

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبو بكر بلقايد- تلمسان-

Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen-

Faculté de Technologie



MEMOIRE

En vue l'obtention du diplôme de MASTER

En Génie Mécanique

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par : M. MELIH youcef

**Thème :**

**Analyse de stabilité d'un rotor**

Soutenu le Jeudi 08 juin 2017 devant le jury composé de :

Président	M. ZINAI Abdelhadi	MC"B"	UAB - Tlemcen
Examineur	M. HAMZA CHERIF Sidi Mohamed	MC"B"	UAB - Tlemcen
Examineur	M. CHORFI Sidi Mohamed	MC"B"	UAB - Tlemcen
Encadreur	M. BOUKHALFA Abdelkrim	MC"A"	UAB - Tlemcen
Co-Encadreur	M. BELALIA Sid Ahmed	MC"A"	UAB - Tlemcen

*Année universitaire 2016-2017*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## **Remerciment**

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à mon encadreur **Mr. BOUKHALFA Abdelkrim, MC"A"** et mon Con-encadreur **Mr. BELALIA Sid Ahmed MC"A"** à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen, pour m'avoir encadrés tout en m'accordant sa confiance et apportés ses précieux conseils.

Mes remerciements aussi à monsieur **Mr. ZINAI Abdelhadi, MC"B"** à l'université à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen, en acceptant d'être président du jury de soutenance de ce mémoire.

Je suis très heureuse que monsieur **Mr. HAMZA CHERIF Sidi mouhamed, MC"B"** à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen, me fasse l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie également monsieur **Mr. CHORFI Sidi mohamed, MC"B"** à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen, à l'importance qu'il accorde à mon travail en acceptant de faire partie des examinateurs de soutenance.

Ma reconnaissance à tous les enseignants du département de génie mécanique qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues, amies et proches à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.

---

## **Dédicace**

Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Allah qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je tiens à rendre hommage à mon père, et à celle qui a su et avoir pu faire de moi

l'homme que je suis, « à maman » pour son indéfectible assistance et son soutien tout le long de ma formation ; les mots ne peuvent exprimer mon entière gratitude

et ma reconnaissance pour tous leurs sacrifices, à mes frères et ma soeur.

Encore une fois, un grand merci à toute ma famille à qui je dédie ce présent travail

à tous mes ami(e) s sans exception.

Je pris Allah de leurs accorder longue vie et bonne santé

**Youcef**

---

## **Résumé**

Le travail de ce mémoire est consacré pour l'analyse de stabilité des arbres tournants avec des disques flexibles, sur des paliers élastiques amortis modélisés comme ressorts et amortisseurs. Pour ce là. On a utilisé logiciel ANSYS WORKBENCH pour modéliser et simuler la structure étudiée, pour déterminer le diagramme de Campbell permet de donner les fréquences propres et les vitesses critiques, aussi le diagramme de stabilité du rotor.

On a étudié l'influence des différentes paramètres géométriques et mécaniques et les conditions aux limites de l'arbre tournant avec plusieurs exemples, pour comprendre les causes qui conduisent à l'instabilité des rotors.

**Les mots clés :** Dynamique des rotors ,Stabilité , Ansys.

---

# **Abstract**

The work of this thesis is devoted to the stability analysis of rotating shafts with flexible discs on resilient elastic bearings modeled as springs and shock absorbers. For it. ANSYS WORKBENCH software was used to model and simulate the structure studied, to determine the diagram of Campbell allows to give the clean frequencies and the critical speeds, also the rotor stability diagram.

The influence of the different geometric and mechanical parameters and the boundary conditions of the rotating shaft was studied with several examples to understand the causes that lead to the instability of the rotors.

Keywords: Dynamics of rotors, Stability, Ansys.

---

## ملخص

يكرس عمل هذه الذاكرة تحليل عدم استقرار الأعمدة الدوّارة مع أقراص متجانسة مرنة على أسنده مخمّدة و نمذجة على شكل نوا بض و مخمّدات . يتم استخدام برنامج Ansys لنمذجة البنية وإنشاء مخطط Campbell الذي يعطي الترددات الطبيعية والسرعات الحرجة وكذلك مخططات الاستقرار.

كل هذا لدراسة تأثير الخصائص الهندسية والميكانيكية والشروط الحدودية للعمود الدوّار مع عدّة أمثلة مبينة لفهم الأسباب التي تؤدي إلى عدم استقرار الدوّار.

كلمات البحث: ديناميكية الدوّار، الاستقرار، Ansys،

# Sommaire

<b>Sommaire</b> .....	<b>I</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>I</b>
<b>Listes des symboles</b> .....	<b>I</b>
<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Revue bibliographique</b>	
<b>1. Introduction</b> .....	<b>3</b>
<b>1.1. Notion sur les rotors industriels</b> .....	<b>3</b>
<b>1.2. Caractéristiques des éléments de rotor</b> .....	<b>5</b>
<b>1.2.1. Classification des rotors</b> .....	<b>6</b>
<b>1.3. Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible</b> .....	<b>9</b>
<b>1.3.1. Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell</b> .....	<b>9</b>
<b>1.3.2. L'orbite modale</b> .....	<b>10</b>
<b>1.3.2.1. Mode propre</b> .....	<b>10</b>
<b>1.3.3. L'analyse de stabilité</b> .....	<b>10</b>
<b>1.3.3.1. Les méthodes de stabilité</b> .....	<b>11</b>
<b>1.4. Dynamique des rotors</b> .....	<b>13</b>
<b>1.5. Aspect numérique</b> .....	<b>14</b>
<b>1.6. Les sources d'excitation</b> .....	<b>15</b>
<b>Chapitre 2 : Théorie des poutres</b>	
<b>2. Introduction</b> .....	<b>16</b>
<b>2.1. Définitions</b> .....	<b>16</b>
<b>2.1.1. Poutre</b> .....	<b>16</b>
<b>2.1.2. Géométrie des poutres</b> .....	<b>16</b>
<b>3. Champ de déplacement</b> .....	<b>18</b>
<b>3.1. Relation déformation-déplacement</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2. Relation contrainte-déplacement</b> .....	<b>19</b>
<b>4. Energie de déformation de l'arbre et le disque (l'arbre est étagé)</b> .....	<b>20</b>
<b>5. Energie cinétique de l'arbre et le disque (l'arbre est étagé)</b> .....	<b>21</b>
<b>6. Travail virtuel des paliers</b> .....	<b>21</b>
<b>7. Equation de mouvement</b> .....	<b>23</b>

---

**Chapitre 3 : La modélisation et la simulation d'un rotor flexible**

<b>3.1. Introduction</b> .....	<b>24</b>
<b>3.2. Menu principal du logiciel ANSYS Workbench</b> .....	<b>25</b>
<b>3.3. Module de modélisation</b> .....	<b>28</b>
<b>3.3.1. La géométrie</b> .....	<b>28</b>
<b>3.4. Le maillage du modèle</b> .....	<b>30</b>
<b>3.5. Module de simulation</b> .....	<b>33</b>
<b>3.5.1. Les conditions aux limites</b> .....	<b>33</b>
<b>3.5.2. Coefficient d'amortissement</b> .....	<b>33</b>
<b>3.5.3. La vitesse de rotation et l'effet gyroscopique</b> .....	<b>34</b>
<b>3.5.4. Diagramme de Campbell et diagramme de stabilité</b> .....	<b>35</b>
<b>3.5.5. Résolution du modèle</b> .....	<b>35</b>
<b>3.5.6. Affichage des résultats</b> .....	<b>36</b>
<b>3.6. Le projet</b> .....	<b>37</b>

**Chapitre 4 : Résultats et interprétations**

<b>4.1. Introduction</b> .....	<b>38</b>
<b>4.2. Materials du travail</b> .....	<b>38</b>
<b>4.3. Résultat et interprétation</b> .....	<b>38</b>
<b>4.3.1. Influence des propriétés géométriques de l'arbre sur les fréquences propre et les vitesses critiques</b> .....	<b>39</b>
<b>4.3.2. Influence des propriétés physiques de l'arbre sur les fréquences propres et les vitesses critiques</b> .....	<b>45</b>
<b>4.3.3. Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres</b> .....	<b>50</b>
<b>4.3.4. Influence des paliers flexibles amorties sur les fréquences propres</b> .....	<b>55</b>
<b>4.3.5. Influence de la position de disque sur les fréquences propres</b> .....	<b>59</b>
<b>4.3.6. Influence des plusieurs disques sur les fréquences propres</b> .....	<b>63</b>
<b>Conclusion</b> .....	<b>66</b>
<b>Références bibliographiques</b> .....	<b>67</b>
<b>Annexe</b> .....	<b>70</b>

## **Lise des figures**

<b>Figure 1.1</b> : Moteur électrique.....	3
<b>Figure 1.2</b> : Turbine à gaz4 .....	4
<b>Figure 1.3</b> : Turbocompresseur (STC-SV single) .....	4
<b>Figure 1.4</b> : Les organes d'un rotor .....	5
<b>Figure 1.5</b> : Rotor de jeffcott .....	8
<b>Figure 1.6</b> : Diagramme de Campbell .....	10
<b>Figure 2.1</b> : Structure poutre .....	17
<b>Figure 2.2</b> : Structure d'une poutre avant la déformation .....	17
<b>Figure 2.3</b> : Structure d'une poutre après la déformation .....	18
<b>Figure 2.4</b> : Amortissements et raideurs de palier.....	21
<b>Figure 3.1</b> : Menu principal.....	25
<b>Figure 3.2</b> : Commande de bar d'outil .....	25
<b>Figure 3.3</b> : Menu d'option .....	26
<b>Figure 3.4</b> : Dossier d'enregistrement le projet.....	26
<b>Figure 3.5</b> : Méthode de schématisation de projet .....	26
<b>Figure 3.6</b> : Schéma de projet .....	27
<b>Figure 3.7</b> : Création de la géométrie.....	28
<b>Figure 3.8</b> : Outil de dessin .....	29
<b>Figure 3.9</b> : Composants de dessin modale.....	29
<b>Figure 3.10</b> : Nouvelle pièce .....	30
<b>Figure 3.11</b> : Propriétés du matériau .....	30
<b>Figure 3.12</b> : Objet de maillage.....	31
<b>Figure 3.13</b> : Maillage du modèle .....	32

<b>Figure 3.14</b> : Raideurs des paliers .....	33
<b>Figure 3.15</b> : Coefficients d'amortissement des paliers .....	33
<b>Figure 3.16</b> : vitesse de rotation et l'effet gyroscopique .....	34
<b>Figure 3.17</b> : Diagramme de Campbell et de stabilité.....	35
<b>Figure 3.18</b> : Résolution.....	35
<b>Figure 3.19</b> : Direction de deformation.....	36
<b>Figure 3.20</b> : Rotor stable.....	36
<b>Figure 3.21</b> : Rotor instable.....	37
<b>Figure 3.22</b> : projet d'analyse.....	37
<b>Figure 4.1</b> : Modèle 3D du rotor .....	38
<b>Figure 4.2</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour $L/D=5$ .....	40
<b>Figure 4.3</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $L/D=5$ .....	40
<b>Figure 4.4</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ en pour $L/D=10$ .....	41
<b>Figure 4.5</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes pour $L/D=10$ .....	41
<b>Figure 4.6</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour $L/D=15$ .....	42
<b>Figure 4.7</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $L/D=15$ .....	42
<b>Figure 4.8</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes pour $L/D=20$ .....	43
<b>Figure 4.9</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $L/D=20$ .....	43
<b>Figure 4.10</b> : Première vitesse critique $\Omega_{cr}$ pour les trois premiers modes directs en fonction de $L/D$ .....	44
<b>Figure 4.11</b> : Première vitesse critique $\Omega_{cr}$ de les trois premiers modes inverse en fonction de $L/D$ .....	44

---

<b>Figure 4.12 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre en acier .....	46
<b>Figure 4.13 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en acier .....	46
<b>Figure 4.14 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre en aluminium .....	47
<b>Figure 4.15 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en aluminium.....	47
<b>Figure 4.16 :</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en Cuivre .....	48
<b>Figure 4.17 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en Cuivre ..	48
<b>Figure 4.18:</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre en Fonte .....	49
<b>Figure 4.19 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en Fonte ....	49
<b>Figure 4.20 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre A-A .....	51
<b>Figure 4.21 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre A-A.....	51
<b>Figure 4.22 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre E-A.....	52
<b>Figure 4.23 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-A .....	52
<b>Figure 4.24 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour un arbre E-L .....	53
<b>Figure 4.25 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-L.....	53
<b>Figure 4.26 :</b> Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes pour un arbre E-E.....	54
<b>Figure 4.27 :</b> Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-E.....	54
<b>Figure 4.28 :</b> Deux premiers fréquence de flexion de l'arbre tournant pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation.....	55

---

<b>Figure 4.29</b> : Arbre tournant supporté par deux paliers flexibles amortis .....	<b>56</b>
<b>Figure 4.30</b> : Trois premiers vitesses critiques de la précession inverse d'un arbre tournant en fonction des raideurs des paliers flexibles ( $C_p=1000N.s/m$ ).....	<b>57</b>
<b>Figure 4.31</b> : Trois premiers vitesses critiques de la précession direct d'un arbre tournant en fonction des raideurs des paliers flexibles( $C_p=1000N.s/m$ ).....	<b>57</b>
<b>Figure 4.32</b> : Trois premiers vitesses critiques de la précession inverse d'un arbre tournant en fonction des amortisseurs des paliers flexibles ( $K_p=1,195*10^5 N/m$ ).....	<b>58</b>
<b>Figure 4.33</b> : Trois premiers vitesses critiques de la précession direct d'un arbre tournant en fonction des amortisseurs des paliers flexibles( $K_p=1,195*10^5 N/m$ ).....	<b>58</b>
<b>Figure 4.34</b> : Système arbre-disque supporté par deux paliers .....	<b>59</b>
<b>Figure 4.35</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour $X=L/2$ .....	<b>60</b>
<b>Figure 4.36</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $X=L/2$ .....	<b>60</b>
<b>Figure 4.37</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour $X= L/4$ .....	<b>61</b>
<b>Figure 4.38</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $X= L/4$ .....	<b>61</b>
<b>Figure 4.39</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes pour $X=L/8$ .....	<b>62</b>
<b>Figure 4.40</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour $X=L/8$ .....	<b>62</b>
<b>Figure 4.41</b> : Diagramme de Campbell de la troisième fréquence de flexion pour différentes positions du disque sur l'arbre .....	<b>63</b>
<b>Figure 4.42</b> : Arbre avec plusieurs disques supporté par deux palier .....	<b>64</b>
<b>Figure 4.43</b> : Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion $\omega$ pour plusieurs disques .....	<b>65</b>
<b>Figure 4.44</b> : Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour plusieurs disques.....	<b>65</b>

## Liste des symboles

U	Déplacement longitudinal.
V	Déplacement transversal longitudinal.
W	Déplacement vertical.
$\varepsilon$	Déformation.
$\sigma$	Contrainte de flexion.
$\gamma$	Déformation angulaire.
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformation.
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contrainte.
$\gamma_{ij}$	Déformation angulaire.
$\nu$	Coefficient de poisson.
E	Module de Young.
$\rho$	Masse volumique.
$E_{gd}$	Energie cinétique globale (arbre+disque).
$E_{gc}$	Energie de déformation globale (arbre+disque).
$\Omega$	Vitesse de rotation.
$\{q_i\}$	Les coordonnées généralisées.
L	Longueur de l'arbre.
D	Diamètre de l'arbre.
$D_{ext}$	Diamètre extérieur de disque.
$[C_d]$	Matrice d'amortissement globale.
$[C_a]$	Matrice d'amortissement globale.
$[M_a]$	Matrice masse globale de l'arbre.
$[M_d]$	Matrice masse globale de disque.
$[G_d]$	Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de disque.
$[G_a]$	Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.
$[K_a]$	Matrice de rigidité globale de l'arbre.

$\delta w$	Travail virtuel des forces généralisées.
$\{F_v\}$	Vecteur des forces de Coriolis.
$\{F_g\}$	Vecteur des forces non-linéaires.
$\{F_{ex}\}$	Vecteur des forces généralisées (des paliers).
$K_{yy}, K_{zz}, K_p$	Raideurs des paliers.
$C_{yy}, C_{zz}, C_p$	Coefficients d'amortissement des paliers.

# Introduction

La dynamique du rotor est un domaine très particulier et riche de la mécanique, où l'abondance des phénomènes peut être responsable de l'instabilité des structures tournantes. Un intérêt commun notamment de l'industrie des machines tournantes est de comprendre correctement les phénomènes vibratoires et de prédire le comportement dynamique de la flexibilité des rotors. En effet, une connaissance suffisante des phénomènes vibratoires est essentielle pour l'examen des moyens adéquats pour réduire ou éliminer les vibrations et pour la conception de machines tournantes. Il s'agit des vitesses de rotation critiques et des régimes linéairement instables, dont les conséquences sont souvent catastrophiques. En effet, les vitesses critiques sont fonction de la rigidité dynamique des systèmes tournants et la présence d'efforts gyroscopiques crée une dépendance entre la vitesse de rotation et les pulsations propres de telles structures: ceci implique que la détermination juste des vitesses critiques est un des éléments primordial lors du dimensionnement de tels systèmes dynamiques.

Les exigences fonctionnelles de tous ces équipements sont bien entendu le premier souci du concepteur de façon à chercher d'optimiser leurs rendements et amélioré les régimes de fonctionnement en toutes conditions. Mais les tendances actuelles visent à développer des rotors plus légers, et par conséquent plus flexible, qui peuvent atteindre des vitesses très élevées afin de minimiser le rapport poids/puissance et contrôler la stabilité de régime de fonctionnement, ainsi que minimiser les jeux entre le stator et le rotor pour avoir une meilleur durée de vie et bon fiabilité en service.

Les arbres tournants peuvent être le siège des phénomènes vibratoires qui perturbent leur fonctionnement normal. Deux phénomènes sont particulièrement dangereux et peuvent conduire à des niveaux vibratoires inacceptables : il s'agit des vitesses de rotation critiques et des régimes linéairement instables, dont les conséquences sont souvent catastrophiques . Ces vibrations proviennent généralement dues aux forces excitatrices qui sont d'origine de balourd, instabilité de fluide environnement, excitations aléatoire (choc, séisme).

Les études essentielles de l'instabilité des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell et le diagramme de stabilité qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation.

La simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis (programme ANSYS) est une méthode très sophistiquée et efficace pour les structures très complexes dans les machines tournantes, et surtout à le développement des machines.

Notre étude est présentée en quatre chapitres :

- ✚ **Le premier chapitre** est consacré à des généralités sur les rotors des machines tournantes industrielles, description, classification ainsi que leurs applications.
- ✚ **Le deuxième chapitre** présente la théorie des poutres en 3D et ses hypothèses fondamentales (l'étude de l'arbre tournant comme poutre) et les expressions des énergies de déformation et cinétique de l'arbre tournant sont déterminés, ainsi que l'énergie cinétique du disque flexible et le travail virtuel des paliers.
- ✚ **Le troisième chapitre** illustre et interprète plusieurs exemples pour déterminer l'influence des différents paramètres géométriques et physiques étudiés et des conditions aux limites sur le comportement vibratoire du rotor.
- ✚ **Le présent mémoire** se termine par une conclusion recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futurs développements.

## Revue bibliographique

### 1. Introduction

La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Les machines tournantes trouvent des applications très diverses dans l'industrie. On peut citer quelques applications des arbres tournants des machines tournantes telles que moteur électrique ( figure 1.1) les turbines à gaz (figure 1.2), les turbocompresseurs (figure1.3).

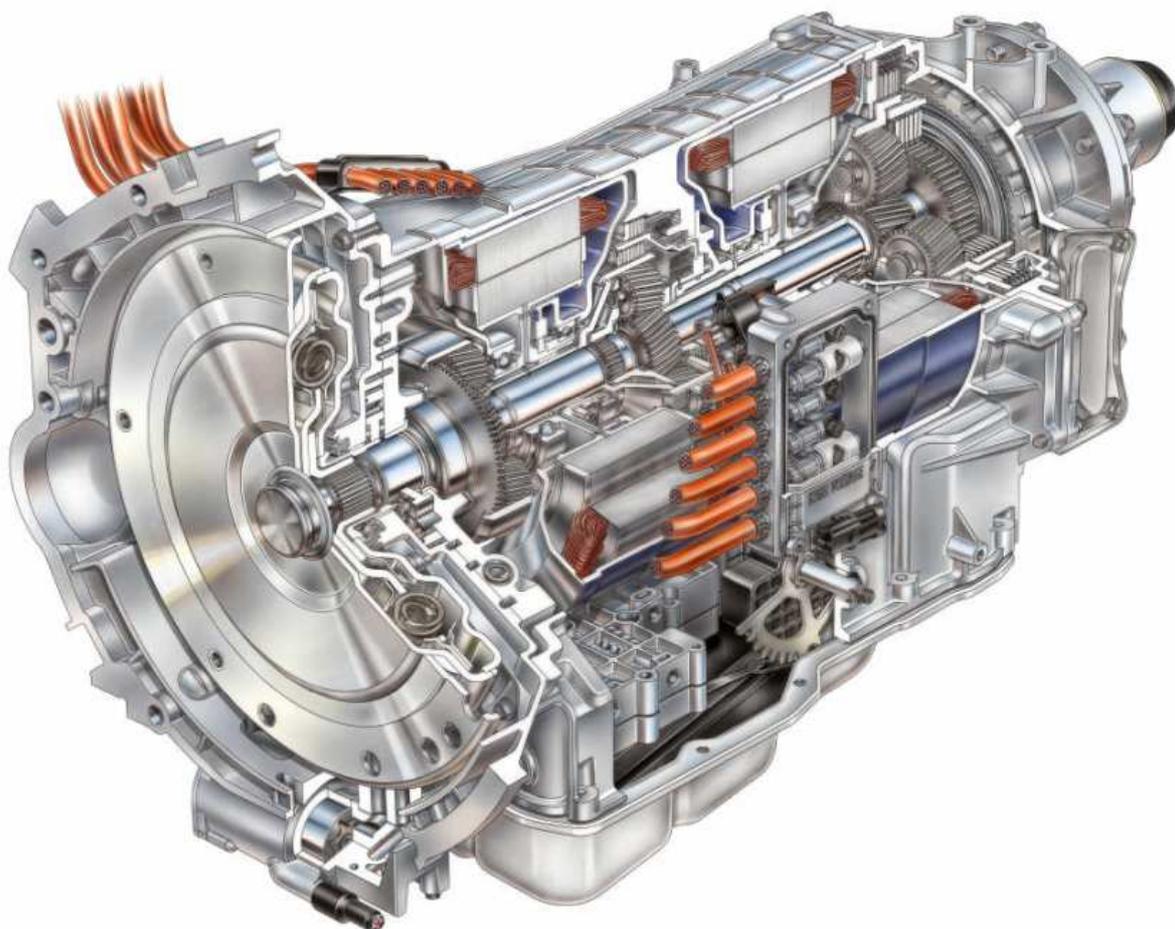


Figure 1.1: Moteur électrique.

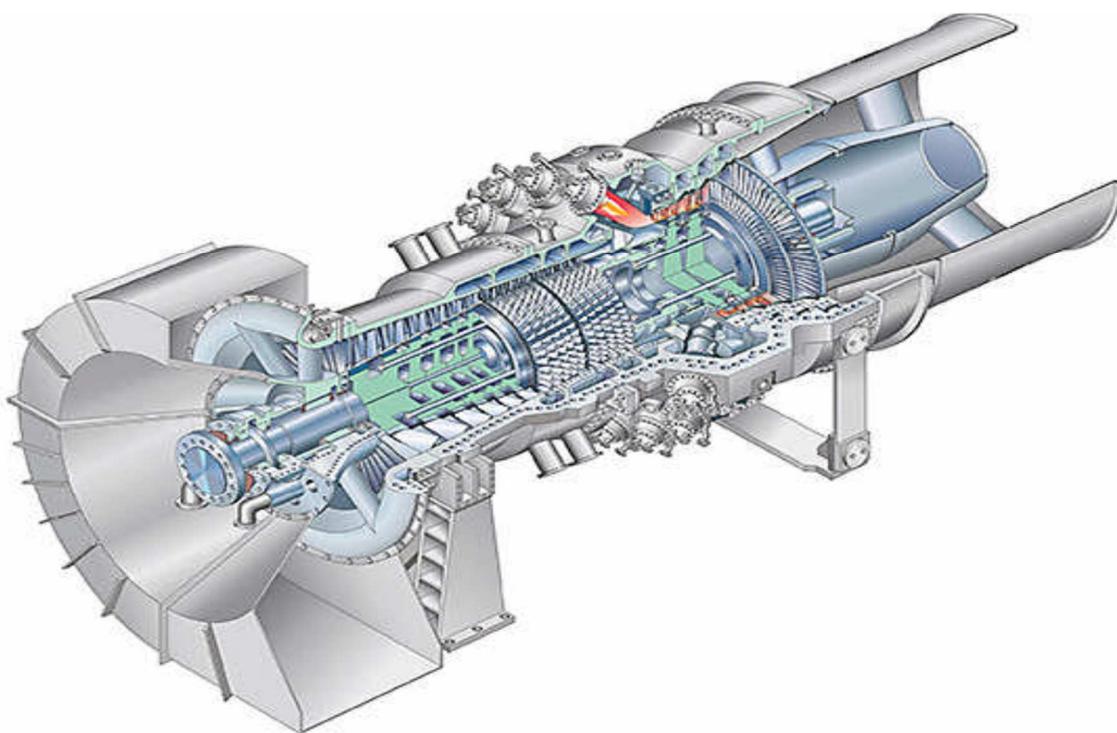


Figure 1.2: Turbine à gaz.

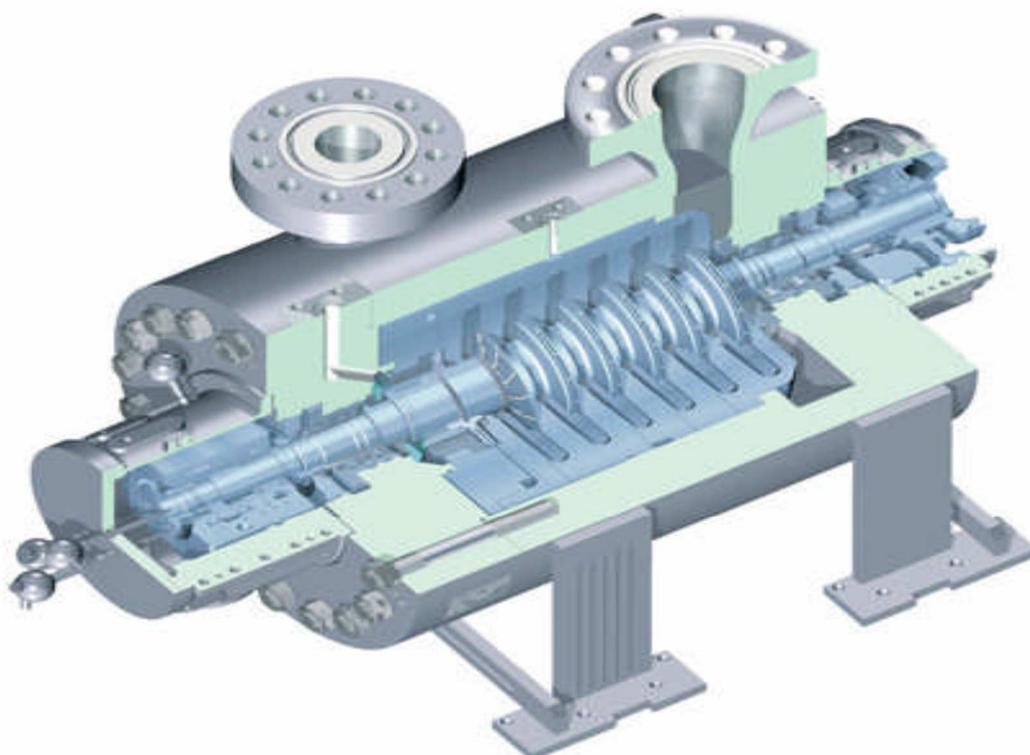


Figure1.3 : Turbocompresseur (STC-SV single).

## 1.1 Notions sur les rotors industrielles

### I.1.1 Définition

Par définition, un rotor est un élément tournant autour d'un axe fixe. Le champ d'application des rotors est vaste, nous les trouvons dans les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre, dans les machines tournantes industrielles qui constituent des structures assez complexes à analyser. Le rôle principale des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications aux quelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique, ...etc), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses.

### 1.2 Caractéristiques des éléments de rotor

Les éléments de rotor (arbres, disque, support, palier, ..) (figure 1.4) dont les caractéristiques mécaniques et géométriques, ont des influences directes sur le comportement dynamique global de rotor, suivant le phénomène qui lui envisagées. Le changement des ces caractéristiques engendre dans la plus part des cas des forces non linéaire influent directement sur les équations dynamiques de système (rendre en système non linéaire). Nous traitons quelques caractéristiques des éléments de rotor suivants les recherches qui ont été envisagées.

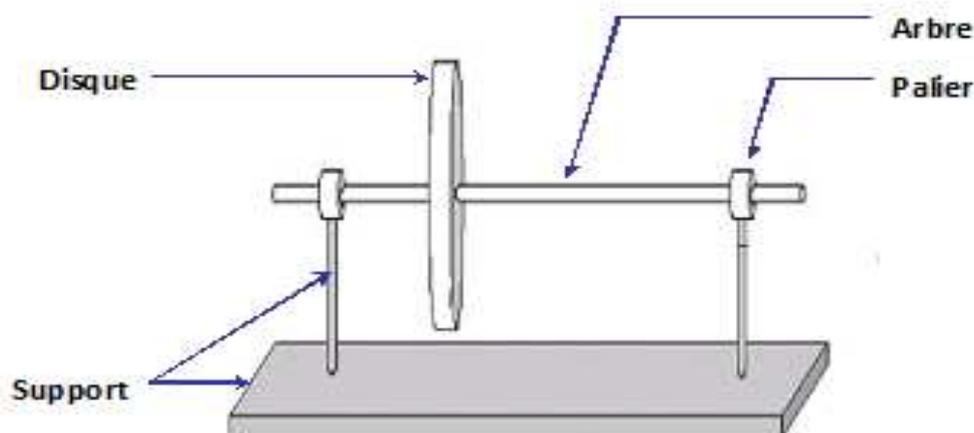


Figure 1.4 : Les organes d'un rotor.

### I.2.1 Classifications des rotors

Suivant les éléments principaux de rotor (arbre, disque, support) on peut classer les rotors industriels selon deux paramètres :

#### Selon le paramètre géométrique:

➤ **Modèle usuel à long arbre** : les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, ...etc.). La majorité des travaux de recherche concernant l'étude de comportement vibratoire et dynamique des machines industrielles sont focalisées sur ce modèle.

➤ **Modèle de disque rotor** : les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre.

Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement dynamique de quelques que machine industrielle par exemple, un disque dur d'un ordinateur, micro turbine, turbine hydraulique..etc. Parmi les recherches effectuées sur ce modèle, nous évoquons par exemple les travaux tentative au début de H.Lamb et R.Southwell [2], ils ont traité le comportement dynamique d'un disque en rotation à l'aide de la théorie des vibrations des membranes. Récemment, on trouve les travaux de G.Genta et A.Tonoli [3] qui ont étudiées en détail, analytiquement et numériquement le comportement vibratoire en torsion, en flexion et axiale d'un disque rotor.

➤ **Modèle de rotor aubagé** : ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubagé (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle...etc). L'étude de comportement dynamique de ce modèle reste assez compliquée, car le mode vibratoire du rotor est liée aux différents phénomènes combinatoires (aérodynamique, aéroélasticité, hydrodynamique...etc). John F.Ward [4] et K.Sinhas [5] présentent une solution approximative pour étudier et identifier le comportement vibratoire en déterminant les fréquences et les modes propres de résonance d'un rotor aubagé soumis à une force radiale concentrée qui due au vorticité aérodynamique .

D'autre part V.L.Gulyaev avec son équipe font une série des études sur un rotor aubagé en fonction de leur rigidité et leur flexibilité , dans un premier temps

V.L.Gulyaev , I.L.Solv'en et S.N. Khodo [6] ont exprimées les équations de mouvement et ont tracé l'allure d'amplitude en fonction de fréquence d'un rotor aubagé en deux pales supposés parfaitement rigides montés sur un arbre élastique en cinq degrés de liberté , ils ont conclu que la variation des amplitudes en fonction de vitesse de rotation a une forme régulière en précision cylindrique ou conique ; dans une seconde temps V.L.Gulyaev, et P.P.Lizunov [7] étudié le comportement dynamique d'un rotor aubagé avec des pales flexible monté sur des articulations cylindriques supposées élastiques et monté sur un arbre flexible ; et enfin V.L.Gulyaev et I.L.Solv'en [8]ont étudiées le comportement dynamique d'un rotor aubagé contenue des pales flexibles, connecté par un disque suppose parfaitement rigide et monté sur un arbre flexible. Alan.D.Wight [9] et son équipe développée un bon d'essais et en parallèle un code de calcul numérique (ADMAS) dans le but et de minimiser le maximum des phénomènes de battement des pales d'un aérogénérateur (éolienne). B.O.AL-Bedoor [10]a étudié le phénomène de couplage entre la flexion des pales et la torsion de l'arbre en tenant compte les effets de gravité et les forces axiales duent à la flexion des pales, les résultats de simulation obtenue sont basés sur la méthode des éléments fini, ils montrent qu'il y a une très grand couplage entre la flexion des pales et la torsion des arbres et la matrice d'amortissement est non linéaire et depend particulièrement aux déformation de torsion et la vitesse de torsion.

- **Modèle de rotor libre** : ce modèle de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support). Il est bien atterré l'attention des chercheurs dans les dernières années pour développer et étudier le comportement dynamique des projectiles, satellites géostationnaires. P.Hughes[11] et P.W.Fortescue et J.Stark[12] sont considérés parmi les premiers chercheurs qui ont étudiées le comportement dynamique de ce genre de rotor, la majorité des travaux qui sont suivi, sont faites par les méthodes de simulation numérique. La validation des résultats jusqu'à nos jours reste difficile de raison de complexité de réaliser des bone d'essais expérimentales.

#### Suivant les paramètres mécaniques :

- **Modèle de rotor rigide** : un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il

tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre [13]. Outre la simplicité du modèle découlant d'une telle hypothèse, la réalisation de calculs pour un rotor rigide est intéressante d'un point de vue de dimensionnement de bâti. En effet, puisque les éléments tournants ne se déforment pas, la charge dynamique est entièrement transmise au palier.

Ce modèle ne sera pas traité dans notre travail.

- **Modèle de rotor de Jeffcott :** c'est un modèle simple (figure 1.5) utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielles, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopique. Leur comportement dynamique a été étudié par Jeffcott en 1919[14]. ce modèle est très souvent utilisé par les chercheurs dans un but phénoménologique, car il permet une interprétation plus directe de l'influence de quelque phénomène sur le comportement dynamique de système.
- **Modèle de rotor réel :** la combinaison entre le modèle de rotor rigide et le modèle de rotor de Jeffcott ne représente que de manière très approximative la dynamique d'un rotor réel, c'est le modèle de rotor flexible quand il tourne avec des vitesses supérieures à la première vitesse critique en flexion [13]. Ce modèle a été l'objet d'étude de plusieurs chercheurs et l'objet de notre étude.
- **Modèle de rotor flexible:** un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique). La règle de base est de considérer un rotor flexible s'il fonctionne à 70% de la 1ère critique ou plus rapide.  
Si l'arbre commence à se déformer sensiblement au début de la plage des vitesses de fonctionnement, il est appelé un rotor flexible.

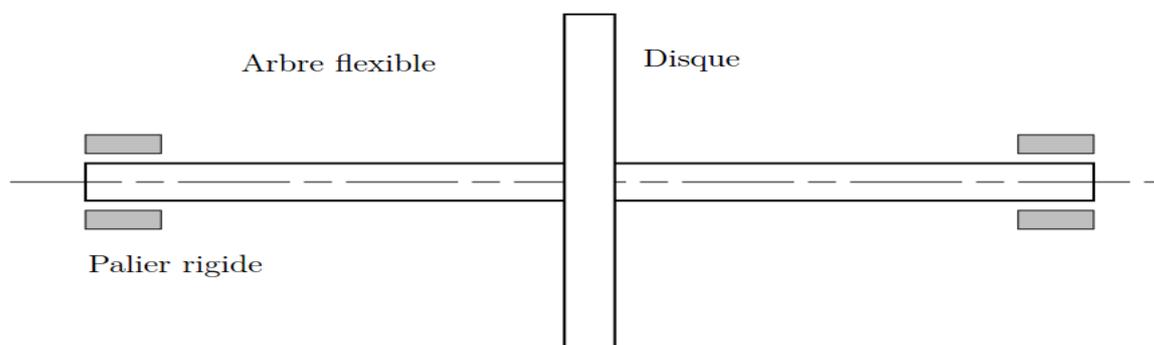


Figure 1.5 : Rotor de jeffcott.

### 1.3 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible

Toute machine tournante en fonctionnement génère des vibrations dont les amplitudes dépendent essentiellement :

- ❖ de la géométrie du rotor.
- ❖ de la raideur des paliers et de son supportage .
- ❖ de l'amortissement apporté par ces mêmes paliers.
- ❖ des sources d'excitation.
- ❖ de la vitesse de rotation du rotor.

#### 1.3.1 Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell

Nelson [15], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin de XVIII<sup>e</sup> siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournant, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. Dans notre jour la notion de vitesse critique a évolué d'une manière à se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant « la vitesse critique correspond à des fréquences propres du système » .

L'analyse dynamique de système montre que pour un système (rotor) conservatif en rotation, les modes propres duent aux effets gyroscopiques ont des formes complexe deux a deux conjugués et dont les pulsations et les fréquences sont purement imaginaires avec une forte dépendance de la vitesse de rotation  $\Omega$  . Ce dernier permet nous de construire un utile de base pour déterminer les vitesses critiques de façon à tracer le graphe représentant l'évolution de fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation, ce graphe s'appelle le diagramme de Campbell [16]. L'excitation majeure par les forces synchrones des balourds, permet nous de détecter les phénomènes de résonance et donc les vitesses critiques en reportant la droite d'équation  $f = \Omega$ , appelée droit d'excitation synchrone, sur le diagramme de Campbell (figure 1.4) . Les points d'intersection avec les courbes des fréquences propres directes fournissent les vitesses auxquelles les résonances ont lieu donc les vitesses critiques de système. Les points d'intersection avec les fréquences propres rétrogrades n'ont pas d'intérêt à première vue puisqu'elles ne peuvent être excitées par un balourd.

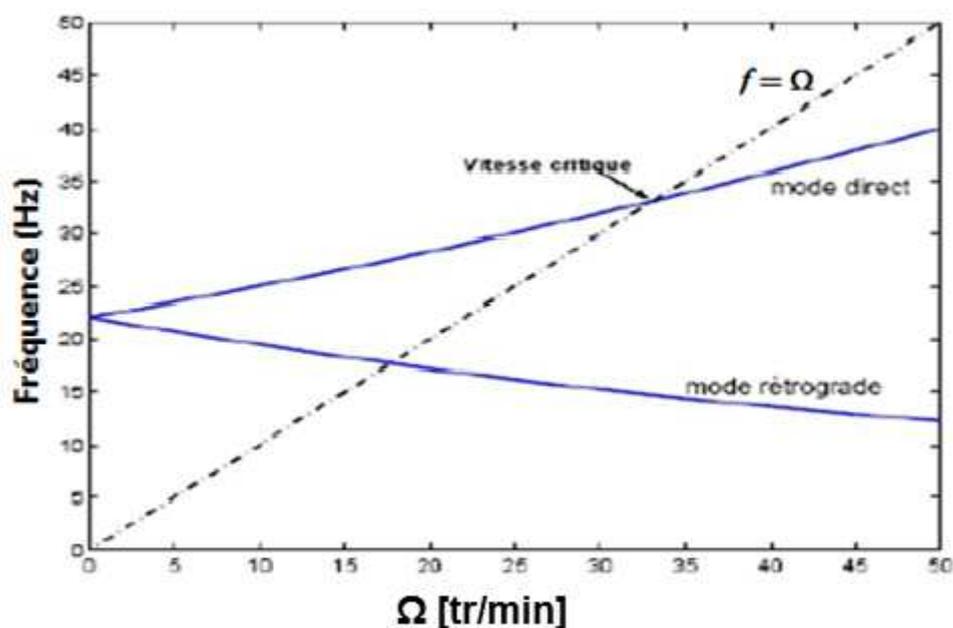


Figure 1.6 : Diagramme de Campbell.

### 1.3.2 L'orbite modale

Les points situés dans l'axe générateur de rotor décrivent par le mouvant de rotation de rotor et due au mode propre des orbites qui ont des formes suivant le phénomène aux quelles envisagée [16] (circulaire pour un rotor symétrique non amorti, elliptique pour un rotor dissymétrique non amorti...). Ces orbites sont engendrées selon deux précessions possibles :

- ❖ une précession directe où les orbites sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation de rotor  $\Omega$ , dans ce cas là sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croit.
- ❖ une précession rétrograde (inverse), où les orbites sont décrites dans le sens inverse que le sens de la vitesse de rotation de rotor, de qui engendre un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.

#### 1.3.2.1 Modes propres

Les modes propres représentent la déformée du rotor sous une fréquence donnée. Le premier mode correspond à la déformée de l'arbre sous la première fréquence propre.

### 1.3.3 L'analyse de stabilité

L'analyse de stabilité dans l'étude de comportement vibratoire et dynamique d'un rotor flexible est nécessaire puisqu'il a considéré comme un système dynamique régit par des systèmes d'équation différentielle. La définition de stabilité recouvre la définition de Laypunov pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre et la définition de Poincaré pour la notion de stabilité orbitale [17].

On peut prédire les seuils de l'instabilité d'un système dynamique et en particulièrement en

dynamique des rotors à partir des divers technique:

- ✓ Signe de la partie réelle des valeurs propres complexe du système d'équations en mouvement libre. Si la fréquence propre est donnée par  $s = -a \pm jb$ , le seuil d'instabilité est déterminé quand  $a$  devient négatif (partie réelle positive) [16]. Avec ce critère on peut estimer la fréquence ainsi que le mode pour lequel le système deviendra instable.
- ✓ Le critère de Routh-Hrwitz permet d'analyser la stabilité de systèmes autonomes [18]. L'utilisation de ce critère est intéressante pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, pour lesquels des expressions analytiques du polynôme caractéristique associé au mouvement perturbé peuvent être déduites. Elle devient, toutefois, complexe pour des systèmes comportant un nombre élevé de degrés de liberté.

Ces deux critères étudient la stabilité d'un système dynamique restreint à des cas de figure particuliers, ou lorsque qu'ils sont décrit par des modèle linéaires. Par exemple R.Sino[19] dans l'objet de leur thèse utilise ces deux méthode pour étudier et analysé la stabilité d'un rotor due au amortissement tournant.

### 1.3.4 Les méthodes de la stabilité

#### 1.3.4.1 La méthode exhaustive

Il s'agit ici d'une approche systématique qui ne peut être appliquée que sur 1 plan d'équilibrage. Elle consiste à chercher de manière exhaustive la masse et la phase de correction conduisant au minimum de vibration. L'avantage majeur de cette méthode est de pouvoir trouver la correction nécessaire à l'équilibrage du rotor indépendamment de toute hypothèse sur le modèle.

La procédure générale qui sera utilisée se déroule selon les étapes suivantes :

- ✓ Faire tourner le rotor et mesurer la vibration initiale ;
- ✓ Trouver la relation entre l'amplitude de vibration ( $V_0$ ) dans le plan de mesure et la position angulaire ( $\psi$ ) d'une masse de test dans le plan d'équilibrage ( $V_0 = V_0(\psi)$ ).
- ✓ Trouver le  $\psi$  qui minimise  $V_0$ .
- ✓ Dans la position  $\psi$  optimale, trouver la relation entre la masse de test ( $MT$ ) et l'amplitude de vibration ( $V_1$ ) ( $V_1 = V_1(MT)$ ).
- ✓ Trouver la valeur de  $MT$  qui minimise  $V_1(MT)$ .

Cependant, cette méthode exige de nombreuses mises en fonctionnement et est donc très consommatrice en temps. De plus, elle n'est envisageable que sur un unique plan d'équilibrage.

Afin de gagner du temps lors des phases d'équilibrage, d'autres techniques telles

que la méthode des coefficients d'influence ou la méthode des trois masselottes seront utilisées. Nous allons maintenant décrire ces dernières.

#### **1.3.4.2 La méthode des coefficients d'influence à un plan**

Avant de présenter la procédure d'équilibrage, nous allons définir la notion de coefficient d'influence. En plaçant une masse unitaire sur le plan de correction (plan 1) à une phase nulle pour un rotor initialement équilibré, nous allons mesurer une certaine vibration sur le plan A. La transformation linéaire entre le balourd appliqué et la vibration mesurée définit alors le coefficient d'influence. Dans ce cas idéal, il est obtenu directement. Cependant, généralement il faut effectuer plusieurs essais (avec des masses et angles variables) pour estimer les coefficients d'influence associés.

#### **1.3.4.3 La méthode des trois masselottes**

La méthode des trois masselottes est conçue pour l'équilibrage à 1 plan des rotors rigides où des rotors flexibles à vitesse constante. La principale différence par rapport à la méthode des coefficients d'influence à un plan est l'absence de mesures de phase. En fait, une des principales difficultés lors de l'équilibrage est la mesure précise des phases, ce qui peut engendrer des erreurs significatives dans les calculs. De plus, si la vitesse d'équilibrage est au voisinage d'une vitesse critique, le taux de variation de la phase de la réponse autour de cette vitesse (surtout pour des systèmes faiblement amortis) est assez important.

#### **1.3.4.4 La méthode des coefficients d'influence**

La méthode des coefficients d'influence qui a été présentée pour 1 plan peut être généralisée de manière à prendre en compte plusieurs plans de mesure, plusieurs plans d'équilibrage et plusieurs vitesses d'équilibrage. Soit  $N_b$  le nombre de plans de correction,  $N_m$  le nombre de plans de mesure et  $N_v$  le nombre de vitesses d'équilibrage.

Méthode proposée nécessite 7 essais et 14 mesures d'amplitude de vibration sur les plans de mesure. Les avantages de cette méthode par rapport à la méthode des coefficients d'influence à 2 plans sont: (1) pouvoir équilibrer un rotor à une vitesse proche des vitesses critiques et, (2) équilibrer des rotors où la mesure de phase est difficile, voir impossible.

#### **1.3.4.5 Stabilité modale**

La méthode de stabilité modal est basée sur la connaissance du comportement modal du système au voisinage des vitesses critiques. La méthode est capable de stabiliser le rotor sur des vitesses critiques successives sans dégrader les équilibrages effectués auparavant.

En général, le nombre de plans nécessaires pour la stabilité de la vitesse critique  $j$  est égal à  $j$ .

La position des plans de la stabilité est définie grâce à la déformée modale (les plans se situent au niveau d'un ventre de vibration). Cependant, si les modes de corps rigide sont gênants et empêchent le franchissement de la première vitesse critique, le nombre de plans d'équilibrage est augmenté de 2 (pour prendre en compte l'équilibrage des modes de corps rigide).

Les méthodes les plus utilisées sont les méthodes de stabilité modale et la méthode des coefficients d'influence. La première utilise la réduction modale du balourd continu initial et le rotor est équilibré à ses vitesses critiques mode après mode, c'est-à-dire il faut calculer les balourds de correction équilibrant un mode déterminé sans déséquilibrer les modes inférieurs et supérieurs. Elle requiert une bonne connaissance de la base modale du rotor (qui est considérée comme un inconvénient car la modélisation de la machine tournante est habituellement complexe) et est souvent utilisée pour des rotors à grande vitesse ayant un grand nombre de vitesses critiques de rotation dans leur plage de fonctionnement. La deuxième est une méthode expérimentale. Elle est ainsi très largement répandue et la plus utilisée à ce jour pour des rotors à faible vitesse ayant un petit nombre de vitesses critiques dans leur plage de fonctionnement.

### **I.5 Dynamique des rotors**

La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Les machines tournantes trouvent des applications très diverses dans l'industrie : machines-outils, centrales électriques, turbomachines turbines d'avions, automobiles, propulsion marine. W.J.M. Rankine [1] en 1869, il a utilisé la deuxième Loi de Newton sur l'étude de stabilité de mouvement d'un arbre en rotation, il conclut que l'équilibre d'un rotor sans friction est uniformément perturbé autour de sa position initiale, et le mouvement de rotor dont la vitesse de rotation est impossible de dépasser la première vitesse critique.

En 1895 S. Dunkerley a publié un article dans laquelle, il a développé expérimentalement les formules des vitesses critiques et les vitesses supercritiques d'un rotor en fonction de leur diamètre et leur poids de disque [20].

L'ingénieur Suédois a décontracté les résultats obtenus par Rankine et montre par un essai expérimental sur une turbine à vapeur qu'il est possible de tourner un rotor au dessous de la vitesse critique. Leur résultats a été vérifié analytiquement par A. Föppl [21]. J.W.S. Rayleigh [22] introduit une méthode approximative basée sur les méthodes énergétique pour l'analyse dynamique d'une poutre continue en flexion, il a été utilisé aussi la méthode de séparation des variables qui sera connu la méthode de Rayleigh Ritz pour calculer les fréquences propres.

Cette méthode permet d'obtenir un modèle simple de rotor à deux degrés de liberté, mais

elle est peu précise dès qu'il s'agit d'étudier des systèmes réels.

M.Schilhansl[23] et D.Pruelli[24] ont étudié les vibrations de flexions en déterminant les fréquences naturelles et les modes propres d'une poutre en rotation. Ils ont conclu que le chargement de poutre par une vitesse de rotation augmente leurs fréquences naturelles, d'autre part les effets des forces d'extensions tendent vers une augmentation de raideur de poutre en flexion et en torsion, par contre les effets d'inertie diminuent les fréquences naturelles.

S.Timoshenko [25] découvre les effets de déformation transversale due au cisaillement sur les fréquences normales d'une poutre continue en particulier dans le cas de l'arbre en rotation. Il est connu après par le modèle de poutre de Timoshenko.

T.Koyama [26] a développé une procédure basée sur la méthode des éléments finis pour déterminer les caractéristiques des vibrations libres de rotation uniforme d'une poutre de Timoshenko en tenant compte l'effet de cisaillement transversal et les inerties de rotation sur les fréquences propres. Les résultats numériques montrent que les fréquences propres augmentent avec le chargement par la vitesse angulaire ainsi que l'effet de cisaillement transversal et l'inertie sont appréciablement aux nombres de mode avec une large influence de l'effet de cisaillement.

A.Bazoune[27] a réalisé des études sur l'effet de cisaillement transversal et les inerties sur une poutre en rotation à section variable. Ses études basées sur les deux modèles comparatifs, le modèle de poutre d'Euler Bernoulli et le modèle de poutre de Timoshenko. Les poutres sont discrétisées par la méthode des éléments finis dans chaque élément contient quatre degrés de liberté.

## 1.6 Aspect numériques

L'utilisation des techniques numériques est primordiale pour l'analyse en dynamique des structures notamment en dynamique des rotors et surtout dans la large progression des outils informatiques. Il existe deux méthodes qui sont souvent employées pour l'analyse dynamique des rotors, la méthode de la matrice de transfert et la méthode des éléments finis.

- **La méthode de la matrice de transfert** : cette méthode historiquement a été développée par N. Myklestad [27] et M.A.Prohl[28] pour calculer les fréquences naturelles et les modes propres d'un rotor en régime soucritique. W.Lund et F.K.Orcutt [29] ont diversifié le domaine d'utilisation de cette méthode en présentant un algorithme pour calculer la réponse linéaire d'une force synchrone (balourd) d'un rotor flexible supporté sur un palier hydrodynamique. D.W.Childs[30] a comparé la solution linéaire de système avec la solution obtenue par cette méthode, il a conclu que cette méthode a un avantage sur le temps de convergence de solution par un ordinateur, par contre cette

- méthode est difficile à appliquer dans un système multi rotor et complexe . A.Liew [31] développé cette méthode dans le cas d'utilisation pour un problème non linéaire.
- **La méthode des éléments finie** : les premiers travaux utilisant cette méthode pour la modélisation ont été publiés par H.D.Nelson et J.M.McVaugh [32]. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'effort gyroscopique. Cette modélisation a été complétée par E.S.Zaezi et H.D.Nelson [33] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Plusieurs travaux ont suivi, confirmant la maturité et la fiabilité de cette méthode.
- **ANSYS Workbench**: est l'épine dorsale qui permet de délivrer un système de simulation global et intégré à nos clients. Avec ANSYS Workbench, vous bénéficiez d'applications intégrées et de données partagées et compatibles, et votre productivité est accrue. ANSYS Workbench vous permet d'appréhender des phénomènes multiphysiques au niveau du système, ce qui n'était pas possible auparavant. Pour les services informatiques, cela se traduit par une plus grande fiabilité, des coûts de support réduits et un coût total de possession plus faible car notre plate-forme apporte une réponse aux problèmes de matériel, de logiciel et de compatibilité des données que l'on rencontre lorsque l'on utilise plusieurs applications indépendantes.

### 1.8 Sources d'excitation

Le rotor en rotation est soumis à des excitations diverses, d'amplitudes et de fréquences très différentes. Ces excitations peuvent d'être de nature périodique, aléatoire ou à impulsion, nous traitons en particulière quelle mode d'excitation directe à la machine.

- **L'effet gyroscopique** : Les effets gyroscopiques génèrent des modes propres (et donc des fréquences naturelles correspondantes) appelés « modes à précession directe ou positive » orbitant dans le même sens que la rotation  $\Omega$  du rotor et des modes propres appelés « modes à précession inverse ou négative » orbitant dans le sens opposé à celui de la rotation du rotor. Il est alors nécessaire de séparer, par leur précession, les deux modes propres qui ont le même type de forme modale (deux modes propres correspondant à la première flexion du rotor par exemple). Dans le cas, par exemple, d'un rotor symétrique monté sur des paliers isotropes (symétriques), seuls les modes propres à précession directe sont excitables par le balourd (au même titre qu'une poutre sollicitée horizontalement ne peut pas vibrer verticalement). La détermination du sens de la précession est effectuée par le signe du produit vectoriel des déplacements calculés à deux instants différents. Le sens de la précession peut varier tout au long du rotor et notamment au franchissement des nœuds de vibration.

## 2. Elasticité 3D

### 2.Introduction

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Elle peut être envisagée lorsque le corps solide déformable possède une dimension bien plus grande que les deux autres.

Un solide de ce type sera appelé poutre.

La théorie des poutres fournit des solutions en déplacement et contraintes qui ne sont pas nécessairement valables en tout point. Mais loin des points d'application des chargements, des liaisons (blocages cinématiques) et des variations brusques de section, elle est tout à fait suffisante.

Ces conditions sont présentes en de nombreux points de ce type de structures.

### 2.1.Définitions

**2.1.1. Poutre :** On appelle poutre, un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre G décrit une courbe appelée ligne ou fibre moyenne (voir figure 2.1) :

- ❖ **La ligne moyenne est droite pour les poutres droites**, elle est très élancée, c'est à dire qu'elle possède une grande longueur par rapport à ses dimensions transversales. La surface plane (S) est appelée section droite.
- ❖ **Section droite, fibre moyenne :** est appelée section droite, (AB) est la fibre moyenne de la poutre (ou ligne moyenne ou encore lieu des centres d'inertie des sections droites de la poutre).
- ❖ **Fibre neutre :** La ligne d'allongement nul en flexion pure est appelée fibre neutre

(ou ligne neutre).

### 2.1.2.Géométrie des poutres : cas usuels

Si la fibre moyenne (AB) de la poutre est :

- contenue dans un plan, on parle de poutre plane (ou poutre à plan moyen) ;
- une droite, on parle de poutre droite ;
- courbe, on parle de poutre gauche.

La section droite peut être :

- constante le long de la longueur (AB), on parle alors de poutre à section constante ;

- variable, on parle alors de poutre à section variable ; en pratique, l'intérêt d'une telle poutre est de s'adapter aux efforts qu'elle supporte et donc d'optimiser l'emplacement de la matière.

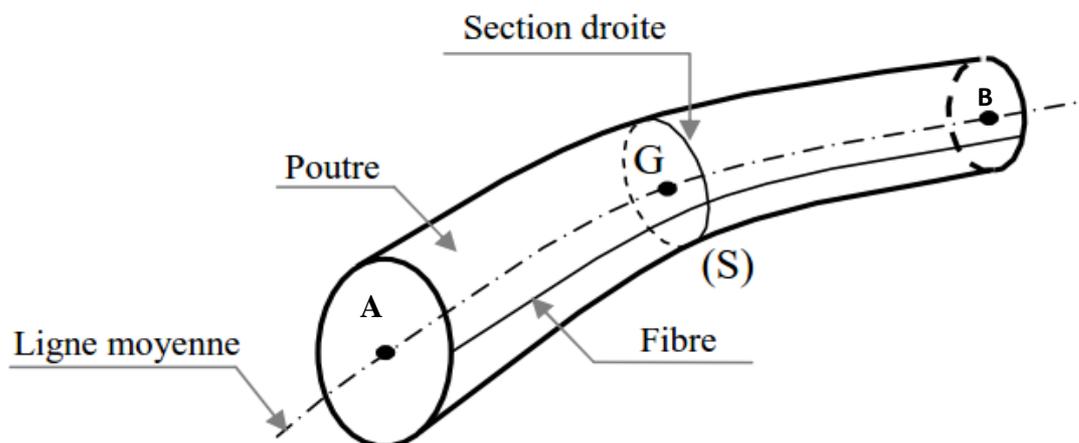


Figure 2.1 : structure poutre.

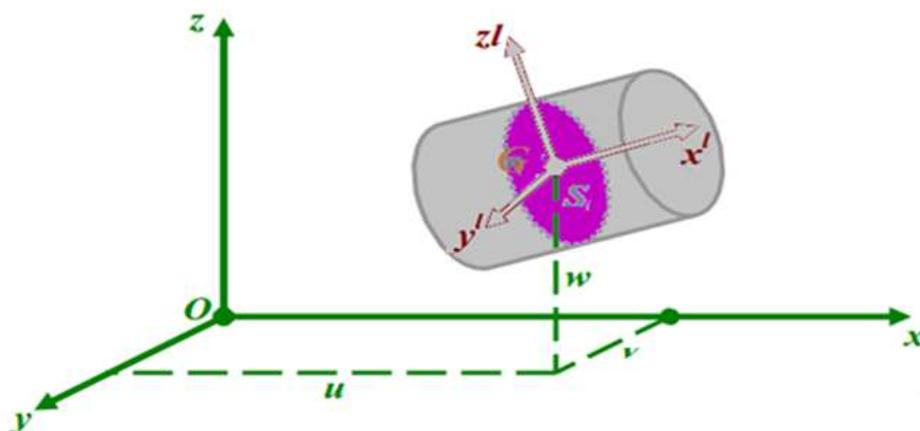
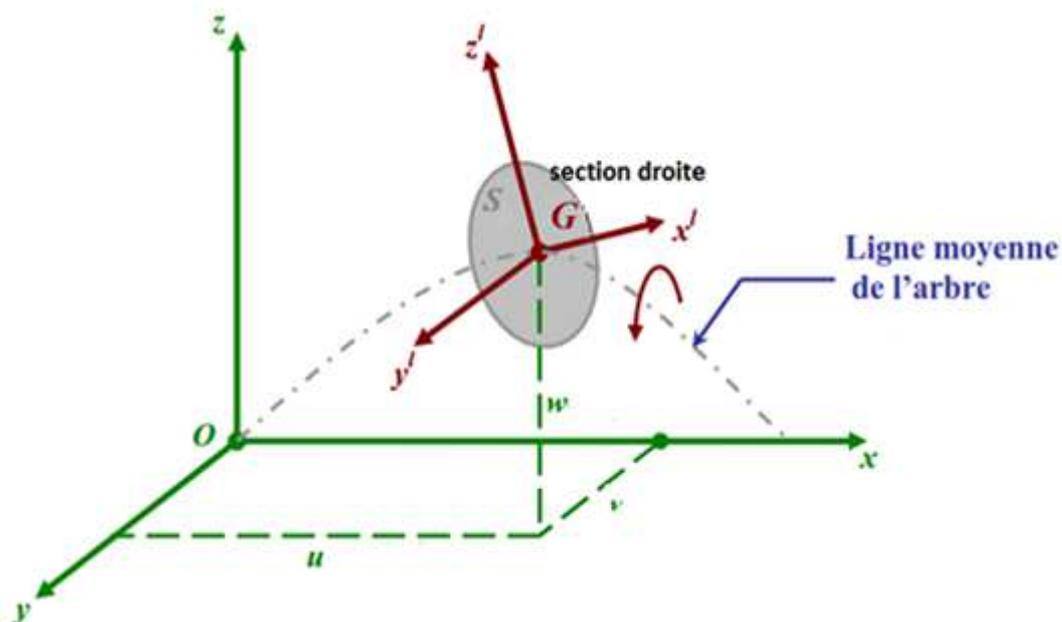


Figure 2.2 : structure d'une poutre avant la déformation.



**Figure 2.3** : structure d'une poutre après la déformation.

### 3. Le champ de déplacement

Le déplacement de tout point d'une section est complètement décrit par la connaissance des déplacements du centre de section dans le plan et de la rotation de la section autour de la ligne moyenne joignant les centres de gravité de toutes les sections.

Dans le modèle 3D le champ de déplacement suivants  $(u, v, w)$  de la section droite de centre  $G$  de l'élément poutre voir figure 2.2 et 2.3 en fonction du temps est :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Avec  $U_0, V_0$  et  $W_0$  sont :

$U_0$  : déplacement longitudinal.

$V_0$  : déplacement transversal longitudinal.

$W_0$  : déplacement vertical.

### 3.1. Relation déformation-déplacement

La relation déformation-déplacement linéaire dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} ; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.2)$$

### 3.2. Relation contrainte-déplacement

La relation contrainte-déplacement en fonction de la déformation angulaire  $\gamma_{ij}$  (i,j≡ x,y,z) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.\mu.\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.\mu.\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.\mu.\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} = \mu.\gamma_{yz} \\ \sigma_{xz} = \mu.\gamma_{xz} \\ \sigma_{xy} = \mu.\gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

C'est sous la forme matricielle (2.3), et d'après la loi de Hooke devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Et  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  (2.5)

Où la matrice [D] est donnée par :

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

*SYM*

Le vecteur de déformation peut être écrit sous la forme d'un produit d'une matrice différentielle et le vecteur de déplacement :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

En transformant l'équation (2.4) sous la forme de matrice  $[l]$  donnés par :

$$[l] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

#### 4. Energie de déformation de l'arbre et le disque ( l'arbre est étagé)

$$E_{gd} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (2.10)$$

On remplace l'équation (2.4) dans l'équation (2.10) en donne :

$$E_{gd} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (2.11)$$

D'après les deux équations (2.9) et (2.11) donne l'expression de l'énergie de déformation en fonction de champ de déplacement :

$$E_{gd} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{L} \, dV \quad (2.12)$$

$\{\boldsymbol{\sigma}\}$  : Tenseur de Contrainte.

$\{\boldsymbol{\gamma}\}$  : Tenseur de Déformation angulaire.

$\nu$  : Coefficient de poisson .

$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\}$  : Tenseur de déformation.

### 5. Energie cinétique de l'arbre et le disque (l'arbre est étagé)

L'expression de l'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$E_{gc} = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dV \quad (2.13)$$

### 6. Travail virtuel des paliers

D'une manière générale, les paliers qui induisent des forces extérieures agissantes sur l'arbre comportent des caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure 2.4 :

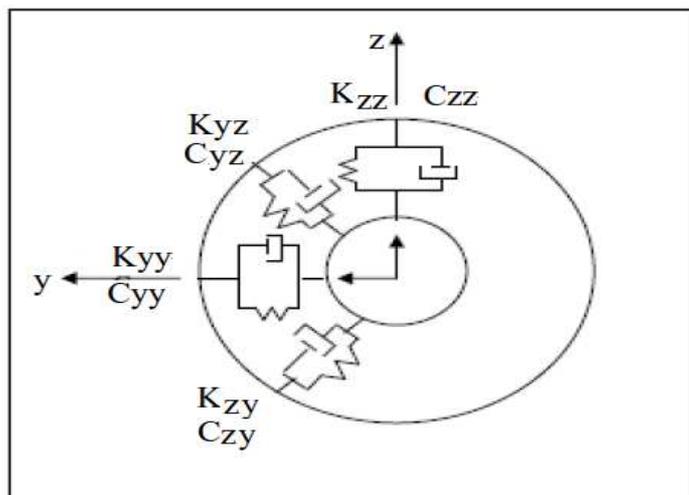


Figure 2.4 : Amortissements et raideurs de paliers.

Les paliers sont modélisés à partir du principe des travaux virtuels des forces exercées sur le système. S'écrit sous la forme :

$$\delta\omega_p = -k_{yy} v \delta v - k_{yz} w \delta v - k_{zz} w \delta w - k_{zy} v \delta w - c_{yy} \dot{v} \delta v - c_{yz} \dot{w} \delta v - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zy} \dot{v} \delta w \quad (2.14)$$

$$\delta\omega_p = F_v \delta v + F_w \delta w \quad (2.15)$$

$F_v$  et  $F_w$  sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers. En utilisant les deux équations (2.14) et (2.15) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

## 7. Equation du mouvement

Pour la détermination des équations différentielles du mouvement nous appliquons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial w}{\partial q} \quad (2.17)$$

$$L = E_{gc} - E_{gd} \quad (2.18)$$

$E_{gc}$  : Energie cinétique globale (arbre + disque).

$E_{gd}$  : Energie de déformation globale (arbre + disque).

$\{q\}$  : Les coordonnées généralisées.

$\partial w$  : Travail virtuel des forces généralisées.

L'équation (2.20) donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = [Ma + MD] \{\ddot{q}\} - \{Fv\} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}} = [ka] \{q\} - \{Fg\} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \{Fex\} \quad (2.21)$$

$\{Fv\}$  : Vecteur des forces de Coriolis.

$\{Fg\}$  : Vecteur des forces non-linéaire.

$\{Fex\}$  : Vecteur des forces extérieures (on trouve les forces des paliers).

Donc l'équation (2.19) devient

$$[[\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_D]] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [[\mathbf{G}_D] + [\mathbf{G}_a] + [\mathbf{C}_D] + [\mathbf{C}_a]] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [[\mathbf{k}_a] + [\mathbf{k}_D]]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.22)$$

$[\mathbf{M}_a]$  : Matrice masse globale de l'arbre.

$[\mathbf{M}_D]$  : Matrice masse globale des disques.

$[\mathbf{G}_D]$  : Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale des disques.

$[\mathbf{G}_a]$  : Matrice de couplage due à l'effet gyroscopique globale de l'arbre.

$[\mathbf{C}_D]$  : Matrice d'amortissement globale.

$[\mathbf{C}_a]$  : Matrice d'amortissement globale.

$[\mathbf{k}_a]$  : Matrice de rigidité globales de l'arbre.

## 3. Modélisation et simulation d'un rotor flexible

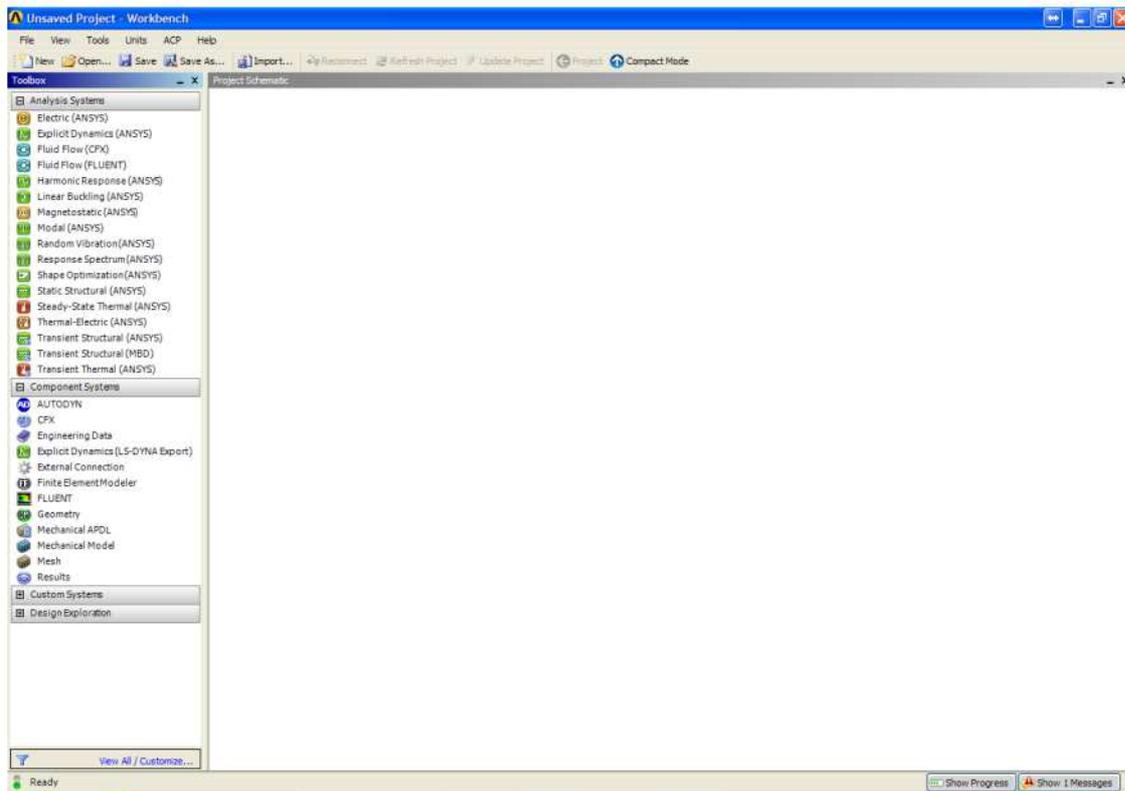
### 3.1. Introduction

Les applications auxquelles on peut accéder à partir de Workbench comprennent : ANSYS DesignModeler (pour la création de géométrie); ANSYS Meshing (pour la génération de maille); ANSYS Polyflow (pour la mise en place et la résolution de simulations de dynamique des fluides informatiques (CFD), où les écoulements visqueux et viscoélastiques jouent un rôle important); Et ANSYS CFD-Post (pour le post-traitement des résultats). Dans Workbench, un projet se compose d'un groupe de systèmes. Le projet est piloté par un flux de travail schématique qui gère les connexions entre les systèmes. À partir du schéma, vous pouvez interagir avec des espaces de travail originaux de Workbench, tels que Design Exploration (paramètres et points de conception), et vous pouvez lancer des applications intégrées aux données avec Workbench (comme Polyflow). Les applications intégrées aux données ont des interfaces distinctes, mais leurs données font partie du projet Workbench et sont automatiquement sauvegardées et partagées avec d'autres applications au besoin. Cela rend le processus de création et d'exécution d'une simulation CFD plus rationalisé et efficace. Workbench vous permet de construire des projets composés de plusieurs systèmes dépendants qui peuvent être mis à jour séquentiellement en fonction d'un flux de travail défini par le schéma du projet. Par exemple, vous pouvez construire un projet à l'aide de deux systèmes basés sur Polyflow connectés où les deux systèmes partagent la même géométrie et le même maillage ; Et le deuxième système utilise les données du premier système comme données de sa solution initiale. Lorsque vous avez deux systèmes connectés de cette façon, vous pouvez modifier la géométrie partagée une fois, puis mettre à jour les résultats pour les deux systèmes avec un seul clic de souris sans avoir à ouvrir l'application Meshing ou Polyflow. Quelques exemples de ce qui est utile sont les suivants: effectuer un calcul de flux non isotherme à partir de la solution obtenue à partir d'un isotherme; Effectuer un calcul transitoire à partir de la solution obtenue à partir d'une analyse à l'état stationnaire; Et effectuer une simulation de moulage par soufflage à l'aide de la paraison obtenue à partir d'un calcul d'extrusion. En outre, Workbench vous permet de copier des systèmes afin d'effectuer efficacement et de comparer plusieurs analyses similaires. Workbench fournit également des capacités de modélisation paramétrique en conjonction avec des techniques d'optimisation qui peuvent vous permettre d'étudier les effets des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie sélectionnés ; Cependant, il est recommandé d'utiliser les capacités de paramétrage et d'optimisation internes

de Polyflow si possible, afin de minimiser les dépenses de calcul. Consultez le Guide de l'utilisateur de Polyflow pour plus de détails.

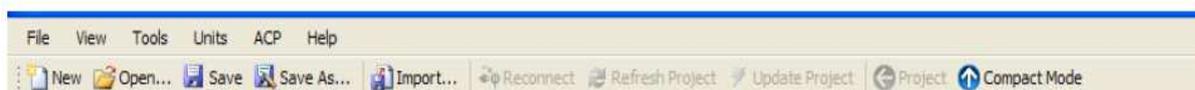
### 3.2. Menu principal du logiciel ANSYS Workbench

L'ouverture du logiciel fait apparaître le menu principal présenté ci-dessous voir figure 3.1.



**Figure 3.1 :** Menu principal.

Le bar d'outil permet un accès rapide à plusieurs commandes tel que la sauvegarde mais aussi un accès aux options du logiciel voir figure 3.2.



**Figure 3.2 :** Commande de bar d'outil.

La première étape est de modifier les paramètres linguistiques du logiciel afin que celui-ci soit entièrement en anglais afin de faciliter l'apprentissage. Les tutoriaux sont souvent en anglais.

LMC sur Tools et LMC sur Options... Le menu ci-dessous devrait apparaître à votre écran voir figure 3.3.

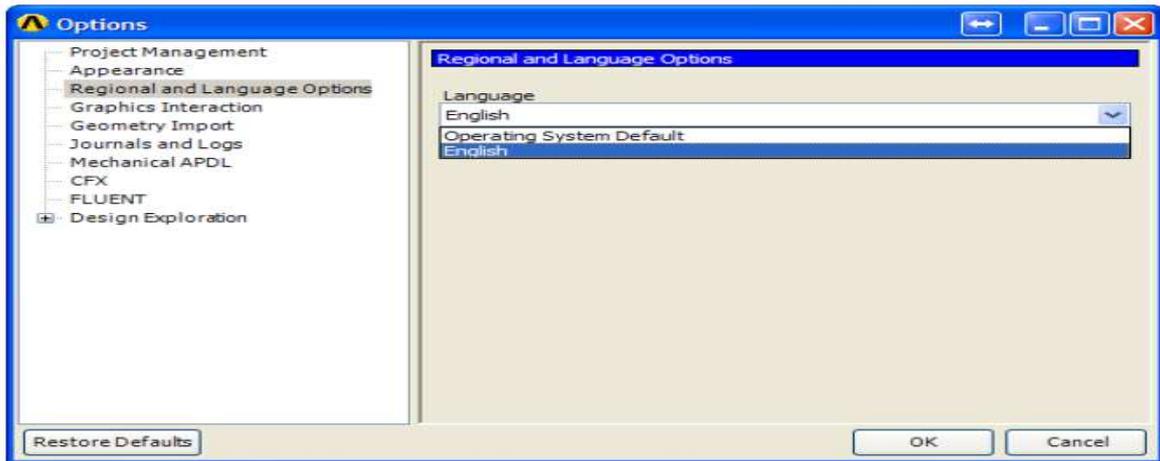


Figure 3.3 : Menu d'option.

Pour débiter un nouveau projet, LMC sur New. LMC sur Save As... pour enregistrer celui-ci dans le dossier de votre choix. Il est conseillé de créer un nouveau dossier et d'enregistrer le projet à l'intérieur de celui-ci. Cette technique permet de regrouper tous les fichiers de l'analyse à l'intérieur d'un même dossier voir figure 3.4.

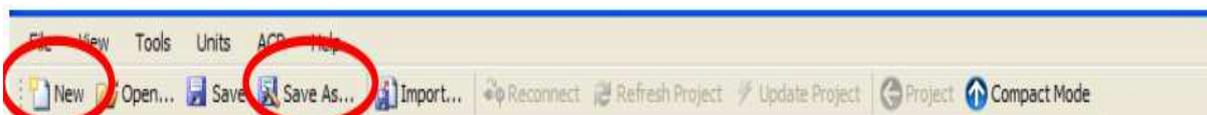


Figure 3.4 : Dossier d'enregistrement le projet.

La barre d'outils Toolbox vous donne accès à plusieurs systèmes d'analyse. Pour débiter une analyse modale, LMC sur Modal (ANSYS) et glisser dans Project Schématique voir figure 3.5.

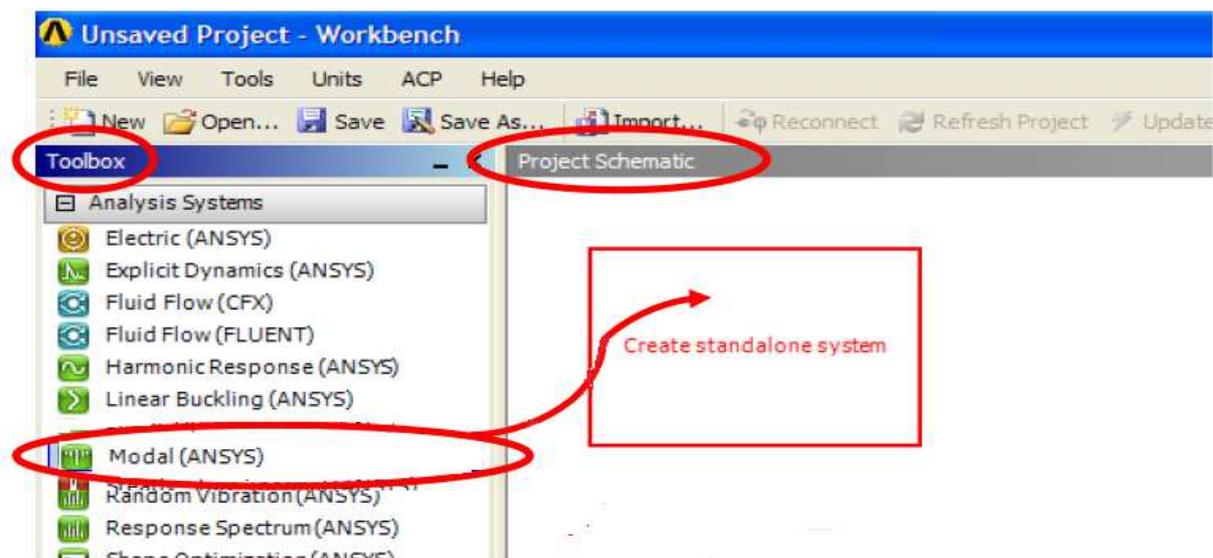
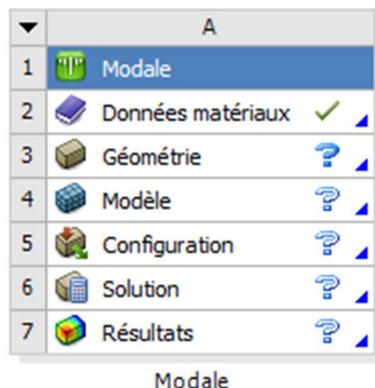


Figure 3.5 : Méthode de schématisation de projet.

Le système A est maintenant créé dans Project Schématique voir figure 3.6.



**Figure 3.6 :** Schéma de projet.

Le système comporte différentes cellules soit : Engineering Data, Geometry, Model, Setup, Solution, Results. Pour faciliter leurs compréhensions, on peut les regrouper selon le logiciel déjà étudié Mechanical APDL (ANSYS)

- ❖ Prétraitement : Engineering Data, Geometry et Model
- ❖ Résolution : Setup et solution
- ❖ Post-traitement : Résultats

Il est possible d'obtenir une description de chaque cellule dans le fichier d'aide d'ANSYS Workbench.

#### ❖ Engineering Data

La cellule Engineering Data est utilisée pour définir et accéder à des modèles de matériau pour être utilisé dans une analyse. LMC la cellule Engineering Data ou RMC et choisir Edit dans le menu contextuel qui apparaît pour entrer l'environnement.

#### ❖ Geometry

Utilisez la cellule Geometrie pour importer, créer, modifier ou mettre à jour un modèle pouvant être utilisé pour une analyse. LMC sur la cellule ou RMC et choisir Edit dans le menu contextuel qui apparaît pour entrer l'environnement.

### ❖ Model/Mesh

La cellule Model est associée à la définition de la géométrie, des systèmes de coordonnées, des connections et du maillage dans le module de simulation Mechanical.

### ❖ Setup

La cellule Setup permet de définir les chargements, conditions frontières et autre configuration de l'analyse

### ❖ Solution

La cellule Solution permet d'avoir accès aux données de résolution.

### ❖ Results

La cellule Results regroupe les résultats de l'analyse. Celle-ci est souvent référée à une cellule de post-traitement.

## 3.3. Module de modélisation

### 3.3.1. La géométrie

Ouvrez un nouveau projet et démarrez une analyse modale. Entrez le module de création géométrique et sélectionner mètre comme unité. Créez un nouveau dessin voir figure 3.7.

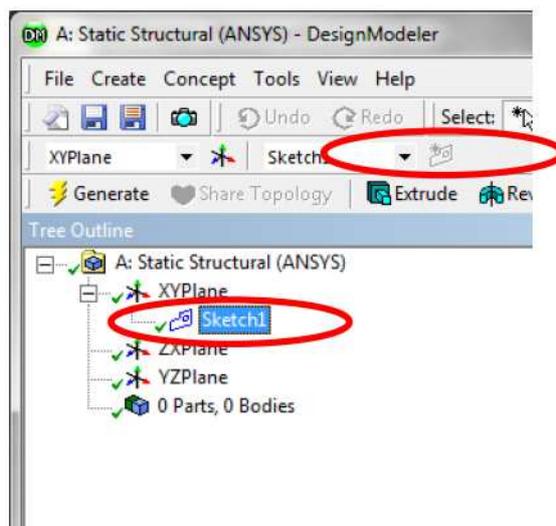


Figure 3.7 : Création de la géométrie.

LMC sur Sketch1 et LMC sur l'onglet Sketching pour obtenir Sketching Toolboxes. LMC sur Line voir figure 3.8.

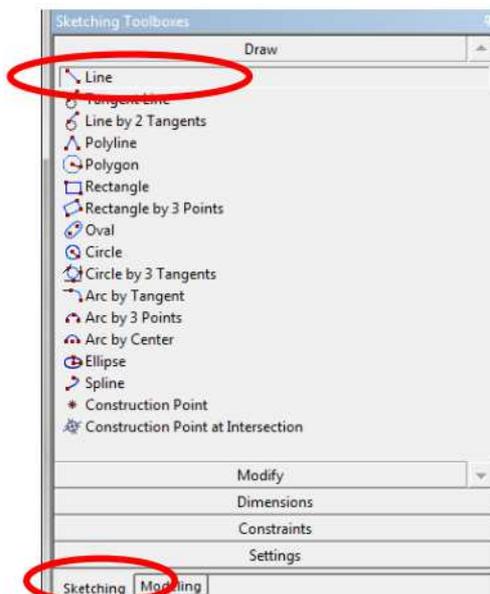


Figure 3.8 : Outil de dessin.

Les lignes sur l'axe x sont normalement horizontalement contraintes. Par contre, les lignes au-dessus ne le sont pas nécessairement. Utilisez donc l'outil Horizontal sous Contraints voir figure 3.9.

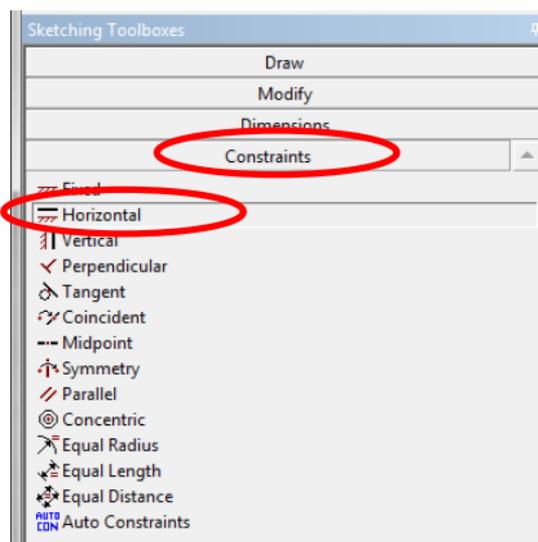


Figure 3.9 : Composants de dessin modale.

Une nouvelle pièce devrait apparaître dans Tree Outline. Il s'agit d'un corps filaire voir figure 3.10.

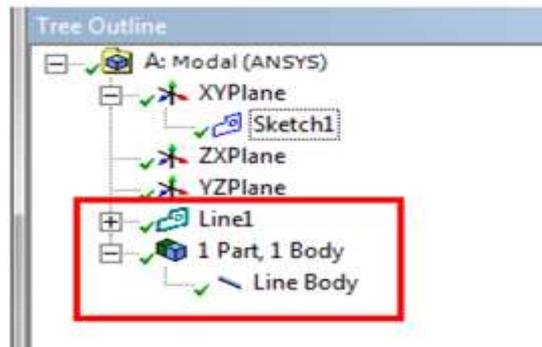


Figure 3.10 : Nouvelle pièce.

❖ Propriétés du matériau

Workbench utilise de l'acier structural par défaut d'où le crochet vert pour Engineering Data. Il faut par contre modifier les propriétés. Double LMC sur Engineering Data. LMC sur Structural Steel. LMC sur la valeur Density et entrez 7800 Kg /m<sup>3</sup>. Le module de Young est bien de 210 GPa et le coefficient de poisson est bien de 0.3 voir figure 3.11.

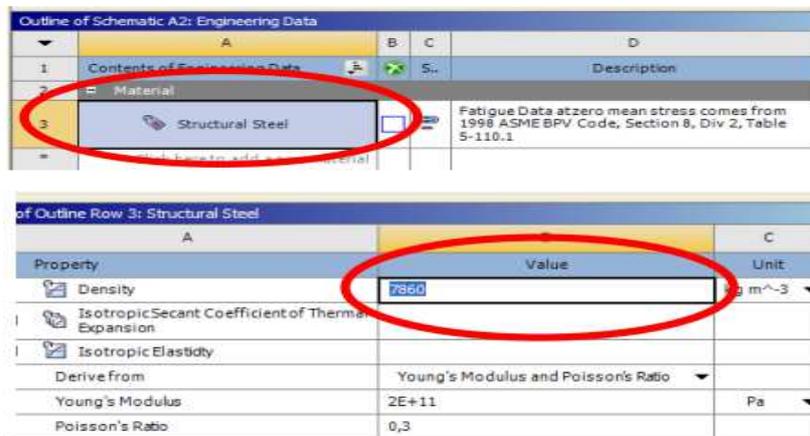


Figure 3.11 : Propriétés du matériau.

3.4. Le maillage du modèle

ANSYS AIM fournit des capacités de maillage pour différents modèles géométriques. Lorsque la géométrie représente une région structurale (ou une partie solide), ou lorsque la géométrie représente une région fluide (ou un débit de fluide), utilisez un maillage partiel pour créer un maillage. Vous pouvez également utiliser un maillage partiel pour créer des mailles distinctes pour les régions fluides et les régions structurales ; Par exemple, lorsque vous importez plusieurs fichiers géométriques voir figure 3.12 et tableau 3.1.

Lorsque la géométrie représente des parties solides et qu'un volume d'écoulement doit être extrait, utilisez la tâche de création de volume, avec le maillage du volume de flux, pour créer un maillage. Dans ce cas, le maillage du volume d'écoulement consiste à identifier l'emplacement du volume d'écoulement, à générer un maillot d'enveloppe de surface pour le volume extrait, puis à engranger le volume lui-même. Lorsque la géométrie représente plusieurs parties solides que vous souhaitez unir pour créer une région d'écoulement unique, ou si vous souhaitez simplifier un corps avec plusieurs patches de surface, utilisez une tâche de création de volume pour simplifier la géométrie et générer le maillage de surface, puis utiliser Flux de volume maillant pour créer le maillage du volume voir figure 3.13.

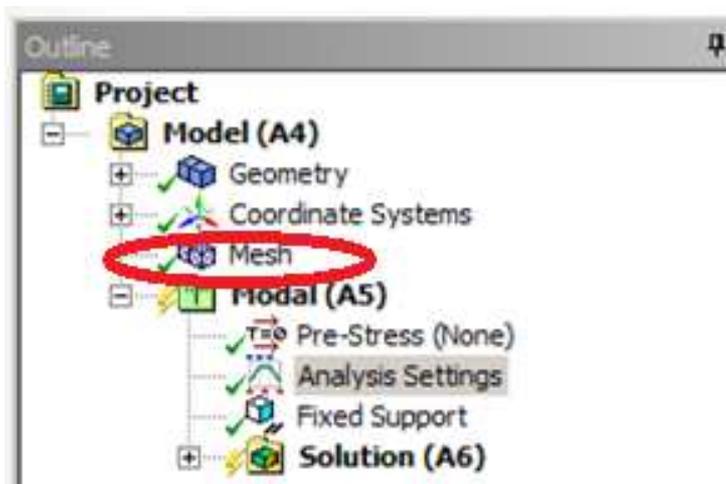


Figure 3.12 : Objet de maillage.

Nom de l'objet	Maillage
Etat	Résolu
<b>Affichage</b>	
Style d'affichage	Couleur du corps
<b>Réglages par défaut</b>	
Physique de préférence	Mécanique
Pertinence	0
Contrôle de forme	Mécanique standard
Nœuds intermédiaires d'éléments	Contrôlé par le programme
<b>Dimensionnement</b>	
Fonction de taille	Courbure
Centre de pertinence	Fin
Taille d'élément initiale	Assemblage actif
Lissage	Elevé
Transition	Lente
Centre d'angle de course	Fin
Angle normal de courbure	Par défaut (18,0 °)
Taille min	Par défaut (7,3458e-005 m)

Taille de face max	Par défaut (7,3458e-003 m)
Taille de tétraèdre max	Par défaut (1,4692e-002 m)
Taux de croissance	Par défaut (1,20 )
Simplification du maillage de base automatique	Activé
Tolérance de simplification	Par défaut (3,6729e-005 m)
Longueur d'arête minimale	0,125660 m
<b>Inflation</b>	
Utiliser l'inflation tét. automatique	Aucun
Option Inflation	Transition progressive
Rapport de transition	0,272
Maximum couches	5
Taux de croissance	1,2
Algorithme d'inflation	Pré
Afficher les options avancées	Non
<b>Avancés</b>	
Nombre de CPUs pour le maillage parallélisé de la pièce	Contrôlé par le programme
Eléments à arêtes rectilignes	Non
Nombre de tentatives	0
Tentatives supplémentaires pour l'assemblage	Non
Comportement de corps rigide	Dimensionnellement réduit
Morphing de maillage	Désactivé
Mailleur surfacique triangulaire	Contrôlé par le programme
Vérification topologique	Non
Tolérance de pincement	Par défaut (6,6113e-005 m)
Générer le pincement à l'actualisation	Non
<b>Statistiques</b>	
Nœuds	24707
Eléments	5600

Tableau 3.1 : Type de maillage.

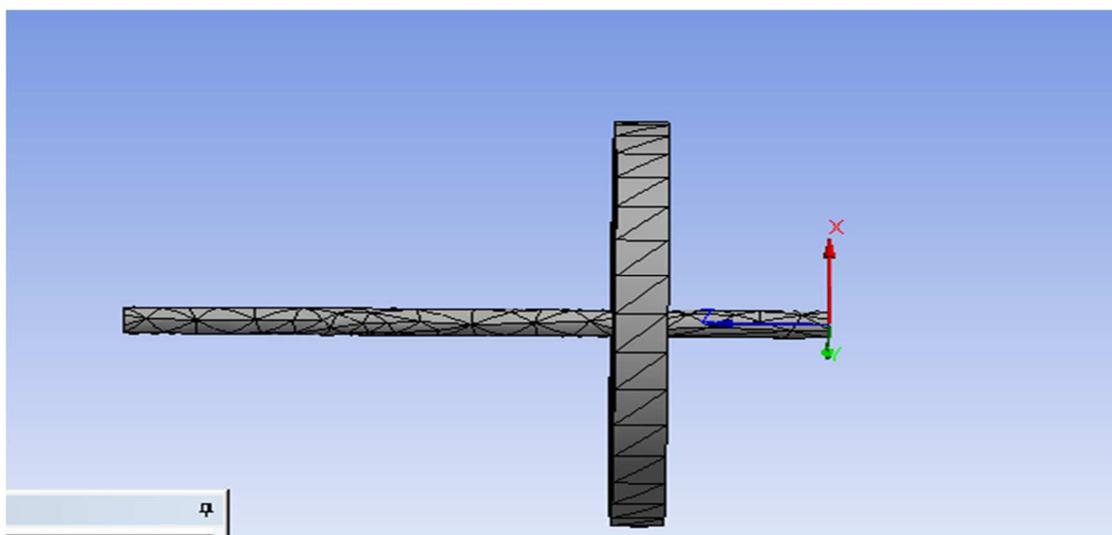


Figure 3.13 : Maillage du modèle.

### 3.5. Module de simulation

Entrez le module de simulation. N'oubliez pas de sélectionner corps filaire dans les propriétés de la géométrie. Le module de simulation ne reconnaîtra pas votre géométrie dans le cas contraire.

#### 3.5.1. Les conditions aux limites

LMC sur Modal, LMC sur Palier (Raideur) voir figure 3.14.

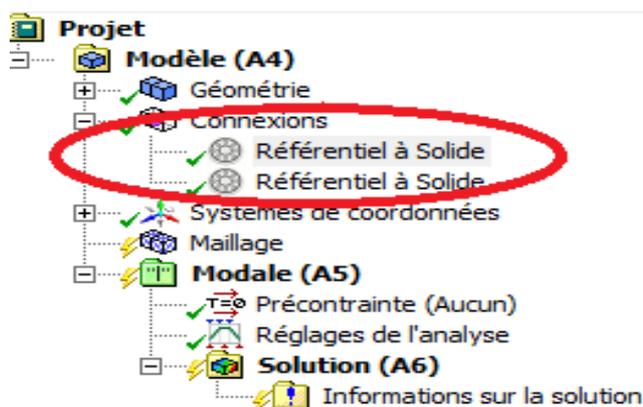


Figure 3.14 : Raideurs des paliers.

#### 3.5.2. Coefficient d'amortissement

LMC sur Modal, LMC sur Palier coefficient d'amortissement voir figure 3.15.

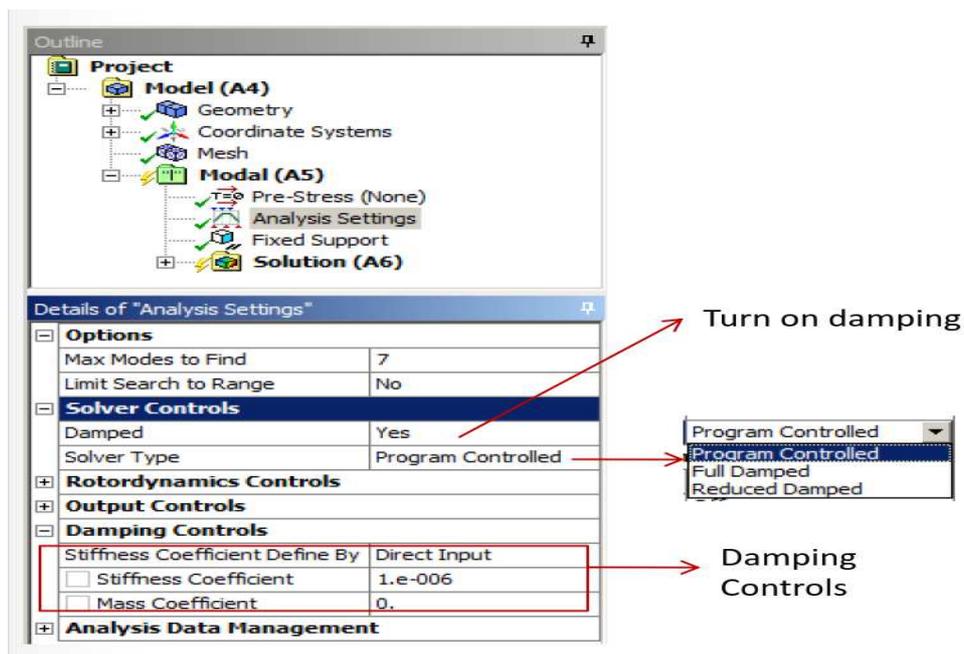


Figure 3.15 : Coefficients d'amortissement des paliers.

3.5.3. La vitesse de rotation et effet gyroscopique

On déclare la vitesse de rotation et l'effet gyroscopique voir figure 3.16.

Rotational velocity enabled in Modal analysis

Option to turn on Coriolis Effect

Specify rotational velocity for the number of points

Points	Rotational Velocity [tr/min]
1	0
2	10000
3	20000
4	30000
5	40000
6	50000
7	60000
8	70000
9	80000
10	90000
11	1,e+005

Basic setup for Campbell Diagram

- Tabular Rotational velocity
- Damped solve
- Turn on Coriolis Effect
- Turn on Campbell Diagram
- Minimum 2 solve points

Figure 3.16 : vitesse de rotation et l'effet gyroscopique.

### 3.5.4. Diagramme de Campbell et diagramme de stabilité

La figure 3.18 ci-dessous pour l’affichage de diagramme de Campbell et de stabilité.

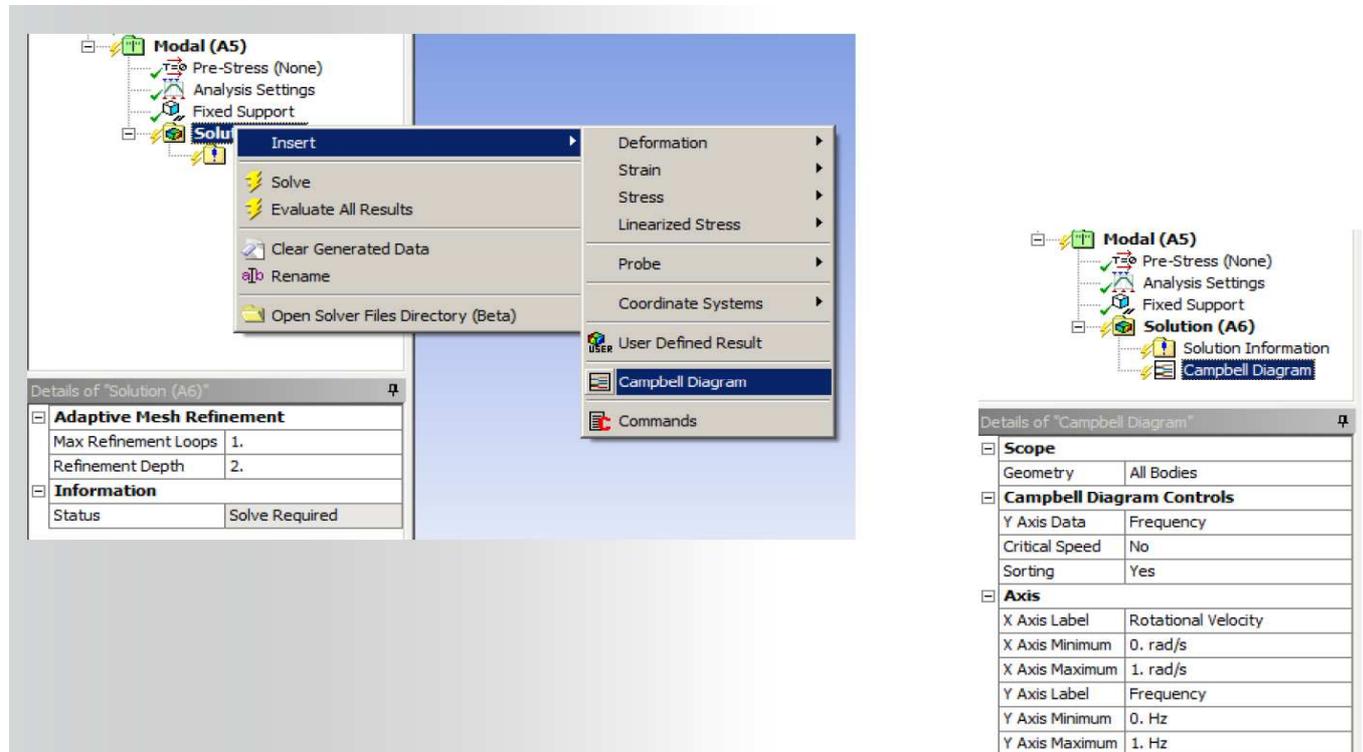


Figure 3.17 : Diagramme de Campbell et de stabilité.

### 3.5.5. Résolution du modèle

Pour résoudre le modèle, RMC sur Solution et LMC sur Solve. Pour visualiser l’information sur la solution, LMC sur Solution Information voir figure 3.18.

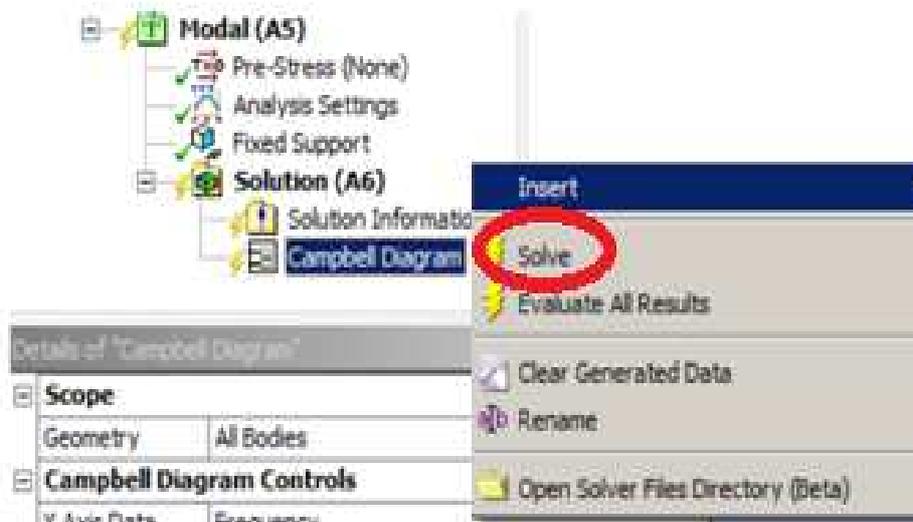


Figure 3.18 : Résolution.

### 3.5.6. Affichage des résultats

Pour affiché la déformation. LMC sur Solution, LMC sur Déformation voir figure 3.19.

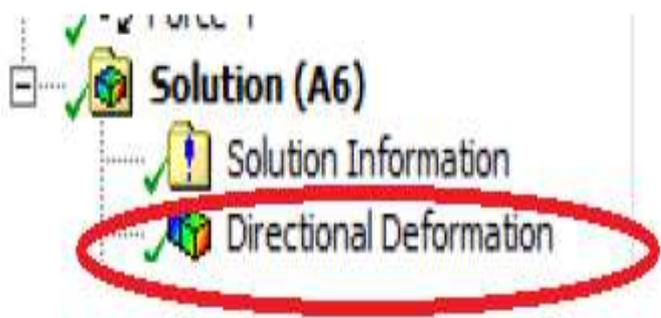


Figure 3.19 : Direction de déformation.

✓ Mode stable

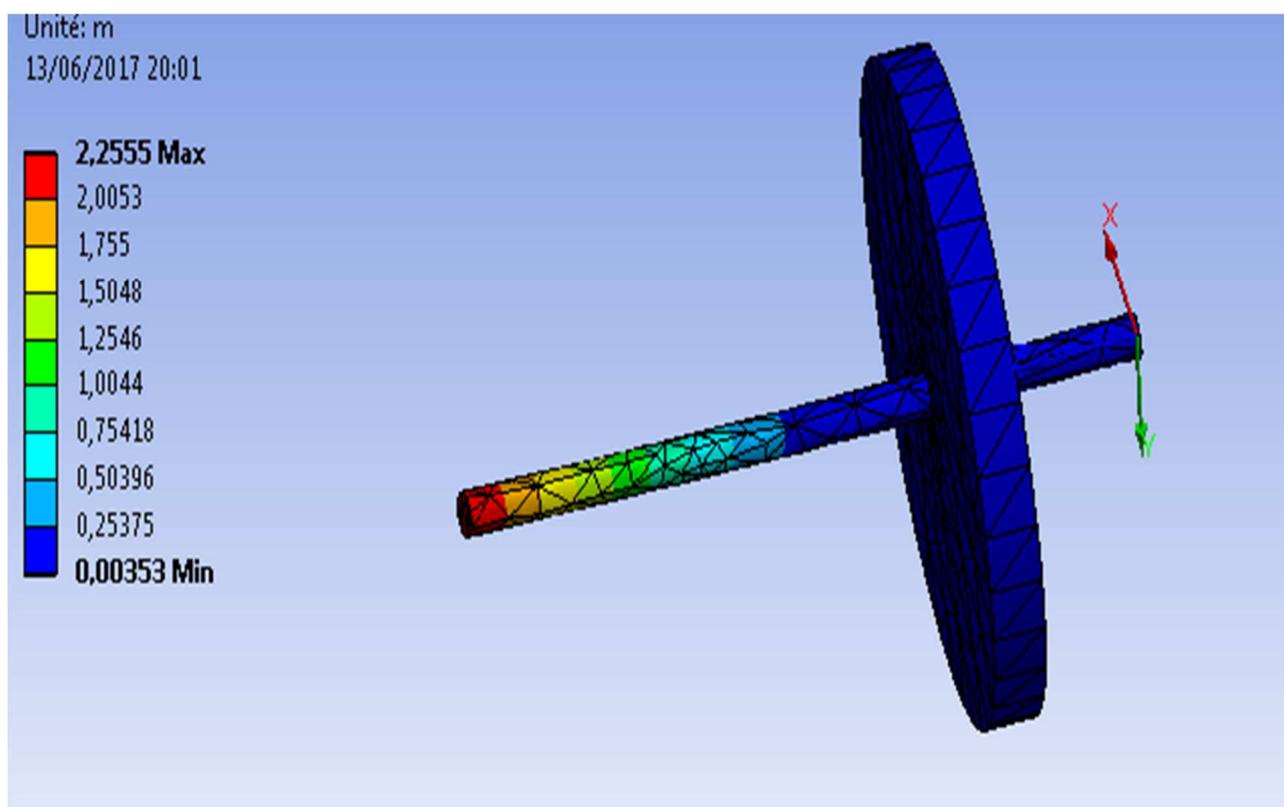


Figure 3.20 : Rotor stable.

✓ Mode instable

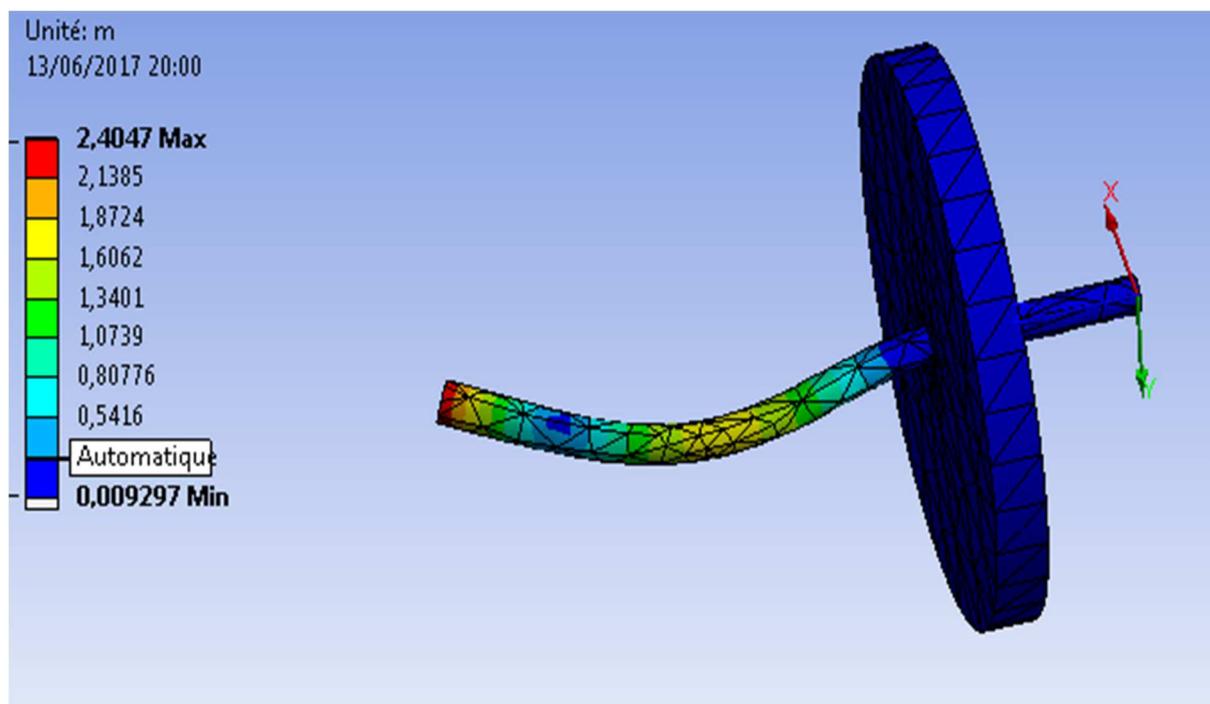


Figure 3.21: Rotor instable.

### 3.6. Le projet

Projet d'analyse la stabilité d'un rotor flexible voir figure 3.22.

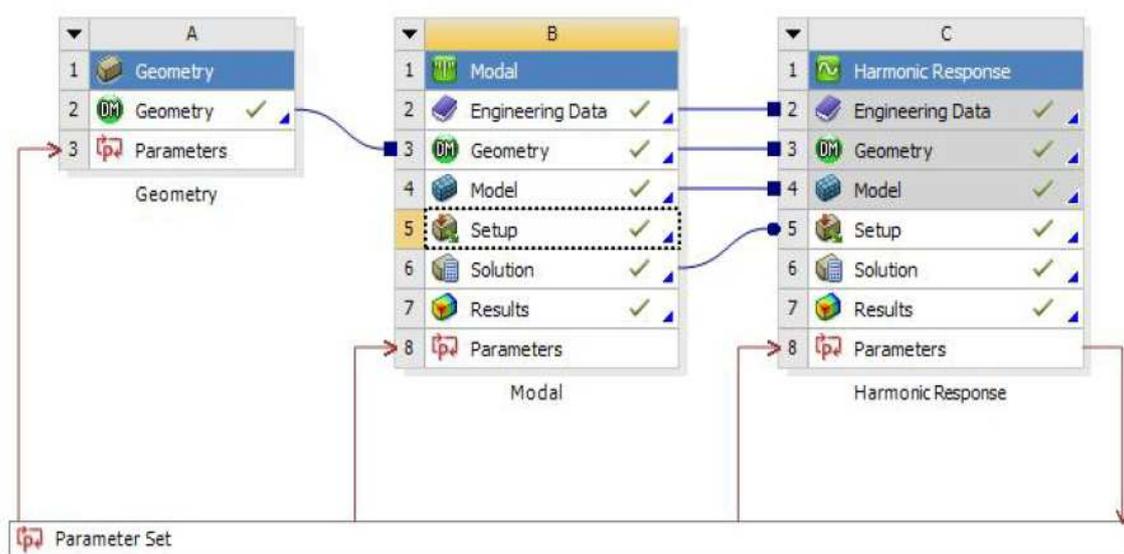


Figure 3.22 : projet d'analyse.

## 4. Résultats et interprétations

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous vous proposons les résultats de notre étude et analyse pour divers exemples d'applications pour étudier l'influence des paramètres physiques et géométriques, les conditions aux limites, influence des paliers (rigides ou flexibles), la position du disque sur l'arbre tournant, un arbre tournant avec plusieurs disques. Nous étudions cette influence de ces paramètres sur les fréquences propres et les vitesses critiques de l'arbre et l'arbre avec disque, pour la stabilisation du rotor.

### 4.2 Matériels du travail

Le travail a été réalisé avec micro-ordinateur Acer de configuration suivante :

- ❖ Système d'exploitation Win7 (64)
- ❖ Intel® Core™ I3 CPU 500 Go
- ❖ Mémoire physique 4 Go
- ❖ Logiciel : Ansys version 17.0 (Ansys workbench)

### 4.3 Résultat et interprétation

Dans cette partie, nous allons étudié l'influence des paramètres cités dans l'introduction précédent. La modélisation et la simulation sont faites par le logiciel Ansys, en utilisant un modèle 3D voir figure 4.1.

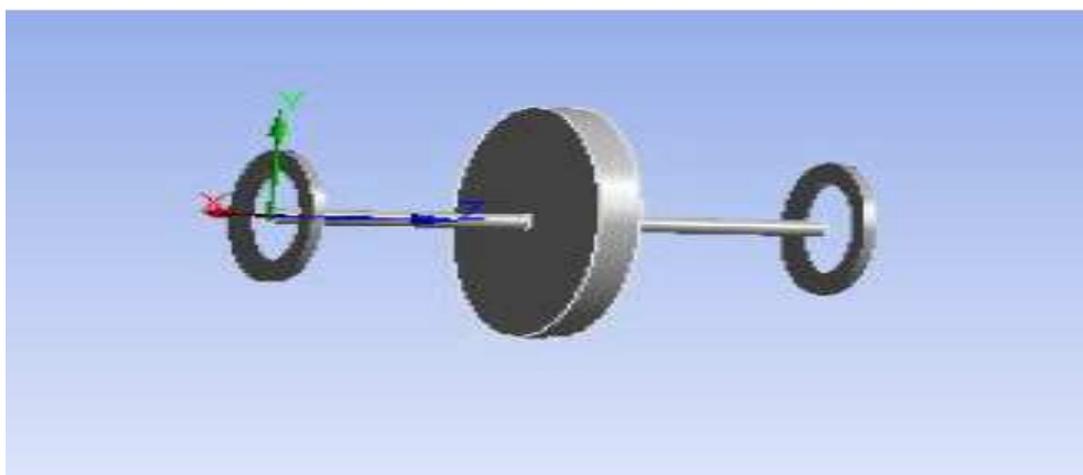


Figure 4.1 : Modèle 3D du rotor.

### 4.3.1 Influence des propriétés géométriques de l'arbre sur les fréquences propres et les vitesses critiques

Dans le premier exemple, on varie les paramètres géométriques de l'arbre (rapport entre la longueur **L** et le diamètre **D**) pour avoir ces influences sur les fréquences propres, les vitesses critiques et la stabilité du rotor, on garde les mêmes conditions aux limites (bi-appui flexible amorti) et les mêmes propriétés physiques de l'arbre.

Les propriétés physiques et géométriques de l'arbre sont :

- $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  ;  $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$  ;  $\nu = 0.3$ .
- $[E]$  : Module de Young. ;  $[\rho]$  : La masse volumique. ;  $[\nu]$  : coefficient de poisson.
- Les raideurs :  $K_{yy} = K_{zz} = K_p = 10^8 \text{ N/m}$ . ; les coefficients d'amortissement :  

$$C_{yy} = C_{zz} = C_p = 6 \times 10^4 \text{ N.s/m}$$
- La longueur de l'arbre tournant :  $L = 1,5 \text{ m}$ .

\* Les figures 4.2, 4.4, 4.6 et 4.8 présentent les Diagrammes de Campbell pour les différents rapports  $L/D$ . On observe que si le rapport  $L/D$  augmente la vitesse critique diminue et l'inverse est juste.

\* Les figures 4.3, 4.5, 4.7 et 4.9 présentent les Diagrammes de la stabilité pour différents rapports  $L/D$ . On observe que si le rapport  $L/D$  augmente (tous les modes sont stables) l'arbre tournant tend vers la stabilité voir figure 4.9.

\* Les résultats montrent que les propriétés géométriques d'un arbre tournant ont une influence très importante sur les fréquences propres et par conséquent sur les vitesses critiques et la stabilité de l'arbre tournant.

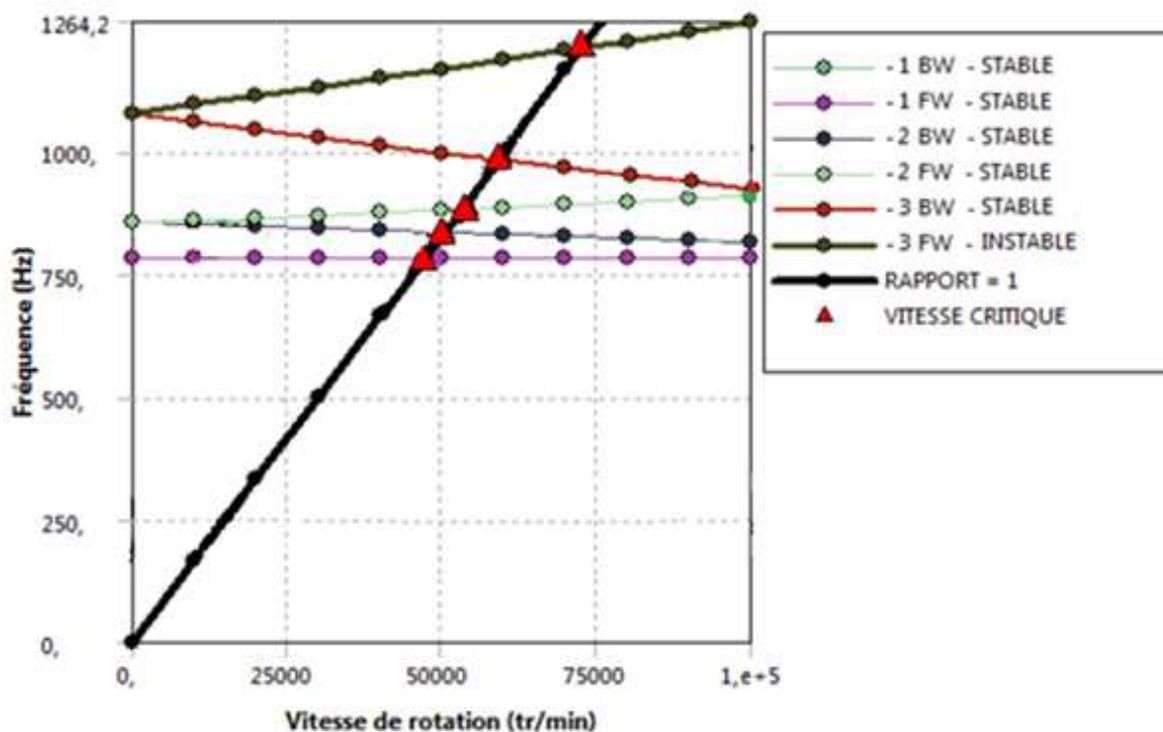


Figure 4.2: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour  $L/D=5$ .

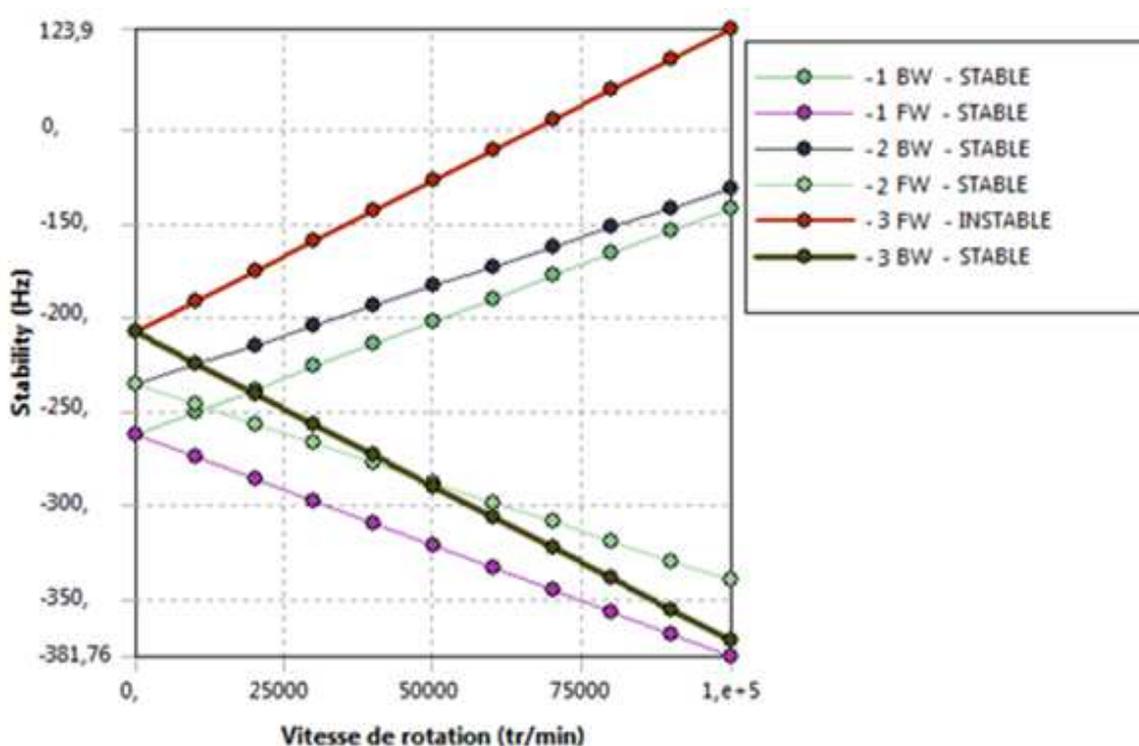


Figure 4.3: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour  $L/D=5$ .

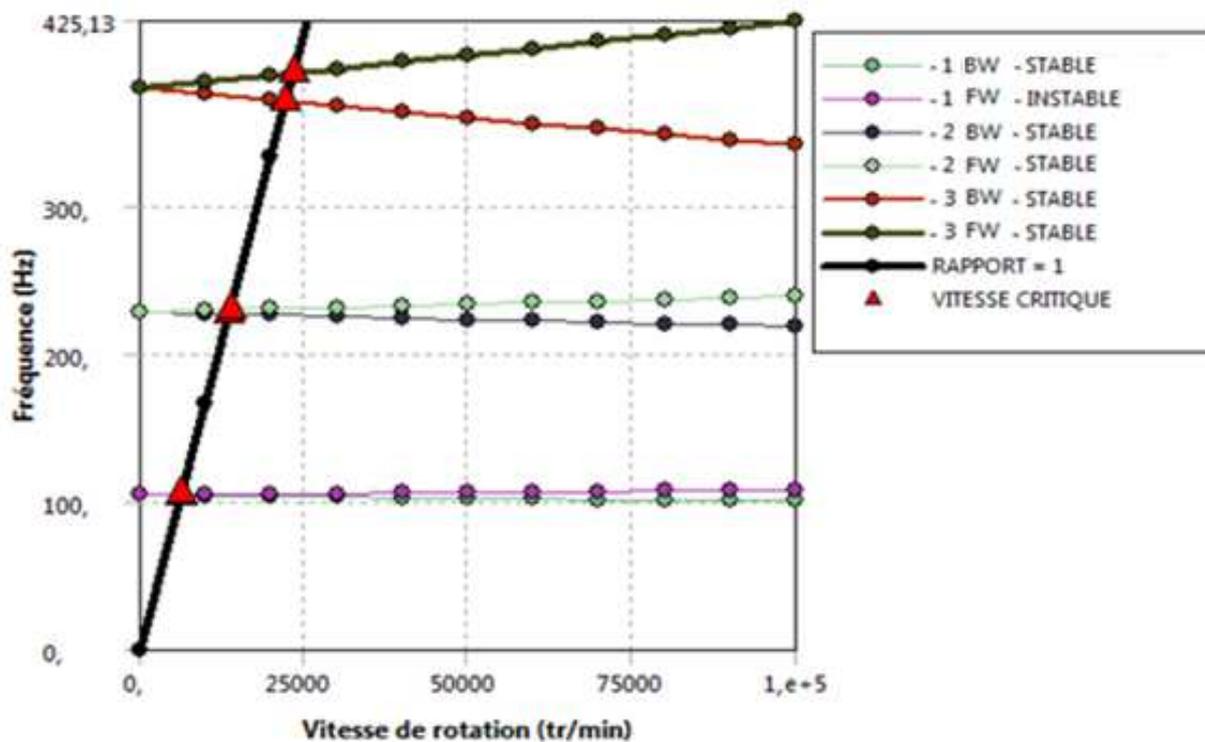


Figure 4.4: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour L/D=10.

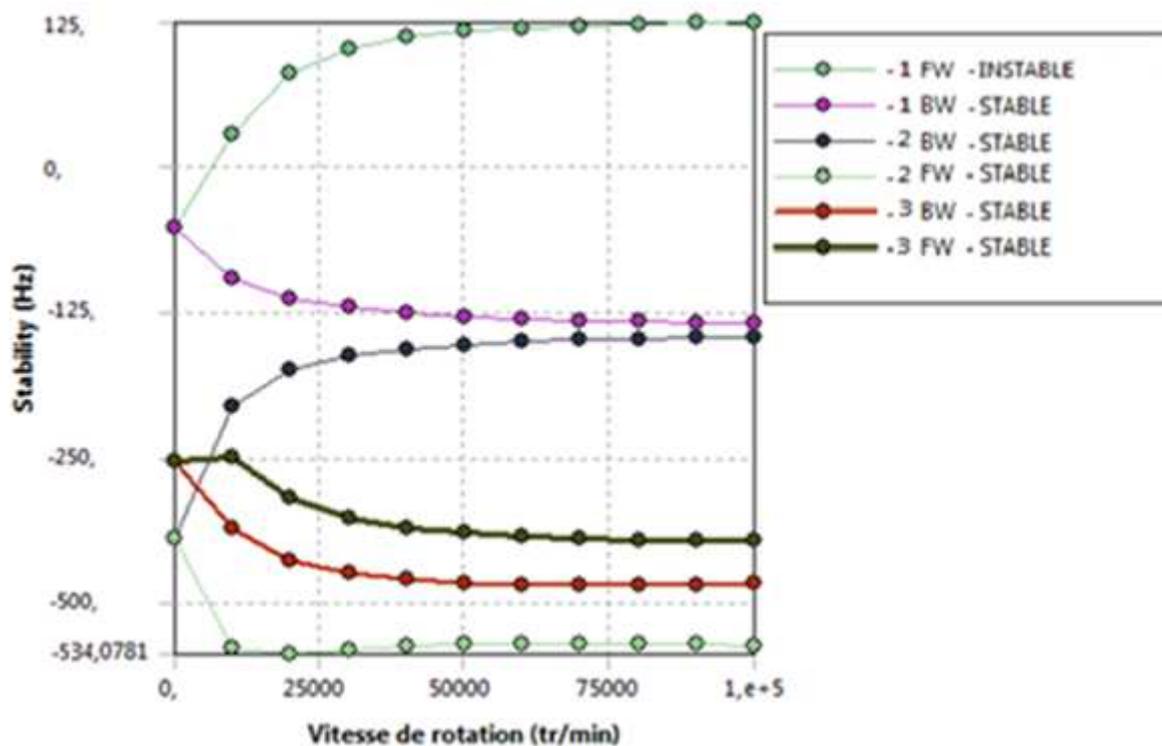


Figure 4.5: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour L/D=10.

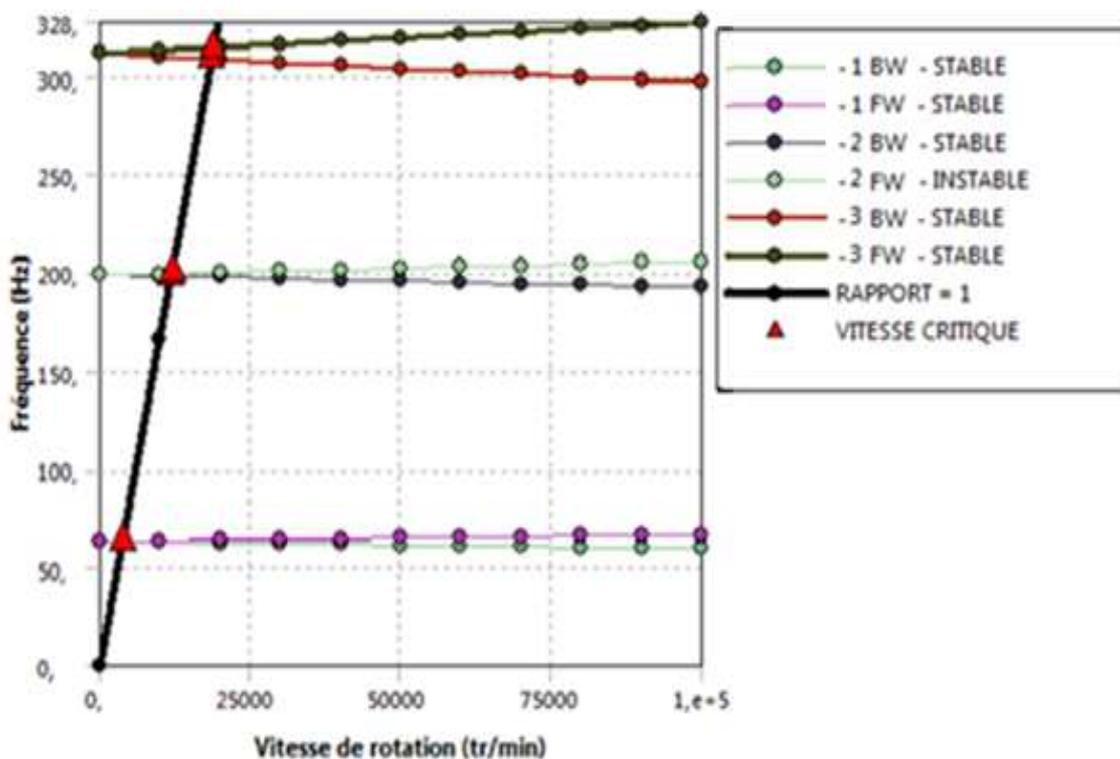


Figure 4.6: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour  $L/D=15$ .

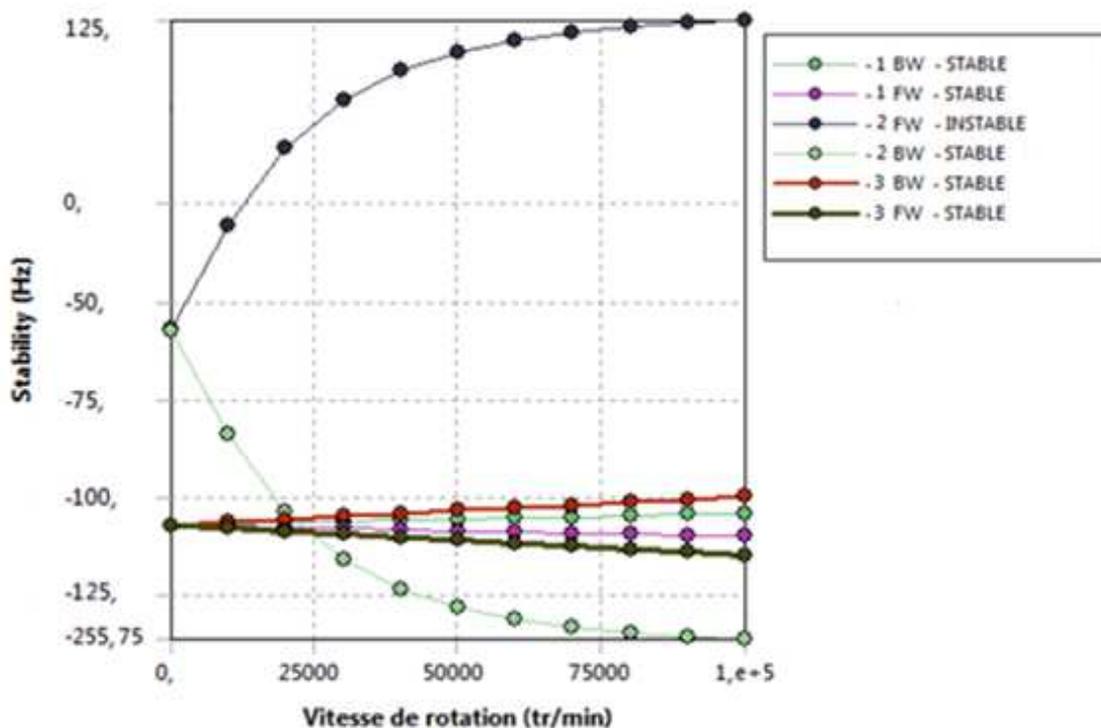


Figure 4.7: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour le rapport  $L/D=15$ .

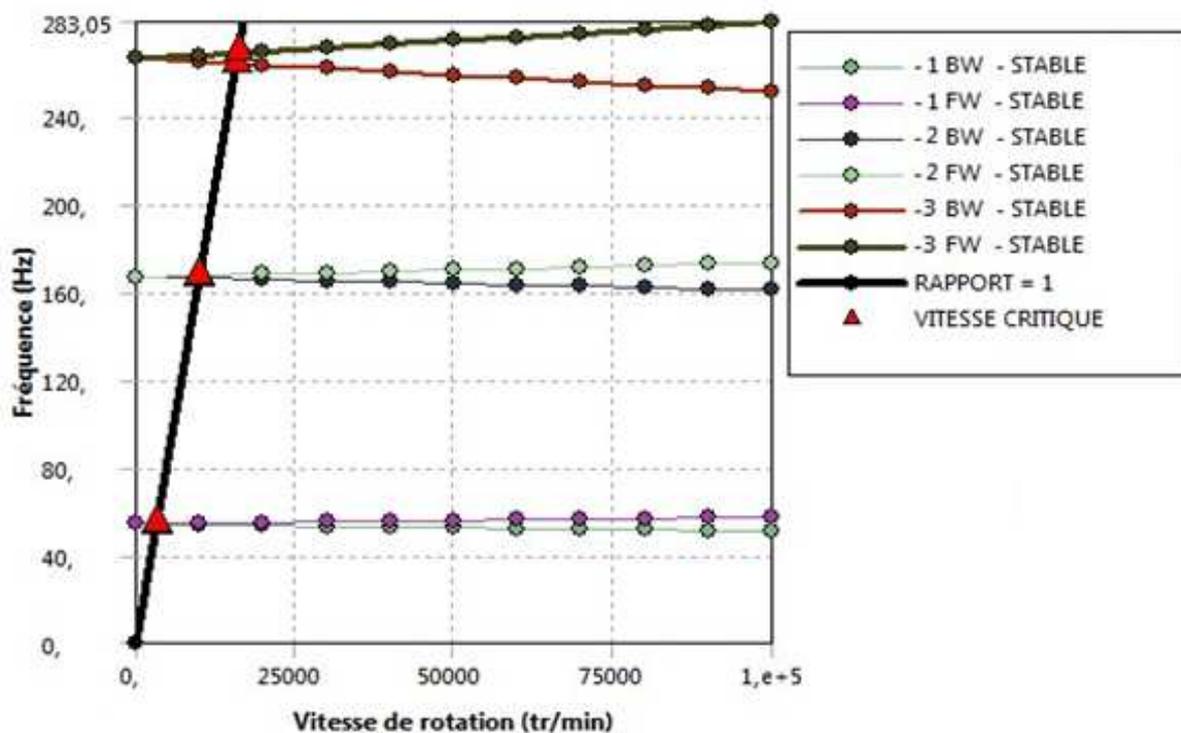


Figure 4.8: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour  $L/D=20$ .

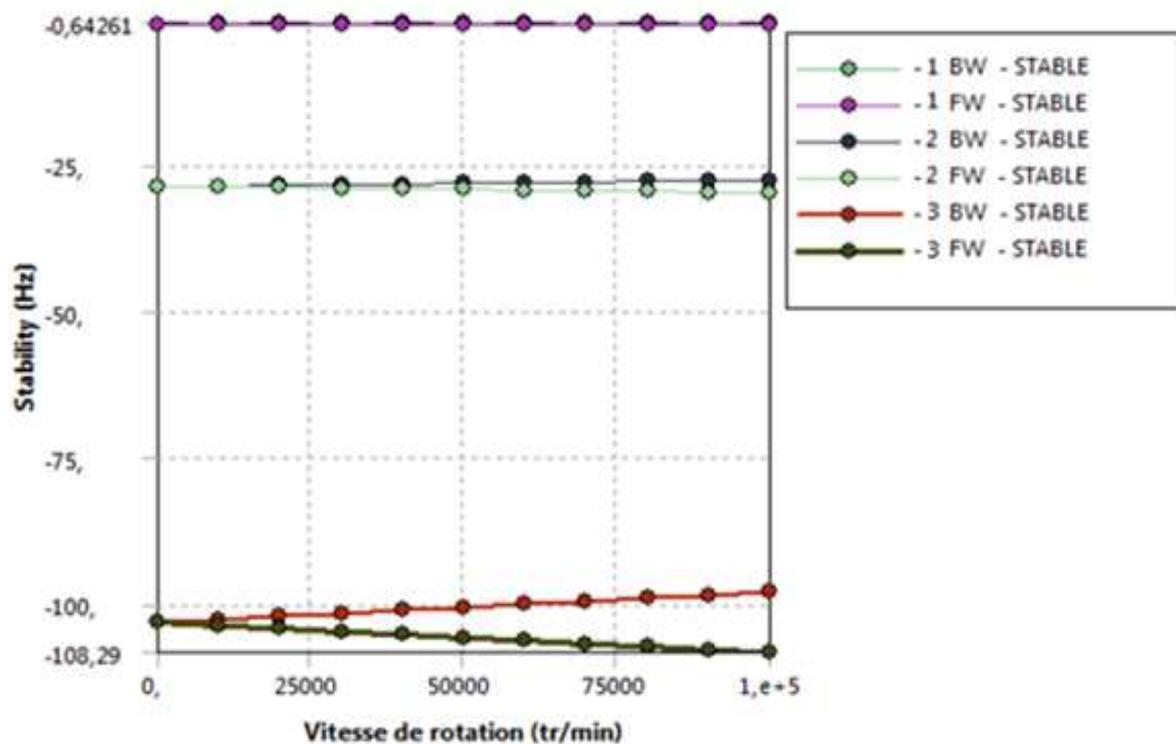


Figure 4.9: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour  $L/D=20$ .

Les deux figures 4.10 et 4.11 montrent la variation de la vitesse critique pour les trois premiers modes en fonction de rapport L/D. On constate que si le rapport L/D augmente la vitesse critique diminue et l'inverse juste.

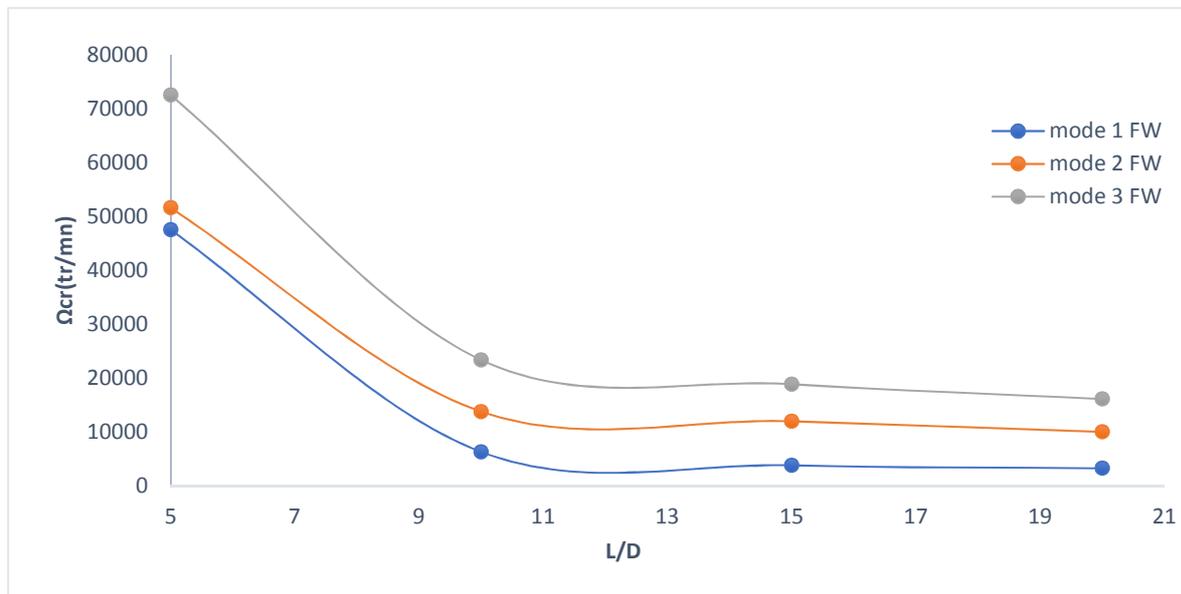


Figure 4.10 : Première vitesse critique  $\Omega_{cr}$  pour les trois premiers modes directs en fonction de L/D.

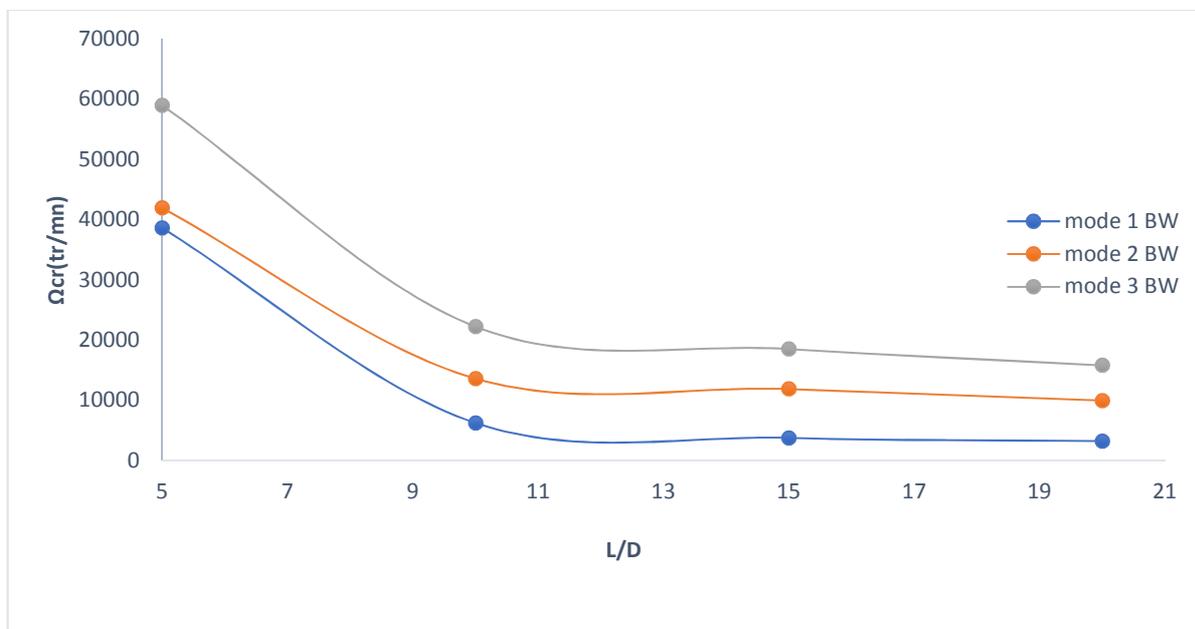


Figure 4.11 : Première vitesse critique  $\Omega_{cr}$  de les trois premiers modes inverse en fonction de L/D.

### 4.3.2 Influence des propriétés physiques de l'arbre sur les fréquences propres et les vitesses critiques

Dans le deuxième exemple, en gardant les mêmes propriétés géométriques de l'arbre et les mêmes conditions aux limites de l'exemple précédent, et on varie les propriétés physiques de l'arbre étudié dans l'exemple précédent voir le tableau 4.1.

Les matériaux	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	E (N/m <sup>2</sup> ) $\times 10^9$	$\nu$
<b>Acier</b>	<b>7800</b>	<b>210</b>	<b>0,285</b>
<b>Aluminium AU4G</b>	<b>2800</b>	<b>75</b>	<b>0,33</b>
<b>Cuivre</b>	<b>8900</b>	<b>100</b>	<b>0,29</b>
<b>Fonte</b>	<b>7100</b>	<b>100</b>	<b>0,33</b>

**Tableau 4.1** : Les propriétés physiques de chaque arbre étudié.

\* Les figures 4.12, 4.14, 4.16 et 4.18 montrent respectivement les Diagrammes de Campbell pour les trois premiers modes d'un arbre tournant avec différents matériaux. Les résultats obtenus montrent que les matériaux de l'arbre tournant influent sur les fréquences propres et aussi par conséquence sur les vitesses critiques de l'arbre tournant.

\* Les figures 4.13, 4.15, 4.17 et 4.19 donnent respectivement les Diagrammes de stabilité de chaque arbre. On constate que les matériaux et plus efficaces pour la stabilisation de rotor par classement sont : l'acier, l'aluminium, fonte, cuivre.

Pour les résultats obtenus, les caractéristiques physiques de l'arbre influent sur la stabilité.

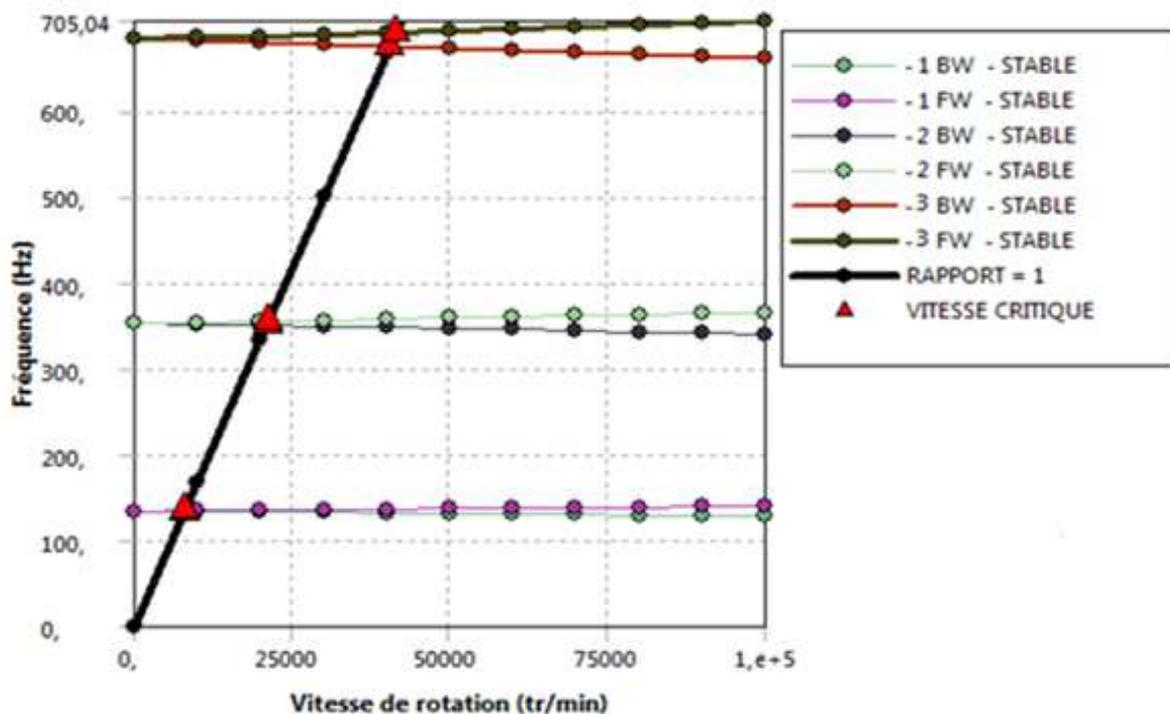


Figure 4.12: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre en acier.

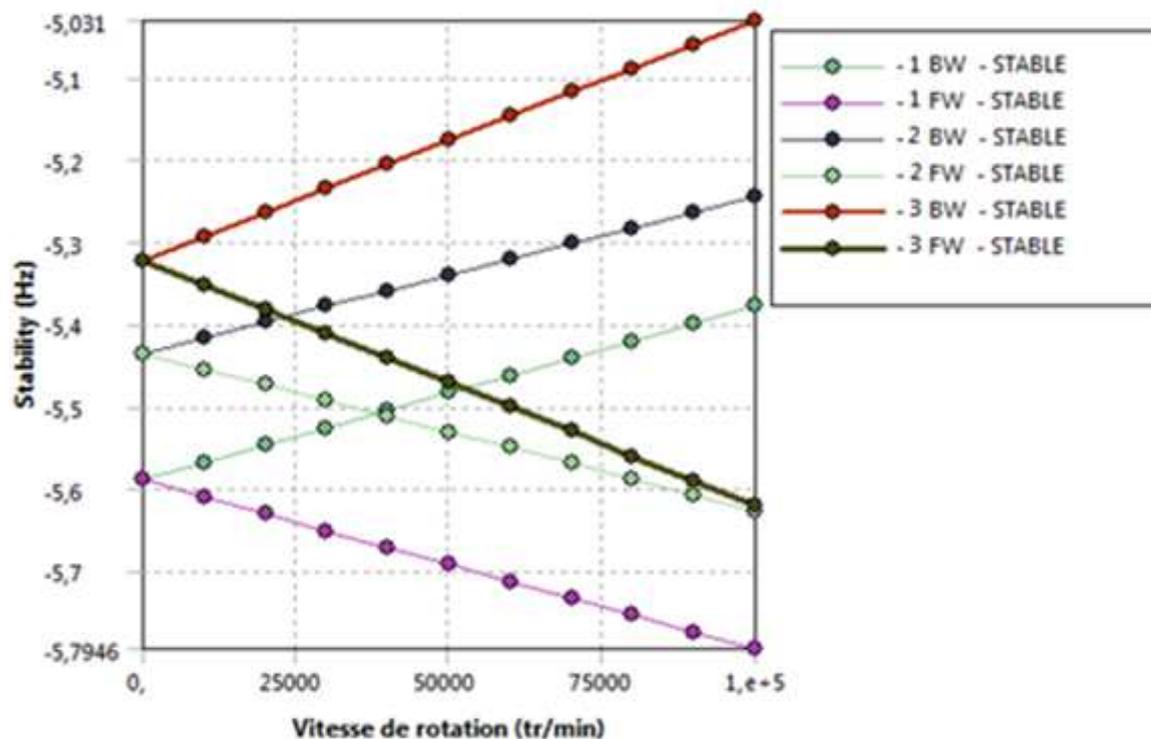


Figure 4.13: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour l'acier.

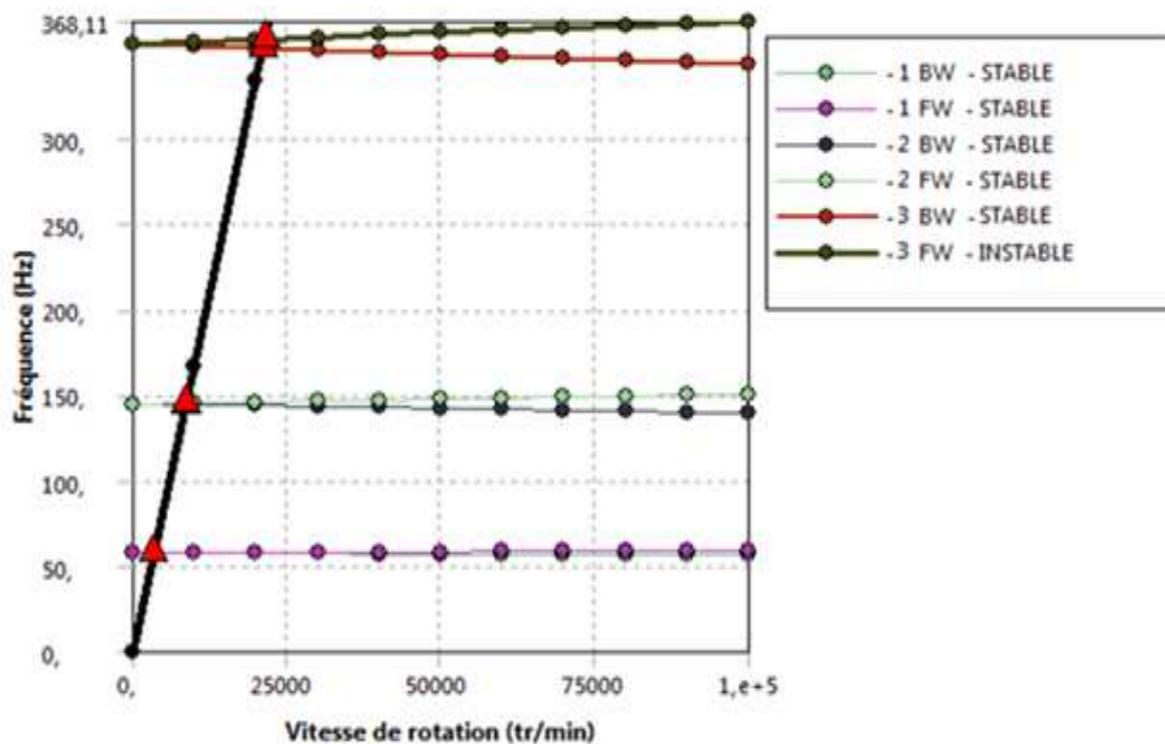


Figure 4.14: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre en aluminium.

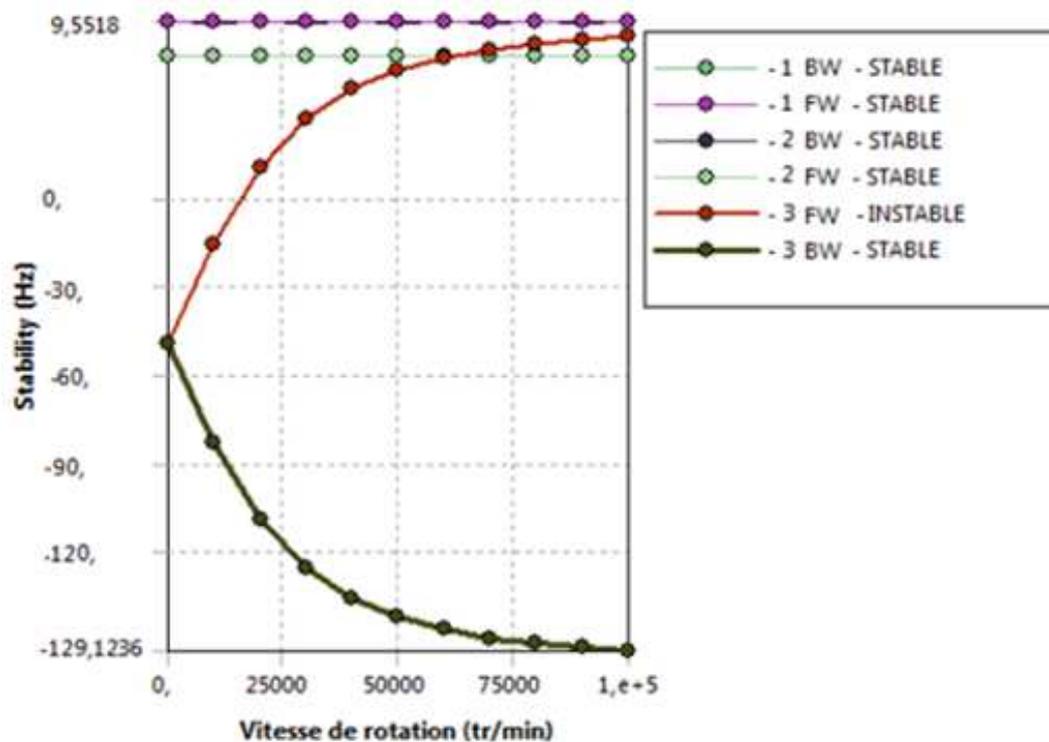


Figure 4.15: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en aluminium.

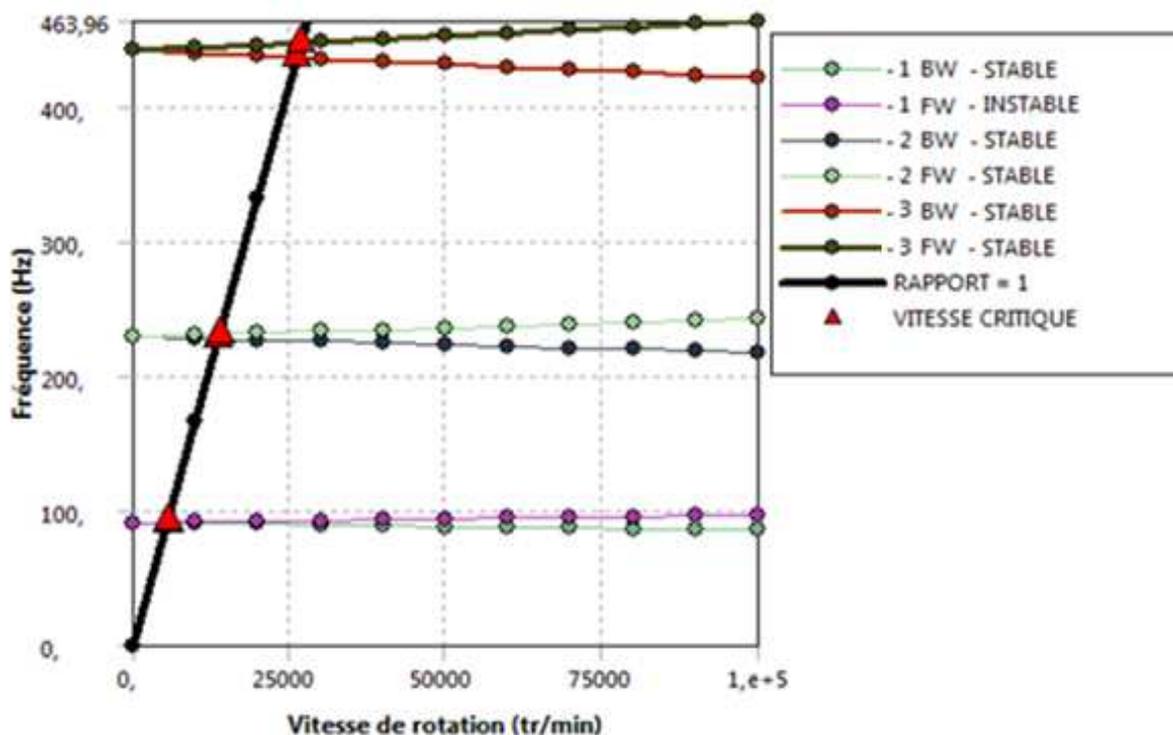


Figure 4.16: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre en cuivre.

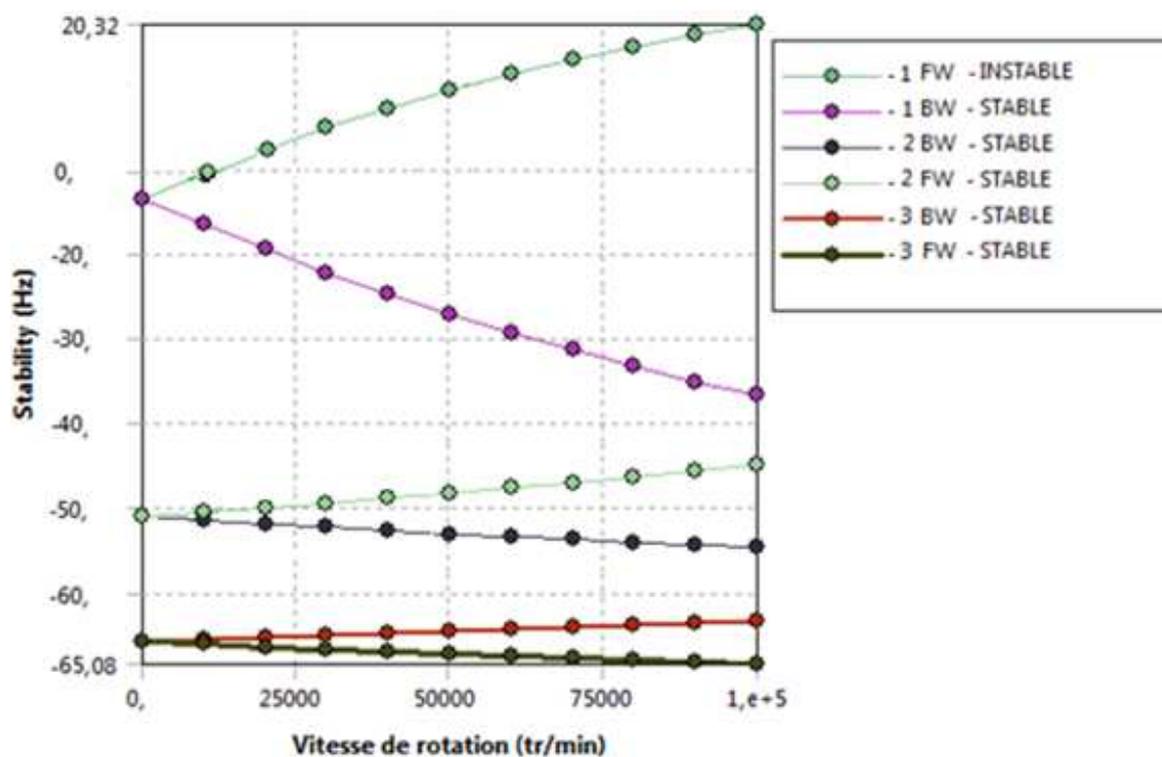


Figure 4.17: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en Cuivre.

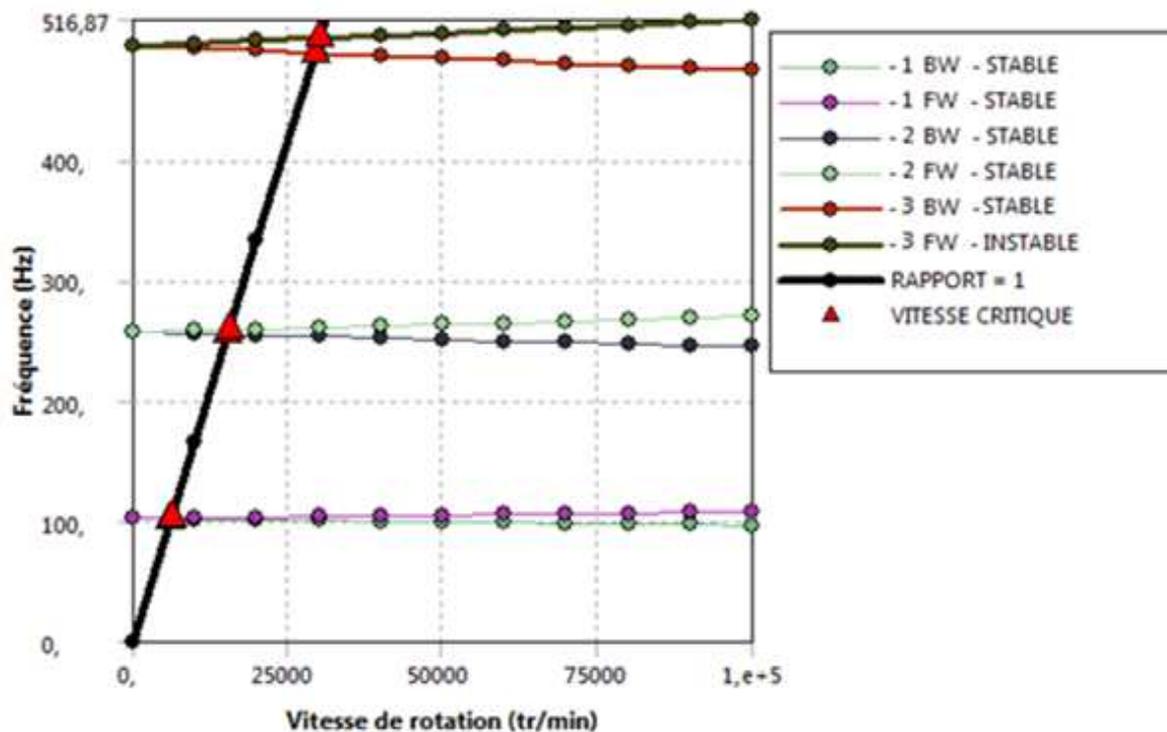


Figure 4.18: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre en fonte.

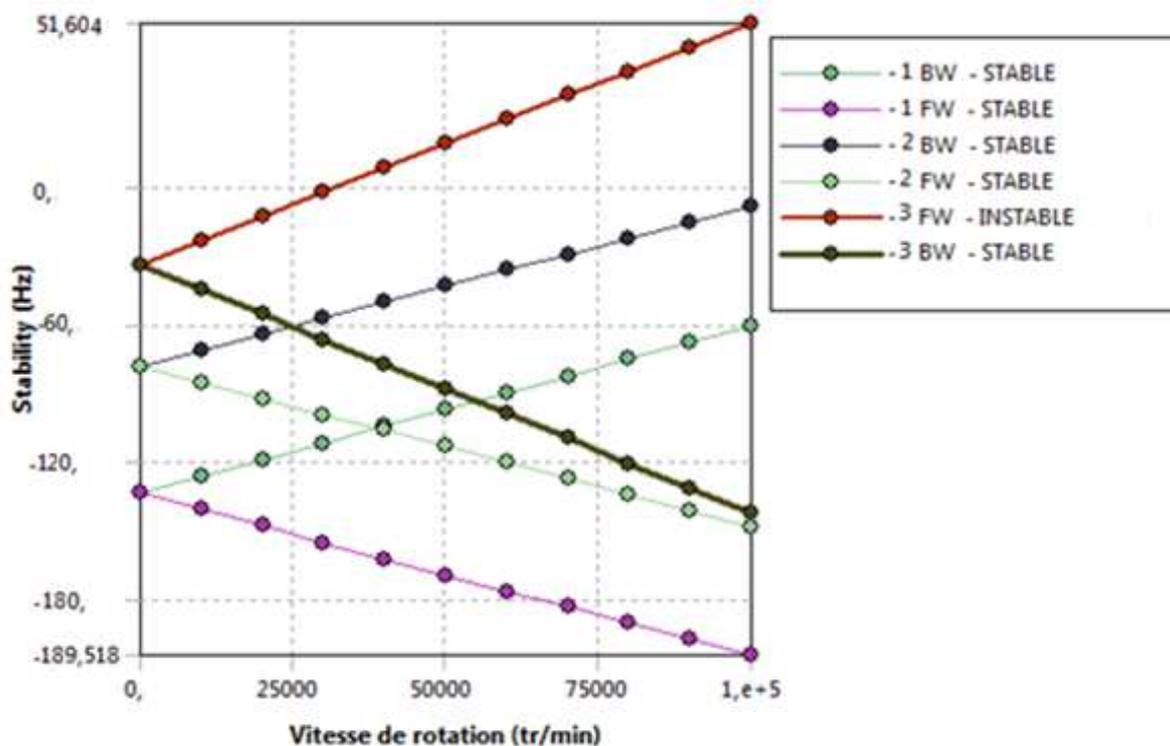


Figure 4.19: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre en fonte.

### 4.3.3 Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres

Dans cet exemple, on varie les conditions aux limites de l'arbre : (A-A) , (E-A) ; (E-L) , (E-E), en gardant les propriétés physiques de l'arbre de l'exemple précédent .

Les propriétés géométriques de l'arbre :  $L = 1,2$  m et  $D = 0,04$  m.

\* Les figures 4.20, 4.22, 4.24 et 4.26 montrent les diagrammes de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour différentes conditions aux limites.

\* Les figures 4.21, 4.23, 4.25 et 4.27 montrent les diagrammes de stabilité pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour différentes conditions aux limites (paliers rigides).

\* La figure 4.28 montre la variation de la fréquence  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre tournant.

D'après ces résultats, on remarque que les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres d'un arbre tournant, et par conséquent l'augmentation de la vitesse critique.

C'est-à-dire, si la rigidité de l'arbre tournant augmente, les valeurs des fréquences et les vitesses critiques augmentent aussi.

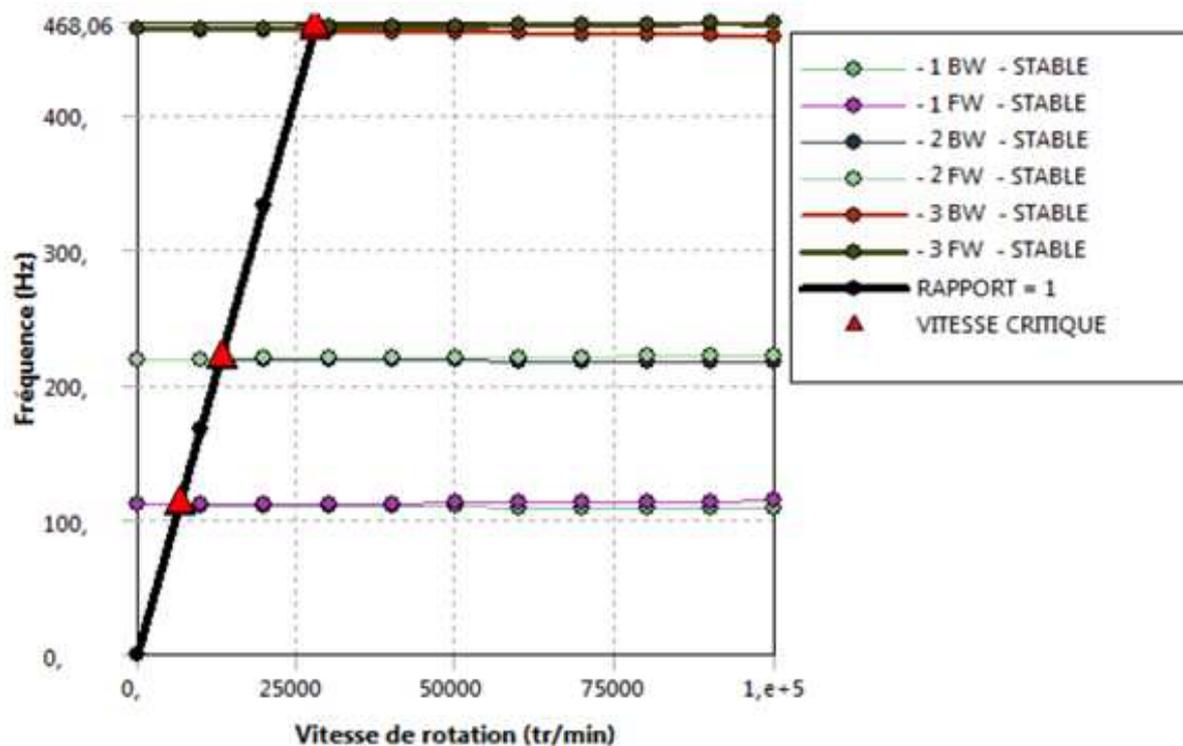


Figure 4.20: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre A-A.

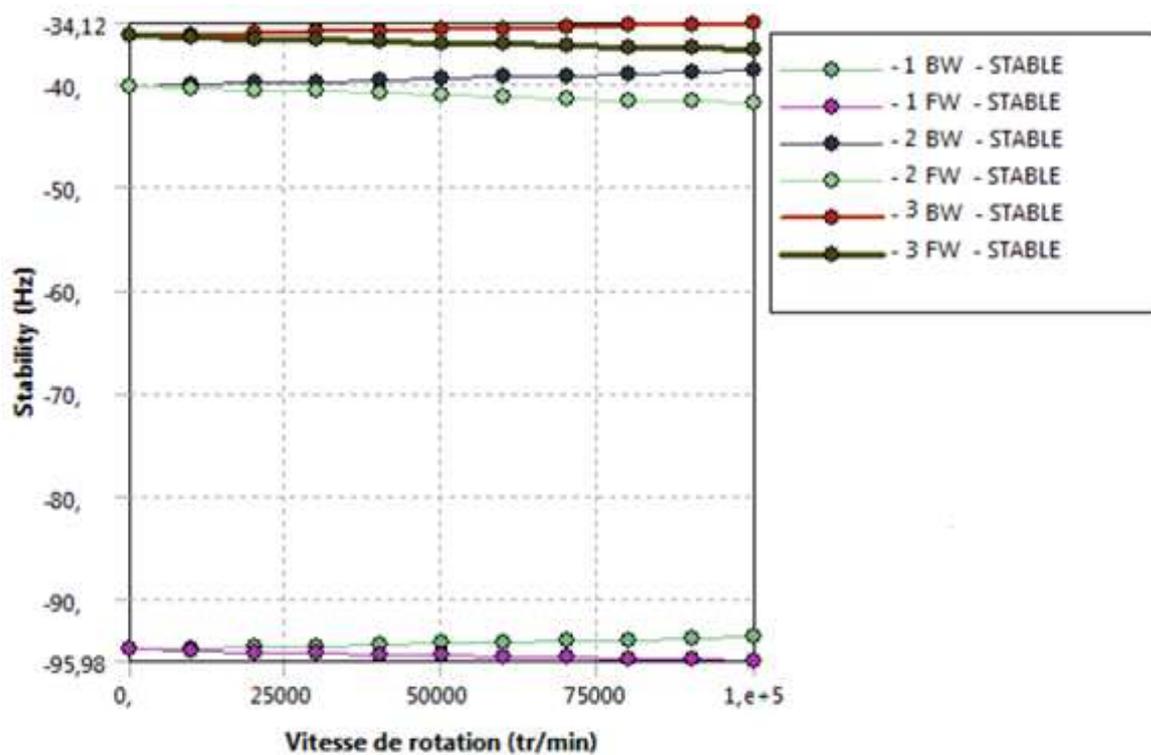


Figure 4.21: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre A-A.

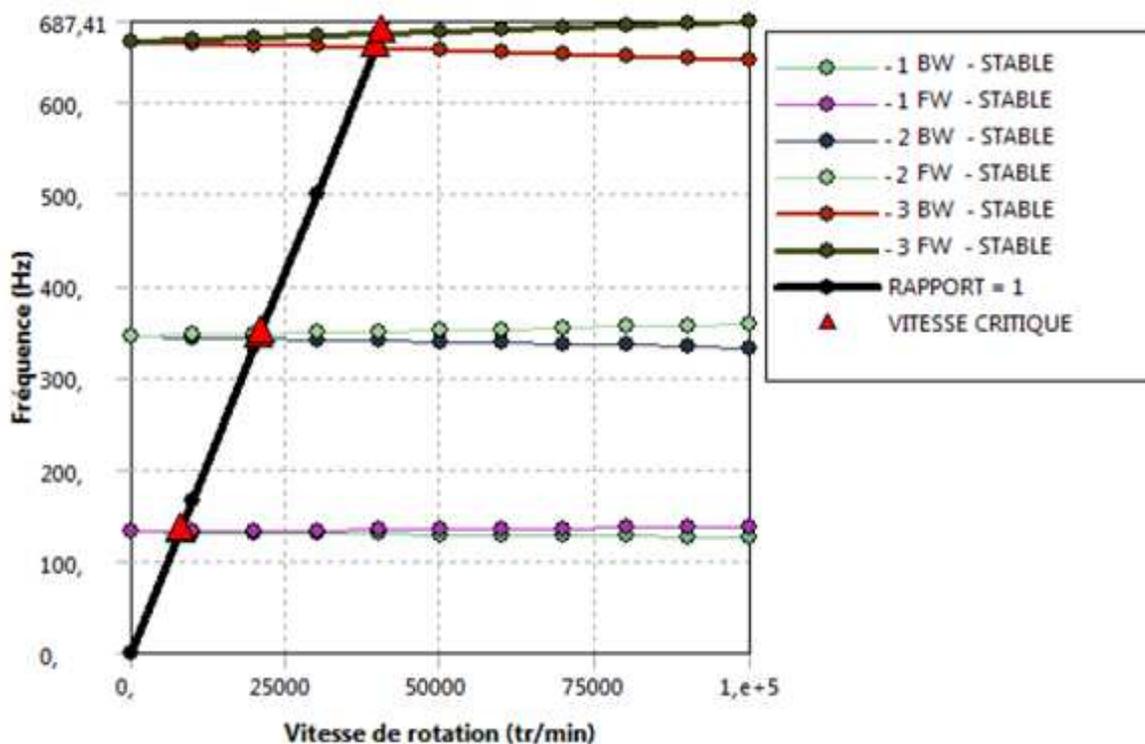


Figure 4.22: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre E-A.

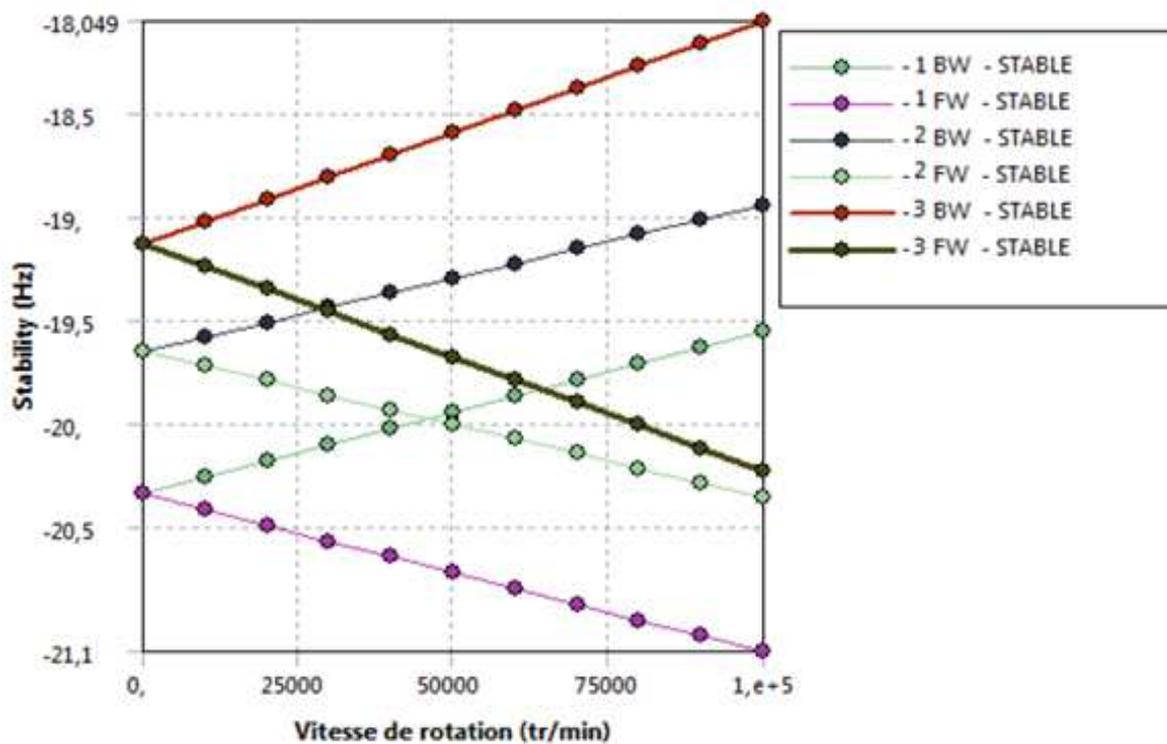


Figure 4.23: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-A.

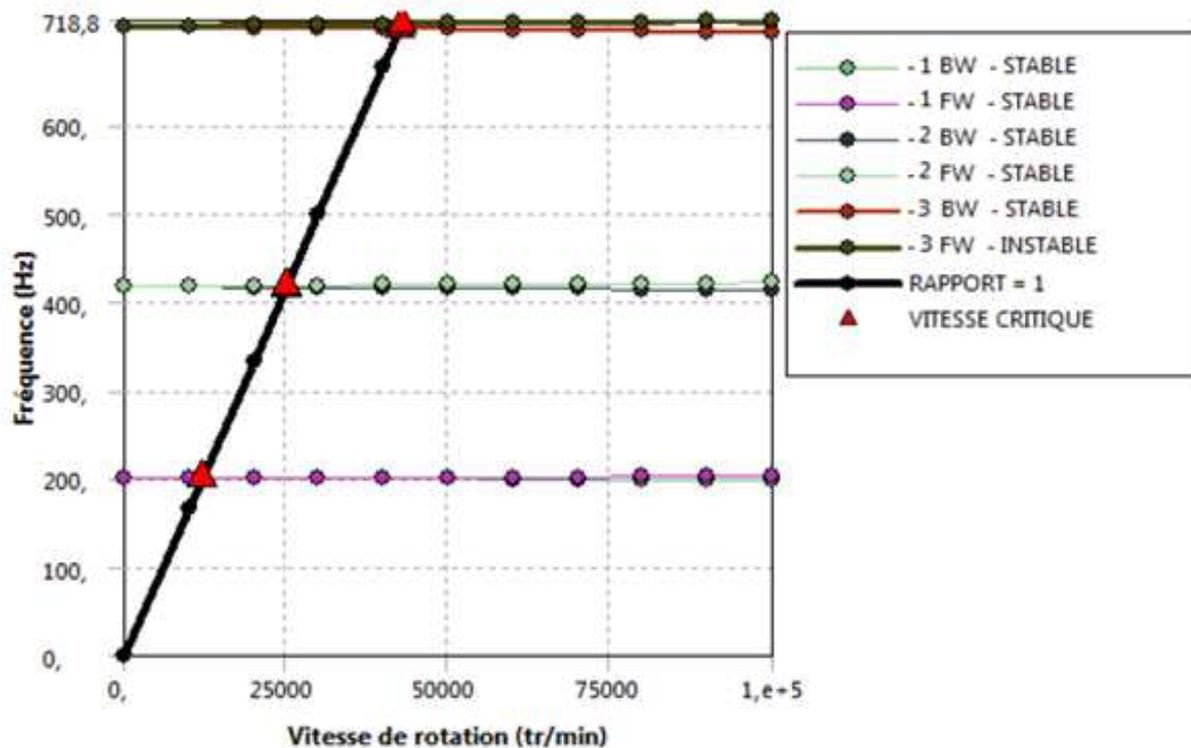


Figure 4.24: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre E-L.

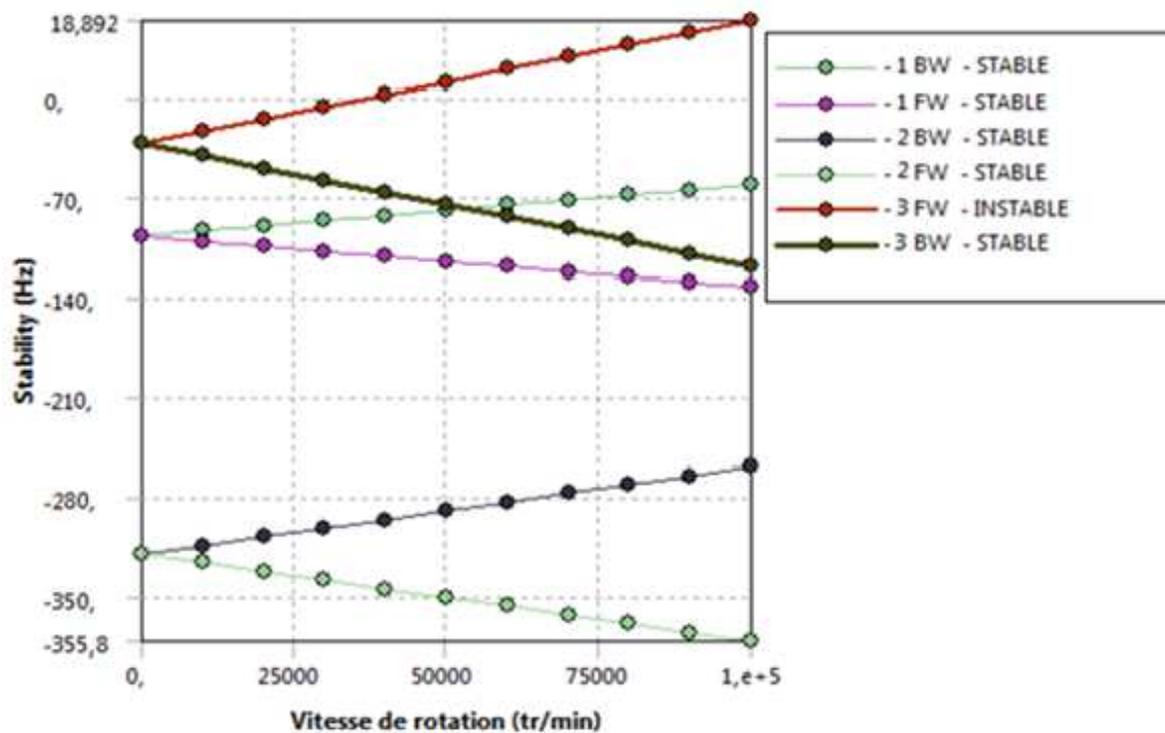


Figure 4.25: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-L.

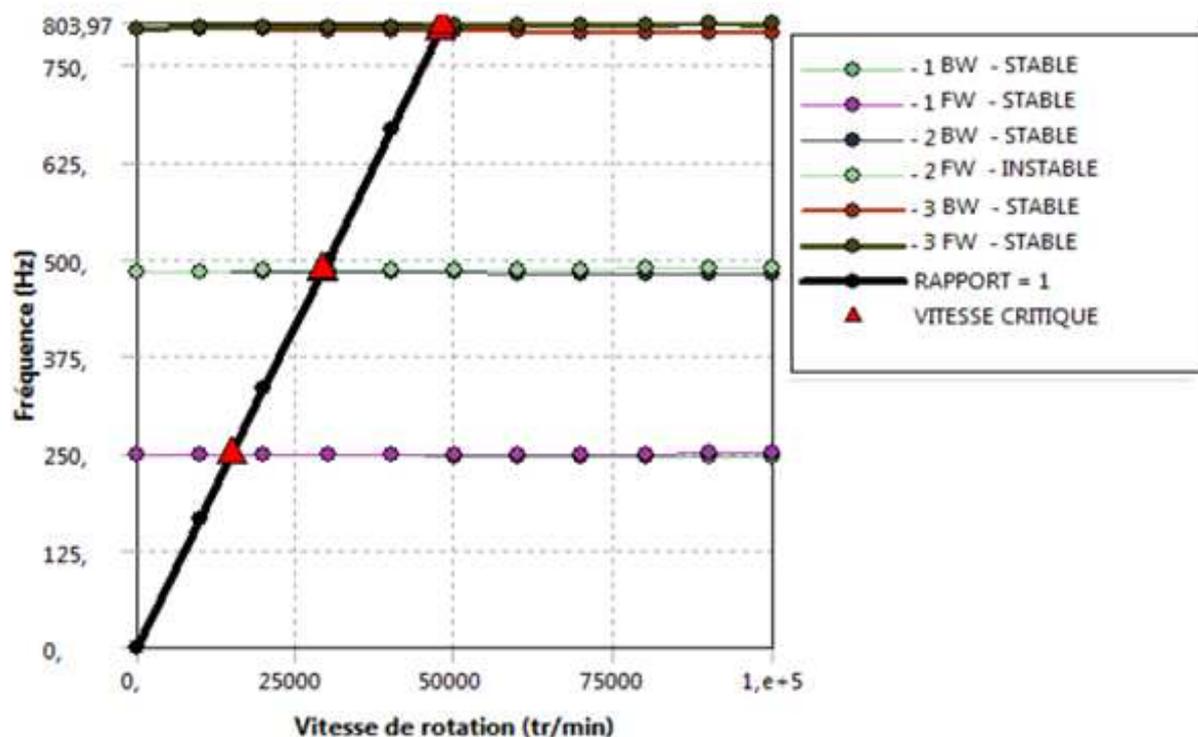


Figure 4.26: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour un arbre E-E.

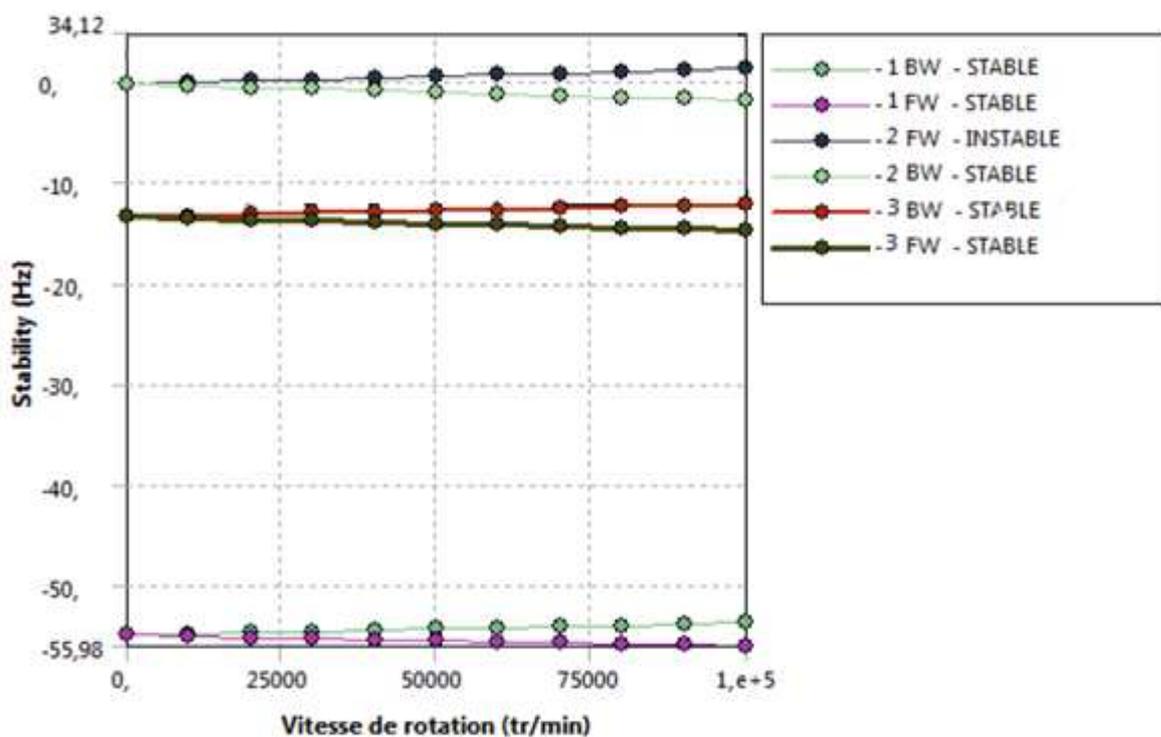
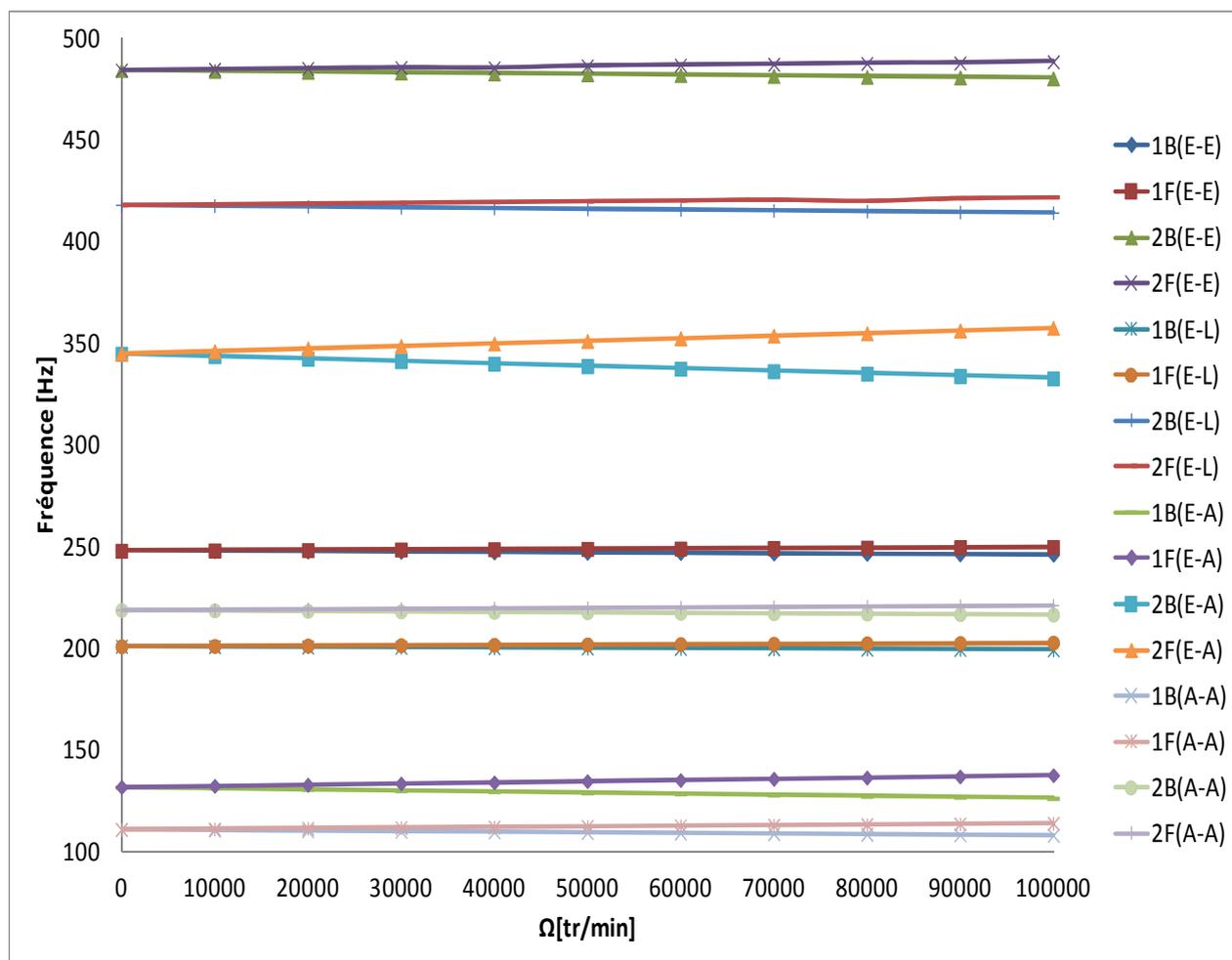


Figure 4.27: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour un arbre E-E.

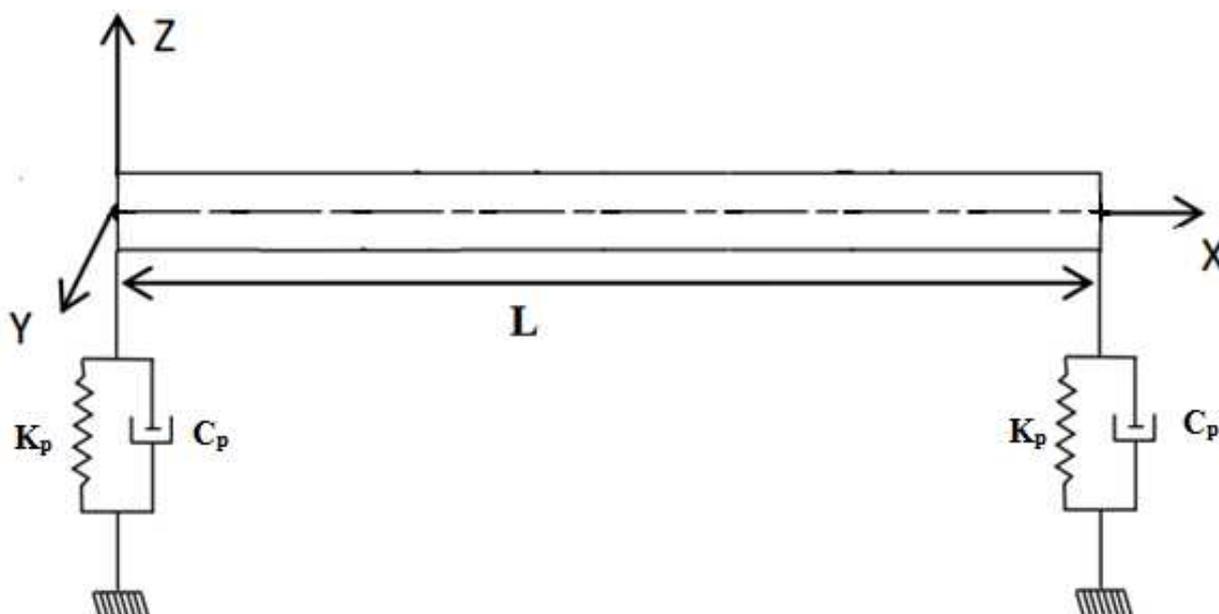


**Figure 4.28:** Deux premiers fréquence de flexion de l'arbre tournant pour différentes conditions aux limites et différentes vitesses de rotation.

#### 4.3.4 Influence des paliers flexibles amorties sur les fréquences propres

Les propriétés physiques et géométriques de l'arbre voir figure 4.29 sont les mêmes de l'exemple précédent, premièrement on varie les coefficients de raideurs  $K_p$  et on garde les mêmes coefficients d'amortissements  $C_p$  et deuxièmement on varie les coefficients d'amortissements  $C_p$  et on garde les mêmes coefficients de raiders  $K_p$ .

avec :  $K_{yy}=K_{zz}=K_p$  et  $C_{yy}=C_{zz}=C_p$



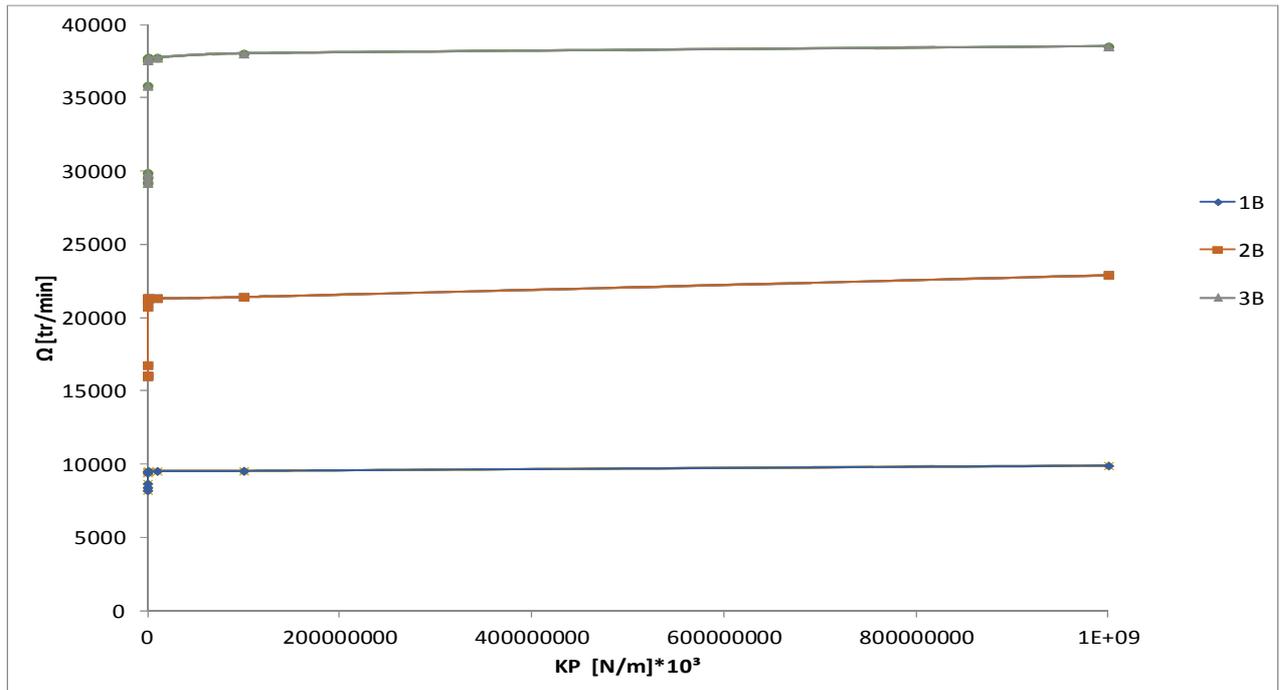
**Figure 4.29:** Arbre tournant supporté par deux paliers flexibles.

C'est-à-dire, à chaque fois la rigidité de l'arbre tournant augmente ses fréquences augmentes et par conséquence les vitesses critiques aussi augmentes, on constate ça bien lorsque ou prend deux valeurs de  $K_p$  plus élevés, les fréquences propres sont très proches ( presque identiques) et tendent vers les fréquences propres d'un arbre tournant bi-appui (paliers rigides), le cas où la valeur de  $K_p$  tend vers l'infinis.

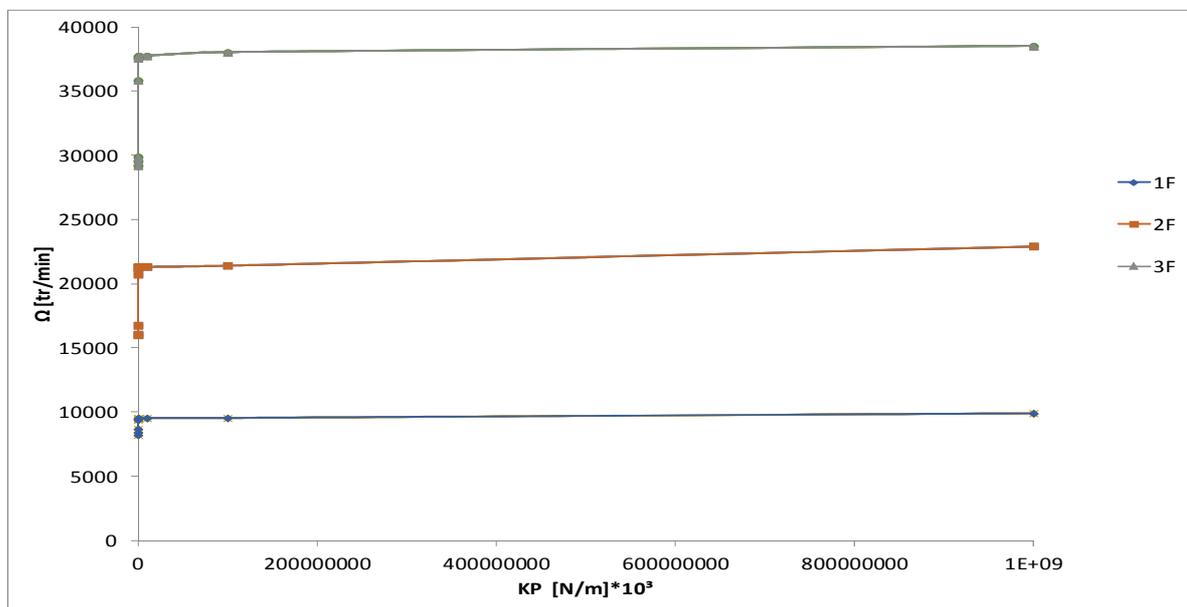
Donc  $K_p$  et  $C_p$  aussi ont une influence sur la stabilité du rotor.

Les figures 4.30 et 4.31 ,on remarque que lorsque la valeur de raideur  $K_p$  augmente les vitesses critiques augmentes jusqu'à la stabilisation des vitesses critiques et l'inverse juste.

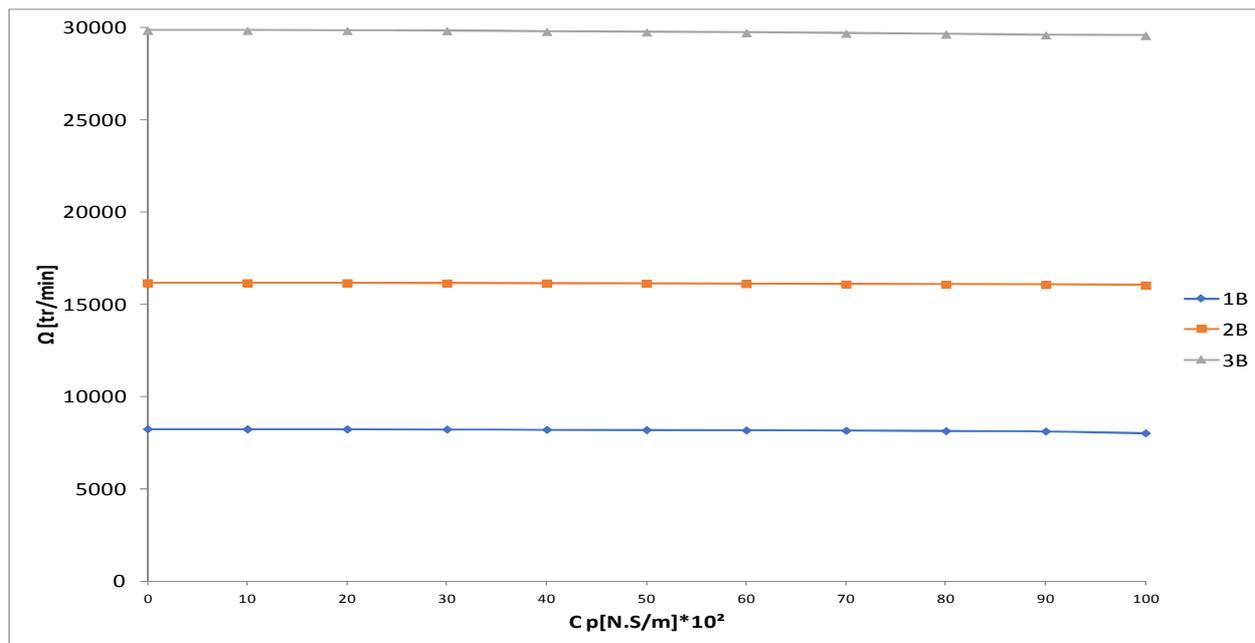
Les figures 4.32 et 4.33 ,on remarque que lorsque la valeur de coefficient d'amortissement  $C_p$  augmente les vitesses critiques diminues et l'inverse juste.



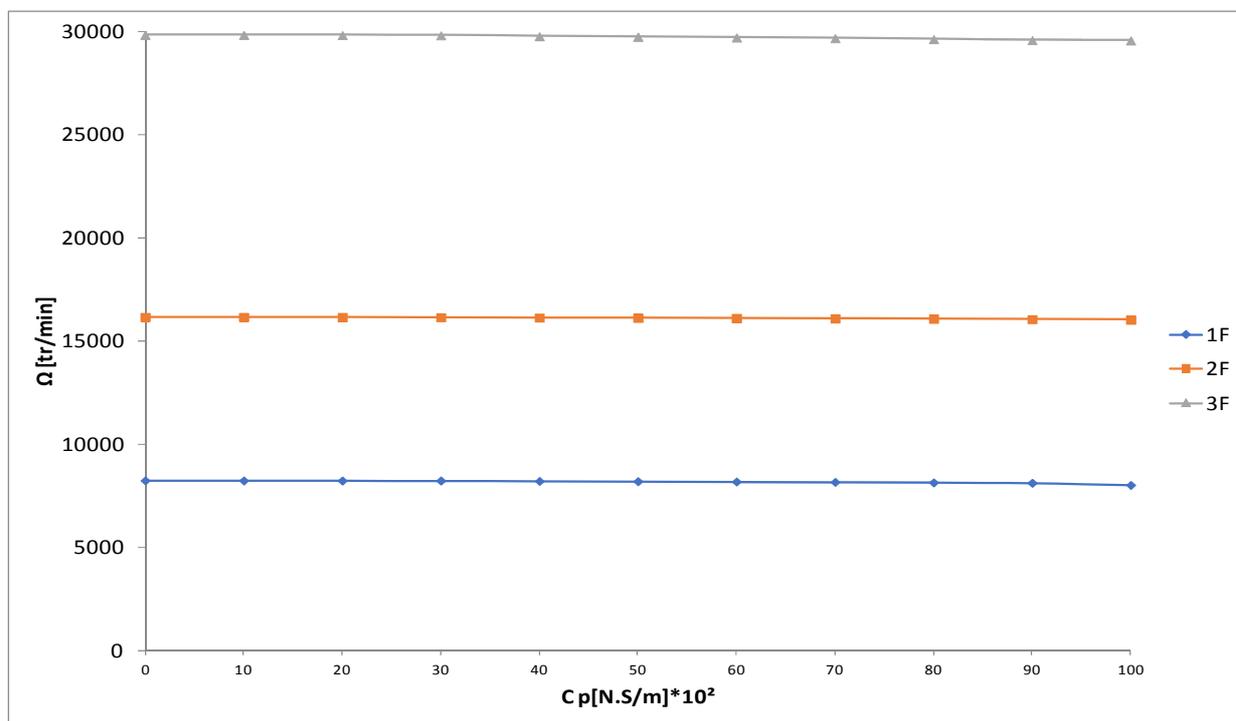
**Figure 4.30:** Trois premiers vitesses critiques de la précession inverse d'un arbre tournant en fonction des raideurs des paliers flexibles ( $C_p=1000$  N.s/m).



**Figure 4.31:** Trois premiers vitesses critiques de la précession direct d'un arbre tournant en fonction des raideurs des paliers flexibles ( $C_p=1000$  N.s/m).



**Figure 4.32:** Trois premiers vitesses critiques de la précession inverse d'un arbre tournant en fonction des amortisseurs des paliers flexibles ( $K_p=1,195*10^5$  N/m).



**Figure 4.33:** Trois premiers vitesses critiques de la précession direct d'un arbre tournant en fonction des amortisseurs des paliers flexibles ( $K_p=1,195*10^5$  N/m).

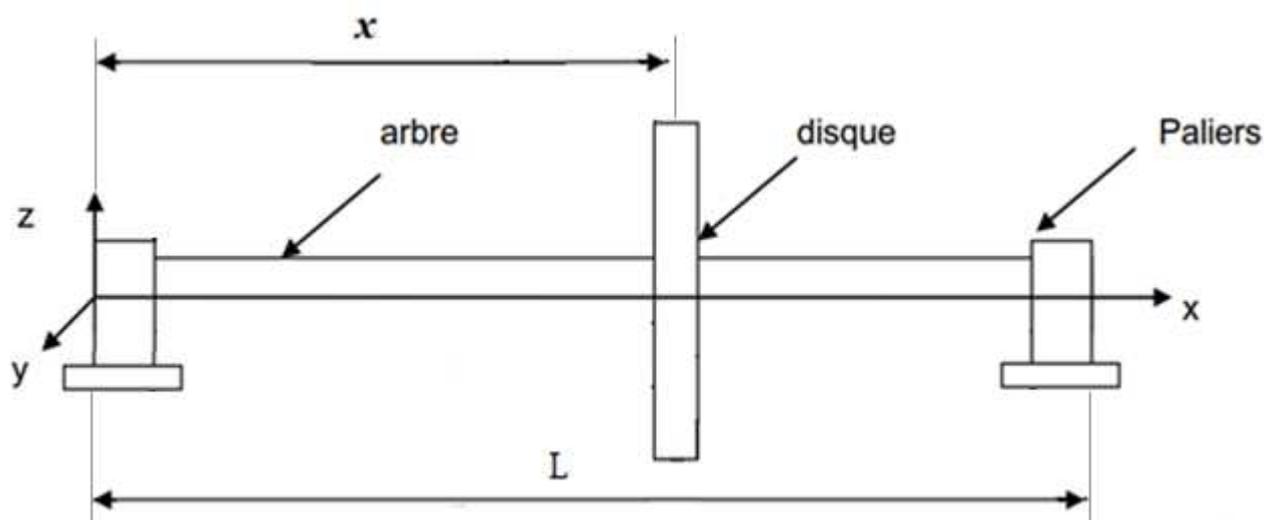
### 4.3.5 Influence de la position du disque sur les fréquences propres

Dans cette, partie les propriétés physiques de l'arbre :

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \rho = 7800 \text{ Kg/m}^3, \nu = 0.3.$$

#### Les propriétés géométriques :

- Arbre : Longueur  $L = 0,4\text{m}$ , Le diamètre  $D = 0,02\text{m}$ .
- Disque (déformable) : Diamètre extérieur =  $0,3\text{ mm}$  ; Epaisseur =  $0,03\text{m}$ .
- Les paliers:  $K_{yy}=K_{zz}=K_p=1,195 \cdot 10^5 \text{ N/m}$  ;  $C_{yy}=C_{zz}=C_p=360 \text{ N.s/m}$ .
- On varie la position du disque sur l'arbre tournant : ( $x/2, x/4, x/8$ ) (voir la figure 4.34)



**Figure 4.34 :** Système arbre-disque supporté par deux paliers.

Les figures 4.35, 4.37 et 4.39 présentent les diagrammes de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour différentes positions du disque sur l'arbre tournant. On constate que pour ces figures lorsque le disque s'approche du palier les fréquences de flexion augmente voir figure 4.41.

Les figures 4.36, 4.38 et 4.40 présentent les diagrammes de stabilité pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour différentes positions du disque sur l'arbre tournant, on constate que pour ces figures lorsque le disque s'approche de palier l'instabilité du rotor augmente.

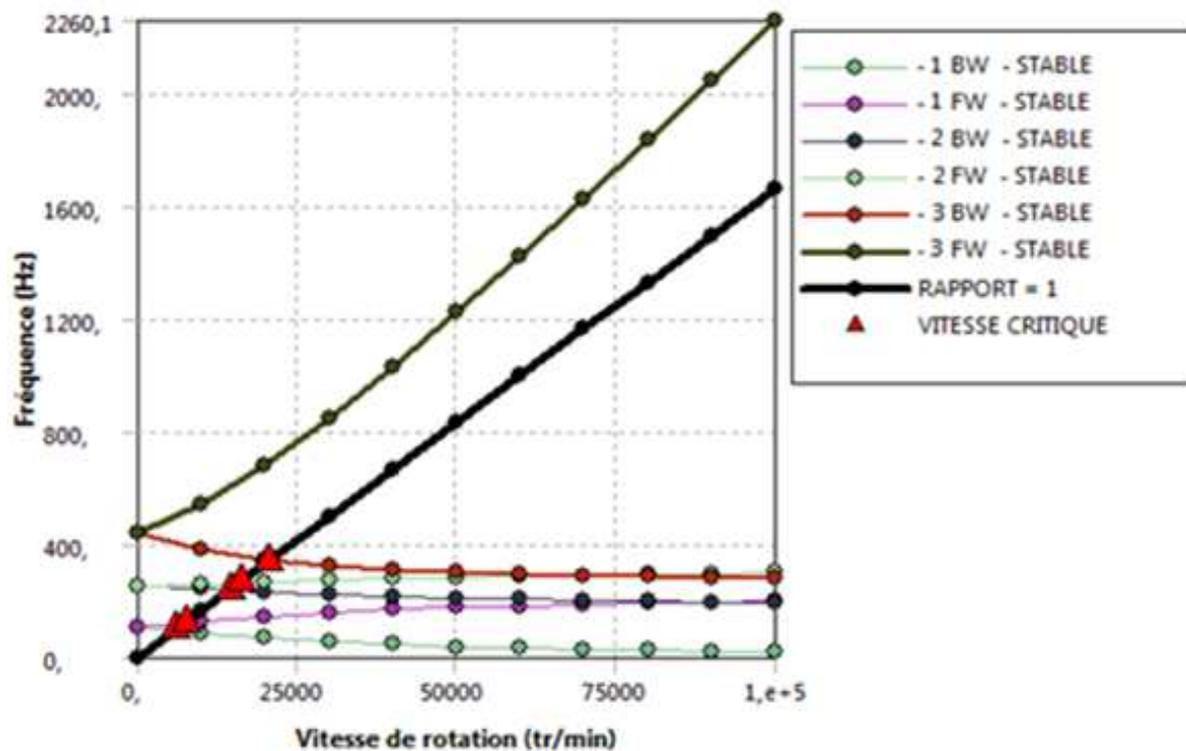


Figure 4.35: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour  $X=L/2$ .

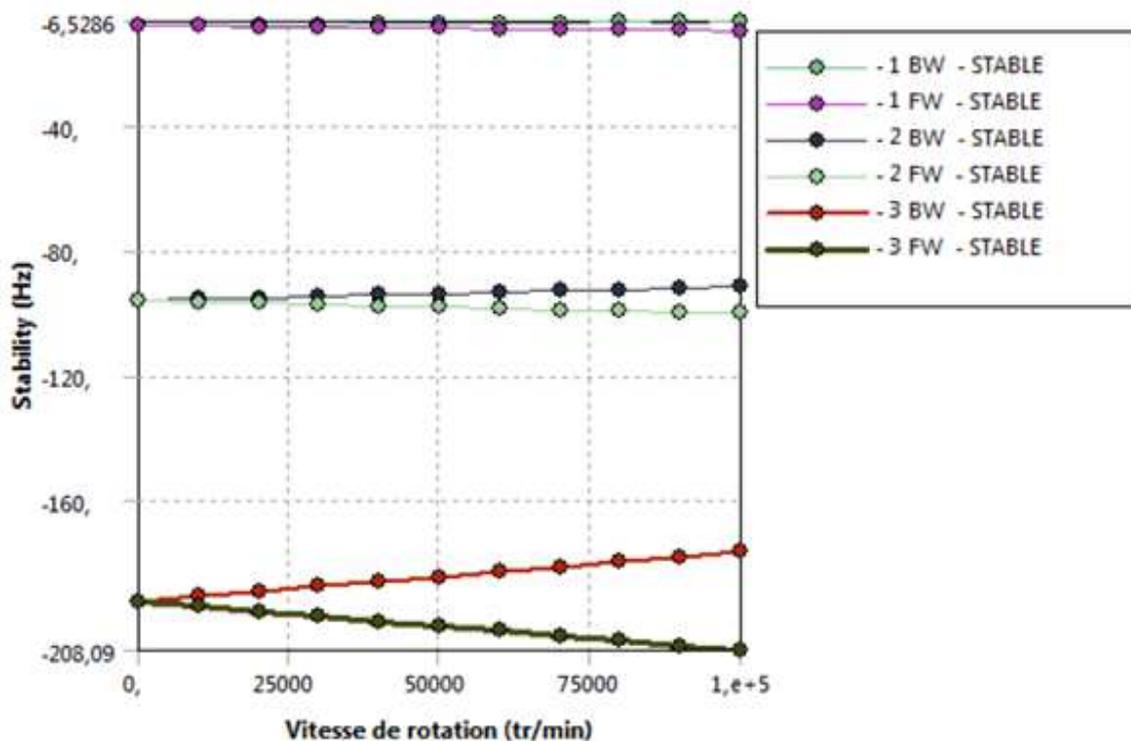


Figure 4.36: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour  $X=L/2$ .

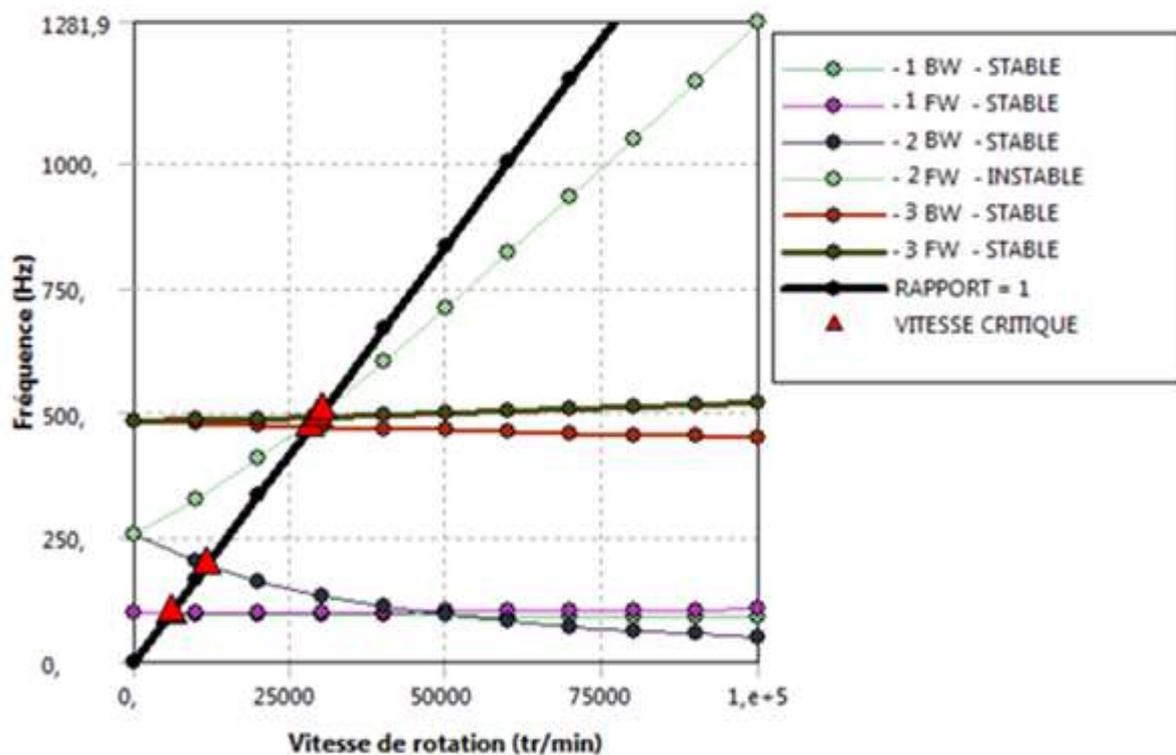


Figure 4.37: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour  $X=L/4$ .

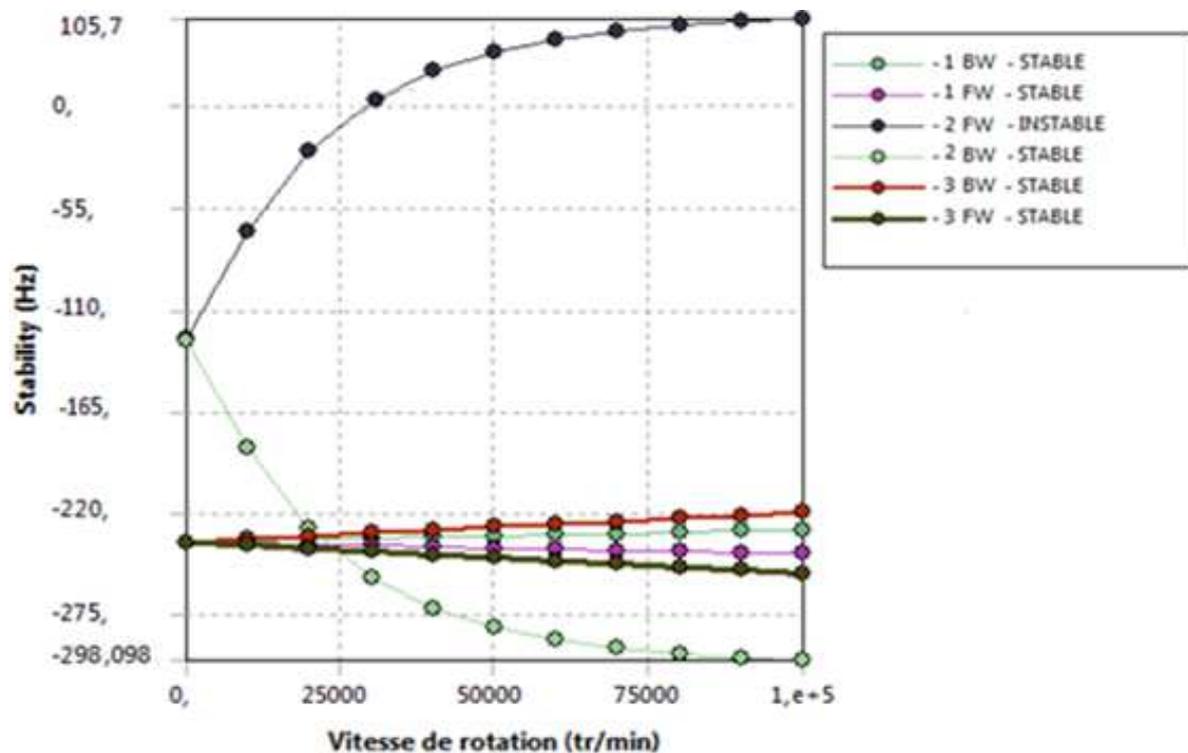


Figure 4.38: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes  $X=L/4$ .

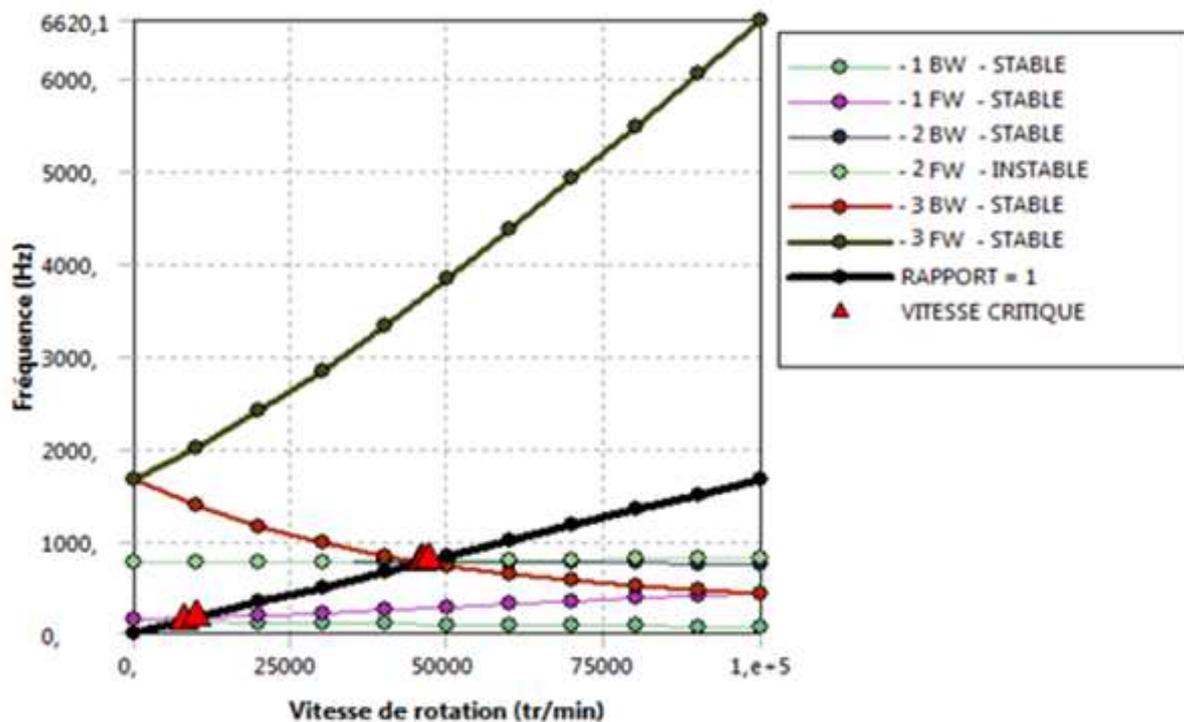


Figure 4.39: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes pour  $X=L/8$ .

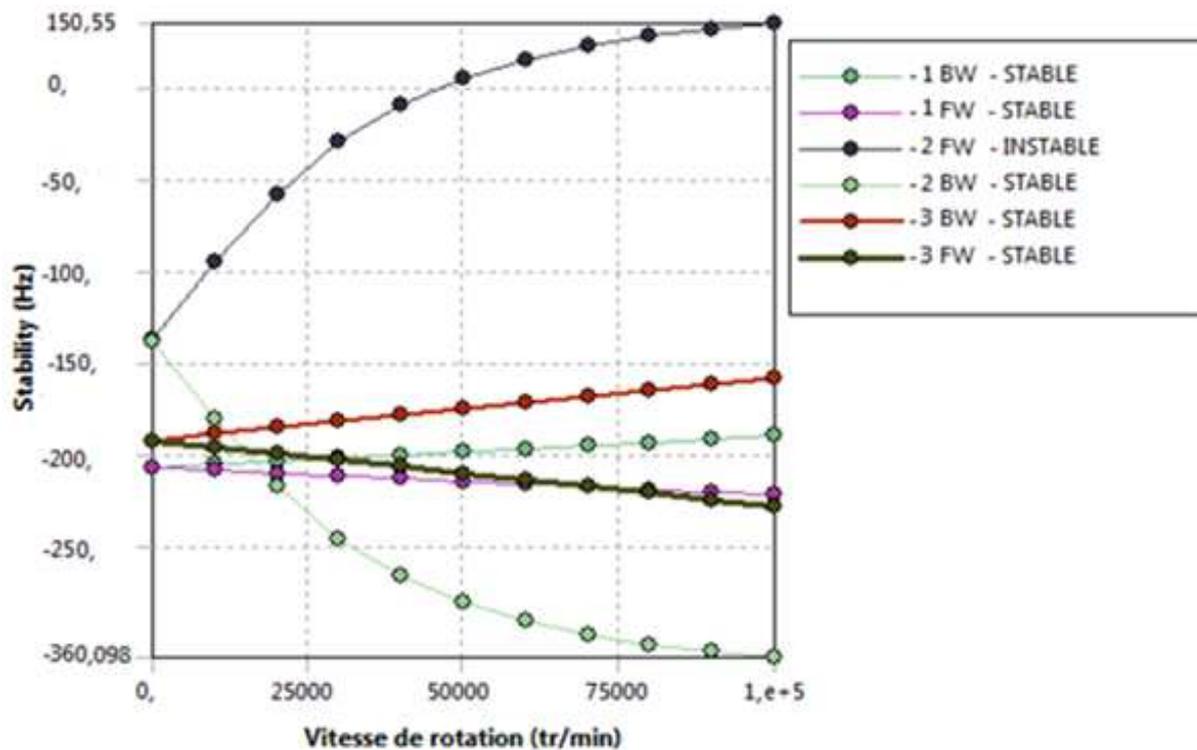
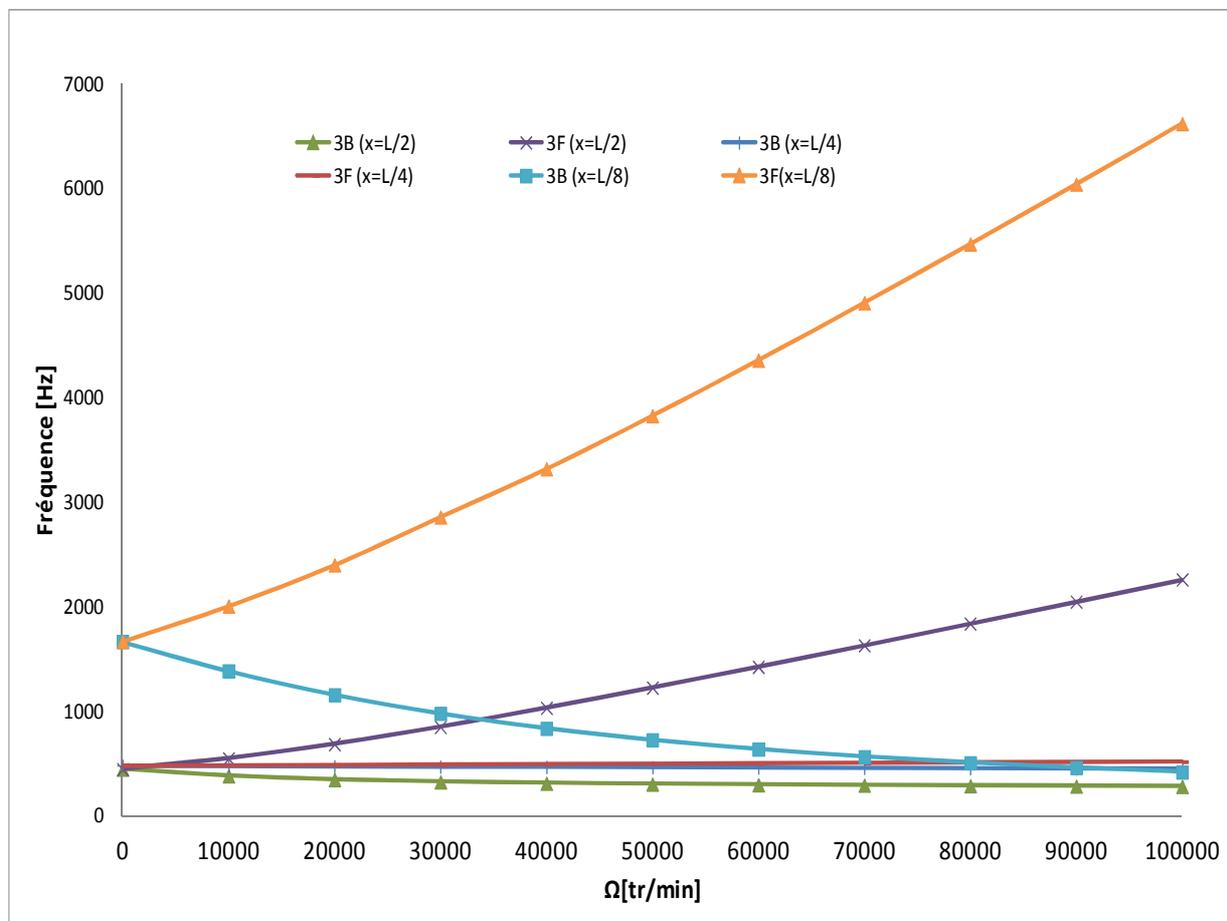


Figure 4.40: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour  $X=L/8$ .



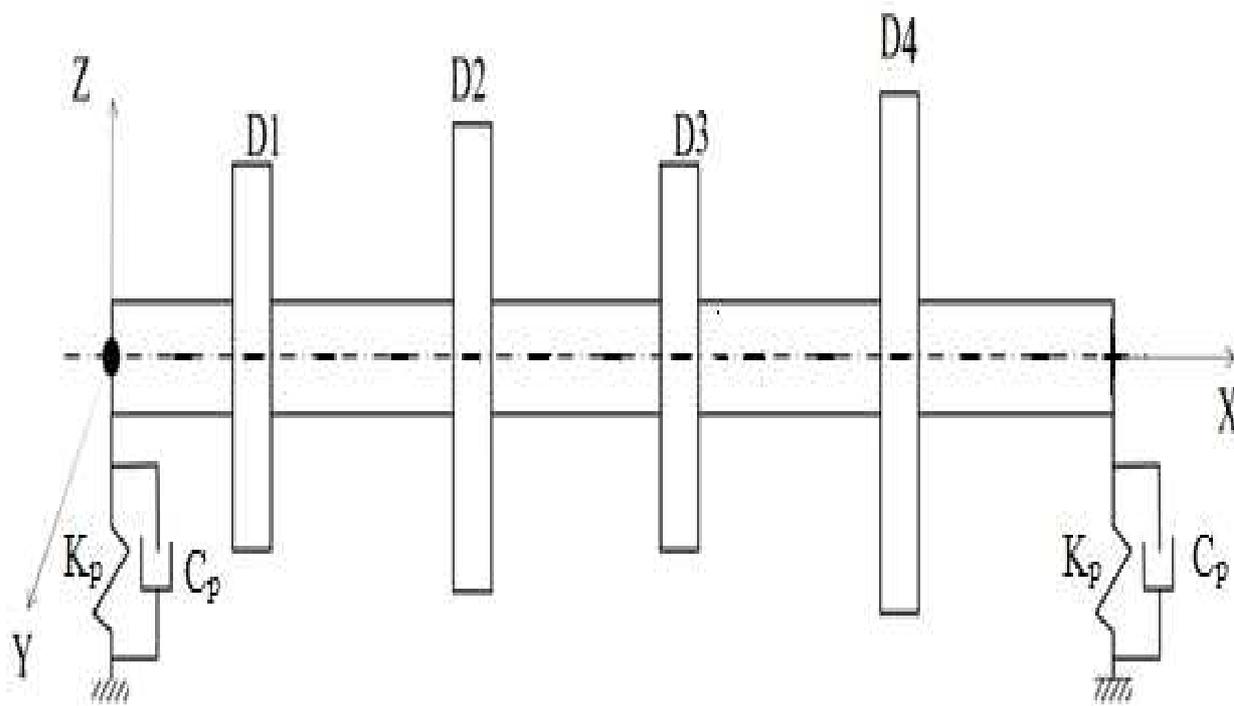
**Figure 4.41 :** Diagramme de Campbell de la troisième fréquence de flexion pour différentes positions du disque sur l'arbre.

#### 4.3.6 Influence des plusieurs disques sur les fréquences propres

Dans cet exemple, l'arbre supporté à 4 disques flexibles sur des paliers flexibles amortis et les mêmes propriétés physiques de l'exemple précédent (la position de disque).

Les propriétés géométriques de l'arbre avec plusieurs disques flexibles (D1,D2,D3,D4) montrés dans la figure 4.42 sont :

- Arbre :  $L_a = 1,2 \text{ m}$  ;  $D_a = 0,05 \text{ m}$ .
- Disque (D1,D3) :  $D_{\text{ext}} = 0,2 \text{ m}$  ;  $e = 0,05 \text{ m}$  ;  $D_{\text{int}} = 0,05 \text{ m}$ .
- Disque (D2) :  $D_{\text{ext}} = 0,5 \text{ m}$  ;  $e = 0,05 \text{ m}$  ;  $D_{\text{int}} = 0,05 \text{ m}$ .
- Disque (D4) :  $D_{\text{ext}} = 0,7 \text{ m}$  ;  $e = 0,06 \text{ m}$  ;  $D_{\text{int}} = 0,05 \text{ m}$ .
- Les paliers :  $K_{yy} = K_{zz} = K_p = 1,195 \cdot 10^5 \text{ N/m}$  ,  $C_{yy} = C_{zz} = C_p = 360 \text{ N.s/m}$



**Figure 4.42** : Arbre avec plusieurs disques supportés par deux paliers.

La figure 4.43 présente diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$ . On observe que les fréquences de flexion  $\omega$  et les vitesses critiques sont diminuées par rapport l'exemple précédent pour un seul disque.

On remarque que les plusieurs disques sur l'arbre ont une influence très importante sur l'instabilité du rotor voir la figure 4.44.

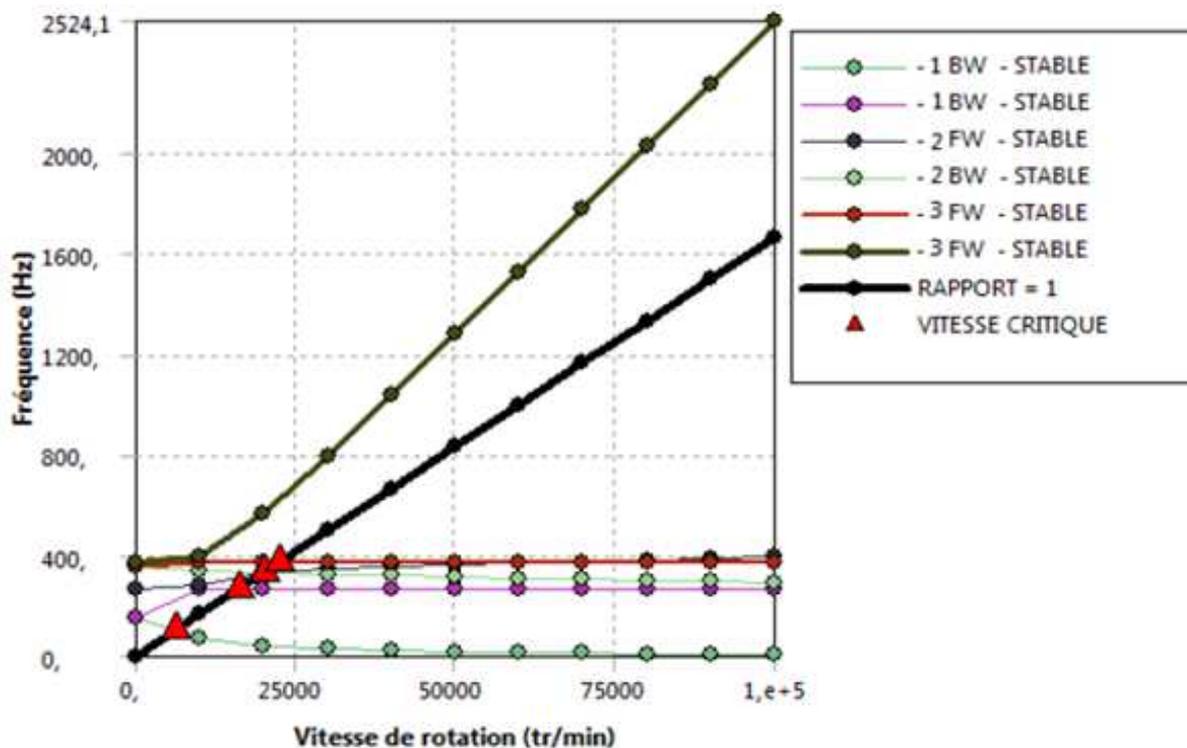


Figure 4.43: Diagramme de Campbell pour les trois premiers modes de flexion  $\omega$  pour plusieurs disques.

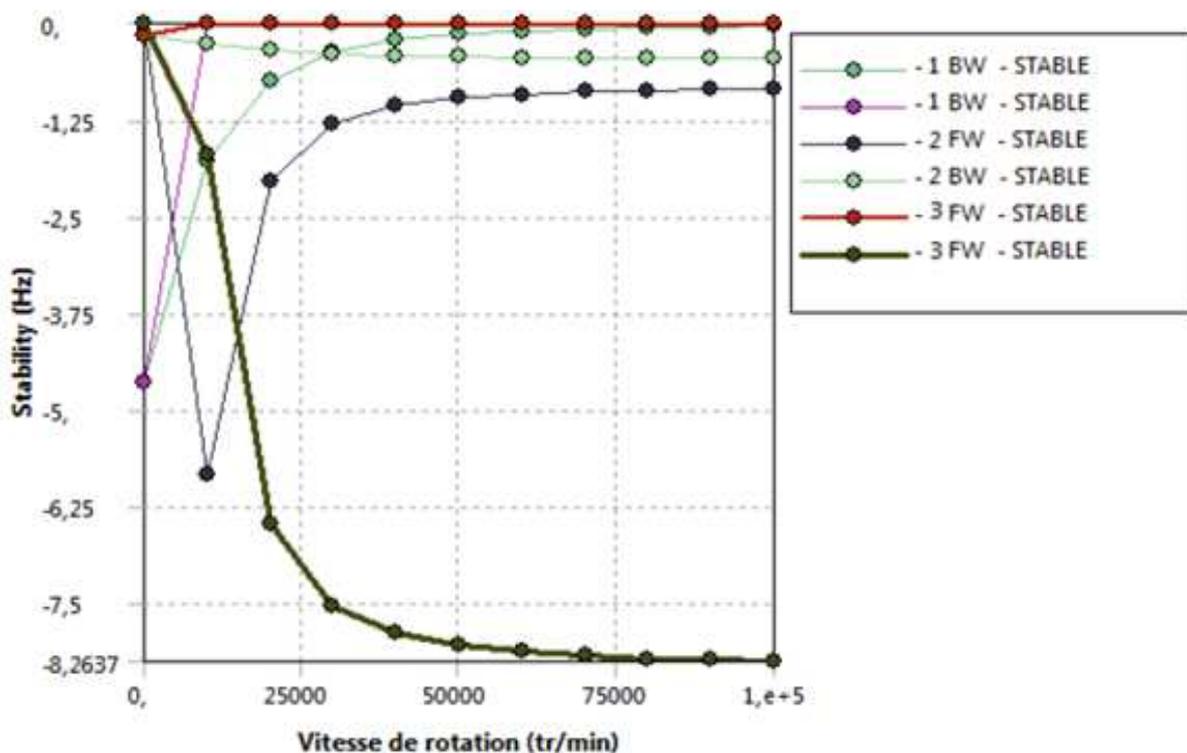


Figure 4.44: Diagramme de stabilité pour les trois premiers modes pour plusieurs disques.

## Conclusion

Ce mémoire est une initiation à l'étude de l'instabilité des rotors. Notre objectif est de comprendre le phénomène liés à la dynamique des rotors, et pour déterminer les fréquences propres et les vitesses critiques d'un rotor par logiciel Ansys Workbench . On a présenté les éléments constituant un rotor et qui sont : l'arbre, le disque et les paliers.

L'application de l'équation de Lagrange aux différentes énergies et aux travaux virtuels dues aux paliers, nous donne les équations du mouvement. La modélisation et la simulation sont faites par logiciel Ansys en utilisant un modèle 3D. Avec plusieurs exemples ont été traités pour déterminer l'influence des différents paramètres géométriques et physiques des arbres tournants sur paliers (rigides ou flexibles) amortis et non amortis. Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

1. Les paramètres géométriques de l'arbre représenté pour rapport L/D influent sur le comportement vibratoire et la stabilité des arbres tournants.
2. Les paramètres mécaniques (les caractéristiques mécaniques) influent sur le comportement vibratoire et la stabilité des arbres tournants.
3. La maîtrise de comportements vibratoires nécessite une prévision des caractéristiques d'amortissement des rotors, en particulier l'amortissement des paliers. Cette prédiction est fondamentale dans la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages sécurisées en termes de vitesses de rotation.
4. Les raideurs des paliers influent sur le comportement vibratoire et la stabilité du rotor.
5. Les caractéristiques dynamiques du système (arbre+disque+paliers) sont influencées sensiblement en changeant la position du disque sur l'arbre.
6. Caractéristiques dynamiques d'un arbre tournant avec plusieurs disques sont influencées par le nombre de disque, et ces dernières influent sur le comportement vibratoire et la stabilité du rotor.

## **Références bibliographiques**

- [1] W.J.M.Rankin (1869) “on the centrifugal force of rotating shaft” engineer, Vol.27, pp.249-249.
- [2] H.Lamb and R.Southwell “the vibration of spinning disk” Proc.of the royal society of London, vol 99.pp.272-280,1921.
- [3] G.Genta and A.Tonoli “a harmonic finite element for analysis of flexural, torsional, and rotordynamic behaviour of discs” journal of sound and vibration, vol, 196, no1, pp.19-43, 1996.
- [4] John F.Ward “the dynamic response of flexible rotor blade concentrated for moving from tiptoroot” national aeronautics and space administration. Washington. D.C.Septem BFR 1969, document NASA TN D-5410.
- [5] K.Sinhas “dynamic characteristics of a flexible bladed rotor with coulomb damping due to tip rub” journal of sound and vibration, vol 273,2004.pp.875-919.
- [6] V.L.Gulaev, I.L.Solv’ev and S.N.Khudo “precession vibration of the two blade rotor elastic weighlyless shaft in compound rotation” journal of strength of materials, vol.34.No2,2002.
- [7] V.L.Gulaev and P.P.Lizunov “vibration of the systems of solid and deformable bodies in compound motion” Vyshcha, Shkola, Kiev (1989).
- [8] V.L.Gulaev, I.L.Solv’ev “precession vibration and resonance of composite shells in compound rotation” Prikl mekh, 35,No 6.74-81 (1999).
- [9] A.Wright, N.Kelley and R.Osgood “validation of a model for a two bladed flexible rotor system: progress to data” national wind technology center, national review able energy laboratory . A.IAA/ASME wind energy symposium Rena, Nevada 11,14, 1999.
- [10] B.O.AL-Bedoor “dynamic model of coupled shaft torsional and blade bending de performance in rotor” journal of computer methods in applied mechanic and engineering. 169(1999) 177-190.
- [11] P.Hughes “space craft attitude dynamics” Wiley, New York 1986
- [12] P.W.Fortesue and J.Starck “spacecraft systems engineering” Wiley, New York 1991
- [13] F.F.Ehrich “handbook of rotordynamic” namics, Krieger publishing company 1999
- [14] H.Jeffcott “the lateral vibration of loaded shafts in the neighbour hood of wirling speed-the effect of want of balance” Phil.Mag, vol 37.no 6.pp.304-314,1919

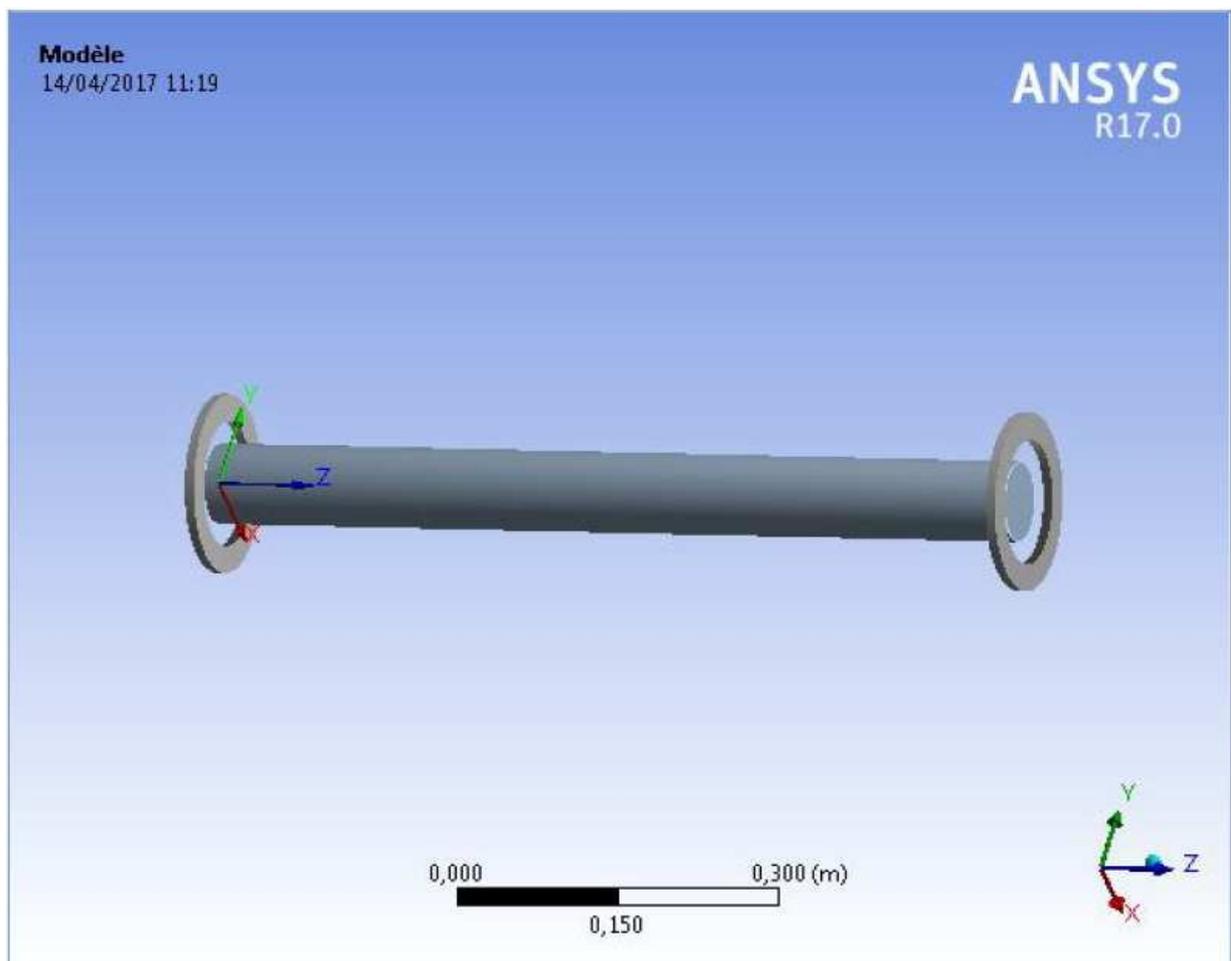
- [15] F.C.Nelson “a review of the origins and current of rotor dynamics” In IFTomm-sixth international conference on rotor dynamics, Sydney, Australia, 2002
- [16] M.Lanane and G.Ferraris “rotordynamic prediction in engineering” John Wiley Sons 1990
- [17] D.P. Atherton “ Nonlinear Control Engineering”. Van Nostrand Reinhold Company, 1975.
- [18] L.Meirovitch “elements of vibration analysis” Mac Graw Hill international editions, 1986
- [19] R.Sino “comportement dynamique et stabilité des rotors : application aux rotors composites” thèse doctorat INSA Lyon, P 187, 2007.
- [20] S.Dunkerly “on the whirling and vibration of shafts” PH.L. Trans.R.Soc. London A, 185,279, (1895).
- [21] R.L.Begue “influence of orthotropic stiffness .damping in Hydropower Rotor” master’s hesis , Lulea university of technology, 2005.
- [22] A.Tondl “some problems of rotor dynamics”, London, Champman and Hall 1965, 433P.
- [23] M.Shilhans “bending frequency of rotating beam” international journal of applied mechanics 25, p28-30,1958.
- [24] D.Prunelli “natural bending frequency comparable to rotational frequency in rotating cantilever beam” international journal of applied mechanics, 39 p 602-604, 1972.
- [25] S.Timoshenko “vibration problems in engineering” New York, van nostrand reihold company, 1955.
- [26] T.Koyama “free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams” international journal of mechanical science 30(10), 743-755.
- [27] A.Bazoune “ vibration frequencies of rotating tapered beam including rotating inertia and transverse shear deformation” master’s thesis, FCGS, King Fahd university of petroleum, minerals, Dharan Saudi Arabia 1990.
- [28] M.A.Prohl “a general method for calculating critical speeds of flexible rotor” Trans, ASME, journal of applied mechanics, vol 12, pp142-148, 1945.
- [29] W.Lund and F.K.Orcutt “calculations and experiments on the umbalance response of flexible rotor” trans, ASME, journal of engineering for industry, vol 89, pp185-796, 1967.
- [30] D.W.Childs “turbomachinery rotordynamics: phenomena, modelling and analysis” John Wiley Sons, Inc.New York, 476p 1993.

- [31] A.Lew “a study of rotor system with ball bearing induced non linearities and the development of transfer matrix technique suitable for analysing such systems” Phd thesis , SMME, University of New South Wales, 2002.
- [32] H.D.Nelson and J.M.McVaugh “the dynamics of rotor bearing systems using finite elements” ASME journal of engineering for industry, 98:p593-600, 1976.
- [33] E.S.Zorzi and H.D.Nelson “finite element simulation of rotor bearing system with internal damping” ASME, journal of engineering for power, pages 71-76, 1977.
- [35] Philippe Bisch. Mécanique des structures.2008.
- [36] [http:// www.Théorie des poutre.com](http://www.Théorie des poutre.com).
- [37] LITEWKA P. ET WRIGGERS P, Frictional contact between 3D beams, Computational Mechanics, pp.26-29,2002.
- [38] M.DAKEL Zakia, Mémoire de docteur, Université d’Alep , stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarques, septembre 2014.
- [39] M.BENDHINA Boudjemaa, Mémoire de Master, Université de Tlemcen ,Etude de l’influence de défaillances des paliers centraux sur le comportement vibratoire des arbres de transmissions, septembre 2016

## Annexe

Les dimensions de l'arbre tournant étudié :

$L = 1,5 \text{ m}$  et  $D = 0,3 \text{ m}$



**Les dimensions de l'arbre+disque étudié :**

Arbre :  $L = 0,4 \text{ m}$  et  $D = 0,02 \text{ m}$

Disque :  $D_{\text{ext}} = 0,3 \text{ m}$  et  $e = 0,03 \text{ m}$

