

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان –

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –  
Faculté de TECHNOLOGIE



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : Génie Energétique

**Par** : BOUCHERIT Nadjat  
KHATER Hasna

### **Sujet**

**Amélioration du transport du multiproduit pétrolier dans  
un oléoduc par la régression des corrélations**

Soutenu publiquement, le 08/06/2017, devant le jury composé de :

M GHERNAOUE Med Amine	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M SAIM Rachid	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de mémoire
M BENNACER Djamel	Docteur	Univ. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire
M BENRAMDANE Mohamed	MCB	Univ. Tlemcen	Examineur
M ALIANE Abdenour	MAA	Univ. Tlemcen	Examineur

*- Dédicaces -*

*C'est avec une joie et un réel plaisir que je dédie ce mémoire à :*

*A mon très cher Père :*

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis pour mon bien être. Ce travail est le résultat de tes sacrifices que tu as consentis pour me voir réussir.*

*A ma très chère mère :*

*Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Que dieu lui procure la bonne santé et une longue vie.*

*A ma chère grand-mère, mes chères sœurs, mon frère et ma belle nièce.*

*A toute ma grande famille, mes amies et mes collègues de la promotion  
2016-2017*

*A tous ceux qui me sont chers et qui sont aujourd'hui absents.*

*Hasna*

*- Dédicaces -*

*Je commence par rendre grâce à Dieu le tout puissant et sa bonté, pour la patiente, la compétence et le courage qu'il m'a donné pour arriver là.*

*Avec tout mon amour éternel et avec l'intensité de mes émotions, je dédie ce mémoire à l'âme de mon cher père, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, j'espère que tu habites les paradis ;*

*À ma chère maman qui m'a toujours soutenu avec ses encouragements et qui m'a donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance, en hommage affectueux  
Que dieu lui procure la bonne santé et une longue vie ;*

*À tous mes proches de la famille BOUCHERIT et plus particulièrement, mes sœurs, mes frères et mes nièces chacun d'eux à son nom, sans oublier les familles MESEQUEM, TIGHEDOUINE et MEKKAOUI;*

*À mes chères amies : Sabrina, Saliha, Dalila, Nawal, Samira, Fatima, Kenza et Houda ainsi que mes collègues de l'Université ;*

*Mes dédicaces à tous qui m'ont enseigné le long mon parcours.*

*Nadjat*

## - Remerciements -

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir guidé vers le bon chemin de la lumière et de savoir.

*Nous tenons à remercier notre encadreur le **professeur SAIM Rachid** et notre Co-encadreur **Dr. BENNACER Djamel**, pour leurs orientations éclairées et leurs aides pour élaborer notre mémoire de fin d'études.*

*Nous remercions Monsieur : **A. GHERNAOUE**, Professeur de l'Université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il nous fait en examinant notre mémoire.*

*Nos vifs remerciements également, **Mr. M. BENRAMDANE**, Maitre de Conférences de l'Université de Tlemcen et **Mr. A. ALIANE**, Maitre Assistant de l'Université de Tlemcen qui nous ont fait l'honneur pour avoir accepté d'être président et membres de jury.*

*Nous adressons également nos sincères remerciements à l'encadrement de l'entreprise de Commercialisation des Produits Pétroliers « NAFTAL » pour leur encouragement et pour leur aide et soutien.*

*Enfin Nous remercions toute personne a contribué à l'enrichissement et la réussite de ce travail.*

## ملخص:

نقل منتجات بترولية متعددة عبر خط أنابيب هو الطريقة الأكثر استعمالا في الصناعة البترولية و هو معرض لمشكلة حساب حجم الخليط المتشكل بين مائعين بترولين في اتصال مباشر و تدفق متعاقب بالرغم من البحوث و التطورات التي أجريت في هذا السياق إلا أنها لم تتوصل إلى الدقة في حساب حجم هذا الخليط ربما بسبب خصائص و محيط التجارب التي تم من خلالها الوصول إلى مختلف العلاقات التجريبية..

نقدم في هذه المذكرة دراسة تجريبية لظاهرة الخليط عبر خط أنابيب بطول 168 كم يتشكل من ثلاثة أقطار مختلفة. لحساب حجم الخليط استعملنا علاقتين ل Austin-Palfrey و MVEPC و ذلك لتوحيد قطر الأنبوب، و بالتالي استعمال الطول المكافئ الناتج عن كل طريقة في نموذج حساب حجم الخليط. عند مقارنة النتائج النظرية و التجريبية المسجلة على عدة عمليات نقل عبر الأنبوب، لوحظ خطأ نسبي في حساب حجم الخليط مقدر ب 11.12% و 5.44% للعلاقتين على الترتيب. وعلى إثر هذا ارتأينا تعديل و تحسين علاقات حساب حجم الخليط باستعمال تقنيات الإرتداد الخطي و غيرها، حيث بعد هذا التعديل تم تسجيل خطأ نسبي مقدر ب 0.41% بالنسبة للعلاقتين.

**الكلمات المفتاحية :** منتجات بترولية، خط أنابيب، الخليط، مائعين بترولين، و تدفق متعاقب، Austin-Palfrey، MVEPC، تقنيات الإرتداد الخطي.

## Résumé

Le transport des produits pétroliers par les pipelines multiproduit est l'un des modes les plus développés dans l'industrie pétrolière. Néanmoins, il connaît certaines contraintes, notamment la quantification du volume du mélange qui se produit à l'interface de deux produits en contact et en écoulement séquentiel. Malgré les recherches avancées, les corrélations développées dans ce domaine ne satisfassent pas la précision du calcul, peut être à cause des conditions d'expériences pour lesquelles les corrélations sont obtenues. Dans notre étude, nous avons mené des expériences sur un pipeline multiproduit de 168Km de long, de géométrie variable composée de trois tronçons de diamètres différents, pour enfin enregistrer les volumes du mélange au bout final de la canalisation. Nous avons fait appel à deux approches, d'Austin-Palfrey et MVEPC qui permettent d'uniformiser la conduite en générant une longueur équivalente. L'application du modèle analytique basé sur les deux longueurs équivalentes issues des deux approches a révélé une approximation de calcul moyenne comparée à l'expérimental, où nous avons obtenu des erreurs relatives de 11.12% et 5.44% respectivement pour Austin-Palfrey et MVEPC. L'utilisation des techniques de régressions a permis d'ajuster les modèles de prédiction du volume du mélange en améliorant la précision de calcul, où les erreurs relatives enregistrées après régression sont de 0.41% pour les deux approches d'Austin-Palfrey et MVEPC.

**Mots clés :** Produits pétroliers, pipeline multiproduit, Mélange, écoulement séquentiel, Austin-Palfrey, MVEPC, Régression

---

## Abstract

The transportation of petroleum products through multiproduct pipelines is one of the most developed modes in the petroleum industry. Nevertheless, it knows some constraints, in particular the mixture volume calculation, which occurs at the interface of two products in contact flowing sequentially in pipe. Despite advanced research, the developed correlations in this field do not satisfy the calculation accuracy, perhaps because of experiments conditions for which correlations are obtained. In our study, we conducted experiments on a multi-product pipeline of 168km in length, of variable geometry composed of three segments with different diameters, and finally recording the mixture volumes at the end of the pipeline. We used two approaches, Austin-Palfrey and MVEPC that can make constant the diameter of the pipe by generating an equivalent length. Applying the analytical model based on the two equivalent lengths from the two approaches revealed a medium approximation of mixture prediction compared to experimental recording, where we obtained relative errors of 11.12% and 5.44% respectively for Austin-Palfrey and MVEPC. Using regression techniques allowed adjusting mixture volume predicting models by improving the calculation precision, where the relative errors obtained after regression are 0.41% for both Austin-Palfrey and MVEPC approaches.

**Keywords:** Petroleum product, multiproduct pipeline, Mixture, Interface, Austin-Palfrey, MVEPC, Regression

---

# Sommaire

## Chapitre 1. Synthèse bibliographique

1.1	Introduction .....	3
1.2	Revue de la littérature.....	4
1.3	Modèles d'Austin-Palfrey.....	8
1.3.1	Formules de calcul du volume du mélange.....	8
1.3.2	Zone critique.....	8
1.4	Calcul du volume de mélange .....	9
1.4.1	Longueur équivalent pour une conduite de diamètres variables diamètres.....	10
1.4.2	Viscosité de mélange.....	11
1.4.3	Diamètre intérieur du tuyau .....	12
1.4.4	Nombre de Reynolds:.....	12
1.4.5	Coefficient de frottement .....	12
1.4.6	Coefficient de dispersion axial, K.....	13
1.5	Conclusion :.....	14

## Chapitre 2. Etude expérimentale

2.1	Introduction .....	15
2.2	Notion sur les écoulements multi-fluide (Pipeline multiproduit).....	15
2.2.1	Définition du batching.....	16
2.3	Présentation du dispositif expérimental .....	16
2.3.1	Présentation de la Canalisation MP, Stations de pompage et Terminaux.....	16
2.3.2	Présentation de la station de pompage (SP1) .....	18
2.3.3	Présentation de la station de pompage (SP2) .....	19
2.3.4	Présentation du Poste de Coupure .....	19
2.3.5	Présentation du Terminal Arrivée.....	20
2.4	Réception des interfaces du mélange dans le Terminal Arrivée .....	21
2.5	Relevés des données et des résultats expérimentaux .....	24
2.5.1	Concentrations admissibles et de coupure.....	24
2.5.1.2	Concentrations de coupure .....	24
2.5.2	Techniques expérimentales pour la quantification du volume du mélange.....	25
2.6	Configurations pratiques de l'interface du mélange .....	28
2.7	Conclusion.....	30

## Chapitre 3. Application des modèles mathématiques et approches pour l'estimation du volume du mélange

3.1	Introduction .....	31
3.2	Théorie de formation de l'interface du mélange .....	31
3.3	Solutions des modèles mathématiques de diffusion.....	32
3.3.1	Résolution de l'équation de diffusion pure.....	32
3.3.2	Résolution de l'équation de convection diffusion .....	33
3.4	Calcul du volume de mélange .....	35
3.4.1	Longueur équivalente pour les géométries complexes.....	35
3.4.2	Formulations pour le calcul de volume de mélange .....	37

3.5	Conclusion.....	40
<b>Chapitre 4. Calcul de prédiction du volume du mélange comparé aux résultats du terrain</b>		
4.1	Introduction .....	41
4.2	Application du modèle mathématique et formulations pour la prédiction du volume du mélange .....	41
4.2.1	Volumes du mélange prédits (Approche d’Austin-Palfrey) comparé aux résultats expérimentaux.....	44
4.2.2	Volumes du mélange prédits (MVEPC) comparé aux résultats expérimentaux.....	46
4.3	Interprétation des résultats .....	47
4.4	Conclusion.....	47
<b>Chapitre 5. Ajustement des modèles de calcul du volume du mélange par les techniques de régression</b>		
5.1	Introduction .....	48
5.2	Contexte et notion de liaison fonctionnelle entre deux variables .....	48
5.3	Techniques de régression .....	48
5.4	Régression linéaire .....	49
5.4.1	Méthode des moindres carrés pour la détermination des coefficients de la droite de régression.....	49
5.4.2	Différents modèles de régression linéaire .....	52
5.5	Calcul et signification de coefficient de corrélation .....	53
5.5.1	Interprétation selon le signe .....	53
5.5.2	Interprétation selon l’intensité.....	53
5.6	Test statistique sur le coefficient de corrélation.....	54
5.7	Application des modèles de régression pour l’ajustement des formules de calcul du volume du mélange :.....	54
5.8	Détermination des coefficients de corrélation et des paramètres de la droite de régression.....	58
5.8.1	Ajustement de corrélation basée sur la longueur équivalente d’Austin-Palfrey .....	58
5.8.2	Ajustement de corrélation basée sur la longueur équivalente de l’approche MVEPC.....	66
5.8.3	Test statique « Test de Student » .....	74
5.9	Conclusion.....	74
<b>Chapitre 6. Etude paramétrique : effets quelques paramètres sur l’interface du mélange</b>		
6.1	Introduction .....	75
6.2	Influence de la géométrie.....	75
6.3	Influence du nombre de Reynolds.....	76
6.4	Influence de la masse volumique .....	78
6.4.1	Variation de la masse volumique du produit le plus lourd .....	79
6.4.2	Variation de la masse volumique du produit le plus léger .....	79
6.5	Comportement du coefficient de diffusion .....	80
6.6	Conclusion.....	81

## Conclusion

## Nomenclature :

$C$	: Concentration
$C_0$	: Concentration initiale
$D$	: Diametre du pipe ( $m$ )
$K$	: Coefficient de dispersion ( $m^2/s$ )
$f$	: Coefficient de friction
$K^*$	: Coefficient de dispersion adimensionnel
$L$	: La longueur du pipe ( $m$ )
$C'$	: La longueur d'interface pour un diamètre $D$
$L'_i$	: La longueur équivalente de $i^{\text{ème}}$ canalisation
$L_{eq}$	: La <sup>longueur</sup> équivalente de la conduite ( $m$ )
$L_m$	: La longueur du mélange ( $m$ )
$n$	: Le nombre d'observations
$P_e$	: Nombre de peclét
$Q_v$	: Débit volumique ( $m^3/h$ )
$R_e$	: Nombre de reynolds
$R$	: Rayon du pipe ( $m$ )
$S$	: La section de la conduite ( $m^2$ )
$t$	: Temps ( $s$ )
$V_p$	: Volume du pipe ( $m^3$ )
$V_m$	: Volume théorique du mélange ( $m^3$ )
$V_{mExp}$	: Volume expérimentale du mélange ( $m^3$ )
$Z$	: L'argument de la concentration de copure
$\%Er$	: Erreur relative
$\nu$	: La viscosité cinématique ( )
$\nu_A$	: La viscosité cinématique du produit A
$\nu_B$	: La viscosité cinématique du produit B
$\rho$	: La masse volumique ( $kg/m^3$ )
$\bar{x}$	: La moyenne de $x$
$\bar{y}$	: La moyenne de $y$
$r_{xy}$	: Coefficient de corrélation
$\sigma_x$	: Ecart type de $x$
$\sigma_y$	: Ecart type de $y$
$\sigma_x^2$	: Variance de $x$
$\sigma_y^2$	: Variance de $y$
$\sigma_{xy}$	: Covariance ( $cov(x, y)$ )

---

## Liste des figures

Fig. 1. 1 Représentation d'un Transfert de deux produits dans un pipeline .....	3
Fig. 1. 2 Mécanisme de diffusion proposé par Taylor .....	5
Fig. 1. 3 Evolution de la zone du mélange dans un pipeline Multiproduit .....	7
Fig. 1. 4 Relation entre le facteur de dispersion longitudinal $C^2/dL$ et le nombre de Reynolds .....	8
Fig. 1. 5 Schéma du pipeline avec les deux segments supposés .....	11
Fig. 1. 6 Volume du mélange en fonction de la longueur du pipe .....	11
Fig. 1. 7 Comparaison du paramètre de dispersion prédit avec les données expérimentales pour $Sc=1.0$ .....	13
Fig. 2. 1 Ecoulement multiproduit avec des séparateurs (Pistons racleurs) .....	16
Fig. 2. 2 Exemple d'une séquence de transport du multiproduit pétrolier (Batching) .....	16
Fig. 2. 3 Profil altimétrique du pipeline multiproduit [1, 31] .....	17
Fig. 2. 4 Station de pompage (SP1).....	18
Fig. 2. 5 Station de Pompage (SP2) .....	19
Fig. 2. 6 Poste de Coupure.....	20
Fig. 2. 7 Terminal Arrivée – Réception des mélanges .....	21
Fig. 2. 8 Fenêtre d'introduction des plages de masses volumiques.....	22
Fig. 2. 9 Dispositif expérimental (Réception du multiproduit pétrolier) [1, 31].....	23
Fig. 2. 10 Codification du batch.....	24
Fig. 2. 11 Concentrations admissibles et de coupure .....	24
Fig. 2. 12 Bacs de stockage du mélange avec la règle de lecture.....	25
Fig. 2. 13 Fenêtre de lecture de volume de mélange.....	26
Fig. 2. 14 Evolution de la masse volumique dans la zone du mélange (1 <sup>ère</sup> concentration de coupure).....	26
Fig. 2. 15 Evolution de la masse volumique dans la zone du mélange (2 <sup>ème</sup> concentration de coupure).....	27
Fig. 2. 16 Courbe du débit instantané durant la période du passage de l'interface du mélange ...	27
Fig. 2. 17 Différentes configurations du mélange .....	28
Fig. 3. 1 Interface des fluides en écoulement séquentiel (Contact vertical) .....	32
Fig. 3. 2 Evolution de la zone de mélange le long du pipeline multiproduit .....	32
Fig. 3. 3 Illustration de la longueur équivalente d un pipeline a trois segments .....	36
Fig. 3. 4 Identification de zone du mélange .....	38
Fig. 4. 1 Volumes du mélange prédits (Approche d'Austin-Palfrey) .....	45
Fig. 4. 2 Volumes de mélange calculé par MVEPC et mesuré .....	47
Fig. 5. 1 Courbe de dispersion des points (Nuage de points) .....	49
Fig. 5. 2 Ajustement linéaire du modèle de prédiction du mélange .....	58
Fig. 5. 3 Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression linéaire .....	59
Fig. 5. 4 Ajustement exponentiel du modèle de prédiction du mélange .....	60
Fig. 5. 5 Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression exponentielle .....	61

Fig. 5. 6 Ajustement puissance du modèle de prédiction du mélange .....	62
Fig. 5. 7 Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression puissance ....	63
Fig. 5. 8 Ajustement logarithmique du modèle de prédiction du mélange .....	64
Fig. 5. 9 Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression logarithmique .....	65
Fig. 5. 10 Ajustement linéaire du modèle de prédiction du mélange .....	66
Fig. 5. 11 Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression linéaire .....	67
Fig. 5. 12 Ajustement exponentiel du modèle de prédiction du mélange .....	68
Fig. 5. 13 Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression exponentielle .....	69
Fig. 5. 14 Ajustement puissance du modèle de prédiction du mélange .....	70
Fig. 5. 15 Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression puissance .....	71
Fig. 5. 16 Ajustement logarithmique du modèle de prédiction du mélange .....	72
Fig. 5. 17 Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression logarithmique .....	73
Fig. 6. 1 Influence de la géométrie sur le volume de mélange .....	76
Fig. 6. 2 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (8").....	77
Fig. 6. 3 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (10").....	77
Fig. 6. 4 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (12").....	78
Fig. 6. 5 Influence de la masse volumique de produit lourd sur le volume de mélange .....	79
Fig. 6. 6 Influence de la masse volumique de produit léger sur le volume de mélange .....	80
Fig. 6. 7 Comportement du coefficient de diffusion adimensionnel .....	80

---

## Liste des tableaux

Tableau 1. 1 Nombre de Reynolds critiques .....	9
Tableau 1. 2 Formes des méthodes de calcul de volume de mélange .....	10
Tableau 2. 1 Plage des masses volumiques des carburants et des mélanges .....	17
Tableau 2. 2 Données et résultats expérimentaux du volume de mélange .....	29
Tableau 4. 1 Récapitulatif des résultats : Régimes d'écoulement, les longueurs équivalentes et les concentrations de coupure .....	42
Tableau 4. 2 Résultats des Coefficients de Diffusion et de l'interface du mélange .....	43
Tableau 4. 3 Volumes du mélange prédits (Approche d'Austin-Palfrey) .....	44
Tableau 4. 4 Volumes du mélange prédits (Approche MVEPC) .....	46
Tableau 5. 1 Données et détails des différentes transformations pour la régression du modèle de calcul du mélange basé sur l'approche d'Austin-Palfrey .....	56
Tableau 5. 2 Données et détails des différentes transformations pour la régression du modèle de calcul du mélange basé sur l'approche MVEPC .....	57
Tableau 5. 3 Coefficients de corrélation et paramètres de la droite de régression - Approche d'Austin-Palfrey.....	58
Tableau 5. 4 Volumes de mélange calculé après régression linéaire (Approche d'Austin-Palfrey) .....	59
Tableau 5. 5 Volumes de mélange calculé après régression exponentielle (Approche d'Austin-Palfrey) .....	61
Tableau 5. 6 Volumes de mélange calculé après régression puissance (Approche d'Austin-Palfrey) .....	63
Tableau 5. 7 Volumes de mélange calculé après régression logarithmique (Approche d'Austin-Palfrey) .....	65
Tableau 5. 8 Coefficients de corrélation et paramètres de la droite de régression - Approche MVEPC.....	66
Tableau 5. 9 Volumes de mélange calculé après régression linéaire (Approche MVEPC) .....	67
Tableau 5. 10 Volumes de mélange calculé après régression exponentielle (Approche MVEPC) .....	69
Tableau 5. 11 Volumes de mélange calculé après régression puissance (Approche MVEPC).....	71
Tableau 5. 12 Volumes de mélange calculé après régression logarithmique (Approche MVEPC) .....	73
Tableau 5. 13 Test statistique .....	74

# | Introduction

Les produits pétroliers peuvent être transportés à partir des raffineries, aux centres de stockage et de distributions selon plusieurs modes : pipelines, bateaux (Marine), wagons citernes et des camions citernes.

Le mode de transport par pipelines est une pratique courante dans l'industrie pétrolière, il est considéré comme le mode le plus favorable, car il assure le transport massif des produits pétroliers dans les meilleurs délais.

Très souvent, les produits pétroliers ou les produits de même catégorie, sont pompés séquentiellement dans une même conduite appelée « Pipeline Multiproduit ». L'envoi successif de ces produits de mêmes ou différentes caractéristiques physicochimiques est connu sous le nom « Batching ».

Malgré les grands avantages que possède ce mode de transport, la naissance du mélange dans la zone de contact de deux produits en écoulement séquentiel est inévitable. Ce mélange présente une contrainte et un souci pour les industriels, et cela suite aux pertes économiques importantes que peut générer ce mélange. Le mélange en question (Appelé aussi contaminât) n'est en aucun cas commercialisable et nécessite des dépenses supplémentaires pour son traitement ou reclassement, car ce dernier ne peut pas être dégradé directement dans les produits purs et doit être donc stocké séparément dans des réservoirs appropriés.

Nous avons intérêt donc à réduire au minimum le mélange. Pour cela, il est nécessaire de comprendre le mécanisme qui forme ce mélange pour pouvoir le quantifier et étudier les paramètres qui l'amplifient ou le réduire.

La zone du mélange qui se développe aux limites de l'interface des fluides en contact augmente quand ces derniers se déplacent le long du pipeline. Un tel phénomène est conduit par la dispersion des fluides en contact le long de l'oléoduc, sous l'effet de la diffusion et la convection qui les transportent en aval et les diffusent (La convection est essentiellement dominante) [1, 2].

Dans notre mémoire, nous avons mené un travail expérimental, où nous nous sommes intéressées au calcul de l'interface mélange lors de l'écoulement séquentiel des carburants dans une conduite de géométrie variables, constituées de trois longueurs et diamètres différents.

Nous avons introduit la longueur équivalente basée sur les deux approches, d'Austin-Palfrey et MVEPC (Mixing-Volume-Equivalent-Pipe-Concept) dans le modèle de calcul de l'interface du mélange. Les résultats de calcul seront comparés aux enregistrements expérimentaux.

Le présent mémoire est organisé en six chapitres :

Le chapitre 01 présente une synthèse bibliographique qui résume les travaux entamés par certains auteurs dans la définition, étude et l'analyse du phénomène de l'interface du mélange. Nous avons montré des solutions et des modèles de prédiction proposés par certains auteurs, dont leurs résultats ont été comparés aux résultats expérimentaux. Nous avons présentés ainsi l'approche de la longueur équivalente à une longueur de conduite de géométrie complexe (Diamètres variables) et d'autres paramètres (Viscosité du mélange, le nombre de Reynolds, le coefficient de diffusion,...) qui sont nécessaires dans les modèles de calcul.

Dans le chapitre 02, le dispositif expérimental, constitué d'un pipeline multiproduit d'une longueur de 168km et de géométrie variable (trois segments de diamètres différents) est décrit. Ce pipeline approvisionne la région Ouest et Sud-ouest de l'Algérie en carburants. Les techniques des enregistrements expérimentaux (Volumes du mélange) et les relevés de données du terrain sont expliqués et détaillés.

Le chapitre 03 est consacré au modèle mathématique avec les solutions des volumes du mélange obtenues par la résolution des équations de diffusion pure et de convection diffusion. Pour des raisons de simplification du modèle mathématique, la méthode de calcul de la longueur équivalente basée sur les deux approches d'Austin-Palfrey et MVEPC (Mixing-Volume-Equivalent-Pipe Concept) et qui a pour but d'uniformiser la géométrie du pipeline est présentée, pour qu'elle soit introduite.

Dans le chapitre 04, le modèle mathématique aussi basé sur les deux approches de la longueur équivalente est appliqué sur plusieurs expériences, pour la prédiction de l'interface du mélange, en tenant compte les paramètres d'écoulement ainsi que les paramètres physicochimiques des fluides circulant dans le pipeline multiproduit. Les résultats théoriques sont comparés aux résultats du terrain, enregistrés au niveau de la salle de contrôle par le système DCS (Distributed Control System).

Dans le chapitre 05, nous avons procédé à l'ajustement du modèle mathématique reposé toujours sur les deux approches d'Austin-Palfrey et MVEPC, et cela par les techniques de régression, dans le but d'améliorer l'approximation et la précision de calcul.

Dans le chapitre 06, nous avons effectué une étude paramétriques pour comprendre l'effet de certains paramètres, géométriques, physicochimiques et d'écoulement sur l'évolution de l'interface du mélange.

Le présent travail est finalisé par une conclusion.

# Chapitre 01

## Synthèse bibliographique

### 1.1 Introduction

Le transport des produits pétroliers à travers un seul pipeline à partir des raffineries vers les centres de stockage et de distribution est une pratique courante dans l'industrie pétrolière. A chaque fois où deux produits s'écoulent successivement dans une même conduite et sans aucune séparation physique (Les pistons racleurs), la zone de contact est le siège de développement d'une interface du mélange.

Le volume du mélange qui en résulte, généralement appelé contaminât ne peut pas être qualifié comme produit pur et ne possède en aucun cas le caractère commercialisable. De ce fait, le mélange doit être séparément stocké dans des réservoirs appropriés, dimensionnés spécialement pour son recueil à chaque fin d'opération de pompage successif des produits transportés (figure 1.1) [3].

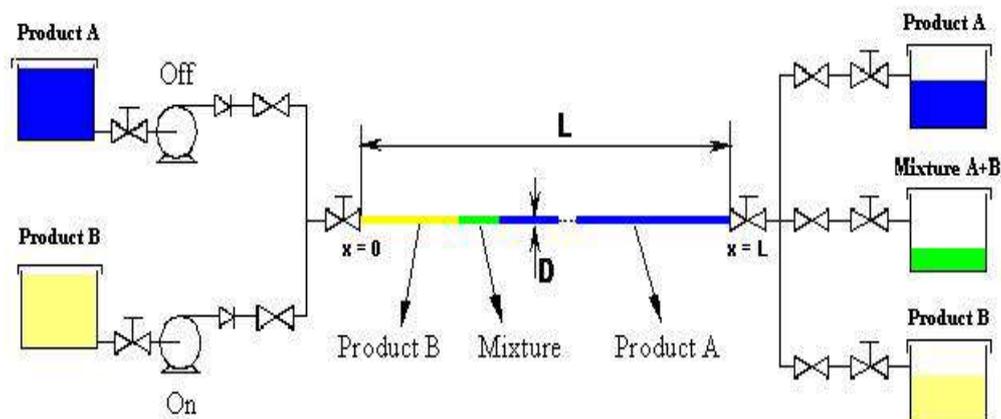


Fig. 1. 1 Représentation d'un Transfert de deux produits dans un pipeline

Les écoulements ont été intensivement étudiés pendant les cinquante dernières années, dont des différents modèles ont été présentés par plusieurs chercheurs à l'instar de : Birge (1947) [4], Smith et Schulze (1948) [5], Hull et Kent (1952) [5], Taylor (1953-1954) [6, 7],

Aris (1956), Levenspiel et Smith (1957) [8], Levenspiel (1958) [9], Sjenitzer (1958) [10], Austin et Palfrey (1963-64) [11], Z. Aunicky (1970) [12], Alexander Concha Demoya et Hugo Quiroga Cruz et Pedro Nel Benjumea Hernandez (2007) [13].

## 1.2 Revue de la littérature

L'une des premières analyses théoriques de la dispersion axiale, terme évoqué par Taylor (1953) et Aris (1956) a été reportée pour la première fois en 1922 (Taylor, 1922). Le terme, dispersion axiale dénote la diffusion longitudinale d'un mélange (appelé contaminât) qui est due aux effets convectifs et diffusifs répandus dans un écoulement. Il a été largement suggéré comme le phénomène régissant le processus du mélange à l'interface de deux produits en écoulement successif dans les pipelines pétroliers. Le mélange axial était d'abord pensé à être une conséquence du simple transport convectif du contaminât, qui est dû aux fluctuations de vitesse dans le système (Taylor, 1922). L'équation (1.1) de l'évolution de l'interface du mélange a été présentée en termes de la vitesse d'écoulement et du coefficient de corrélation pour la vitesse dans un point particulier en fonction du temps [8].

$$\frac{d^2[X^2]}{dt^2} = 2[u^2]R_\varepsilon \quad (1.1)$$

Où,  $X$  est la distance parcourue par une particule dans une quantité de temps,  $u$  est la vitesse de particule et  $R_\varepsilon$  est le coefficient de corrélation relatif la vitesse de la particule ( $u$ ).

(Birge, 1947) a dérivé une relation empirique dans laquelle la longueur de l'interface était directement proportionnelle à une puissance de longueur constante. Selon Birge (1947) et Smith et Schulze (1948), le diamètre du tuyau n'était pas considéré comme un paramètre dans le calcul du Longueur de l'interface [8, 14, 15].

(Smith & Schulze, 1948) ont dérivé une équation empirique pour déterminer la longueur de l'interface dans un tuyau de diamètre 2" qui était presque droit, mais il a été enroulé dans un grand nombre de spires. D'après Taylor, le modèle de Smith et Schulze surestime la longueur de l'interface dans certains cas et la sous-estime dans d'autres cas. Cela a été justifié par l'utilisation d'un tronçon de tube de petite longueur et des pompes dans les deux côtés de la conduite, qui avait un grand effet de dispersion sur l'écoulement [14, 15].

Le nombre de Reynolds a été inclus par la suite dans l'équation empirique donnée par Smith et Schulze pour aboutir à l'équation (1.2).

$$S = L^{0.62} \left( 0.55 + \frac{1075}{R_e^{0.87}} \right) \quad (1.2)$$

Où,

$S$ : La longueur de l'interface,

$L$ : La longueur de pipe

Plusieurs investigateurs ont déduit à partir des études expérimentales et théoriques que la longueur d'interface s'avérait augmentée le long de la longueur du pipeline. La longueur de l'interface était proportionnelle à la puissance de la longueur et l'exposant variait de 0,48 à 0,62 [14, 15].

Austin-Plafrey (1964) et Birge (1947) ont trouvé que pour un batch Essence-Essence l'exposant devait être inférieur à 0,5. Cela était traduit par le fait que Birge (1947) n'avait pas tenu compte du diamètre du pipe.

Taylor (1953,1954) a étudié la dispersion axiale due à la diffusion convective et a suggéré que le profil de vitesse joue un rôle important dans la dispersion de la matière dans la direction axiale et a proposé un modèle similaire à l'équation conventionnelle de diffusion (Fick) pour déterminer l'étendu de la dispersion axiale [8, 14, 16, 17].

L'équation gouvernante de la vitesse de diffusion du contaminant dans la direction longitudinale est présentée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

Taylor a développé deux équations pour calculer le coefficient de dispersion longitudinale dans les régimes laminaire et turbulent. Les équations sont encore largement utilisées [8].

$$K_v = \frac{R^2 u_0^2}{192D} \quad (14)$$

$$K_\tau = 10.1 R u_\tau = 3.57 D \bar{u} \sqrt{f} \quad (15)$$

Avec,

$K_v$  : Pour le régime laminaire.

$K_\tau$  : Pour le régime turbulent.

$u_\tau$  : Vitesse de frottement.

Taylor a visualisé la dispersion axiale comme un processus à deux étapes. La première étape consiste le profil de concentration du contaminant sensé être incliné dans une forme parabolique (Régime laminaire) en raison du gradient de vitesse, avec la diffusion sur la section transversale qui fait disparaître les variations de concentration radiale dans une deuxième étape (Fig. 1.2).

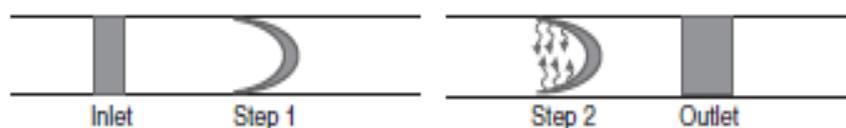


Fig. 1. 2 Mécanisme de diffusion proposé par Taylor

Taylor a montré que la répartition spatiale de la concentration moyenne d'un soluté dans la section transversale est Gaussienne. Il a montré que la distribution de la concentration moyenne peut être décrite par la seconde loi de Fick [17].

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1.6)$$

Tels que,

- $C$  : La concentration moyenne ;
- $t$  : Le temps ;
- $D_x$  : Le Coefficient de dispersion longitudinal ;
- $x$  : La distance le long de l'axe longitudinal ;
- $u$  : La Vitesse moyenne.

Pour un écoulement turbulent, (Taylor, 1954) a considéré la distribution radiale de la concentration selon l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( D_r(r) r \frac{\partial c(x,r)}{\partial r} \right) = r \left( u(r) \frac{\partial c(x,r)}{\partial x} + \frac{\partial c(x,r)}{\partial t} \right) \quad (1.7)$$

Où,

- $C(x,r)$  : La concentration à la position  $(x,r)$  ;
- $r$  : Position radiale à parti du centre ;
- $D_r$  : Le Coefficient de diffusion radial ;
- $u(r)$  : La vitesse à la position  $r$  ;

Aris (1956) a souligné que les expressions de Taylor ont été obtenues que pour les systèmes avec le nombre de Schmidt égale à 1 ( $Sc=1$ ). Aris a ensuite corrigé l'expression de Taylor en ajoutant la diffusivité moléculaire au coefficient de dispersion axiale et a amélioré les prédictions pour les systèmes à faible nombre de Schmidt (gaz).

Pour les nombres de Schmidt supérieurs à 1, ce qui est le cas avec les liquides l'effet de la diffusivité moléculaire est négligeable et peut donc être ignoré [16].

D'après les observations expérimentales, (Bailey et Gogarty, 1962) ont donné une relation entre le coefficient de dispersion et la longueur de la zone de mélange, exprimée par l'équation suivante :

$$K = \frac{L_m^2}{13.1 t} \quad (1.8)$$

(Austin-Palfrey, 1964) ont déduit que la longueur de l'interface était différente pour le régime laminaire et le régime turbulent et cela à partir des équations empiriques développées sur une large base de données expérimentale.

Ils résumaient les facteurs influençant la longueur de l'interface du mélange produite lors de l'écoulement séquentiel du multiproduit dans un pipeline, à savoir [11, 15, 16, 18, 19]:

- La distance parcourue par l'interface.
- La vitesse moyenne d'écoulement dans la canalisation.
- Le diamètre interne du tuyau.
- Le nombre de Reynolds.
- La viscosité cinématique du mélange de produits (Mélange 50-50 par volume).
- Le coefficient de frottement des tuyaux

La longueur de l'interface  $C$  s'avère augmentée avec la distance  $L$  parcourue par le mélange, si toutes les autres variables sont conservées constantes (Fig. 1.3).

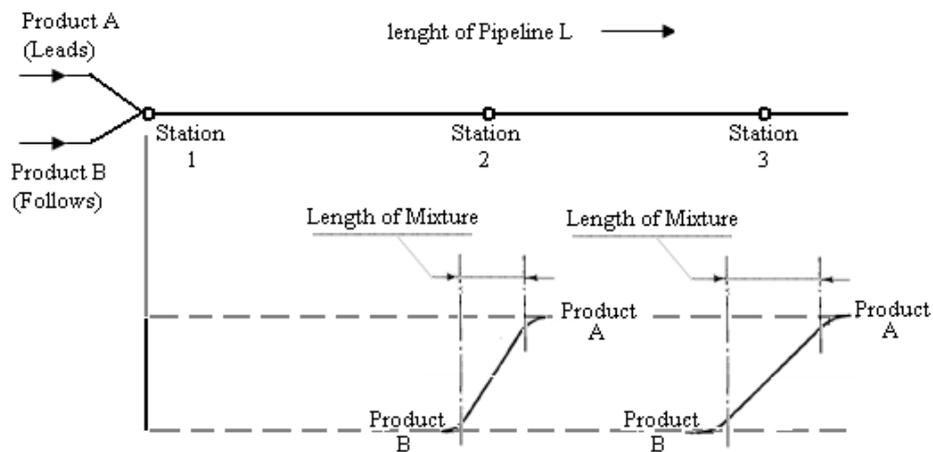


Fig. 1. 3 Evolution de la zone du mélange dans un pipeline Multiproduit

Pour une vitesse d'écoulement constante, la longueur de l'interface est fonction de la longueur de la conduite ( $c \rightarrow L^{0.5}$ ), donc :

$$\frac{C^2}{L} = \text{constante}$$

Austin-Palfrey, ont ainsi présenté le comportement de l'interface en fonction du diamètre de la conduite et les plages du nombre de Reynolds.

$$\frac{C^2}{DL} = f(Re)$$

Ils ont trouvé que pour :

$$Re < 8000$$

$$c \rightarrow L^{0.5}$$

$$Re > 11000$$

$$c \rightarrow L^{0.62}$$

Le comportement du facteur  $C^2/DL$  est présenté dans la figure (1.4).

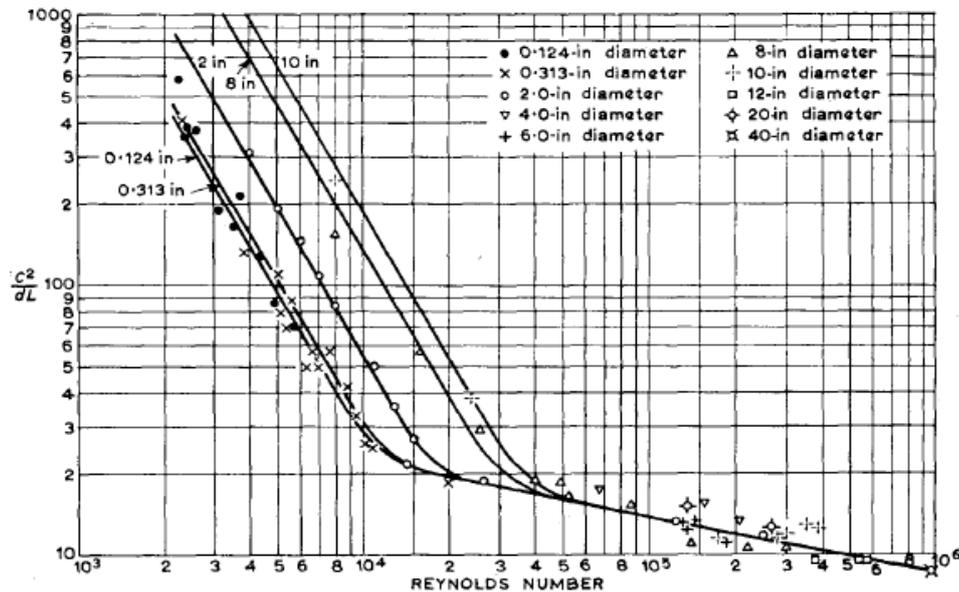


Fig. 1. 4 Relation entre le facteur de dispersion longitudinal  $C^2/dL$  et le nombre de Reynolds

### 1.3 Modèles d'Austin-Palfrey

#### 1.3.1 Formules de calcul du volume du mélange

Austin a développé des formules pour le calcul de la longueur de l'interface produite lors du transport du multiproduit pétrolier à travers un seul pipeline. Après l'analyse d'un nombre d'expériences, ils ont abouti à la formulation générale suivante :

$$C_i = K_{Rei} L_{Di}^{0.5} D_i^{0.5} Re_i^{-0.1} \quad (1.9)$$

$C_i$  : La longueur de l'interface au bout de chaque tronçon ( $i$ ) du pipeline constitué de plusieurs segments de diamètres différents ;

$L_{Di}$  : La longueur équivalente pour chaque diamètre  $D_i$

$K_{Rei}$  : Coefficient déterminé à partir de  $Re_i$

$Re$  : Le nombre de Reynolds pour un mélange de fraction 50 ÷ 50%.

#### 1.3.2 Zone critique

Une zone de transition entre les deux régimes est définie par le nombre de Reynolds critique qui est exprimé par l'équation (1.9) et à partir duquel le coefficient  $K_{Rei}$  introduit dans l'équation (1.10) est déterminé.

$$Re_j = 10000e^{2.72 * D^{-0.5}} \quad (1.10)$$

Les valeurs du nombre de Reynolds critique et ( $Re_j$ ) correspondantes à quelques diamètres du pipe,  $D$  sont données dans le Tableau (1.1).

**Tableau 1. 1** Nombre de Reynolds critiques pour quelques Diamètres de tuyau

$D$ , inches	$Re$
2	18500
4	22000
6	29000
8	34000
10	40000
12	46000
20	72000

#### 1.4 Calcul du volume de mélange

Dans les formules de base pour le calcul du volume du mélange  $V_m$ , Taylor et Jufin utilisent différentes méthodes, mais arrivent au même résultat suivant :

$$\frac{V_m}{V_p} = 2. Pe^{-0.5} . (Z_1 - Z_2) \quad (1.11)$$

Tel que,

$$Pe = \frac{K}{u. L} \quad (1.12)$$

$V_m$  : Le volume de mélange

$V_p$  : Le volume de pipe

$Pe$  : Nombre de Peclet

$Z$  : L'argument de concentration

En cas des limites symétriques ( $Z_1 = -Z_2$ ), l'équation (1.10) devient :

$$\frac{V_m}{V_p} = 4. Z. Pe^{-0.5} \quad (1.13)$$

Le tableau (1.2) résume les différentes corrélations de calcul du volume du mélange, obtenues par un nombre d'auteurs [14, 18].

**Tableau 1. 2** Formes des méthodes de calcul de volume de mélange

Modèle	Relation	
Smith & Schulze	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^{0.38} \cdot \left(\frac{268.75 \cdot Re^{0.13} + 0.1375 \cdot Re}{Re}\right)$	(1.14)
Birge	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^{0.48-0.52} \cdot 0,471$	(1.15)
Fowler	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.4} \cdot a_1(Re, C)$	(1.16)
Jablonskij	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.4} \cdot \left(\frac{6585 + 0.4925 \cdot Re}{Re}\right) \left(\sqrt[3]{\frac{1}{C_1}} - \sqrt[3]{\frac{1}{C_2}}\right) \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$	(1.17)
Taylor	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.3} \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^{0.0625} \cdot (z)$	(1.18)
Sjenitzer	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.43} \cdot \frac{37,8}{Re^{0.45}} \cdot (z)$	(1.19)
Jufin	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0.4} \cdot \frac{1400 + 227 \cdot 10^{-6} \cdot Re^{1.445} \cdot 0,5}{Re} \cdot (z) \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{4.2}$	(1.20)
Jablonskij	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.5} \cdot \frac{3000 + 60,7 \cdot Re^{0.545} \cdot 0,5}{Re} \cdot (z)$	(1.21)
Chizgilov	$\frac{V_m}{V_p} = 4 \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.5} \cdot \frac{1400 + 227 \cdot 10^{-6} \cdot Re^{1.445} \cdot 0,5}{Re} \cdot (z) \cdot (a_2)$	(1.22)
Kosenkov	$\frac{V_m}{V_p} = 51 \cdot \left(0,011 + 0,075 \left[\sqrt[3]{\frac{1}{C_1}} - \sqrt[3]{\frac{1}{C_2}}\right]\right) \cdot \left(\frac{2300}{Re}\right)^{0.765} + \beta \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0.4}$	(1.23)

Avec :

B : Coefficient de Kosenkov.

$a_1$  : Coefficient de Fowler.

$a_2$  : Coefficient de Chizgilov.

#### 1.4.1 Longueur équivalente pour une conduite de diamètres variables diamètres [20]

Certains modèles, à l'instar des modèles d'Austin-palfrey ne sont applicables que sur des géométries uniformes, c'est-à-dire sans changement de diamètre. mais devant certaines contraintes, le pipeline peut être conçu avec plusieurs segments, de longueurs et de diamètres différents (Tracé du pipeline, calculs économiques, ...etc. ).

Pour que le modèle d'Austin-Palfrey soit applicable, ces auteurs ont pensé à uniformiser le pipeline dans leur approche de calcul (Fig. 1.4). Ils ont défini la longueur équivalente comme une longueur pour laquelle, au bout final de la conduite équivalente le volume du mélange enregistré soit le même en comparant avec la conduite de diamètres variables.

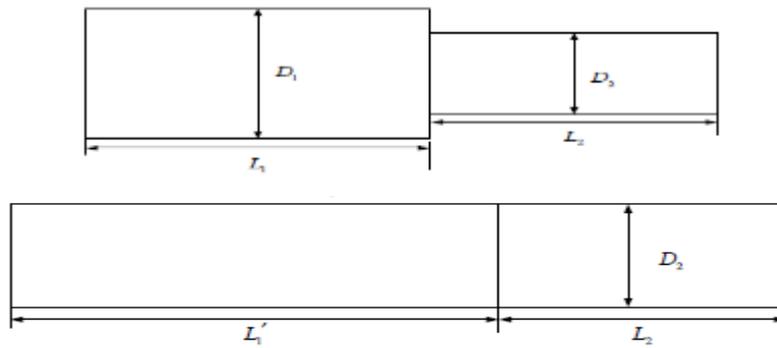


Fig. 1. 5 Schéma du pipeline avec les deux segments supposés

Une fois la longueur est uniformisée, le volume du mélange qui est fonction de la longueur peut être relevé graphiquement de la Figure 1.5.

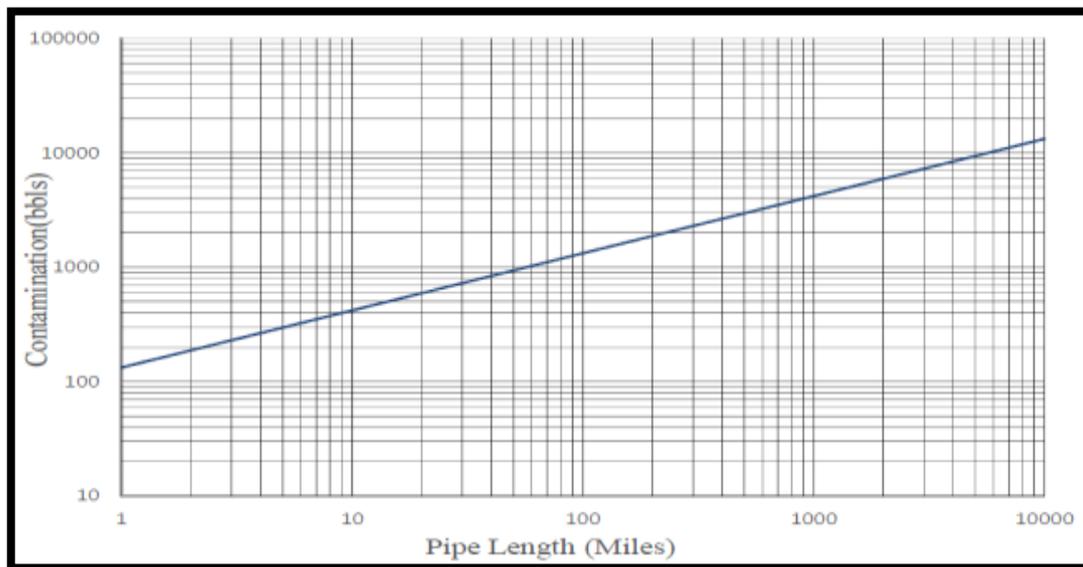


Fig. 1. 6 Volume du mélange en fonction de la longueur du pipe

### 1.4.2 Viscosité de mélange

Dans plusieurs modèles de calcul de la longueur de l'interface du mélange [20-22], la viscosité est un paramètre essentiel, souvent introduit dans le calcul du nombre de Reynolds.

La viscosité du mélange est calculée par la formule empirique (1.13) [20, 23, 24] et elle est utilisée dans le calcul du nombre de Reynolds.

$$\begin{aligned} & \lg \lg(v_m \cdot 10^6 + 0.89) \\ &= \frac{1}{2} \lg \lg(v_A \cdot 10^6 + 0.89) + \frac{1}{2} \lg \lg(v_B \cdot 10^6 + 0.89) \end{aligned} \quad (1.24)$$

$\nu_m$  : La viscosité cinématique du mélange, ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$\nu_A$  : La viscosité cinématique du produit A, ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$\nu_B$  : La viscosité cinématique du produit B, ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

La viscosité du mélange binaire de deux produits A et B peut être exprimée par la formule (1.14) présentée par Gambill [3, 25-30].

$$\nu_m^{1/3} = C_A \nu_A^{1/3} + C_B \nu_B^{1/3} \quad (1.25)$$

Par hypothèse au niveau du mélange,  $C_A=C_B=0.5$ , alors l'équation (1.25) devient,

$$\nu_m^{1/3} = 0.5 (\nu_A^{1/3} + \nu_B^{1/3}) \quad (1.26)$$

### 1.4.3 Diamètre intérieur du tuyau

Le diamètre de la conduite s'avère avoir un rôle et effets importants sur la longueur de l'interface. Un grand nombre de chercheurs à l'instar de Taylor (1954) et Sjenitzer (1958) ont conclu, que la longueur de l'interface proportionnelle au diamètre du tuyau. Austin-Palfrey (1964) ont montré à leur tour que la longueur de l'interface est proportionnelle à la racine carrée du diamètre du tuyau.

### 1.4.4 Nombre de Reynolds:

La longueur de l'interface est fonction de nombre Reynolds. Jablonski (1946), Taylor (1954) et Sjenitzer (1958) croient que le nombre de Reynolds est inversement proportionnel à la longueur de l'interface du mélange.

$$R_e = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} \quad (1.27)$$

$R_e$  : Le nombre de Reynolds,

$\rho$  : La masse volumique,

$u$  : La vitesse moyenne,

$D$  : Le diamètre du pipe,

$\mu$  et  $\nu$  : Sont respectivement la viscosité dynamique et cinématique.

### 1.4.5 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement  $f$  est un paramètre souvent introduit dans les corrélations de calcul du coefficient de diffusion, qui le paramètre le plus essentiel dans le calcul du volume du mélange et qui caractérise le phénomène de diffusion.

La rugosité s'exprime comme :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \quad (1.28)$$

$\varepsilon$  : La rugosité absolue du tuyau,

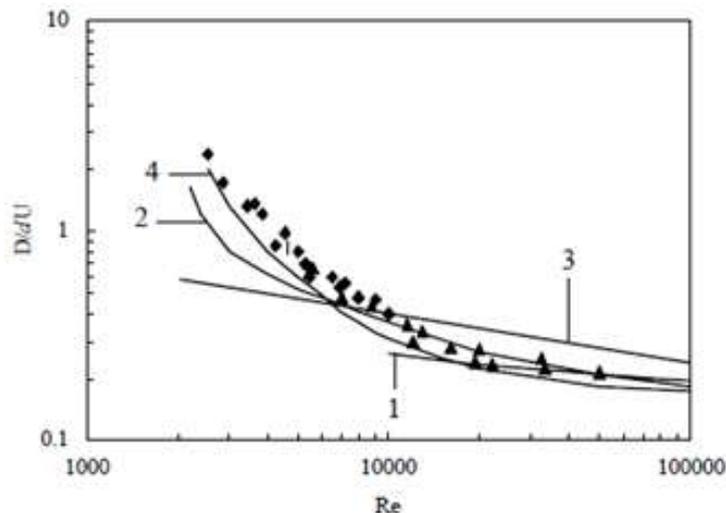
$D$  : Le diamètre intérieur du tuyau.

### 1.4.6 Coefficient de dispersion axial, $K$

L'intensité du mélange des liquides miscibles dans La direction longitudinale peut être exprimée par le coefficient de Diffusion  $K$ , qui corrèle les propriétés physiques du système d'écoulement, cela a été préalablement défini Par Taylor.

(Tichacek et al. ,1957) ont analysé le problème du mélange axial dans les pipelines. Ils ont montré que la précision sur le paramètre de dispersion adimensionnel  $K^*$  ( $D/dU$ ) dépend fortement du profil de vitesse. Ils ont également précisé que les calculs pour les nombres de Reynolds inférieurs à 10000 ont besoin d'attention particulière. Ils ont observé que les valeurs de  $D/dU$  augmentent rapidement quand l'écoulement s'approche du régime laminaire.

La courbe de  $D/dU$  en fonction de  $Re$  pour les modèles de Taylor et de Tichacek et al., est montrée dans la Fig. (1.3). Le modèle de Taylor montre la variation linéaire pour la gamme entière de  $Re$ .



**Fig. 1. 7** Comparaison du paramètre de dispersion prédit avec les données expérimentales pour  $Sc=1.0$

- ▲ Données expérimentales de Keyes (1955);
- ◆ Données expérimentales de Flint et Eisenklam (1969);
- (1) Taylor (1954); (2) Tichacek et al. (1957); (3) Sittel et al. (1968)
- (4) Flint et Eisenklam (1969).

## 1.5 Conclusion :

Plusieurs études sur le mécanisme du mélange dans les pipelines multiproduit ont été effectuées. Ces études ont montré l'importance du coefficient de diffusion dans le mécanisme de formation du mélange.

Le modèle de diffusion pure et de convection-diffusion avec le paramètre fictif, connu sous le nom de coefficient de dispersion axiale, est la méthode généralement solutionnée pour prédire le mélange longitudinal dans les écoulements des pipelines.

Pour uniformiser les géométries complexes du pipeline, l'approche de la longueur équivalente de tube est optée pour qu'elle soit combinée avec avec les modèles ou les corrélations de calcul du volume du mélange.

La formule d'Austin-Palfrey ne peut être appliquée que sur des conduites de diamètre constant sur toute la longueur.

# Chapitre 02

## Etude expérimentale

### 2.1 Introduction

En vue de l'importance des pipelines dans le transport des produits dans l'industrie pétrolière, il est bien nécessaire de mieux comprendre la relation entre la théorie et l'expérimental, en ce qui concerne le phénomène de l'interface du mélange qui s'amorce lorsque les produits sont transportés par baths (lots).

Le problème de l'estimation de l'interface du mélange est commun dans les pipelines multiproduit, où l'envoi successif de différents produits à travers un seul pipeline s'effectue sans aucune séparation physique. Dans ces conditions, une interface est développée à la zone de contact des deux produits adjacents purs et qui sont en écoulement séquentiel dans la même conduite.

Le mélange généré doit être impérativement localisé et quantifié afin qu'il soit séparé des produits purs, car ce dernier n'est en aucun cas commercialisable et nécessite des traitements spécifiques (la correction de sa qualité ou son reclassement).

### 2.2 Notion sur les écoulements multi-fluide (Pipeline multiproduit)

Le transfert des produits pétrolier à travers un seul pipeline à partir des raffineries vers les différents terminaux et centres de stockage et de distribution, est une pratique courante dans L'industrie pétrolière.

Ce transport peut être pratiqué selon deux manières différentes, la première consiste à utiliser des séparateurs physiques (appelés pistons racleurs) entre chaque deux produits adjacents (Fig. 2.1), par contre la deuxième alternative, consiste à pomper séquentiellement les différents produits sans aucune séparation, cette dernière génère couramment des problèmes opérationnels et économiques qui sont conséquences de la formation des zones de mélange à l'interface des produits qui sont en contact et en écoulement séquentiel.

Le mélange (l'interface), généralement appelé contaminât, ne peut pas être dégradé dans aucun des produits purs et doit donc être stocké dans des réservoirs du mélange spécialement conçus pour cette raison [3].



Fig. 2. 1 Ecoulement multiproduit avec des séparateurs (Pistons racleurs)

Dans ce cas, on suppose initialement que le produit identifié comme **A** est déjà pompé à un moment donné, le produit **B** est injecté dans la ligne après l'alignement adéquat des réservoirs, le produit B commence à pousser le produit **A** avec une formation d'une zone de mélange à l'interface du produit.

### 2.2.1 Définition du batching

Le batching est un processus où les différents produits sont transportés successivement à travers le même pipeline (Fig. 2.2). De grandes quantités de différents types et catégories sont transportées de la raffinerie vers les centres de stockage par cette opération.

La rapidité de transport et l'économie d'exploitation font de ces pipelines un dispositif extrêmement populaire dans l'industrie du transport pétrolier. De tels pipelines sont fréquemment appelées «Pipelines Multiproduit».

Les produits sont transportés en série de batch ou lots et sont mélangés aux points de contact.

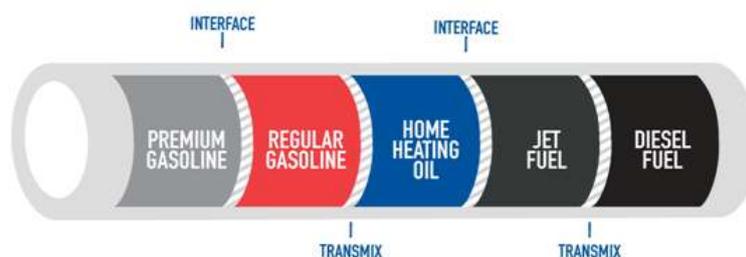


Fig. 2. 2 Exemple d'une séquence de transport du multiproduit pétrolier (Batching)

## 2.3 Présentation du dispositif expérimental

### 2.3.1 Présentation de la Canalisation MP, Stations de pompage et Terminaux

Le dispositif expérimental est matérialisé par un pipeline multiproduit (MP) de longueur de 168 km, constitué de trois segments de diamètres et longueurs différents (Fig. 2.3). La canalisation en question interconnecte deux stations de pompage (**SP1** et **SP2**) et deux terminaux, elle relie la raffinerie Ouest de l'Algérie aux Centres de stockage et de distribution qui desservent les régions Ouest et Sud Ouest de l'Algérie en carburants [1, 31].



Fig. 2. 3 Profil altimétrique du pipeline multiproduit [1, 31]

Les caractéristiques géométriques sont ainsi présentées dans la figure (2.3)

Plusieurs produits sont transportés par le biais de ce pipeline, par exemple :

- Le Gasoil « GO »
- Le Super Carburant « SCA » (Essence Super)
- Le Carburant « CA » (Essence Normale)
- L'Essence Sans Plomb « SP »
- Le Kérosène ou le Jet A1 (Appelé aussi carburéacteur).

Les plages de masses volumiques caractérisant les carburants étudiés sont comprises dans les intervalles définis par le standard algérien présenté dans le tableau (2.1)

Tableau 2. 1 Plage des masses volumiques des carburants et des mélanges

Produit	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )	
	Min	Max
Gasoil « GO »	810	860
Essence Super « SCA »	730	760
Essence Normale « CA »	710	765
Essence sans plomb « SP »	725	775
Mélange : GO – SCA	770	810
Mélange : GO – CA	765	810
Mélange : GO – SP	775	810

La canalisation MP interconnecte essentiellement trois terminaux et un poste intermédiaire, à savoir :

- Un Terminal de Départ, qui constitue la station de pompage 1 « SP1 ».
- Un Poste de Coupure et de Reprise, qui constitue la station de reprise de pompage « SP2 » et un terminal de réception de multiproduit.
- Un Poste de Coupure, spécialement conçu pour réduire le diamètre du 10" au 8" pour des raisons technico-économiques.
- Un Terminal Arrivée, où l'opération de réception des produits purs et des mélanges est assurée.

### 2.3.2 Présentation de la station de pompage (SP1)

La station (SP1) est constituée essentiellement :

- Deux électropompes d'expédition identiques montées en parallèles.
- Un banc de comptage constitué de deux lignes identiques. Chaque ligne est dotée d'un compteur à turbine.
- Un banc d'étalonnage mobile des deux compteurs.
- Un densimètre dynamique en ligne.
- Deux vannes de régulation de pression « PCV » et une vanne manuelle de laminage.
- Un circuit de recyclage du fluide.
- Un circuit de récupération des purges et de décharge des soupapes.
- Une citerne de récupération des purges d'une capacité de 6 m<sup>3</sup>, munie de pompe de vidange, d'un débit de 20 m<sup>3</sup>/h.
- Une gare racleur de départ.
- Une sous station électrique.
- Une salle de contrôle.



Fig. 2. 4 Station de pompage (SP1)

### 2.3.3 Présentation de la station de pompage (SP2)

- Une gare racleur Arrivée.
- Un banc de comptage constitué de deux lignes identiques. Chaque ligne est dotée d'un compteur à turbine.
- Un densimètre dynamique en ligne.
- Deux vannes de régulation de pression et une vanne manuelle de laminage sur la ligne de stockage.
- Un collecteur de liaison aux installations existantes, qui se ramifie sur cinq lignes distinctes.
- Deux bacs de stockage du contaminât, d'une capacité de  $500 \text{ m}^3$  chacun.
- Deux pompes de transfert de contaminât, d'un débit unitaire de  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ .
- Un circuit de récupération des purges et de décharge des soupapes.
- Une citerne de récupération des purges d'une capacité de  $6 \text{ m}^3$ , munie de pompe de vidange, d'un débit de  $20 \text{ m}^3/\text{h}$ .
- Deux électropompes de reprises identiques, montées en parallèle.
- Un circuit de recyclage du fluide.
- Deux vannes de régulation de pression et une vanne manuelle en de laminage sur la ligne de reprise du produit vers le terminal arrivée.
- Une gare racleur départ.
- Une salle de contrôle.



Fig. 2. 5 Station de Pompage (SP2)

### 2.3.4 Présentation du Poste de Coupure

- Une gare racleur arrivée sur la canalisation  $\text{Ø}10''$ .
- Une gare racleur de départ sur la canalisation  $\text{Ø}8''$ , vers le terminal arrivée.
- Un circuit de récupération des purges et de décharge des soupapes.
- Une citerne de récupération des purges d'une capacité de  $6 \text{ m}^3$ , munie de pompe de vidange, d'un débit de  $20 \text{ m}^3/\text{h}$ .



Fig. 2. 6 Poste de Coupure

### 2.3.5 Présentation du Terminal Arrivée

- Une gare racleur arrivée, instrumentée et conçue pour la réception des différents types de racleurs (Pistons de séparation des produits, l'outil intelligent,...etc.)
- Un système de comptage doté d'un calculateur électronique destiné pour les transactions commerciales et un densimètre dynamique en ligne, qui fournissent les informations suivantes.
  - Paramètres d'écoulement : Débits, Températures, Pressions ...
  - Paramètres physicochimiques : Densités, viscosité ...etc.
- Un densimètre dynamique en ligne.
- Deux lignes pour la régulation automatique du débit et le contrôle de la pression d'exploitation et une vanne de laminage.
- Un collecteur de stockage des produits purs (GO, SCA, CA, SP) et du contaminât (mélanges).
- Deux Bacs de stockage du contaminât, d'une capacité de 500 m<sup>3</sup> chacun.
- Un circuit de récupération des purges et de décharges des soupapes.
- Une citerne de récupération des purges d'une capacité de 6 m<sup>3</sup>, munie de pompe de vidange, d'un débit de 20 m<sup>3</sup>/h.
- Un système de détection automatique de l'incendie, constitué essentiellement de détecteurs de flammes, fumée et de chaleur.
- Une Salle de contrôle dotée d'un système de supervision équipé des automates programmables, pupitre de commande, Synoptique de procès et des PC de contrôle et de supervision.



Fig. 2. 7 Terminal Arrivée – Réception des mélanges

## 2.4 Réception des interfaces du mélange dans le Terminal Arrivée

Le procédé présenté sur la [Figure \(2.9\)](#), constitue le dispositif expérimental où toutes nos expériences ont été menées. Ce procédé est composée de :

- Un parc de stockage des carburants au niveau de la raffinerie.
- Une station de pompage et une station de reprise de pompage vers le Terminal Arrivée, situé au bout final de la canalisation multiproduit.
- Un centre de stockage pour la réception des produits purs.

Les produits sont envoyés sous forme de batchs, l'un après l'autre de la raffinerie et sont introduits dans le pipeline et pompés successivement à travers la station de pompage [SP1](#).

Au début, un contact vertical est établi entre le produit et celui qui le précède. Dans le temps et avec l'évolution de l'écoulement, la zone de mélange se développe et progresse jusqu'à l'extrémité finale du pipeline multiproduit (Terminal Arrivée). Le nombre d'interfaces peut être identifié par le nombre des produits purs introduits dans le pipeline. Chaque contact carburant-carburant est la zone de formation du mélange.

Au niveau du Terminal, est installée la chaîne de comptage constituée de compteurs à turbines et un densimètre électronique, permettant le basculement automatique du produit en fonction de sa nature, par mesure directe de sa masse volumique et son envoi au réservoir de stockage y afférent.

A partir du système de supervision de la salle de contrôle ([DCS](#) : Distributed Control System) du Terminal Arrivée, la plage des masses volumiques relative à chaque produit ([Tableau 2.1](#)) est préalablement introduite dans le WinCC « Windows Controler Center » ([Fig. 2.8](#)).



Fig. 2. 8 Fenêtre d'introduction des plages de masses volumiques (Système de supervision)

Les plages de densités : 770-810kg/m<sup>3</sup>, 765-810kg/m<sup>3</sup> et 775-810kg/m<sup>3</sup> constituent la zone du mélange

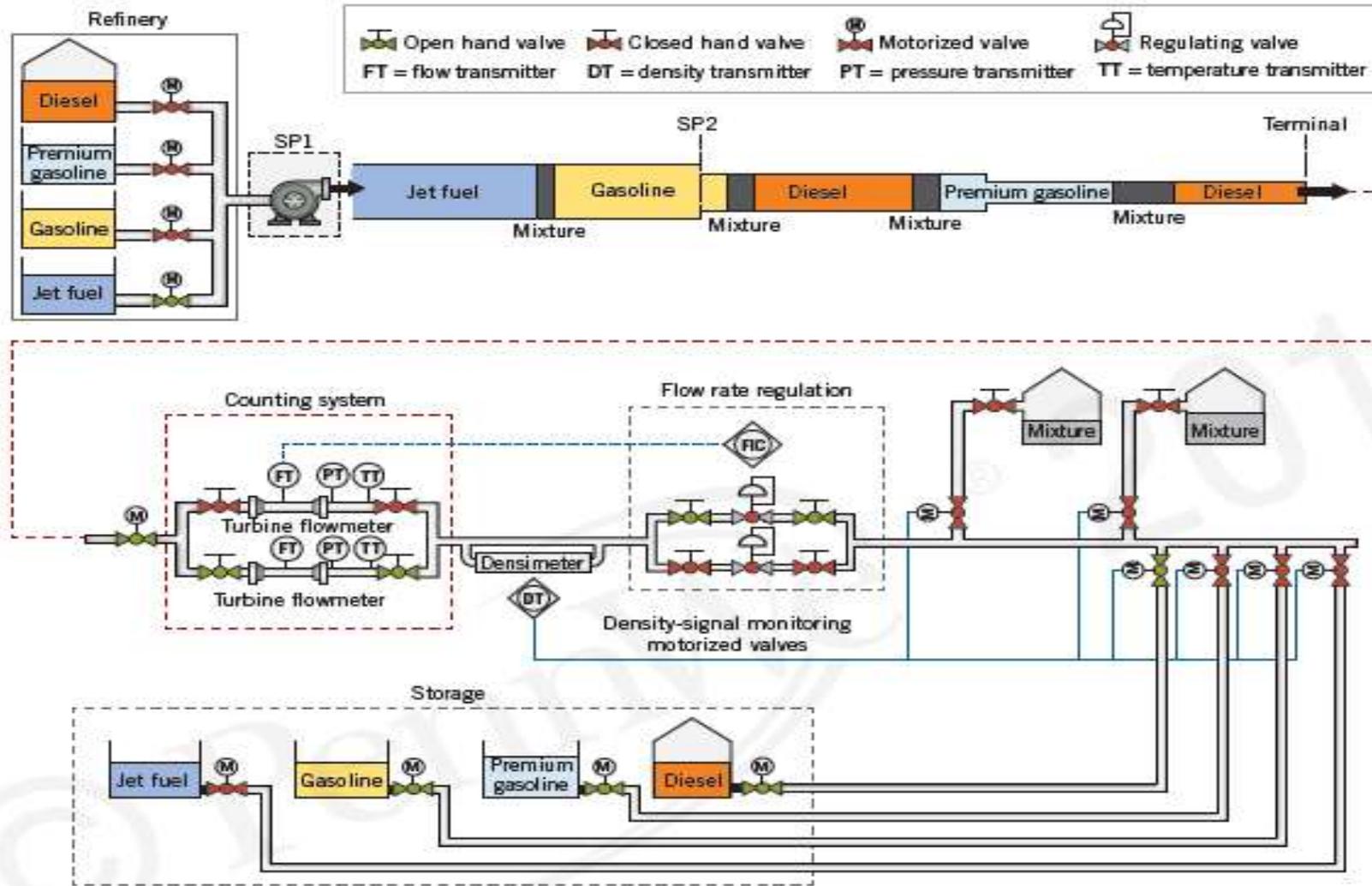


Fig. 2. 9 Dispositif expérimental (Réception du multiproduit pétrolier) [1, 31]

## 2.5 Relevés des données et des résultats expérimentaux

Dans les expériences menées sur les séquences de transport du multiproduit pétrolier, deux configurations du mélange sont considérées ;

1. Contact GO – SCA ou SCA - GO
2. Contact GO - SP

Afin de collecter facilement les données et les résultats du terrain pour les différentes expériences menées, chaque batch est codifié comme suit :

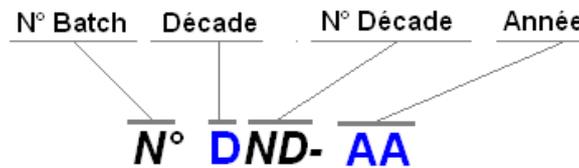


Fig. 2. 10 Codification du batch

### 2.5.1 Concentrations admissibles et de coupure

#### 2.5.1.1 Concentration admissible

La concentration est exprimée en quantité de carburant  $A$  qui peut être ajoutée à un autre carburant  $B$  sans changement de ses propriétés physiques.

#### 2.5.1.2 Concentrations de coupure

Les concentrations de coupure pour chaque configuration de mélange sont déterminées à partir des masses volumiques limites de chaque carburant. Ces concentrations subdivisent la zone du mélange en trois parties (Fig. (2.11)), dont deux fractions sont caractérisées par les concentrations  $C_{B1}$  et  $C_{B2}$  ( $C_{A1}$  et  $C_{A2}$ ), telles que les quantités à ces limites de concentrations peuvent être rajoutées respectivement aux carburants  $A$  et  $B$ . La zone intermédiaire délimitée par les concentrations  $C_{B1}$  et  $C_{B2}$  constitue l'interface étudiée [32].

Les concentrations de coupure vont servir pour déterminer les arguments ( $Z_1, Z_2$ ).

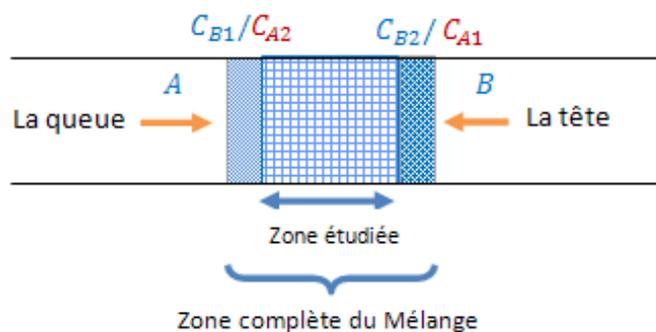


Fig. 2. 11 Concentrations admissibles et de coupure

A partir de la formule  $\sum m_i = m$  ( $i = A, B$ ) [33], on aboutit aux équations (2.1) et (2.2) des concentrations de coupure suivantes [34] :

$$C_{B1} = \frac{\rho_{m1} - \rho_A}{\rho_B - \rho_A} \quad \text{et} \quad C_{A1} = 1 - C_{B1} \quad (2.1)$$

$$C_{B2} = \frac{\rho_{m2} - \rho_A}{\rho_B - \rho_A} \quad \text{et} \quad C_{A2} = 1 - C_{B2} \quad (2.2)$$

Puisque  $C_A + C_B = 1$ , alors  $C_{A1}$  et  $C_{A2}$  seront exprimées comme suit :

$$C_{A1} = 1 - C_{B1} = \frac{\rho_B - \rho_{m1}}{\rho_B - \rho_A} \quad (2.3)$$

$$C_{A2} = 1 - C_{B2} = \frac{\rho_B - \rho_{m2}}{\rho_B - \rho_A} \quad (2.4)$$

$\rho_{m1}$ ,  $\rho_A$  et  $\rho_B$  représentent respectivement, la masse volumique du mélange, la masse volumique du produit A et la masse volumique du produit B.

### 2.5.2 Techniques expérimentales pour la quantification du volume du mélange

Les volumes du mélange sont relevés de plusieurs façons, à partir de :

- La règlette du bac (Barème de jaugeage) ;
  - DCS à partir du WinCC ;
  - DCS à partir des graphes de variation de la masse volumique des produits lors du « Switch over » des vannes à chaque changement de produit ;
- Relevé du volume à partir des bacs de mélange



Fig. 2. 12 Bacs de stockage du mélange avec la règlette de lecture

- Relevé du volume du mélange à partir du DCS (PC de supervision)



Fig. 2. 13 Fenêtre de lecture de volume de mélange

- Relevé du volume du mélange à partir des courbes de masses volumiques et du débit :

A partir de la courbe d'évolution de la masse volumique, on projette le temps relatif à la première masse volumique qui correspond à la première concentration de coupure (Fig. 2.14), puis on relève le temps relatif à la deuxième masse volumique qui correspond à la deuxième concentration de coupure (Fig. 2.15).

Et à partir de la courbe du débit instantané (Fig. 2.16), on relève le débit moyen dans l'intervalle des concentrations de coupure, qui coïncide avec l'intervalle du temps de passage du mélange.

L'intervalle de temps compris entre la première et la deuxième coupure représente le temps de passage du mélange. La quantité du mélange est obtenue donc, par la multiplication du débit par le temps de passage.

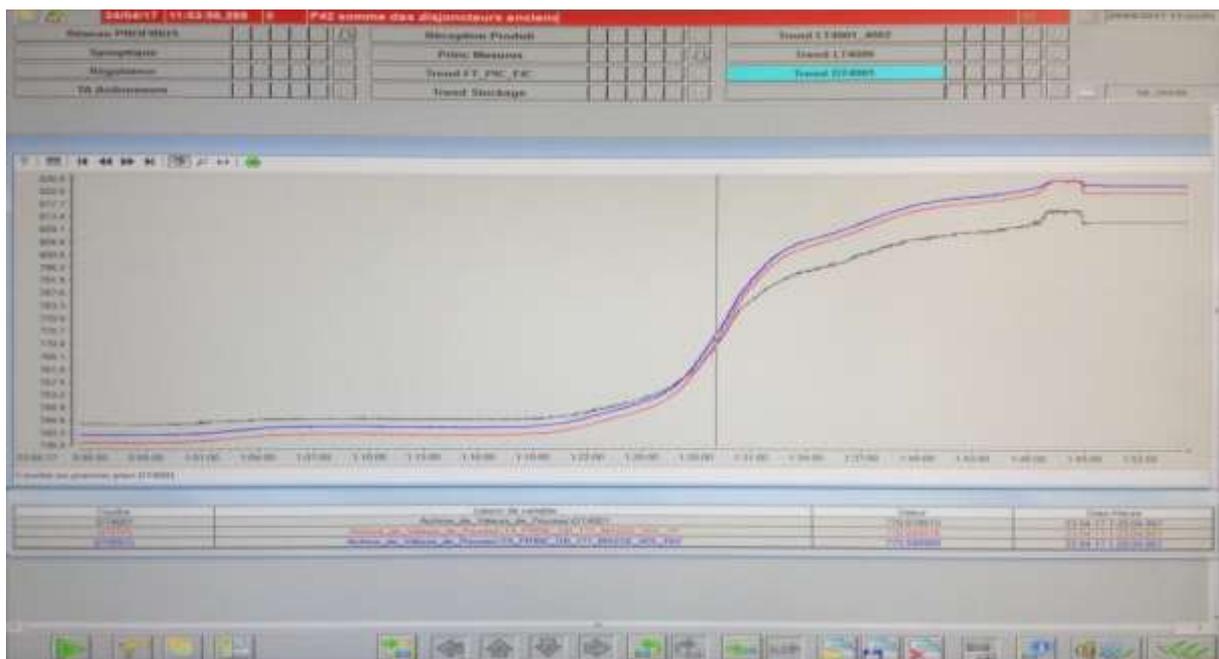


Fig. 2. 14 Evolution de la masse volumique dans la zone du mélange (1<sup>ère</sup> concentration de coupure)



Fig. 2. 15 Evolution de la masse volumique dans la zone du mélange (2<sup>ème</sup> concentration de coupure)

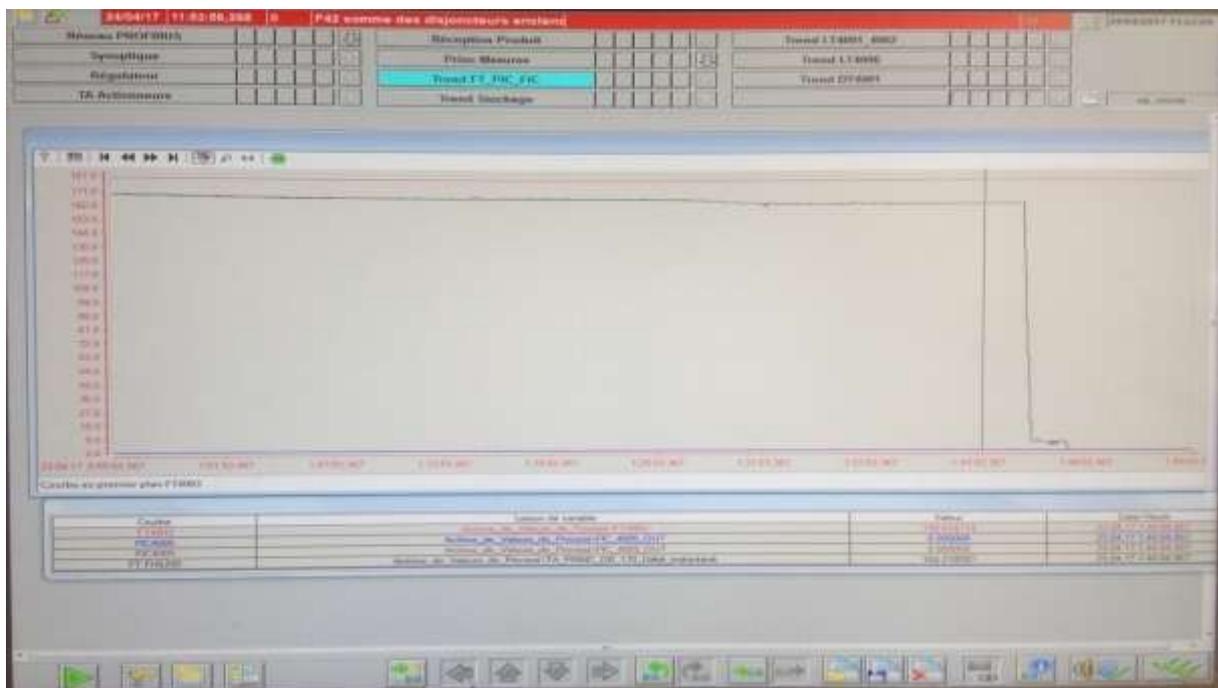


Fig. 2. 16 Courbe du débit instantané durant la période du passage de l'interface du mélange

## 2.6 Configurations pratiques de l'interface du mélange

La figure (2.17) montre les différentes configurations du mélange (contacts) étudiées.

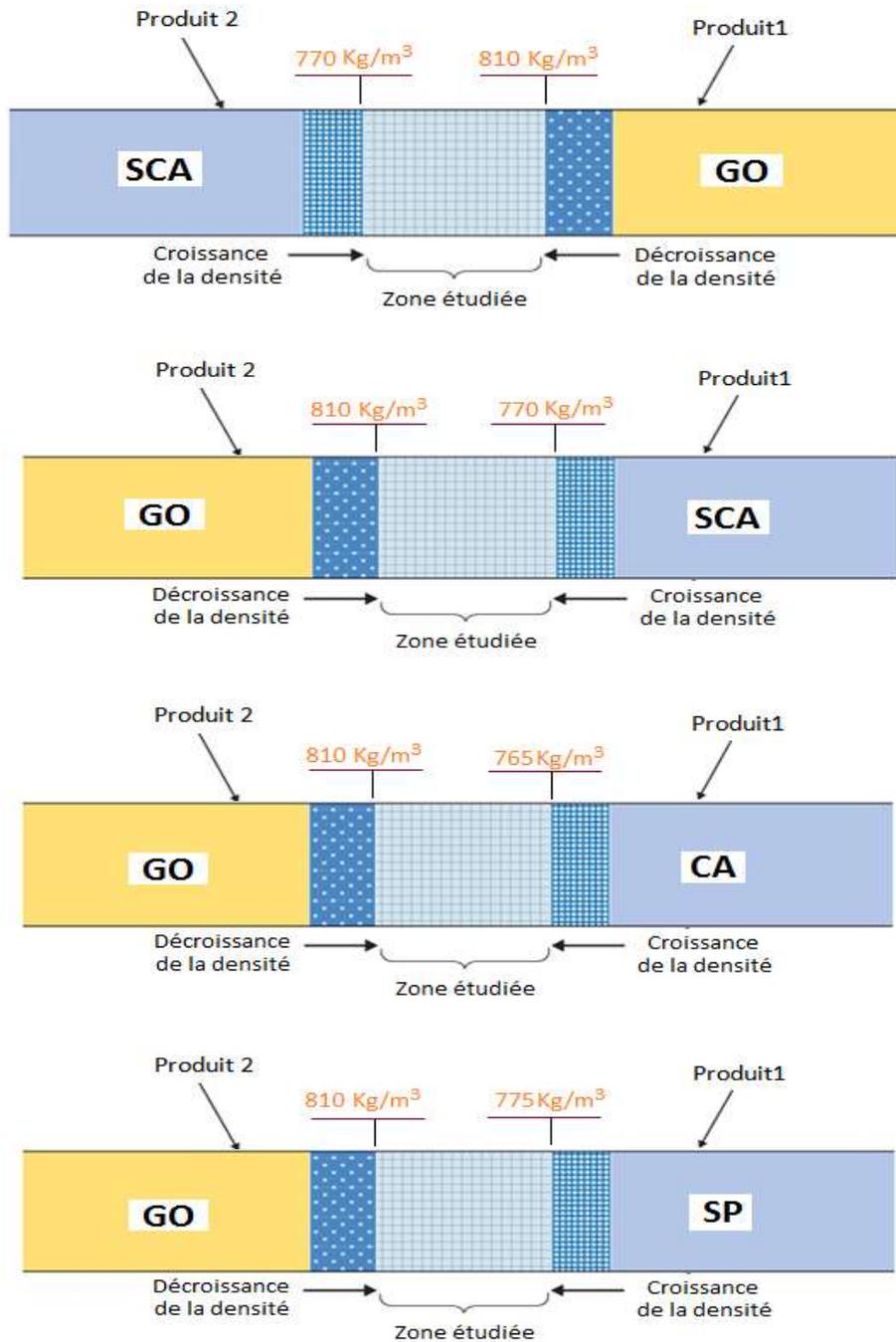


Fig. 2. 17 Différentes configurations du mélange

Le tableau (2.1) regroupe les données et les résultats des volumes du mélange relevés sur dix huit (18) expériences menées sur des séquences de transfert du multiproduit pétrolier par le biais du pipeline MP.

Tableau 2. 2 Données et résultats expérimentaux du volume de mélange

Batch N°	Interface	$Qv$ (m <sup>3</sup> /h)	$u$ (m/s)			$T$ (°C)	Produit 1		Produit 2		Masses volumiques de coupure (Kg/m <sup>3</sup> )		$V_{m\_Exp}$ (m <sup>3</sup> )
			Segment 1	Segment 2	Segment 3		$\rho_1$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$v_1$ (Cst)	$\rho_2$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$v_2$ (Cst)	Début	Fin	
06D31-16	GO-SCA	222,0	0,84	1,16	1,87	24.20	746,60	0,683	850,30	4,403	770	810	14.15
08D31-16	GO-SCA	219.0	0,83	1,15	1,84	24.10	741.60	0,639	850.60	4,410	770	810	11.18
09D32-16	GO-SCA	177.0	0,67	0,93	1,49	22.35	739.70	0,621	839.80	4,142	770	810	13.67
02D33-16	GO-SCA	163.0	0,62	0,85	1,37	22.15	735.80	0,586	835.60	4,036	770	810	15.06
10D33-16	GO-SCA	183.0	0,70	0,96	1,54	21.70	742.20	0.644	844.00	4.247	770	810	12.71
07D36-16	GO-SCA	221.0	0,84	1,16	1,86	19.70	739.30	0.618	834.90	4.019	770	810	16.12
09D36-16	GO-SP	209.0	0,80	1,10	1,76	19.50	743.20	0.653	838.10	4.099	775	810	18.21
05D01-17	GO-SP	175.0	0,67	0,92	1,47	18.50	743.50	0.656	837.70	4.089	775	810	10.66
07D01-17	GO-SCA	170.0	0,65	0,89	1,43	18.50	745.80	0.676	833.90	3.994	770	810	20.78
03D02-17	GO-SCA	179.0	0,68	0,94	1,51	18.05	737.90	0.605	830.50	3.908	770	810	17.64
07D02-17	GO-SCA	178.0	0,68	0,93	1,50	18.10	743.80	0.658	830.10	3.898	770	810	20.57
02D03-17	SCA-GO	187.0	0,71	0,98	1,57	16.60	828.40	3.855	731.20	0.545	810	770	17.85
04D03-17	SCA-GO	185.0	0,70	0,97	1,56	16.40	838.70	4.114	734.80	0.577	810	770	14.28
07D04-17	GO-SCA	177.0	0,67	0,93	1,49	16.20	731.30	0.546	843.10	4.224	770	810	15.42
09D04-17	GO-CA	175.0	0,67	0,92	1,47	16.10	714.50	0.391	843.70	4.239	765	810	11.79
11D04-17	GO-SCA	174.0	0,66	0,91	1,46	16.20	731.80	0.550	840.70	4.164	770	810	11.89
05D05-17	SCA-GO	185.0	0,70	0,97	1,56	16.40	822.10	3.694	729.80	0.532	810	770	21.35
06D05-17	GO-SCA	183.0	0,70	0,96	1,54	16.40	729.80	0.532	822.70	3.709	770	810	21.42

## 2.7 Conclusion

Dans le présent, nous avons mené des expériences sur le transport du multiproduit pétrolier. Nous avons détaillé le dispositif expérimental, puis nous avons présenté l'enregistrement des résultats expérimentaux des volumes du mélange, ainsi que les données nécessaires pour le calcul théoriques (Débits, les masses volumiques et viscosités cinématiques des produits,...etc.) sur des séquences de transfert dans le pipeline multiproduit, tels que :

- Le débit volumique, la température d'écoulement et la masse volumique de chaque produit sont lus directement à partir d'une électronique.
- Le volume du mélange est lu directement sur le DCS, comme par l'exploitation des niveaux des bacs de contaminât avant (hauteur initiale) et après (hauteur finale) la réception du mélange.

# Chapitre 03

## Application des modèles mathématiques et approches pour l'estimation du volume du mélange

### 3.1 Introduction

La détermination du volume de mélange dans l'opération de transfert par batch est basée sur la compréhension des divers facteurs comme les propriétés des fluides, les conditions de fonctionnement et les régimes d'écoulement. Elle est spécialement conditionnée par le bon choix du coefficient de diffusion.

Le phénomène du mélange est régi par certains modèles qui ont été développés et améliorés en comparant l'approche théorique basée sur la loi de Fick (Diffusion pure et de la convection diffusion) à l'expérience.

La loi de Fick décrit la diffusion de la matière reliant le flux de matière au gradient de concentration. Ce type de loi nommée loi de diffusion en mathématiques, apparaît dans les systèmes décrivant un transport (masse, énergie,...etc.)

### 3.2 Théorie de formation de l'interface du mélange [8, 16, 30]

La formation de la zone de mélange des produits dans les écoulements multiproduit est principalement définie par le phénomène de transfert de masse. Ce phénomène résulte de la diffusion dans la direction axiale et radiale avec l'existence d'un profil de vitesse du mélange dans un flux laminaire ou turbulent.

Considérons un exemple de deux produits  $A$  et  $B$  en écoulement successif dans une conduite. Au début, la conduite est supposée pleine en produit  $B$ . Initialement, à l'instant  $t = 0$  un contact vertical est établi dès que le second produit ( $A$ ) est introduit dans la ligne ( $x = 0$ ). Avec le temps le contact vertical commence à s'écarter et à l'instant  $t = t_1$  et une interface est remarquée. Dans ce cas, les produits purs ne sont plus en contact l'un avec l'autre mais sont plutôt en contact par l'intermédiaire d'une interface constituant un mélange composé de fraction de produits  $A$  et  $B$  jusqu'à atteindre le bout final de la conduite ( $x = x_2$ ) avec une longueur interface plus développée.

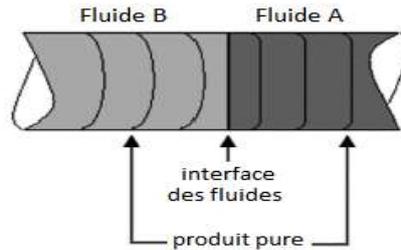


Fig. 3. 1 Interface des fluides en écoulement séquentiel (Contact vertical)

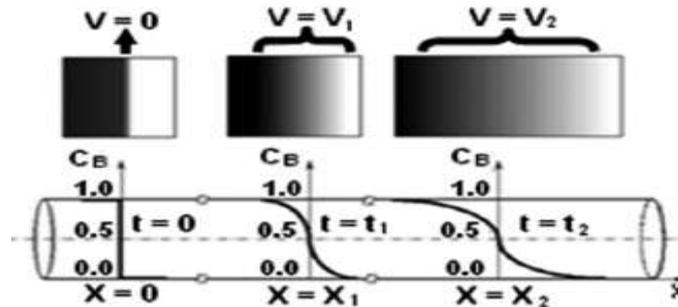


Fig. 3. 2 Evolution de la zone de mélange le long du pipeline multiproduit

### 3.3 Solutions des modèles mathématiques de diffusion

#### 3.3.1 Résolution de l'équation de diffusion pure

La loi de diffusion pure (loi de Fick) est gouvernée par l'équation (3.1) suivante [18]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$C = 0 \quad x = 0, \quad t > 0$$

et la condition initiale :

$$C = C_0 \quad x > 0, \quad t = 0$$

Faisant introduire la fonction de transformée de Laplace, par la multiplication des deux termes de l'équation (3.1) par  $e^{-pt}$  et l'intégration sous l'intervalle  $[0, +\infty[$ , on aura alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial C}{\partial t} dt = \int_0^{+\infty} K e^{-pt} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dt \quad (3.2)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dt - \frac{1}{K} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial C}{\partial t} dt = 0 \quad (3.3)$$

L'intégration du premier terme de l'équation (3.3), donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} C e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

Et en intégrant par partie le deuxième terme de l'équation (3.3), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial C}{\partial t} dt = [C e^{-pt}]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} C e^{-pt} dt = p \bar{C} \quad (3.5)$$

L'équation (3.2) se réduit à :

$$K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} = p \bar{C} \quad (3.6)$$

En traitant la condition initiale, de la même manière nous obtenons :

$$\bar{C} = \int_0^{+\infty} C_0 e^{-pt} dt = \left[ -\frac{C_0}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{C_0}{p} \quad (3.7)$$

La solution de l'équation (3.7) est de la forme :

$$\bar{C} = \frac{C_0}{p} e^{-qx} \quad (3.8)$$

Avec,

$$q = \left( \frac{p}{k} \right)^{0.5}$$

En se référant au tableau de l'annexe I, on obtient :

$$C(x,t) = C_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D \cdot t}} \quad (3.9)$$

Ou bien,

$$C(x,t) = C_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{D \cdot t}} \right) \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Résolution de l'équation de convection diffusion

Considérons le problème unidimensionnel de la convection-diffusion régit par l'équation (3.11) suivante [13] :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.11)$$

Contrairement aux résultats expérimentaux de (Bailey et Gogarty, 1962) montrant que, pour une vitesse constante, le coefficient de dispersion augmente avec le temps, les solutions de Taylor et Aris révèlent que ce dernier coefficient reste constant et indépendant du temps à une vitesse fixe [35].

Donc pour notre modèle et par hypothèse, le coefficient de diffusion  $K$  peut être donc considéré constant pour une vitesse fixe. L'équation (3.11) devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

Un changement de variable est effectué pour rendre l'équation (3.12) sous forme d'une équation de diffusion pure, tel que :

$$X = x - ut \quad \text{et} \quad t = \tau$$

La concentration  $C(X, \tau)$  est une fonction à deux variables :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial \tau} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial X} \quad (3.14)$$

Et par suite :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (3.15)$$

De même, la dérivée du terme temporel exprimée comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial C}{\partial \tau} = -u \frac{\partial C}{\partial X} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \quad (3.16)$$

Et comme  $t = \tau$  et après substitution dans l'équation (3.12)

$$-u \frac{\partial C}{\partial X} + \frac{\partial C}{\partial \tau} + u \frac{\partial C}{\partial X} = K \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (3.17)$$

On obtient une équation (3.18) de diffusion pure :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (3.18)$$

Nous avons bien vu que la solution de l'équation de diffusion pure est bien :

$$C(x, t) = C_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{K \cdot t}} \right)$$

On obtient par analogie, l'équation (3.19) solution de l'équation de diffusion avec la contribution du terme de transport.

$$C(X, t) = C_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{X}{2\sqrt{K(t) \cdot t}} \right) \quad (3.19)$$

Ou tout simplement,

$$C(x, t) = C_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x - ut}{2\sqrt{K(t) \cdot t}} \right) \quad (3.20)$$

### 3.4 Calcul du volume de mélange

#### 3.4.1 Longueur équivalente pour les géométries complexes

A l'instar des corrélations d'Austin-Palfrey, certaines formulations du mélange s'appliquent pour des géométries uniformes (sans changement de diamètre) [19].

Vue cette contrainte, nous avons pensé à illustrer certaines approches permettant d'uniformiser la géométrie du pipeline de diamètres variables, faisant appel au concept de la longueur équivalente, dont nous présentons ci-dessous deux approches, à savoir :

1. Approche d'Austin-Palfrey
2. Approche MVEPC (Mixing-Volume-Equivalent-Pipe-Concept)

##### 3.4.1.1 Approche d'Austin - Palfrey [11]

Quand il s'agit de plusieurs points de livraison et de réception le long d'un pipeline et au point de changement du débit (du diamètre), le pipeline peut être divisé en un certain nombre de segments (tronçons), dont le diamètre et le débit de chaque segment ne changent pas. La méthode de la longueur équivalente de tube est utilisée pour calculer le volume de mélange, selon les corrélations d'Austin-Palfrey suivantes :

- Si le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique :

Pour,  $Re > Re_j$

$$C = 11.75 D^{0.5} L^{0.5} Re^{-0.1} \quad (3.21)$$

$C$  : La longueur d'interface pour un diamètre  $D$ .

$Re$  : Le nombre de Reynolds pour une fraction 50% - 50% du mélange.

- Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à la valeur critique :

Pour,  $Re < Re_j$

$$C = 18384 D^{0.5} L^{0.5} Re^{-0.9} e^{2.18d^{0.5}} \quad (3.22)$$

D'après Austin-Palfrey, la longueur d'interface correspondante au segment de diamètre  $D'$  est exprimée par l'équation suivante :

$$C' = C \left( \frac{D}{D'} \right)^2 \quad (3.23)$$

Pour un pipeline constitué de trois segments (Fig. 3.3), l'approche de la longueur équivalente d'Austin-Palfrey se déroule comme suit :

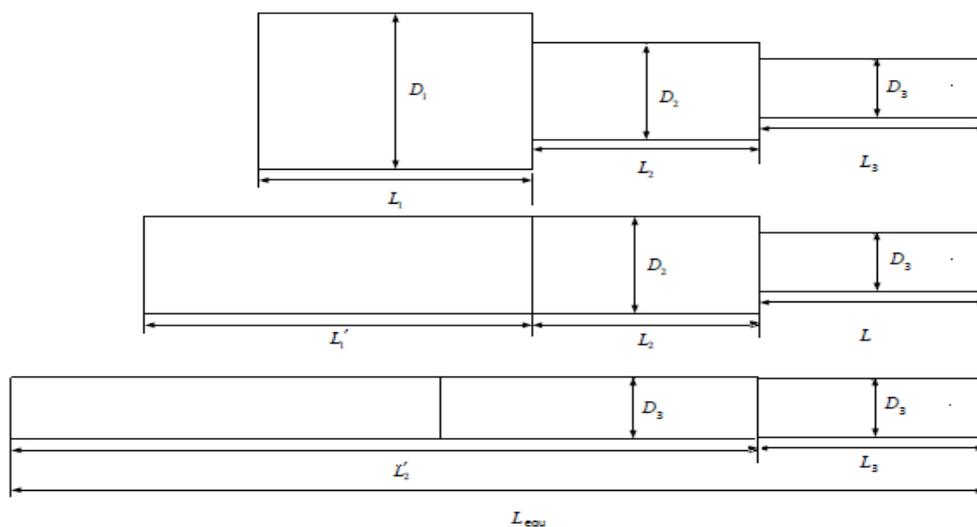
- Tout d'abord et à partir de l'équation (3.21), nous calculons la longueur de l'interface avec les données géométriques du premier segment ( $L_1, D_1$ ).

$$C_1 = 11.75 D_1^{0.5} L_1^{0.5} Re_1^{-0.1} \quad (3.24)$$

- A partir de l'équation (3.23) on déduit la longueur d'interface  $C'_1$  correspondante au diamètre  $D_2$  et nous calculons par la suite la longueur équivalente  $L'_1$  relative au premier segment toujours en se servant de l'équation (3.24).
- La longueur de l'interface est calculée pour la nouvelle longueur ( $L'_1 + L_2$ )
- Encore une fois, la longueur de l'interface  $C'_2$  est calculée pour le diamètre  $D_3$  et nous concluons de la même façon la longueur équivalente  $L'_2$ .
- Enfin la longueur équivalente du pipeline est déduite :

$$L_{eq} = L'_2 + L_3 \quad (3.25)$$

- La présente longueur équivalente peut être introduite dans d'autres modèles de calcul du volume du mélange.



**Fig. 3.3** Illustration de la longueur équivalente d'un pipeline à trois segments

### 3.4.1.2 Approche de MVEPC (Mixing-Volume-Equivalent-Pipe-Concept) [3]

Le concept de l'approche MVEPC est défini comme suit : « Deux pipelines différents transférant la même paire des produits, sont équivalents dans le contexte de l'écoulement multiproduit si et seulement si les volumes du mélange observés au bout final de chaque conduite sont les mêmes, lorsqu'ils sont calculés avec les mêmes concentrations admissibles ».

Si  $D_1, L_1, K_1^*$  et  $D_2, L_2, K_2^*$  représentent respectivement le diamètre, la longueur du pipeline et le coefficient de dispersion (diffusion) adimensionnel associé aux pipelines 1 et 2, puis en fonction de la définition passé la relation suivante doit être vérifiée :

$$K_1^* \cdot L_1 \cdot D_1^5 = K_2^* \cdot L_2 \cdot D_2^5 \quad (3.26)$$

L'application de ce concept sur la même géométrie du pipeline de la figure (3.3), donne :

- La longueur équivalente  $L_{eq1}$  pour le 1<sup>er</sup> segment :

$$K_1^* \cdot L_1 \cdot D_1^5 = K_2^* \cdot L_{eq1} \cdot D_2^5 \quad (3.27)$$

$$L_{eq1} = \frac{K_1^*}{K_2^*} \cdot \frac{D_1^5}{D_2^5} \quad (3.28)$$

- La longueur équivalente  $L_{eq2}$  des deux segments de diamètre  $D_2$  :

$$L_{eq2} = L_{eq1} + L_2 \quad (3.29)$$

- La longueur équivalente  $L_{eq3}$  du troisième segment :

$$K_2^* \cdot L_{eq2} \cdot D_2^5 = K_3^* \cdot L_{eq3} \cdot D_3^5 \quad (3.30)$$

$$L_{eq3} = \frac{K_2^*}{K_3^*} \cdot \frac{D_2^5}{D_3^5} \cdot L_{eq2} \quad (3.31)$$

- La longueur équivalente  $L_{eq}$  du pipeline est donnée par :

$$L_{eq} = L_{eq3} + L_3 \quad (3.32)$$

## 3.4.2 Formulations pour le calcul de volume de mélange [12]

### 3.4.2.1 Calcul du volume du mélange

Nous avons bien vu que la solution de l'équation de diffusion est :

$$C = C_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{K \cdot t}} \right) \quad (3.33)$$

Soient  $C_A$  et  $C_B$  les concentrations respectives des produit A et B :

$$C_A + C_B = 1$$

En considérant le produit B :

$$C_B = C_0(1 - \text{erf}Z) \quad (3.34)$$

Avec :

$$Z = \frac{x}{2\sqrt{K \cdot t}} \quad (3.35)$$

$Z$  : Argument de concentration de coupure.

Comme illustre la figure (3.3), le volume du mélange peut être calculé par la formule suivante [1] :

$$V_m = Q_V(t_2 - t_1) \quad (3.36)$$

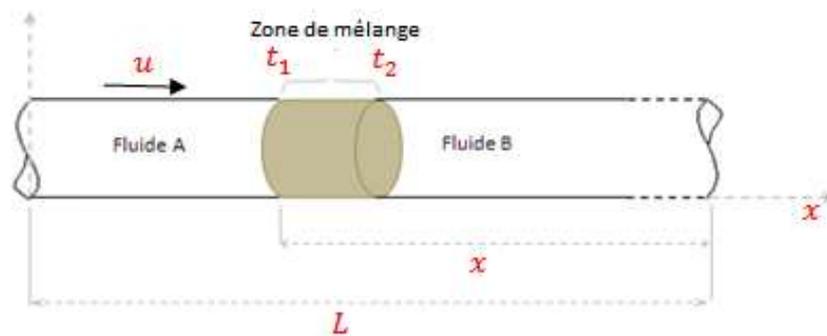


Fig. 3. 4 Identification de zone du mélange

D'après la figure (3.4) :

$$x = L - ut \quad (3.37)$$

$t_0$  : Temps nécessaire pour balayer toute la longueur du pipeline par le mélange.

Posant :  $\theta = t/t_0$

$$x = ut_0(1 - \theta) \quad (3.38)$$

Nous substituons la valeur de  $x$  dans  $Z$  :

$$Z = \frac{ut_0(1 - \theta)}{2\sqrt{K \cdot \theta t_0}} \quad (3.39)$$

$$Z = \frac{(1 - \theta)}{2\sqrt{\theta}} \cdot Pe^{0.5} \quad (3.40)$$

Ou :

$$Pe = \frac{uL}{K}$$

Au bout final de la conduite  $t \rightarrow t_0$  donc  $\theta \approx 1$

$$Z = \frac{1}{2} \cdot (1 - \theta) \cdot Pe^{0.5} \quad (3.41)$$

$$\theta = 1 - \frac{2Z}{Pe^{0.5}} \quad (3.42)$$

L'équation (3.36) devient

$$V_m = Q_V \cdot t_0 \left( \frac{t_2}{t_0} - \frac{t_1}{t_0} \right) \quad (3.43)$$

$$V_m = V_P (\theta_2 - \theta_1) \quad (3.44)$$

$$\theta_1 = 1 - \frac{2Z_1}{Pe^{0.5}} \quad \text{et} \quad \theta_2 = 1 - \frac{2Z_2}{Pe^{0.5}}$$

L'équation (3.43) devient sous la forme suivant :

$$V_m = 2 \cdot V_P \cdot Pe^{-0.5} (Z_2 - Z_1) \quad (3.45)$$

$$V_m = 2 \cdot V_P \cdot \left( \frac{uL}{K} \right)^{-0.5} (Z_2 - Z_1) \quad (3.46)$$

Pour le cas d'un pipeline de géométrie variable, cas de Figure (3.3), on introduit la longueur équivalente  $L_{eq}$  calculée par l'une des approches Austin-Palfrey ou MVEPC dans l'équation (3.56), d'où l'équation (3.57) :

$$V_m = 2 \cdot V_P \cdot \left( \frac{u L_{eq}}{K} \right)^{-0.5} (Z_2 - Z_1) \quad (3.47)$$

L'introduction du coefficient de dispersion adimensionnel  $K^*$  dans l'équation (3.69) donne :

$$V_m = 2 \cdot V_P \cdot K^{*0.5} \left( \frac{D}{L} \right)^{0.5} \cdot (Z_1 - Z_2) \quad (3.48)$$

Avec,

$$K^* = \frac{K}{Du}$$

### 3.4.2.2 Calcul du coefficient de dispersion adimensionnel

Le coefficient de dispersion adimensionnel  $K^*$  est exprimé par l'équation (3.59) en fonction du coefficient de friction  $f$  [18] :

$$K^* = 3,575 f^{0,5} \quad (3.49)$$

Le coefficient de friction  $f$  est calculé à partir de la formule de Haaland [6, 36] :

$$f = \left[ 1.8 \operatorname{Log}_{10} \left( \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^{-2} \quad (3.50)$$

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations de la diffusion et de la convection-diffusion ont été résolues analytiquement.

Nous avons abouti à un modèle de calcul du volume du mélange, qui est fonction du volume de la conduite, du nombre de Peclet et des arguments de concentrations de coupure qui délimite l'interface du mélange.

Nous avons bien remarqué que les solutions de l'équation de convection-diffusion, sont identiques à celle décrite dans la littérature.

Le nombre de Peclet est à son tour fonction de la vitesse, la longueur et le coefficient de diffusion, d'où il est important de bien choisir le coefficient de diffusion et l'approche de la longueur équivalente de la conduite pour une bonne approximation de calcul de l'interface du mélange.

# Chapitre 04

## Calcul de prédiction du volume du mélange comparé aux résultats du terrain

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les deux approches, d'Austen-Palfrey et celle du MVEPC (Mixing-Volume-Equivalent-Pipe-Concept) pour uniformiser la géométrie du pipeline étudié, constitué de trois segments de diamètres et longueurs différents, dont ce dernier est déjà présenté en détail dans la partie étude expérimentale.

### 4.2 Application du modèle mathématique et formulations pour la prédiction du volume du mélange

Sur les dix huit (18) expériences et séquences de transport du multiproduit pétrolier (Carburants) menées sur le pipeline en question, les longueurs équivalentes calculées selon chaque approche sont introduites dans la formule de calcul du mélange (Equation 3.57).

Les volumes du mélange sont calculés à parti des données du terrain (paramètres physicochimiques des fluides et d'écoulement) récapitulées dans le tableau (2.2) et sont comparés aux volumes mesurés pour chaque séquence de transport et dont ces derniers sont ainsi récapitulé dans le tableau (2.2).

Le tableau (4.1) récapitule les résultats de calcul des paramètres d'écoulement, géométriques et les concentrations de coupure nécessaires pour l'application de la formulation de calcul du volume du mélange.

Pour les concentrations de coupures, les limites des masses volumiques appropriées à chaque produit sont prises en considération afin de tenir compte des configurations pratiques présentées dans la figure (2.17) pour identifier la zone du mélange étudiée pour qu'elle soit compatible avec l'enregistrement expérimental.

Le tableau (4.2) regroupe les résultats de calcul finaux pour les deux approches (Austen-Palfrey et MVEPC), à savoir : les coefficients de dispersion, les interfaces du mélange (en longueur et en volume).

**Tableau 4. 1** Récapitulatif des résultats : Régimes d'écoulement, les longueurs équivalentes et les concentrations de coupure

Batch N°	Interface	$v_m$ (Cst)	$Re$			$L_{eq}(m)$		Concentrations de coupure			
			Segment 1	Segment 2	Segment 3	Austin	MVEPC	erf(z1)	erf(z2)	z1	-z2
06D31-16	GO-SCA	2.000	128826.000	150849.660	193239.010		836632.72	0.549	-0.223	0.5330	0.2003
08D31-16	GO-SCA	1.956	129920.430	152131.180	194880.640		836567.47	0.479	-0.255	0.4538	0.2300
09D32-16	GO-SCA	1.859	110487.420	129375.970	165731.130		838182.35	0.395	-0.405	0.3657	0.3759
02D33-16	GO-SCA	1.792	105585.380	123635.900	158378.080		838668.27	0.315	-0.487	0.2868	0.4626
10D33-16	GO-SCA	1.913	110770.800	129941.990	166456.200		838136.40	0.454	-0.332	0.4269	0.3023
07D36-16	GO-SCA	1.819	140929.190	165021.960	211393.780		837506.74	0.358	-0.479	0.3287	0.4538
09D36-16	GO-SP	1.879	129066.770	151131.580	193600.150		836629.61	0.330	-0.408	0.3013	0.3790
05D01-17	GO-SP	1.879	108067.100	126541.880	162100.650		838417.64	0.331	-0.412	0.3023	0.3831
07D01-17	GO-SCA	1.870	105458.060	123486.810	158187.090	930164,59	838611.40	0.451	-0.457	0.4237	0.4301
03D02-17	GO-SCA	1.774	117112.200	137133.310	175668.310		837580.65	0.307	-0.557	0.2792	0.5424
07D02-17	GO-SCA	1.824	113247.380	132607.770	169871.070		837924.44	0.393	-0.534	0.3637	0.5155
02D03-17	SP-GO	1.695	127985.430	149865.380	191978.150		836709.34	0.202	-0.621	0.1810	0.6221
04D03-17	SCA-GO	1.805	118969.330	139307.920	178454.000		837470.20	0.322	-0.448	0.2936	0.4206
07D04-17	GO-SCA	1.802	113969.130	133452.900	170953.690		837858.73	0.247	-0.531	0.2825	0.5120
09D04-17	GO-CA	1.622	125231.520	146640.680	187847.280		836917.74	0.218	-0.478	0.1957	0.4527
11D04-17	GO-SCA	1.790	112828.230	132116.950	169242.340		837962.92	0.298	-0.436	0.2706	0.4079
05D05-17	SCA-GO	1.635	131297.920	153744.170	166946.880		836468.67	0.129	-0.758	0.1148	0.7931
06D05-17	GO-SCA	1.639	129533.550	151678.160	194300.320		836595.54	0.135	-0.727	0.1202	0.7751

Tableau 4. 2 Résultats des Coefficients de Diffusion et de l'interface du mélange

Batch N°	Interface	Coefficient de diffusion		Austin-Palfrey		MVEPC	
		$K^*$	$K$ (m <sup>2</sup> /s)	$L_m$ (m)	$V_m$ (m <sup>3</sup> )	$L_m$ (m)	$V_m$ (m <sup>3</sup> )
06D31-16	GO-SCA	0,572	0,217	1512,41	15.92	1434,14	15.10
08D31-16	GO-SCA	0,573	0,215	1511,13	14.85	1433,09	14.08
09D32-16	GO-SCA	0,572	0,173	1535,82	16.10	1457,9	15.28
02D33-16	GO-SCA	0,571	0,159	1542,80	16.25	1464,96	15.43
10D33-16	GO-SCA	0,572	0,179	1535,15	15.83	1457,23	15.03
07D36-16	GO-SCA	0,571	0,216	1498,89	16.97	1447,79	16.10
09D36-16	GO-SP	0,570	0,204	1512,13	14.74	1434,09	13.98
05D01-17	GO-SP	0,573	0,171	1539,22	14.88	1461,34	14.13
07D01-17	GO-SCA	0,573	0,167	1542,99	18.54	1465,15	17.61
03D02-17	GO-SCA	0,572	0,175	1526,90	17.83	1448,92	16.92
07D02-17	GO-SCA	0,572	0,174	1532,03	19.09	1454,09	18.11
02D03-17	SP-GO	0,571	0,183	1513,40	17.42	1435,36	16.52
04D03-17	SCA-GO	0,572	0,181	1524,50	15.50	1447,24	14.71
07D04-17	GO-SCA	0,572	0,173	1531,06	15.94	1453,11	15.13
09D04-17	GO-CA	0,572	0,171	1516,70	14.06	1438,67	13.34
11D04-17	GO-SCA	0,572	0,170	1532,60	14.73	1454,66	13.98
05D05-17	SCA-GO	0,571	0,181	1509,54	19.69	1431,49	18.67
06D05-17	GO-SCA	0,571	0,179	1511,58	19.42	1433,54	18.41

### 4.2.1 Volumes du mélange prédits (Approche d'Austin-Palfrey) comparé aux résultats expérimentaux

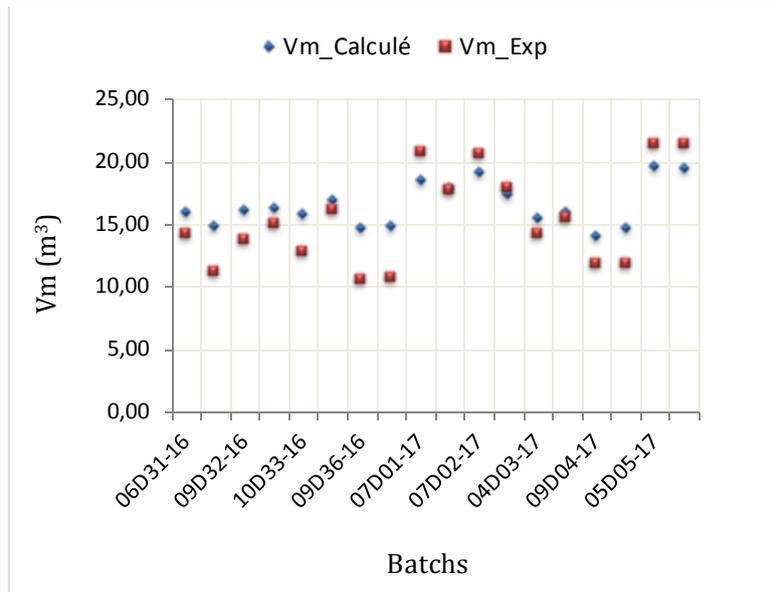
Le tableau (4.3) ci-après récapitule les volumes, expérimental et théorique calculé à partir de la longueur équivalente définie par l'approche d'Austin-Palfrey, et cela pour chaque séquence (Expérience).

Le degré d'approximation des corrélations de calcul est estimé par le calcul de l'erreur relative de chaque expérience et l'erreur relative moyenne, tel que :

$$\%Er = \frac{Vol. Estimé - Vol. Expérimental}{Vol. Expérimental} \quad (4.1)$$

**Tableau 4. 3** Volumes du mélange prédits (Approche d'Austin-Palfrey) comparés aux volumes expérimentaux

Batch N°	Interface	Qv (m <sup>3</sup> /h)	V <sub>mExp</sub> (m <sup>3</sup> )	Austin-Palfrey	
				V <sub>m</sub> (m <sup>3</sup> )	%Er
06D31-16	GO-SCA	222,0	14.15	15.92	12.50
08D31-16	GO-SCA	219.0	11.18	14.85	32.82
09D32-16	GO-SCA	177.0	13.67	16.10	17.76
02D33-16	GO-SCA	163.0	15.06	16.25	7.92
10D33-16	GO-SCA	183.0	12.71	15.83	24.55
07D36-16	GO-SCA	221.0	16.12	16.97	5.27
09D36-16	GO-SP	209.0	18.21	14.74	39.96
05D01-17	GO-SP	175.0	10.66	14.88	39.62
07D01-17	GO-SCA	170.0	20.78	18.54	-10.76
03D02-17	GO-SCA	179.0	17.64	17.83	1.08
07D02-17	GO-SCA	178.0	20.57	19.09	-7.22
02D03-17	SP-GO	187.0	17.85	17.42	-2.42
04D03-17	SCA-GO	185.0	14.28	15.50	8.53
07D04-17	GO-SCA	177.0	15.42	15.94	3.40
09D04-17	GO-CA	175.0	11.79	14.06	19.30
11D04-17	GO-SCA	174.0	11.89	14.73	24.93
05D05-17	SCA-GO	185.0	21.35	19.69	-7.79
06D05-17	GO-SCA	183.0	21.42	19.42	-9.35
				<b>%Aer</b>	<b>11.12%</b>



**Fig. 4. 1** Volumes du mélange prédits (Approche d'Austin-Palfrey) comparés aux volumes expérimentaux

La formule de prédiction du volume du mélange, calculé à partir de la longueur équivalente basée sur l'approche d'Austin-Palfrey a présenté une erreur relative moyenne de 11.12%. Une telle approximation de calcul peut être considérée plus au moins acceptable en comparant avec les résultats publiés dans la littérature.

### 4.2.2 Volumes du mélange prédits (MVEPC) comparé aux résultats expérimentaux

Le tableau (4.4) récapitule les volumes, expérimental et théorique calculé à partir de la longueur équivalente définie par l'approche MVEPC, et cela ainsi pour chaque séquence de transport multiproduit.

**Tableau 4. 4** Volumes du mélange prédits (Approche MVEPC) comparés aux volumes expérimentaux

Batch N°	Interface	$Qv$ (m <sup>3</sup> /h)	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	MVEPC	
				$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er
06D31-16	GO-SCA	222,0	14.15	15.10	6.69
08D31-16	GO-SCA	219.0	11.18	14.08	25.96
09D32-16	GO-SCA	177.0	13.67	15.28	11.78
02D33-16	GO-SCA	163.0	15.06	15.43	2.48
10D33-16	GO-SCA	183.0	12.71	15.03	18.23
07D36-16	GO-SCA	221.0	16.12	16.10	-0.11
09D36-16	GO-SP	209.0	18.21	13.98	32.73
05D01-17	GO-SP	175.0	10.66	14.13	32.56
07D01-17	GO-SCA	170.0	20.78	17.61	-15.26
03D02-17	GO-SCA	179.0	17.64	16.92	-4.08
07D02-17	GO-SCA	178.0	20.57	18.11	-11.94
02D03-17	SP-GO	187.0	17.85	16.52	-7.45
04D03-17	SCA-GO	185.0	14.28	14.71	2.88
07D04-17	GO-SCA	177.0	15.42	15.13	-1.87
09D04-17	GO-CA	175.0	11.79	13.34	13.16
11D04-17	GO-SCA	174.0	11.89	13.98	18.58
05D05-17	SCA-GO	185.0	21.35	18.67	-12.55
06D05-17	GO-SCA	183.0	21.42	18.41	-14.03
				<b>%AEr</b>	<b>5.44%</b>

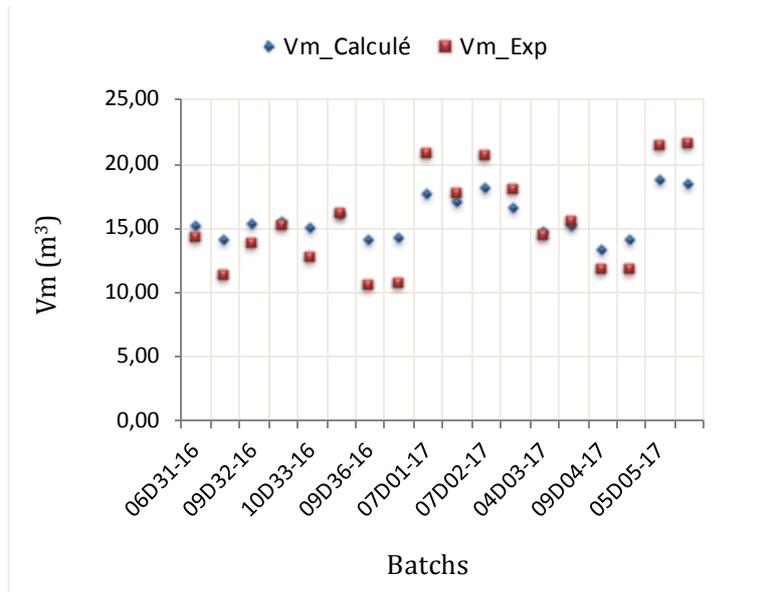


Fig. 4. 2 Volumes de mélange calculé par MVEPC et mesuré

La formule de calcul du volume du mélange calculé à partir de la longueur équivalente basée sur l'approche MVEPC a présenté une approximation acceptable, avec une erreur relative moyenne de 5.44%.

### 4.3 Interprétation des résultats

Les résultats montrent clairement que, le volume du mélange calculé à partir de l'approche MVEPC présente la meilleure approximation de calcul (5.44%) en comparant avec l'approche d'Austin-Palfrey (11.12%). Cette différence dans la précision de calcul est bien due à la longueur équivalente qui apparaît constante dans le cas d'Austin-Palfrey et variables dans le cas de l'Approche MVEPC pour les mêmes conditions d'expériences. Car la longueur équivalente d'Austin-Palfrey est directement relative au rapport des diamètres du pipeline, par contre celle de MVEPC change avec le changement dans le calcul du coefficient de diffusion qui dépend principalement des paramètres géométriques et d'écoulement.

### 4.4 Conclusion

Les graphes des résultats théoriques et expérimentaux doivent présenter des courbes de mêmes allures, ce qui révèle une éventuelle dépendance entre les valeurs calculées et mesurées.

Nous avons bien pensé d'étudier la possibilité d'ajuster le modèle mathématique (en tenant compte les deux approches) par les techniques de régression et améliorer la précision de calcul des modèles, pour qu'ils soient servis dans le calcul précis des volumes du mélange.

# Chapitre 05

## Ajustement des modèles de calcul du volume du mélange par les techniques de régression

### 5.1 Introduction

Comme il a été illustré précédemment dans les figures (4.1) et (4.2), les allures de courbes apparaissent similaires pour les deux approches (Austin-Palfrey et MVEPC) en ce qui concerne la représentation graphique des volumes du mélange prédits et expérimentaux, ce qui nous fait penser d'ajuster ou corréler les deux volumes (Calculé et expérimental) par les techniques de régression.

### 5.2 Contexte et notion de liaison fonctionnelle entre deux variables

On soupçonne qu'il existe une liaison entre deux variables X et Y. la question qui se pose, existe-t-il un lien fonctionnel entre les volumes du mélange calculés par les différentes approches et les volumes expérimentaux enregistrés.

On dit qu'il y a corrélation entre deux variables lorsqu'elles ont tendance à varier soit toujours dans le même sens (par exemple, si X augmente, Y a tendance à augmenter aussi), soit toujours en sens inverse (par exemple, si X augmente, Y a tendance à diminuer). Donc il y a lieu de répondre aux questions suivantes :

1. Peut-on quantifier cette liaison ?
2. Peut-on tester si cette liaison est statistiquement vraiment significative ?
3. Peut-on utiliser cette liaison à des fins prédictives ?

### 5.3 Techniques de régression

L'analyse de régression est une forme de modélisation prédictive qui étudie la relation entre des variables dépendante et indépendantes. Cette technique est utilisée pour la prévision, la modélisation des séries et la recherche de la relation fonctionnelle entre les variables.

L'analyse de régression est un outil important pour la modélisation et l'analyse des données. Elle nous permet également de comparer les effets des variables mesurées à différentes échelles. Ces avantages aident les chercheurs et les scientifiques à évaluer le meilleur ensemble de variables à utiliser pour construire des modèles prédictifs.

La relation entre deux variables peut être :

- **Déterministe** : La valeur de la variable  $y$  peut être précisément prédite à partir de la valeur de la variable  $x$
- **Probabiliste** : La valeur d'une variable  $y$  ne peut pas être précisément prédite à partir de la valeur de la variable  $x$

Il existe différents types et techniques de régression qui permet de trouver la relation entre deux ou plusieurs variables  $x$  et  $y$  sous la forme :  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$ .

Nous nous intéressons beaucoup plus et dans un premier temps à la régression linéaire avec une relation probabiliste.

## 5.4 Régression linéaire [37, 38]

La régression linéaire est l'une des techniques de modélisation les plus connues et choisies pour la modélisation prédictive. Elle établit une relation entre deux variables ou une série statistique présentée en nuage de points,

$$y = ax + b \quad (5.1)$$

Cette équation peut être utilisée pour prédire la valeur de la variable  $y$  en fonction de variables  $x$  données.

### 5.4.1 Méthode des moindres carrés pour la détermination des coefficients de la droite de régression

L'objectif de la méthode est de trouver la relation fonctionnelle entre les deux variables  $x_i$  et  $y_i$  et de déterminer la droite qui ajuste au mieux le nuage de points des données, en minimisant les distances entre les points du nuage  $(x_i, y_i)$  et les points correspondant  $f(x_i)$  sur la droite de régression (Fig. 5.1).

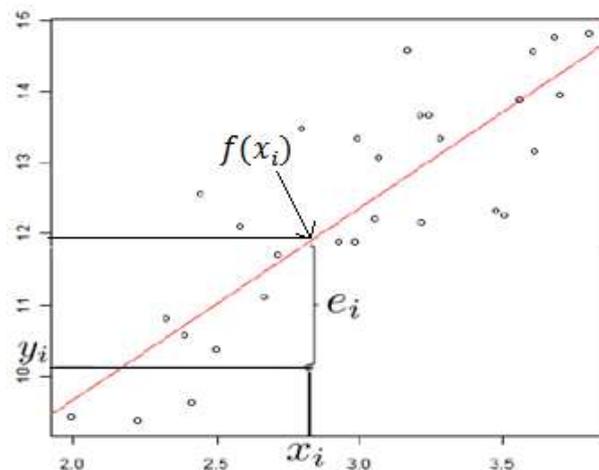


Fig. 5. 1 Courbe de dispersion des points (Nuage de points)

Ces écarts sont appelés résidus et sont exprimés comme suit :

$$e_i = y_i - f(x_i)$$

$e_i$  : Le résidu de la  $i^{\text{ème}}$  observation et sa valeur absolue représente la distance entre les points  $(x_i; y_i)$  et  $(x_i; f(x_i))$ .

Les résidus étant positifs ou négatifs, leur somme peut être de faible valeur pour une courbe mal ajustée. On évite cette difficulté en considérant la somme des carrés des résidus. On introduit la somme  $S(a, b)$ , appelée **variation résiduelle** qui dépend des paramètres  $a$  et  $b$  qui doivent être choisis de manière qu'elle soit minimale. La variation résiduelle nous donne une mesure de l'ampleur de la dispersion des observations  $y_i$  autour de la courbe d'ajustement telle que :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

Avec,

$n$  : le nombre d'observations

Pour la régression linéaire, la courbe d'ajustement sera donc une droite d'équation  $y=ax+b$ . Il nous faut alors déterminer les deux coefficients  $a$  et  $b$  tels que soit  $S(a, b)$  minimale:

La variation résiduelle s'écrit :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2 \quad (5.2)$$

$S(a, b)$  sera minimum, lorsque :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad (5.3)$$

Nous obtiendrons alors :

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)x_i = 0 \quad (5.5)$$

Les équations (5.3) et (5.4) deviennent:

$$\sum_{i=1}^n y_i - a - b \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

Ce qui conduit au système d'équations :

$$na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (5.6)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (5.7)$$

La résolution de ce système d'équation, mène à déterminer la pente de la droite (a):

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (5.8)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.9)$$

et l'ordonnée à l'origine (b) :

$$b = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (5.10)$$

Nous introduisons quelques expressions utiles :

$\bar{x}$  et  $\bar{y}$  : Les moyennes de x et y

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.11)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (5.12)$$

$\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  : Les variances

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.13)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (5.14)$$

$cov(x, y)$  : La covariance

$$cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \quad (5.15)$$

Après simplifications, les expressions de  $a$  et  $b$  deviennent :

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \quad (5.16)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (5.17)$$

### 5.4.2 Différentes modèles de régression linéaire

La relation entre deux variable  $x$  et  $y$  peut être exprimée selon d'autres schémas de régression non linéaire, à savoir : le schéma exponentiel, puissance, logarithmiques...etc. Néanmoins, des transformations simples sont possibles qui permettent d'étendre l'usage de l'ajustement linéaire.

Un modèle non linéaire peut être linéarisé en remplaçant les valeurs des variables indépendantes  $x$  et/ou  $y$  par leur logarithme.

Le calcul des coefficients de la droite de régression après linéarisation des différents schémas s'effectuera de la même façon que dans le cas purement linéaire.

#### 5.4.2.1 Schéma de régression exponentiel

Les variables  $x$  et  $y$ , sont liées par une relation du type :

$$y = b e^{ax} \quad (5.18)$$

La linéarisation de cette relation conduit à :

$$Y = a x + B \quad (5.19)$$

Avec,

$$Y = \ln(y) , B = \ln(b)$$

#### 5.4.2.2 Schéma de régression puissance

Les variables  $x$  et  $y$ , sont liées par une relation du type :

$$y = b x^a \quad (5.20)$$

La linéarisation de cette relation conduit à :

$$Y = a X + B \quad (5.21)$$

Avec,

$$Y = \ln(y) , X = \ln(x), B = \ln(b)$$

### 5.4.2.3 Schéma de régression logarithmique

Les variables  $x$  et  $y$ , sont liées par une relation du type :

$$y = a \ln x + b \quad (5.22)$$

La linéarisation de cette relation conduit à :

$$y = a X + B \quad (5.23)$$

Avec,

$$X = \ln(x)$$

## 5.5 Calcul et signification de coefficient de corrélation [37, 38]

Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais – Pearson, noté  $r_{xy}$ , est un coefficient paramétrique qui permet de mesurer l'intensité de liaison entre les deux variables  $x$  et  $y$ . Il est défini par l'expression suivante :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \quad (5.24)$$

La signification et l'interprétation du coefficient  $r_{xy}$  n'est valable que si, après un test statistique qui rejette l'hypothèse de l'absence de corrélation entre les variables  $x$  et  $y$ . Le coefficient de corrélation linéaire est interprété par rapport au signe/sens de la liaison ainsi que par rapport au degré de dépendance.

### 5.5.1 Interprétation selon le signe

- Si  $r_{xy} > 0$  : La relation entre  $x$  et  $y$  est positive.
- Si  $r_{xy} < 0$  : La relation entre  $x$  et  $y$  est négative.
- Si  $r_{xy} = 0$  : Pas de liaison entre  $x$  et  $y$ , mais possibilité de liaison d'un autre type.

### 5.5.2 Interprétation selon l'intensité

- Si  $r_{xy} = \pm 1$  : La liaison entre  $x$  et  $y$  **est parfait**.
- Si  $0.80 < r_{xy} < 1$  : Le lien linéaire est **très fort**.
- Si  $0.65 < r_{xy} < 0.80$  : Le lien linéaire est **fort (élevé)**.
- Si  $0.50 < r_{xy} < 0.65$  : Le lien linéaire **est modéré**.
- Si  $0.25 < r_{xy} < 0.50$  : Le lien linéaire **est faible**.
- Si  $0.025 < r_{xy} < 0.25$  : Le lien linéaire est **très faible**.
- Si  $r_{xy} \approx 0$  : **Absence de lien** entre  $x$  et  $y$ .

## 5.6 Test statistique sur le coefficient de corrélation

Le test statistique permet de vérifier l'existence ou l'absence de la corrélation entre les deux variables  $x$  et  $y$  et de tester la validité des coefficients du modèle linéaire.

Avant son interprétation, le coefficient de Bravais – Pearson  $r_{xy}$  doit être soumis à un test statistique, qui permet de vérifier si la corrélation calculée existe et vérifie la validité des coefficients du modèle.

Les hypothèses de ce test statistiques sont :

$$\begin{cases} H0 : \rho_{xy} = 0 & (\text{hypothèse d'absence de corrélation}) \\ H1 : \rho_{xy} \neq 0 & (\text{hypothèse d'absence de décorrélacion}) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse  $H0$ , on démontre que la statistique du test obéit une loi de Student à  $(n-2)$  degrés de liberté (ddl) et au seuil ou degré de risque  $\alpha(5\%)$ . La règle de décision [37, 39] est de la forme :

**Si  $t_c > t_{table}(t_{n-2}^\alpha)$  alors l'hypothèse  $H0$  est rejetée**

$t_{table}$  : Valeur lue dans la table de Student

$t_c$  : Statistique de test ou  $t_{calculé}$

C'est-à-dire qu'il existe une corrélation significative entre les deux variables  $x$  et  $y$  ( $\rho_{xy} \neq 0$ ). Sinon, on peut conclure qu'on n'a pas de relation significative entre les deux variables.

La variable auxiliaire (ou statistique du test)

$$T_c = \frac{r_{xy}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)}} \sqrt{(n - 2)} \quad (5.25)$$

## 5.7 Application des modèles de régression pour l'ajustement des formules de calcul du volume du mélange :

Dans notre cas d'étude, nous cherchons à trouver un lien fonctionnel entre le volume du mélange prédit par le modèle mathématique dont la longueur équivalente est introduite par les deux approches (Austin-Palfrey et MVEPC) et le volume expérimental.

Nous disposons d'un certain nombre de points analytiques et expérimentaux  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  ( $n$  est le nombre d'observations), où  $x_i$  et  $y_i$  sont les valeurs prises par les grandeurs  $x$  (Le volume du mélange calculé) et  $y$  (Le volume du mélange expérimental).

On essaye d'appliquer les modèles de régression pour déterminer la liaison entre les deux grandeurs  $x$  et  $y$ .

Il y a lieu de suivre les étapes suivantes :

1. Tracer les nuages de points et estimer les coefficients de corrélation
2. Ajuster le modèle linéaire et établir la droite de régression correspondant à ce problème.
3. Ajuster les autres modèles (Exponentiel, Puissance et Logarithmique) et établir les courbes de régression de chaque modèle.
4. Faire le test de validité (Test statistique) avec un degré de risque de  $\alpha=5\%$  à  $(n-2)$  ddl.

Les tableaux (5.1) et (5.2) récapitulent les données portant les volumes du mélange prédit et expérimental sur un nombre d'observation  $n=18$  (Nombre d'expériences) avec les transformations nécessaires pour traiter le modèle de régression linéaire et les autres schémas linéarisés (Exponentiel, Puissance et Logarithmique) et cela respectivement pour les deux approches, Autin-Palfrey et MVEPC.

**Tableau 5. 1** Données et détails des différentes transformations pour la régression du modèle de calcul du mélange basé sur l'approche d'Austin-Palfrey

Batch	n	xi	Yi	Xi=ln (xi)	Yi=ln (yi)	xi <sup>2</sup>	Xiyi	xiYi	Xi <sup>2</sup>	XiYi	Xiyi
06D31-16	1	15.92	14.15	2.767	2.650	253.40	225.25	42.18	7.66	7.33	39,16
08D31-16	2	14.85	11.18	2.698	2.414	220.49	166.01	35.85	7.28	6.51	30,16
09D32-16	3	16.10	13.67	2.779	2.615	259.13	220.05	42.10	7.72	7.27	37,98
02D33-16	4	16.25	15.06	2.788	2.712	264.17	244.78	44.08	7.77	7.56	41,99
10D33-16	5	15.83	12.71	2.762	2.542	250.60	201.20	40.25	7.63	7.02	35,10
07D36-16	6	16.97	16.12	2.831	2.780	287.95	273.54	47.17	8.02	7.87	45,64
09D36-16	7	14.74	18.21	2.690	2.354	217.19	155.19	34.70	7.24	6.33	28,33
05D01-17	8	14.88	10.66	2.700	2.366	221.53	158.66	35.22	7.29	6.39	28,78
07D01-17	9	18.54	20.78	2.920	3.034	343.90	385.35	56.26	8.53	8.86	60,68
03D02-17	10	17.83	17.64	2.881	2.870	317.93	314.53	51.18	8.30	8.27	50,82
07D02-17	11	19.09	20.57	2.949	3.024	364.25	392.59	57.71	8.70	8.92	60,66
02D03-17	12	17.42	17.85	2.858	2.882	303.39	310.91	50.20	8.17	8.24	51,01
04D03-17	13	15.50	14.28	2.741	2.659	240.19	221.31	41.21	7.51	7.29	39,14
07D04-17	14	15.94	15.42	2.769	2.736	254.20	245.85	43.62	7.67	7.58	42,70
09D04-17	15	14.06	11.79	2.644	2.467	197.82	165.83	34.70	6.99	6.52	31,17
11D04-17	16	14.73	11.89	2.690	2.467	216.95	173.66	36.34	7.24	6.64	31,71
05D05-17	17	19.69	21.35	2.980	3.061	387.60	420.33	60.26	8.88	9.12	63,62
06D05-17	18	19.42	21.42	2.966	3.064	376.99	415.89	59.50	8.80	9.09	63,53
<b>Σ</b>	<b>18</b>	<b>297,76</b>	<b>276,97</b>	<b>50,413</b>	<b>48,699</b>	<b>4977,67</b>	<b>4690,93</b>	<b>812,52</b>	<b>141,38</b>	<b>136,81</b>	<b>782,20</b>

**Tableau 5.2** Données et détails des différentes transformations pour la régression du modèle de calcul du mélange basé sur l'approche MVEPC

Batch	n	xi	Yi	$Xi=\ln(xi)$	$Yi=\ln(yi)$	$xi^2$	$Xiyi$	$xiYi$	$Xi^2$	$XiYi$	$Xiyi$
06D31-16	1	15.10	14.15	2.714	2.650	227.92	213.62	40.00	7.37	7.19	38,41
08D31-16	2	14.08	11.18	2.645	2.414	198.30	157.44	34.00	7.00	6.39	29,57
09D32-16	3	15.28	13.67	2.727	2.615	233.50	208.89	39.96	7.43	7.13	37,27
02D33-16	4	15.43	15.06	2.737	2.712	238.19	232.43	41.86	7.49	7.42	41,21
10D33-16	5	15.03	12.71	2.710	2.542	225.80	190.99	38.20	7.34	6.89	34,44
07D36-16	6	16.10	16.12	2.779	2.780	259.26	259.56	44.76	7.72	7.73	44,80
09D36-16	7	13.98	18.21	2.637	2.354	195.35	147.18	32.90	6.96	6.21	27,77
05D01-17	8	14.13	10.66	2.648	2.366	199.68	150.63	33.44	7.01	6.27	28,23
07D01-17	9	17.61	20.78	2.868	3.034	310.05	365.90	53.42	8.23	8.70	59,60
03D02-17	10	16.92	17.64	2.828	2.870	286.29	298.47	48.56	8.00	8.12	49,89
07D02-17	11	18.11	20.57	2.897	3.024	328.13	372.61	54.78	8.39	8.76	59,59
02D03-17	12	16.52	17.85	2.805	2.882	272.81	294.88	47.61	7.87	8.08	50,06
04D03-17	13	14.71	14.28	2.688	2.659	216.25	209.99	39.10	7.23	7.15	38,39
07D04-17	14	15.13	15.42	2.717	2.736	228.97	233.33	41.40	7.38	7.43	41,89
09D04-17	15	13.34	11.79	2.591	2.467	177.99	157.29	32.92	6.71	6.39	30,55
11D04-17	16	13.98	11.89	2.638	2.467	195.44	164.83	34.49	6.96	6.51	31,10
05D05-17	17	18.67	21.35	2.927	3.061	348.56	398.60	57.15	8.57	8.96	62,49
06D05-17	18	18.41	21.42	2.913	3.064	339.07	394.42	56.43	8.49	8.93	62,40
<b>Σ</b>	<b>18</b>	<b>282,53</b>	<b>276,97</b>	<b>49,469</b>	<b>48,699</b>	<b>4481,67</b>	<b>4451,06</b>	<b>770,98</b>	<b>136,14</b>	<b>134,25</b>	<b>767,67</b>

## 5.8 Détermination des coefficients de corrélation et des paramètres de la droite de régression

Le tableau (5.3) récapitule les coefficients de Bravais–Pearson déterminés à partir de l'équation (5.23) et les paramètres (a,b) de la droite de régression calculés respectivement à partir des équations (5.16) et (5.17) pour l'ensemble des ajustements.

**Tableau 5.3** Coefficients de corrélation et paramètres de la droite de régression - Approche d'Austin-Palfrey.

Ajustement	Fonction	$r_{xy}$	Coefficients	
			a	B
Linéaire	$R(x_i; y_i)$	0,9725	2.0949	-19.267
Schéma Exponentiel	$R(x_i; \ln y_i)$ ou $R(x_i; Y_i)$	0,9590	1.332	1.6528
Schéma Puissance	$R(\ln x_i; \ln y_i)$ ou $R(X_i; Y_i)$	0,9613	2.248	0.0276
Schéma Logarithmique	$R(\ln x_i; y_i)$ ou $R(X_i; y_i)$	0,9712	35.232	-83.289

### 5.8.1 Ajustement de corrélation basée sur la longueur équivalent d'Austin-Palfrey

#### 5.8.1.1 Ajustement linéaire

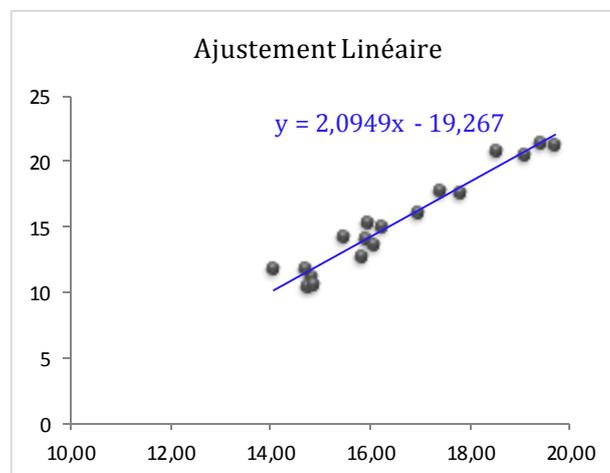
La figure (5.2) présente la courbe de dispersion (nuage de points) des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

$$y = 2.09 x - 19.26 \quad (5.26)$$

$x$  : L'équation (3.58) du volume du mélange basée sur la longueur équivalente introduite par l'approche d'Austin-Palfrey ;

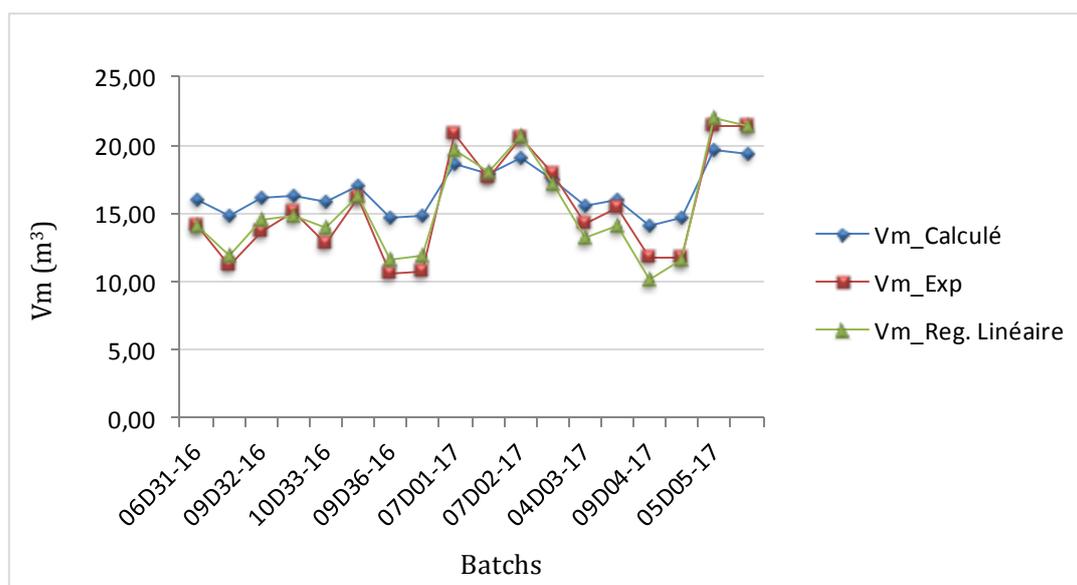
$y$  : représente la fonction de la formule du mélange ajustée.



**Fig. 5.2** Ajustement linéaire du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche d'Austin-Palfrey

**Tableau 5. 4** Volumes de mélange calculé après régression linéaire (Approche d'Austin-Palfrey)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	Austin-Palfrey			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Linéaire	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.92	12.50	14.08	-0.49
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.85	32.82	11.84	5.90
09D32-16	GO-SCA	13.67	16.10	17.76	14.46	5.75
02D33-16	GO-SCA	15.06	16.25	7.92	14.78	-1.84
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.83	24.55	13.90	9.33
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.97	5.27	16.28	1.00
09D36-16	GO-SP	18.21	14.74	39.96	16.61	10.22
05D01-17	GO-SP	10.66	14.88	39.62	11.91	11.76
07D01-17	GO-SCA	20.78	18.54	-10.76	19.58	-5.77
03D02-17	GO-SCA	17.64	17.83	1.08	18.09	2.53
07D02-17	GO-SCA	20.57	19.09	-7.22	20.72	0.71
02D03-17	SP-GO	17.85	17.42	-2.42	17.20	-3.52
04D03-17	SCA-GO	14.28	15.50	8.53	13.20	-7.56
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.94	3.40	14.13	-8.35
09D04-17	GO-CA	11.79	14.06	19.30	10.20	-13.51
11D04-17	GO-SCA	11.89	14.73	24.93	11.59	-1.70
05D05-17	SCA-GO	21.35	19.69	-7.79	21.89	2.93
06D05-17	GO-SCA	21.42	19.42	-9.35	21.41	-0.06
			%AEr	11.12%	%AEr <sub>reg</sub>	0.41%

**Fig. 5. 3** Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression linéaire comparé à l'expérimental

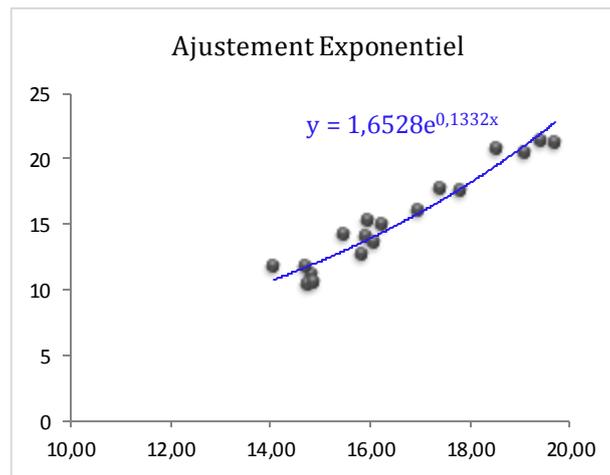
Le tableau (5.4) résume les volumes du mélange avant et après régression linéaire, comparés aux volumes expérimentaux. Les résultats sont présentés graphiquement par la figure (5.3) qui montre clairement l'amélioration de l'approximation du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche d'Austin-Palfrey) après régression linéaire. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 11.12% avant régression linéaire, en arrivant à 0.41% après l'ajustement du modèle de calcul (après régression).

### 5.8.1.2 Ajustement exponentiel

La figure (5.4) présente le nuage de points des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement exponentiel linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

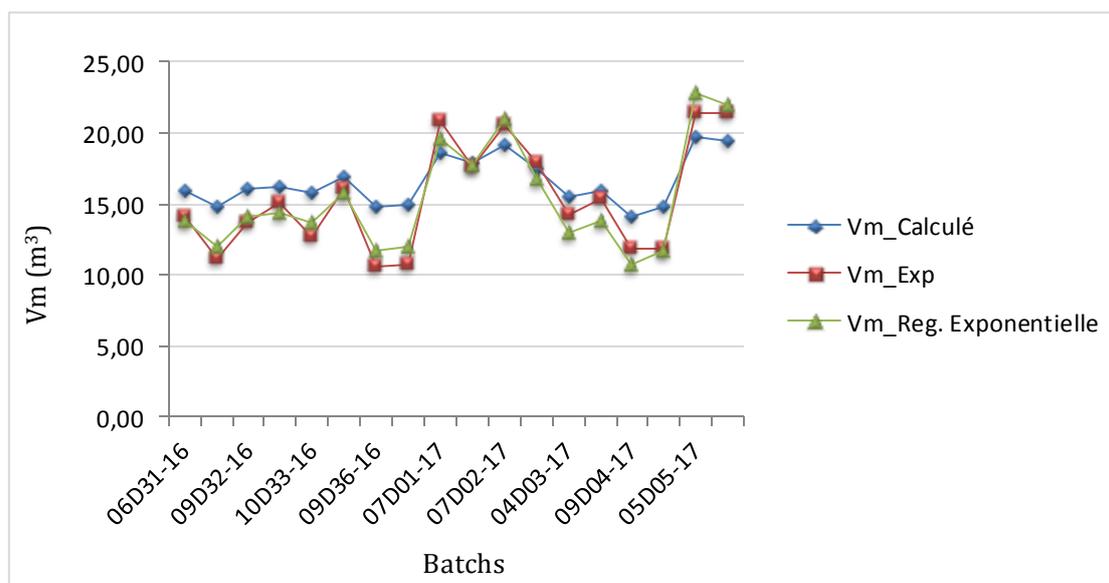
$$y = 1.652 e^{0.133x} \quad (5.27)$$



**Fig. 5. 4** Ajustement exponentiel du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche d'Austin-Palfrey

**Tableau 5. 5** Volumes de mélange calculé après régression exponentielle (Approche d'Austin-Palfrey)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	Austin-Palfrey			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Exponentielle	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.92	12.50	13.77	-2.65
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.85	32.82	11.95	6.85
09D32-16	GO-SCA	13.67	16.10	17.76	14.11	3.19
02D33-16	GO-SCA	15.06	16.25	7.92	14.40	-4.36
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.83	24.55	13.61	7.11
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.97	5.27	15.84	-7.72
09D36-16	GO-SP	18.21	14.74	39.96	11.77	11.77
05D01-17	GO-SP	10.66	14.88	39.62	12.00	12.58
07D01-17	GO-SCA	20.78	18.54	-10.76	19.54	-5.95
03D02-17	GO-SCA	17.64	17.83	1.08	17.77	0.74
07D02-17	GO-SCA	20.57	19.09	-7.22	21.00	2.10
02D03-17	SP-GO	17.85	17.42	-2.42	16.82	-5.77
04D03-17	SCA-GO	14.28	15.50	8.53	13.02	-8.79
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.94	3.40	13.82	-10.37
09D04-17	GO-CA	11.79	14.06	19.30	10.76	-8.73
11D04-17	GO-SCA	11.89	14.73	24.93	11.76	-0.29
05D05-17	SCA-GO	21.35	19.69	-7.79	22.76	6.59
06D05-17	GO-SCA	21.42	19.42	-9.35	21.95	2.47
			%AEr	11.12%	%AEr <sub>reg</sub>	0.26%

**Fig. 5. 5** Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression exponentielle comparé à l'expérimental

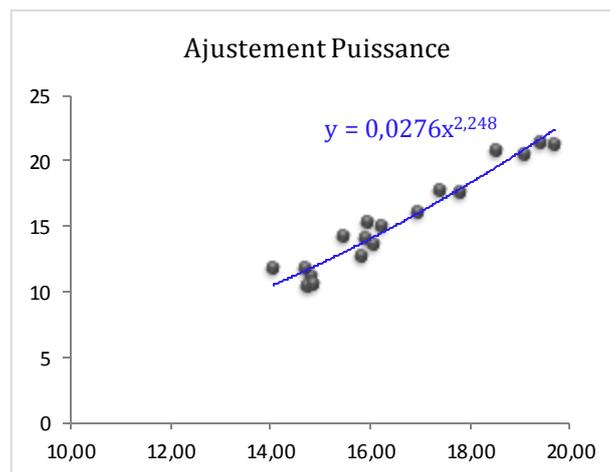
Le tableau (5.5) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. Les résultats sont présentés graphiquement par la figure (5.5) qui montre la bonne approximation du calcul du volume du mélange, basé sur la longueur équivalente de l'approche d'Austin-Palfrey et cela après régression exponentielle. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 11.12% avant régression linéaire, en arrivant à 0.26% après l'ajustement du modèle de calcul (après régression).

### 5.8.1.3 Ajustement puissance

La figure (5.6) illustre la courbe de dispersion des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement puissance linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

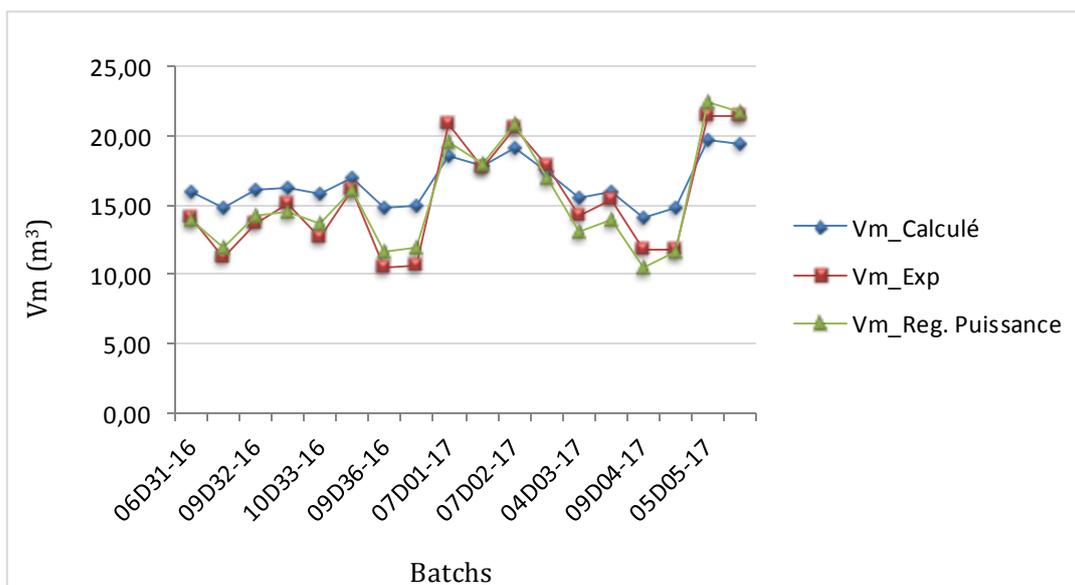
$$y = 0.027 x^{2.248} \quad (5.28)$$



**Fig. 5. 6** Ajustement puissance du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche d'Austin-Palfrey

**Tableau 5. 6** Volumes de mélange calculé après régression puissance (Approche d'Austin-Palfrey)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	Austin-Palfrey			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Puissance	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.92	12.50	13.89	-1.82
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.85	32.82	11.88	6.28
09D32-16	GO-SCA	13.67	16.10	17.76	14.25	4.21
02D33-16	GO-SCA	15.06	16.25	7.92	14.56	-3.33
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.83	24.55	13.72	7.95
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.97	5.27	16.04	-0.50
09D36-16	GO-SP	18.21	14.74	39.96	11.68	10.94
05D01-17	GO-SP	10.66	14.88	39.62	11.94	12.05
07D01-17	GO-SCA	20.78	18.54	-10.76	19.58	-5.77
03D02-17	GO-SCA	17.64	17.83	1.08	17.93	1.63
07D02-17	GO-SCA	20.57	19.09	-7.22	20.89	1.55
02D03-17	SP-GO	17.85	17.42	-2.42	17.01	-4.71
04D03-17	SCA-GO	14.28	15.50	8.53	13.08	-8.39
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.94	3.40	13.94	-9.59
09D04-17	GO-CA	11.79	14.06	19.30	10.52	-10.79
11D04-17	GO-SCA	11.89	14.73	24.93	11.67	-1.04
05D05-17	SCA-GO	21.35	19.69	-7.79	22.40	4.92
06D05-17	GO-SCA	21.42	19.42	-9.35	21.71	1.36
			%Aer	11.12%	%Aer <sub>reg</sub>	0.28%

**Fig. 5. 7** Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression puissance comparé à l'expérimental

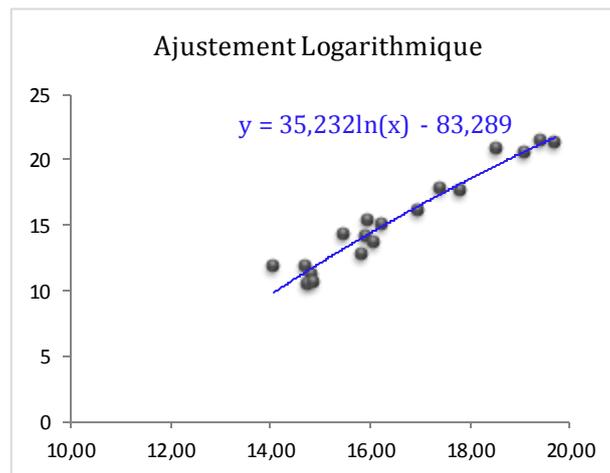
Le tableau (5.6) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. Les résultats sont présentés graphiquement par la figure (5.7) qui montre bien l'amélioration de la précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche d'Austin-Palfrey) après une régression puissance. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 11.12% avant régression linéaire, en arrivant à 0.28% après l'ajustement du modèle de calcul (après régression).

#### 5.8.1.4 Ajustement logarithmique

La figure (5.8) illustre la courbe de dispersion des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement logarithmique linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

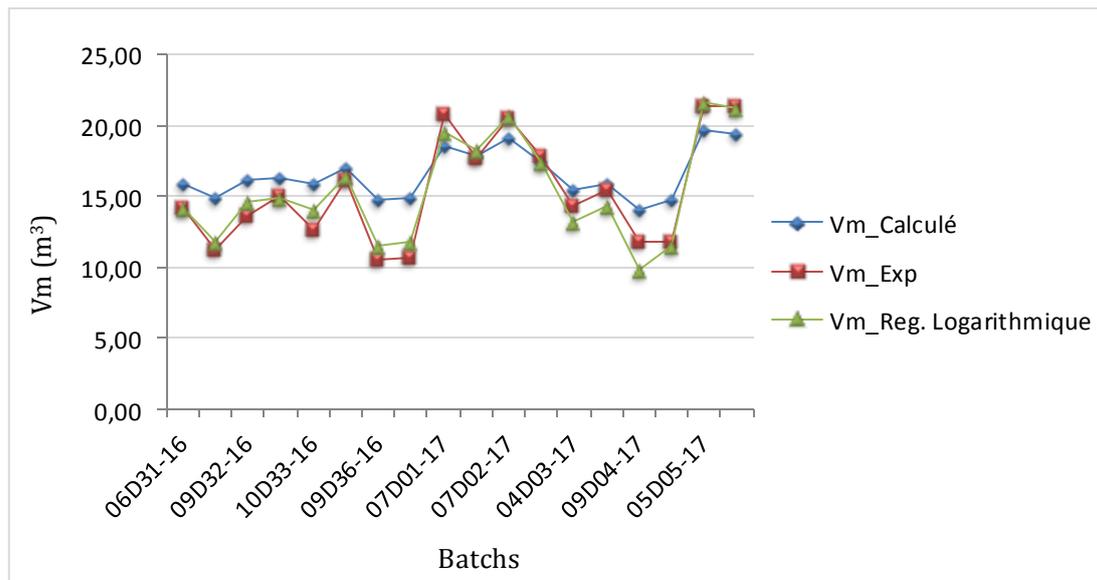
$$y = 35.23 \ln(x) - 83.28 \quad (5.29)$$



**Fig. 5. 8** Ajustement logarithmique du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche d'Austin-Palfrey

**Tableau 5. 7** Volumes de mélange calculé après régression logarithmique (Approche d'Austin-Palfrey)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	Austin-Palfrey			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Logarithmique	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.92	12.50	14.21	0.46
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.85	32.82	11.76	5.23
09D32-16	GO-SCA	13.67	16.10	17.76	14.61	6.87
02D33-16	GO-SCA	15.06	16.25	7.92	14.95	-0.74
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.83	24.55	14.02	10.30
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.97	5.27	16.47	2.15
09D36-16	GO-SP	18.21	14.74	39.96	11.50	9.20
05D01-17	GO-SP	10.66	14.88	39.62	11.85	11.14
07D01-17	GO-SCA	20.78	18.54	-10.76	19.59	-5.70
03D02-17	GO-SCA	17.64	17.83	1.08	18.21	3.24
07D02-17	GO-SCA	20.57	19.09	-7.22	20.61	0.18
02D03-17	SP-GO	17.85	17.42	-2.42	17.39	-2.60
04D03-17	SCA-GO	14.28	15.50	8.53	13.27	-7.06
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.94	3.40	14.27	-7.46
09D04-17	GO-CA	11.79	14.06	19.30	9.85	-16.43
11D04-17	GO-SCA	11.89	14.73	24.93	11.48	-2.64
05D05-17	SCA-GO	21.35	19.69	-7.79	21.70	1.65
06D05-17	GO-SCA	21.42	19.42	-9.35	21.21	-0.97
			%AEr	11.12%	%AEr <sub>reg</sub>	0.38%

**Fig. 5. 9** Volume du mélange (Approche Austin-Palfrey) avant et après régression logarithmique comparé à l'expérimental

Le tableau (5.7) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. La figure (5.9) montre la bonne précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche d'Austin-Palfrey) après une régression logarithmique. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 11.12% avant régression linéaire et à 0.38% après régression.

## 5.8.2 Ajustement de corrélation basée sur la longueur équivalent de l'approche MVEPC

Le tableau (5.8) récapitule les coefficients de Bravais–Pearson déterminés à partir de l'équation (5.23) et les paramètres (a,b) de la droite de régression calculés respectivement à partir des équations (5.16) et (5.17) pour l'ensemble des ajustements et dont la longueur équivalente introduite dans le modèle de prédiction du volume du mélange, est basée sur l'approche MVEPC.

**Tableau 5.8** Coefficients de corrélation et paramètres de la droite de régression - Approche MVEPC

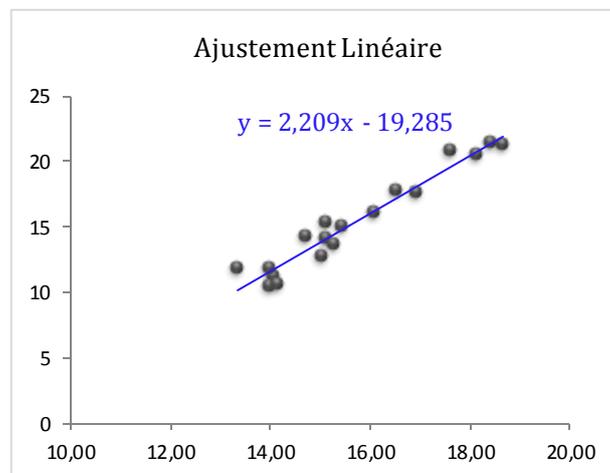
Ajustement	Fonction	$r_{xy}$	Coefficients	
			A	B
Linéaire	$R(x_i; y_i)$	0,9725	2.209	-19.285
Schéma Exponentiel	$R(x_i; \ln y_i)$ ou $R(x_i; Y_i)$	0,9592	0.1414	1.6505
Schéma Puissance	$R(\ln x_i; \ln y_i)$ ou $R(X_i; Y_i)$	0,9614	2.2486	0.031
Schéma Logarithmique	$R(\ln x_i; y_i)$ ou $R(X_i; y_i)$	0,9712	35.238	-81.456

### 5.8.2.1 Ajustement linéaire

La figure (5.10) présente la courbe de dispersion des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

$$y = 2.209 x - 19.28 \quad (5.30)$$



**Fig. 5.10** Ajustement linéaire du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche MVEPC

Tableau 5. 9 Volumes de mélange calculé après régression linéaire (Approche MVEPC)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	MVEPC			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Linéaire	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.10	6.69	14.06	-0.61
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.08	25.96	11.82	5.74
09D32-16	GO-SCA	13.67	15.28	11.78	14.47	5.85
02D33-16	GO-SCA	15.06	15.43	2.48	14.81	-1.68
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.03	18.23	13.91	9.43
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.10	-0.11	16.28	1.01
09D36-16	GO-SP	18.21	13.98	32.73	11.59	10.07
05D01-17	GO-SP	10.66	14.13	32.56	11.93	11.91
07D01-17	GO-SCA	20.78	17.61	-15.26	19.61	-5.62
03D02-17	GO-SCA	17.64	16.92	-4.08	18.09	2.56
07D02-17	GO-SCA	20.57	18.11	-11.94	20.73	0.78
02D03-17	SP-GO	17.85	16.52	-7.45	17.21	-3.60
04D03-17	SCA-GO	14.28	14.71	2.88	13.20	-7.57
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.13	-1.87	14.14	-8.29
09D04-17	GO-CA	11.79	13.34	13.16	10.19	-13.60
11D04-17	GO-SCA	11.89	13.98	18.58	11.60	-1.64
05D05-17	SCA-GO	21.35	18.67	-12.55	21.96	2.84
06D05-17	GO-SCA	21.42	18.41	-14.03	21.39	-0.14
			%Aer	5.44%	%Aer <sub>reg</sub>	0.41%

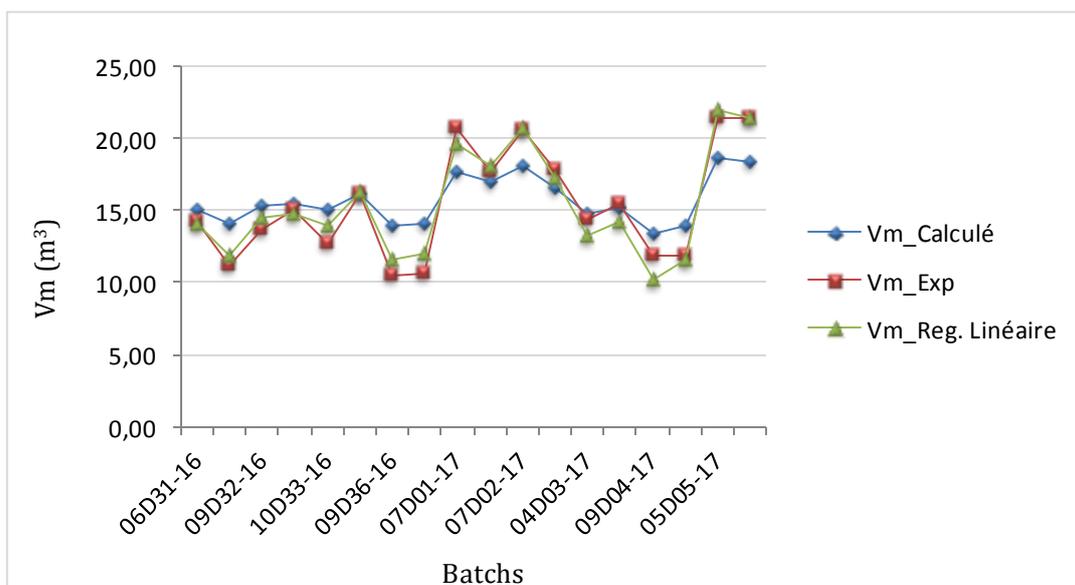


Fig. 5. 11 Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression linéaire comparé à l'expérimental

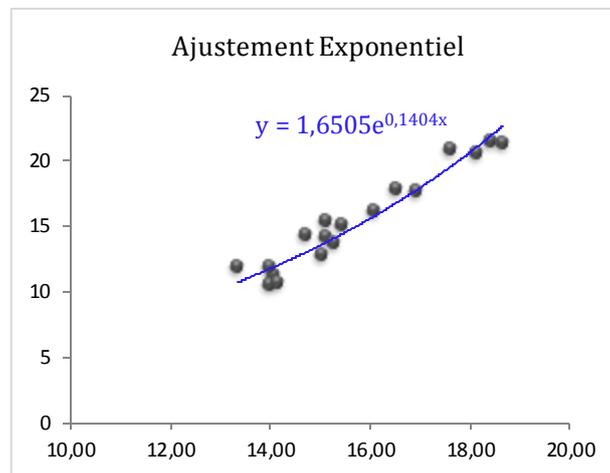
Le tableau (5.9) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. La figure (5.11) montre la bonne précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche MVEPC) après une régression linéaire. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 5.44% avant régression linéaire et à 0.41% après régression.

### 5.8.2.2 Ajustement exponentiel

La figure (5.12) présente le nuage de points des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement exponentiel linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

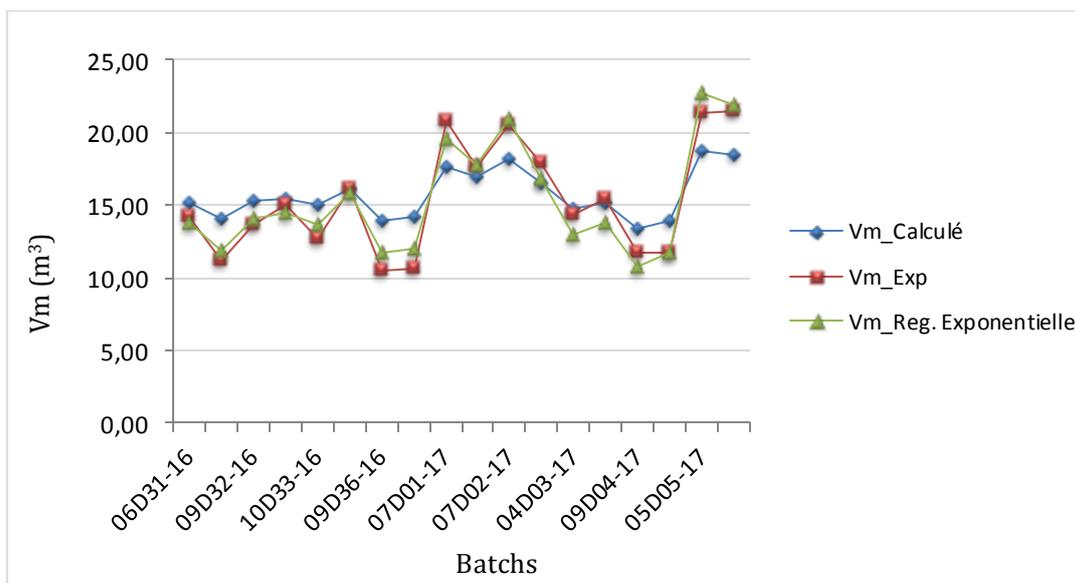
$$y = 1.650 e^{0.140x} \quad (5.31)$$



**Fig. 5. 12** Ajustement exponentiel du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche MVEPC

**Tableau 5. 10** Volumes de mélange calculé après régression exponentielle (Approche MVEPC)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	MVEPC			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Exponentielle	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.10	6.69	13.75	-2.86
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.08	25.96	11.92	6.62
09D32-16	GO-SCA	13.67	15.28	11.78	14.10	3.18
02D33-16	GO-SCA	15.06	15.43	2.48	14.41	-4.32
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.03	18.23	13.61	7.08
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.10	-0.11	15.83	-1.81
09D36-16	GO-SP	18.21	13.98	32.73	11.75	11.54
05D01-17	GO-SP	10.66	14.13	32.56	12.00	12.59
07D01-17	GO-SCA	20.78	17.61	-15.26	19.56	-5.89
03D02-17	GO-SCA	17.64	16.92	-4.08	17.75	0.65
07D02-17	GO-SCA	20.57	18.11	-11.94	21.00	2.07
02D03-17	SP-GO	17.85	16.52	-7.45	16.78	-5.97
04D03-17	SCA-GO	14.28	14.71	2.88	13.01	-8.89
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.13	-1.87	13.81	-10.42
09D04-17	GO-CA	11.79	13.34	13.16	10.74	-8.88
11D04-17	GO-SCA	11.89	13.98	18.58	11.75	-0.34
05D05-17	SCA-GO	21.35	18.67	-12.55	22.70	6.32
06D05-17	GO-SCA	21.42	18.41	-14.03	21.90	2.23
			%AEr	5.44%	%AEr <sub>reg</sub>	0.16%

**Fig. 5. 13** Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression exponentielle comparé à l'expérimental

Le tableau (5.10) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. La figure (5.13) montre la bonne précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche MVEPC) après une régression exponentielle. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 5.44% avant régression linéaire et à 0.16% après régression.

### 5.8.2.3 Ajustement puissance

La figure (5.14) illustre la courbe de dispersion des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement puissance linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

$$y = 0.031 x^{2.248} \quad (5.32)$$

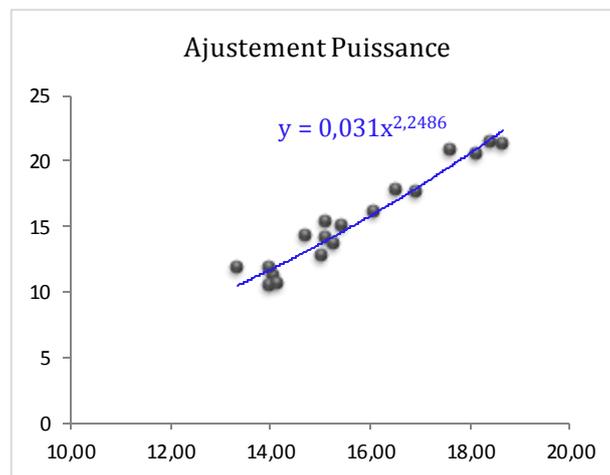
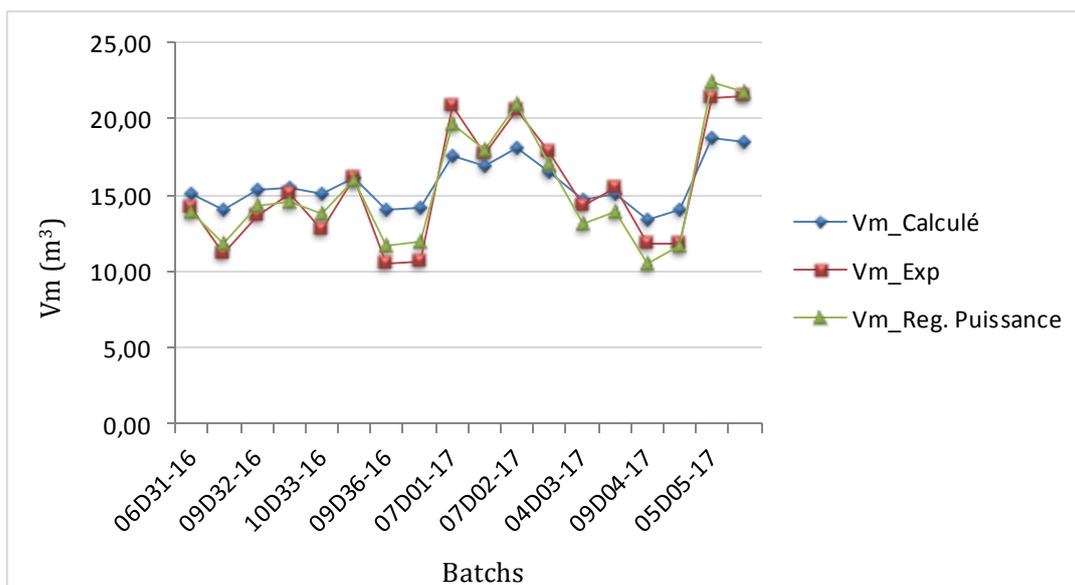


Fig. 5. 14 Ajustement puissance du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche MVEPC

**Tableau 5. 11** Volumes de mélange calculé après régression puissance (Approche MVEPC)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	MVEPC			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Puissance	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.10	6.69	13.87	-1.815
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.08	25.96	11.86	6.12
09D32-16	GO-SCA	13.67	15.28	11.78	14.26	4.30
02D33-16	GO-SCA	15.06	15.43	2.48	14.58	-3.19
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.03	18.23	13.73	8.02
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.10	-0.11	16.04	-0.51
09D36-16	GO-SP	18.21	13.98	32.73	11.67	10.79
05D01-17	GO-SP	10.66	14.13	32.56	11.96	12.17
07D01-17	GO-SCA	20.78	17.61	-15.26	19.61	-5.63
03D02-17	GO-SCA	17.64	16.92	-4.08	17.93	1.63
07D02-17	GO-SCA	20.57	18.11	-11.94	20.90	1.61
02D03-17	SP-GO	17.85	16.52	-7.45	16.99	-4.82
04D03-17	SCA-GO	14.28	14.71	2.88	13.08	-8.41
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.13	-1.87	13.95	-9.56
09D04-17	GO-CA	11.79	13.34	13.16	10.51	-10.88
11D04-17	GO-SCA	11.89	13.98	18.58	11.67	-1.00
05D05-17	SCA-GO	21.35	18.67	-12.55	22.37	4.77
06D05-17	GO-SCA	21.42	18.41	-14.03	21.68	1.24
			%AEr	5.44%	%AEr <sub>reg</sub>	0.26%

**Fig. 5. 15** Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression puissance comparé à l'expérimental

Le tableau (5.11) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. La figure (5.15) montre la bonne précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche MVEPC) après une régression puissance. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 5.44% avant régression linéaire et à 0.26% après régression.

#### 5.8.2.4 Ajustement logarithmique

La figure (5.16) illustre la courbe de dispersion des volumes prédits et expérimentaux avec la droite de régression du schéma d'ajustement logarithmique linéarisé.

La fonction de régression est donnée par l'expression suivante :

$$y = 35.23 \ln(x) - 81.45 \quad (5.33)$$

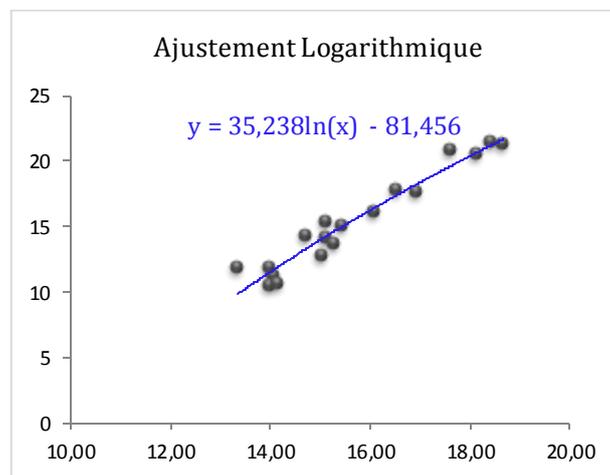
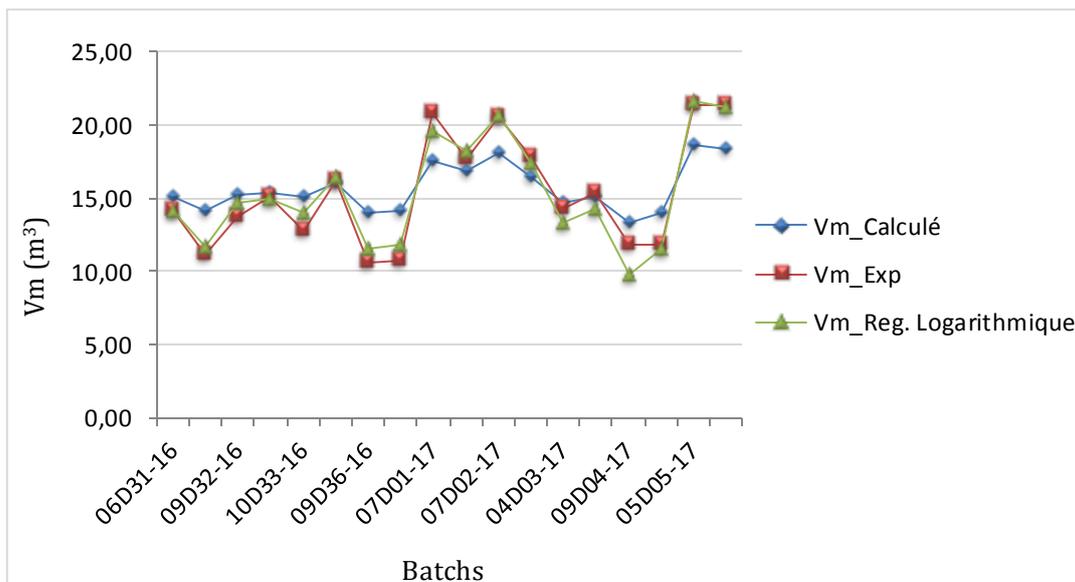


Fig. 5. 16 Ajustement logarithmique du modèle de prédiction du mélange basée sur l'approche MVEPC

**Tableau 5. 12** Volumes de mélange calculé après régression logarithmique (Approche MVEPC)

Batch N°	Interface	$V_{mExp}$ (m <sup>3</sup> )	MVEPC			
			$V_m$ (m <sup>3</sup> )	%Er	Régression Logarithmique	
					$V_{mreg}$ (m <sup>3</sup> )	%Er <sub>reg</sub>
06D31-16	GO-SCA	14.15	15.10	6.69	14.20	0.33
08D31-16	GO-SCA	11.18	14.08	25.96	11.74	5.05
09D32-16	GO-SCA	13.67	15.28	11.78	14.62	6.98
02D33-16	GO-SCA	15.06	15.43	2.48	14.97	-0.57
10D33-16	GO-SCA	12.71	15.03	18.23	14.03	10.41
07D36-16	GO-SCA	16.12	16.10	-0.11	16.47	2.16
09D36-16	GO-SP	18.21	13.98	32.73	11.48	9.03
05D01-17	GO-SP	10.66	14.13	32.56	11.87	11.32
07D01-17	GO-SCA	20.78	17.61	-15.26	19.62	-5.58
03D02-17	GO-SCA	17.64	16.92	-4.08	18.21	3.26
07D02-17	GO-SCA	20.57	18.11	-11.94	20.62	0.23
02D03-17	SP-GO	17.85	16.52	-7.45	17.37	-2.68
04D03-17	SCA-GO	14.28	14.71	2.88	13.27	-7.06
07D04-17	GO-SCA	15.42	15.13	-1.87	14.28	-7.40
09D04-17	GO-CA	11.79	13.34	13.16	9.84	-16.53
11D04-17	GO-SCA	11.89	13.98	18.58	11.49	-2.55
05D05-17	SCA-GO	21.35	18.67	-12.55	21.68	1.56
06D05-17	GO-SCA	21.42	18.41	-14.03	21.20	-1.05
			%AEr	5.44%	%AEr <sub>reg</sub>	0.38%

**Fig. 5. 17** Volume du mélange (Approche MVEPC) avant et après régression logarithmique comparé à l'expérimental

Le tableau (5.12) résume les volumes du mélange avant et après régression exponentielle, comparés aux volumes expérimentaux. La figure (5.17) montre la bonne précision du calcul du volume du mélange (basé sur la longueur équivalente de l'approche MVEPC) après une régression logarithmique. Cette amélioration est exprimée par l'erreur relative moyenne qui était de 5.44% avant régression linéaire et à 0.38% après régression.

### 5.8.3 Test statique « Test de Student »

Les coefficients de corrélation calculés et récapitulés dans les tableaux (5,3) et (5,4) pour les modèles respectivement basés sur l'approche d'Austin-Palfrey et MVEPC présentent des valeurs pratiquement voisines de 1, signifiant la forte intensité de corrélation, n'étaient pas suffisants pour juger les modèles de régression, sans recours au test statique (Test de Student). Le test statistique est un outil efficace qui permet de nous éviter toute coïncidence.

Le test statistique est effectué pour un degré de risque de 5%.

Le seuil de rejet de  $H_0$ , où la valeur critique pour  $\alpha=0.05$  et  $ddl = n - 2 = 16$ , est donnée dans la table de Student de l'Annexe II par  $t_{table} = 2,12$ .

Tableau 5. 13 Test statistique

Corrélation	$n$	$r_{xy}$	$t_c$	$t_t$	Résultat du test
Basée sur Austin-Palfrey	18	0.9727	16.6975	2.12	$H_0$ est rejetée
Basée sur MVEPC		0,9725	16.7139		$H_0$ est rejetée

D'après le tableau (5.13),  $T_{calculé} > t_{table}$  pour les deux corrélations, alors l'hypothèse  $H_0$  est rejetée, de ce fait, le coefficient de corrélation linéaire  $r_{xy}$  est significatif, donc Il y a une forte corrélation entre le volume du mélange théorique et expérimental.

## 5.9 Conclusion

Nous avons obtenus des coefficients de corrélations de : 0.9725, 0.9590, 0.9613 et 0.9712 respectivement pour les ajustements linéaire, exponentiel, puissance et logarithmiques pour la formule de prédiction du volume du mélange, basée la longueur équivalente calculée à partir de l'approche d'Austin-Palfrey. Pour la deuxième approche MVEPC, on a enregistré des valeurs respectives de 0.9725, 0.9592, 0.9614 et 0.9712 pour le même ordre d'ajustement précédent. Ces coefficients sont tous voisins de 1, ils mesurent une forte corrélation entre la prédiction et l'expérimental, bien confirmée après avoir satisfait le test statistique.

Les modèles de régressions ont amélioré significativement le comportement de la formule de calcul de l'interface du mélange selon les deux approches (Austin-Palfrey et MVEPC).

# Chapitre 06

## Etude paramétrique : effets de quelques paramètres sur l'interface du mélange

### 6.1 Introduction

Le volume de mélange formé lors de l'écoulement séquentiel dans un pipeline multiproduit pose un grand problème dans l'industrie pétrolière, dont il est intéressant de le minimiser au maximum possible dans le but de réduire quelques contraintes d'exploitation.

Afin de faire face à ce souci industriel et dans le but de réduire l'interface du mélange qui est considérée comme une entité non pure et non commercialisable, nous avons pensé à mener une étude paramétrique, qui consiste à étudier les paramètres qui influent cette interface, à savoir : La géométrie de pipeline (La longueur et le diamètre), les paramètres d'écoulement (La vitesse, le régime d'écoulement,...etc.) et les paramètres physicochimiques des fluides transportés et plus particulièrement La masse volumique des fluides.

### 6.2 Influence de la géométrie

Pour étudier l'effet des paramètres géométrique sur l'évolution du volume de mélange avec variation de longueur pour un diamètre constante, nous avons considéré neuf longueurs équivalentes du pipeline : 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 et 1000 km et cinq diamètres respectifs de 8",10",12",14" et 16" (Fig. 6.1) pour chaque longueur avec les paramètres suivants :

- La masse volumique de Gasoil :  $850,6 \text{ Kg/m}^3$
- La masse volumique de l'Essence Super :  $741,6 \text{ Kg/m}^3$
- Débit volumique moyenne :  $180 \text{ m}^3/h$

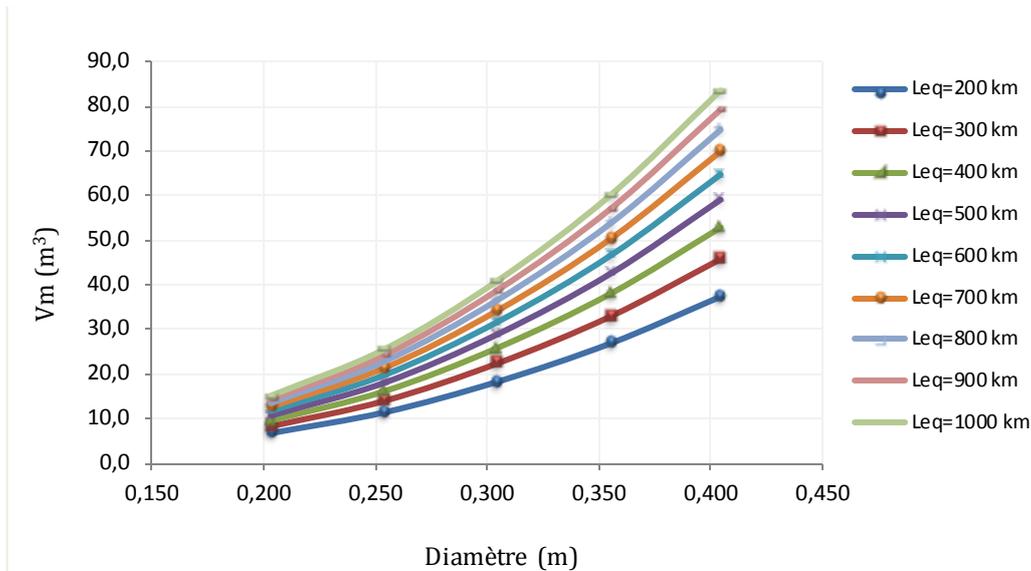


Fig. 6. 1 Influence de la géométrie sur le volume de mélange

La figure 6.1, montre clairement que le volume du mélange varie proportionnellement et considérablement avec l'évolution de la géométrie du pipeline, c'est-à-dire avec l'augmentation de la longueur et du diamètre et de la longueur.

### 6.3 Influence du nombre de Reynolds

Pour bien comprendre l'effet du régime d'écoulement sur l'évolution de l'interface du mélange, nous avons considérés un écoulement successif des deux carburants « Gasoil » et de « l'Essence Super » de masses volumiques respectives de  $830$  et  $745 \text{ Kg/m}^3$  ayant pour viscosité moyenne du mélange  $1.833 \text{ Cst}$ .

Nous avons ainsi considéré trois pipelines de trois diamètres différents 8" (Fig. 6.2), 10" (Fig. 6.3) et 12" (Fig. 6.4) et de longueur équivalente relative au pipeline étudié ( $930164.59 \text{ m}$ ).

Nous avons considéré les régimes, turbulent et turbulent lisse pour rester dans la mesure du possible dans le domaine de validité du coefficient de dispersion adimensionnel.

Pour une bonne analyse nous avons tracé pour chaque diamètre trois courbes :

1.  $V_m = f(q_v)$
2.  $V_m = f(R_e)$
3.  $V_m = f(u)$

Car dans l'exploitation des pipelines, nous devons faire attention aux vitesses (débits) admises dans l'exploitation des pipelines.

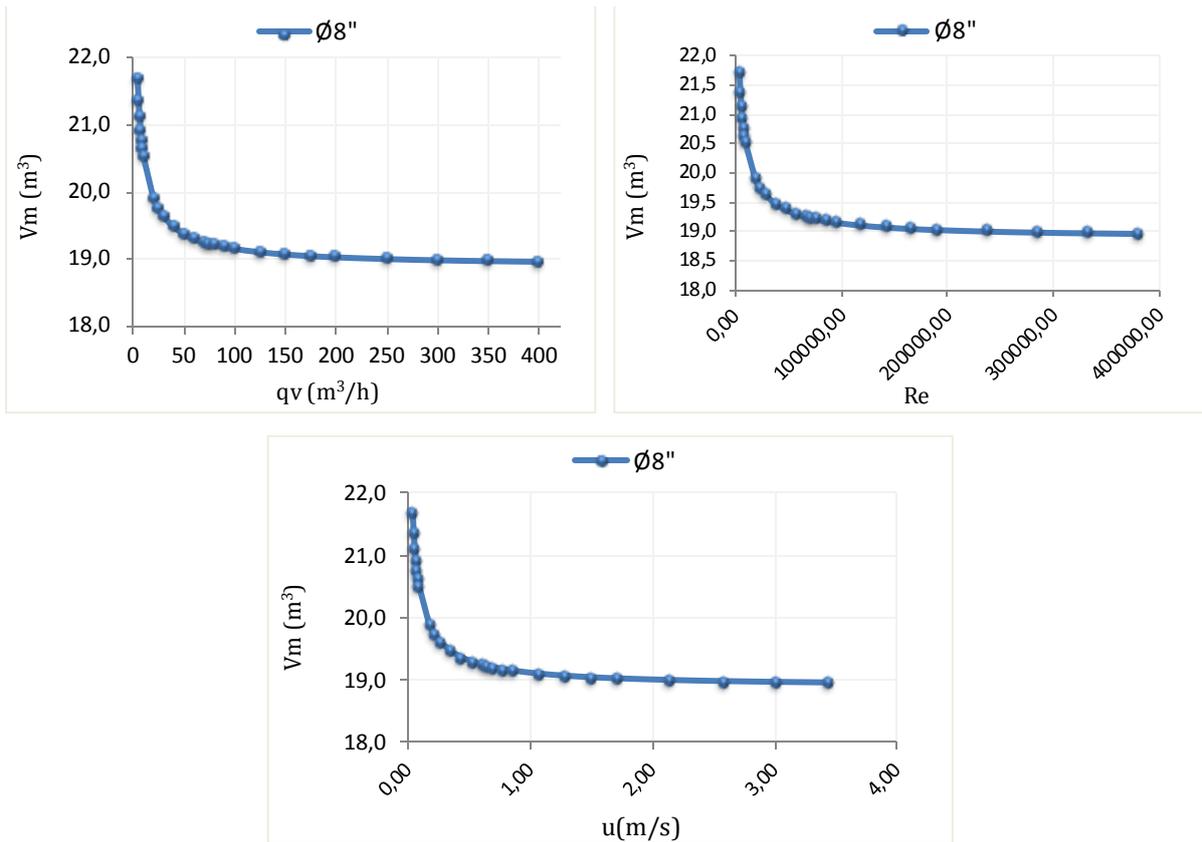


Fig. 6. 2 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (8")

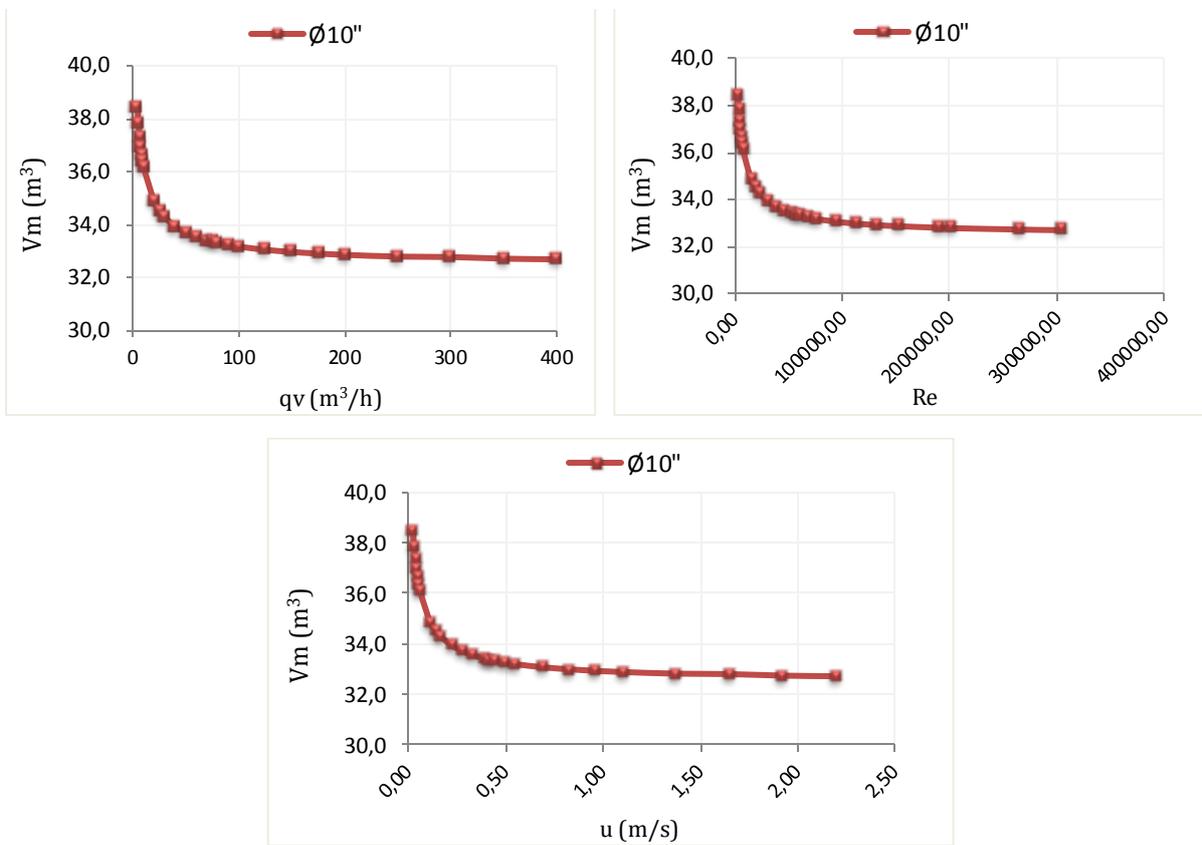


Fig. 6. 3 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (10")

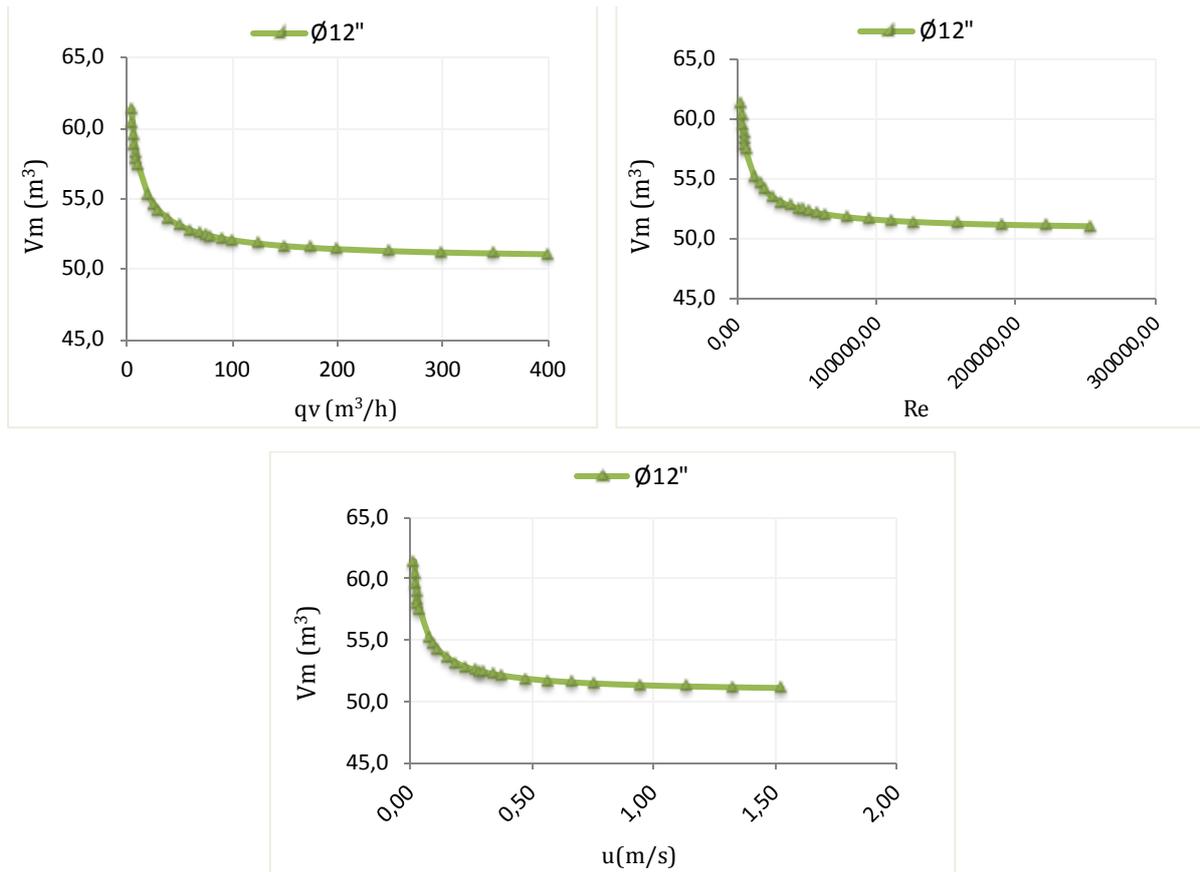


Fig. 6. 4 Influence des paramètres d'écoulement sur le volume de mélange (12")

Les figures (6.2), (6.3) et (6.4) illustrent l'influence du régime d'écoulement sur le volume du mélange.

Nous remarquons qu'à la limite supérieure du régime turbulent lisse ( $Re \rightarrow 10^5$ ) le volume commence à être constant. Au dessous de ces valeurs et à la limite inférieure des vitesses d'écoulement (débit de  $4m^3/h$ ), en comparant toujours avec le seuil du régime turbulent lisse, l'interface de mélange s'amplifie davantage et s'augmente de +15%, +22% et +23% pour les trois diamètres respectifs 8", 10" et 12".

#### 6.4 Influence de la masse volumique

La masse volumique des carburants a une influence sur leur viscosité du mélange, ainsi que sur les concentrations de coupure qui sont calculées à partir de la masse volumique de chaque produit et de la masse volumique du mélange.

Nous allons varier la masse volumique de l'un des deux carburants avec le maintien de l'autre produit fixe.

### 6.4.1 Variation de la masse volumique du produit le plus lourd

Nous supposons :

- Longueur équivalente du pipeline : 930164.59m;
- Diamètres du pipeline : 8" (0.2032m), 10" (0.2540m) et 12" (0.3048m);
- Débit volumique moyen : 200 m<sup>3</sup>/h ;
- Masse volumique de l'Essence Super : 735 Kg/m<sup>3</sup> ;
- Plage de variation de la masse volumique du Gasoil : 811 ÷ 860 Kg/m<sup>3</sup> ;

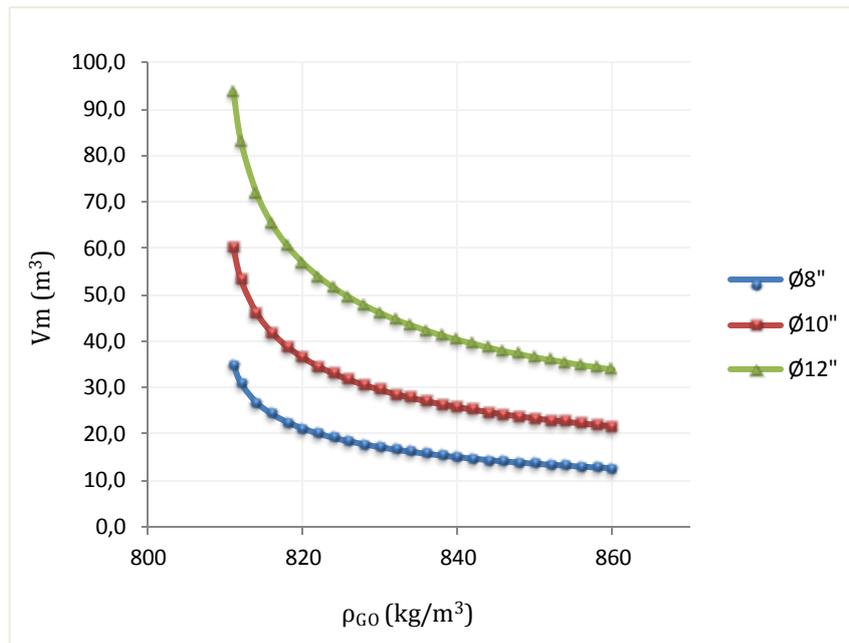


Fig. 6. 5 Influence de la masse volumique de produit lourd sur le volume de mélange

Comme illustre la fig. (6.5), en fixant la masse volumique du carburant le plus léger (SCA) à 735 Kg/m<sup>3</sup> et en variant celle du carburant lourd (GO) de 811 ÷ 860 Kg/m<sup>3</sup>, le volume de mélange se réduit avec l'augmentation de la densité du gasoil, c'est-à-dire plus la masse volumique du produit lourd s'éloigne de celle du produit léger, plus le mélange est réduit.

### 6.4.2 Variation de la masse volumique du produit le plus léger

Nous supposons :

- Longueur équivalente du pipeline : 930164.59m;
- Diamètres du pipeline : 8" (0.2032m), 10" (0.2540m) et 12" (0.3048m);
- Débit volumique moyen : 200 m<sup>3</sup>/h ;
- Masse volumique du Gasoil : 815 Kg/m<sup>3</sup> ;
- Variation de la masse volumique du de l'Essence Super : 730 ÷ 768 Kg/m<sup>3</sup> ;

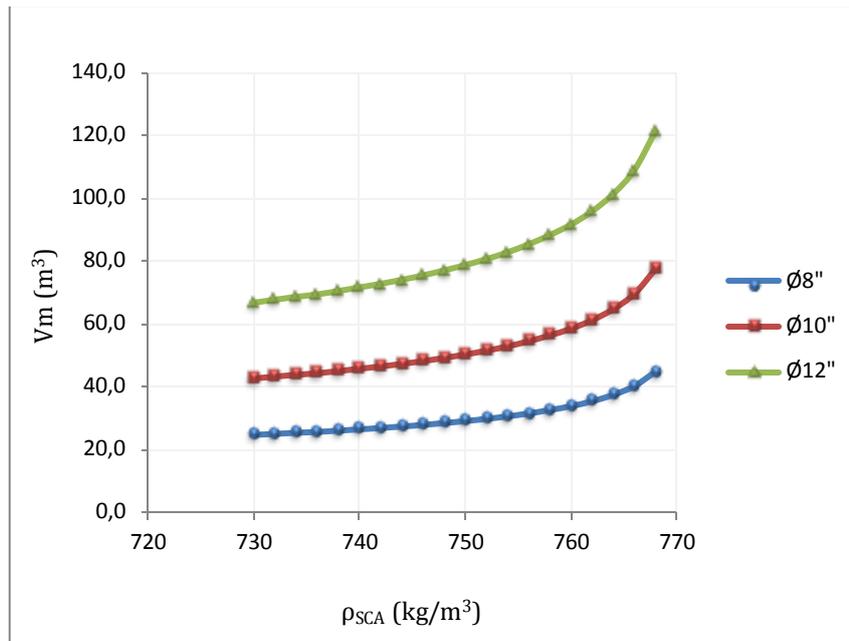


Fig. 6. 6 Influence de la masse volumique de produit léger sur le volume de mélange

La figure (6.6) montre qu'en fixant la masse volumique du carburant le plus lourd (GO) à  $815 \text{ Kg/m}^3$  et en variant celle du carburant léger (SCA) de  $730 \div 768 \text{ Kg/m}^3$ , le volume de mélange augmente avec l'augmentation de la masse volumique de l'essence super, c'est-à-dire plus la masse volumique du produit léger s'approche de celle du produit lourd, plus le mélange est important.

### 6.5 Comportement du coefficient de diffusion

La figure (6.7) montre l'évolution du coefficient de dispersion adimensionnel.

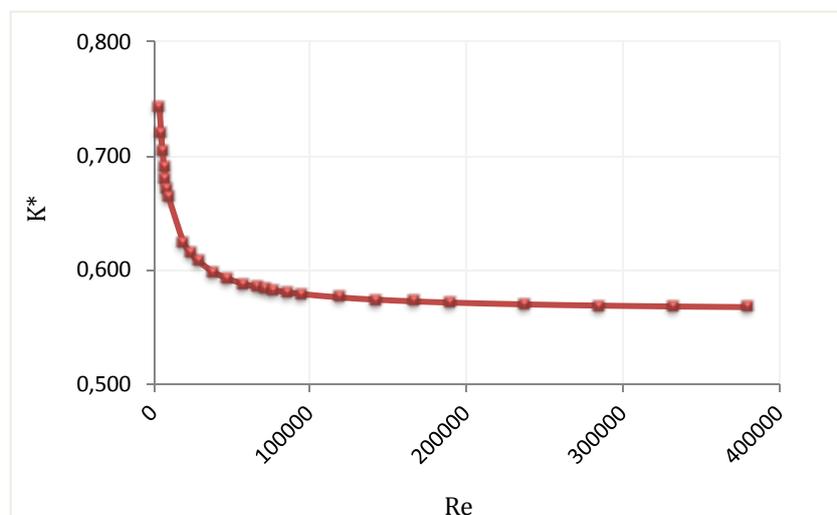


Fig. 6. 7 Comportement du coefficient de diffusion adimensionnel

Comme illustre la *figure (6.7)* le coefficient de dispersion augmente intensivement avec la diminution du nombre de Reynolds. Ce coefficient est inversement proportionnel au nombre de Reynolds. Par conséquent le volume du mélange s'amplifie avec l'évolution du coefficient de diffusion adimensionnel, vu qu'il est à son tour inversement proportionnel au nombre de Reynolds.

## 6.6 Conclusion

Nous concluons à la fin de ce chapitre, que le volume du mélange est influencé par certains paramètres comme, la géométriques du pipeline, les paramètres d'écoulement ainsi que la différence ou l'écart de masses volumiques des produits transporté.

# | Conclusion

Une importance particulière a été donnée par plusieurs investigateurs exerçant dans le domaine de transport du multiproduit dans les pipelines au coefficient de diffusion, dont plusieurs modèles basés sur les solutions de l'équation de diffusion et de convection-diffusion ont été proposés. La longueur de l'interface s'avère dépendre de la valeur du coefficient de diffusion. Ce paramètre est donc d'une importance cruciale, car son bon choix amène sûrement à la très bonne approximation de calcul et plus particulièrement dans la prédiction du volume de l'interface du mélange.

L'étude expérimentale est conduite sur un pipeline multiproduit de 168km de long, constitué de trois tronçons de différents diamètres et longueurs. Les volumes expérimentaux du mélange, les paramètres d'écoulement et les paramètres physicochimiques des produits ont été relevés pour dix huit séquences (expériences) de transport du multiproduit, dont chaque séquence est caractérisée par la présence d'une zone de mélange, et cela à partir d'un système de supervision et d'un calculateur électronique lié à une chaîne de mesure.

L'équation de la diffusion pure et celle de la convection-diffusion sont résolues analytiquement. Les longueurs équivalentes de tubes sont introduites dans la solution de ces équations (Formule du mélange), Nous avons aboutis par la suite à deux modèles combinés, un à l'approche d'Austin-Palfrey et l'autre à l'approche MVEPC.

Pour la prédiction de l'interface du mélange, les deux modèles sont appliqués sur les mêmes séquences de transport du multiproduit pétrolier, en tenant compte les données du terrain (débits, viscosités cinématiques, masses volumiques, ...etc.).

Les résultats prédits par chaque modèle sont comparés aux résultats expérimentaux. Le modèle basé sur l'approche MVEPC a donné une approximation meilleure (%Er=5.44%) par rapport à celui basé sur l'approche d'Austin-Palfrey (%Er=11.12%). Ça peut être justifié, par le fait que l'approche d'Austin-Palfrey donne toujours une longueur équivalente constante, vue que cette dernière s'avère dépendre juste des rapports de diamètres de la conduite, contrairement de l'approche MVEPC, où la longueur équivalente est variable, puisque elle dépend essentiellement du coefficient de dispersion adimensionnel qui caractérise l'intensité du mélange. Toutefois, l'approximation de calcul peut être considérée moyenne pour les deux modèles étudiés.

Dans une étape suivante, des modèles d'ajustement ont été proposés, dans le but d'améliorer la relation fonctionnelle entre les résultats expérimentaux et prédits. Chaque modèle s'appuie sur les techniques de régression (linéaire, exponentiel, puissance et logarithmique). L'ajustement des modèles basés sur les deux approches, Austin-Palfrey et MVEPC a contribué à l'amélioration de l'approximation de calcul du volume du mélange (en comparant avec les résultats expérimentaux), où nous avons enregistré une erreur

relative de 0.41% (Cas de la régression linéaire) pour les deux approches, ce qui a rendu les nouveaux modèles régressés robustes.

L'étude paramétrique a montré que la zone du mélange est influencée par certains facteurs. Nous avons constaté que, l'interface du mélange :

- évolue proportionnellement et intensivement avec la variation de géométrie de la conduite ;
- est inversement proportionnelle au régime d'écoulement. Le régime turbulent contribue à la réduction de l'interface du mélange ;
- est influencée par les caractéristiques (particulièrement, les masses volumiques) des deux produits en contact.

Enfin, nous avons jugé d'énumérer certaines recommandations et conseils utiles pour minimiser dans la mesure de possible le volume du mélange, à savoir :

- Il est recommandé de bien étudier et choisir préalablement son tracé (Chemin le plus court) du pipeline, quand il s'agit d'une nouvelle réalisation de pipelines multiproduit, biens sûre avec le choix du diamètre optimal (Etude technico-économique).
- Il est bien utile de travailler à la limite supérieure du régime turbulent lisse, car à partir de cette limite, l'interface est minimisée au maximum. Il est conseillé de trouver un compromis entre le débit d'exploitation et la vitesse maximale admise dans les écoulements de pipelines.
- Le régime laminaire est fortement déconseillé ;
- Il est conseillé de bien veiller au critère des masses volumiques des produits avant de les introduire dans le pipeline.

La plupart des recommandations précitées sont considérées comme un outil performant pour minimiser l'interface du mélange, en ajustant les paramètres d'exploitation des canalisations. Cette action profitera certainement aux compagnies pétrolières, car chaque mètre cube de produit sauvé équivaut à des revenus élevés.

# | Bibliographie

1. Bennacer, D., *Etude et Modélisation des Phénomènes d'Interface des Ecoulements Diphasiques dans un Pipeline Multiproduit*, in *Génie Mécanique* 2017, Université de Technologie: Tlemcen
2. Douglas, J.J.J. and T.F. Russell, *Numerical Methods for Convection-Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982. **19**(5): p. 871-885.
3. Melo, S.R.d. and F.B.F. Rachid. *Computing Transmix in Complex Batch Transfers via the Mixing-Volume-Equivalent-Pipe Concept* in *8th International Pipeline Conference, IPC2010-31607*. September 27-October 1, 2010. Calgary, Alberta, Canada.
4. Birge, E.A., *Contamination control in products pipelines* Oil Gas 1947 **48**.
5. Smith, S.S. and R.K. Schulzer, *Interfacial mixing characteristics of products in product pipelines*. Petrol. Engr 1948. **94**.
6. Taylor, G., *Dispersion of soluble matter in Solvent Flowing slowly through a tube*. Proceeding of Royal Society of London. Series A, Mathematical and physical Sciences, 1953. **279**(1137): p. 186–203.
7. Taylor, G.I., *The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe* Proceeding of Royal Society, 1954. **A223**: p. 446–468.
8. Ramanujan, A., *Deterministic models to explain the phenomenon of interfacial mixing in refined products pipelines*, December, 2012: Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma.
9. Levenspiel, O. and W.K. Smith, *Notes on the Diffusion-Type Model for the Longitudinal Mixing of Fluids in Flow* Longitudinal Mixing of Fluids in Flow Chemical Engineering Science, 1957. **6**: p. 227-233.
10. Sjenitzer, F., *How much do products mix in a pipeline?* . Petrol. Engr, 1958 **30**
11. J.E. Austin and J.R. Palfrey. *Mixing of Miscible but Dissimilar liquids in Serial Flow in a Pipeline* in *Proceeding of Institution of Mechanical Engineers* 1964.
12. AUNICKY, Z., *The Longitudinal Mixing of Liquids Flowing Successively in Pipelines*. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 1970. **48**: p. 12-16.
13. Demoya, A.C., H.Q. Cruz, and P.N.B. Hernandez, *Modelling of the Pollutant Fronts generated by Pipeline Fuel Transportation*. Dyna, Ano, 2007. **74**(152): p. 89-96.
14. Udoetok, E.S. and A.N. Nguyen, *A disc pig model for estimating the mixing volumes between product batches in multiproduct*. 2009. **8**(3): p. 195-204.
15. Chintala, S., *A computational study of interfacial mixing in pipelines, logistics and diverse models to predict the interface length*, 2014: Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University.
16. Patrachari, A.R. and A.H. Johannes, *A conceptual framework to model interfacial contamination in multiproduct petroleum pipelines*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012. **55**: p. 4613–4620.
17. James, H., et al., *Longitudinal Dispersion Coefficients Within Turbulent and Transitional Pipe Flow*, in *Experimental and Computational Solutions of Hydraulic Problems*, P. Rowiński, Editor 2013, Springer Berlin Heidelberg Berlin, New York. p. 133-145.
18. Levenspiel, O., *Longitudinal mixing of fluids flowing in circular pipes*. Industrial and Engineering Chemistry 1958. **50**(3): p. 343-346.
19. Liang, Y. and G. Xiaolei, *New approach predicts volume mixing in long, multiproduct pipeline*. Oil & Gas 2011. **109**(18): p. 126-130.

20. Gong, J., et al. *The calculation method of mixing volume in a products pipeline in 8th International Pipeline Conference, IPC2010-31462*. September 27-October 1, 2010. Calgary, Alberta, Canada.
21. Gong, J., Z. Kang, and D. Yan. *Research on contamination caused by the topographical difference in batch transportation. in International Pipeline Conference, IPC2004-659*. October 4-8, 2004. Calgary, Alberta, Canada.
22. Kun, W., C. Baodong, and e. al., *A Study on the Product Oil Contamination Caused by Batching Transportation (In Chinese)* OGST, 2007. **26**(8): p. 8-12.
23. Guangshi, S., S. Yu, and al., *Calculations of the Batch Cycles-Batch Volume and Tank Capacity for the Products Pipeline (In Chinese)* Oil & Gas Storage and Transportation, 2000. **19**(02): p. 16-19.
24. Lingjian, Y., S. Longshe, and S. Wen, *Contamination Issue of Benzene and Hexamethylene In Batch Transportation (In Chinese)*. Oil & Gas Storage and Transportation, 2010. **29**(08): p. 603-604, 612.
25. Gambill, W.R., *How to estimate mixtures viscosities* Chemical Engineering, 1959. **66**: p. 152-152.
26. Rachid, F.B.d.F. and R.M. Baptista. *The influence of pipeline diameter variation on the mixing volume in batch transfers. in 4th International Pipeline Conference, IPC2002-27168*. September 29-October 3, 2002. Calgary, Alberta, Canada.
27. Gomes, A.A., F.B.d.F. Rachid, and J.H.C.d. Araujo. *Modeling of Contamination in Pipeline Batch Transfers in 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences ENCIT, CIT02-0582* 2002. Caxambu - MG, Brazil.
28. Oliveira, J.L., *Modeling the dispersion phenomenon in batch transfer operations by the theory of structured mixture*. Brazilian Journal of Petroleum and Gas, 2010. **4**(4): p. 129-138.
29. Rachid, F.B.F., J.H.C.d. Araujo, and R.M. Baptista, *Predicting Mixing Volumes in Serial Transport in Pipelines*. Transactions of the ASME, 2002. **124**: p. 528-534.
30. Alvarez, J.C.D., et al., *Statistical analysis in the predicting of mixing volume generated by batching transport of hydrocarbons through pipelines*. Revista ION, Bucaramanga (Colombia), 2011. **24**(1): p. 23-33.
31. Bennacer, D., et al., *Interface calculation method improves multiproduct transport* Oil & Gas, 2016. **114**(12): p. 74-80.
32. Tepedino, A.F., et al. *Pipeline batch cut optimization by taking into account the quality of the products at the tanks. in 7th International Pipeline Conference, IPC2008-64516*. September 29 – October 3, 2008. Calgary, Alberta, Canada.
33. Drews, A.W., *Manual on Hydrocarbon Analysis*, 1998, 6th Edition, American Society for Testing and Materials: West Conshohocken.
34. Weiping, M., et al., *Analysis on difference between Chinese and Russian oil and gas pipeline operation standards (In Chinese)*. Oil & Gas Storage and Transportation 2013(Issue 04): p. 411-415.
35. Ekambara, K. and J.B. Joshi, *Axial mixing in laminar pipe flows*. Chemical Engineering Science, 2004. **59**: p. 3929 – 3944.
36. Zhai, Y.-p., S.-l. Wang, and Y.-j. Han. *Study on Numerical Simulation of Contaminated Volume for Shutdown Batching Pipeline. in ICPTT 2009*. 2009.
37. Tombola, M.C., *Econométrie 1 - Rappels et recueil d'exercices [résolus]*, 2012, Copyright © cdktombole-Laréq
38. Casin, P., *Econométrie - Méthodes et Applications avec Eviews*, E. Technip, Editor 2009: Paris. p. 224.
39. Delsart, V., A. Rys, and N. Vaneecloo, *Méthodes statistiques de l'économétrie et de gestion Tome 3 - Économétrie théorie et application sous SAS®*, 1 sept. 2009, Presses Universitaires de Septentrion p. 414.

# Annexe I

## Tableau des transformées de Laplace

$$\bar{v}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

We write  $q = \sqrt{p/D}$ .  $D$ ,  $x$  and  $h$  are always positive.  $\alpha$  is unrestricted.

	$\bar{v}(p)$	$v(t)$
1.	$\frac{1}{p}$	1
2.	$\frac{1}{p^{\nu+1}}, \nu > -1$	$\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$
3.	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
4.	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
5.	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
6.	$e^{-qx}$	$\frac{x}{2\sqrt{(\pi Dt^3)}} e^{-x^2/4Dt}$
7.	$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{D}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4Dt}$
8.	$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}}$
9.	$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{Dt}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4Dt} - x \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}}$
10.	$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2D}\right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}} - x \left(\frac{t}{\pi D}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4Dt}$
11.	$\frac{e^{-qx}}{p^{1+\frac{1}{2}n}}, n = 0, 1, 2, \dots$	$(4t)^{\frac{1}{2}n} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}}$
12.	$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{D}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4Dt} - hD e^{hx + Dh^2}$ $\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}} + h\sqrt{(Dt)} \right\}$
13.	$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$D e^{hx + Dh^2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(Dt)}} + h\sqrt{(Dt)} \right\}$

# Annexe II

## Table de distribution de la loi de T Student

Pr ddl	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.929
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.263	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.961	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.137	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.649
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.656
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
80	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291