>k^{1/2r}\}}
\end{aligned}$$

Pour $(*)$ on a utilisé le lemme 3.1(ii) sans préciser la constantes C.
On divisant par $n^{1/r}$, on trouve

$$\frac{|\mathbb{E}S_n^{'}|}{n^{1/r}} \leq n^{1/2-1/r}\mathbb{E}|X_1|^r + \frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n} (k^{\frac{1-r}{r}})\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{|X_1|>k^{1/2r}\}}$$

en faisant tendre n vers l'infini

$$\frac{|\mathbb{E}S_n^{'}|}{n^{1/r}} \to 0$$

car

$$n^{1/2-1/r}\mathbb{E}|X_1|^r \to 0$$

et

$$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n} (k^{\frac{1-r}{r}})\mathbb{E}|X_1|^r\mathbb{I}_{\{|X_1|>k^{1/2r}\}} \to 0 \quad \text{par le lemme 3.3}$$

Soit $1 \leq r < 2$

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}S_n^{'}| =& |\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{\{|X_k| \leq k^{1/r}\}}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_k| > k^{1/r}\}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (k^{1/r})^{1-r} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/r}\}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^{(\frac{1-r}{r})} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/r}\}},\end{aligned}$$

on divise par $n^{1/r}$

$$\frac{|\mathbb{E}S_n^{'}|}{n^{1/r}} \leq \frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} k^{(\frac{1-r}{r})} \mathbb{E}|X_1|^r \mathbb{I}_{\{|X_1| > k^{1/r}\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui implique

$$\frac{|\mathbb{E}S_n^{'}|}{n^{1/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{dans les deux cas}$$

d'où

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad qd \quad n \to \infty,$$

le fait que $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites équivalentes nous permet de dire que

$$\frac{1}{n^{1/r}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad qd \quad n \to \infty.$$

Pour la condition nécessaire, on utilise le fait que

$$X_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{avec} \;\; n \geq 2,$$

en suite, on divise par $n^{1/r}$

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n^{1/r}} =& \frac{S_n}{n^{1/r}} - \frac{S_{n-1}}{n^{1/r}} \\ &= \frac{S_n}{n^{1/r}} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/r} \frac{S_{n-1}}{(n-1)^{1/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0, \quad \text{pour} \;\; 0 < r < 2\end{aligned}$$

d'après la Proposition 1.1.2, on a

$$\frac{X_n}{n^{1/<r}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0 \iff \mathbb{E}|X|^r < \infty, \quad 0 < r < 2.$$

Si $1 \leq r < 2$,

$$\frac{S_n}{n} = n^{1/r-1} \frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0 \quad n \to \infty$$

donc $\mathbb{E}(X_1) = 0$ par la loi forte des grands nombres, Théorème 1.2.2.

$\square$

Remarque 1.2.3. *La question qui peut se poser, est-ce que la suite* $(S_n/n^{1/r})$ *peut converger p.s vers* 0 *lorsque* $r = 2$ *?*
La réponse est non ! la suite $S_n/n^{1/r}$ *ne peut pas converger p.s vers 0 pour* $r = 2$, *en effet ; supposons que* $S_n/n^{1/2} \to 0$ *p.s, on a par hypothèse les v.a sont i.i.d et* $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, *on suppose que* $\mathbb{E}X_1 = 0$ *et* $VarX_1 = 1$, *le théorème central limite implique que*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

ce qui n'est pas possibles.

Remarque 1.2.4. *Petrov[18] a montré que si* $0 < r < 2$ *alors* $S_n/n^{1/r} \to 0$ *p.s implique que* $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ *en supposant que les v.a.r sont indépendantes deux à deux. Sawyer[20] a montré que si* $0 < r < 1$ *alors* $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ *implique que* $S_n/n^{1/r} \to 0$ *p.s sans aucune condition d'indépendance.*

Chapitre 2

Quelques notions de dépendance

Depuis son apparence, le concept de dépendance de variables aléatoires a toujours été un sujet d'intérêt pour les probabilistes et les statisticiens, différentes formes de dépendance ont été introduites. Dans ce chapitre on s'intéresse à deux sortes de dépendance, la dépendance négative par quadrant entre deux variables aléatoires qui a été introduite par Lehmann [13] en 1966 et l'association négative qui a été introduite par Alan et Saxena[1] en 1981 et développée par Joad-Dev et Proschan [12] en 1983.

2.1 Variables aléatoires négativement dépendantes

Définitions 2.1.1.

1 *On dit que les v.a.r $X_1, X_2, ..., X_n$ sont négativement dépendantes (ND) si* $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j \leq x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X_j \leq x_j) \tag{2.1}$$

et

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j > x_j\}) \leq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X_j > x_j) \tag{2.2}$$

2 *On dit que les deux v.a.r X et Y sont négativement dépendantes par quadrant (NQD) si pour tous nombres réels x et y*

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y). \tag{2.3}$$

Ou d'une manière équivalente (Remarque2.1.1)

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) \leq \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y). \tag{2.4}$$

3 *Une suite $\{X_n,\ n \geq 1\}$ de v.a.r est dite NQD deux à deux si X_i et X_j sont NQD $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, et $i \neq j$.*

4 *Une famille infinie de variables aléatoires $\{X_n,\ n \geq 1\}$ est ND (respectivement deux à deux NQD) si toute famille finie $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ est ND (respectivement deux à deux NQD).*

Remarques 2.1.1.

1. Toute suite de variables négativement dépendantes est deux à deux NQD, l'inverse n'est pas vrai en général.
2. [5] Les deux conditions (2.1) et (2.2) sont équivalentes pour $n = 2$, en effet ; Supposons (2.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x, Y > y) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq x \cup Y \leq y) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)] \\
&\leq 1 - [\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)] \\
&= [1 - \mathbb{P}(X \leq x)]\,[1 - \mathbb{P}(Y \leq y)] \\
&= \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)
\end{aligned}$$

D'autre part, supposons (2.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= 1 - \mathbb{P}(X > x \cup Y > y) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) - \mathbb{P}(X > x, Y > y)] \\
&\leq 1 - [\mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)] \\
&= [1 - \mathbb{P}(X > x)]\,[1 - \mathbb{P}(Y > y)] \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$, Ebrahimi et Ghosh[9] ont montré par l'exemple suivant que (2.1) et (2.2) ne sont pas équivalentes en général.
Soient X_1, X_2 et X_3 trois v.a.r qui suivent la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et (X_1, X_2, X_3) prennent les valeurs $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$ et $(0, 0, 0)$ avec une probabilité $(\frac{1}{4})$, alors
$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) \leq \mathbb{P}(X_1 > x_1)\mathbb{P}(X_2 > x_2)\mathbb{P}(X_3 > x_3)$$

mais

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0)$$

On donne maintenant un exemple simple de variables ND.

Exemple 2.1.1. *Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire avec X_1, X_2 et X_3 suivent la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, le vecteur X a la distribution de probabilité suivante*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(0,1,1) = \mathbb{P}(1,1,0) = \mathbb{P}(1,1,1) = \frac{1}{10} \\
&\mathbb{P}(0,0,0) = \mathbb{P}(1,0,1) = 0 \\
&\mathbb{P}(0,1,0) = \mathbb{P}(0,0,1) = \frac{2}{10} \\
&\mathbb{P}(1,0,0) = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ on peut vérifier facilement les deux équations (2.1) *et* (2.2)*, donc les v.a X_1, X_2, X_3 sont ND.*

Pour plus d'exemples voir l'article de Block, Svits et Shaked [6].

Lemme 2.1.1. *[5] Toute famille de variables aléatoires indépendantes est négativement dépendante, la réciproque n'est pas vraie en général, pour montrer ça, soit X une v.a dans $\mathbb{R}$, posons $Y = -X$ alors Y et X sont ND sans être indépendantes. En effet soient $x, y \in \mathbb{R}$.*
Si $-y \leq x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(-y \leq X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y) \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq -y)\mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\left[\frac{1}{\mathbb{P}(Y \leq y)} - \frac{\mathbb{P}(X \leq -y)}{\mathbb{P}(Y \leq y)}\right] \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\left[\frac{1 - \mathbb{P}(X \leq -y)}{\mathbb{P}(Y \leq y)}\right] \\
&\leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).
\end{aligned}$$

Si $-y > x$

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = 0 \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

On donne maintenant, quelques propriétés de variables aléatoires NQD.

Lemme 2.1.2. *[15] Si $\{X_n,\ n \geq 1\}$ est une suite de v.a.r deux à deux NQD, $\{f_n,\ n \geq 1\}$ une suite de fonctions croissantes (ou décroissantes) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\{f_n(X_n),\ n \geq 1\}$ sont aussi deux à deux NQD.*

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $y_i, y_j \in \mathbb{R}$
$\forall i \neq j$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f_i(X_i) > y_i, f_j(X_j) > y_j) &= \mathbb{P}(X_i > \inf[t : f_i(t) > y_i], X_j > \inf[t : f_j(t) > y_j])\\ &\leq \mathbb{P}(X_i > \inf[t : f_i(t) > y_i])\mathbb{P}(X_j > \inf[t : f_j(t) > y_j])\\ &= \mathbb{P}(f_i(X_i) > y_i)\mathbb{P}(f_j(X_j) > y_j)\end{aligned}$$

□

Une conséquence du lemme précédent est :

Corollaire 2.1.1. *Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite de v.a.r deux à deux NQD, alors $\{{X_n}^+,\ n \geq 1\}$ et $\{{X_n}^-,\ n \geq 1\}$ sont deux suites de v.a.r NQD avec ${X_n}^+$ et ${X_n}^-$ sont la partie positive et la partie négative respectivement, de la variable aléatoire X_n.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction $f(x) = x^+$ est croissante et que la fonction $g(x) = x^-$ est décroissante. □

Hoeffding et Lehman [13] ont montré le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *(formule de Hoeffding)*
Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrables, alors

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{X,Y}(x, y)dxdy \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned}H_{X,Y}(x, y) &= \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)\\ &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)\end{aligned}$$

Démonstration. Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs indépendants ayant la même distribution que le vecteur (X, Y), alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)]\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[I(u, X_1) - I(u, X_2)][I(v, Y_1) - I(v, Y_2)]dudv\right]\end{aligned}$$

où $I(u,x) = 1$ si $u \leq x$ et 0 sinon. Comme ces variables aléatoires sont de carré intégrables, le théorème de Fubini nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[I(u,X_1)I(v,Y_1)] - \mathbb{E}[I(u,X_1)I(v,Y_2)] \\ &\quad - \mathbb{E}[I(u,X_2)I(v,Y_1)] + \mathbb{E}[I(u,X_2)I(v,Y_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est une simple conséquence du théorème précédent (identité de Hoeffding).

Lemme 2.1.3. *Soient* $\{X_n,\ n \geq 1\}$ *une suite de v.a.r deux à deux NQD et* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ *alors*

$$\mathbb{E}(X_iX_j) \leq \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j), \quad \forall i \neq j.$$

En particulier, $\forall i \neq j$

$$Cov(X_i, X_j) \leq 0.$$

L'identité de Hoeffding a été généralisée par Newman[16] comme suit

Théorème 2.1.2. *Soient* f *et* g *deux fonctions réelles de classe* C^1 *avec* f' *et* g' *bornées toute les deux. Supposons* X *et* Y *deux variables aléatoires satisfaisant* $\mathbb{E}[f(X)]^2 < \infty$ *et* $\mathbb{E}[g(Y)]^2 < \infty$*, alors*

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) - \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(y)H_{X,Y}(x,y)dxdy. \qquad (2.6)$$

Lemme 2.1.4. *Soit* $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *une famille de v.a.r deux à deux NQD, alors*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Démonstration. On a

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

puisque les X_i, X_j sont NQD $\forall i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$\sum_{i \neq j}^{n} Cov(X_i, X_j) \leq 0$$

donc, on obtient
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$
□

On va présenter maintenant, une autre version du lemme de Borel-Cantelli, lorsque la condition d'indépendance est remplacée par NQD.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements. Les limites sup et inf de la suite d'événements $\{A_n\}$ sont définies comme suit
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Théorème 2.1.3. *[17](Erdos-Chow 1959)*
Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ *et*
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_iA_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)^2} = 1 \tag{2.7}$$
alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Démonstration. On note $I_n = \mathbb{I}(A_n)$ (l'indicatrice d'évènement A_n), on a par suite $\mathbb{E}I_n = \mathbb{P}(A_n)$. A l'aide d'inégalité de Chebychev, on a
$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} I_n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) \leq \frac{4Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)^2}$$
et puisque $\mathbb{E}I_iI_j = \mathbb{P}(A_iA_j)$, alors
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_iA_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)^2$$
la condition (2.7) implique que
$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} I_n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) = 0 \tag{2.8}$$
Posons
$$B_n = \left\{\sum_{i=1}^{n} I_i \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right\}$$
d'après (2.8) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$ donc il existe une suite d'entiers positifs strictement croissante $\{n_m\}$ telle que
$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_{n_m}) < \infty$$

par la première partie du lemme de Borel-Cantelli on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} B_{n_m}) = 0 \ \ P.p.s$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \bar{B}_{n_m}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n_m\geq 1}\bigcap_{j\geq n_m}\left\{\sum_{j=1}^{n_m} I_j > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_m}\mathbb{P}(A_j)\right\}\right) = 1 \ \ P.p.s$$

c'est-à-dire que toutes $\sum_{j=1}^{n_m} I_j > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_m}\mathbb{P}(A_j)$ à partir d'un certain rang.
La série $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$ diverge par hypothèse, donc $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ l'est aussi avec une probabilité égale à 1, ce qui implique que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. □

Lemme 2.1.5. *(Borel-Cantelli)*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) < \infty$*, alors*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \infty$*, et* $\mathbb{P}(A_k \bigcap A_m) \leq \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_m)$ *pour* $k \neq m$*, alors*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Démonstration. Pour la première partie du lemme on a

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_k) \to 0,$$

car c'est le reste d'une série convergente.
Pour la deuxième partie, on pose $X_n = I(A_n)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on sait que

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum cov(X_i, X_j) \\ &= \mathbb{E}(S_n^2) - [\mathbb{E}(S_n)]^2 \end{aligned}$$

on a aussi

$$cov(X_i, X_j) = \mathbb{P}(A_i A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \leq 0,$$

et

$$Var(X_i) = Var(I(A_i)) = \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i))$$

donc

$$\mathbb{E}(S_n^2) - [\mathbb{E}(S_n)]^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i))$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle X_i, X_j\rangle - \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)(1-\mathbb{P}(A_i))$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_iA_j) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)(1-\mathbb{P}(A_i)). \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) implique la deuxième condition du théorème précédent, d'où le résultat. $\square$

2.2 Variables aléatoires négativement associées

Définitions 2.2.1.

1 *On dit que les v.a.r* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont négativement associées (NA) si pour tout sous-ensemble disjoint* I_1 *et* I_2 *de* $\{1, ..., n\}$ *et toute fonction réelle et croissante* f *de* $\mathbb{R}^{I_1}$ *et* g *de* $\mathbb{R}^{I_2}$ *on a :*

$$Cov(f(X_k, k \in I_1), g(X_k, k \in I_2)) \leq 0, \tag{2.10}$$

lorsque la covariance existe. Également, on peut supposer que $I_1 \cup I_2 = \{1, ..., n\}$.

2 *On dit que les v.a.r* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont associées (A) si*

$$Cov(f(X_1, ..., X_n), g(X_1, ..., X_n)) \geq 0, \tag{2.11}$$

pour f *et* g *deux fonctions réelles et croissantes de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que la covariance existe.*

Une famille infinie de variables aléatoires est NA (respectivement A) si toute sous famille finie est NA (respectivement A).

Pour rappel, une application f *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est dite croissante si pour tout* $i = 1, 2, ..., n$ *l'application* $t \to f_i(t) = f(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

Remarques 2.2.1. *D'après la définition, il est claire que deux variables aléatoires NA sont négativement corrélées. En général la notion d'association négative est plus forte que la notion de corrélation négative.*

On donne quelques exemples de variables aléatoires négativement associées.

Exemple 2.2.1. *Soit le vecteur aléatoire* $X = (X_1, X_2, X_3)$ *dont les composantes sont des v.a binaires. Le vecteur* X *a la distribution de probabilité suivante*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(1,0,0) = \mathbb{P}(0,1,0) = \mathbb{P}(0,0,1) = \frac{1}{12} \\
&\mathbb{P}(1,1,0) = \mathbb{P}(1,0,1) = \mathbb{P}(0,1,1) = \frac{1}{4} \\
&\mathbb{P}(1,1,1) = \mathbb{P}(0,0,0) = 0
\end{aligned}$$

On considère les fonctions $f(X_1, X_2) = X_1^+ X_2^+$ *et* $g(X_3) = X_3$, f *et* g *sont croissantes toutes les deux et* $cov(f(X_1, X_2), g(X_3))$ *est strictement négative donc* X

est NA.
D'autre part, prenons

$$\mathbb{P}(1,0,0) = \mathbb{P}(0,1,0) = \mathbb{P}(0,0,1) = \frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(1,1,1) = \frac{1}{10}$$

on obtient $cov(f(X_1, X_2), g(X_3)) > 0$ *dans ce cas* X *n'est pas NA.*

Exemple 2.2.2. *[12] Si* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *est un vecteur de variables suivant une loi multinomiale, une loi hypergéométrique multivariée, une loi de Dirichlet ou une loi multinomiale de composé de Dirichlet alors* X *est NA.*

Théorème 2.2.1. *[2]Un vecteur aléatoire* (X, Y) *de variables binaires (qui prennent que les valeurs 0 ou 1) est négativement associé si et seulement si* $Cov(X, Y) \leq 0$.

Lemme 2.2.1. *[12] Un vecteur gaussien* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *est NA si et seulement si il est négativement corrélé (*$Cov(X_i, X_j) \leq 0$ *pour tous* $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$*).*

Lemme 2.2.2. *Tout vecteur aléatoire dont les composants sont indépendantes est NA.*

La proposition suivante présente quelque propriétés caractéristiques de variables NA.

Proposition 2.2.1. *[2]*

(i) *Pour une paire de variables aléatoires réelle, NA est équivalente à NQD.*

(ii) *Si* $\{X_i, i \in I\}$ *est une famille de variables NA et* $I_1 \subset I$*, alors la famille* $\{X_i, i \in I_1\}$ *est NA.*

(iii) *Dans* (2.10) *on peut remplacer les fonctions croissantes par des fonctions décroissantes, puisque la covariance est bilinéaire.*

(iv) *Si* $\{X_i, i \in I\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{Y_i, i \in I\}$ *et la famille* $\{X_i, i \in I\}$ *est NA, alors la famille* $\{Y_i, i \in I\}$ *est NA aussi.*

Théorème 2.2.2. *[2] Dans* (2.10)*, les fonctions* f *et* g *peuvent être prises dans l'une des classes de fonctions suivantes :*

1 *Ensembles des fonctions binaires croissantes .*

2 *Ensemble des fonctions continues, croissantes et bornées.*

3 *Ensemble des fonctions croissantes bornées possédant des dirivées partielles bornées.*

Lemme 2.2.3. *[12] Soient $A_1, A_2, ..., A_m$ des sous-ensembles de $\{1, 2, ..., n\}$ disjoints et $f_1, f_2, ..., f_m$ des fonctions croissantes et positives. Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont NA, alors*

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{m} f_i(X_j, j \in A_i) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{E} f_i(X_j, j \in A_i). \tag{2.12}$$

Démonstration. On prend les deux fonctions :

$$f(x_j) = \prod_{i=1}^{m-1} f_i(x_j,\ j \in A_i),$$

et

$$g(x_j) = f_m(x_j,\ j \in A_m)$$

les deux fonctions f et g sont croissantes donc

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m-1} f_i(x_j,\ j \in A_i) f_m(x_j,\ j \in A_m)\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m-1} f_i(x_j,\ j \in A_i)\right] \mathbb{E}\left[f_m(x_j,\ j \in A_m)\right].$$

Pour obtenir l'inégalité (2.12) il suffit de répéter cette procédure $(m-1)$ fois. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du lemme 2.2.3.

Corollaire 2.2.1. *Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles de $\{1, 2, ..., n\}$ disjoins, et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont NA, alors*

$$\mathbb{P}(X_i \leq x_i, i = 1, ..., n) \leq \mathbb{P}(X_i \leq x_i, i \in A_1)\mathbb{P}(X_j \leq x_j, j \in A_2), \tag{2.13}$$

et

$$\mathbb{P}(X_i > x_i, i = 1, ..., n) \leq \mathbb{P}(X_i > x_i, i \in A_1)\mathbb{P}(X_j > x_j, j \in A_2). \tag{2.14}$$

Lemme 2.2.4. *[12] L'association négative implique la dépendance négative, l'inverse est faux en général, et pour montrer ça il suffit de voir l'exemple de Joag-Dev et Proschan. Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur aléatoire de variables binaires tel que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = 0.5$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et les couples (X_1, X_2) et (X_3, X_4) ont la même distribution. le vecteur X a la distribution de probabilité suivante*

Table 1

(X_1, X_2)

		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	marginal
(X_3, X_4)	(0,0)	0.0577	0.0623	0.0623	0.0577	0.24
	(0,1)	0.0623	0.0677	0.0677	0.0623	0.26
	(1,0)	0.0623	0.0677	0.0677	0.0623	0.26
	(1,1)	0.0577	0.0623	0.0623	0.0577	0.24
	marginal	0.24	0.26	0.26	0.24	

$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ *on peut vérifier facilement les conditions* (2.1) *et* (2.2) *donc les variables* X_1, X_2, X_3, X_4 *sont ND.*

Cependant, soit $x_i = 1/2$ *pour* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbb{P}(\cap\{X_i > x_i\}) = 0.0577 > \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2)\mathbb{P}(X_3 > x_3, X_4 > x_4) = 0.0576$$

donc X_1, X_2, X_3, X_4 *ne sont pas NA.*

Lemme 2.2.5. *Les fonctions croissantes définies sur des sous-ensembles disjoints de variables NA sont encore NA.*

Théorème 2.2.3. *L'union des ensembles indépendants de variables NA est NA.*

Démonstration. Soient X et Y deux vecteurs indépendants de v.a.r, avec chaque vecteur est NA. On va montrer que le vecteur (X, Y) est aussi NA.

Soient $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$, f et g deux fonctions croissantes.

On sait que $\mathbb{E}\left[f(X_1, Y_1)/Y_1\right]$ est une fonction mesurable de Y_1, alors

$$\mathbb{E}\left[f(X_1, Y_1)/(Y_1, Y_2)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_1, Y_1)/Y_1\right] \tag{2.15}$$

la même chose pour

$$\mathbb{E}\left[g(X_2, Y_2)/(Y_1, Y_2)\right] = \mathbb{E}\left[g(X_2, Y_2)/Y_2\right] \tag{2.16}$$

On note ces espérances par $h_1(Y_1)$ et $h_2(Y_2)$ respectivement, avec h_1, h_2 sont croissantes toute les deux, ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_1,Y_1)g(X_2,Y_2)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(X_1,Y_1)g(X_2,Y_2)/(Y_1Y_2)\right]\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[h_1(Y_1)h_2(Y_2)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[h_1(Y_1)\right]\mathbb{E}\left[h_2(Y_2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(X_1,Y_1)\right]\mathbb{E}\left[g(X_2,Y_2)\right],
\end{aligned}$$

la première inégalité vient du fait que (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont indépendants, de plus

$$(Y_1, Y_2) \text{ est NA} \implies (h_1(Y_1), h_2(Y_2)) \text{ est NA}$$

d'où la deuxième inégalité. $\square$

Chapitre 3

Théorèmes limites pour des variables aléatoires dépendantes

Dans cette partie nous allons étudier la convergence presque sûre des sommes de variables aléatoires négativement dépendantes. Notre principale référence pour ce chapitre est l'article de Przemyslaw Matula [15].

3.1 Loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires NQD

La loi forte des grands nombres (L.F.G.N) est un résultat fondamental en théorie de la probabilité, dans ce paragraphe on s'intéresse à cette loi pour des variables aléatoires NQD deux à deux.

Lemme 3.1.1. *Soient X une variable aléatoire positive et $a \in \mathbb{R}^+$, alors*

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{I}\{X \leq a\}\right) \leq \int_0^a \mathbb{P}\left(X \geq x\right) dx$$

Démonstration. Soit $F(x)$ la fonction de répartition de la variable X, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\mathbb{I}\{X \leq a\}\right) &= \int_0^{+\infty} x\mathbb{I}\{x \leq a\} dF(x) \\ &= \int_0^a x d(F(x) - 1)\end{aligned}$$

par intégration par partie, on trouve

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{I}\{X \leq a\}\right) = [a(F(a) - 1)] - \int_0^a d(F(x) - 1)$$

puisque $[a(F(a)-1)] \leq 0$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\mathbb{I}\{X \leq a\}\right) &\leq -\int_0^a d(F(x)-1)\\ &= \int_0^a \mathbb{P}(X \geq x)dx\end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.2. *Soient* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux NQD,* $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite des réels strictement positifs, si*

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \ p.s \quad et \quad \sup_{n>0} \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq M < \infty,$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq a_n] < \infty.$$

Démonstration. On pose

$$X_n^+ = \max(0, X_n) \text{ et } X_n^- = \max(0, -X_n)$$

donc d'après le Corollaire 2.1.1 $\{X_n^+,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{X_n^-,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont deux suites de variables NQD deux à deux.

Si S_n/a_n converge p.s vers 0, alors X_n/a_n converge vers 0 p.s, et on a aussi

$$\frac{X_n^+}{a_n} \to 0 \text{ p.s} \quad \text{et} \quad \frac{X_n^-}{a_n} \to 0 \text{ p.s}$$

Soient les deux événements A_n et B_n définies comme suit

$$A_n = \left[X_n^+ > \frac{1}{3}a_n\right], \quad B_n = \left[X_n^- > \frac{1}{3}a_n\right], \qquad n \in \mathbb{N}$$

donc on a

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_m) \leq \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_m), \quad \forall k \neq m \in \mathbb{N},$$

et

$$\mathbb{P}(B_k \cap B_m) \leq \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(B_m), \quad \forall k \neq m \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli (Chapitre 2), si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n^+ \geq \frac{1}{3}a_n\right] \quad \text{diverge}$$

on a alors

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} A_n\right] = 1$$

ce qui contredit le fait que X_n^+/a_n converge p.s vers 0, donc la somme est finie.
Par le même raisonnement pour X_n^-, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n^- \geq \frac{1}{3}a_n] < \infty$.
finalement

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_n| \geq a_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n^+ + X_n^- \geq a_n\right] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n^+ \geq \frac{1}{3}a_n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n^- \geq \frac{1}{3}a_n\right] < \infty\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 3.1.1. *(L.F.G.N)*
Soit $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux NQD identiquement distribuées, alors*

$$\frac{S_n}{n} \to a \quad p.s \iff \mathbb{E}|X_1| < \infty.$$

Si le moment d'ordre 1 est fini alors $a = \mathbb{E}X_1$.

Démonstration. Pour montrer la condition nécessaire, on va prendre la suite des réels $a_n = n$, $n > 0$ dans le lemme précédent, et puisque $X_1, X_2, ..., X_n$ sont identiquement distribuées alors on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| \geq n] < \infty,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{E}|X_1| < \infty.$$

On passe maintenant à la suffisante, on sait que

$$X_n = X_n^+ + X_n^-$$

donc il suffit de démontrer le théorème pour $\{X_n^+,\ n > 0\}$ et $\{X_n^-,\ n > 0\}$. On suppose que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ alors $\{X_n^+,\ n > 0\}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux NQD identiquement distribuées et $\mathbb{E}|X_1^+| < \infty$, ainsi que la suite $\{X_n^-,\ n > 0\}$.
On pose

$$Y_n = X_n \wedge n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad S_n^* = \sum_{k=1}^{n} Y_k,$$

on peut remarque facilement que $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont NQD par paire, ce qui implique qu'elles sont négativement corrélées.

Soit $k_n = [\alpha^n]$ pour $\alpha > 1$, $\forall \varepsilon > 0$, on a par l'inégalité de Chebychev

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[k_n^{-1}|S^*_{k_n} - \mathbb{E}S^*_{k_n}| > \varepsilon\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(S^*_{k_n})}{(k_n^{-1}\varepsilon)^2} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{j=1}^{k_n} Var(Y_j) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\Big(\mathbb{E}(X_j^2\mathbb{I}\{X_j \leq j\}) + j^2\mathbb{P}(X_j > j)\Big) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}X_1^2\mathbb{I}\{X_1 \leq j\} + \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{j=1}^{k_n} j^2\mathbb{P}(X_1 > j) \\
&= S_1 + S_2
\end{aligned}$$

on a

$$1 \leq j \leq [\alpha^n] \leq \alpha^n \iff r_j = \frac{\log j}{\log \alpha} \leq n$$

donc

$$S_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j\geq 1}\mathbb{E}X_1^2\mathbb{I}\{X_1 \leq j\}\sum_{n\geq r_j}\frac{1}{[\alpha^n]^2}$$

puisque $[\alpha^n] \leq \alpha^n \leq [\alpha^n] + 1$, alors

$$S_1 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j\geq 1}\mathbb{E}X_1^2\mathbb{I}\{X_1 \leq j\}\left(\sum_{n\geq r_j}\frac{1}{(\alpha^n)^2}\right)$$

on a

$$\sum_{n\geq r_j}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{r_j}\frac{1}{1-1/\alpha^2} = \frac{1}{j^2}\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$$

se qui implique

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq K_{\alpha,\varepsilon}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j^2}\mathbb{E}X_1^2\mathbb{I}\{X_1 \leq j\} \\
&\leq K_{\alpha,\varepsilon}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j^2}\int_0^j \mathbb{P}(X_1^2 > t)dt
\end{aligned}$$

on pose $\sqrt{t} = u$, alors

$$S_1 \leq 2K_{\alpha,\varepsilon}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{j-1}\int_k^{k+1} u\mathbb{P}(X_1 > u)du$$

comme $k \leq u \leq k+1$, alors $\{X_1 > u\} \subset \{X_1 > k\}$, et par suite

$$\begin{aligned} S_1 &\leq 2K_{\alpha,\varepsilon} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(X_1 > k) \int_k^{k+1} udu \\ &\leq K_{\alpha,\varepsilon} \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_1 > k) \left(\sum_{j\geq k+1} \frac{1}{j^2} \right) (2k+1) \end{aligned}$$

par le Lemme 3.1 dans l'appendice

$$\sum_{j\geq k+1} \frac{1}{j^2} \leq \frac{c}{k+1}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_1 &\leq K_{\alpha,\varepsilon} C \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_1 > k) \\ &\leq C' \mathbb{E}|X_1| \end{aligned}$$

Avec $K_{\alpha,\varepsilon}$ une constante positive qui ne dépend que de α et ε.
Pour S_2 on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{k_n} \frac{j^2}{k_n^2} \mathbb{P}(X_j > j) \\ &\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j\geq 1} j^2 \mathbb{P}(X_j > j) \sum_{k_n \geq j} \frac{1}{[\alpha^n]^2} \\ &\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j\geq 1} j^2 \mathbb{P}(X_j > j) \sum_{k_n \geq j} \frac{1}{\alpha^{2n}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq r_j} \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{r_j} \frac{1}{1-1/\alpha^2} = \frac{1}{j^2} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$$

se qui implique

$$\begin{aligned} S_2 &\leq K_{\alpha,\varepsilon} \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(X_1 > j) \\ &\leq K_{\alpha,\varepsilon} \mathbb{E}|X_1| \end{aligned}$$

S_1 et S_2 sont finies, ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[k_n^{-1} |S_{k_n}^* - \mathbb{E}S_{k_n}^*| > \varepsilon\right] < \infty \qquad (*)$$

d'après (∗) et le lemme de Borel-Cantelli $k_n^{-1}(S_{k_n}^* - \mathbb{E}S_{k_n}^*) \to 0$ p.s.
Puisque $\mathbb{E}|X_1|$ existe, alors $k_n\mathbb{P}(X_1 > k_n) \to 0$ et par suite

$$k_n^{-1}\mathbb{E}S_{k_n}^* = \mathbb{E}(X_1 \wedge k_n) \to \mathbb{E}X_1.$$

Par définition de Y_n on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n \neq Y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n > n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_1 > n] < \infty$$

Donc $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \neq Y_n\}) = 0$, alors on conclure que

$$k_n^{-1}S_{k_n} \to \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.s}$$

On remarque que pour n'importe $n \in \mathbb{N}$ il existe $l(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$[\alpha^{l(n)-1}] < n \leq [\alpha^{l(n)}]$$

on a aussi S_n est croissante, donc

$$k_{l(n)-1}^{-1}S_{k_{l(n)-1}} \leq n^{-1}S_n \leq k_{l(n)}^{-1}S_{k_{l(n)}}.$$

Et par suite, on a

$$\mathbb{E}X_1 \leq \liminf_{n\to\infty} n^{-1}S_n \leq \limsup_{n\to\infty} n^{-1}S_n \leq \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.s}$$

donc, on conclure que $n^{-1}S_n \to \mathbb{E}X_1$, presque sûrement lorsque $n \to \infty$. □

3.2 Convergence des séries de variables aléatoires NA

L'inégalité maximale de Kolmogorov a été généralisé par Matula pour des variables négativement associées comme suit

Lemme 3.2.1. *Soit* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires NA, centrées, et de moments d'ordre 2 finis, alors* $\forall \varepsilon > 0$ *on a l'inégalité suivante*

$$\mathbb{P}\left[\max(|S_1|, ..., |S_n|) > \varepsilon\right] \leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k).$$

Démonstration. On sait que

$$|S_n| = S_n^+ + S_n^-$$

donc

$$\begin{aligned} \max(|S_1|, ..., |S_n|) &= \max(S_1^+ + S_1^-, ..., S_n^+ + S_n^-) \\ &\leq \max(0, S_1, ..., S_n) + \max(0, -S_1, ..., -S_n), \end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\max(|S_1|, ..., |S_n|) > \varepsilon] \\ &\quad \leq \mathbb{P}\left[\max(0, S_1, ..., S_n) > \frac{1}{2}\varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[\max(0, -S_1, ..., -S_n) > \frac{1}{2}\varepsilon\right] \\ &\quad \leq 4\varepsilon^{-2}\left[\mathbb{E}(\max(0, S_1, ..., S_n))^2 + \mathbb{E}(\max(0, -S_1, ..., -S_n))^2\right] \\ &\quad \leq 4\varepsilon^{-2}\left[\mathbb{E}(\max(S_1, ..., S_n))^2 + \mathbb{E}(\max(-S_1, ..., -S_n))^2\right]. \qquad (*) \end{aligned}$$

D'autre part, on pose que

$$\begin{aligned} M_n &= \max(S_1, ..., S_n) \\ &= X_1 + \max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n), \end{aligned}$$

si on considère X_1 et $\max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n)$ comme deux fonctions croissantes de sous ensembles disjoints de variables NA, alors elles sont négativement associes et par suite négativement corrélées, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_n^2 &= \mathbb{E}X_1^2 + 2\mathbb{E}x_1 \max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n) \\ &\quad + \mathbb{E}(\max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n))^2 \\ &\leq \mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}(\max(0, X_2, X_2 + X_3, ..., X_2 + ... + X_n))^2 \end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$\mathbb{E}M_n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \qquad (**)$$

Si on remplace X_n par $-X_n$ on retrouve la même inégalité pour $\mathbb{E}(\max(-S_1, ..., -S_n))^2$. Maintenant il suffit de remplacer $(**)$ dans $(*)$ □

Théorème 3.2.1. *Soit* $\{X_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires NA de moments d'ordre 2 finis.*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n) < \infty$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}X_n) \qquad \textit{converge p.s.}$$

La démonstration est basée sur le lemme précédent.

Démonstration. On veut montrer que S_n est une suite de Cauchy.

Supposant que $\mathbb{E}X_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}$ et ε un réel positif, alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup_{k,m \geq n} |S_k - S_m| > \varepsilon\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \frac{1}{2}\varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{m \geq n} |S_k - S_n| > \frac{1}{2}\varepsilon\right] \\ &\leq 2\mathbb{P}\left[\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \frac{1}{2}\varepsilon\right] \\ &\leq 2 \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\left[\max_{n \leq k \leq N} |S_k - S_n| > \frac{1}{2}\varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant le lemme précédent, on trouve

$$\mathbb{P}\left[\sup_{k,m \geq n} |S_k - S_m| > \varepsilon\right] \leq 64\varepsilon^{-2} \lim_{N \to \infty} \sum_{i=n}^{N} Var(X_i) \to 0,$$

car c'est le reste d'une série qui converge. On conclure que S_n est une suite de Cauchy presque sûrement, donc elle converge p.s. □

Le lemme de Kronecker et le théorème précédent implique le corollaire suivant

Corollaire 3.2.1. *Si* $\{X_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *est une suite de variables aléatoires NA de moments d'ordre 2 finis et* $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n)/n^2 < \infty$, *alors*

$$\frac{(S_n - \mathbb{E}S_n)}{n} \to 0 \qquad p.s.$$

On va voir maintenant le théorème des trois séries généralisé pour les variables aléatoires négativement associées.

Théorème 3.2.2. *(Théorème des trois séries)*
Soit $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires NA, si pour un* $c > 0$ *les séries suivantes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n^c, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n^c), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq c],$$

convergent, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \textit{converge p.s.}$$

X^c *est définie comme suit*

$$X^c = \begin{cases} X & si\ |X| \leq c, \\ -c & si\ X < -c, \\ c & si\ X > c. \end{cases}$$

Et

$$S_n^c = \sum_{k=1}^{n} X_k^c \quad \textit{pour un } c>0.$$

Démonstration. Les deux premières sommes implique que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c$ converge presque sûrement (par le théorème de deux séries de Kolmogorov dans le premier chapitre), et la dernière somme implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq X_n^c) < \infty,$$

alors les deux suites $\{X_n,\ \ n \geq 0\}$ et $\{X_n^c,\ \ n \geq 0\}$ sont équivalentes, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge p.s. □

Appendice

On rappelle dans cet appendice quelques lemmes et théorèmes utiles.

Définition 3.1. *Une suite des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ est dite symétrique si*

$$(X_1, X_2, ..., X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (-X_1, -X_2, ..., -X_n).$$

Théorème 3.1. *(Inégalités de Lévy)*
Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a.r indépendantes et symétriques, avec S_n la somme partielle. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} S_k > x) \leq 2\mathbb{P}(S_n > x),$$

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > x) \leq 2\mathbb{P}(|S_n| > x).$$

Théorème 3.2. *Soient $r > 0$, X et Y deux v.a.r. Supposons que $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ et $\mathbb{E}|Y|^r < \infty$. Alors*

$$\mathbb{E}|X + Y|^r \leq c_r(\mathbb{E}|X|^r + \mathbb{E}|Y|^r),$$

avec

$$c_r = \begin{cases} 1 & si\ r \leq 1, \\ 2^{r-1} & si\ r \geq 1 \end{cases}$$

Théorème 3.3. *(Inégalités de Marcinkiewicz-Zygmund)*
Soit $r \geq 1$. Supposant que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r indépendantes et centrées telles que $\mathbb{E}|X_k|^r < \infty, \forall k \in \{1, ..., n\}$, soit $\{S_n, n \geq 1\}$ les sommes partielles. Alors ils existent deux constantes A_r et B_r qui ne dépendent seulement de r telles que

$$A_p\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right)^{r/2} \leq \mathbb{E}|S_n|^r \leq B_p\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right)^{r/2}.$$

Lemme 3.1.

(i) *Pour* $\alpha > 0, n \geq 2$,

$$\frac{1}{\alpha n^{\alpha}} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha(n-1)^{\alpha}} \leq \frac{2^{\alpha}}{\alpha n^{\alpha}}.$$

(ii) *Pour* $\beta > 0$,

$$\frac{n^{\beta}}{\beta} \leq \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \leq \frac{n^{\beta}}{\beta} + n^{\beta-1} \leq (\frac{1}{\beta}+1)n^{\beta}.$$

Lemme 3.2. *Pour* $n \geq 1$, *soit* $0 \leq a_n < \delta < 1$, *alors*

$$(1-a_n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \iff na_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus, dans les deux cas, étant donné $\delta \in (0,1)$, *on a* $na_n < \delta(1-\delta) < 1$ *pour* n *assez grand, et*

$$(1-\delta)na_n \leq 1-(1-a_n)^n \leq na_n/(1-\delta).$$

Lemme 3.3. *On pose* $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *si* $a_n \to a$ *quand* $n \to \infty$, *alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a, \quad \textit{quand } n \to \infty$$

Lemme 3.4. *(Lemme de Kronecker)*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a* ,$a_0 = 0$ *et*$\{a_n, n \geq 1\}$ *une suite des réels positifs* $\nearrow \infty$, *alors*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{a_k} \quad \textit{converge p.s} \implies \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0$$

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux lois fortes des grands nombres. Dans le cadre indépendant, nous établissons celle de Marcinkiewicz-Zygmund pour la norme L^p ainsi que ponctuellement. Nous généralisons ensuite les deux lois des grands nombres de Kolmogorov aux variables négativement dépendantes par quadrant et négativement associées.

L'approche utilisée est basée sur l'inégalité maximale de Matula qui généralise celle de Kolmogorov ainsi qu'une extension du lemme de Borel-Cantelli aux variables négativement dépendantes par quadrant obtenu par Erdos et Chow.

Abstract

In this Master thesis, we study some strong laws of large members. In the independent framework, we establish the one of Marcinkiewicz-Zygmund in the L^p norm, as well as almost surly. We also generalize two laws of large members of kolmogorov to negatively quadrant dependent and negatively associated random variables.

Our approach is based on the maximal inequality of Matula which generalizes the one of Kolmogorov, as well as an extension of the Borel-Cantelli lemma to negatively quadrant dependent random variables obtained by Erdos and Chow.

Références

[1] Alam, K., Saxena, K. M. L. (1981). *Positive dependence in multivariate distributions.*.Comm. Statist. A 10 : 1183–1196.

[2] Alexander Buluniski, Alexey Shashkin, (2007) *Limit theorems for associated random fields and relates systems.*

[3] Allan Gut, 2005. *Probability : A Graduate Course.*

[4] Baghdadi, Hanane, (2017) *Concepts de l'association pour les variables aléatoires réelles*, Université Abderrahmane Mira- Béjaia.

[5] Bernou, Ismahan, (2017) *Convergence des séries de variables aléatoires sous-gaussiennes*, Université Abou Bakr Belkaid–Tlemcen.

[6] Block, H. W., Savits, H. T. and Shaked, M. (1982) *Some concepts of negative dependence.* The annales of Probability, Vol. 10, No. 3, 765-772.

[7] Chandra, T.K., Li,D., Rasalsky, A., 2018 *Some mean convergence theorems for arrays ofrowwise negative quadrant dependent random variables.*

[8] Dubhashi. D., Ranjan. D., 1996. *Balls and Bins :A study in negative dependence.*

[9] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981. *Multivariate negative dependence, Comm. Statist.*Theory Methods A10 , 307-337.

[10] Esary, J.,F. Proschan and D. Walkup (1967),*Association of random variables with applications*, Ann. Math. Statist. 38,1466-1474.

[11] Etemadi, N. (1981) *An elementary proof of the strong law of large numbers.* Z. Wahrschein-lichkeitstheor. Verw. Geb. 55, 119–122.

[12] Joag-Dev, k. and F. Proschan (1983), *Negative association of random variables with applications*, Ann. Statist. 11, 286-295.

[13] Lehmann, E.L. (1966), *Some concepts of dependence*, Ann. Math. Statist. 37, 1137-1153.

[14] Marcinkiewicz, J., and Zygmund, A. *Qelques théorèmes sur les fonctions indépendantes.* Fund. Math. 29, 60–90 (1937).

[15] Matula, P. (1992). *A note on almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables*, Statist. Probab. Lett., 15, 3, pp. 209-213.

[16] Newman, C.M., 1984 *Normal fluctuation and the FKG inequalities..*

[17] Petrov, W.W. (1987), Limit theorems for sums of independent random variables (Nauka, Moscow). [In Russian.]

[18] Petrov, W.W. (1996) *On the strong law of large numbers..* Stat. Probab. Lett. 26, 377–380

[19] R.L. Taylor, R.F. Patterson and A. Bozorgnia, 2001. *weak laws of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,227-236.

[20] Sawyer, S. (1966)*Maximal inequalities of weak typ..* Ann. Math. 84, 157–174