



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN**

## Mémoire fin d'études

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Pour l'obtention du diplôme de :

**MASTER EN PHYSIQUE**

Option : Physique théorique

Sur le thème :

---

### **Méthode de diagonalisation exacte dans l'effet Hall quantique fractionnaire**

---

Présenté par : SABRI Youcef

Mercredi 27 en Juin 2018 devant le jury composé de :

Mr S. Bekhechi professeur A UNIV. TLEMCCEN (PRESIDENT DE JURY)

Mr M. Lemerini professeur A UNIV. TLEMCCEN (EXAMINATEUR)

Mr Z. Bentalha professeur A UNIV. TLEMCCEN (ENCADREUR)

*Laboratoire Physique Théorique*

*Tlemcen - Algérie*

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Théorique de Tlemcen sous la direction de Monsieur Zine el abidine Bentalha, Maître de conférence à l'Université de Tlemcen.

Je remercie beaucoup Monsieur Mohamed Mebrouki professeur à l'institut de technologie à Tlemcen, d'avoir m'aider et m'introduire à l'initiation de la recherche, il m'a soutenu beaucoup durant tout mon travail.

Je dois également remercier vivement Monsieur Smail Bekhechi, Professeur à l'Université de Tlemcen, pour avoir aimablement accepté de présider les examinateurs de ce travail.

Sans oublier de remercier B. lemrini, Professeur à l'Université de Tlemcen, pour avoir aimablement accepté d'examiner ce travail.

Je remercie tous qui m'ont aidé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

## **Résumé :**

Dans ce travail, nous nous proposons de diagonaliser l'hamiltonien d'un système d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique très fort à basse température.

La méthode utilisée est basée sur le code de Lanczos qui permet d'obtenir l'énergie de l'état fondamental du système, aussi la fonction d'onde correspondante.

## **Mots clés :**

- Effet Hall quantique.
- Electrons bidimensionnel corrélés.
- Méthode de diagonalisation.

## **Abstract :**

In this work, we propose to diagonalize the Hamiltonian of a two-dimensional electron system subjected to a very strong magnetic field at low temperature.

The method used is based on the code of Lanczos which allowed to obtain the energy of the fundamental state of the system, also the corresponding wave function.

## **Keywords :**

- Quantum Hall effect.
- Two-dimensional correlated electrons.
- Diagonalization method.

# Tables des matières

<b>1. Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>2. L'effet Hall classique</b> .....	<b>3</b>
<b>3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ <math>\vec{E}</math> et <math>\vec{B}</math></b> .....	<b>6</b>
3.1. Traitement classique.....	6
3.2. Formalisme de Lagrange/Hamilton.....	8
3.3. Traitement quantique (quantification de Landau) .....	9
3.3.1. Pour la gauge symétrique .....	11
3.3.2. Pour la gauge de Landau .....	15
3.3.3. La dégénérescence d'un NL.....	16
3.3.4. Le facteur de remplissage .....	16
<b>4. Les effets Hall quantiques</b> .....	<b>17</b>
4.1. L'effet Hall quantique entier (l'EHQE) .....	17
4.1.1. Observations expérimentales.....	17
4.1.2. Explication de l'EHQE .....	18
4.1.3. Absence d'EHQ pour un système invariant sous les transformations de Galilée .....	19
4.1.4. Rôle du désordre .....	20
4.1.5. Etats de Bords.....	21
4.1.6. Théorie de Buttiker .....	22
4.1.7. Argument de Laughlin/Halperin.....	25
4.1.8. Origine des plateaux.....	28
4.2. L'effet Hall quantique fractionnaire (l'EHQF) .....	29
4.2.1. Observations expérimentales.....	29
4.2.2. Rôle des interactions.....	30
4.2.3. Fonction d'onde de Laughlin .....	31
4.2.4. Caractéristiques et expressions.....	32
4.2.4.1. Cas de deux électrons.....	32
4.2.4.2. Cas de N électrons.....	34
4.2.5. Excitations du liquide de Laughlin .....	37
4.2.6. Energie du fondamentale .....	39
<b>5. Théorie de Jain</b> .....	<b>40</b>
5.1. Fermions composites.....	40
5.2. Principes de base de la théorie .....	41
5.3. Construction de la fonction d'onde de Jain.....	43
5.4. Théorie du champ moyen .....	45
5.5. L'opérateur de projection sur LLL.....	48
5.6. Excitations du liquide de fermions composites.....	50
5.7. Liquide de Fermi de fermions composites (LFFC) .....	51
<b>6. Etude numérique</b> .....	<b>52</b>
6.1. Hamiltonien d'interaction dans LLL .....	52
6.2. Méthodes d'investigations numériques .....	54

6.3.	Les résultats .....	55
6.4.	Description de la méthode de Langzos .....	55
6.5.	Description qualitative de l'Algorithme .....	56
6.6.	L'implémentation de l'Algorithme.....	57
<b>7.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>58</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les années 80 et 90 ont vus la naissance d'un phénomène centenaire par la découverte d'un phénomène physique purement quantique à l'échelle humaine. La haute technologie progressée a aidé les expérimentateurs d'améliorer plus les conditions expérimentales, en permettant une réalisation d'un gaz électronique bidimensionnel de conductivité plus élevée, et en baissant plus la température ambiante, et en augmentant ensuite le champ magnétique appliqué.

En 1879, le physicien Edwin Hall a répondu à la question soulevée récemment par Maxwell, concernant la dépendance entre la résistance et le champ magnétique appliqué. Cette question aurait eu de réponse par Hall qui avait découvert l'apparition d'une résistance transversale au courant électrique et au champ magnétique appliqué qui dépend finalement des deux grandeurs physiques. Après, cette résistance a pris son nom 'résistance de Hall', ce phénomène est connu par l'effet Hall classique. Cet effet Hall classique a prouvé qu'avant la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1897 qu'il y a des densités de porteurs de charges responsables à la conduction du courant, et que ces dernières ont un signe dépendant du matériau utilisé. Ce signe n'avait compris que cinquante ans plus tard qu'après l'apparition de la théorie des bandes qui a prouvé qu'il y a des porteurs de charges de signe positif dits « trous ».

Cent ans après la découverte de Hall, en 1980, la communauté scientifique a assisté à la renaissance d'un phénomène centenaire qui a ouvert la porte de deux prix Nobel en physique, le premier a été attribué en 1985 à V. Klitzing, et le deuxième tout récemment en 1998 à Tsui, Stormer et Laughlin. Cette fois-ci, l'expérience qu'a été faite par V. Klitzing et ses collaborateurs informait que la résistance de Hall avait une valeur purement quantique d'où elle a été mesurée par lui, et a été prise le nom de la constante de V. Klitzing, cette constante a été utilisée comme étalon de résistance dont sa valeur  $h/e^2$  avec une précision de  $10^{-9}$  a permis de mesurer la charge électronique. L'expérience qu'a faite V. Klitzing a montré que la résistance de Hall varie en escaliers proportionnellement au champ magnétique, qui ont des valeurs d'étalon de résistance multipliées par des inverses des entiers, d'où la conductance sera entièrement multipliée. Cet

effet est connu par l'effet Hall quantique entier (EHQE). Plusieurs approches et arguments ont intéressé par explication de cet effet Hall quantique entier, tel que les deux qu'on a exposés dans notre mémoire concernant la théorie de Buttiker et l'argument de Laughlin/Halperin. Cet effet a été bien expliqué par ces théories en prenant l'effet du désordre. Deux ans plus tard en 1983, le monde a été secoué encore une fois en découvrant l'effet Hall quantique fractionnaire en travaillant sur l'entier. Cette fois-ci ont découvert un plateau de résistance de Hall de fraction  $1/3$ , puis ont découvert d'autres plateaux correspondants aux valeurs fractionnaires de la résistance de Hall en améliorant plus les conditions expérimentales. Cet effet a ouvert la porte de recherche d'où plusieurs chercheurs s'intéressèrent à son explication. Le théoricien R. B. Laughlin a été le précurseur d'une explication qualitative et quantitative cohérente de l'EHQE et l'EHQF, d'où il a pu expliquer l'apparition de ce plateau et d'autres plateaux qui ont une fraction de  $1/(2p + 1)$ , avec  $p$  un entier positif non nul, on lui approchant par une fonction d'onde d'essai en utilisant la méthode variationnelle, cette fonction d'onde a pris le nom d'« ansatz de Laughlin », et qui a vu un succès à l'époque, dont Laughlin a pu prouver dans son article que sa fonction d'onde possède un bon recouvrement avec l'état fondamental exacte qui l'a calculé pour trois ou quatre électrons en interaction de Coulomb dans une surface compacte dans la géométrie du disque. Après, le succès de cette fonction d'onde fut amplement vérifié par diverses approches, la plus convaincante est sans doute est la comparaison entre sa fonction d'onde et l'état fondamental obtenue en utilisant la diagonalisation numérique exacte d'hamiltonien d'interaction pour un faible nombre de particule.

Dans notre troisième chapitre on a exposé sa fonction d'onde et l'étude qu'avait faite en donnant les ingrédients essentiels. Puis dans notre quatrième chapitre on a exposé la théorie de Jain de fermions composites qui a aussi vu un succès de reproduire l'ansatz de Laughlin et d'expliquer d'autres plateaux de la résistance de Hall tel que  $p/2p + 1$ , et a pu aussi expliquer l'absence de plateau pour le facteur  $1/2$ .

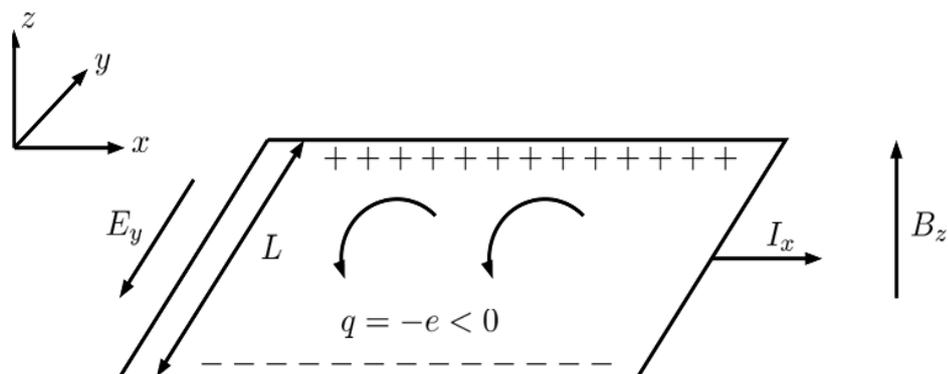
Dans notre dernier principal chapitre que nous avons fait notre travail concernant la vérification du succès de recouvrement de l'ansatz de Laughlin avec celle de l'état fondamental obtenue en diagonalisant numériquement la matrice d'hamiltonien d'interaction développée par Tsipper, on a utilisé pour la diagonalisation numérique l'Algorithme de Langzos qui permet de diagonaliser des matrices à grandes dimensions avec une convergence rapide vers l'état fondamental, et on a utilisé pour son implémentation le langage Fortran90.

# Chapitre 2

## 1. Effet Hall classique

En 1879 [1], E. H. Hall grâce aux travaux de Maxwell [2] a découvert qu'en présence d'un champ magnétique, le courant électrique circulait dans une direction perpendiculaire au champ électrique [1]. Inversement, le passage du courant induit une tension perpendiculaire à la direction du courant. Cet effet est désormais appelé l'effet Hall classique. Découvert avant l'électron, il fut la première preuve que les courants électriques dans les métaux sont généralement la conséquence du mouvement de particules de charge négative. L'effet Hall classique a aussi permis de montrer que, dans certains matériaux, il était plus pertinent de considérer que le courant électrique était dû aux déplacements de "trous" de charge positive plutôt qu'à celui des électrons.

L'effet Hall classique peut être compris de manière purement classique, en Prenant un gaz de porteurs de charge  $q_e = -e$  et de masse  $m$ , supposé bidimensionnel, comme il est exposé dans la (figure 1). En présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , perpendiculaire au plan  $(xy)$ , les porteurs injectés dans la direction  $x$  subissent la force de Lorentz, ce qui fait courber leurs trajectoires, ce qui conduit à une accumulation de charges sur les bords de l'échantillon. Ces charges induisent un champ électrique  $\vec{E}_y$  [3].



**Figure 1** : schéma explicatif de l'effet Hall. D'où l'échantillon bidimensionnel est considéré rectangulaire de largeur  $L$ , la propagation du courant suivant  $x$ , et le champ magnétique appliqué suivant  $z$ .

Cette accumulation des charges aux bords de l'échantillon génère une tension transversale appelée tension de Hall  $V_H$ , le long de la direction  $y$ . Lorsque la force électrostatique  $\vec{F}_{el} = q_e \vec{E}_y$  compense la force magnétique de Lorentz  $\vec{F}_{mag} = q_e \vec{v} \wedge \vec{B}$ , on est atteint à un régime stationnaire ( $dP/dt = 0$ ), et l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m \frac{\vec{v}}{\tau} = 0 \quad (2.1)$$

Le dernier terme de l'équation (2.1) comme l'indique son signe négatif représente une force de frottement ou de retardement due à la collision de l'électron avec les ions (diffusion) qui apparaît dans le modèle de Drude. Ce qui est responsable de la résistance dissipative longitudinale.  $\tau$  est le temps moyen entre deux collisions successives, appelé le temps de relaxation. L'équation (2.1) s'écrit alors en la décomposant sur les axes  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} E_x + v_y B = \frac{m v_x}{q_e \tau} \\ E_y - v_x B = \frac{m v_y}{q_e \tau} \end{cases} \quad (2.2)$$

Lorsque les forces transversales, électrostatique et magnétique se compensent, la vitesse d'électron selon la direction  $y$  s'annule ( $v_y = 0$ ), et donc il n'y aura pas de courant suivant cette direction. Le mouvement de l'électron sera uniforme selon la direction  $x$  ( $v_x = q_e \tau E_x / m = cst$ ), ce qui conduit à une densité de courant constante (courant microscopique) selon cette direction donnée par la formule de Drude :

$$j_x = n_e q_e v_x = \frac{n_e q_e^2 \tau}{m} E_x \quad (2.3)$$

D'où  $n_e$  est la densité des porteurs de charge  $q_e$ , Le champ électrique induit selon  $y$  est donné par  $E_y = v_x B$ , ce champ électrique génère une différence de potentiel transversale  $V_H = L E_y$ , d'où  $L$  est la largeur de l'échantillon. Le courant macroscopique (total)  $I_x$  est donné par  $I_x = L j_x = n_e q_e v_x L$ . Par conséquent :

$$V_H = \frac{B}{n_e q_e} I_x \quad (2.4)$$

Une résistance transversale donc s'apparaît, qui sera donnée par  $R_H = V_H / I_x$ . Ce coefficient de proportionnalité appelée résistance de Hall.

$$R_H = \frac{B}{n_e q_e} \quad (2.5)$$

On voit bien la dépendance linéaire entre  $R_H$  et le champ magnétique appliqué

B. La mesure expérimentale de cette résistance nous permet de déterminer la densité des porteurs de charge  $n_e$ , et le signe de ces porteurs.

D'après l'équation (2.4) on voit bien l'existence simultanée entre le courant  $I_x$  et la tension transversale de Hall  $V_H$ , en présence d'un champ magnétique  $B$  transversale à ces derniers.

On introduit un tenseur de conductivité  $\bar{\sigma}$ , tel que  $\vec{j} = \bar{\sigma}\vec{E}$  qui permet de décrire ce transport électronique en présence d'un champ magnétique. Alors que ce tenseur de conductivité sera écrit comme :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \bar{\sigma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Ainsi un tenseur de résistivité  $\bar{\rho}$ , tel que  $\vec{E} = \bar{\rho}\vec{j}$ , qui sera aussi écrit comme :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \bar{\rho} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

D'après l'équation (2.2), on tire facilement le tenseur de résistivité :

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} 1/\sigma & -B/n_e q_e \\ B/n_e q_e & 1/\sigma \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Avec  $\sigma = n_e q_e^2 \tau / m$  est la conductivité longitudinale. L'inversion du tenseur de résistivité conduit au tenseur de conductivité, qui sera donc donné par :

$$\bar{\sigma} = \rho^{-1} = \frac{\sigma}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

D'où  $\omega_c = eB/m$  est la fréquence de cyclotron. On voit bien d'après (2.9), que la conductivité diagonale (longitudinale) s'annule en même temps que la résistivité longitudinale. L'effet Hall classique et par ses équations classiques permet de déterminer le signe des porteurs de charges, et la densité de ces porteurs dans cette échantillon conductrice [3].

## 2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ et $\vec{E}$

Le physicien russe Landau s'intéressa en 1930 au traitement quantique d'une particule chargée confinée à une surface 2D, il trouva que lorsque cette particule est soumise à un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à son mouvement, les orbites de l'électron seront quantifiées, et seront donc séparés par un gap énergétique, semblable à celle de l'oscillateur harmonique. Pour voir cette quantification qu'a faite Landau en traitement quantique, on voit d'abord son traitement classique.

### 2.1. Traitement classique

On sait que lorsque une particule chargée de charge  $q_e$ , se déplace dans un Plan  $(xy)$  avec une vitesse  $\vec{v}$ , et soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire et uniforme à son mouvement, elle subit une force magnétique de Lorentz  $\vec{F} = q_e \vec{v} \wedge \vec{B}$ , d'où son équation du mouvement sera écrite comme :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q_e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (2.10)$$

En utilisant la variable spatiale complexe  $z = x + iy$ , on peut écrire l'équation (2.10) comme :

$$\ddot{z} = -i \frac{q_e B}{m} \dot{z} \quad (2.11)$$

En intégrant cette équation pour obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{z}_0 \exp(i\omega_c t) \\ z = \frac{1}{i\omega_c} \dot{z}_0 \exp(i\omega_c t) + z_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

D'où  $\dot{z}_0$  et  $z_0$  sont respectivement la vitesse et la position initiales de l'électron.  $\omega_c = eB/m$  étant la pulsation de cyclotron. L'électron se meut en des orbites circulaires dites de cyclotron, de centre dit de guidage  $\vec{R} = (X, Y, 0)$  et de rayon  $r_c = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} / \omega_c$ . La position de l'électron peut alors s'écrire comme :

$$r(t) = \begin{cases} X - r_c \sin(\omega_c t + \varphi) \\ Y + r_c \cos(\omega_c t + \varphi) \\ 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

D'où  $\varphi$  est la phase initiale. Pour un système invariant par translation,  $\vec{R}$  serait une constante de mouvement, tel que :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{R} + (r_c \cos(\omega_c t), r_c \sin(\omega_c t), 0) \\ &= \vec{R} + \zeta(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'où  $\zeta(t)$  est la position cyclotron qui décrit la rotation autour du centre de guidage, ainsi la trajectoire est dite « orbite cyclotron » (voir figure2). La vitesse de l'électron sera donc :

$$\vec{v} = (-r_c \omega_c \sin(\omega_c t), r_c \omega_c \cos(\omega_c t), 0) \quad (2.15)$$

Relativement au centre de l'orbite cyclotron :

$$\begin{cases} \vec{r} = (X + \zeta, Y + \eta, 0) \\ \vec{v} = \omega_c (-\eta, \zeta, 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

Les composantes du moment canonique  $\vec{P}$  seront déterminées dans la gauge symétrique  $\vec{A} = B/2 (-y, x, 0)$  par :

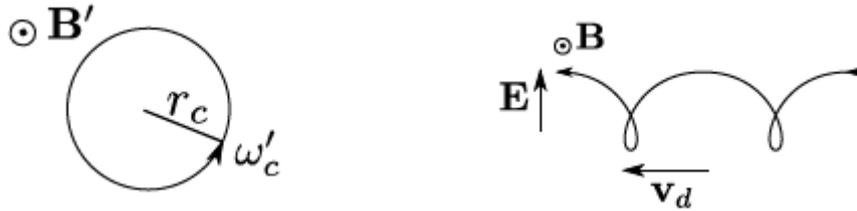
$$\vec{P} = \frac{q_e B}{2} (-Y + \eta, X - \zeta, 0) \quad (2.17)$$

Son énergie cinétique sera donnée par:

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega_c^2 r_c^2 \quad (2.18)$$

Le moment cinétique sera invariante par rotation suivant z, donc sa composante suivant cet axe est invariante, et sera alors

$$L_z = \vec{r} \wedge \vec{P} \Big|_z = \frac{1}{2} q_e B (R^2 - r_c^2) \quad (2.19)$$



a) Référentiel du centre de guidage    b) référentiel du laboratoire

**Figure2** : orbite cyclotron dans le référentiel  $R'$  du centre de guidage, et  $R$  du centre de laboratoire

En présence d'un champ magnétique et électrique orthogonaux, la trajectoire de l'électron comme indique la figure2, se décompose en deux mouvements, circulaire et linéaire. On suppose que  $E/B < c$ , d'où  $c$  est la vitesse de lumière dans le vide. On se plaçant dans le référentiel du centre de guidage de l'électron  $R'$  qui se déplace à la vitesse de dérive  $v_d = E/B e_x$ , où le champ électrique sera nul, et le champ magnétique sera intensifié :

$$E \rightarrow E' = \frac{E - v_d B}{\sqrt{1 - (v_d/c)^2}} = 0 \quad (2.20)$$

$$B \rightarrow B' = \frac{B - v_d E/c^2}{\sqrt{1 - (v_d/c)^2}} = B \sqrt{1 + (v_d/c)^2} \quad (2.21)$$

Avec  $v_d/c \ll 1$ , dans le référentiel du centre de guidage l'électron ne subit que le champ magnétique  $B' \approx B$ , et l'électron ne subit que la force magnétique de Lorentz  $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  [3-18].

### 2.1.1. Formalisme de Lagrange /Hamilton

On est besoin d'une fonction Hamiltonienne d'énergie qui sera obtenue à partir d'une transformation de Legendre du lagrangien, cette dernière est satisfaite aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.22)$$

Cette fonction dans notre cas est :

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m v^2 + q_e \vec{A} \vec{v} \quad (2.23)$$

Pour un mouvement dans un champ magnétique  $\vec{B}$  et électrique  $\vec{E}$ , cette fonction sera déterminée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m v^2 + q_e E r + q_e \vec{A} \vec{v} \quad (2.24)$$

D'où  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  est un potentiel vecteur généré par à ce champ magnétique qui sera uniforme pour un champ magnétique uniforme, tel que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ . On déduit alors l'impulsion tel que :

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} + q_e \vec{A} \quad (2.25)$$

Pour trouver une fonction Hamiltonienne d'énergie qui sera plus commode à utiliser pour le traitement quantique, à partir d'une fonction Lagrangienne, on doit faire une transformation de Legendre tel que :

$$H(x, y, p_x, p_y) = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - \mathcal{L} \quad (2.26)$$

Après cette transformation, on obtient un Hamiltonien de ce système [3] :

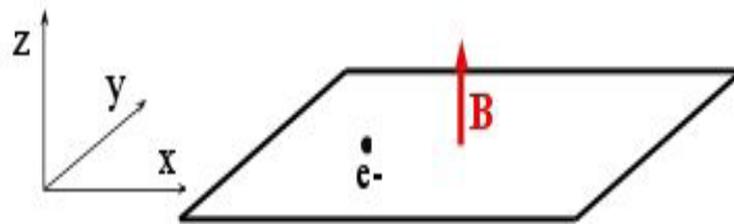
$$H = \frac{(P + eA)^2}{2m} \quad (2.27)$$

Sans un champ électrique, L'électron suit une trajectoire circulaire de fréquence indépendante des conditions initiales dite la fréquence de cyclotron, tel que

$\omega_c = eB/m$ , la trajectoire de l'électron dite 'trajectoire de cyclotron', dont son rayon  $r_c$ , et son centre  $R$ , dépendent des conditions initiales, et  $R$  présente une constante du mouvement dans une vitesse de dérive constante [3].

Lorsque l'électron sera soumis à un champ électrique uniforme, l'électron n'aura donc pas une trajectoire circulaire fermée à cause d'une vitesse de dérive transversale aux champs magnétique et électrique tel que  $\vec{v}_d = \vec{E} \wedge \vec{B} / B^2$ , Le mouvement circulaire de l'électron se compense alors par un mouvement de translation périodique dans l'espace du à la vitesse de dérive constante [4].

## 2.2. Traitement quantique



**Figure 3** : effet Hall dans le plan, d'un gaz d'électrons bidimensionnel.

On considère un électron non relativiste sans spin astreint à un plan  $(xy)$ , et soumis à un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à ce plan comme indique la figure 3, l'Hamiltonien de cet électron s'écrit :

$$H = \frac{(P + eA)^2}{2m} = \frac{\pi^2}{2m} \quad (2.28)$$

D'où la charge de l'électron est prise en valeur absolue  $e = |e|$ ,  $m$  est sa masse effective,  $P = -i\hbar\nabla$  est l'opérateur impulsion qui ne commute pas avec l'Hamiltonien à cause de la dépendance spatiale de  $A$ .  $A$  est une fonction linéaire des coordonnées. Ainsi, l'Hamiltonien est quadratique aussi bien en fonction des coordonnées spatiales que des impulsions et peut donc être diagonalisé exactement. L'opérateur  $\pi = P + eA$  est l'opérateur quantité de mouvement, et ses composantes suivent les relations de commutation :

$$[\pi_x, \pi_y] = -ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -i\hbar eB = -i\hbar^2 / l_B^2 \quad (2.29)$$

Ses composantes sont alternativement utilisables pour résoudre ce problème quantique que celles des couples d'opérateurs canoniques  $(x, p_x)$  et  $(y, p_y)$ .

Avec  $l_B$  est la longueur magnétique dite aussi 'rayon de Larmor', l'Hamiltonien (2.28) a une même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique

unidimensionnel. On définit pour cela un couple d'opérateurs de création et d'annihilation  $(a^+, a)$  tel que :

$$\begin{cases} a^+ = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}}(\pi_x + i\pi_y) \\ a = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}}(\pi_x - i\pi_y) \end{cases} \quad (2.30)$$

Vérifiant  $[a^+, a] = 1$ .

À l'aide de ces opérateurs, l'Hamiltonien se réécrit sous cette forme :

$$H = \hbar\omega_c \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.31)$$

Avec  $a^+ a = n$ , où  $n$  est sa valeur propre, qui prend comme valeurs, des entiers positifs, désignant les niveaux de Landau, ce Hamiltonien a comme spectre :

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.32)$$

Le spectre énergétique est donc discret, et séparé par niveaux, dites niveaux de Landau. Cet aspect du spectre est la pierre angulaire de l'effet Hall quantique et de sa physique si particulière. La différence importante avec l'oscillateur harmonique unidimensionnel est que chaque niveau d'énergie est infiniment dégénéré, cette dégénérescence vient du centre de guidage de l'électron qui commute avec  $H$  et  $\pi$ , donc il constitue un degré de liberté différent de  $\pi$ .

$$R = (X, Y) = \left( x - \frac{1}{eB} \pi_y, y + \frac{1}{eB} \pi_x \right) \quad (2.33)$$

Ses composantes  $X$  et  $Y$  forment une autre paire d'opérateurs canoniques qui suivent la relation de commutation :

$$[X, Y] = il_B^2 \quad (2.34)$$

Les opérateurs  $H$ ,  $\pi$  et  $R$  forment un *E.C.O.C* (ensemble d'observables complet qui commute), donc ils peuvent être diagonalisés simultanément. Les composantes  $X$  et  $Y$  peuvent être exprimés par un autre couple d'opérateurs d'échelle de création et d'annihilation :

$$\begin{cases} b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X - iY) \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X + iY) \end{cases} \quad (2.35)$$

Vérifiant ainsi,  $[b, b^+] = 1$  et  $b^+ b = m$ , d'où  $m$  est sa valeur propre, et prend comme valeurs tous les entiers positifs. Ce système semble à un système classique de deux oscillateurs harmoniques combinés linéairement dont la

fréquence du deuxième oscillateur est nulle. L'ensemble d'états propres de  $H$  sont donc indexés par les nombres quantiques  $n$  et  $m$ , et seront notés par  $|n, m\rangle$ . Pour des valeurs positives de  $n$  et  $m$ , les couples d'opérateurs de création et d'annihilation seront définis par :

$$\begin{cases} a|n, m\rangle = \sqrt{n}|n-1, m\rangle \\ a^+|n, m\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, m\rangle \\ b|n, m\rangle = \sqrt{m}|n, m-1\rangle \\ b^+|n, m\rangle = \sqrt{m+1}|n, m+1\rangle \end{cases} \quad (2.36)$$

Et pour  $m = n = 0$ , ils sont définies par  $a|0, m\rangle = b|n, 0\rangle = 0$ . On peut construire un état quelconque par application successive de l'opérateur de promotion d'un niveau de Landau supérieur  $a^+$ , et d'augmentation du moment cinétique  $b^+$  :

$$|n, m\rangle = \frac{(b^+)^m (a^+)^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |0, 0\rangle \quad (2.37)$$

Par analogie avec la mécanique classique, le rayon cyclotron sera quantifié et varie entre niveaux de Landau selon  $r_c^2 = 2E_n/m\omega_c^2$ . Le centre de guidage paramétrise l'ensemble d'états au sein d'un niveau de Landau. Quelle que soit la jauge choisie pour le potentiel vecteur  $A$ , tout observable physique reste invariant. Cette propriété de symétrie s'appelle l'invariance de jauge. Pour calculer explicitement les états propres de  $H$ , il est nécessaire de choisir une jauge pour le potentiel vecteur. Nous allons déterminer par la suite ces états propres dans deux jauges usuelles : la jauge symétrique et la jauge de Landau. Les états propres correspondants ne sont pas invariants de jauge. Pour une fonction  $\chi$  produite par un changement de jauge, les états propres se changent selon :

$$A \rightarrow A + \nabla\chi \Rightarrow \psi(r) \rightarrow \psi(r)e^{\frac{i}{\hbar}e\chi(r)} \quad (2.37)$$

Le choix de jauge est donc essentiel, dont le rôle de la jauge apparaît grâce à l'introduction d'opérateur du degré de liberté du centre de guidage, qui fait dégénérer l'énergie cinétique quantique, par contre l'énergie cinétique classique ne dépend pas du centre de guidage et n'est donc pas dégénérée [18-4].

### 2.2.1. Dans la jauge symétrique

Le potentiel vecteur  $A$  dans cette jauge est invariant par rotation autour de l'axe  $z$ , et prend la forme:

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \quad (2.38)$$

D'où l'hamiltonien (2.28) sera réécrit dans cette gauge comme :

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2} \left[ \left( -il_B \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2l_B} \right)^2 + \left( -il_B \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2l_B} \right)^2 \right] \quad (2.39)$$

Où  $\hbar\omega_c = \hbar eB/mc = 1.7 B[\text{Tesla}] \text{ meV}$  est l'énergie cyclotron, et  $l_B = \sqrt{\hbar c/eB} = 25.7 \text{ nm}/\sqrt{B[\text{T}]}$  est la longueur magnétique ou 'rayon de Larmor'. En changeant la variable spatial selon  $z = x - iy$  et  $\bar{z} = x + iy$ , et par un petit changement l'hamiltonien (2.39) devient :

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2} \left[ -4\partial\bar{\partial} + \frac{1}{4}z\bar{z} - z\partial + \bar{z}\bar{\partial} \right] \quad (2.40)$$

Avec  $\partial = \partial/\partial z$  et  $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$ . Les couples d'opérateurs d'échelle, de création et d'annihilation se réécrivent dans cette gauge par :

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \left( \frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial} \right) \\ a^+ = \sqrt{2} \left( \frac{\bar{z}}{4l_B} - l_B \partial \right) \\ b = \sqrt{2} \left( \frac{\bar{z}}{4l_B} + l_B \partial \right) \\ b^+ = \sqrt{2} \left( \frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right) \end{cases} \quad (2.41)$$

Le système étant invariant par rotation suivant l'axe z, ce qui implique que la composante suivant z du moment cinétique est conservée, et sera donnée par :

$$L_z = xP_y - yP_x = -\hbar(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) = \hbar(a^+a - b^+b) \quad (2.42)$$

Comme  $[H, L_z] = 0$ , alors on peut les diagonaliser simultanément.  $L_z$  aura comme valeurs propres  $m\hbar$ , avec  $m = -n, -n+1, \dots, n, \dots$ . Chaque niveau d'énergie est infiniment dégénéré car pour une valeur de  $n$ ,  $m$  peut prendre infiniment de valeurs. Une orbitale dans LLL ( $n = 0$ ) sera obtenue donc par  $a|0, m\rangle = 0$  :

$$(z + 4l_B^2 \bar{\partial})\phi_{0,m}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.43)$$

C'est une E.D.O, d'où sa solution est une gaussienne multipliée par un polynôme :

$$\phi_{0,m}(z, \bar{z}) = f(z) \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right) \quad (2.44)$$

D'où  $f(z)$  est un polynôme analytique. Aussi pour  $m = 0, b|n, 0\rangle = 0$ :

$$(\bar{z} + 4l_B^2 \partial)\phi_{n,0}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.45)$$

D'où la solution de l'équation (2.45) est :

$$\phi_{n,0}(z, \bar{z}) = g(\bar{z}) \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right) \quad (2.46)$$

Avec  $g(\bar{z})$  est un polynôme non-analytique. L'orbitale la plus basse énergétique qui correspond à  $n = 0$  et  $m = 0$  aura un polynôme qui est à la fois analytique et non-analytique, c'est donc une constante, et sera:

$$\phi_{0,0}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right) \quad (2.47)$$

Ainsi pour une orbitale quelconque  $\phi_{n,m}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | n, m \rangle$  :

$$\phi_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^{2n+m} (n+m)! n!}} \left(2\partial - \frac{\bar{z}}{2}\right)^n \left(2\bar{\partial} - \frac{z}{2}\right)^{n+m} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \quad (2.48)$$

Pour une orbitale dans LLL ( $n = 0$ ),  $\phi_{0,m}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | 0, m \rangle$  :

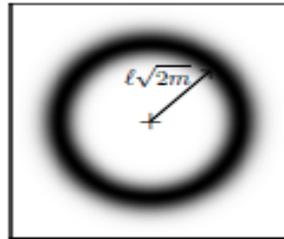
$$\phi_{0,m}(z, \bar{z}) = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}\right) \quad (2.49)$$

La dégénérescence d'un niveau de Landau est infinie dans un plan infinie, puisque pour un  $n$  quelconque,  $m$  peu prendre une infinité de valeurs supérieurs à  $-n$ , par contre pour un plan finie, La dégénérescence d'un niveau de Landau est finie. La probabilité de présence de l'état  $|n, m\rangle$  est maximale sur un cercle de rayon :

$$r_{n,m} = \sqrt{\langle n, m | z\bar{z} | n, m \rangle} = l_B \sqrt{2(m+n+1)} \quad (2.50)$$

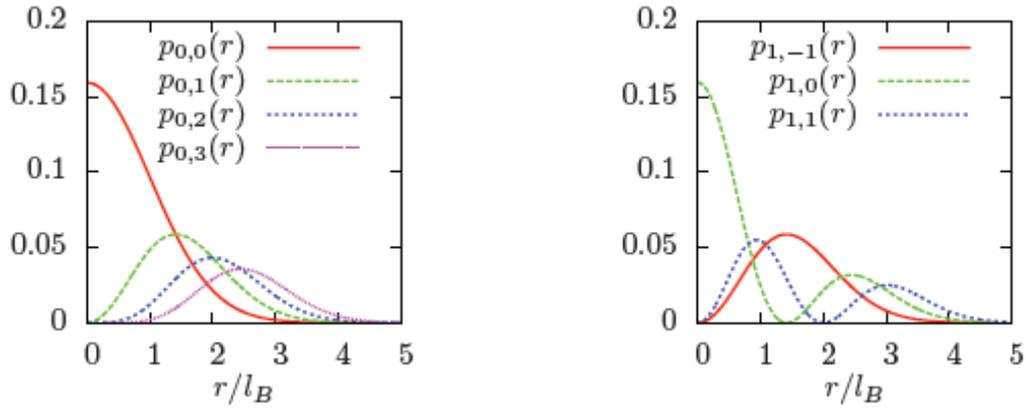
Pour un état dans LLL, avec une valeur de  $m$  très grande

$$r_{0,m} = \sqrt{\langle 0, m | z\bar{z} | 0, m \rangle} \sim l_B \sqrt{2m} \quad (2.51)$$



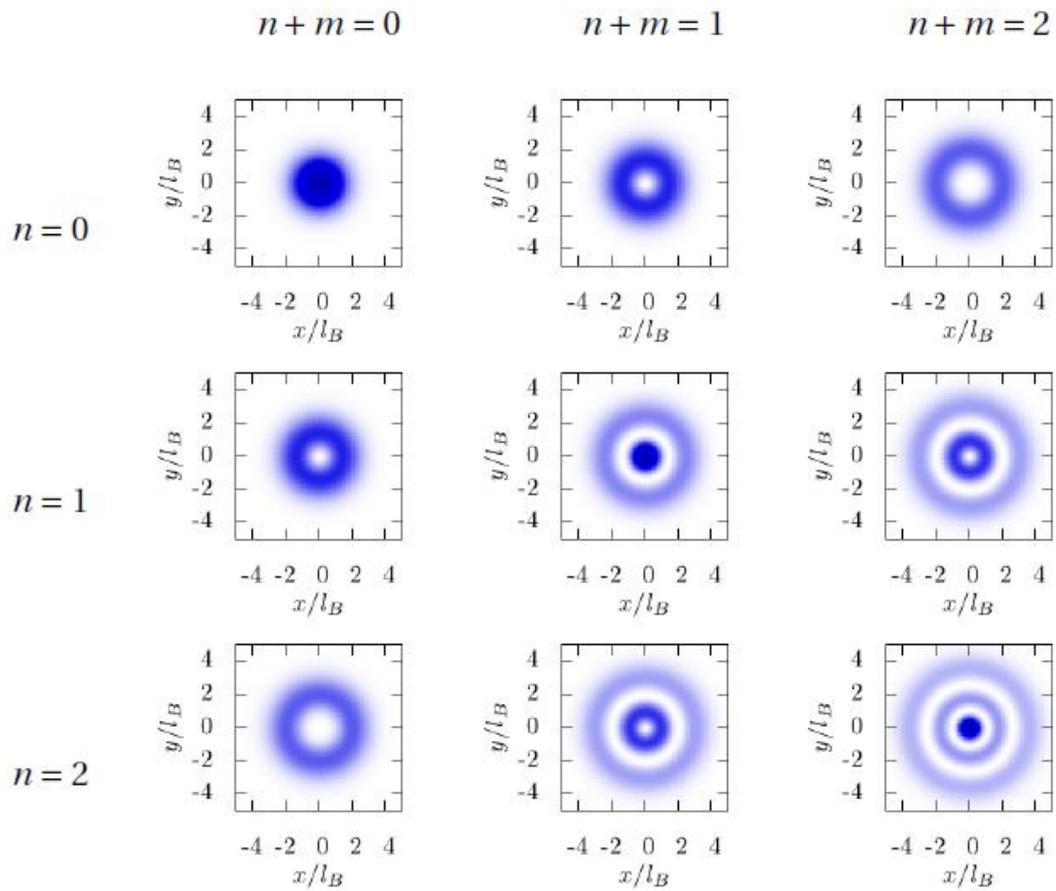
**Figure 4** : densité de l'orbitale  $\phi_{0,m}(z, \bar{z})$  dans la jauge symétrique.

La densité de probabilité des orbites de Landau dans cette gauge, pour le plus bas niveau de Landau, et pour le second plus bas niveau de Landau seront tracées dans la figure 5.



**Figure 5** : densité de premières orbites de Landau  $p_{n,m} = |\phi_{n,m}|^2$ , pour le LLL, et le suivant.

La densité des premières orbitales de Landau correspondantes aux trois premiers NLs, dans le plan (x,y) est schématisée sur la figure 6.



**Figure 6** : densité des trois premières orbitales de Landau pour les trois premiers NLs dans le plan.

### 2.2.2. Dans la gauge de Landau

Autre gauge importante dans la géométrie du plan est la gauge de Landau. Le cas d'un système rectangulaire est plus aisément traité dans cette gauge. Le potentiel vecteur généré par le champ magnétique s'écrit dans cette gauge comme :

$$\vec{A} = Bx\vec{e}_y \quad (2.52)$$

Cette gauge est invariante par translation selon  $y$ . L'opérateur quantité de mouvement  $\pi$  a pour composantes dans cette gauge  $\pi_x = P_x$  et  $\pi_y = P_y + eBx$ . L'hamiltonien s'écrit dans cette gauge par :

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + (P_y + eBx)^2) \quad (2.53)$$

Ce hamiltonien commute avec  $P_y$ , il y a donc une sous espace propre commune entre  $P_y$  et  $H$ , donc ils peuvent être se diagonaliser simultanément.  $P_y$  Représente donc un constant de mouvement. Ce hamiltonien est celui d'un oscillateur harmonique 1D, d'où son spectre énergétique est celui de (2.32). Puisque  $P_y$  commute avec  $H$ , ce spectre sera dégénéré par le spectre de  $P_y$  qui prend comme valeurs propres  $\hbar k_y$ . Le couple d'opérateur d'échelle sera écrit dans la représentation position comme :

$$\begin{cases} a^+ = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -l_B \partial_x + \frac{1}{l_B} (x + l_B^2 k_y) \right) \\ a = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( l_B \partial_x + \frac{1}{l_B} (x + l_B^2 k_y) \right) \end{cases} \quad (2.54)$$

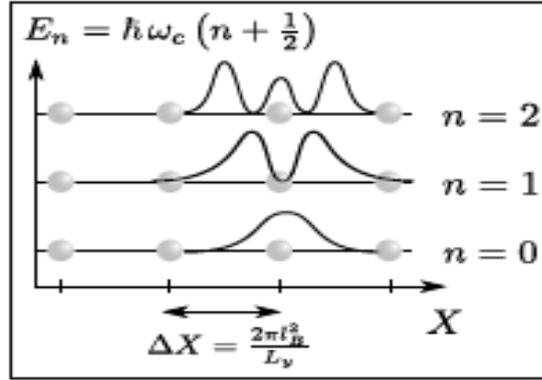
Les fonctions d'onde propre de l'état fondamentale d'impulsion  $k_y$ , s'obtient par  $a|0, k_y\rangle = 0$ , est s'écrivent :

$$\phi_{0, k_y} = e^{ik_y y} \exp\left(-\frac{1}{2l_B^2} (x - x_k)^2\right) \quad (2.55)$$

Ce sont des ondes planes dans la direction  $y$ , et des gaussiennes dans la direction  $x$ , centrées en  $x_k = k_y l_B^2$  (position du centre de masse), et d'écart type  $\Delta X = 2\pi l_B^2 / L_y$ . Les fonctions d'onde de NLs, s'obtiennent en appliquant  $a^+ |0, k_y\rangle$ , avec un facteur de normalisation prés s'écrivent :

$$\phi_{n, k_y} = \frac{1}{\sqrt{n! 2\pi 2^n \sqrt{\pi} l_B}} H_n\left(\frac{x - x_k}{l_B}\right) \exp\left(-\frac{1}{2l_B^2} (x - x_k)^2\right) e^{ik_y y} \quad (2.56)$$

$H_n$  Sont les polynômes d'Hermite d'ordre  $n$ , définies par  $H_0(x) = 1$  et  $H_n(x) = (\partial_x - x)H_{n-1}(x)$ . La densité  $p_{n, k_y}$  des orbitales (2.56) sera indépendante de  $y$ . La densité correspondante aux trois premiers NLs dans cette gauge sera présenté sur la figure 7 [4].



**Figure 7** : densité de probabilité d'orbitales pour les trois premiers NLs dans la gauge de Landau.

### 2.2.3. La dégénérescence d'un NL

La dégénérescence des NLs dépend de la taille du système et du champ magnétique. Dans la gauge symétrique, de l'équation (2.51), un disque de rayon  $R$  contient  $m = R^2/2l_B^2$  orbitales électroniques dans LLL, la dégénérescence par unité de surface de LLL sera donc :

$$\frac{m}{\pi R^2} = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{h} = \frac{B}{\phi_0} \quad (2.57)$$

Où  $\phi_0 = h/e$  est le quantum de flux magnétique, cette relation indique qu'il y a une orbitale électronique pour chaque quantum de flux magnétique  $\phi_0$  traversant l'échantillon. On peut vérifier que la dégénérescence est la même pour tous les niveaux de Landau. Un raisonnement similaire pour la gauge de Landau dans un système rectangulaire donne un résultat pareil.

### 2.2.4. le facteur de remplissage

Pour un nombre d'électrons  $N_e$ , on définit un facteur de remplissage :

$$\nu = \frac{N_e}{N_B} = \frac{\rho \phi_0}{B} \quad (2.58)$$

Il représente le nombre des niveaux de Landau remplis par des électrons sans interactions.  $N_B = N_\phi$  étant le nombre de quantum de flux, donc d'états aussi pour chaque niveau de Landau, et  $\rho$  étant la densité surfacique d'électrons. On a vu que le champ magnétique  $B$  est proportionnel à l'existence des états, quand le champ magnétique augmente, la dégénérescence de chaque niveau de Landau augmente, donc le nombre des états dans chaque niveau de Landau augmente, ce qui pousse les électrons d'occuper des états vacants dans des plus bas niveaux de Landau, ce qui diminue le facteur de remplissage (2.58) [5,6].

# Chapitre 3

## *Les effets Hall quantiques*

### *1. l'Effet Hall quantique entier (EHQE)*

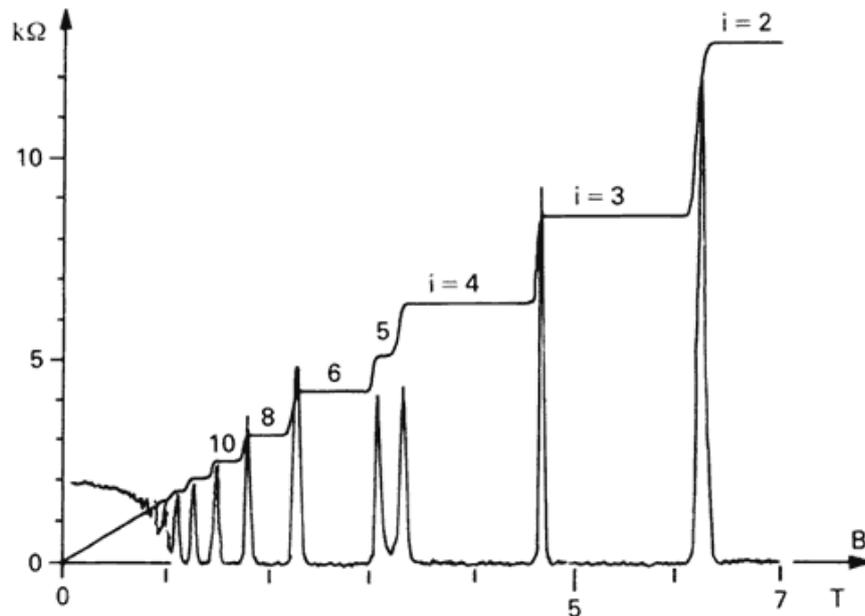
#### *1.1 Observations expérimentales*

La naissance de l'effet Hall quantique entier était en 1980, lorsque V. Klitzing découvrait par une expérience réalisée dans un gaz électronique bidimensionnel (2DEG) créé dans des MOSFET de silicium de grande mobilité, d'épaisseur de  $50\mu m$ , traversées par un champ magnétique très intense ( $\sim 15T$ ), et mené à une température très basse ( $\sim 1.5k$ ) [7], il a observé dans ces conditions que ce (2DEG) avait un comportement totalement différent de celui prédit par la physique classique. Ses mesures des résistances transversale  $R_H$ , et longitudinale  $R_L$  sont exposées dans la figure 3.1. Pour un champ magnétique faible  $\sim 0.1$  Tesla, la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique tandis que la résistivité longitudinale reste constante, et on retrouve l'effet Hall classique (les prédictions qu'on a vu dans la physique classique sont correctes). Pour des champs magnétiques forts  $\sim 1-2$  Tesla, la résistance longitudinale oscille selon des oscillations connues depuis 1930 sous le nom d'oscillations de Shubnikov-de Haas, mais cette fois-ci elles sont géantes. Pour des champs magnétiques plus intenses, la résistance de Hall s'arrête sur des paliers pour des intervalles finies du champ magnétique, sur lesquelles elle a une valeur bien précise donnée par :

$$R_H = \frac{h}{fe^2} \quad (3.1)$$

Où  $f$  est un entier positif non nul, ce paramètre  $f$  a une grande importance pour la compréhension de cet effet Hall quantique, sur ces mêmes intervalles du champ magnétique la résistance longitudinale s'annule selon une loi d'Arrhenius  $R_L \propto \exp(-\Delta/k_B T)$  quand la température tend vers zéro [8-6]. La présence de la constante de Planck dans la formule de  $R_H$  fait de cet EH un effet fondamentalement quantique. Pour un remplissage  $\nu$  compris entre  $f$  et  $f + 1$ , la résistance de Hall quitte son plateau, tandis que la résistance longitudinale présente des pics. La valeur de  $R_H$  est indépendante des paramètres de milieu tel que la masse effective d'électron, la constante diélectrique du semi-conducteur, aussi de la forme et de la quantité du désordre de l'échantillon. La valeur  $h/e^2$  est utilisée aujourd'hui comme étalon de résistance et s'appelle la constante de V. Klitzing, mesurée avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-9}$  [9-11], utilisée aujourd'hui pour déterminer la constante de la structure fine. Cet effet Hall

quantique peut suffisamment s'expliquer par la physique à un corps, sans nécessairement introduire l'interaction entre électrons. Deux éléments sont essentiels pour l'explication de l'apparition de ces plateaux, le premier est que le (2DEG) est gappé pour des valeurs entières de remplissage  $\nu$ , ce qui assure l'incompressibilité de ce liquide électronique, nous allons le voir dans l'argument de Laughlin qui sera enrichi ensuite par Halperin, et le second, est que le désordre due aux impuretés, localise tous états qui se forment au sein de volume de l'échantillon à remplissage compris entre  $f$  et  $f + 1$  [4-6].



**Figure 3.1** :résistivité longitudinale  $\rho_{xx} \propto R_L$ , et résistance de Hall  $R_H = \rho_{xy}$  en fonction du champ magnétique. Ces mesures ont été effectuées sur une hétéro- structure  $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$  à densité de porteurs fixe et à température de 8 mK.

On voit bien dans cette figure qu'il y'a une dépendance entre le facteur de remplissage et la largeur du plateau, et eux-mêmes dépendent d'intensité du champ magnétique.

## 1.2. Explication de l'EHQE

Plusieurs approche et argument ont été faites pour expliqué l'apparition des plateaux dans la résistance de Hall pour des valeurs entières du remplissage, et aussi la valeur qui prend la résistance de Hall dans ces plateaux[12-16], c'est Laughlin qui apporta d'abord le premier élément pour l'explication de cet effet en 1981, en utilisant l'invariance de gauge dans la géométrie cylindrique pour les échantillons à faible désordre et à remplissage proche d'un entier, une année plus tard, Halperin en 1982, développa ensuite le raisonnement de Laughlin où la géométrie est bordée, c'est le cas le plus réaliste, il a compris le rôle important que jouent ces bords dans cette mesure de résistance, il expliqua que les états étendus (délocalisés) sont ceux qui conduisent le courant le long des bords, tandis que les états localisés par le désordre dans le volume de

l'échantillon ne participent pas à la conduction. Puis Buttiker en 1988, a donné un argument complémentaire pour la compréhension de cet effet Hall quantique, c'est que l'absence de rétrodiffusion pour les échantillons à faible désordre, lors d'un transport de courant le long des bords, était à la source de cette apparition des plateaux. Pour les échantillons suffisamment désordonnés ou étroites, une rétrodiffusion d'un bord de l'autre, qui seront connectés par une ligne équipotentielle, peut apparaître en quittant donc la résistance de Hall de son palier et détruit l'annulation de la résistance longitudinale [4]. Il existe aussi d'autres arguments qu'on trouve dans la littérature, et je m'intéresse par ces deux arguments, de Buttiker, et de Laughlin-Halperin qui sera simplement extensible dans L'EHQF [8].

Je donnerai dans cette section les ingrédients essentiels pour l'explication et la compréhension de cet effet Hall quantique entier sans introduire profondément dans les amples détails qu'on trouve avec plein détail dans les livres. Le point essentiel qui mérite d'être expliqué dans cet effet n'est pas seulement la valeur qui prend la résistance de Hall, et qui est égale à la valeur obtenue par l'expérience. Mais le point essentiel est que cette valeur soit constante dans des intervalles finis du champ magnétique, donc l'apparition des plateaux, et aussi la proportionnalité entre la largeur des plateaux et l'intensité du champ magnétique.

### 1.3. Absence d'effet Hall pour un système invariant sous les transformations de Galilée

Un traitement quantique de la dynamique d'un électron dans un champ magnétique et électrique, perpendiculaire, et uniforme, pour un système invariant sous les transformations de Galilée, donne exactement un tenseur de conductivité obtenu dans le traitement classique. D'où l'hamiltonien de cet électron s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{P} + e\vec{A}(\vec{r}))^2 - eV(\vec{r}) \quad (3.2)$$

Avec  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ , et  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , dans le traitement classique d'un mouvement d'électron dans un champ magnétique et électrique, on a vu que l'électron subit une vitesse de dérive constante  $\vec{v}_d = (\vec{E} \wedge \vec{B})/B^2$ , lors de cette transformation de Galilée en change le référentiel d'où la vitesse moyenne de l'électron sera nulle. Le référentiel qui permet ça est donc de centre de guidage de l'électron  $R'$ . La fonction d'onde et les potentiels dans ce nouvel référentiel subissent les transformations suivantes [17] :

$$\begin{cases} \varphi'(\vec{r}', t') = \exp \left[ im\vec{v} \left( \frac{1}{2} \vec{v}t - \vec{r} \right) \right] \varphi(\vec{r}, t) \\ V'(\vec{r}', t') = V(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \vec{A}'(\vec{r}', t') = \vec{A}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec  $\vec{v} = \vec{v}_d$ , D'où les coordonnées dans ce nouvel référentiel  $R'$  seront transformées par  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ , et  $t' = t$ . Avec  $V(\vec{r}, t) = -Ex$ , et  $\vec{A}(\vec{r}, t) = Bx\vec{u}_y$ , dans

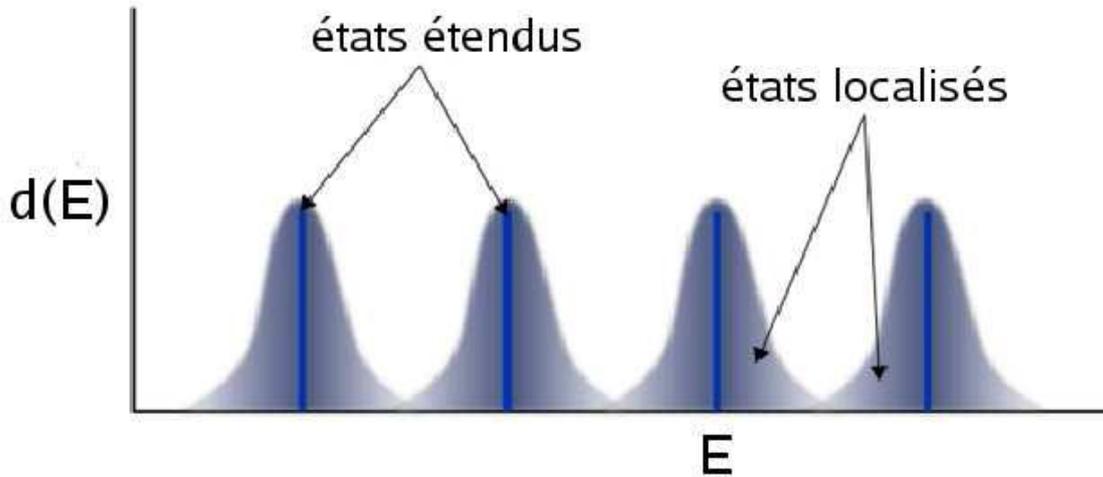
la gauge de Landau. Il faut une transformation supplémentaire de gauge pour annuler le potentiel électrique dans  $R'$ , d'où  $V'(\vec{r}', t') = 0$ . Le courant dans le référentiel Rest  $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}'(\vec{r}') - en\vec{v}$ , avec  $n$  la densité des porteurs [6].

En  $R'$ , il n'y aura pas de champ électrique grâce à l'annulation du potentiel électrique, et il n'y aura donc pas de courant  $\vec{j}'(\vec{r}') = 0$ . D'où  $\langle \varphi | \vec{j}(\vec{r}) | \varphi \rangle = -en\vec{v}$ . Dans les deux traitements, classique et quantique, le courant et la tension de Hall seront nuls dans le référentiel du centre de guidage, ce qui montre le rôle essentiel que joue le désordre créé par les impuretés de l'échantillon dues au dopage des semi conducteurs. L'effet Hall quantique ne peut pas être expliqué par un traitement quantique de ce problème pour un système invariant sous les transformations de Galilée. Donc il y a une absence d'effet Hall dans un système invariant sous les transformations de Galilée. Alors pour une compréhension de l'effet Hall quantique, il est nécessaire de prendre en compte l'effet du désordre généré par les impuretés dans l'échantillon [6-18].

### 1.4. Rôle du désordre

On a vu dans la section précédente que les impuretés dans l'échantillon jouent un rôle important et essentiel pour la compréhension de cet effet Hall quantique. Dans le cas classique vu par le modèle de Drude, le rôle de ces impuretés est introduit par le terme de frottement, qui ne suppose pas l'existence d'états localisés (stationnaires) autour de ces impuretés. Dans le cas classique le champ magnétique n'est pas très intense pour lier ou localiser les orbites cyclotron autour des impuretés, et la température aussi élevée permis aux électrons de toutes façons de quitter ces états liés aux impuretés. Par contre dans le cas quantique ces états localisés (liés) par le désordre autour des impuretés jouent un rôle essentiel. Ces derniers induisent un potentiel aléatoire  $U(\vec{r})$  de désordre à l'intérieur de l'échantillon, erratique aux électrons, dont il varie sur une distance plus grande que celle de la longueur magnétique (ses variations spatiales sont lentes), il doit être inclus dans la modélisation du système. La présence de désordre est proportionnelle à l'existence d'états localisés au sein d'un niveau de Landau, donc ce potentiel de désordre va modifier le spectre énergétique des niveaux de Landau. Ce spectre en présence de désordre est exposé dans la figure 3.2. En absence de désordre la densité d'état est nulle sauf pour des énergies  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ . Ce désordre localise des états entre deux niveaux de Landau successifs, donc il a un effet d'élargir le gap de mobilité qui est l'élément essentiel de la conduction (sans un gap de mobilité il n'y aura pas de transport électronique).

Les états qui sont en milieu des bandes leur énergie est proche de  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ , ils sont qualifiés d'états délocalisés (étendues). Les états qui sont en queue des bandes leur énergie est loin de  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ , et sont qualifiés d'états localisés, ces états ne contribuent pas au transport électronique grâce à l'absence du gap énergétique de mobilité. Par contre les états qui contribuent au transport électronique sont les états délocalisés au centre d'un niveau de Landau, séparés par un gap énergétique de mobilité. Donc le désordre a pour effet de séparer les états délocalisés par des états localisés dans la densité d'état [6].



**Figure 3.2** : la densité d'états en fonction de l'énergie en présence de désordre.

Le potentiel de désordre puisse se modélisé par  $U(\vec{r})$  dont ses variations spatiales sont lentes comme on a vu de début de paragraphe, où  $\vec{r}$  est la position du centre de l'orbite cyclotron. L'énergie d'état localisé par le désordre est :

$$E = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) - eV(\vec{r}) + U(\vec{r}) \quad (3.4)$$

Cette équation impose au centre de l'orbite cyclotron pour une valeur donnée de l'énergie de se meuve dans des lignes équipotentiels tel que  $U(\vec{r}) - eV(\vec{r})$  soit constant. Donc il y aura des orbites cyclotrons piégées le long de ces lignes dont leurs vitesses de dérive soient nulles, les états associés à ces orbites sont les états localisés et ne conduisent pas le courant, quand le potentiel de désordre est nul, tous les états sont délocalisés. Comment alors s'expliquer l'écoulement du courant à la direction  $y$ , cette question nous exige à voir le rôle essentiel des états de bord puisque les états de volumes ne conduisent pas le courant [18].

### 1.5. États de bord

Les bords en mécanique quantique ont un rôle important, sont ceux qui confinent les électrons à l'intérieur de l'échantillon par un potentiel de confinement infini, ce potentiel croit rapidement au voisinage des bords. Notant ce potentiel par  $V(x)$  qui peut être modélisé par :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & 0 < x < L_x \\ V(x) = \infty & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5)$$

On suppose qu'aucun désordre n'est présent et que le potentiel de confinement est homogène dans la direction  $y$ , l'hamiltonien de ce système qui a

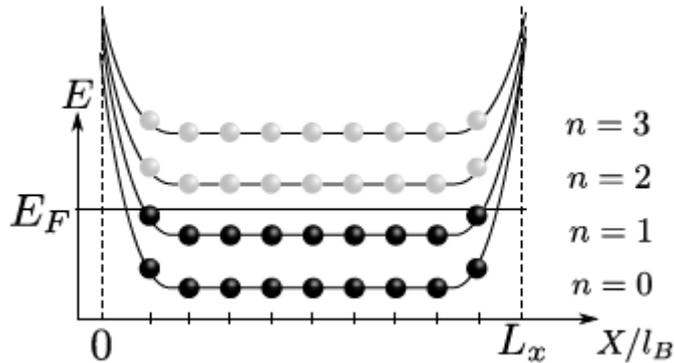
une géométrie rectangulaire de dimensions  $L_x$  et  $L_y$ , ce système vaut mieux être traité par la gauge de Landau  $\vec{A} = Bx\vec{u}_y$ , d'où l'hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (P_x^2 + (P_y + eBx)^2) + V(x) \\ &= \frac{1}{2m} (P_x^2 + (eB)^2(x - X)^2) + V(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Avec  $X = \hbar k_y / eB = k_y l_B^2$  est le centre de l'orbite cyclotron. Les fonctions d'onde solution de cette équation se décompose, grâce à l'invariance par translation selon  $y$ , en  $\varphi(x, y) = \phi(x) e^{ik_y y}$ , le terme en exponentiel c'est une onde plane selon  $y$ , dont  $k_y$  est son vecteur d'onde. Ce hamiltonien semble bien d'un hamiltonien d'oscillateur harmonique 1D dans un potentiel  $V(x)$ . Avec  $\phi(x)$  solution de :

$$H\phi(x) = E_n(x)\phi(x) \quad (3.7)$$

Loin des bords  $V(x) = 0$ , dont les niveaux de Landau ne dépend pas de la position de l'orbite,  $X$ , et leurs énergies sont  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ . Ces énergies se modifient près des bords grâce au potentiel de confinement, et les niveaux de Landau seront dépendants de la position  $X$  (voir figure 3.3).



**Figure 3.3** : l'évolution des niveaux de Landau dans le potentiel de confinement, en l'absence de désordre, dans cette figure le remplissage égale à 4.

Près des bords, l'énergie des niveaux de Landau dépend de la position  $X$  de l'orbite cyclotron comme indique la figure 3.3, et donc aussi dépend de  $k_y$  par l'intermédiaire de  $X$ , et sera donc dans le cas d'un potentiel lentement variable :

$$E_{n,k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + V(X) \quad (3.8)$$

## 1.6. Théorie de Buttiker

Buttiker a fait un calcul qui mène finalement à l'équation de la résistance de Hall. Calculons d'abord la vitesse moyenne de l'électron dans l'orbitale  $\phi$ .

On voit que l'hamiltonien (3.6) ne dépend pas de  $y$ , d'où l'opérateur vitesse suivant  $y$  est :

$$\hat{v}_y = \frac{i}{\hbar} [H, y] = (P_y + eBx)/m \quad (3.9)$$

D'où la vitesse moyenne est :

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_y \rangle &= \langle \phi | \hat{v}_y | \phi \rangle \\ &= \langle \phi | \frac{eB}{m} (x - X) | \phi \rangle \\ &= \langle \phi | \frac{-1}{eB} \frac{\partial H}{\partial X} | \phi \rangle \\ &= \frac{-1}{eB} \frac{\partial E_n(X)}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Et

$$\hat{v}_x = \frac{i}{\hbar} [H, x] = P_x/m \Leftrightarrow \langle \hat{v}_x \rangle = \langle \phi | \hat{v}_x | \phi \rangle \propto \langle \phi | [H, x] | \phi \rangle = 0 \quad (3.11)$$

Dans le cas où le potentiel  $V(X)$  varie lentement, c.-à-d. varie sur une distance plus grande que celle de la longueur magnétique, dans les échantillons réelles cette proposition est valide [43], on peut trouver que  $E'_n(X) = V'(X)$  en développant l'énergie au premier ordre en  $V(x)$ , et on a le champ électrique  $E = \nabla V/e$ , donc on a abouti à un résultat classique tel que la vitesse moyenne  $\langle \hat{v}_y \rangle$  est égale à la vitesse de dérive  $v_d = (E \wedge B) / B^2$ .

Et les éléments associés de la tenseur conductivité sont  $\sigma_{xx} = 0$  et  $\sigma_{xy} = e\rho/B$ .

Cette fois si on suppose que le niveau de Fermi est situé entre deux niveaux de Landau successifs avec un remplissage entier de ces  $N$  niveaux de Landau comme dans la figure 3.3 ( $N = \nu = 4$ ). Pour un niveau de Landau complètement rempli, la vitesse moyenne de (GE2D) sera donc  $v_y = \sum_{k_y} \langle \hat{v}_y \rangle$ . Donc :

$$\begin{aligned} v_y &= \int_0^{L_x/l_B^2} \underbrace{\langle n, k_y | \partial_{P_y} H | n, k_y \rangle}_{= \frac{1}{\hbar} \partial_{k_y} E_{n, k_y}} \frac{dk_y}{2\pi/L_y} \\ &= \frac{L_y}{\hbar} [E(X = L_x) - E(0)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

On va calculer le courant suivant la direction  $y$  avec une faible différence de potentiel  $V_H$  entre les bords droite et gauche, et avec ( $0 < X = k_y l_B^2 < L_x$ ). D'où  $L_x$  est la largeur de l'échantillon comme indique la figure 3.3. Donc :

$$\begin{aligned} I_y &= \int j_y dx \\ &= -\frac{e}{L} \sum_{i=1}^{N_e} v_{iy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{LB} \sum_n \sum_{X=Xl_n}^{Xr_n} \frac{\partial E_n}{\partial X} \\
\Rightarrow I_y &= -\frac{e}{h} N(E(X=L_X) - E(0)) = \frac{-eNv_y}{L_y} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Où  $E(X=L_X)$  et  $E(0)$  sont les potentiels chimiques des bords gauche et droite, avec  $\Delta\mu = -eV_H$  est la différence du potentiel chimique, cette équation montre que la différence d'énergie des bords est proportionnel à la tension de Hall, en remplaçant dans l'équation (3.13), on trouve bien la résistance de Hall.

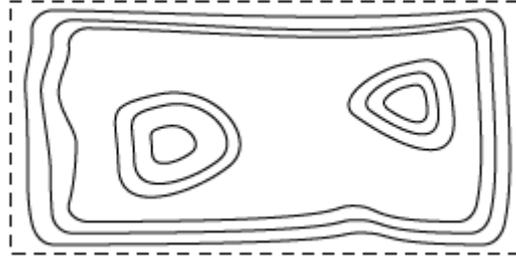
$$R_H = \frac{h}{e^2 N} \quad (3.14)$$

Cette équation indique la contribution de  $N$  NLs remplis au transport électronique, qui sera inversement additif pour la conductance  $G = R^{-1}$ . Des différentes approches et arguments ont été intéressées de retrouver cette valeur de la résistance de Hall. L'équation (3.13) indique que les états de bords sont ceux qui contribuent au transport électronique. L'annulation de la résistance longitudinale peut être expliquée par l'absence de rétrodiffusion entre les bords, donc une transmission parfaite [18].

On a bien compris dans cette section le rôle essentiel que joue le désordre induit par les impuretés qui sont à l'origine du dopage de semi conducteur, tel que les MOSFET de silicium, et que ce désordre localise des états au sein de volume de l'échantillon, ces états ne contribuent donc pas au transport électronique et sont piégés dans des lignes équipotentiels (voir figure 3.4), dont leur vitesse est nulle. Par contre les états de bord sont ceux qui contribuent au transport électronique, ils permettent aux électrons de le traverser par la vitesse :

$$v_y = \partial_{p_y} E_{n,k_y} = \partial_x V(x)|_{x=L_x} \quad (3.15)$$

Lorsque les bords seront connectés, par le désordre, par des lignes équipotentiels, Une rétrodiffusion sera possible d'un bord à l'autre, levant donc l'annulation de la résistance longitudinale. La différence d'énergie entre ces bords est proportionnelle à la tension de Hall. Une question nous ramène à un autre paragraphe c'est ; comment peut-on expliquer l'apparition des paliers dans la résistance de Hall pour des intervalles finies du champ magnétique, section (1.8) [4].



**Figure 3.4** : des lignes équipotentielles localisées au sein de volume autour des impuretés, comme des îles. Et des lignes équipotentielles délocalisées au voisinage des bords pour un échantillon rectangulaire.

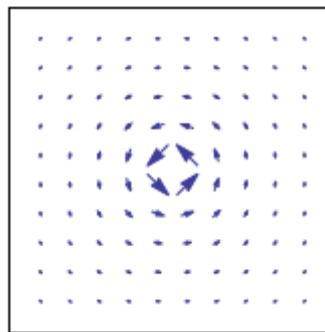
### 1.7. Argument de Laughlin /Halperin

Cet argument est développé à la base d'insertion d'un quantum de flux magnétique au liquide électronique, assurant finalement l'incompressibilité de ce liquide électronique, ce qui explique finalement l'apparition de cet EHQE. Cet Argument sera facilement extensible, et être utilisé pour l'explication de l'EHQF aussi. Cet argument a été complété par Halperin en 1982. L'incrémentation du champ magnétique suivant  $z$ , autour d'une valeur entière du remplissage des NLs, et qui correspond à une variation ou transformation de gauge  $\nabla\chi$ , implique l'insertion infinitésimale d'un flux  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \phi_0$ ), au liquide électronique. Pour une insertion d'un quantum de flux magnétique  $\phi_0$  localisé à l'origine, cette augmentation du flux magnétique génère un potentiel vecteur (voir figure 3.5) :

$$A_{\phi_0} = \frac{\phi_0}{2\pi} \nabla\theta = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{r} e_{\theta} \quad (3.16)$$

L'incrémentation du champ magnétique  $B$ , qui correspond à l'augmentation du flux magnétique du système d'un quantum de flux, sera alors suivant  $z$ , et son module sera donc :

$$B_{\phi_0} = \|\nabla \wedge A_{\phi_0}\| = \frac{\phi_0}{2\pi r} \partial_r(rA_{\phi_0}) = \phi_0 \delta(r) \quad (3.17)$$



**Figure 3.5** : le potentiel vecteur qui sera décrit par l'insertion du quantum de flux magnétique à l'origine.

Cet ajout d'un quantum de flux au système, permis de translater le moment cinétique de chaque orbite de Landau vers l'orbite suivant, c'est ce qu'a fait montré Laughlin en 1981. A condition que ce processus soit adiabatique, c.-à-d, cette insertion du quantum de flux ne modifie pas le spectre énergétique du système par effet de perturbation, alors par un gap, i.e. cette condition sera assurée par l'incompressibilité du liquide électronique. La transformation de gauge décrite par ce potentiel vecteur sera alors  $\nabla\chi = A_{\phi_0}$ , d'où la solution sera donnée par  $\chi(r) = \phi_0\theta/2\pi$ . L'incompressibilité sera définie par la variation relative de la surface du GE2D, accours de la variation infinitésimale de la pression :

$$\kappa = -\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial P} \quad (3.18)$$

La pression sera définie aussi comme :

$$P = -\frac{\partial E}{\partial S} \quad (3.19)$$

Avec  $E$  désigne l'énergie du système. Par l'introduction du potentiel chimique,  $\Delta\mu = \partial_N E$ , où  $N$  est le nombre total d'électrons, et aussi la densité surfacique d'électrons  $n = N/S$ , en combinant les équations (3.18 et 19), on obtient :

$$\kappa^{-1} = n^2 \frac{\partial \mu}{\partial n} \quad (3.20)$$

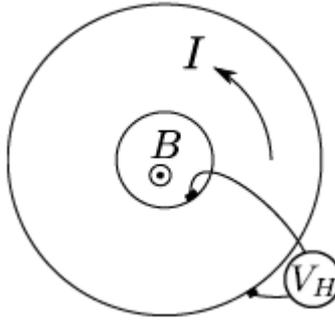
L'équation (3.20) assure l'incompressibilité du liquide électronique quand,  $\kappa^{-1} \rightarrow \infty$ , ce qui implique que le potentiel chimique est discontinue en fonction de la densité. Ca est traduit que le fait d'ajouter ou retirer une particule dans un NL, coute des énergies différentes. Autrement-dits, la création d'une paire particule-trou coute une énergie, dans le cas de l'EHQE, cette énergie est  $\hbar\omega_c$ . Ce qui assure aussi l'incompressibilité du liquide, c'est le spectre discontinu de l'hamiltonien qui présente des excitations gapés. La présence des excitations non-gapés peut se retrouver dans un liquide incompressible, à condition que ces excitations soient localisées autour d'une impureté ou dans les bords. Les états propres de LLL, seront transformés sous l'insertion d'un quantum de flux, à condition que celle-ci soit adiabatique comme :

$$\begin{aligned} \psi_{n,m} &= z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \rightarrow \psi'_{n,m} = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(r)} \psi_{n,m} \\ &= e^{i\frac{\phi}{\phi_0}\theta} \psi_{n,m} \propto \frac{z^{m+\frac{\phi}{\phi_0}}}{|z|^{\frac{\phi}{\phi_0}}} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avec  $L_z = -i\hbar\partial_\theta$  est le moment cinétique en coordonnées polaires. L'équation (3.21) indique que lorsque on ajoute au liquide un quantum ( $\phi = \phi_0$ ) à l'origine, le moment cinétique de chaque orbitale transformée  $\psi'_{n,m}$  augmente d'une unité, ( $m \rightarrow m + 1$ ), ce qui implique finalement une translation d'un pas de chaque

orbitale à l'orbitale suivante. Il est essentiel de comprendre que l'insertion d'un quantum de flux génère chaque électron de peupler l'orbitale suivante dans chaque NL, donc finalement de tirer  $\nu$  électrons de l'échantillon, ce qui permis de créer  $\nu$  trous à l'origine de l'échantillon. Cette phrase a une grande importance dans l'EHQF notamment [18]. Prenons le cas d'un échantillon qui aura la forme d'un anneau, et suivant la démarche qu'a fait Halperin une année après. Le courant dans cette géométrie écoule selon  $e_\theta$ , comme indique la figure 3.6, et sera donné par :

$$I = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \langle j_\theta \rangle dr = -e \int_{R_{int}}^{R_{ext}} n(r) \langle v_\theta \rangle dr \quad (3.22)$$



**Figure 3.6** : géométrie de Corbino.

D'où l'opérateur vitesse selon  $e_\theta$ , sera calculée par :

$$\hat{v} = \frac{[r, H]}{i\hbar} = \frac{1}{e} \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{2\pi r}{\pi e} \frac{\partial H}{\partial \phi} e_\theta \quad (3.23)$$

Finalement, en remplaçant dans l'équation (3.22), on trouve :

$$I = - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \phi} \right\rangle \underbrace{\int_{R_{int}}^{R_{ext}} n(r) 2\pi r dr}_{=1} = - \frac{\partial E}{\partial \phi} \quad (3.24)$$

Avec  $\langle H \rangle = E$ . La deuxième égalité qui dit que la valeur de la dérivée de l'énergie est égale à la valeur moyenne de la dérivée de l'hamiltonien, vient du théorème de Hellman-Feynman. Grace à la variation infinitésimale du flux magnétique totale, par l'insertion d'un quantum de flux, on peut l'associer une variation  $\Delta E$  de l'énergie du système, donc l'équation (3.24) peut s'écrire :

$$I = - \frac{\partial E}{\partial \phi} \approx - \frac{\Delta E}{\phi_0} \quad (3.25)$$

Les deux bords se différencient par une différence de potentiel  $V_H$ . Pour un NL donné, l'insertion d'un quantum de flux correspond à une différence d'énergie,

$\Delta E = -eV_H$ , qui permis d'insérer un électron au système par le bord intérieur et retirer un autre électron du bord extérieur, cette opération coute une énergie  $\Delta E$ . Pour des  $N$  NLs entièrement occupés, l'ajout d'un quantum de flux au système permis une variation d'énergie  $\Delta E = -eNV_H$ . D'où l'équation (3.25) conduit à l'expression attendue de la résistance de Hall :

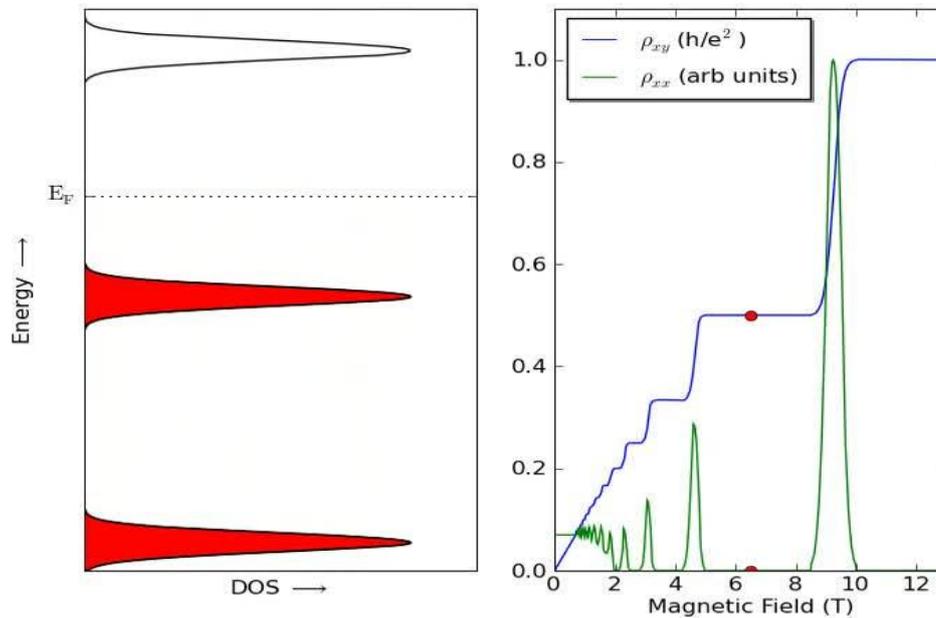
$$I = N \frac{e^2}{h} V_H \Rightarrow R_H = \frac{h}{Ne^2} \quad (3.26)$$

Cet argument a besoin d'introduction du désordre pour le compléter, par ce que l'explication d'apparition des plateaux n'a pu faite que par introduction du désordre, auquel cas les électrons ressentirent un potentiel extérieur créé par le potentiel de confinement et de désordre et d'autre dans l'échantillon. Ce qui le rend aléatoire pour les électrons, c'est le désordre [4-6-18]. Comme on a dit précédemment, ce potentiel supprime l'énergie cinétique de chaque NL, d'où les états propres suivent des lignes équipotentielles, come indique la figure3.4. Ca nous exige de rédiger un autre paragraphe sur l'origine de ces plateaux de la résistance de Hall.

### **1.8. Origine des plateaux**

L'apparition des plateaux dans la résistance de Hall ne peut être comprise que par l'introduction du potentiel de désordre, dont l'énergie cinétique des NL sera supprimée. Les niveaux de Landau comme indique la figure3.3 en présence du désordre deviennent comme des bandes étalées en énergie, contiennent les états délocalisés (étendus) en leurs centres et les états localisés en leurs queues.

Les bandes d'états délocalisés sont alors séparées par un gap de mobilité donc ils contribuent à la conduction, sont donc les états des bords. Lorsque le désordre n'est pas trop intense les états propres des bords sont bien séparés les uns des autres (aucune connexion par une ligne équipotentielle entre eux n'est possible), cela dit qu'une transmission parfaite (aucun rétrodiffusion n'est possible des électrons entre les bords) des électrons par les états de bords en une direction unique, donnée par la vitesse de dérive, ce qui implique une résistance longitudinale nulle voir figure3.7.



**Figure 3.7 :** profil montrant la dépendance entre la variation continue de niveau de Fermi dans la densité d'états avec la série des plateaux que suivent la résistance de Hall.

On voit clairement de cette figure, que lorsque le niveau de Fermi est compris entre deux bandes d'états délocalisés, les états les plus proches en énergie de celle de niveau de Fermi sont les états localisés en volume, donc les états de bords restent bien séparés les uns des autres, et aucune rétrodiffusion n'est possible entre eux, la résistance longitudinale donc sera nulle, et la résistance de Hall reste constante. Lorsque le niveau de Fermi atteint la bande d'états délocalisés, une connexion par des lignes équipotentielles entre les bords, permet de rétrodiffuser les électrons d'un bord à l'autre, qui lève ensuite l'annulation de la résistance longitudinale, ce qui pousse la résistance de Hall de quitter son plateau.

L'annulation de la résistance longitudinale peut-être ainsi comprise grâce à l'argument de Landauer, qui relie proportionnellement la densité d'états délocalisés au niveau de Fermi et la résistance dissipative (longitudinale). En ajoutant un point essentiel, c'est que le champ magnétique est proportionnel à la densité d'états dans chaque NL, ce qui explique la diminution du remplissage en augmentant le champ magnétique [6].

## 2. L'effet Hall quantique fractionnaire (L'EHQF)

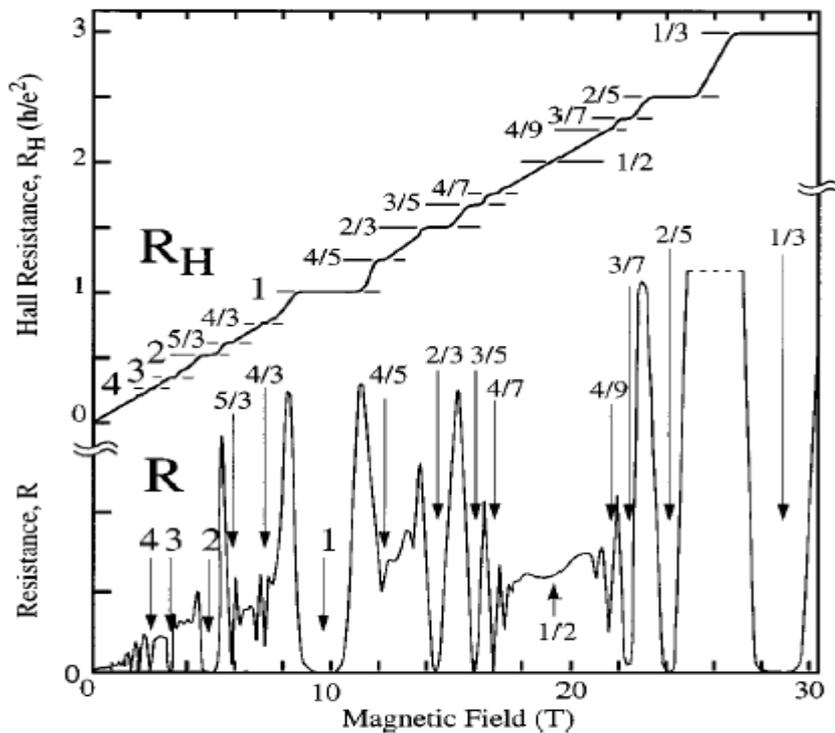
### 2.1. Observations expérimentales

En 1982, deux ans après la découverte historique de V.Klitzing, D.C.Tsui, H.L.Stormer et A.C.Gossard ont découvert un autre plateau de la résistance de

Hall correspond à la valeur  $R_H = 3h/e^2$ , qui coïncide avec une annulation dramatique de la résistance longitudinale, cette valeur correspond à un facteur de remplissage rationnel égale à  $\nu = 1/3$ . Cette observation est due à une expérience faite sur un gaz bidimensionnel de couche très mince ( $\sim 5\mu\text{m}$ ) réalisé sur une hétérojonction de type  $(Al_xGa_{1-x}As)$ , de très grande mobilité par rapport à les MOSFET de silicium, en baissant encore plus la température et en augmentant l'intensité du champ magnétique jusqu'à ( $\sim 30$  Tesla). Ces conditions expérimentales ont permis aux expérimentateurs de mesurer des conductivités plus précises.

Après, Cet effet a été pris le nom de l'effet Hall quantique fractionnaire [19]. En améliorant encore plus ces conditions, Ils ont découvert après d'autres plateaux de la résistance de Hall, qui correspondent à d'autres facteurs de remplissage tel que  $\nu = p/(2sp \pm 1)$ , avec  $p$  et  $s$  sont des entiers positifs, tous ces valeurs de ce remplissage sont inférieures à 1. Correspondant donc à un remplissage partiel du plus bas niveau de Landau. Aujourd'hui, on compte plus de cinquante fractions du facteur de remplissage, tous avec une valeur impaire du dénominateur est sont tous inférieurs à 1. Les observations expérimentales sont exposées dans la figure 7.

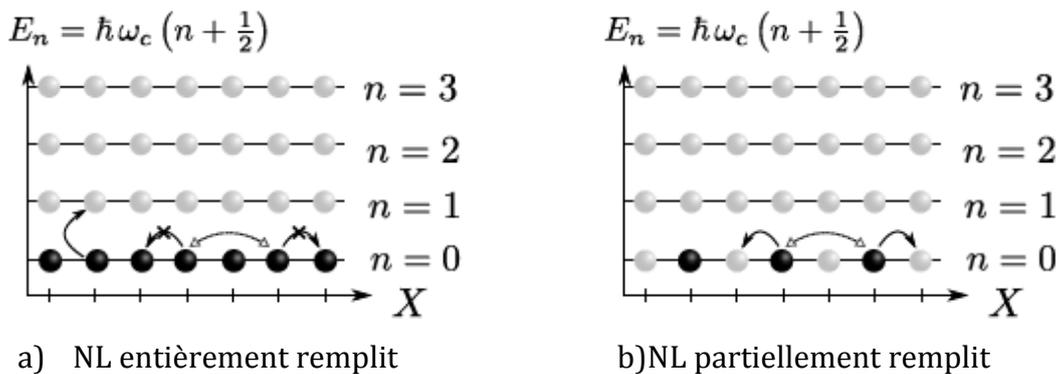
On voit clairement dans cette figure que la résistance de Hall a des nouvelles valeurs correspondent à des remplissages fractionnels avec une coïncidence d'une annulation de la résistance dissipative. Ces observations ne sont obtenues qu'à l'amélioration des conditions expérimentales telles que la baisse de la température et l'augmentation du champ magnétique et aussi la réalisation d'un GE2D de très grande mobilité.



**Figure 3.8 :** résistances longitudinale et de Hall en fonctions du champ magnétique avec une densité de porteurs fixe [20].

## 2.2. Rôle des interactions

Contrairement à l'effet Hall quantique entier, l'explication de l'effet Hall fractionnaire nécessite la prise en compte des interactions de Coulomb entre les électrons qui rend le problème plus compliqué que celle de l'EHQE, c'est donc un problème à N-corps. La grande dégénérescence dans l'EHQF de l'état fondamental ne permet pas de traiter perturbativement l'interaction. Dans la phase entière d'effet Hall quantique, les niveaux de Landau sont entièrement remplis, les électrons qui sont des fermions soumissent au principe de Pauli, ne peuvent pas être diffusés par les interactions dans un état électronique à l'intérieur du même niveau de Landau, car tous les états propres d'un NL sont occupés, et l'excitation à basse énergie n'obtient qu'à l'électron passe d'un niveau de Landau à un autre niveau d'énergie cinétique supérieure. Donc la seule échelle d'énergie nécessaire omise est celle de l'énergie cinétique. Par contre, pour le cas d'un niveau de Landau partiellement rempli, la diffusion des électrons par les interactions dans un même Niveau de Landau est possible, et les états excités ont donc une même énergie cinétique, dont il ne dépend pas de la structure de bande électronique, on peut prendre donc l'énergie cinétique globale du système comme constante, d'où le mouvement du centre de masse d'électrons ne change pas et sa vitesse reste la vitesse de dérive qu'on a vue précédemment, ce qui rend le rôle essentiel du aux interactions et non pas à l'énergie cinétique qui sera disparaître par la projection dans un seul NL, pour voir cela on présente la figure 6.



**Figure 3.9** : dans (a) le processus de diffusion des électrons par les interactions dans un même NL est impossible. Dans (b) le processus de diffusion des électrons par les interactions dans un même NL est possible et l'échelle d'énergie est celle d'énergie d'interaction.

Pour les remplissages  $\nu = 1/q$  avec ( $\nu < 1$ ), les électrons n'occupent que partiellement le plus bas niveau de Landau, ce remplissage indique qu'un

électron occupe  $q$  états électroniques, d'où  $\nu$  est sa densité. Les états occupés sont ceux de volume (loin des bords) de dégénérescence totale. L'échelle en énergie qui peu lève cette dégénérescence est celle de l'énergie d'interaction, d'où le fondamental et l'excitation seront dans le même NL, on peut donc expliquer l'apparition de ces plateaux aux remplissages partiels en tenant compte de l'interaction de Coulomb qui ne change pas l'expression (3.26). La tâche qui nous attende est de déterminer l'état fondamental et les excitations au niveau de Landau donné pour un système d'électrons en présence d'interactions. L'explication de ces plateaux est faite pour la première fois par Laughlin en 1983, qui fait un argument basé sur l'insertion infinitésimal d'un quantum de flux de façon adiabatique pour un système incompressible pour expliquer les excitations. Laughlin a approché l'état fondamental par une fonction d'onde d'essai (ansatz) à  $N$  corps en l'utilisant dans la méthode variationnelle, puis il l'a ajouté des termes correspondants aux excitations élémentaires du liquide [21].

### 2.3. Fonction d'onde de Laughlin

Un gaz bidimensionnel d'électrons fortement corrélé et soumis à un champ magnétique très intense est décrit par l'hamiltonien :

$$H = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla}_j - q_e \vec{A}_j)^2 + V(z_j) \right\} + \sum_{j>k} \frac{e^2}{\epsilon |z_j - z_k|} \quad (3.27)$$

Avec  $\epsilon$  est la constante diélectrique. Le dernier terme présente l'interaction de Coulomb entre électrons,  $V(z_j)$  est un potentiel extérieur de neutralisation que subit chaque électron. Par utilisation de la méthode variationnelle, Laughlin a proposé une fonction d'onde d'essai (ansatz)  $\psi_m$  paramétrisée de  $m$ , pour obtenir l'état fondamental du système, puis il a minimisé la valeur moyenne de l'hamiltonien dans cet état :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \psi} \right|_{\psi=\psi_m} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = 0 \quad (3.28)$$

L'énergie moyenne associée à cet état sera supérieure ou égale à l'énergie fondamentale ( $E_m \geq E_0$ ). Pour obtenir le minimum possible des énergies associées à cet état, on fait varier le paramètre ajustable  $m$ . L'énergie minimale obtenue est approximativement celle de l'état fondamentale et la fonction d'onde aussi. Pour faire cette approche, Laughlin a proposé une excellente fonction d'onde approximant l'état fondamental de l'hamiltonien au remplissage  $\nu = 1/q$ , le succès de cette fonction d'onde fut amplement vérifié par diverses approches [3-18].

### 2.4. Caractéristiques et expressions

On se limite dans cette section dans les pas essentiels qu'avait faits Laughlin pour décrire sa fonction d'onde. Commençons d'abord par le cas simple de deux particules.

### 2.4.1. Cas de deux électrons

Les fonctions d'onde dans le plus bas niveau de Landau dans la gauge symétrique, en transformant les coordonnées selon le référentiel relatif  $z = z_1 - z_2$ , et du centre de masse  $Z = (z_1 + z_2)/2$  s'écrivent :

$$\psi_{0,m,M}(z, Z) = \mathcal{N}_{m,M} Z^M z^m \exp\left(-\frac{|z_1|^2}{4l_B^2} - \frac{|z_2|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.29)$$

Avec  $\mathcal{N}_{m,M}$  est un facteur de normalisation :

$$\mathcal{N}_{m,M} = \sqrt{\frac{1}{2\pi 2^m m! (\sqrt{2}l_B)^2}} \times \sqrt{\frac{1}{2\pi 2^M M! (l_B/\sqrt{2})^2}} \quad (3.30)$$

Les coordonnées se transforment selon le référentiel relatif et de centre de masse par :

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow \sqrt{2}Z \\ z_2 \rightarrow z/\sqrt{2} \end{cases} \quad (3.31)$$

D'où  $m$  et  $M$  sont respectivement le moment cinétique relatif et le moment cinétique du centre de masse et sont entiers. L'interaction coulombienne est invariante par translation et ne dépend que de la distance relative entre les deux électrons, elle est donc indépendante de la position du centre de masse, et ne change pas le moment cinétique relatif de la paire, on peut donc se limiter à des fonctions d'onde comme :

$$\psi_{0,m}(z_1, z_2) = a_m z^m \exp\left(-\frac{|z_2|^2}{4l_B^2} - \frac{|z_1|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.32)$$

Puisque les électrons sont des fermions, la fonction d'onde sera antisymétrique par l'échange des deux électrons 1 et 2, ce qui va restreindre les valeurs de  $m$  aux entiers impaires  $m = 2s + 1$ . La fonction d'onde qui décrit ce système dans le cas général est une superposition des fonctions d'onde :

$$\psi_{0,m}(z_1, z_2) \propto z^{2s+1} \exp\left(-\frac{|z_1|^2}{4l_B^2} - \frac{|z_2|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.33)$$

Ces états ont l'énergie  $\hbar\omega_c + V_m$ . Avec  $V_m$  est la valeur propre de l'interaction  $V(r)$  associée à l'état propre  $|0, m, M\rangle$  dans LLL. Donc elle s'écrit comme :

$$\langle 0, m, M | V | 0, m', M' \rangle = \delta_{m,m'} \delta_{M,M'} \langle m | V | m \rangle \quad (3.34)$$

En utilisant l'opérateur projection :

$$\begin{aligned}
V(r) &= \sum_{M,m} \sum_{M',m'} |m, M\rangle \underbrace{\langle m, M|V(r)|m', M'\rangle}_{=\delta_{m,m'}\delta_{M,M'}\langle m|V|m\rangle} \langle m', M'| \\
&= \sum_{m,M} |m, M\rangle \langle m|V(r)|m\rangle \langle m, M| \\
&= \sum_{m,M} V_m^{(0)} P_{m,M}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

D'où  $P_{m,M} = |m, M\rangle \langle m, M|$  est le projecteur sur l'état  $|m, M\rangle$ .  $V_m^{(0)}$  sont les coefficients qui donnent l'énergie d'interaction d'une paire d'électrons de moment cinétique relatif  $m$  dans LLL, sont appelées pseudo-potentiels de Haldane [22]. On remarque d'après l'équation (3.35) que l'énergie d'interaction est  $M$  fois dégénérés, c.-à-d.  $N_B - m$  fois, car la somme des moments cinétique  $m + M$  est limité par le moment cinétique maximale  $N_B$ . Par contre l'énergie cinétique est  $\binom{N_B}{2}$  fois dégénéré. L'interaction de coulomb lève partiellement la dégénérescence de NLs. L'hamiltonien à deux corps dans LLL peut s'écrire de la façon compacte suivante :

$$H^{(2)} = \sum_m V_m P_m^{12} \tag{3.36}$$

Le calcul de ces pseudo-potentiels sera comme suit :

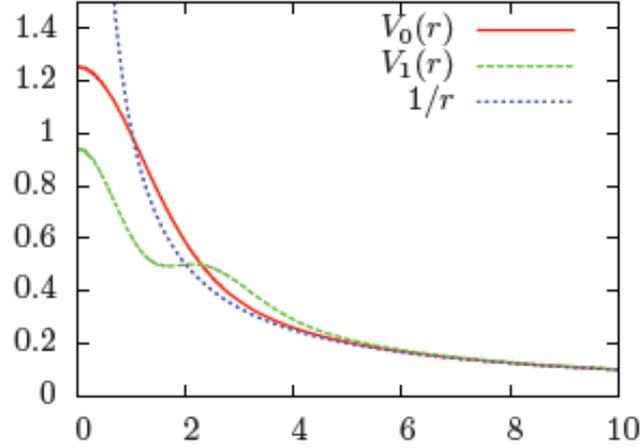
**1) Dans le plus bas NL (LLL)**

$$V_m^{(0)} = \langle 0, m, 0|V|0, m, 0\rangle = \int \int V(r) |\psi_{0,m,0}(z, Z)|^2 dr dR \tag{3.37}$$

**2) Dans les niveaux de Landau supplémentaires (NLs)**

$$V_m^{(n)} = \langle n, m, 0|V|n, m, 0\rangle = \int \int V(r) |\psi_{n,m,0}(z, Z)|^2 dr dR \tag{3.38}$$

Avec  $V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r}$



**Figure 3.10** : courbes montrant l'interaction de Coulomb projetée dans le LLL et le second NL avec une interaction comparative  $1/r$ . La courbe de l'interaction présente  $n$  minimum locaux, correspondent au nombre du NL. La portée de l'interaction augmente avec les NLs ( $n$ ) [18].

### 2.4.2. Cas de $N$ électrons

Pour un gaz d'électrons fortement corrélé, dont les électrons interagissent entre eux par une interaction de Coulomb  $V(|r_i - r_j|)$ , l'hamiltonien de ce système s'écrit :

$$H = \sum_{i < j} V(|r_i - r_j|) \quad (3.39)$$

Dans un état  $|\psi\rangle$ , l'énergie d'interaction moyenne sera donc :

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \frac{1}{2} N(N-1) \langle \psi | V(|r_1 - r_2|) | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} N(N-1) \sum_m V_m \langle \psi | P_m^{12} | \psi \rangle \end{aligned} \quad (3.40)$$

Avec  $P_m^{12}$  est le projecteur le moment cinétique relatif aux particules 1 et 2. Et  $\langle \psi | P_m^{12} | \psi \rangle = |P_m^{12} | \psi \rangle|^2$  Représente la probabilité qu'une paire d'électrons a un moment cinétique relatif  $m$ . Dans la gauge symétrique, on a vu que la partie polynomiale des fonctions d'onde du LLL est analytique. Pour cette raison, la fonction d'onde propre qui décrit un électron dans LLL a nécessairement la forme :

$$\psi(z, \bar{z}) = f(z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.41)$$

D'où  $f(z)$  est une fonction polynomiale analytique dépend de  $z$  seulement. La fonction d'onde qui décrit les  $N$  particules fermioniques sera obtenue par le déterminant de Slater et prend la forme :

$$\psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = F(z_1, z_2, \dots, z_N) \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.42)$$

Avec  $F$  est un polynôme indépendant des positions conjugués  $\bar{z}_i$ , et antisymétrique, cette fonction d'onde peut se décomposer sur chaque secteur du moment cinétique relatif  $m$  et prend la forme :

$$\psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_m z^m Q_m(Z, z_3, \dots, z_N) \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.43)$$

Avec  $P_m^{12}|\psi\rangle = z^m Q_m(Z, z_3, \dots, z_N) \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}\right) = |\psi_m\rangle$  est la projection de  $|\psi\rangle$  sur le secteur du moment cinétique relatif  $m$ . On sait que  $\sum_m P_m^{12} = 1$ , donc  $|\psi\rangle = \sum_m |\psi_m\rangle$ . Avec  $z = z_i - z_j$  et  $Z = (z_i + z_j)/2$ . Le terme général de  $|\psi\rangle$  sera un produit de  $N$  états à un électron avec un coefficient près ( $a \prod_i z_i^{m_i}$ ), chacune positions  $z_i$  a une valeur propre  $m_i$  du moment cinétique individuel  $L_Z^{(i)} = -i\hbar\partial_{\theta_i}$  comme exposant, dont le moment cinétique totale  $L_Z = \sum_i L_Z^{(i)}$  et sa valeur propre sera  $M = \sum_i m_i$ . L'hamiltonien dans la gauge symétrique commute avec le moment cinétique totale, donc ils peuvent être diagonalisés simultanément dans la même base propre. L'invariance par rotation et la conservation du moment cinétique total qui en découle impliquent que  $F$  doit être de degré total homogène  $M$ . La fonction d'essai de Laughlin doit être totalement antisymétrique, et le principe d'exclusion de Pauli impose que la fonction d'onde s'annule quand deux électrons ayant le même état. A condition d'invariance par translation, On suppose que la fonction d'onde ne dépend que des distances relatives des électrons  $z_i - z_j$  (inter-électroniques), et on pose  $m = 2s + 1$  tel que :

$$\psi_L(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i<j} \left(\frac{z_i - z_j}{l_B}\right)^{2s+1} \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}\right) \quad (3.44)$$

Avec  $s$  entier positif. Cette étape est la seule supposition du raisonnement qu'avait proposé Laughlin pour sa fonction d'essai, elle est motivée par la volonté de choisir un terme qui sépare les électrons au maximum afin de minimiser l'énergie d'interaction. Cette forme est proche de la fonction d'onde introduite par Jastrow qui fait approximer avec succès les gaz de particules en forte interaction (sans champ magnétique) [23]. Pour chaque monôme de  $F$ , le moment cinétique individuel  $L_Z^{(i)} = -i\hbar\partial_{\theta}^{(i)}$  du  $i^{\text{ème}}$  électron est égale à l'exposant de  $z_i$ , sa valeur maximale est donc  $m = (N - 1) \times (2s + 1)$ , les  $N$  électrons sont confinés dans un disque de rayon  $R = l_B \sqrt{2(N - 1) \cdot (2s + 1)}$ . Or, La valeur maximale de  $m$  est égale au nombre de quanta de flux traversant le disque. Le facteur de remplissage à grande valeur de  $N$  est alors :

$$\nu = \frac{N}{N_B} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2s + 1} = \frac{1}{m} \quad (3.45)$$

Cela montre clairement que le seul paramètre variationnels de  $\psi_L$  se trouve fixé par le facteur de remplissage. La fonction d'onde  $\psi_L$  se décompose sur des orbitales allant de  $m = 0$  à  $m = (N - 1) \times (2s + 1)$ . Laughlin a fait un pas très génial pour expliquer la phase fractionnaire de l'effet Hall quantique pour ces remplissages, il a interprété le gaz d'électrons 2D comme un système statistique classique ayant comme fonction de partition  $Z$ . Il a fait donc un lien pour sa fonction d'essai (mécanique quantique) et la fonction de partition (mécanique statistique) :

$$Z = \sum_c e^{-\beta U_{cl}} = \int d^2 z_1 d^2 z_2 \dots d^2 z_N |\psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N)|^2 \quad (3.46)$$

La sommation sur les configurations  $c$ , chacune d'elles a comme hamiltonien  $U_{cl}$ . En attirant l'hamiltonien :

$$-\beta U_{cl} = 2m \sum_{i < j} \ln \left| \frac{z_i - z_j}{l_B} \right| - \sum_j \frac{|z_j|^2}{2l_B^2} \quad (3.47)$$

Un choix formel de la température  $\beta = m$ , ce qui permet d'écrire :

$$U_{cl} = -2 \sum_{i < j} \ln \left| \frac{z_i - z_j}{l_B} \right| + \frac{1}{m} \sum_j \frac{|z_j|^2}{2l_B^2} \quad (3.48)$$

L'énergie électrostatique d'un ensemble de particule en interaction, de charge  $e_j$ , dans une surface bidimensionnelle avec une densité de charge uniforme  $\bar{\rho}$  sera donnée par (consulter [24] pour plus de détail) :

$$E_{él} = -2 \sum_{j < k} e_j e_k \ln \left| \frac{r_k - r_j}{l_B} \right| - \pi \bar{\rho} \sum_j e_j |r_j|^2 \quad (3.49)$$

Si on met les charges  $e_j = -1$  le cas des électrons, en comparant les deux relations, on tire facilement :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\pi m l_B^2}$$

## 2.5. Excitations du liquide de Laughlin

Laughlin a montré que son liquide possède des excitations élémentaires qui correspondent à des charges fractionnaires. L'incompressibilité du liquide de Laughlin permet d'expliquer ces excitations et donc l'observation des phases fractionnaires de l'EHQ. Un liquide est incompressible si son potentiel chimique est discontinu en fonction de la densité. Pour montrer cette propriété, Laughlin a inséré dans le liquide un quantum de flux  $\phi_0$  de façon adiabatique à travers un tube ponctuel. Cette insertion du quantum de flux correspond à une variation infinitésimale de densité de flux  $\delta n_B$ , qui correspond aussi à une réduite

infinitésimale de la densité électronique  $\delta n = -v\delta n_B$  [18]. Pour voir cela on développe le facteur de remplissage  $\nu$  selon :

$$\nu = \frac{n}{n_B + \delta n_B} = \frac{n}{n_B} \left( 1 - \frac{\delta n_B}{n_B} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\delta n_B}{n_B} \right)^2 \right) = \frac{n - v\delta n}{n_B} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\delta n_B}{n_B} \right)^2 \right)$$

On voit clairement de ce développement, que l'ajout d'un quantum de flux  $\delta n_B$  correspond à une réduite de densité  $-v\delta n$ , correspond aussi à une augmentation de moment cinétique de chaque électron d'une unité  $m_i \rightarrow m_i + 1$ . On a vu que l'exposant de la position  $z_i$  du  $i^{\text{ème}}$  électron dans la fonction  $\psi_L$  est la valeur propre de son moment cinétique. Alors la fonction d'onde qui correspond à cette insertion du quantum de flux devient un multiple de la fonction  $\psi_L$  par la position de chaque électron, cette fonction d'onde correspondante à cette excitation dite de « quasi-trou » :

$$\psi_{qt} = \prod_k z_k \psi_L \quad (3.50)$$

Cette fonction correspond à l'insertion du quantum de flux à l'origine, pour insérer le quantum de flux en  $z_0$ , il faut tradler la position  $z_k$  vers  $z_k - z_0$ , et la fonction d'onde associée sera donc :

$$\psi_{qt} = \prod_k (z_k - z_0) \psi_L \quad (3.51)$$

Avec

$$\psi_L \propto \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu}$$

D'où  $\nu = 1/m$  est le facteur de remplissage avant l'insertion du quantum de flux. L'excitation élémentaire du système par insertion d'un quantum de flux (création d'un quasi-trou) traduit par un retrait de charge fractionnaire  $-e^* = -e/m$ . Pour voir cela on considère un disque de rayon  $R$ , l'insertion d'un quantum de flux à son centre (quasi-trou dans son centre), permis aux orbitales de Landau de se tradler par un pas supérieur, toute orbite de Landau est occupée par une densité  $\nu$  d'électron, le dernier orbitale sort de ce disque, donc un retrait de charge  $-ve$ . Le quasi trou localisé dans le centre donc porte une charge  $e^* = ve$ . C'est comme le cas d'EHQE, la localisation de ces quasi-particules par les impuretés qui est responsable à la quantification de la résistance de Hall. Le retrait d'un quantum de flux correspond à une multiplication de  $\psi_L$  par des composantes conjugué  $\bar{z}_k$  non analytiques qui n'appartiennent pas au LLL. Par projection dans le plus bas niveau de Landau LLL, les composantes non analytiques  $\bar{z}_k$  qui n'appartiennent pas au LLL doit se remplacer par des dérivées :

$$\bar{z}_k \rightarrow 2 \frac{\partial}{\partial z_k}$$

Pour obtenir la fonction d'onde de quasi-électron, on doit multiplier  $\psi_L$  à gauche par ces dérivées pour diminuer le moment cinétique de chaque électron (position). Pour un quasi-électron localisé à l'origine :

$$\psi_{qe} = \prod_k 2 \frac{\partial}{\partial z_k} \psi_L \quad (3.52)$$

L'obtention d'un quasi-électron à  $z_0$  s'obtient en translatant  $\bar{z}_k \rightarrow \bar{z}_k - \bar{z}_0 \rightarrow 2 \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_0$ , le  $\bar{z}_0$  c'est seulement un paramètre complexe et ne correspond pas à la position, la fonction d'onde  $\psi_{qe}$  est donc dans LLL.

$$\psi_{qe} = \prod_k \left( 2 \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_0 \right) \psi_L \quad (3.53)$$

Pour les  $m$  quasi-trous à la même position  $z_0$  la fonction d'onde sera donc celle de Laughlin avec  $N + 1$  électrons:

$$\psi_{qt} = \prod_k (z_k - z_0)^m \psi_L \quad (3.54)$$

Cette équation indique que Pour insérer un électron dans le liquide de Laughlin, on a besoin de créer  $m$  quasi-trous, et inversement, ce qui implique que ces quasi-particules ont des charges fractionnaires ( $q/m$ ). Des calculs numériques ont été faites pour le calcul d'énergie de quasi-trou et quasi-électron qui correspondent à  $E_{qt} \approx 0.027$  et  $E_{qe} \approx 0.073$  [25-29], donc le coût non nul en énergie pour créer une paire (quasi-trou et quasi-électron) qui assure l'incompressibilité du liquide de Laughlin, c.-à-d. que chaque excitation élémentaire du liquide est gappée par rapport à l'état fondamental décrit par  $\psi_L$ . Pour voir cette incompressibilité du liquide de Laughlin, on voit d'abord la discontinuité du potentiel chimique. Pour un remplissage  $\nu = 1/3$  :

$$\begin{aligned} \Delta\mu = \mu_+ - \mu_- &= \lim_{N_B \rightarrow \infty} [E(N_B) - E(N_B - 1)] - \lim_{N_B \rightarrow \infty} [E(N_B) - E(N_B + 1)] \\ &= E_{qe} - E_{qt} \approx 0.046 \end{aligned}$$

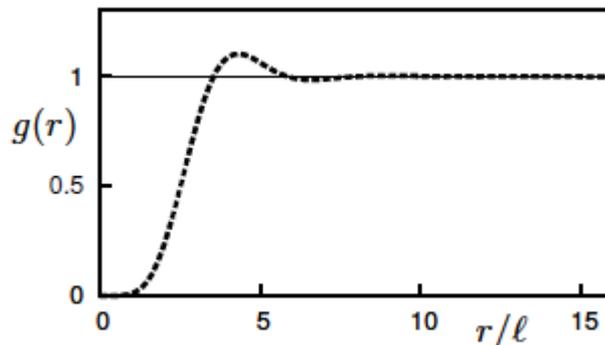
C'est cette discontinuité qui explique l'apparition de l'EHQF au remplissage  $\nu = 1/3$ . Cette discontinuité traduit le fait que l'ajout et le retrait d'une quasi-particule dans un NL pareillement rempli correspondent à des énergies différentes, et donc que la création d'une paire (quasi-particule et quasi trou) est une excitation gappée [4-18].

## 2.6. Energie du fondamental

L'énergie du fondamental qui correspond à l'ansatz de Laughlin est prise en considération comme l'énergie fondamentale du cristal de Wigner ou d'une onde de densité de charge, ces derniers ont une corrélation favorable identique à celle de l'ansatz de Laughlin. La distribution de densité de l'état de Laughlin est hautement non-triviale, dont il rend sa calcul difficile analytiquement, il faut la calculer numériquement par un Algorithme Monte-Carlo pour un nombre fini de particules. L'état de Laughlin reproduit correctement le trou de corrélation de l'état exacte à courtes distances, mais pour des grandes distances  $r \geq 4l_B$  son comportement devient plat sans oscillations. En réalité les électrons sont faiblement corrélés au delà de  $r \approx 4l_B$ . Les états liquides sont en compétition étroite avec les états solides notamment avec les cristaux de Wigner. L'ansatz de Laughlin décrit un fluide dont il ne présente pas de corrélations à longue portée, seulement à courtes portées. Cela est visible à travers la fonction de corrélation densité-densité:

$$g(r_1, r_2) = \langle \rho(r_1) \rho(r_2) \rangle = \frac{N(N-1)}{n^2} \int dr_3 \dots dr_N |\psi_L(z_1, \dots, z_N)|^2$$

Avec  $\rho(r) = \sum_i \delta(r_i - r)$  est l'opérateur densité. Pour un système invariant par rotation et translation  $g(r_1, r_2)$  ne dépend que de la distance relative  $r$  et se sera  $g(r) = \rho_0^2 \langle \rho(r) \rho(0) \rangle$ , cette fonction de corrélation de paire donne la probabilité de trouver un électron à une distance  $r$  d'un électron situé à l'origine. Nous présentons dans la figure 3.10 la représentation de  $g(r)$ . A longue distance  $g(r)$  ne dispose pas d'ordre spatial comme un cristal de Wigner [4-3-18].



**Figure 3.10** : fonction de corrélation densité-densité de la fonction d'onde de Laughlin, tracée par Algorithme Monte-Carlo [4].

# Chapitre 4

## *Théorie de Jain*

### **1. Fermions composites**

Suivant Laughlin, beaucoup des théories ont été proposées pour décrire des fonctions d'onde qui permis d'expliquer plusieurs plateaux qui apparait dans la résistance de Hall, et qui correspondent à des facteurs de remplissages différentes. Parmi ces théories, est celle de fermions composites introduite par Jain en 1989, qui a pu identifier avec succès les vraies quasi-particules responsables de l'EHQF [30] et il les a donné le nom des fermions composites. Il les a définis comme un état lié d'un électron auquel est attaché un nombre pair de vortex quantifiés. Il a remarqué en observant les résultats expérimentaux que les deux effets HQE et HQF sont différents qu'à la valeur quantifiée de la résistance de Hall, mais qu'ils peuvent s'interpréter par une même physique sous-jacente. Autrement dit, des électrons fortement corrélés, et soumis à un champ magnétique externe  $B$  très intense occupant partiellement les NsL, ceci correspond au cas de l'EHQF, peuvent s'interpréter comme des fermions composites interagissant faiblement entre eux, et soumis à un champ magnétique  $B^*$  effectif moins intense que  $B$  et occupant entièrement les NsL, correspond donc à l'EHQE. Nous allons exposer dans ce chapitre la théorie qu'a faite Jain, puisque elle est plus pertinente. Cette théorie a été développée dans le cadre de l'EHQF [31], dont la compréhension de cet effet HQF a bénéficié grandement de l'existence de cette théorie, elle a permis d'expliquer d'autres plateaux de la résistance de Hall correspondent aux facteurs de remplissages différents de ceux de Laughlin tel que  $\nu = n/2pn + 1$ , d'où  $n$  et  $p$  sont des entiers, elle a aussi permis de reproduire la fonction d'onde de Laughlin correspondre aux remplissages  $\nu = 1/2p + 1$ , où  $n = 1$ , elle a même permis d'expliquer l'absence d'états incompressibles donc d'EHQ aux facteurs de remplissages  $\nu = 1/2p$  tel que  $\nu = 1/2$ . Après, cette théorie est devenue très utile pour expliquer d'autres effets et phénomènes surtout dans le champ vaste de la physique de la matière condensée. Quand l'électron capture un nombre pair de quanta de flux magnétique  $2p$ , appelés parfois vortex tirés de la fonction d'onde totale, il se transforme à un fermion composite. Les fermions composites présentent un écrantage des électrons, car les électrons s'entourent par des trous-écran créés par les vortex, ils ont donc la même charge et le même spin et aussi une même statistique que les électrons. Ces vortex sont topologiquement équivalents aux quanta de flux attachés à chaque position d'électron et produisent une variation de phase  $2p \times 2\pi$  lorsqu'une particule fait un tour complet autour d'une autre [3-5-6].

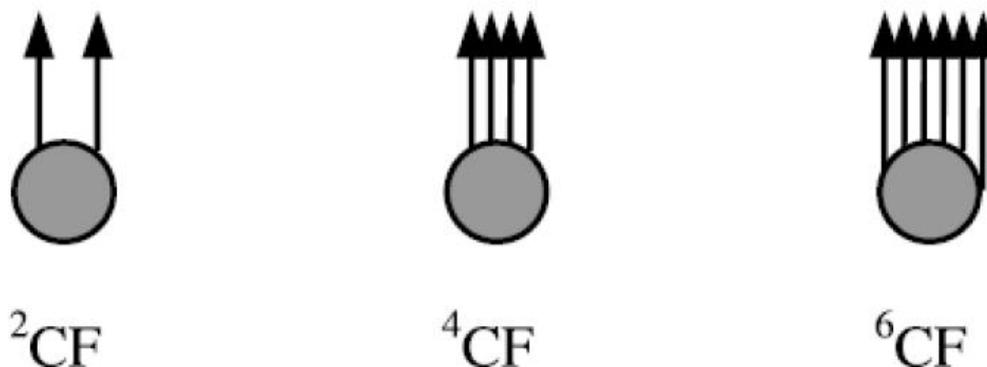
## 2. Principe de base de la théorie

Dans le cas de l'EHQF, on a vu que, contrairement au cas de l'EHQE, un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique très intense et refroidis à des températures très basses, son comportement sera gouverné par la seule énergie d'interactions de Coulomb répulsive, dont se produit un liquide électronique fortement corrélé. Cette interaction répulsive entre les électrons est responsable de la création des FCs. Des expériences ont montrés que ces FCs découragent les électrons de se rapprocher les uns des autres, donc elles minimisent les interactions entre les électrons, et contrairement aux électrons, les fonctions d'onde des FCs produisent de faibles énergies d'interaction.

En première approximation, ces FCs peuvent se traiter comme des particules libres sans interaction (l'interaction est souvent négligée à une bonne approximation).

L'hypothèse dans laquelle est basée la théorie des FCs est :

Les électrons capturent de la fonction d'onde totale un nombre pair  $2p$  de vortex pour se transformer à des fermions composites. Par une image qui simpliste l'imagination des FCs, mais qui ne doit pas être prise littéralement, un vortex sera modélisé par un quantum de Flux magnétique  $\phi_0 = h/e$ . Dans ce cas précis, un fermion composite sera vu comme un électron transportant  $2p$  quanta de flux magnétique (voir figure 4.1) :



**Figure 4.1 :** des électrons transportent chacun  $2p$  quanta de flux (vortex quantifiés) du champ magnétique externe et se transforment aux fermions composites. Les trois cas sur la figure de gauche à droite correspondent successivement à  $p = 1$  et  $2$  et  $3$ .

De pion de vue champ moyen, les électrons dans un champ magnétique appliqué  $B$  capturent un nombre pair  $2p$  de quanta de flux qui devient invisible pour les autres électrons ce qui fait amoindrir le champ magnétique ressenti par ces électrons (transformés en FCs), et ce champ magnétique effectif amoindris peut correspondre à des remplissages entiers, dans ce cas précis l'EHQF des électrons sera traité comme l'EHQE des FCs (voire figure 4.2). Le champ magnétique ressenti par les FCs est  $B^* = B - 2p\rho\phi_0$ , où  $B$  est le champ magnétique extérieur appliqué et  $\rho$  est la densité d'électrons aussi des FCs,  $2p$

est le nombre de quanta de flux (vortex) attaché aux électrons où  $p$  est un entier, et  $B^*$  est le champ magnétique effectif ressenti par les FCs.

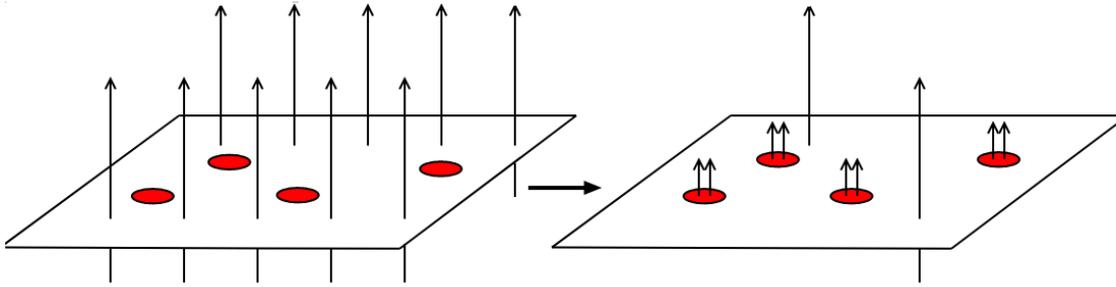
Les FCs ont un comportement comme celui des électrons soumis à un champ magnétique effectif  $B^*$ , ces FCs remplissent donc des niveaux de Landau effectifs virtuelles que Jain appelle « niveaux Lambda  $\Lambda$  ». Quand les fermions composites remplissent entièrement les  $v^*$  niveaux lambda, ce dernier sera donné par :  $v^* = \rho\phi_0/B^*$ , ce facteur de remplissage effectif des FCs relie le facteur de remplissage des électrons par :

$$v^* = \frac{v}{2pv \pm 1} \quad (4.1)$$

Et inversement possible :

$$v = \frac{v^*}{2pv^* \mp 1} \quad (4.2)$$

Le signe moins dans le dénominateur traduit la possibilité d'introduire des quanta de flux opposés au champ magnétique effectif  $B^*$  tel que  $B^* = B + 2p\rho\phi_0$ .

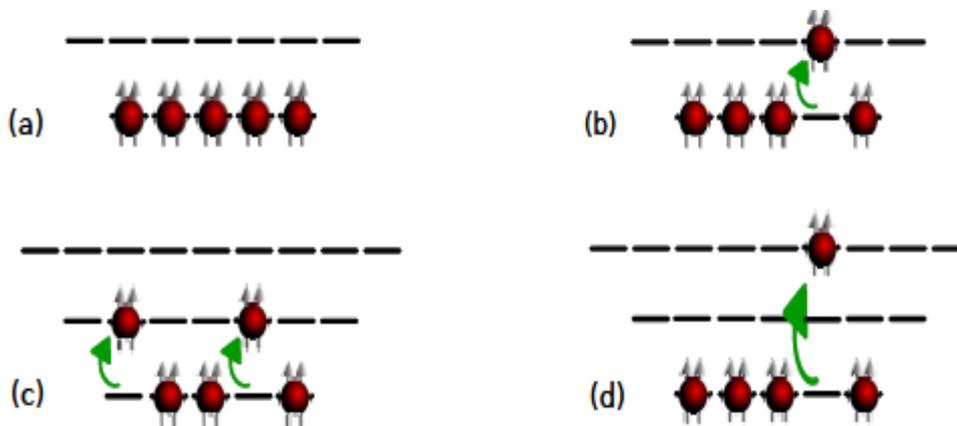


**Figure 4.2 :** l'EHQF des électrons correspond à un champ magnétique plus élevé  $B$ , Se traduit comme l'EHQE des FCs correspond à un champ magnétique amoindri (moins levé)  $B^*$ .

L'ensemble des valeurs de facteur de remplissage (4.2) qui correspondent à  $v^* \in \mathbb{N}$  est appelée séquence de Jain. Les états incompressibles observés pour la phase fractionnaire telle que  $v = 2/5$  et  $v = 3/7$  qui inclus dans la séquence de Jain et qui correspondent à  $v^* = 2$  et  $v^* = 3$  sont traités comme des phases entières des FCs remplissant les  $v^*$  niveaux lambda. L'absence d'états incompressibles pour un tel facteur de demi-remplissage des NsL, comme  $v = 1/2$  présente un cas particulier et peut s'expliquer par l'équation (4.1), quand  $v = 1/2$  et  $p = 1$ , ou plus généralement  $v = 1/2p, v^* \rightarrow \infty$ , donc le champ magnétique effectif  $B^*$  s'annule, alors les FCs capturent l'intégralité de flux magnétique. Deux scénarios sont alors possibles, soit le gaz d'électrons forme un liquide de Fermi de fermions composites (métal de FCs) [32,33] qui ne présente pas l'effet hall quantique car il est un état compressible dont ses excitations élémentaires ne soient pas gappés, ce liquide de Fermi a été observés expérimentalement où son vecteur d'onde a été calculé [34,35], soit il y a une apparition d'un état supraconducteur de FCs, qui peuvent éventuellement être

favorisés par les interactions résiduelles attractives entre FCs, comme l'état observé à  $\nu = 5/2$  [36,37]. Les fonctions d'onde de Laughlin ne sont aussi qu'un cas particulier correspondant au  $\nu = 1/(2p + 1)$  i.e.,  $\nu^* = 1$  niveaux lambda remplis, ce cas est montré schématiquement dans la figure 4.3.a.

L'un des avantages de cette théorie est qu'il est possible de construire les différentes excitations élémentaires de quasi-particules en considérant que les niveaux lambda sont séparés par un gap énergétique constant d'énergie cyclotron effectif  $\hbar\omega_c^*$ , mais il reste toujours qu'un simple schéma phénoménologique, car les interactions entre FCs dominent et il n'y aura pas de raison pour un gap cyclotron constant entre niveaux lambda effectifs, l'estimation des gaps énergétiques des FCs nécessite un travail plus approfondi qui est présenté dans la référence [38].



**Figure 4.3 :** **a)** un état fondamental de Laughlin à  $\nu = 1/3$  schématisé comme un niveau lambda rempli  $\nu^* = 1$  effectif des 5 FCs auquel est attaché 2 vortex par électron. **b)** un état excité de Laughlin de basse énergie  $\hbar\omega_c^*$  due à la promotion d'un FC au niveau lambda suivant (création d'une paire quasi-trou-quasi-particule). **c)** et **d)** deux états excités de Laughlin différents ont chacun une énergie  $2\hbar\omega_c^*$ .

Pour la figure 4.3.c). Et. d) les excitations d'énergie  $2\hbar\omega_c^*$  sont obtenus par deux possibilités différentes soit par la promotion d'un FC au 2<sup>ème</sup> niveau lambda soit par la promotion des deux FCs au 1<sup>er</sup> niveau lambda.

### 3. Construction de la fonction d'onde de Jain

Jain a fait en 1998 par l'introduction de la théorie des champs moyens des généralisations sur la fonction d'onde de Laughlin qui a été obtenue pour des remplissages égale à  $\nu = 1/m$  d'où  $m = 2p + 1$  prend comme valeurs des entiers impaires, la fonction d'onde de Laughlin n'a pu expliquer qu'à l'apparition des plateaux de la résistance de Hall correspondants à ces facteurs de remplissage, la fonction d'onde de Jain a été construite comme suit :

$$\psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \psi_{v=1}(z_1, z_2, \dots, z_N) \times \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p} \quad (4.3)$$

C'est la fonction d'onde de Laughlin réduite seulement à sa partie polynomiale par délaissions des facteurs de normalisation et des termes gaussiens par l'intégration de Girvin et Jach [39] :

$$d\mu(\{z_i\}) = \prod_i \frac{e^{-\frac{|z_i|^2}{2l_B^2}}}{2\pi l_B^2} dx_i dy_i \quad (4.5)$$

L'équation (4.3) correspondre à  $\nu^{-1} = 2p + 1$ , interprétée par Jain comme la fonction d'onde d'un niveau de Landau complètement remplis par les  $N$  électrons  $\psi_{v=1}$  aux quelles est attachés  $2p$  quanta de flux magnétique (vortex) par l'intermédiaire de  $\prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p}$  appelé facteur de Jastrow, qui a un rôle d'attacher  $2p$  vortex à chaque positions relatives de pair d'électrons, donc à chaque position d'électrons, la figure 10.a) décrit cette image avec  $N=5$  et  $2p = 2$ . La fonction d'onde d'un niveau de Landau complètement remplis par les  $N$  électrons (Fermions), est déterminée par le déterminant de Slater des orbitales de Landau dit aussi « déterminant de Vandermonde » :

$$\psi_{v=1}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_N^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N_B-1} & \dots & z_N^{N_B-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (z_i - z_j) \quad (4.6)$$

Puisque nous sommes intéressés par l'EHQF, qui correspond à des limites extrêmes  $B \rightarrow \infty$  du champ extérieur, nous devons avoir une fonction d'onde d'électrons strictement confinés dans le plus bas niveau de Landau. En cas générale, le  $\nu = 1$  sera remplacé par les  $\nu = s$  niveaux de Landau remplis. Ce qui conduit à une fonction d'onde finale contenant des composantes non-analytiques qui n'appartiennent pas au plus bas niveau de Landau, pour nous ramène au PBNL, il faut projeter la fonction d'onde finale sur le PBNL à l'aide d'un opérateur de projection sur PBNL ( $\mathcal{P}_{PBNL}$ ) qui sera représenté dans la section suivante. Finalement, la fonction d'onde des  $N$  FCs occupants les  $\nu^* = s$  niveaux lambda, capturent chacun  $2p$  quanta de flux magnétique qui sera invisible pour les autres, et sentirent le champ magnétique effectif  $B^*$  est :

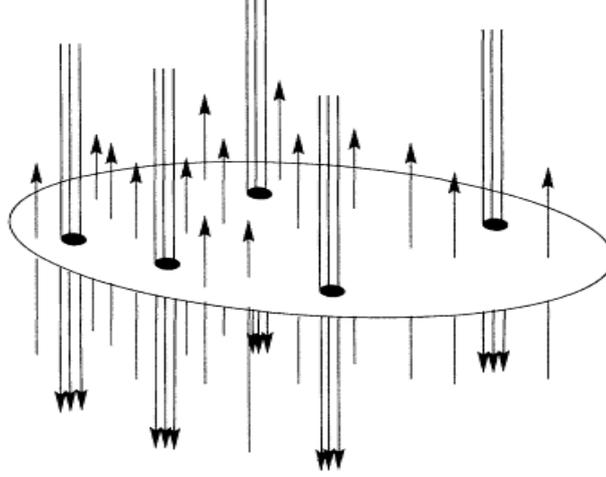
$$\psi_{FCs}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \mathcal{P}_{PBNL} \left[ \psi_{\nu^*=s}(z_1, z_2, \dots, z_N) \times \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p} \right] \quad (4.7)$$

Cette fonction d'onde contient des orbitales allant de zéro à  $2p \times (N - 1) + N/\nu^*$  orbitales électroniques, à la limite de grande nombre de FCs  $N \rightarrow \infty$ , le nombre de quanta de flux qui est égale au nombre d'orbitales électroniques sera donc

$N_B = N/v^* \pm 2pN$ , alors la fonction d'onde (4.7) décrit un système d'électrons de remplissage :

$$v = \frac{N}{N_B} = \frac{v^*}{2pv^* \pm 1} \quad (4.8)$$

Le signe moins dans le dénominateur comme on a dit précédemment indique la possibilité d'obtenir des champs magnétique effectif et appliqué dans des sens opposés (voir figure4.4).



**Figure4.4**: champs effectif  $B^*$  et extérieur appliqué  $B$  en sens opposés, expliquant la possibilité d'aura un signe (-) dans le dénominateur du remplissage.

#### 4. Théorie du champ moyen

Les Fcs capturent  $2p$  quanta de flux magnétique qui ne être pas visibles pour les autres FCs, et sentent le champ magnétique effectif réduit  $B^*$ , ceci est équivalent au système d'électrons sente chacun un champ magnétique  $B$  extérieur.

Les vortex présents dans la fonction d'onde de Jain sont topologiquement équivalents aux nombre pair de quantum de flux magnétique insérés chacunaux positions d'électrons  $z_i$ . Pour comprendre cette dernière affirmation on va voire le rôle du terme :

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p} \quad (4.8)$$

L'insertion de  $2p$  quantum de flux à la position  $r_K$ , d'ou  $2p\phi_0$  sera localisée en  $r_K$  Engendre un potentiel vecteur  $A_\phi$  tel que :

$$A_\phi = \frac{2p\phi_0}{2\pi} \nabla_r \theta(r - r_K) \quad (4.9)$$

L'incrémentation du champ magnétique  $B$  qui génère ce potentiel vecteur et crée  $2p\phi_0$  Quantum de flux en  $r_K$ , sous réserve que cette insertion du quantum de flux soit adiabatique :

$$B_\phi = \|\nabla \wedge A_\phi\| = 2p\phi_0\delta(r - r_K) \quad (4.10)$$

Les fonctions d'onde seront multipliées par un facteur  $e^{-i\theta(r-r_k)2p}$ . L'insertion du quantum de flux à chaque position d'électrons est donc décrite par le potentiel :

$$a_\phi = \frac{2p\phi_0}{2\pi} \nabla_r \sum_k \theta(r - r_k) \quad (4.11)$$

D'où  $\theta(r_j - r_k) = \theta_{jk}$  est l'angle entre les particules  $i$  et  $j$ . D'où sera donnée par :

$$\theta(r_j - r_k) = \theta_{jk} = i \ln \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \quad (4.12)$$

Le potentiel vecteur (4.11) aura pour effet de multiplier la fonction d'onde du jemeélectron  $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-i2p \sum_k \theta(r_j - r_k))\psi$  tel que :

$$e^{-i2p \sum_k \theta(r_j - r_k)} = \prod_k \left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \quad (4.13)$$

La multiplication de la fonction d'onde finale par le facteur (4.13) permis d'attacher  $2p$  quantum de flux à chaque électrons, on suppose donc que le processus soit adiabatique, c'est-à-dire ne change pas le spectre énergétique, cette opération permis d'ajouter  $N \times 2p$  quantum de flux :

$$\psi_{v^*}(z_1, z_2, \dots, z_N) \rightarrow \psi_{v^*}(z_1, z_2, \dots, z_N) \times \prod_{j < k} \left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \quad (4.14)$$

Le facteur de Jastrow (4.8) représente l'annulation du module  $|z_j - z_k|$  de la fonction d'onde lorsque  $z_j - z_k \rightarrow 0$ . On étale les quanta de flux attachés aux électrons, pour ce faire, Lopez et Fradkin ont fait un traitement rigoureux de cette étape, ils ont montré que le potentiel vecteur (4.13) décrit une transformation de Chern-Simons, puisque il apparait comme une solution du champ moyen de la théorie de Chern-Simons[40,41]. Ils ont montré que la fonction d'onde des FCs sera obtenue en appliquant une transformation de Chern-Simons sur lehamiltonien cinétique, puis par un traitement de champ moyen de la densité. Le flux magnétique sera donc réparti uniformément et la fonction d'onde sera :

$$\psi_{v^*} \times \prod_{j < k} \frac{(z_j - z_k)^{2p}}{|z_j - z_k|^{2p}} \rightarrow \psi_{v^*} \times \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p} \quad (4.15)$$

Ce facteur de Jastrow (4.15) qui est le responsable de la diminution de l'interaction de Coulomb entre FCs, car à des grandes puissances de la coordonnée relative des paires d'électrons qui correspondent aux nombre de vortex quantifiés attachés aux électrons, la fonction d'onde s'annule, c'est cet argument qui justifie la minimisation d'énergie d'interaction produite par les fonctions d'onde de FCs. Le champ magnétique qui permet d'inclure le facteur de Jastrow (4.15) à la fonction d'onde  $\psi_{v^*}$  de  $v^*$  niveaux lambda des FCs sera donc :

$$B_\phi = \|\nabla \wedge a_\phi\| = 2p\phi_0 \sum_k \delta(r - r_k) \quad (4.16)$$

Ce champ magnétique permis d'insérer un nombre pair de quantum de flux à la position de chaque électron. on peut écrire l'hamiltonien du système d'un gaz de fermions composites n'interagissent pas entre eux dans le champ effectif moyen

$$H^* = \frac{1}{2m_b} \sum_i (P_i + e(A^*_i + a_i)) \quad (4.17)$$

D'où le champ magnétique effectif  $B^*$  génère le potentiel vecteur  $A^*$ , et le potentiel vecteur  $a_i$  est généré par le quantum de flux attaché à l'électron  $i$ . D'où l'équation en valeur propre de Schrödinger  $H^*\psi^* = E^*\psi^*$ , et par transformation de gauge qui induit l'élimination du potentiel  $a$ , on abouti à :

$$\psi^* = \chi \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p} \quad (4.18)$$

L'équation en valeur propre sera donc :

$$\frac{1}{2m_b} \sum_i (P_i + eA^*_i) \chi = E^* \chi \quad (4.19)$$

D'où  $\chi$  est la fonction d'onde de  $N$  électrons sans interaction remplissant les  $v^*$  NLs Lambda. Grace au mélange des NLs, Jain a proposé de projeté la fonction d'onde du système électronique dans LLL, par un opérateur de projection qui rend les électrons restreintes au LLL. On vas voir par la suite brièvement cet opérateur.

## 5. Le projecteur sur LLL ( $\mathcal{P}_{PBNL}$ )

Pour éliminer le mélange entre Niveaux de Landau due aux amplitudes mixtes entre NLs inférieurs et NLs supérieurs, on doit projeter la fonction d'onde de l'état fondamental sur le plus bas NL. Puisque on a considérer au début qu'on peut avoir un  $v^*$  NLs entièrement remplis par les FCs, d'où la fonction d'onde de l'état fondamental (4.15) doit contenir des composantes non-analytique qui n'appartiennent pas au plus bas NL. Pour rend le problème restreins au LLL, Jain a utilisé dans sa théorie un opérateur qui permis de projeter l'état fondamental

au LLL. Un état qui possède des amplitudes mixtes avec les NLs, et qui n'appartient pas au LLL, peut-être obtenue en agissant un opérateur  $Q(z, \bar{z})$  sur un autre état dans LLL  $|\phi'\rangle$ , ensuite on la projeter dans LLL par un état dans LLL  $|\phi\rangle$ . On peut utiliser commodément l'opérateur projeté  $Q_p(z, \bar{z})$  qui donne le même état final :

$$\langle \phi | Q_p(z, \bar{z}) | \phi' \rangle = \langle \phi | Q(z, \bar{z}) | \phi' \rangle$$

Avec  $Q_p(z, \bar{z}) \equiv Q(z, \bar{z} \rightarrow 2 \partial / \partial z)$ , les composantes non-analytiques qui n'appartiennent pas au LLL deviennent des dérivées.  $Q(z, \bar{z})$  Peut-être développé en série en puissance des composantes comme :

$$Q(z, \bar{z}) = \sum_{j,k} c_{j,k} z^k \bar{z}^j$$

D'où sa version projetée sera par définition :

$$e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \sum_{j,k} c_{j,k} z^k \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^j e^{\frac{z\bar{z}}{4}}$$

On peut obtenir un état dans LLL, en appliquant directement  $Q_p$  sur un état dans LLL, à cause de l'annulation des composantes  $\bar{z}$  par dérivation. Les opérateurs  $Q_p$  Et  $Q$  ont des mêmes éléments de matrice dans LLL, voyons ca comme :

$$\langle m | Q(z, \bar{z}) | n \rangle = \sum_{j,k} c_{j,k} \int d^2r \bar{z}^m e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} (z^k \bar{z}^j) z^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

Finalement par dérivation, on abouti au résultat attendu :

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \int d^2r \bar{z}^m e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left( e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^j z^k e^{\frac{z\bar{z}}{4}} \right) z^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} = \langle m | Q_p(z, \bar{z}) | n \rangle$$

Les coordonnées projetées dans LLL, ne commutent pas et s'écrivent alors :

$$x_p = e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{2} \right) e^{\frac{z\bar{z}}{4}}$$

$$y_p = e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \left( \frac{-i\partial}{\partial z} + i \frac{z}{2} \right) e^{\frac{z\bar{z}}{4}}$$

$$\text{vitrifiant}[x_p, y_p] = i l_B^2.$$

Ces deux variables canoniques conjuguées obéissent au principe d'incertitude d'Heisenberg,  $\Delta x_p \cdot \Delta y_p \geq 1/2$ , d'où on peut pas mesurer ces coordonnées projetées pour un état dans LLL instantanément. Pour le produit de deux fonctions d'ondes l'une est restreinte dans LLL et l'autre subi des amplitudes de mixage avec les NLs, leur projection sera :

$$\mathcal{P}_{PBNL}\phi_{n,m}(r)\phi_{0,m'} = \dot{\phi}_{n,m}(r)\phi_{0,m'}$$

D'où  $\dot{\phi}_{n,m}(r)$  contient des dérivées remplacées par les coordonnées non-analytiques, c'est donc l'état projeté. Pour la fonction d'onde de Jain, il y aura deux manières de la projeter, d'où la première est directe:

$$\mathcal{P}_{PBNL}\chi(\phi) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} = \dot{\chi}(\dot{\phi}) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p}$$

Et la deuxième se fait par partie en remarquant que :

$$\prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} = \prod_{j \neq k} (z_j - z_k)^p \equiv \prod_j J_j^p$$

D'où la fonction d'onde de Jain peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \psi^j &= \begin{vmatrix} \phi_1(r_1) & \phi_1(r_2) & \cdots \\ \phi_2(r_1) & \phi_2(r_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \prod_{j<k} (z_j - z_k)^{2p} \\ &= \begin{vmatrix} \phi_1(r_1)J_1^p & \phi_1(r_2)J_2^p & \cdots \\ \phi_2(r_1)J_1^p & \phi_2(r_2)J_2^p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite on fait la projection de chaque états propres dans le déterminant pour obtenir une fonction de Jain totalement projetée :

$$\mathcal{P}_{PBNL}\psi^j = \begin{vmatrix} \dot{\phi}_1(r_1)J_1^p & \dot{\phi}_1(r_2)J_2^p & \cdots \\ \dot{\phi}_2(r_1)J_1^p & \dot{\phi}_2(r_2)J_2^p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\dot{\phi}_{n,m}(r_j) = N_{n,m} \frac{(-)^n}{n!} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} z^m \frac{\partial^n}{\partial z^n}$$

Dans la théorie de Jain, l'opérateur de projection a le rôle essentiel, dont  $B \rightarrow \infty$ , donc l'état fondamental soit strictement confiné dans LLL. Cet état sera très précis en comparant avec celle obtenue par diagonalisation exacte pour les systèmes de petite taille [42]. Pour les systèmes de grande taille, elle ne soit plus valable.

## 6. Les excitations du liquide de FCs

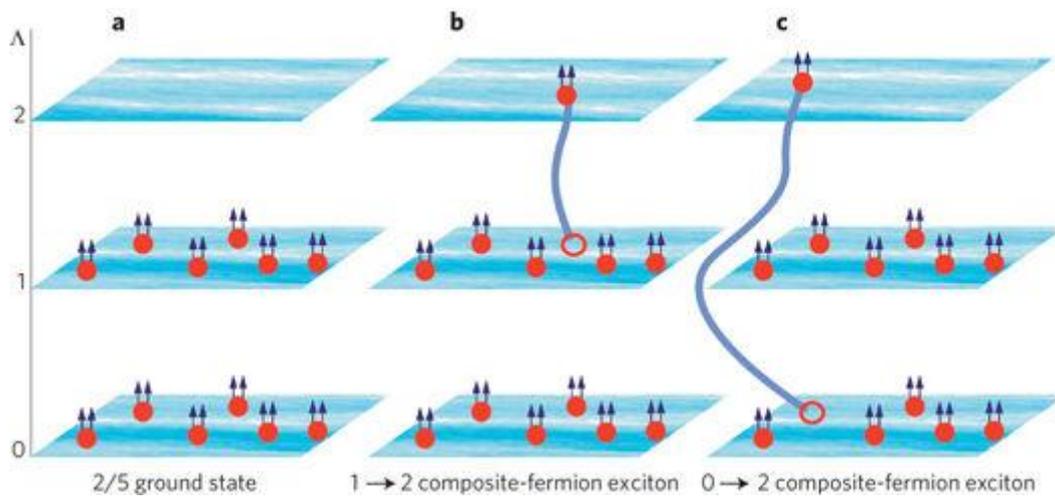
Les excitations à la théorie de Jain sont facilement produites, et qui sont assurées par l'incompressibilité du liquide de FCs, et sont traitées comme dans l'EHQE des électrons à remplissage  $\nu^* = n$ . Jain a pu produire toutes les excitations de

L'EHQF correspondants au remplissage  $\nu = \nu^*/(2p\nu^* \pm 1)$ , on appelle un quasi-électron la promotion d'un électron auquel est attaché un  $2p$  quanta de flux au Niveau Lambda supérieur, a donc une charge fractionnaire, et un quasi-trou est l'arrachement d'un quasi-électron d'un Niveau Lambda remplis. On note  $\chi_n^{qh}$ , et  $\chi_n^{qp}$  successivement l'état associé à un quasi-trou et un quasi-électron. d'où les fonctions d'onde de ces états excités sont :

$$\psi_{\frac{\nu^*}{2p\nu^* \pm 1}}^{FC-qh} = \mathcal{P}_{PBNL} \chi_{\nu^*}^{qh} \chi_1^{2p} \quad (4.20)$$

$$\psi_{\frac{\nu^*}{2p\nu^* \pm 1}}^{FC-qp} = \mathcal{P}_{PBNL} \chi_{\nu^*}^{qp} \chi_1^{2p} \quad (4.21)$$

Ces fonctions d'onde ne contiennent pas des paramètres à ajuster, car elles sont restreintes au PBNL. Donc, une excitation élémentaire peut-être obtenue par le saut d'un FC depuis le dernier Niveau Lambda occupé à son supérieur inoccupé (voire figure 4.5), cette paire crée de quasi-particules est dite exciton. Ces quasi-particules ont la statistique et la charge locale fractionnaires.



**Figure 4.5 :** a) état fondamental de FCs correspond à  $\nu = 2/5$  et  $\nu^* = 2$ , b) et c) deux différents états excités de FCs correspondent à des énergies différentes.

## 7. Liquide de Fermi de fermions composites

Dans cet état, les Fcs sont indépendants, il correspond au remplissage  $\nu = 1/2p$ , d'où le champ magnétique effectif sera nul. Le vecteur d'onde de Fermi associé à cet état, et qui présente un bon nombre quantique pour elle sera calculé comme :

$$n = \int_0^{k_F} \frac{d^2k}{2\pi^2} = \frac{k_F^2/2}{2\pi} \Rightarrow k_F = \sqrt{4\pi n} \quad (4.22)$$

Avec  $n$  est la densité des FCs. Ce résultat coïncide avec l'expérience. On voit de l'équation (4.22) que  $k_F$  des FCs est  $\sqrt{2}$  fois le  $k_F$  d'un liquide de Fermi standard. Ce facteur prés vient de la dégénérescence de spin levée pour les FCs. Cet état est de type métallique. La fonction d'onde du Liquide de Fermi de FCs est obtenue en remplaçant le terme  $\psi_{\nu^*}$  par la fonction d'onde d'un liquide de Fermi, qui est un déterminant de Slater des ondes planes :

$$\psi_{LFFC} = \mathcal{P}_{PBNL} \left[ \det \left( e^{-i\frac{k_j z_k}{2}} \right) \times \det \left( e^{-i\frac{\bar{k}_j z_k}{2}} \right) \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p} \right] \quad (4.23)$$

On obtient finalement en projetant dans LLL ( $\mathcal{P}_{PBNL}: \bar{z} \rightarrow 2\partial_z$ ) :

$$\psi_{LFFC} = \det \left( e^{-ik_j \partial_{z_k}} \right) \times \det \left( e^{-i\frac{\bar{k}_j z_k}{2}} \right) \times \prod_{j,k} (z_j - z_k)^{2p} \quad (4.24)$$

En étudiant cet état, Halperin, Read et Lee, ont calculés sa compressibilité et lui donner la forme, avec ( $q \ll k_F$ ) :

$$\kappa(q) \sim \frac{1}{v(q) + \frac{2\pi}{m_0} \left( 1 + \frac{(2p)^2}{6} \right)} \quad (4.25)$$

Avec  $m_0$  est la masse nue de l'électron.  $v(q) = 2\pi/q$  Pour le cas d'interaction Coulombienne, d'où la compressibilité s'annule linéairement. Le Liquide de Fermi de FCs ne présente pas un effet Hall quantique, parce que la compressibilité (4.25) ne soit pas nulle, et donc le LFFC sera compressible, contrairement à l'EHQ qui sera incompressible, et c'est ca ce qui explique l'absence du plateau dans la résistance de Hall, et la résistance longitudinale non-nulle pour le remplissage  $\nu = 1/2$ , et donc tous remplissage  $\nu = 1/2 p$ .

# Chapitre 5

## *Etude numérique*

Dans ce chapitre on va chercher à déterminer l'état fondamental de l'interaction de Coulomb, par diagonalisation numérique exacte de la matrice de Coulomb, et qui l'on va comparer à l'état fondamental décrit par Laughlin pour des systèmes de petites tailles. Pour des systèmes à petites tailles, dont le nombre des électrons sera neuf et moins ( $N \leq 9$ ), le recouvrement de l'état de Laughlin avec celle déterminé numériquement par diagonalisation exacte de l'interaction de Coulomb dans LLL est impressionnant à  $|\langle \psi_{Coulomb} | \psi_L \rangle| > 99\%$ .

### **1. Hamiltonien d'interaction dans LLL**

L'hamiltonien général qui nous intéresse s'écrit dans le cas de l'EHQF, en introduisant les opérateurs d'échelles de création et d'annihilation usuels :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\{N,m\}} \hbar\omega_c \left( N + \frac{1}{2} \right) a_{N,m}^+ a_{N,m} + \hat{\mathcal{H}}_{int} \quad (5.1)$$

Avec  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  est un opérateur d'interaction, et le premier terme est un opérateur énergie cinétique des niveaux de Landau, d'où le dernier terme s'écrit :

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{e^2}{|r_i - r_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(z_i, z_j) \quad (5.2)$$

Dans le but de diagonaliser  $\hat{\mathcal{H}}$  numériquement et pour une formulation plus lisible, il est utile de réécrire le Hamiltonien (5.1) en seconde quantification dans l'espace de Fock généré par les orbitales du LLL [4]. Notez que les termes  $v(z_i, z_j)$  sont naturellement symétriques sous l'échange de deux particules. L'hamiltonien d'interaction  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  dans l'espace de Fock peut être obtenu comme une fonction d'opérateurs d'échelle, dont son image sera [46] :

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \sum_{N_1, m_1} \sum_{N_2, m_2} \sum_{N_3, m_3} \sum_{N_4, m_4} a_{N_1, m_1}^+ a_{N_2, m_2}^+ a_{N_3, m_3} a_{N_4, m_4} \times \\ \langle N_1, m_1; N_2, m_2 | v | N_3, m_3; N_4, m_4 \rangle \quad (5.3)$$

D'où le ket  $|N_1, m_1; N_2, m_2\rangle \equiv |N_1, m_1\rangle \otimes |N_2, m_2\rangle$ . L'approximation du champ magnétique très intense nous permet de simplifier le problème beaucoup plus. Puisque cela implique que le mélange des NL est négligeable, donc le problème reste confiné dans un NL donné, et nous permis de négliger l'énergie cinétique. En particulier, puisque notre analyse est limitée au LLL nous avons fixé  $N = 0$ .

En prenant  $N = 0$ , le dernier terme de l'équation (5.3) dans la suite sera noté  $A_{1234}$ , et qui correspond aux éléments du matrice d'interaction projetée dans LLL. D'où ces éléments seront donnés par :

$$A_{1234} = \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' \phi_{m_1}^*(r) \phi_{m_2}^*(r') V(r-r') \phi_{m_3}(r') \phi_{m_4}(r) \quad (5.4)$$

Avec  $\phi_m$  sont les orbitales électroniques dans LLL. Puisque L'hamiltonien (5.1) est invariant par translation selon  $y$ , alors il commute avec l'opérateur d'impulsion totale selon  $y$  ( $P_y = \sum_j -i\hbar\partial_{y_j}$ ). Donc il doit être sommable de toutes les impulsions des particules selon  $y$  ( $\hbar m$ ), d'où les impulsions individuelles et totale selon  $y$  seront :

$$P_{y,i} \phi_{0,m} = \hbar m \phi_{0,m} \quad (5.5)$$

Dans la gauge symétrique les états propre dans LLL sont donnés par, avec ( $l_B = 1$ ) :

$$\phi_{0,m \geq 0} = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} e^{-\frac{1}{4}zz^*} \quad (5.6)$$

La fonction d'onde de Laughlin pour  $\nu = 1/3$  sera calculée par :

$$\psi_{1/3} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 e^{-\frac{1}{4} \sum_i z_i z_i^*} \quad (5.7)$$

D'où la valeur propre de l'opérateur impulsion totale sera calculée comme :

$$P_y^{total} \psi_{1/3} = \left( \sum_{i=1}^N L_{z,i} \right) \psi_{1/3} = 3 \binom{N}{2} \hbar \psi_{1/3} \quad (5.8)$$

Le fait que l'hamiltonien (5.1) commute avec l'opérateur moment cinétique total  $\hat{M} = \sum_m \hat{m}$ , ou que l'impulsion selon  $y$  est conservée, impose que :

$$A_{m_1, m_2, m_3, m_4} = \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} A_{m_1, m_2, m_3, m_4} \quad (5.9)$$

D'où les éléments de la matrice de Coulomb ont été calculés par Tsiper [44] :

$$A_{m,n}^l = \langle m+l, n | r_{12}^{-1} | m, n+l \rangle \propto \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4}$$

$$= \int \int d^2r_1 d^2r_2 \phi_{m+l}^*(r_1) \phi_n^*(r_2) \frac{1}{|r_1 - r_2|} \phi_m(r_1) \phi_{n+l}(r_2) \quad (5.10)$$

Avec un calcul bien détaillé dans la référence [45], et qu'on ne veut pas l'exposer, puisque il est un peu large, on ne met qu'à le résultat obtenue dans ce calcul :

$$A_{m,n}^l = \sqrt{\frac{(l+m)!(l+n)!}{m!n!} \frac{\Gamma(l+m+n+3/2)}{\pi 2^{l+m+n+1} (l+n+1/2)}} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (l+i+j+1/2) \times \\ \binom{m}{i} \frac{\Gamma(1/2+i)\Gamma(1/2+l+i)}{(l+i)!\Gamma(3/2+l+n+i)} \binom{n}{j} \frac{\Gamma(1/2+j)\Gamma(1/2+l+j)}{(l+j)!\Gamma(3/2+l+m+j)} \quad (5.11)$$

Puisque on a vu que  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  commute avec  $\hat{M}$ , ils peuvent-être diagonalisés simultanément, dont ils partagent un sous-espace propre commun  $\{|n_m\rangle\}$ , tel que  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  sera y diagonalisé, d'où  $\sum_m m n_m = M$ . La base dans laquelle la matrice de Coulomb sera écrite peut-être reformulé, dans le cas simple de trois particules, d'où  $N = 3$ , avec un maximum moment angulaire unique de particule  $m = 8$ , et avec un total moment angulaire à plusieurs corps  $M = 9$ , donc, notre choix de base pour l'espace d'état sera :

$$B_9 = \left\{ |m_1 < m_2 < m_3\rangle; \sum_{i=1}^3 m_i \equiv M; m_i \in \{0, \dots, 8\} \right\} \quad (5.12)$$

Cette espace dans la géométrie du disque qu'on va en utiliser, est de dimension finie, dans ce cas les puissances de  $z_i$ , tel que  $\sum_i z_i^{m_i}$ , sont bornées inférieurement dans LLL.

## 2. Methods d'investigations numériques

À cause des difficultés inhérentes à l'EHQF, son étude repose principalement sur l'utilisation de l'outil numérique. Pour cela, on utilise la diagonalisation numérique exacte du l'hamiltonien (5.3) qui nous donne accès aux énergies et vecteurs propres de l'hamiltonien d'interaction. D'où son principe est relativement simple, on génère tous les éléments de l'espace de Hilbert qui corresponde au nombre de particules et de quanta de flux qu'on veut, puis on calcule tous les éléments de la matrice hamiltonien entre tous les états de l'espace de Hilbert, enfin, on utilise un Algorithme de diagonalisation. On a choisi l'Algorithme de Langzos qui nous directement la valeur propre d'énergie la plus basse qui corresponde à l'état fondamental, et le vecteur propre associé. La matrice crée à pour dimension celle de l'espace de Hilbert, qui croit exponentiellement avec le nombre de particules et de quant de flux (nombre d'états à un corps). D'où cette dimension sera calculée par le coefficient binomial,

$C_{N\phi+1}^N$ . Par exemple, pour l'état de Laughlin à  $N = 10$ , la dimension de l'espace de Hilbert sera  $D = 164141$ , et ça nécessite une mémoire d'environ  $100Go$  pour lui stoker [6]. Puis, on compare l'énergie de l'état fondamental obtenue par diagonalisation numérique exacte par celle de l'état fondamental modèle de Laughlin décrivant l'EHQF pour le même remplissage. Cette dernière peut-être obtenue en diagonalisant l'hamiltonien modèle ou en la calculant en utilisant la formule analytique qu'on peut la décomposer dans la base des monômes. Cette comparaison sera faite en calculant le recouvrement :

$$|\langle \psi_{\text{modele}} | \psi_{\text{exacte}} \rangle|^2$$

Ce recouvrement sera calculé sans prendre en compte les propriétés des excitations des deux fonctions. Pour notre cas de la géométrie du disque, pour des systèmes de petites tailles dont ( $N < 10$ ), le recouvrement sera de ( $> 90\%$ ), si  $N$  augmente, le recouvrement diverge.

### 3. Les résultats

Notre résultats de recouvrement de la fonction d'onde de Laughlin pour l'état fondamental et l'état fondamental exacte obtenue en diagonalisant numériquement la matrice d'interaction pour le cas de 3 et 4 électrons seront exposées dans le tableau suivant :

$N$	dimension	$ \langle \psi_{1/3}   \psi_{\text{exacte}} \rangle $
3	7	0.99946
4	34	0.97985
5	192	
6	1206	
7	8033	
8	55974	

### 4. Description de la méthode de Langzos

La matrice d'interaction de Coulomb dans chacun des sous-espaces de moment cinétique total  $M$  est une matrice creuse, c.-à-d. une matrice d'où la majorité de ses éléments sont nuls. L'élément de cette matrice entre deux configurations de la base de Fock  $\{|n_m\rangle$  et  $\{|n_m'\rangle$  soit non-nul que lorsque la propriété (5.9) est vérifiée. Généralement seule une petite partie du spectre de ce Hamiltonien nous intéresse. Dans le cas de l'EHQF, on utilise la diagonalisation numérique en général seulement pour l'obtention de l'état fondamental et quelques excitations de basses énergies. Pour ce faire, l'Algorithme qui est efficace pour ce genre de matrices creuses hermitiens, et qui converge directement et plus rapidement vers la valeur propre de l'énergie fondamentale

en donnant son vecteur propre associé, c'est l'Algorithme de Lanczos. Cet Algorithme est basé sur la projection d'une matrice  $H$  de dimension  $(n \times n)$  sur le sous-espace dite de Krylov  $K_m$  engendrée par un vecteur  $v_1$  quelconque de norme unité  $\|v_1\| = 1$  tel que  $K_m = \{v_1, v_1 H, v_1 H^2, \dots, v_1 H^{m-1}\}$ , cette projection permet de réduire la dimension de  $H$  dans le nouveau sous-espace orthogonale de dimension  $m \ll n$ . La nouvelle matrice aura donc un spectre proche du spectre extrémal de  $H$ , d'où la convergence sera plus rapide pour les valeurs propres les plus extrêmes. La nouvelle matrice  $T$  obtenue après projection sera tridiagonal et écrite dans le sous-espace orthogonal de Krylov  $K_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , finalement, on peut diagonaliser  $T$  avec un simple Algorithme comme QR par exemple. En utilisant cet Algorithme plusieurs difficultés apparaissent lorsqu'à son implémentation numérique d'où cet Algorithme souffrait une instabilité numérique importante depuis sa naissance en 1950. D'où l'orthogonalité de la base  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  sera détruite à chaque fois grâce aux erreurs numériques, ce qu'il nous exige de vérifier l'orthogonalité à chaque fois, et ca est le problème majeur de cet Algorithme de Lanczos. Un autre problème par exemple est que lorsque une valeur propre de  $H$  sera dégénérée, l'Algorithme de Lanczos ne trouve qu'un seul vecteur propre représentant. Pour cela on avais développé plusieurs méthodes de raffinement, ce qui rend l'implémentation de l'Algorithme de Lanczos compliquée [4].

## 5. Description qualitative de l'Algorithme

Soit  $A$  une matrice carrée de dimension  $(n \times n)$ , et  $q_1$  un vecteur de norme unité aléatoirement choisi de dimension  $n$ . Après, nous écrivons par recursion de Lanczos la matrice tridiagonale  $T$  de dimension réduite  $(m \times m)$  tel que  $m \ll n$ . La dimension de  $T$  dépend du nombre de valeurs propres que nous voulions calculer. Selon la procédure de Lanczos  $T$  conserve les valeurs propres de la matrice originale  $A$ . Nous définissons la matrice de Krylov du sous-espace  $K(A, q_1, j)$  Comme :

$$K(A, q_1, j) \equiv [q_1, Aq_1, A^2q_1, \dots, A^{j-1}q_1] \quad (5.13)$$

La décomposition QR d'un sous-espace de Krylov se fait en remplaçant  $q_1 = Qe_1$ , d'où  $Q$  est une matrice orthonormée et  $T = Q^T A Q$ , d'où  $T$  est une matrice tridiagonale définie par :

$$T = Q^T A Q \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta_{j-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{j-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \alpha_i = q_i^T A q_i \\ \beta_i = q_{i+1}^T A q_i \end{cases} \quad (5.14)$$

Nous avons vu cependant qu'en principe il est possible de trouver une base orthonormée de l'espace de Krylov  $K(A, q_1, j)$  tel que la matrice  $A$  sera restreinte

à cet espace et écrite dans cette base, et a une forme tridiagonale [47]. Nous construisons les vecteurs  $q_j$  selon :

$$\begin{aligned} QA = TQ &\Leftrightarrow [Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n] \\ &= [\alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2, \beta_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \beta_2 q_3, \dots, \beta_{n-1} q_{n-1} + \alpha_n q_n] \end{aligned}$$

On en tire alors :

$$q_2 = 1/\beta_1 (A - \alpha_1) q_1$$

Et

$$q_3 = 1/\beta_2 \{(A - \alpha_2)q_2 - \beta_1 q_1\}$$

$$\vdots$$

$$q_k = 1/\beta_{k-1} \{(A - \alpha_{k-1})q_{k-1} - \beta_{k-2} q_{k-2}\}, \quad 2 < k < n$$

## 6. Implémentation de l'Algorithme

- 1) On commence avec un vecteur arbitraire  $r_0$  et on calcule  $\beta_0$ .
- 2) Quand  $j = 0$  si  $\beta_0 \neq 0$  on calcule  $q_1$ .
- 3) Quand  $j = 1$  on calcule  $\alpha_1, r_1, \beta_1$ , et si  $\beta_1 \neq 0$  nous calculons également  $q_2$ .
- 4) Quand  $j = 2$  on calcule  $\alpha_2, r_2, \beta_2$ , et si  $\beta_2 \neq 0$  nous calculons également  $q_3$ .
- 5) ...

Alors la procédure itérative est basée sur la formule itérative qui dépende des trois termes itératifs (récurrence à trois termes) :

$$\beta_{j+1} q_{j+1} = Aq_j - \alpha_j q_j - \beta_j q_{j-1} \quad (5.15)$$

D'où l'itération sera :

1. on choisi un vecteur arbitraire de norme unité  $\beta_0 = \|r_0\|$  ;
2.  $q_0 = 0$  ;
3.  $j = 0$  ;
4. *while* ( $\beta_j \neq 0$ )
5.  $q_{j+1} = r_j / \beta_j$  ;
6.  $j = j + 1$  ;
7.  $\alpha_j = q_j^T A q_j$  ;
8.  $r_j = (A - \alpha_j I) q_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$  ;
9.  $\beta_j = \|r_j\|$  ;
10. *end*.

# ***Conclusion***

On a conclu par le travail dans l'effet Hall quantique et ses phases entière et fractionnaire, que c'était un sujet très sensible dans la développement technologique, d'où il permet l'accès à plein chose qui concerne l'industrie, dont les matériaux conducteurs. Ce sujet et par sa richesse physique et mathématique a permis aussi de donner la naissance à plusieurs théorèmes mathématique, qui ne était pas compris à l'époque, et ils n'ont pas vu le jour que par cet effet physique purement quantique.

Aussi par l'étude de la fonction d'onde test de Laughlin et par son amplement vérification par une approche numérique avec l'état fondamental exacte d'un système bidimensionnel d'électrons de Hall en interaction, on a constaté que cette ansatz de Laughlin reste la meilleure fonction approximative de l'état fondamental pour les fractions de remplissage de la forme  $1/(2p + 1)$  pour les systèmes électroniques de petites tailles.

# ***Bibliographie***

- [1] E. H. Hall, American Journal of Mathematics, 2:287–92, 1879.
- [2] J. C. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, volume 1. Clarendon press, 1881.
- [3] A.LARBI, Méthode de Calculs Analytiques Dans Un Système d'Electrons Fortement Liés, Univ. Aboubakr-Belkaide -Tlemcen, Dép. of Phys. 12- 2016.
- [4] Paul Soulé, Bords des Phases de l'EHQF dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique, Univ. Paris 11 – Orsay, 19-09- 2014.
- [5] S. M. Khefif, Etude Quantitative de l'EHQF, Univ. Aboubakr Belkaide- Tlemcen, Institut de Physique ,1999.
- [6] A. Sterdyniak. Etude de l'intrication dans l'EHQF. Electrons fortement corrélés. Univ. Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013.
- [7] K.V. Klitzing, G.Dorda, and M.Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494(1980).
- [8] K. V. Klitzing, Rev. Mod. Phys., 58, 519 (1986).
- [9] H. Bachmair, E. Gobel, G. Hein, J. Melcher, B. Schumacher, J. Schurr, L. Schweitzer and P. Warnecke, 20, 14 (2003).
- [10] F. Delahaye, T. Witt, B. Jeckelmann and B. Jeanneret, 32, 385 (2003).
- [11] F. Delahaye and B. Jeckelmann, Revised technical guidelines for reliable dc measurements of the quantized Hall resistance, Metrologia, 40, 217 (2003).
- [12] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B 23, 5632 (1981).
- [13] Q. Niu, D. J. Thouless and Y. S. Wu, Phys. Rev. B 31, 3372 (1985).
- [14] M. Büttiker, Phys. Rev. B 38, 9375 (1988).
- [15] R. E. Prange and R. Joynt, Phys. Rev. B 25, 2943 (1982).
- [16] B. I. Halperin, Phys. Rev. B 25, 2185 (1982).
- [17] H. R. Brown and P. R. Holland, American Journal of Physics, 67, 204 (1999).
- [18] N. Thiebaut, l'EHQF dans la bicouche et le puits large, Univ. Paris Sud - Paris XI, 2015.
- [19] D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett., 48, 1559 (1982).
- [20] H. L. Stormer, Rev. Mod. Phys., 71, 875 (1999).
- [21] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett., 50, 1395 (1983).
- [22] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett., 51, 605 (1983).
- [23] R.P. Feynman, Phys. Rev. 91 1291 (1953).

- [24] J.K. Jain, Composite Fermions, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2007.
- [25] M. Kasner and W. Apel, Phys. Rev. B 48 11435 (1993).
- [26] U. Girlich and M. Hellmund, Phys. Rev. B 49 R17488 (1994).
- [27] V.M. Alveredian and N.E. Bonesteel, Phys. Rev. B 58 1451 (1998).
- [28] R. Morf, N. D'Ambrumenil and S. Das Sarma, Phys. Rev. B 66 075408 (2002).
- [29] H. Fukuyama, P.M. Platzman and P.W. Anderson, Phys. Rev. B 19 5211 (1979).
- [30] J.K.Jain, Phys. Rev. Lett. 63, 199(1989);Phys. Rev. B41,7653(1990);Science 266, 1199(1994).
- [31] Z.F. Ezawa, quantum Hall effects,World Scientific, Singapore2008.
- [32] B.I.Halperin, P.A. Lee and N. Read, Phys. Rev. B 47 7312 (1993).
- [33] L. Landau, Sov. Phys. JETP, 5 101 (1957).
- [34] R.L. Willett and al., Phys. Rev. Lett., 71 3846 (1993).
- [35] J.H. Smet and al., Phys. Rev. Lett.77 2272 (1996).
- [36] G. Moore and N. Read, Nuc. Phys. B 360 362 (1991).
- [37] N. Read and D. Green, Phys. Rev. B 61 10267 (2000).
- [38] G. Murthy and R. Shankar, Rev. Mod. Phys., 75:1101–1158, Oct 2003.
- [39] S. M. Girvin and T.Jach, Phys. Rev. B, 29:5617–5625, May 1984.
- [40] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. B 44, 5246 (1991).
- [41] B.I. Halperin, P.A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B 47, 7312 (1993).
- [42] N.E. Bonesteel, Phys. Rev. B51, 9917 (1995).
- [43] G. Giuliani and G Vignale, Cambridge University, Press,2005.
- [44] E. V. Tsiper, J. Math. Phys. 43, 1664 (2002).
- [45] E.V. Tsiper, Department of Chemistry, Princeton University(27 Nov 2001).
- [46] Tesi di Laurea Triennale,Univ. degli Studi di Milano,2016–2017,828482.
- [47] J. Almeida, Department of Theoretical Physics, University of Ulm (Ulm, Germany), avril 2012.