

---

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -  
Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen  
Faculté de Technologie



Mémoire présenté  
pour l'obtention du **diplôme de MASTER**  
En Génie Mécanique  
Spécialité : **Maintenance Industrielle**

Présenté par : **Mr. TORCHI Abdelkader**

**Intitulé du sujet**

---

## **Modélisation par code de calcul des plaques composites fissurées**

---

Soutenue publiquement le 12 octobre 2017, devant le jury composé de :

Président :	Mr. BOUKHALFA A.	MCA	Université de Tlemcen
Encadreur :	Mr. BELALIA SA.	MCA	Université de Tlemcen
Co-Encadreur :	Mr. CHORFI SM.	MCB	Université de Tlemcen
Examineur :	Mr. HAMZA CHRIF SM.	MCB	Université de Tlemcen
Examineur :	Mr. BELKAID M.	MAA	Université de Tlemcen

Année universitaire 2016-2017

## Remercîments

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à mon encadreur **M.BELALIA Sid Ahmed, MCA** et mon con-encadreur **M.CHORFI Sidi Mohamed MCB**, à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen ,pour m'avoir encadrés tout en m'accordant sa confiance et apportés ses précieux

Mes remerciement aussi à monsieur **M. BOUKHALFA Abdelkarim MCA** à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen , en acceptant d'être président du jury de soutenance de ce mémoire

je suis très heureux que monsieur **M. HAMZA CHERIF Sidi Mohamed, MCB** à l'Université Aboubaker Belkaid Tlemcen , me fasse l'honneur d'examiner ce travail

Je remercie également monsieur **M. BELKAID Mohamed MAA** à l'université Aboubaker Belkaid Tlemcen, à l'importance qu'il accorde à mon travail en acceptant de faire partie des examinateurs de soutenance

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

*A Dieu Le Tout puissant, ta miséricorde et Tes grâces à mon chemin*

*Dans cette vie m'ont donné la force dans la persévérance*

*Et l'ardeur au travail.*

*A mes chers parents qui sont les personnes qui m'ont offert*

*Le plus grand et le plus profond soutien au monde*

*Que Dieu m'aide à les récompenser.*

*Merci pour être toujours près de moi.*

**ABDELKADER**

## Résumé

Le problème de plaque composite fissuré est traité dans le présent travail. La méthode des Eléments finis est employée avec l'utilisation d'élément Shell 281 du logiciel ANSYS Workbench pour générer un maillage tridimensionnel. La fissure passe le long de l'épaisseur de la plaque et provoque une réduction significative de sa rigidité. Dans le cadre de ce projet, de nombreux cas sont étudiés, dont l'effet de la longueur et de l'angle de fissuration. Une série de cas possibles est testée avec l'étude de la convergence. Les résultats numériques de cette étude ont été obtenus avec des projections graphiques.

**Mot clés :** plaque composite fissuré, Eléments finis, longueur et de l'angle de fissuration

## المخلص

في العمل الحالي تتم مناقشة مشكل تصدع لوحة مركبه باستخدام طريقه العناصر المحددة بواسطة استعمال عنصر SHELL 281 من برنامج ANSYS Workbench لتوليد شبكة ثلاثية الأبعاد. التصدع يمر على طول سمك اللوحة و يسبب انخفاض كبير في صلابتها. في هذا المشروع يتم دراسة العديد من الحالات بما في ذلك تأثير طول و زاوية التصدع و يتم اختبار سلسلة من الحالات الممكنة مع دراسة التقارب و قد تم التحصل على نتائج عددية مع توقعات الرسوم البيانية .

**الكلمات الرئيسية :** الصفيحة المركبة المتصدعة , العناصر المنتهية , الطول و زاوية التصدع

## Abstract

The problem of cracked composite plate is discussed in the present work. The Finite Elements method is used with the use of the Shell 281 element of the ANSYS wokbench software to generate a three-dimensional mesh. The crack passes along the thickness of the plate and causes a significant reduction in its rigidity. In this project, many cases are studied, including the effect of the length and the angle of cracking. A series of possible cases is tested with the study of convergence. The numerical results of this study were obtained with graphical projections.

**Keywords :** cracked composite plate , finite elements , length and crack angle

## Table des Matières

<b>Résumé .....</b>	<b>I</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>IV</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>VI</b>
<b>Notations.....</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>1</b>

### CHAPITRE I Plaques composites

I.1. Définition des matériaux composites.....	4
I.2. Avantage des matériaux composites.....	4
I.3. Les constituants du matériau composite.....	4
I.3.1. Les renforts.....	4
I.3.1.1. Principaux renforts.....	5
I.3.1.2. La disposition géométrique des fibres.....	9
I.3.1.2.1. Mats.....	9
I.3.1.2.2. Tissées.....	9
I.3.2. Les matrices.....	9
I.3.2.1. Les matrices organiques.....	10
I.3.2.1.1. Les matrices thermdurcissables.....	10
I.3.2.1.2. Les matrices thermoplastiques.....	11
I.3.2.2. Les matrices métalliques.....	11
I.3.2.3 Les matrices céramiques.....	11
I.3.3. Les additifs.....	11
I.4. Architecture des matériaux composites.....	12
I.4.1. Les stratifiés à base de tissus unidirectionnels.....	12
I.4.2. Les sandwich.....	12
I.5. Mise en œuvre des matériaux composites.....	14
I.5.1. Moulage à Basse pression.....	14
I.5.1.1. Moulage au contact.....	14
I.5.1.2. Moulage par projection simultanée.....	15
I.5.1.3. Moulage sous vide.....	16
I.5.2. Moulage par compression.....	17
I.5.2.1. Moulage par injection de résine.....	17
I.5.2.2. Moulage par compression à froid de résine.....	17
I.5.2.3. Moulage par compression à chaud de résine.....	18
I.5.2.4. Moulage par injection de mélange (résine renfort).....	18
I.5.2.5. Moulage par pultrusion.....	19
I.5.2.6. Moulage par centrifugation.....	19
I.5.2.7. Moulage par enroulement filamentaire (ou bobinage).....	20
I.6. Domaine d'application des matériaux composites.....	21
I.6.1. Secteur aéronautique.....	21
I.6.2 Secteur Spatial.....	21

I.6.3. Les composites dans l'industrie automobile.....	21
I.6.4. Matériaux composites anticorrosion dans l'industrie.....	22
I.6.5. Secteur des travaux publics et bâtiments.....	22
I.6.6. Secteur médical.....	22
I.6.7. Secteur de l'énergie renouvelable.....	23
I.6.8. Secteur du sport.....	23
I.6.9. Secteur d'électricité et d'électronique.....	23

## CHAPITRE II

### THÉORIE DES PLAQUES

II.1 Introduction à la théorie d'élasticité.....	24
II.1.1 Définition des Forces.....	24
II.1.2 Equations d'équilibre.....	24
II.1.3 Etude de la théorie d'élasticité plane.....	24
II.1.3.1 Etat plan de déformation.....	24
II.1.3.1.1 Matrice des constantes élastiques (matrice contrainte-déformation)...	26
II.1.3.2 Etat plan de contraintes.....	27
II.1.3.2.1 Matrice des constantes élastiques.....	28
II.1.3.2.2 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte.....	29
II.2-THÉORIE DES PLAQUES.....	30
II.2.1 Introduction .....	30
II.2.2 Définition.....	30
II.2.3 Différents types de plaques.....	30
II.2.4 Différents types de comportements des plaques.....	31
II.2.4.1 Plaques minces et épaisses et critère de classification.....	31
II.2.4.2 Théorie des plaques minces.....	32
II.2.4.3 Théorie des plaques modérément épaisses.....	34
II.2.4.4 L'approche multicouche.....	36
II.3 . Elasticité 3D.....	37
II.3.1. Le champ de déplacement.....	37
II.3.2. Relation déformation-déplacement.....	37
II.3.3. Relation contrainte-déplacement.....	37
II.3.4.Energie de déformation.....	39
II.3.5. Energie cinétique.....	39
II.3.6.Equation du mouvement.....	39
II.4.Théorie des plaques stratifiées.....	40
II.4.1.caractérisation des matériaux.....	40
II.4.1.1.matériaux triclinique.....	40
II.4.1.2.matériaux monoclinique.....	41
II.4.1.3.matériaux orthotrope.....	41
II.4.1.4. Matériau unidirectionnel.....	41
II.4.1.5. Matériau isotrope.....	41
II.4.2. Relation déformation-déplacement.....	42
II.4.3. Relation contrainte-déplacement.....	42
II.5.Energie de déformation et énergie cinétique.....	43



## CHAPITRE III

### Formulation par la méthode des éléments fini MEF

III.1.Introduction.....	44
III.2.Élément Employé SHELL2.....	45
III.2.1.Description de l'élément SHELL281.....	45
III.2.2.Fonction de forme.....	46

## CHAPITRE IV

### Résultats et interprétations

IV.1. Introduction.....	47
IV. 2. Matériels du travail.....	47
IV.3. Description logiciel ANSYS Workbench.....	47
IV.4. Modélisation des plaques.....	47
IV.4.1. Procédure de modélisation dans ANSYS Workbenche.....	47
IV.4.2.plaque isotrope fissuré au centre.....	57
IV.4.2.1. Convergence par raffinement du maillage.....	57
IV.4.2.2. validation.....	58
IV.4.2.3 Analyse modal.....	62
IV.4.3.plaque composite fissuré.....	65
IV.4.3.1. Influence de rapport a/L sur la plaque composite.....	66
IV.4.3.2. Influence de l'orientation de la fissure.....	70

## COCLUSION

<b>Bibliographie.....</b>	<b>75</b>
---------------------------	-----------

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b> : Différents types de renforts.....	5
<b>Figure I.2</b> : Bobine de fibre de verre.....	6
<b>Figure I.3</b> : Bobine de fibre carbone.....	7
<b>Figure I.4</b> : Bobine de fibre d'aramide.....	8
<b>Figure I.5</b> : Tissu de mèches de carbone (A), tissu taffetas de verre (B) et rouleau de mat de verre (C) .....	9
<b>Figure I.6</b> : Différents types de matrices.....	10
<b>Figure I.7</b> : Constitution d'un stratifié.....	12
<b>Figure I.8</b> : Nid d'abeille.....	13
<b>Figure I.9</b> : Matériaux sandwiches à âmes pleines .....	13
<b>Figure I.10</b> : Matériaux sandwiches à âmes creuses .....	13
<b>Figure I.11</b> : Principe du moulage au contact .....	15
<b>Figure I.12</b> : Principe du moulage par projection simultanée (Source Okeanos-France : fabrication d'une piscine).....	16
<b>Figure I.13</b> : Principe du moulage sous vide (source Marine Innovation Service).....	17
<b>Figure I.14</b> : Principe du moulage par injection de résine .....	17
<b>Figure I.15</b> : Principe du moulage par compression à froid de résine.....	18
<b>Figure I.16</b> : Principe du Moulage par compression à chaud de résine .....	18
<b>Figure I.17</b> : Principe du moulage par injection de mélange (résine renfort).....	19
<b>Figure I.18</b> : Principe de moulage par pultrusion .....	19
<b>Figure I.19</b> : Principe de fabrication d'un tuyau par centrifugation.....	20
<b>Figure I.20</b> : Principe du moulage par enroulement filamentaire (source site CNES).....	21
<b>Figure I.21</b> : Répartition des secteurs d'application des matériaux composites.....	23
<b>Figure .II.1</b> : Cas de l'état plan de déformation.....	25
<b>Figure. II.2</b> : Cas de l'état plan de contrainte.....	27
<b>Figure. II.3</b> : Efforts intérieurs dans une plaque.....	31
<b>Figure. II.4</b> : Description d'une plaque (géométrie et variables).....	34
<b>Figure. II.5</b> : Variables cinématiques utilisées pour l'étude des poutres et des plaques en flexion.....	36
<b>Figure (III.1)</b> l'élément SHELL281.....	46
<b>Figure (IV.1)</b> model de plaque fissuré au centre.....	57
<b>Figure (IV.2)</b> Comparaison des fréquences naturelle calculées par les références et résultats obtenus sous ANSYS dans le cas de la plaque SSSS .....	59
<b>Figure (IV.3)</b> Fréquence naturelle du 5 premier mode en fonction de rapport L/h .....	60
<b>Figure (IV.4)</b> Variation des cinq premières fréquences de mode via des rapports de longueur de fissure a/L .....	62
<b>Figure (IV.5)</b> représenté les déformations de première mode de fréquence propre 79,736 Hz.....	63
<b>Figure (IV.6)</b> représenté les déformations de Deuxième mode de fréquence propre 134,79 Hz .....	63
<b>Figure (IV.7)</b> représenté les déformations de troisième mode de fréquence propre 230,2 Hz .....	64
<b>Figure (IV.8)</b> représenté les déformations de quatrième mode de fréquence propre 320,35 Hz .....	64
<b>Figure (IV.9)</b> représenté les déformations de cinquième mode de fréquence	

propre 373,23 Hz .....	65
<b>Figure (IV.10)</b> représenté une plaque composite intact agache et adroite plaque	
Composite fissuré ces modèle obtenu par ANSYS ACP (pre) .....	66
<b>Figure (IV.11)</b> : les cinq premiers Mode de fréquence propres de vibration de la plaque composite Pour différentes valeurs de $a/L$ .....	67
<b>Figure (IV.12)</b> : le premier Mode de fréquence propre .....	67
<b>Figure (IV.13)</b> : le deuxième Mode de fréquence propre .....	68
<b>Figure (IV.14)</b> : le troisième Mode de fréquence propre .....	68
<b>Figure (IV.15)</b> : le quatrième Mode de fréquence propre .....	69
<b>Figure (IV.16)</b> : le cinquième Mode de fréquence propre .....	69
<b>Figure (IV.17)</b> plaques composite avec orientation de l'angle de fissur $\beta = 45^\circ$ .....	70
<b>Figure (IV.18)</b> les cinq premiers Mode de fréquence propres de la plaque composite pour différent orientation d'angles de fissure $\beta$ .....	72
<b>Figure (IV.19)</b> : le premier Mode de fréquence propre .....	72
<b>Figure (IV.20)</b> : le deuxième Mode de fréquence propre .....	73
<b>Figure (IV.21)</b> : le troisième Mode de fréquence propre .....	73
<b>Figure (IV.22)</b> : le quatrième Mode de fréquence propre .....	74
<b>Figure (IV.23)</b> : le cinquième Mode de fréquence propre .....	74

## Liste des Tableau

<b>Tableau I.1</b> : Caractéristiques des fibres de verre .....	6
<b>Tableau I.2</b> : Caractéristiques des fibres de carbone .....	7
<b>Tableau I.3</b> : Caractéristiques des fibres de aramides .....	8
<b>Tableau I.4</b> : Caractéristiques des matrices thermodurcissables .....	10
<b>Tableau I.5</b> : Caractéristiques des matrices thermoplastiques .....	11
<b>Tableau I.6</b> : Caractéristiques de quelques matériaux composites .....	14
<b>Tableau (IV.1)</b> : étude de des fréquences naturelles pour une plaque mince.L/h =10.....	58
<b>Tableau (IV. 2)</b> : Effet du rapport L / h sur la fréquence non dimensionnelle $\omega$ de la plaque fissuré au centre ( $a / L =n 0,5$ ).....	59
<b>Tableau (IV. 3)</b> : Fréquence naturelle non dimensionnelle de la plaque carrée isotrope via le rapport de longueur de fissure ( $L / h = 100$ ).....	61
<b>Tableau (IV. 4)</b> : Fréquence propre de la plaque composite via le rapport de longueur de fissure (a/L) les conditions aux limites sont SSSS .....	66
<b>Tableau (IV. 5)</b> : Fréquence propre de la plaque composite pour différent orientations de l'angle $\beta$ de fissure les conditions aux limites sont SSSS .....	71

## Notations

$x, y, z$	Coordonnées Cartésiennes.
$\xi, \eta, \zeta$	Coordonnées adimensionnelles
$a$	Longueur de la plaque.
$b$	Largeur de la plaque.
$V$	Volume de la plaque.
$t$	Temps.
$[C]$	Matrice d'élasticité
$E$	Module de Young.
$h/a$	Rapport d'élanement de la plaque « épaisseur-longueur »
$u, v$	Déplacements membranaires
$w$	Déplacement transversal
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$	Déformations normales.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Déformations de cisaillement.
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Contrainte normales.
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Contrainte de cisaillement.
$[\varepsilon]$	Déformation totale
$G$	Constantes de Lamé
$\lambda$	Constant de Lamé
$[D]$	Étant la matrice des constantes élastique .
$\phi_y, \phi_x$	Les rotations des sections droites autour des axes y et x
$U_0$	Déplacement longitudinal.
$V_0$	Déplacement transversal longitudinal.
$W_0$	Déplacement vertical.
$U_p$	Energie de déformation
$\{\sigma\}$	Tenseur de Contrainte.
$\{\gamma\}$	Tenseur de Déformation angulaire.
$\{\nu\}$	Coefficient de poisson .
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformation.
$T_p$	Energie cinétique
$\{q\}$	Cordonnées généralisées
$[M_p]$	Matrice masse
$[K_p]$	Matrice de rigidité
$C_k$	La matrice de rigidité de la couche
$T_k$	La matrice de transformation
$[K^{(e)}]$	Est la matrice de rigidité de l'élément
$\{q^{(e)}\}$	Le vecteur déplacement élémentaire
$\{F^{(e)}\}$	Le vecteur force élémentaire
$N_i$	Les fonctions de forme pour l'élément

## Introduction

Un composite est défini comme un matériau formé par la combinaison de deux ou plusieurs matériaux uniques, qui conservent leurs propriétés individuelles, pour produire un nouveau matériau ayant des propriétés physiques et mécaniques supérieures par rapport à ses constituants. Les plaques composites ont une large gamme d'applications dans divers domaines. L'ingénierie aérospatiale utilise de façon extensive des composites dans des pièces mécaniques comme les ailes d'avion, les satellites, les pales de rotor, l'antenne spatiale, etc. Rapport de résistance élevée en poids, moins de susceptibilité aux fractures cassantes, résistance à la corrosion, résistance aux chocs, module d'élasticité plus élevé, stabilité dimensionnelle, La faible conductivité thermique et l'absence de phénomène de gauchissement en font une meilleure alternative à l'acier et autres alliages.

Les plaques dans une structure sont principalement soumises à des forces transversales de pression et de cisaillement dans le plan de la plaque. Les défauts structuraux tels que fissures ou délaminage dans les plaques composites sont inévitables pendant la durée de vie en raison de la charge dynamique, des effets de corrosion, du vieillissement, des variations de température, etc ... L'étude des propriétés dynamiques de ces éléments fissurés présente un grand intérêt. Les fissures sur une plaque réduisent sa rigidité locale et réduisent donc sa résistance. En raison de ces causes, les méthodes permettant une révélation précoce et des mesures correctives pour les fissures sont d'une importance primordiale pour le bon fonctionnement et la longue durée de vie des pièces de machines et des éléments structurels. La plupart des structures échouent en raison de l'apparition de vibrations à ou près des fréquences naturelles. Par conséquent, il est impératif d'estimer la vibration.

Pour une revue, Owen et Li [1] et Noor [2] ont fourni l'étude approfondie des fréquences fondamentales de non endommagés des plaques composites stratifiées utilisant différents modèles de calcul basés sur ESL. Entre autres, les éléments finis à base de HSDT étaient utilisés par Vuksanović [3], Matsunaga [4] et Nayak et al. [5] pour l'étude de vibrations libres de plaques composites ou sandwich stratifiées sans fissure. De plus, Qian et al. [6] et Krawczuk [7] ont développé des modèles FE de plaque isotrope incluant le fond de fissure. Le Ritz a été utilisé pour développer le modèle de calcul des plaques rectangulaires isotropes fissurées par Yuan et Dickinson [8] et Liew et al. [9]. Plusieurs solutions ont été proposées en utilisant des fonctions de comparaison dites modifiées et des fonctions de fissuration comme

## Introduction

---

fonctions admissibles dans la méthode de Ritz [10-11]. La solution analytique pour les vibrations des plaques rectangulaires avec des fissures, basée sur la théorie des plaques classique et l'approche sous-domaine, a été récemment publié dans [12]

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant à obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des Eléments Finis.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent selon la nature du problème à résoudre en trois catégories. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, où on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides. Quant à la troisième catégorie, le facteur temps est intégré aux problèmes des deux premières catégories. Les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénieur, mais reste que les ingénieurs en génie civil, mécanique et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Parmi certaines applications de la méthode des éléments finis, on retrouve la modélisation des plaques; sa géométrie, les conditions aux limites (appuyé ou encasté), l'épaisseur (mince ou épaisse), le matériau utilisé (homogène ou isotrope), tous ces paramètres devraient être bien connus au préalable et leurs prise en considération dans la conception du programme d'éléments finis est indispensable.

Il donne accès à la famille ANSYS Des modules de conception et d'analyse dans un environnement de simulation intégré. ANSYS Workbench est une plateforme particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièce) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plateforme est donc chargée

## Introduction

---

de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la résolution. Le modèle éléments finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS.

Nous avons employé le module ACP(pre) et le module Modal de ANSYS Workbenche pour résoudre le problème de vibration libre d'une plaque composite fissurée .

Le mémoire se présente sous forme de 4 chapitre

- **Le chapitre I** : matériau composite
- **Le chapitre II** : la théorie des plaques
- **Le chapitre III** : Formulation par la MEF et l'élément employé par ANSYS
- **Le chapitre IV** : Résultats et interprétations



## Chapitre I : Plaques composites

### I.1. Définition des matériaux composites.

La définition générale des matériaux composites est : « un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) et de nature différente, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires ». Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées « renforts » et « matrice ». Chacun des deux constituants joue un rôle particulier dans la tenue mécanique du matériau. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à recevoir toutes les sollicitations et répartir les efforts dans tout le matériau afin de protéger le renfort. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, leur rôle est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts, et confère à la matrice des propriétés qu'elle ne possède pas seule. L'arrangement des fibres, leur orientation permet de renforcer les propriétés mécaniques de la structure [13].

### I.2. Avantage des matériaux composites.

- ✓ Réduire la masse des produits, ce qui entraîne une économie de carburant.
- ✓ Meilleures caractéristiques mécaniques et hautes rigidités spécifiques ( $E/\rho$ ) résistances spécifiques ( $\sigma_r/\rho$ ).
- ✓ Faible vieillissement sous l'action de réaction chimique.
- ✓ Insensibles aux produits chimiques comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, pétrole.
- ✓ Obtention de formes complexes (Réduction des coûts d'assemblages).

### I.3. Les constituants du matériau composite

Nous présentons les différents types des éléments constituant un matériau composite qui sont les renforts et les matrices.

Le renfort se présente sous forme de fibres continues ou discontinues qui a dont le rôle est d'assurer la résistance mécanique du matériau composite. La matrice assure la protection chimique et la répartition de la charge mécanique appliquée à la structure. Ces deux éléments constituant principaux reçoivent des additifs ou charges qui sont des produits qui peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût (catalyseur, durcisseur etc...)[ 14].

#### I.3.1. Les renforts.

Les renforts sont tous produits qui permettent d'améliorer les propriétés de la matrice (mécanique, thermique, chimique...) et assurer des meilleures propriétés mécaniques du matériau composite à élaborer.

Les fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus

complexes, tissage tridirectionnel ou plus). Les différents classements des renforts sont indiqués sur la figure I.1 [13]

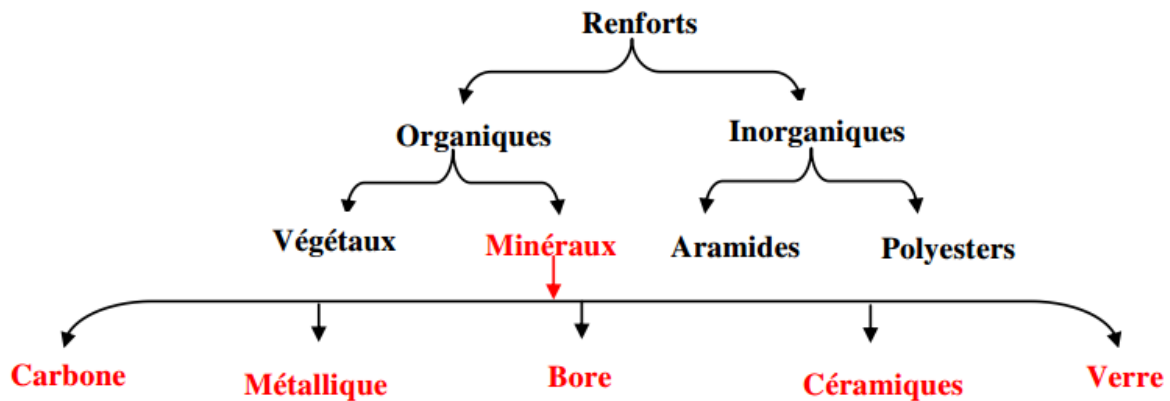


Figure I.1 : Différents types de renforts.

### I.3.1.1. Principaux renforts.

#### Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix. C'est les renforts les plus utilisés actuellement dans la construction de structures composites. On distingue trois types de fibres de verre [13] :

- ✓ Verre E : pour les composites à grande diffusion.
- ✓ Verre S : pour les applications d'électricité.
- ✓ Verre R : pour les composites à haute performance.

Avantages de la fibre de verre.

- ✓ Compatibilité avec les matrices organiques.
- ✓ Bonnes propriétés diélectriques.
- ✓ Faible coût.

Inconvénients de la fibre de verre.

- ✓ Faible module d'élasticité (par rapport aux fibres de carbone et l'aramide)
- ✓ Vieillissement au contact de l'eau.

**Tableau I.1** : Caractéristiques des fibres de verre [15]

Caractéristiques	Verre E	Verre R	Verre S
Caractéristique en traction :			
Résistance a la rupture (Mpa)	3400 à 3500	4400	4600
Module d'Young(Gpa)	73	86	87
Allongement a la rupture (%)	4.6 à 4.8	5.2	5.4
Masse volumique..... (g/cm <sup>3</sup> )	2.54	2.55	2.54



**Figure I.2** : Bobine de fibre de verre.

**Fibres de carbone** [16]

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- ✓ fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.
- ✓ fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

Avantages de la fibre de carbone.

- ✓ Bonnes propriétés mécaniques.
- ✓ Dilatation thermique très faible.
- ✓ Bonne tenue à l'humidité
- ✓ Faible densité.

Inconvénients de la fibre de carbone.

- ✓ Prix très élevé.
- ✓ Fragilité au choc.
- ✓ Adhésion difficile avec les résines.



**Figure I.3 :** Bobine de fibre carbone.

**Tableau I.2 :** Caractéristiques des fibres de carbone [15]

Caractéristiques	HR		HM	
	(1)	(2)	(1)	(2)
Caractéristique en traction :				
Résistance à la rupture (Mpa)	3000 à 3500	4000 à 4500	1800 à 2500	2000 à 4200 (3)
Module d'Young (Gpa)	220 à 240	275 à 300	350 à 500	350 à 500
Allongement a la rupture (%)	1.2 à 1.5	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.8 à 1.95	1.8 à 1.95
(1) Qualité standard (1er génération). (2) Qualité très performante.				

### Fibres d'aramide [ 15]

Les fibres d'aramide sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatiques dont les premières applications reviennent à l'année 1972. Ces fibres sont généralement développées pour renforcer les pneumatiques. Ils en existent deux types principaux :

- ✓ La fibre haute module Kevlar 49 et Twaron HM.
- ✓ La fibre standard Kevlar 29 et Twaron HM 50.

Les fibres d'aramide présentent la même particularité que les fibres de carbone. Elles ont un coefficient de dilatation linéique négative dans le sens axial .

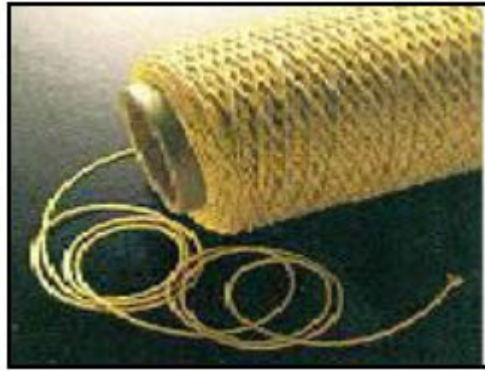


Figure I.4 : Bobine de fibre d'aramide.

**Avantages de la fibre d'aramide**

- ✓ Bonne résistance spécifique à la traction.
- ✓ Dilatation thermique nulle.
- ✓ Absorption des vibrations et des chocs.
- ✓ Bonne inertie chimique vis-à-vis des carburants.
- ✓ Faible densité.

**Inconvénients de la fibre d'aramide**

- ✓ Tenue limitée en compression.
- ✓ Reprise d'humidité importante.
- ✓ Prix élevé.
- ✓ Adhésion difficile avec les résines.

Tableau I.3 : Caractéristiques des fibres de aramides [ 15]

Caractéristiques	Haut module	standard
Caractéristique en traction :		
Résistance à la rupture.....(Mpa)	> 3000	> 2760
Module d'Young.....(Gpa)	120 à 130	60 à 70
Allongement a la rupture.....(%)	1,9 à 2,5	4 à 4,4
Masse volumique.....(g/cm <sup>3</sup> )	1,45	1,44

**Fibres de céramiques**

Les matériaux composites en céramique sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont fabriquées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fils support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500 °C et 2000 °C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avion [18]. Les types de fibres céramiques sont :

- ✓ Les fibres de carbure de silicium.
- ✓ Les fibres de Bore.

### I.3.1.2. La disposition géométrique des fibres

Suivant l'utilisation des matériaux composites les renforts peuvent se présenter sous plusieurs formes.

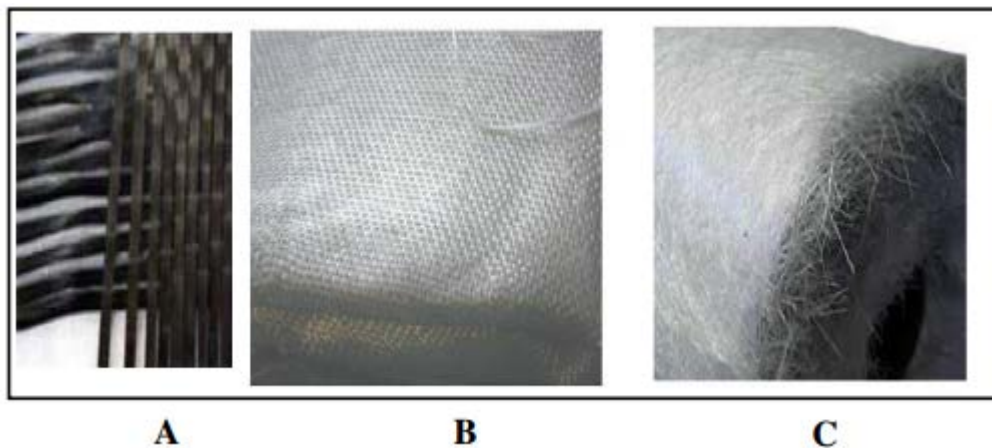
#### I.3.1.2.1. Mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan. La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus se situe essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité [13]

#### I.3.1.2.2. Tissées

Les tissés sont des renforts qui se présentent sous la forme de tissus (cf. norme NF G 07-154). Ils sont généralement bidirectionnels (figures I.5).

Un tissu comprend des fils de chaîne (suivant la direction d'enroulement sur son support) et des fils de trame disposés perpendiculairement. [15]



**Figure I.5 :** Tissu de fibre de carbone (A), tissu taffetas de verre (B) et rouleau de mat de verre (C) [17]

### I.3.2. Les matrices.

Le rôle de la matrice est de transmettre les efforts mécaniques aux fibres (résistance à la flexion ou à la compression) et d'assurer leurs protections chimiques et de donner la forme au produit réalisé [13]. On distingue différents types de matrice (figure I.6) :

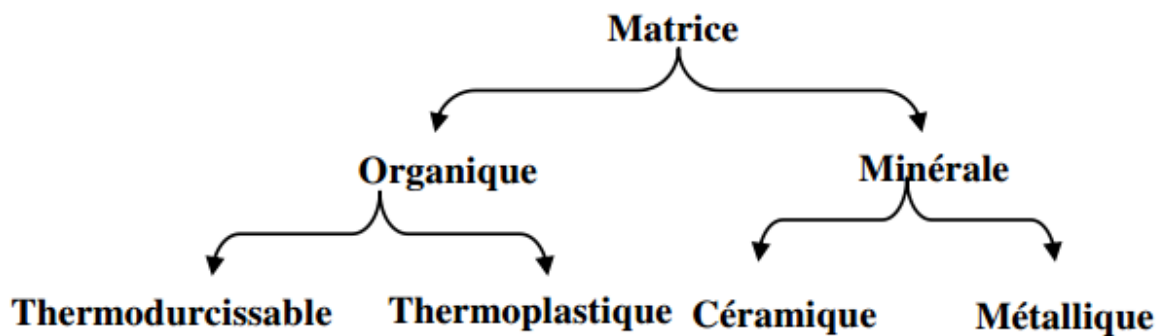


Figure I.6 : Différents types de matrices.

### I.3.2.1. Les matrices organiques.

#### I.3.2.1.1. Les matrices thermodurcissables.

Les résines thermodurcissables présentent et possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide. Elles ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois [13]. On distingue donc trois types de matrices thermodurcissables:

- ✓ Les résines polyesters.
- ✓ Les résines de condensation.
- ✓ Les résines époxydes.

Tableau I.4 : Caractéristiques des matrices thermodurcissables [16].

Matrice Tp	Epoxyde	Phénolique	Polyester	Polycarbonate	Vinylester	Silicone
Masse volumiques (Kg /m3)	1200	1300	1200	1200	1150	1100
Module d'élasticité longitudinal (MPa)	4500	3000	4000	2400	3300	2200
Module de cisaillement (MPa)	1600	1100	1400			
Coefficient de Poisson	0,4	0,4	0,4	0,35		0,5
Contrainte de rupture (traction)(MPa)	130	70	80	60	75	35
Allongement à rupture %	2	2,5	2,5		4	
Coefficient de dilatation thermique °c <sup>-1</sup>	11*10 <sup>-5</sup>	1*10 <sup>-5</sup>	8*10 <sup>-5</sup>	6*10 <sup>-5</sup>	5*10 <sup>-5</sup>	

### I.3.2.1.2. Les matrices thermoplastiques

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. La mise en œuvre rapide est possible par thermoformage. Elles présentent la possibilité de soudage et de recyclage du fait de la réversibilité [17]. On cite les exemples suivantes :

- Polypropylène (**pp**).
- Polysulfure de phénylène (**PPS**)
- Polycarbonate polyamide (**PA**).
- Polyéther-sulfone (**PES**)
- Polyéther-imide (**PEI**)
- Polyéther-éther-cétone (**PEEK**)

**Tableau I.5 :** Caractéristiques des matrices thermoplastiques [10].

Matrice Tp Caractéristiques	PP	PPS	PA	PES	PEI	PEEK
Masse volumiques (Kg /m3)	900	1300	1100	1350	1150	1300
Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	1200	4000	2000	3000	3300	4000
Coefficient de Poisson	0,4		0,35			
Coefficient de dilation thermique (C-1)*105	9	5	8	6	6	5
Contrainte de ruptures en traction (Mpa)	30	65	70	85	105	50
Allongement à la rupture (%)	20à400	100	200	60	60	50

### I.3.2.2. Les matrices métalliques.

L'utilisation de ses matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C, est surtout recherchée pour l'utilisation industrielle et l'application dans les domaines aéronautiques et spatiales. Le coût de leur mise en œuvre est très élevée, en particulier l'aluminium et le titane [15].

### I.3.2.3 Les matrices céramiques.

Les matériaux utilisés sont les carbures de silicium et de carbone. Ils sont utilisés pour la fabrication des pièces qui subissent des contraintes d'origine thermique et leur coût est très élevé [18].

### I.3.3. Les additifs. [13]

Les additifs se trouvent en faible quantité et interviennent comme

- ✓ lubrifiants et agents de démoulage.
- ✓ pigments et colorants.
- ✓ agents anti-retrait.
- ✓ agents anti-ultraviolets.



#### I.4. Architecture des matériaux composites .

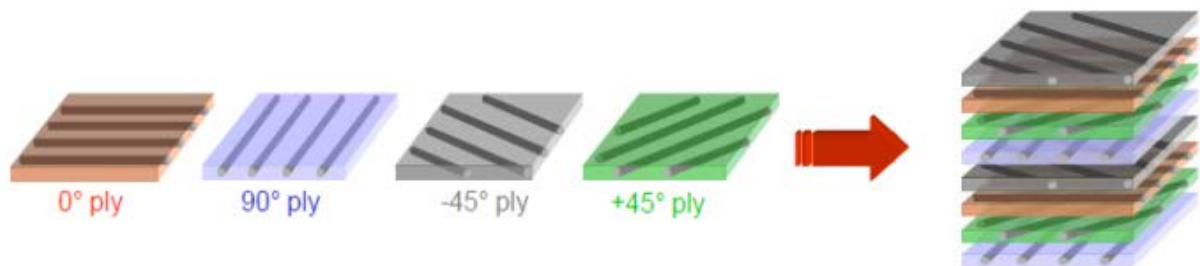
L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance de la conception des pièces en matériaux composites :

- ✓ par surface : plaques, coques.
- ✓ par stratification de couches successives.

##### I.4.1. Les stratifiés à base de tissus unidirectionnels [13].

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (figure I.7) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche. On distingue différents types des stratifiés :

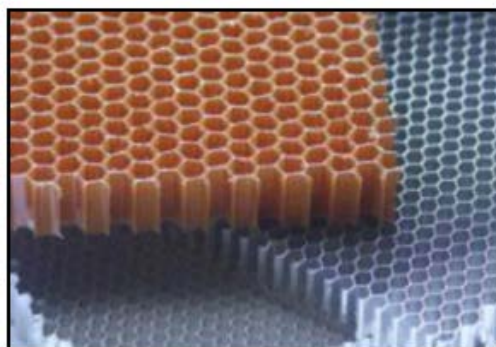
- ✓ Stratifiés symétriques.
- ✓ Stratifiés symétriques miroir.
- ✓ Séquences.
- ✓ Stratifiés hybrides.



**Figure I.7 :** Constitution d'un stratifié.

##### I.4.2. Les sandwich.

Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure I.8



**Figure I.8 :** Nid Ame d'abeilles.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et en torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan. Les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan. Les figures 1.9 et 1.10 présentent quelques types de sandwichs.

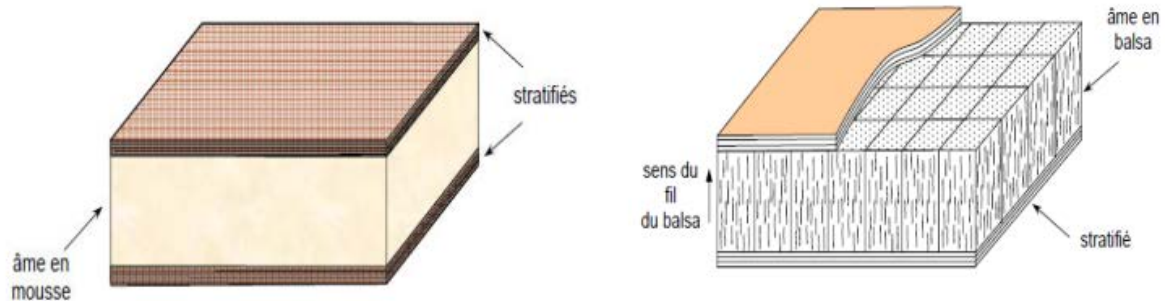


Figure I.9 : Matériaux sandwichs à âmes pleines [13].

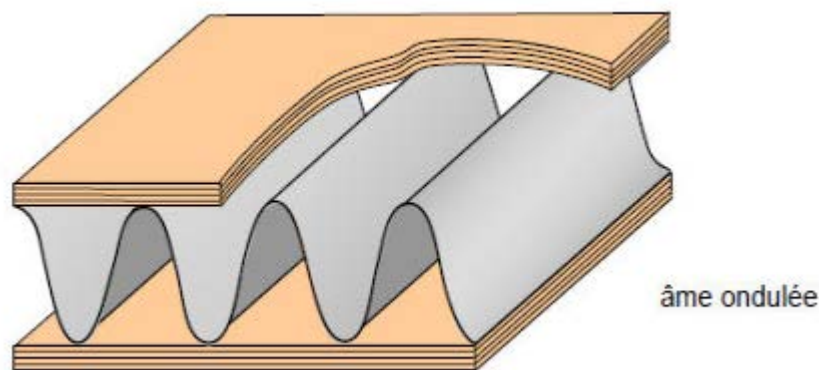


Figure I.10 : Matériaux sandwichs à âmes creuses [13].

Tableau I.6 : Caractéristiques de quelques matériaux composites [17]

Matériau	Carbone			Verre			Kevlar 49/époxy	Bore/époxy
	UD IM IM7/époxy	UD HM M50/époxy	Tissu taffetas M50/époxy	UD E/époxy	UD R/époxy	Tissu satin R/époxy		
<b>Module</b>								
$E_1$ (Gpa)	160	225	65	45	52	26	72	200
$E_t$ (Gpa)	10	7	65	12	13,8	26	5,5	18,5
$G_{It}$ (Gpa)	4,6	4,5	4,2	4,4	4,5	4,2	2,1	5,59
$\nu_{xy}$	0,34	0,3	0,03	0,25	0,25	0,3	0,34	0,23
Fraction volumiques des fibres (%)	60	60	52	60	60	60	60	60
Densité	1,58	1,66	1,54	2	2	2	1,38	2
<b>Résistance</b>								
$\sigma_1^t$ (Mpa)	2900	1080	870	1030	1380	500	1380	1300
$\sigma_1^c$ (Mpa)	-1800	-830	-840	-550	-660	-350	-280	-2500
$\sigma_2^t$ (Mpa)	60	45	85	41	41	500	41	61
$\sigma_2^c$ (Mpa)	-250	-250	-800	-138	-138	-350	-138	-202

$\tau_{It}^r$ (Mpa)	110	60	100	55	55	70	55	67
---------------------	-----	----	-----	----	----	----	----	----

### I.5. Mise en œuvre des matériaux composites.

Le but de cette partie est de connaître les principes des différents processus de mise en œuvre des matériaux composites. La plupart des techniques de mise en œuvre consistent à élaborer des pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée la stratification, conduit à l'élaboration de stratifiés, cela nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites [13]. Il existe de nombreuses méthodes et variantes de fabrication des matériaux composites.

#### I.5.1. Moulage à Basse pression.

##### I.5.1.1. Moulage au contact.

C'est un procédé manuel (figure I.11) pour la réalisation des pièces à partir de résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression. Les renforts sont déposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, accélérées et catalysées. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée. Ce procédé est utilisé pour les petites séries, de 1 à 1000 pièces/année et pour la construction de pièces de grandes dimensions ainsi que pour les revêtements sur des supports divers [16].

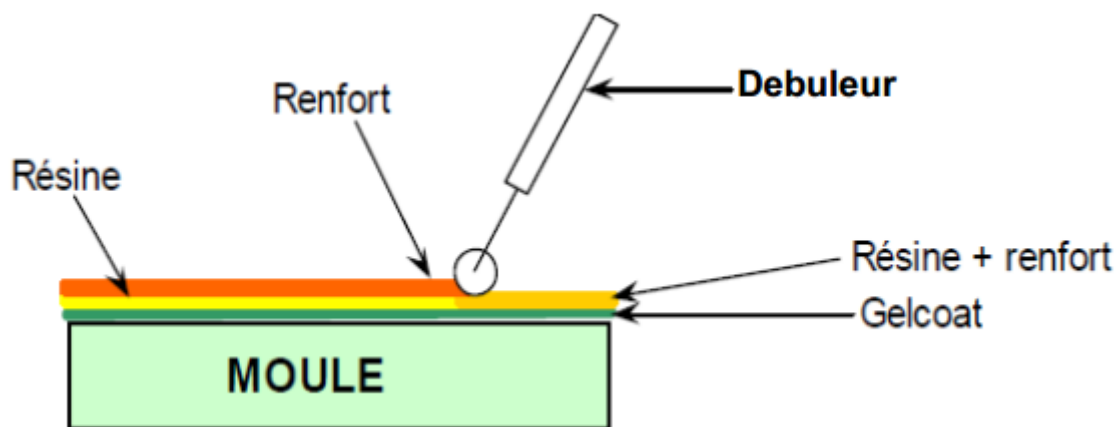


Figure I.11 : Principe du moulage au contact [16].

#### Avantages

- ✓ Très larges possibilités de forme.
- ✓ Pas de limite dimensionnelle, Une surface lisse gelotée (aspect, tenue à la corrosion). Propriétés mécaniques moyennes à bonnes.
- ✓ Investissements spécifiques très faibles.
- ✓ Moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

#### Limites

- ✓ Une seule face lisse.

- ✓ Nécessité de finition (détourage, perçage...).
- ✓ Qualité tributaire de la main d'œuvre.
- ✓ Faible cadence de production par moule, espace de travail important.
- ✓ Conditions de travail médiocres.

### I.5.1.2. Moulage par projection simultanée.

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule (figure I.12). L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifié et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé [13].



**Figure I.12 :** Principe du moulage par projection simultanée  
(Source Okeanos-France : fabrication d'une piscine).

#### Avantages [16]

- ✓ Travail simplifié, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection
- ✓ Très larges possibilités de forme et des dimensions.
- ✓ Investissements très modérés.
- ✓ Moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne

#### Limites [16]

- ✓ Propriétés mécaniques moyennes.
- ✓ Une seule face lisse.
- ✓ Qualité tributaire de la main d'œuvre.
- ✓ Conditions de travail très médiocres si absence d'agencements nécessaires.

### I.5.1.3. Moulage sous vide.

Le moulage sous vide (figure I.13) s'effectue entre moule et contre-moule rigide, semi-rigide ou souple suivant la technologie de la mise en œuvre. Le renfort sous forme de mat, tissu, ou préforme est placé à l'intérieur du moule ; la résine catalysée est versée sur le renfort.

On utilise la pression qui s'exerce sur le moule lors de la mise sous vide pour répartir la résine et imprégner le renfort. La résine peut également être injectée par l'aspiration consécutive au vide [16]

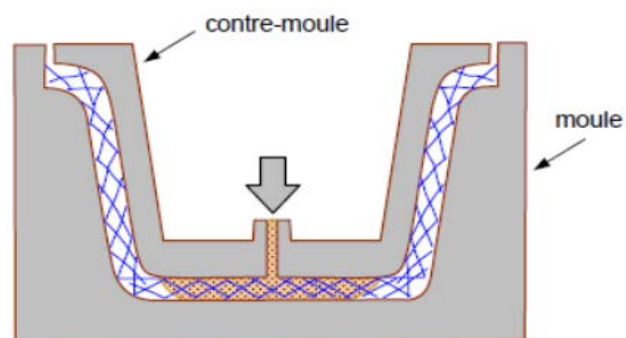


**Figure I.13 :** Principe du moulage sous vide (source Marine Innovation Service).

## I.5.2. Moulage par compression.

### I.5.2.1. Moulage par injection de résine.

Le moulage consiste à injecter de la résine sous pression et à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé (figure I.14). L'alimentation automatique des résines élimine leur manipulation. La proportion de renfort peut être élevée, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées. Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées [13].

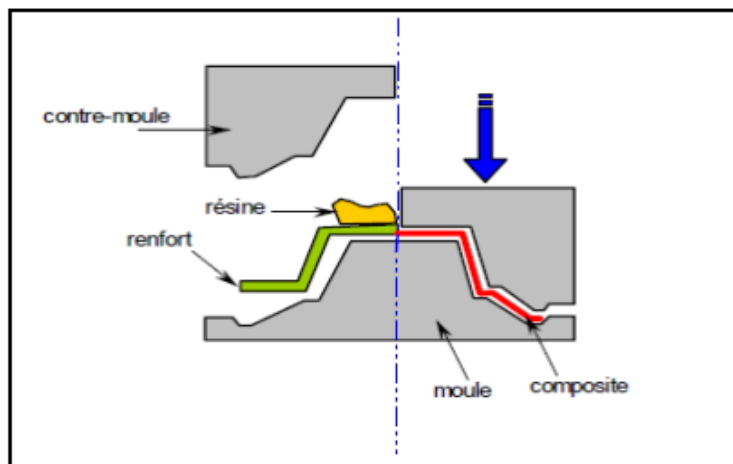


**Figure I.14 :** Principe du moulage par injection de résine [13].

### II.5.2.2. Moulage par compression à froid de résine. [16]

Ce procédé (figure I.15) convient pour les moyennes séries de productions (500 à 5000 unités). En utilisant une presse constituée d'un moule et contre-moule solide en matériaux composites à froid, le renfort (mat, mat de fils continus, liant basse solubilité) est posé sur la partie inférieure du moule et de la résine. La fermeture du moule sous pression (2 à 4 bars) entraîne la répartition de la résine dans l'empreinte et l'imprégnation du renfort. Le durcissement de la résine est accéléré progressivement par l'élévation de température du moule due à l'exothermie de la réaction, ce qui permet un démoulage rapide .

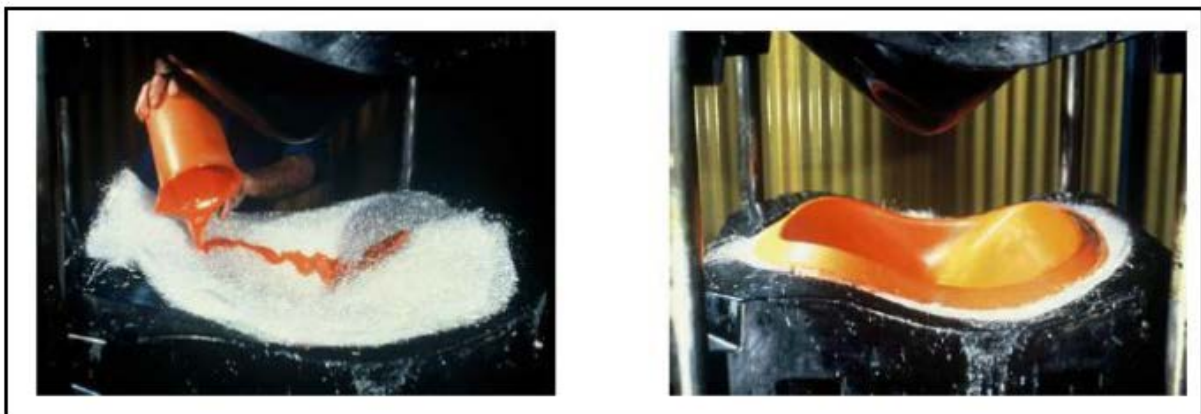




**Figure 1.15 :** Principe du moulage par compression à froid de résine

### **I.5.2.3. Moulage par compression à chaud de résine.**

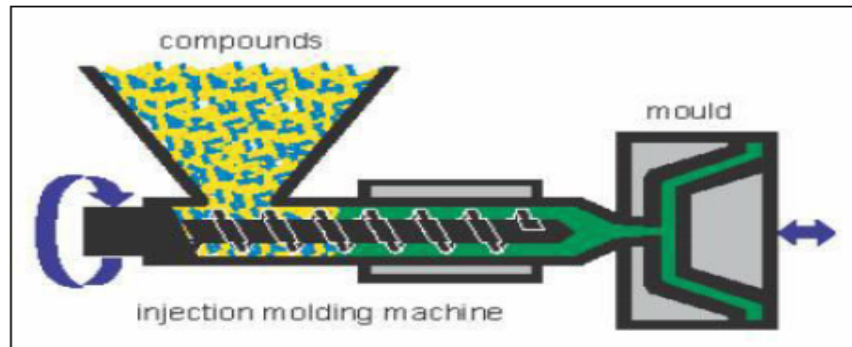
Ce procédé (figure I.16) est utilisé pour les grandes séries de production (15 à 30 pièces par heure). Dans ce procédé exige une presse hydraulique et un moule métallique chauffants à la température de l'ordre de 80 à 150 °C, et le renfort (mat à fils coupés, fils continus, par des tissus, préformes) La fermeture du moule sous pression (10 à 50 bars). Ce procédé de moulage permet d'obtenir des proportions importantes de renfort, et par conséquent des pièces de bonnes caractéristiques mécaniques. L'importance de la presse est en fonction des dimensions des pièces [13].



**Figure I.16 :** Principe du Moulage par compression à chaud de résine [16].

### **I.5.2.4. Moulage par injection de mélange (résine renfort).**

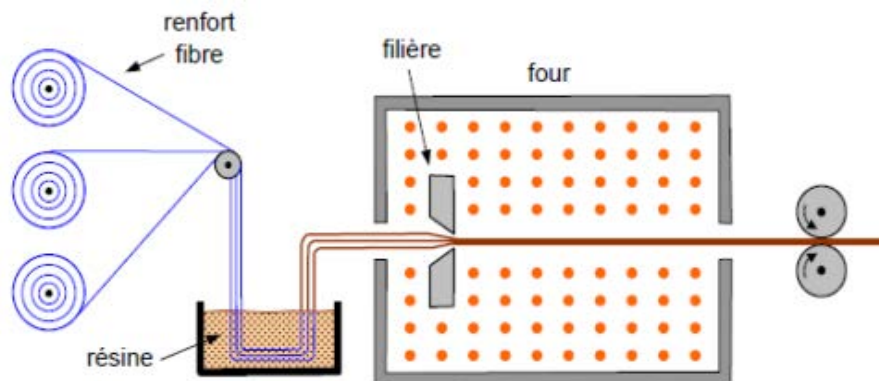
Généralement cette technique (figure I.17) est utilisée pour obtenir les matériaux du type « plastiques renforcés ». Elle est adaptée pour la production des pièces en très grandes séries. Dans ce procédé exige une malaxeur avec une masse à mouler constituée de résine, de charges et d'adjuvants divers, renfort (fibres courtes, sphères (billes), etc...). Le compound est moulé à chaud (130 - 150 °C) par injection (principalement) entre moule et contre-moule en acier usiné. La pression de fermeture du moule est de (50 à 100 bars) [13].



**Figure I.17 :** Principe du moulage par injection de mélange (résine renfort).

### I.5.2.5. Moulage par pultrusion.

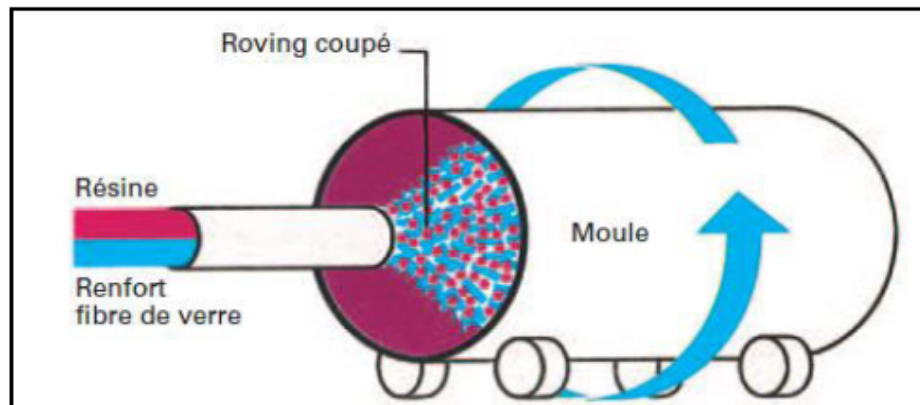
Ce procédé (figure I.18) assure une grande série de production (vitesse de défilement jusqu'à 20 m/h). Cette technique est destinée pour la fabrication des pièces de profilés de sections constantes. Ce procédé est utilisé dans le type des renforts (continus, rowings divers, des bondes de mats et tissus en bandes de largeurs appropriées) [10], et les résines de types (thermoplastiques et thermodurcissables). Il est possible d'obtenir des profils de caractéristiques mécaniques plus élevées [13].



**Figure I.18 :** Principe de moulage par pultrusion [13].

### I.5.2.6. Moulage par centrifugation.

C'est un procédé de moulage (figure I.19) limité aux enveloppes cylindriques. A l'intérieur d'un moule cylindrique en rotation à basse vitesse, on dépose des fils coupés à partir de roving (ou du mat), de la résine catalysée et accélérée et éventuellement des charges granulaires. Ensuite on augmente la vitesse de rotation du moule pour densifier et dé buller la matière. Après durcissement de la résine, éventuellement accélérée par un apport thermique, on peut extraire très facilement la pièce du moule[13] .



**Figure I.19** : Principe de fabrication d'un tuyau par centrifugation [19]

### Avantages

- ✓ Aucune perte de matière.
- ✓ Deux faces parfaitement lisses.
- ✓ Matériau de très bonne qualité (pas de bulles d'air).

### Limites

- ✓ Seulement les formes cylindriques.
- ✓ Pas de possibilité de variation d'épaisseur.
- ✓ Caractéristiques mécaniques moyennes perpendiculairement à la surface fabriquée.

### I.5.2.7. Moulage par enroulement filamentaire (ou bobinage) [13].

Cette technique adaptée (figure I.20) pour la fabrication des pièces de grandes dimensions aux formes cylindriques et sphériques avec des surfaces internes lisses et une résistance plus élevée. Le renfort au forme de fil continu, ruban, imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation. Suivant les mouvements relatifs du mandrin et du système d'orientation des renforts, On distingue :

- ✓ L'enroulement circonférentiel.
- ✓ L'enroulement hélicoïdal.
- ✓ L'enroulement polaire.





**Figure I.20** : Principe du moulage par enroulement filamentaire (source site CNES).

## **I.6. Domaine d'application des matériaux composites.**

Les matériaux composites sont largement utilisés dans l'industrie, parce qu'ils présentent de bonnes caractéristiques telles la rigidité, la légèreté et la résistance à des contraintes d'origine mécanique et thermique.

### **I.6.1. Secteur aéronautique.**

L'aéronautique fait office de pionnier dans l'utilisation des composites à hautes performances (à base de fibres de carbone, kevlar et verre) assemblés assez souvent par collage, avec des hautes performances et ceci depuis plusieurs dizaines d'années. Cette méthode d'assemblage a en effet été mise à profit et développée en raison de son efficacité, de la solidité des assemblages et de l'allègement des structures qu'elle procure. Ainsi, le secteur aéronautique est à l'origine de nombreuses innovations que ce soit pour la formulation de nouveaux adhésifs, le développement de procédés de mise en œuvre, de méthodes de test des assemblages collés ou des matériaux de construction (nids d'abeilles).

L'utilisation des matériaux composites dans la construction aéronautique a débuté vers 1970. Depuis, la proportion des pièces composites a rapidement progressé, en nombre et en importance, d'abord sur les avions militaires, puis sur les avions civils à partir du début des années 1980.

Le secteur aéronautique reste novateur dans ce domaine et doit être considéré comme une source de transfert de technologies vers les autres secteurs industriels, notamment l'automobile, la construction navale, l'armement, et la mécanique [20].

### **I.6.2 Secteur Spatial.**

Les matériaux composites sont utilisés dans l'industrie des satellites, des réservoirs militaires, tuyères, corps de rentrée d'atmosphère,...etc.

### **I.6.3. Les composites dans l'industrie automobile [21].**

Les matériaux composites sont apparus dans l'industrie automobile au milieu des années 1950. À cette époque, les matériaux et les procédés de transformation étaient peu nombreux : essentiellement des matrices polyesters thermodurcissables renforcées par des fibres de verre courtes, mises en œuvre manuellement dans des moules ouverts ou fermés suivant le procédé SMC (Sheet Moulding Compound).

Les matrices peuvent être thermoplastiques (polypropylène, polyamide, polyuréthane,) ou thermodurcissables (polyester, vinylester, époxy, polydicyclopentadiène,...).

Les fibres de renforcement peuvent être en verre, aramide, carbone, thermoplastique, voire végétales, utilisées sous forme coupée court ou longue, continue, tissée, tressée, tricotée....

### **I.6.4. Matériaux composites anticorrosion dans l'industrie.**

Les stratifiés à base de polyesters insaturés, de vinylesters, d'époxydes, de polymères thermoplastiques divers, grâce à leurs excellentes performances (physiques, mécaniques...) et à leur résistance chimique et à la corrosion sont utilisés dans toutes les industries où l'on a besoin de résister à l'eau, à la corrosion ainsi qu'aux nombreux produits chimiques utilisés.

- ✓ L'industrie automobile où les carrosseries doivent résister aux intempéries et à la corrosion.
- ✓ L'industrie mécanique où les matériaux doivent résister aux huiles et aux graisses, voire à d'autres fluides.
- ✓ L'industrie agroalimentaire où les matériaux doivent résister à certains produits agressifs, vinaigre, sauces, produits acides.
- ✓ La construction navale, où les matériaux doivent résister à l'eau de mer pendant de très longues durées [19].

### **I.6.5. Secteur des travaux publics et bâtiments.**

Différentes technologies de réparation et de maintenance des ouvrages sont couramment utilisées depuis de nombreuses années. Le traitement du béton peut faire l'objet d'opérations de ragréage par application de couches de peinture ou de mortier hydraulique ou polymérique après traitement de la poutre dégradée. Les zones fissurées font l'objet d'injection de polymères. Les différentes techniques de renforcement structurel correspondent soit à la projection de béton fibré ou non fibré, soit au collage de tôles d'acier suivant le procédé l'Hermite, soit à l'application d'une précontrainte additionnelle par câbles métalliques ou composites [22].

### **I.6.6. Secteur médical.**

Les applications des composites dans le domaine médical et de sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites à hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part [19].

### I.6.7. Secteur de l'énergie renouvelable.

Etant donné que l'énergie éolienne participe durablement à la lutte contre la pollution atmosphérique, les gaz à effet de serre et les divers déchets industriels, l'intérêt pour le développement technologique d'éoliennes est de plus en plus puissantes et devient aujourd'hui une préoccupation majeure pour les constructeurs mondiaux.

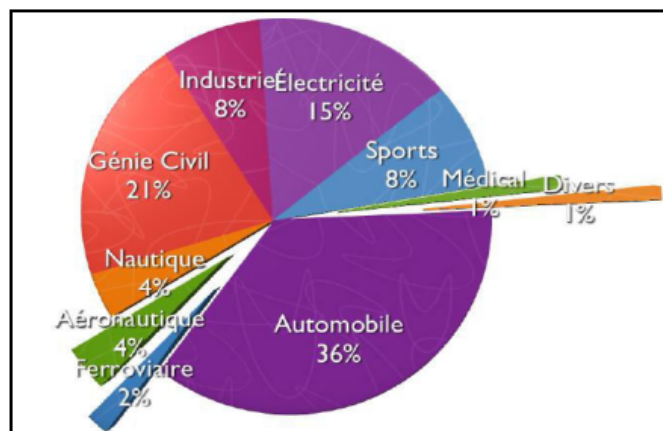
Dans l'industrie moderne des pales d'éoliennes en matériaux composites à base de fibres occupent une place prépondérante . En effet, ces matériaux présentent des avantages attractifs résidants principalement dans les bonnes caractéristiques mécaniques en termes de rigidité et de résistance spécifiques [23].

### I.6.8. Secteur du sport.

Le domaine du sport utilise des composites de haute performance avec un taux de renforts de plus de 70 %. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, et la fiabilité des articles de sport. Les applications rencontrées concernent les raquettes de tennis et de squash, cannes à pêche, skis, planches à voiles, arcs, flèches, javelots, cadres de bicyclette, casques de protection, clubs de golf, avirons, surf,...etc. [24].

### I.6.9. Secteur d'électricité et d'électronique :

Les matériaux composites sont utilisés dans les supports de circuits imprimés, Disjoncteurs, Isolant, Coffrets,...etc.



**Figure I.21** : Répartition des secteurs d'application des matériaux composites.

## Chapitre II : THÉORIE DES PLAQUES

### II.1 Introduction à la théorie d'élasticité

Un comportement élastique signifie que l'application des contraintes mène à des déformations réversibles quand on retire les contraintes, L'élasticité linéaire implique que la relation entre les contraintes et les déformations obéit à une équation linéaire, cette notion est valable seulement dans le cas des petites déformations.

Dans ce chapitre une brève exposition des équations de base de la théorie de l'élasticité et des relations entre contraintes et déformations dans le cas tridimensionnel, sera présentée ultérieurement. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (État plan de déformation et état plan de contrainte). Ce chapitre est consacré aussi à une présentation détaillée de la théorie des plaques.

#### II.1.1 Définition des Forces

Il y a deux sortes de forces qui agissent sur un solide, les forces de volume et les forces de surface. Les forces de volume sont celles qui agissent dans le volume (forces de gravité, électrostatique,...etc.). Les forces surfaciques sont celles qui agissent sur la surface extérieure ou celles de séparation des deux parties d'un seul corps et il résulte de ces forces des déplacements et des déformations. [25]

#### II.1.2 Equations d'équilibre

Tous les problèmes de calcul de structures élastiques se ramènent à un système d'équations aux dérivées partielles, qu'il est souvent difficile à résoudre analytiquement.

Les équations d'équilibre pour un corps élastique déformable par rapport aux axes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.1})$$

avec  $\sigma_{ij}$  les contraintes, et  $f_i$  les forces.

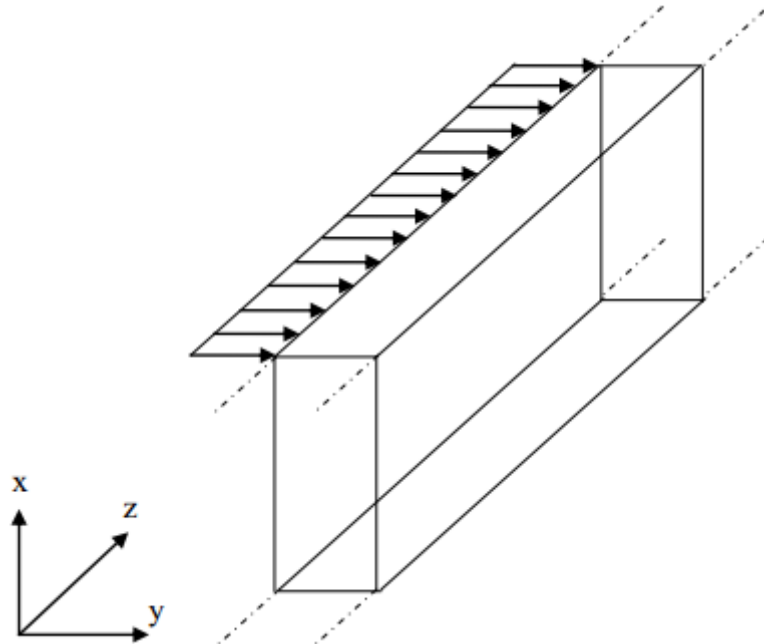
### II .1.3 Etude de la théorie d'élasticité plane

#### II.1.3.1 Etat plan de déformation

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres, et chargé par une force perpendiculaire à la direction de la longueur (Figure. II.1 ). [26]

Un tel problème est défini par le champ de déplacement:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \\ \mathbf{w} = \mathbf{0k} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$



(Figure .I.1) : Cas de l'état plan de déformation

**Figure .II.1** : Cas de l'état plan de déformation

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas où la déformation est plane, les contraintes agissantes sont obtenues à partir des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2G \cdot \varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2G \cdot \varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

$\lambda$  et  $G$  sont les s'exprimes constantes de Lamé. En fonction du module d'élasticité  $E$ , et du coefficient de poisson  $\nu$  ces constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

Inversement  $\varepsilon_x$  ,  $\varepsilon_y$  ,  $\gamma_{xy}$ s'exprime en fonction de  $\sigma_x$  ,  $\sigma_y$  ,  $\tau_{xy}$  :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Z et  $\bar{Z}$  étant nécessairement nuls, les équations d'équilibres deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \alpha \sigma_x + \beta \tau_{xy} = \bar{X} \\ \alpha \tau_{xy} + \beta \sigma_y = \bar{Y} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Les conditions d'intégrations du tenseur de déformation se réduisent à la seule condition :

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

La MEF est toujours associée à l'analyse approximative de la forme faible des équations différentielles, on peut déterminer u qui satisfait :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta u \cdot t ds + \int_{\Omega} \delta u \cdot f d\Omega \quad (\text{II.9})$$

Après intégration dans le premier terme de la partie gauche, on obtient l'équation suivante :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}(\delta u) + \tau_{yx} \varepsilon_{yx}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) \quad (\text{II.10})$$

En utilisant la propriété de symétrie de  $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$  et  $\varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u})$  par rapport à i et j.

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\} \quad (\text{II.11})$$

$\{\varepsilon(\delta u)\}$ ,  $\{\sigma\}$  sont définies par :

$$\{\varepsilon(\delta u)\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\delta u) \\ \varepsilon_y(\delta u) \\ \gamma_{xy}(\delta u) \end{pmatrix}; \{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

### II.1.3.1.1 Matrice des constantes élastiques (matrice contrainte-déformation)

Basée sur la relation entre  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ , on lie  $\{\sigma(\mathbf{u})\}$  et  $\{\varepsilon(\mathbf{u})\}$  par la matrice  $[D]$

$$\{\sigma(\mathbf{u})\} = [D] \{\varepsilon(\mathbf{u})\} \quad (\text{II.13})$$

$[D]$  étant la matrice des constantes élastiques.

Les composantes de  $\sigma_{ij}$  dans  $\{\sigma(\mathbf{u})\}$  sont données par ,

$$\sigma_x = k(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G\epsilon_x - \frac{2G}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (\text{II.14})$$

$$\sigma_y = k(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G\epsilon_y - \frac{2G}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (\text{II.15})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (\text{II.16})$$

On peut les mettre sous forme matricielle :

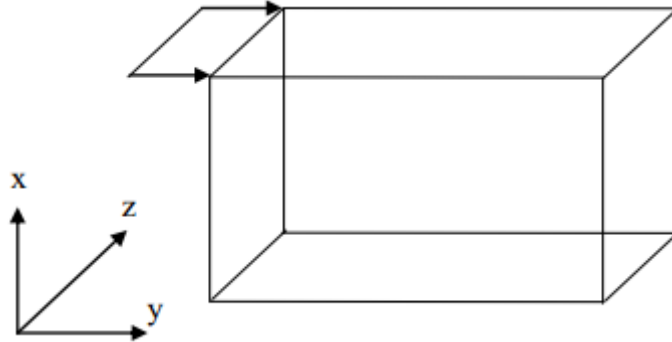
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4G/3 & -2G/3 & 0 \\ -2G/3 & 4G/3 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Les intégrants  $\sigma_{ij}$  et  $\epsilon_{ij}(\delta u)$  dans la partie gauche de la relation (II.9) peuvent être exprimé par :

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\delta u) = \{\epsilon(\delta u)\}^T [D] \{\epsilon(u)\} \quad (\text{II.18})$$

### II.1.3.2 Etat plan de contraintes

Contrairement à la condition de déformation plane, qui stipule que la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimensions suivant x et y ; la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres dimensions figure (II.2).



**Figure. II.2** : Cas de l'état plan de contrainte.

Ainsi les contraintes  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{yz}$ , deviennent nulles . La déformation  $\epsilon_{zz}$  n'est pas nulle par effet de poisson.

Dans les deux cas de figures, états plans de contraintes et de déformations, on peut tirer profit des situations qui les caractérisent pour rendre les calculs plus faciles .De la même manière que pour l'état plan de déformation, on aboutit ainsi à :

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x\epsilon_x(\delta u) + \tau_{xy}\gamma_{xy}(\delta u) + \sigma_y\epsilon_y(\delta u) = \{\epsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\} \quad (\text{II.19})$$

$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta u})\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\}$  sont définie par

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta u})\}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\boldsymbol{\delta u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\delta u}) \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}(\boldsymbol{\delta u}) \end{pmatrix}; \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Dans le cas où la déformation est plane, les relations entre les déformations et les contraintes seront :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} (\boldsymbol{\sigma}_x - \nu \boldsymbol{\sigma}_y) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y = \frac{1}{E} (\boldsymbol{\sigma}_y - \nu \boldsymbol{\sigma}_x) \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\tau}_{xy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}_x + \boldsymbol{\sigma}_y) \end{cases} \quad (\text{II.20.a})$$

Inversement  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$  s'expriment en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$  par les relations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \nu \boldsymbol{\varepsilon}_y) \\ \boldsymbol{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\boldsymbol{\varepsilon}_y + \nu \boldsymbol{\varepsilon}_x) \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} = G \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.20.b})$$

Comme dans le cas de la déformation plane, on a nécessairement  $Z = 0$ ;  $\bar{Z} = 0$ , les équations d'équilibre et les conditions aux limites se réduisent aux équations (II.7) et (II.8). Les conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation se réduisent aux quatre conditions:

$$2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_y}{\partial x^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = k(\text{div} \mathbf{u}) \boldsymbol{\delta}_{ij} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^D(\mathbf{u}) \quad (\text{II.21})$$

### II.1.3.2.1 Matrice des constantes élastiques

Basée sur la relation entre  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ , on lie  $\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\}$  et  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\}$  par la matrice  $[D]$

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\} = [D] \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\} \quad (\text{II.22})$$

Les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  dans  $\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\}$  sont données par,

$$\boldsymbol{\sigma}_x = k (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_x - \frac{2G}{3} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) \quad (\text{II.23})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = k (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_y - \frac{2G}{3} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) \quad (\text{II.24})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = k (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_z - \frac{2G}{3} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\varepsilon}_z) \quad (\text{II.25})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{xy} = G \boldsymbol{\gamma}_{xy} \quad (\text{II.26})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{yz} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma}_{zx} = 0 \quad (\text{II.27})$$

Si on conduit en plus des transformations, on peut donner la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z = \frac{\frac{2G}{3} - k}{\frac{4G}{3} + k} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y) \quad (\text{II.28})$$



La relation (II.23, 24) devienne:

$$\sigma_x = \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2k\right)}{\frac{4G}{3}+k} \epsilon_x + \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} \epsilon_y \quad (\text{II.29})$$

$$\sigma_y = \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} \epsilon_x + \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2k\right)}{\frac{4G}{3}+k} \epsilon_y \quad (\text{II.30})$$

On peut les mettre sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2k\right)}{\frac{4G}{3}+k} & \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} & 0 \\ \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} & \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2k\right)}{\frac{4G}{3}+k} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

De la même façon que précédemment, les intégrants  $\sigma_{ij}$  et  $\epsilon_{ij}(\delta u)$  dans la partie gauche de la relation (II.9) peuvent être exprimés par :

$$\sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\delta u) = \{\sigma(\delta u)\}^T [D] \{\epsilon(u)\} \quad (\text{II.32})$$

### II.1.3.2.2 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte

L'expression de l'énergie de déformation dans l'état de contrainte tridimensionnel peut être écrite sous la forme.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \epsilon^T \{\sigma\} dv \quad (\text{II.33})$$

Où  $\sigma$  est le vecteur pour les six composants de contrainte et contient les six composants correspondants de déformation.

D'après la loi de Hooke, l'équation d'énergie de déformation peut être exprimée en fonction de contrainte comme suit :

$$U = \int_v \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dv \quad (\text{II.34})$$

Dans le cas de l'état plan de contrainte on a :  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  donc l'équation (II.34) devient :

$$U = \int_v \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2) \right] dv \quad (\text{II.35})$$

En utilisant l'équation contrainte / déformation et puis employer l'équation déformation / déplacement on obtient :

$$U = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] t dA \quad (\text{II.36})$$

## II.2-THÉORIE DES PLAQUES

### II.2.1 Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de

voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle

### II.2.2 Définition

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan ) et par une petite épaisseur (notée  $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur, figure II.4 ), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. [27]

### II.2.3 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories;

- 1) **Les plaques isotropes:** elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, cuivre) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques ( $E$  et  $\nu$  : respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson).  
**Les plaques orthotropes:** leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (plaques rédiées). Le comportement de ces plaques est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art. [28]
- 2) **Les plaques anisotropes:** leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

### II.2.4 Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux : la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées :

- 1) La flexion dominante;
- 2) La membrane dominante;
- 3) Le cas mixte;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne. [29]

### II.2.4 Etat membranaire et état flexionnel

L'état de contrainte par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par les efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

**L'état membranaire** s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels.

**L'état flexionnel** regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

- Selon le mode du comportement, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux : L'élément de paroi est défini par la géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (figure. II.3a); les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte.
- L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen); il résiste aux charges agissantes normalement à son plan moyen par un état flexionnel (figure. II .3b).
- L'élément de *plaque-membrane* est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (figure. II.3c); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des structures plissées.
- En fin l'élément structural de plaque est, par nature, la courbe spatiale; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant les solliciter (figure. II.3d); exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc...).[30]

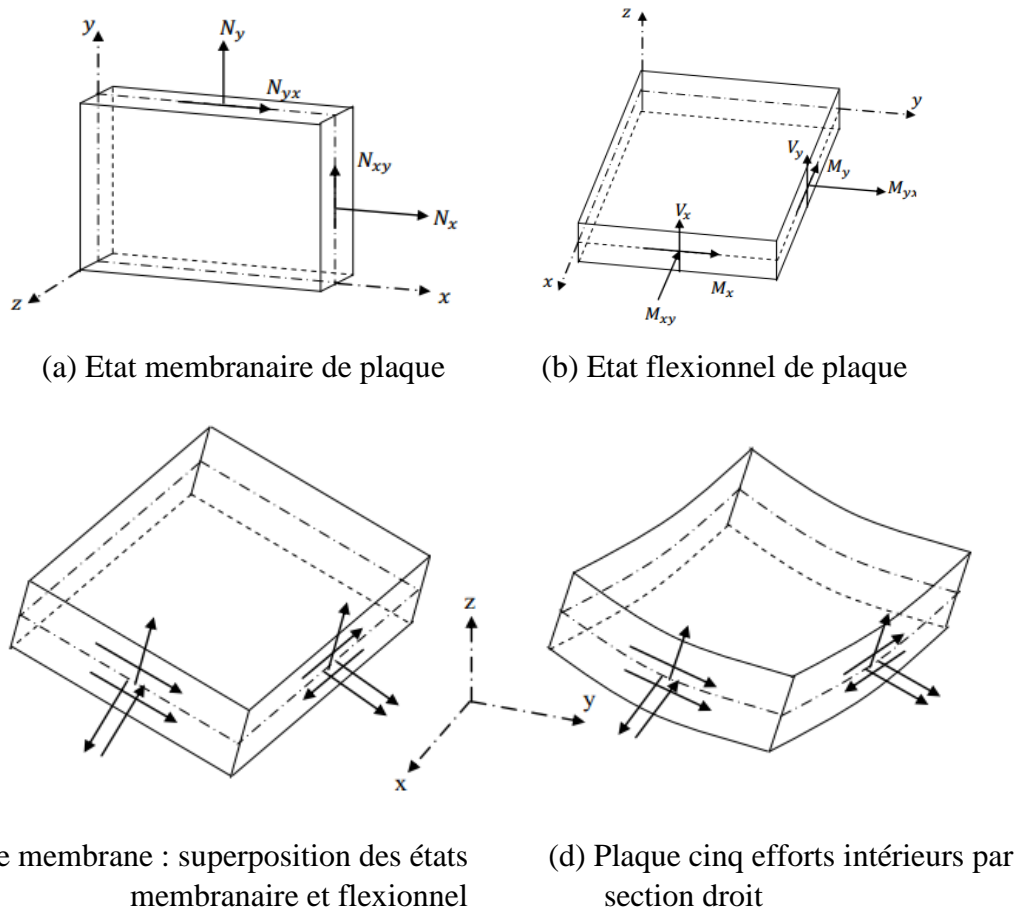


Figure. II.3 : Efforts intérieurs dans une plaque.

## II.2.4 Quelques approches d'analyse des plaques

### II.2.4.1 Plaques minces et épaisses et critère de classification

- Le plan noté A est généralement le plan moyen de la plaque :

$$-t \leq z \leq t \quad \text{avec} \quad t = \frac{h}{2}$$

C'est également le plan neutre si les propriétés matérielles sont symétriques par rapport au plan xy.

Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque retenue dépend des caractéristiques géométriques. On admet généralement les hypothèses de Mindlin si  $4 \leq L/h \leq 20$  et celles de Kirchhoff si  $L/h > 20$  où est une dimension caractéristique dans le plan xy.

- Pour les plaques composites le rôle des déformations de CT dépend non seulement des caractéristiques géométriques (l'élanement  $L/h$ , mais également des caractéristiques mécaniques représentées par le rapport  $E/KG$  (où  $E$  est un module caractéristique intervenant

dans la flexion,  $G$  un module de CT et  $k$  un facteur de correction de CT). comme pour les poutres on peut utiliser le coefficient  $\phi$  pour évaluer l'influence du CT :

$$\phi = (h/l)^2(E/KG) \quad (\text{II.37})$$

#### II.2.4.2 Théorie des plaques minces

La théorie de la flexion des plaques la plus simple est la théorie de Kirchhoff-Love, appelée aussi théorie classique de la flexion (Classical Plate Theory). Elle est basée sur le champ de déplacements suivant:

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Dans lequel  $(u, v, w)$  sont les composantes du déplacement, dans un repère de coordonnées cartésiennes, d'un point appartenant au feuillet moyen (plan de la plaque de coordonnée  $z = 0$ ). Le champ de déplacement, composé des équations (II.38), (II.39) et (II.41), repose sur les hypothèses classiques selon lesquelles une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite et normale après déformation (Figure. II.5.a). Sous ces hypothèses, les déformations à l'effort tranchant et les contraintes normales au feuillet moyen sont négligées : l'état de déformation est généré uniquement par la flexion et les extensions du feuillet moyen (tensions de membrane).

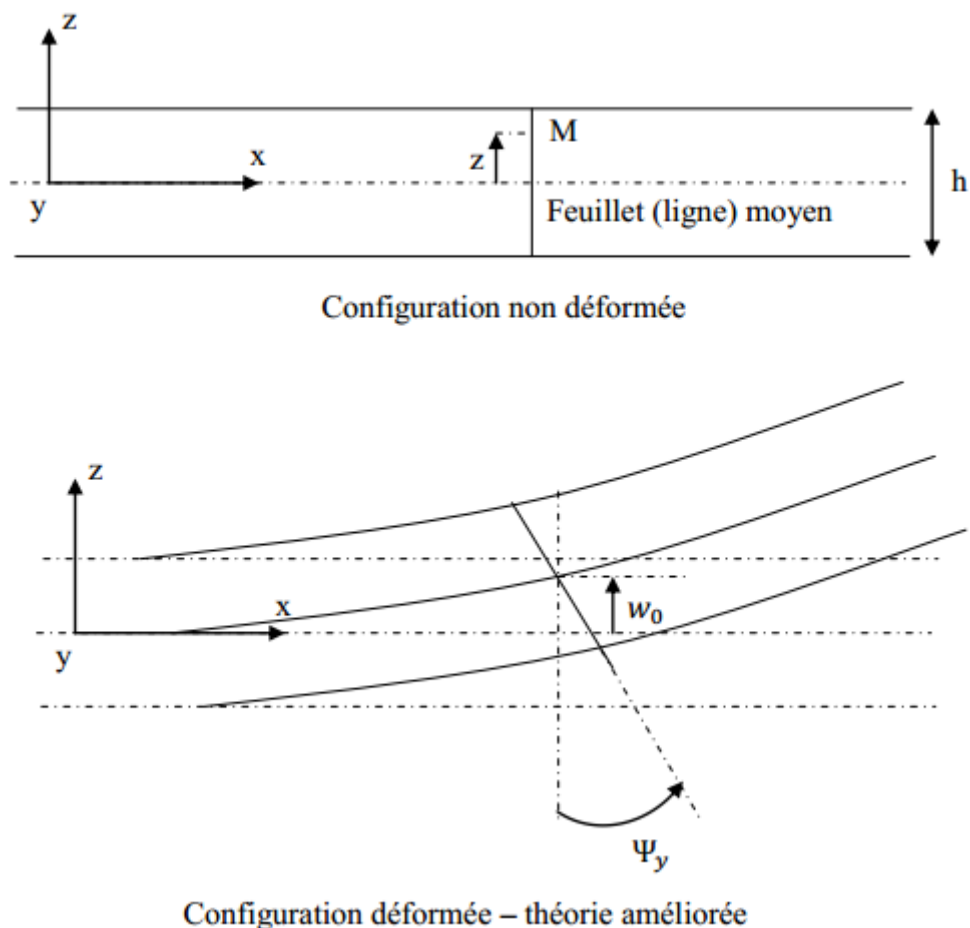
Les bases d'une théorie prenant en compte les déformations au cisaillement ont été posées par Reissner (1945). Puis la théorie complète a été publiée par Mindlin (1951). Cette théorie est connue sous le nom de théorie améliorée (Improved Plate Theory -IPT).

Elle est basée sur le champ de déplacement suivant:

$$\begin{cases} u = -z\phi_y(x, y) \\ v = -z\phi_x(x, y) \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Où les termes  $\phi_y$  et  $\phi_x$  désignent les rotations des sections droites autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement. Selon cette théorie, une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite mais n'est plus normale au feuillet moyen après déformation (Figure. II.5). De plus, il est possible de prendre en compte, en plus des déformations à l'effort tranchant, l'inertie de rotation des sections droites.

Un modèle de plaque plus complexe peut être développé en utilisant comme composantes du champ de déplacement des fonctions de la variable  $z$  d'ordre deux (Reddy (1984)). Ce modèle introduit des nouvelles inconnues dont l'interprétation physique n'est pas évidente. De plus, l'apport de ce type de modèle sur les résultats n'est pas justifié en regard de la complexité introduite dans les calculs (Reddy (1984))[31].



**Figure. II.4 :** Variables cinématiques utilisées pour l'étude des poutres et des plaques en flexion

### II.2.4.3 Théorie des plaques modérément épaisses

La théorie des plaques modérément épaisses, est basée sur :

- L'hypothèse dite des sections droites (ou planes) : les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. Les déplacements  $u$  et  $v$  (suivant  $x$  et  $y$ ) d'un point quelconque  $x, y, z$ , varient alors linéairement en  $z$  et le déplacement transversal  $w$  (suivant  $z$ ) n'est fonction que de  $x$  et  $y$ . Cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont Reissner, Hencky, Boller, Mindlin et permet de prendre en compte l'influence des déformations de cisaillement transversal CT. Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes mais ensuite a été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches.

- L'hypothèse d'une déformation transversale  $\epsilon_z$  nulle (pas de variation d'épaisseur).
- L'hypothèse des contraintes planes : dans les relations de comportement, la contrainte  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.
- L'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite (l'axe  $z$  est l'axe d'orthotropie de toutes les couches).

- La prise en compte d'une loi de comportement de cisaillement transversal CT dépendant de facteurs de correction déterminés a priori par des considérations d'équivalences énergétiques, en généralisant la démarche utilisée pour les poutres et en s'inspirant de la théorie mixte de Reissner.

Cette théorie des plaques, dite du premier ordre (relative aux effets de CT) est appelée, dans la suite de ce chapitre, théorie (ou modèle) de Reissner/Mindlin. Elle fait intervenir (figure I.4) :

- Cinq variables cinématiques indépendantes (les déplacements de membrane  $u$  et  $v$  dans le plan de référence  $z = 0$ , le déplacement transversal  $w$  et les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  de la normale à la surface moyenne dans les plans  $xz$  et  $yz$  respectivement) ;

- Trois efforts résultants de membrane notés  $N_x, N_y, N_{xy}$ ; trois moments de flexion (ou couples) notés  $M_x, M_y, M_{xy}$ ; deux efforts tranchants notés.

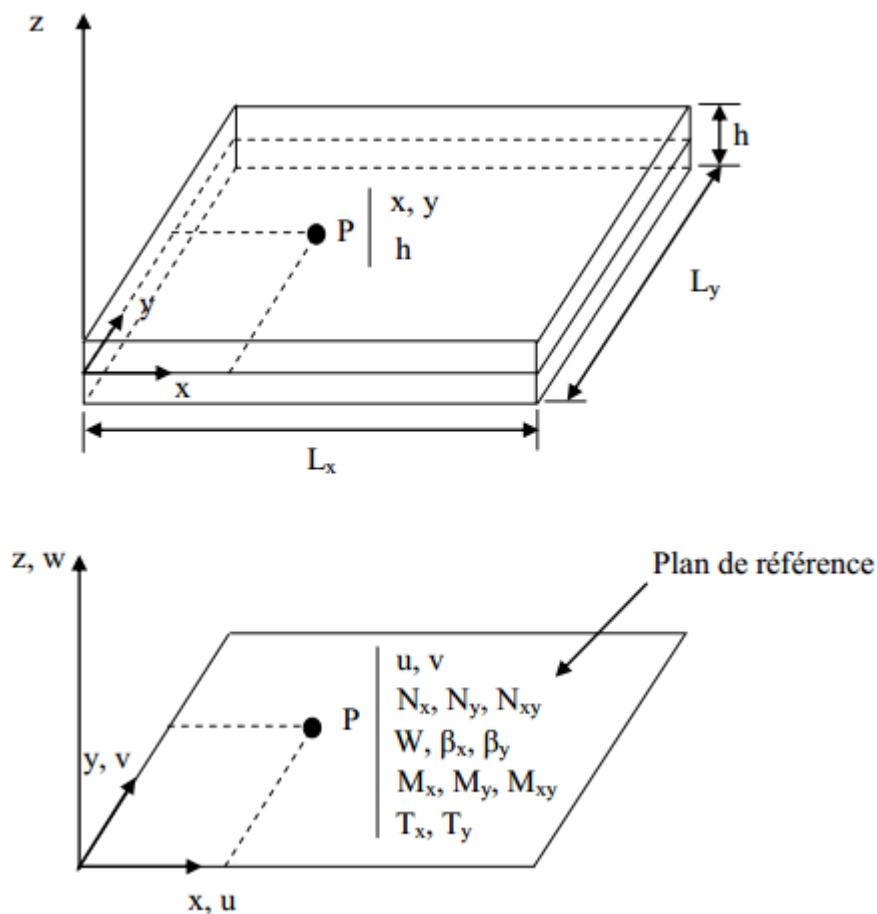


Figure. II.5 : Description d'une plaque (géométrie et variables)

#### II.2.4.4 L'approche multicouche

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [31] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats satisfaisants tridimensionnels, utilisés notamment comme une référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse,...) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoire.

Durant ces dernières années, plusieurs approches bidimensionnelles ont été développées pour la modélisation des structures multicouches tenant compte les cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- L'approche monocouche équivalente
- L'approche par couche
- L'approche développement asymptotique

### II.3 . Elasticité 3D

#### II.3.1. Le champ de déplacement

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Avec  $U_0, V_0$  et  $W_0$  sont :

$U_0$  : déplacement longitudinal.

$V_0$  : déplacement transversal longitudinal.

$W_0$  : déplacement vertical.

#### II.3.2. Relation déformation-déplacement

La relation déformation-déplacement linéaire dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle :



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (II.41)$$

### II.3.3. Relation contrainte-déplacement

La relation contrainte-déplacement en fonction de la déformation angulaire  $\gamma_{ij}(i,j \equiv x,y,z)$  :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.G.\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.G.\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2.G.\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} = G.\gamma_{yz} \\ \sigma_{xz} = G.\gamma_{xz} \\ \sigma_{xy} = G.\gamma_{xy} \end{cases} \quad (II.42)$$

C'est sous la forme matricielle (II.42), et d'après la loi de Hooke devient :

$$\sigma = D.\varepsilon \quad (II.43)$$

Et

$$\varepsilon = C.\sigma \quad (II.44)$$

Où la matrice [D] est donnée par :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (II.45)$$

Le vecteur de déformation peut être écrit sous la forme d'un produit d'une matrice différentielle et le vecteur de déplacement :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

En transformant l'équation (II.43) sous la forme de matrice [l] donnés par :

$$[l] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

$$U = \begin{Bmatrix} v \\ \nu \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

### II.3.4. Energie de déformation

donnez par la relation :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T \cdot \varepsilon dv \quad (\text{II.49})$$

On remplace l'équation (II.43) dans l'équation (II.49) en donne :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon dv \quad (\text{II.50})$$

D'après les deux équations (II.48) et (II.50) donne l'expression de l'énergie de déformation en fonction de champ de déplacement :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_v U^T \cdot l^T \cdot D \cdot l \cdot U dv \quad (\text{II.51})$$

$\{\sigma\}$  : Tenseur de Contrainte.

$\{\gamma\}$  : Tenseur de Déformation angulaire.

$\{\nu\}$  : Coefficient de poisson .

$\{\varepsilon_{ij}\}$  : Tenseur de déformation.

### II.3.5. Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$T_p = \frac{1}{2} \rho \int_v (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dv \quad (II.52)$$

### II.3.6. Equation du mouvement

Pour la détermination des équations différentielles du mouvement nous appliquons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\{q\}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{q\}} + \frac{\partial U_p}{\partial \{q\}} = 0 \quad (II.53)$$

$$L = U_p + T_p \quad (II.54)$$

$U_p$  : Energie de déformation de la plaque

$T_p$  : Energie cinétique de la plaque

$\{q\}$  : Cordonnées généralisées

L'équation de Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\{q\}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{q\}} = [M_p] \{\ddot{q}\} \quad (II.55)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial \{q\}} = [k_p] \quad (II.56)$$

Donc l'équation (II.53) devient

$$[M_p] \{\ddot{q}\} + [k_p] \{q\} = 0 \quad (II.57)$$

$[M_p]$  : Matrice masse

$[K_p]$  : Matrice de rigidité

Dont la solution est une fonction sinusoïdale du type  $q = Ae^{i\omega t}$  ce qui permet d'écrire :

$$\left[ [K_p] - \omega^2 \cdot [M_p] \right] A = 0 \quad (II.58)$$

Où  $\omega$  est la pulsation propre du systèmes vibratoire.

## II.4. Théorie des plaques stratifiées

### II.4.1. caractérisation des matériaux [32]

Selon leur degré de l'anisotropie en distingue plusieurs type de matériau

#### II.4.1.1. matériaux triclinique

Cas générale a matrice de rigidité complète.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

#### II.4.1.2. matériaux monoclinique

Ces matériaux possèdent un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère de symétrie par rapporte à ce plan.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

Avec 13 constantes d'élasticité

#### II.4.1.3. matériaux orthotrope

Les matériaux orthotrope et un matériaux à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux . En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduit aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Avec 9 constantes d'élasticité

#### II.4.1.4. Matériau unidirectionnel :

Les matériaux unidirectionnels possèdent un axe de symétrie, c'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

5 constantes d'élasticité

#### II.4.1.5. Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

#### II.4.2. Relation déformation-déplacement

La relation déformation-déplacement linéaire dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \epsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} ; \epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (\text{II.63})$$

#### II.4.3. Relation contrainte-déplacement [33]

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^k & \bar{C}_{12}^k & \bar{C}_{13}^k & 0 & 0 & \bar{C}_{16}^k \\ \bar{C}_{12}^k & \bar{C}_{22}^k & \bar{C}_{23}^k & 0 & 0 & \bar{C}_{26}^k \\ \bar{C}_{13}^k & \bar{C}_{23}^k & \bar{C}_{33}^k & 0 & 0 & \bar{C}_{36}^k \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44}^k & \bar{C}_{45}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45}^k & \bar{C}_{55}^k & 0 \\ \bar{C}_{16}^k & \bar{C}_{26}^k & \bar{C}_{36}^k & 0 & 0 & \bar{C}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \bar{C}_k \epsilon \quad (\text{II.64})$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : les contraintes normales

$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  : les contraintes de cisaillement

L'indice k identifie les quantités appartenant à la couche kth et  $k \in 1, \dots, K$

$$\bar{C}_k = T_k C_k T_k^T \quad (\text{II.65})$$

$C_k$  : la matrice de rigidité de la couche

$T_k$  : la matrice de transformation

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{13}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{23}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{33}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^k \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Où

$C_{ij}$  sont les coefficients de rigidité de la couche k

$$C_{11}^k = E_1^k \frac{1 - \nu_{23}^k \nu_{32}^k}{\Delta}, \quad C_{12}^k = E_1^k \frac{\nu_{21}^k + \nu_{31}^k \nu_{23}^k}{\Delta}, \quad C_{13}^k = E_1^k \frac{\nu_{31}^k + \nu_{21}^k \nu_{32}^k}{\Delta},$$

$$C_{22}^k = E_2^k \frac{1 - \nu_{31}^k \nu_{13}^k}{\Delta}, \quad C_{23}^k = E_2^k \frac{\nu_{32}^k + \nu_{12}^k \nu_{31}^k}{\Delta}, \quad C_{33}^k = E_3^k \frac{1 - \nu_{21}^k \nu_{12}^k}{\Delta}, \quad (\text{II.67})$$

$$\Delta = 1 - \nu_{21}^k \nu_{12}^k - \nu_{23}^k \nu_{32}^k - \nu_{31}^k \nu_{13}^k - 2\nu_{21}^k \nu_{32}^k \nu_{13}^k$$

$$C_{44}^k = C_{23}^k, \quad C_{55}^k = C_{13}^k, \quad C_{66}^k = C_{12}^k, \quad S_k = \sin \vartheta_k, \quad C_k = \cos \vartheta_k$$

dans lequel  $E_1^k, E_2^k$  et  $E_3^k$  représentent les modules d'élasticité dans les principales coordonnées matérielles.  $G_{12}^k, G_{13}^k$  et  $G_{23}^k$  tenir compte des modules de cisaillement correspondants.  $\nu_{ij}^k$  ( $ij=12, 13, 23$ ) sont les rapports de Poisson. Les trois autres rapports de Poisson  $\nu_{ij}^k$  ( $ij=21, 31, 32$ ) peut être déterminé par l'équation  $\nu_{ji}^k E_j^k = \nu_{ij}^k E_i^k$ . Pour les couches isotropes, seules deux propriétés de matériau indépendantes,  $E$  et  $\nu$  sont spécifiées. Si la couche kth est E

$$E_1^k = E_2^k = E_3^k = E^k, \quad \nu_{ij}^k = \nu^k \text{ et } G_{12}^k = G_{13}^k = G_{23}^k = \frac{E^k}{(2+2\nu^k)} \quad (\text{II.68})$$

#### II.4. Energie de déformation et énergie cinétique

$$U_{kp} = \iiint_{z_k^i}^{z_k^{jk}} \sigma_k \varepsilon_k dx dy dz, \quad (\text{II.69})$$

$$T_{ks} = \frac{1}{2} \rho \iiint_{z_k^i}^{z_k^{jk}} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy dz \quad (\text{II.70})$$

$$[M_p]^k \{\ddot{q}\} + [k_p]^k \{q\} = 0 \quad (\text{II.69})$$



## Chapitre III : Formulation par la méthode des éléments fini MEF

### III.1.Introduction

La méthode des éléments finis est essentiellement une méthode d'approximation d'une fonction inconnue sur un domaine continu par l'utilisation de fonctions généralement polynomiales, sur un ensemble de sous-domaines compatibles avec entre eux et représentant au mieux le milieu d'origine. Principalement, cette technique d'approximation est utilisée pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. L'analyse par la méthode des éléments finis comporte les étapes suivantes :

- ✓ La première consiste en la discrétisation d'un domaine donné en une collection d'éléments finis présélectionnés.

On commence d'abord par la construction d'un maillage qui approxime au mieux le domaine considéré, les nœuds et les éléments. Les éléments sont ensuite numérotés en considérant leurs propriétés géométriques (coordonnées, dimensions, ...).

- ✓ Dans la deuxième étape, on commence par construire la forme variationnelle de l'équation différentielle de l'élément de référence, et on pose la variable  $u$  comme étant la combinaison linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$q = \sum_{i=0}^n q_i \Psi_i \quad (IV.1)$$

Avec :

- $q_i$  : Paramètre à déterminer.
- $\Psi_i$  : Fonction d'approximation

On substitue  $q$  dans la forme variationnelle, on arrive à une équation de la forme :

$$[K^{(e)}]\{q^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$$

Où :

- $[K^{(e)}]$  : Est la matrice de rigidité de l'élément
- $\{q^{(e)}\}$  : Le vecteur déplacement élémentaire
- $\{F^{(e)}\}$  : Le vecteur force élémentaire

Les fonctions d'approximation  $\Psi_i$  sont alors et les éléments de matrices calculés.

- ✓ L'assemblage des équations de tous les éléments pour l'obtention des équations globales du problème se fait au cours de la troisième étape où l'on considère la relation entre les degrés de liberté locaux et globaux tout en considérant la connexion entre éléments en ramenant toujours les nœuds de l'élément à un repère global. La quatrième étape sert à imposer les conditions aux limites du problème, cela consiste à identifier les degrés de liberté spécifiés primitifs ou secondaires selon le problème considéré.



- ✓ Dans la cinquième et avant dernière étape, le système d'équations est résolu, et les variables primaires déterminées.
- ✓ Quant au gradient de la solution et d'autres quantités, ils pourront être calculés au cours d'une sixième et dernière étape à partir des variables primaires déterminées précédemment. [11]

### **III.2.Élément Employé SHELL281**

#### **III.2.1.Description de l'élément SHELL281 [34]**

SHELL281 est adapté pour analyser des structures coques minces et modérément épaisses. L'élément a huit nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud: les déplacements suivant les axes x, y et z et les rotations autour des axes x, y et z.

SHELL281 est bien adapté pour les applications linéaires, à grande rotation et / ou à grande déformation non linéaire. La variation de l'épaisseur de la plaque est comptabilisée dans les analyses non linéaires.

SHELL281 peut être utilisé pour des applications en couches pour la modélisation de coques composites ou de structures sandwich. La précision de la modélisation des coques composites est régie par la théorie qui tient compte de la déformation par cisaillement, généralement appelée théorie Mindlin-Reissner.

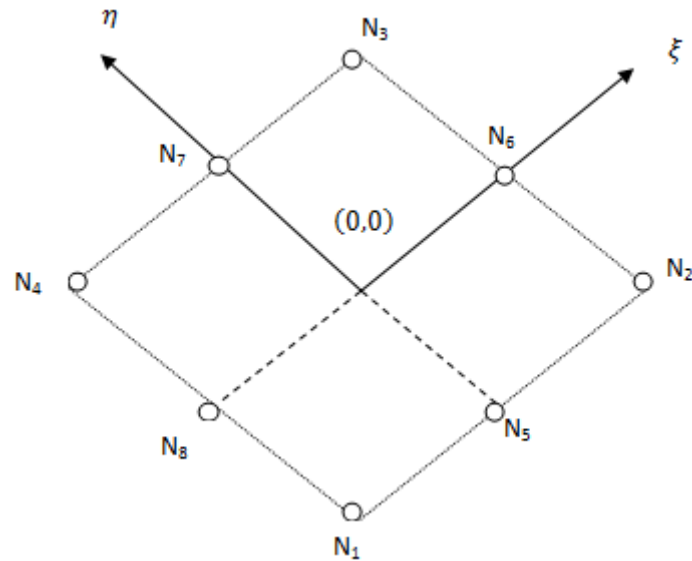


Figure (III.1) l'élément SHELL281

### III.2.2.Fonction de forme

Les fonctions de forme de l'élément bidimensionnel SHELL281 à huit nœuds sont :

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées adimensionnelle, dont le domaine de variation est donné par :

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

## Chapitre IV : Résultats et interprétations

### IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous vous proposons les résultats de notre étude et analyse pour divers exemples d'applications afin d'étudier l'influence de fissure sur les fréquences propres de vibrations des plaques isotrope et composite. Nous étudions la fissure avec différentes longueurs et diverses orientations d'angle.

### IV. 2. Matériels du travail

Le travail a été réalisé avec micro-ordinateur hp pavilion de configuration suivante :

- Système d'exploitation Win7 (64)
- Intel® Core™ I3-4030U CPU @ 1,9GHz (4 CPUs)
- Stockage : 500Go
- Ram : 4Go
- Logiciel : ANSYS Workbench version 17.0

### IV.3. Description logiciel ANSYS Workbench :

ANSYS Workbench est une plate-forme de simulation qui permet aux utilisateurs de modéliser et de résoudre une large Gamme de problèmes d'ingénierie utilisant la méthode des éléments finis.

Il donne accès à la famille ANSYS Des modules de conception et d'analyse dans un environnement de simulation intégré. ANSYS Workbench est une plateforme particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièce) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plateforme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la résolution. Le modèle éléments finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS.[34]

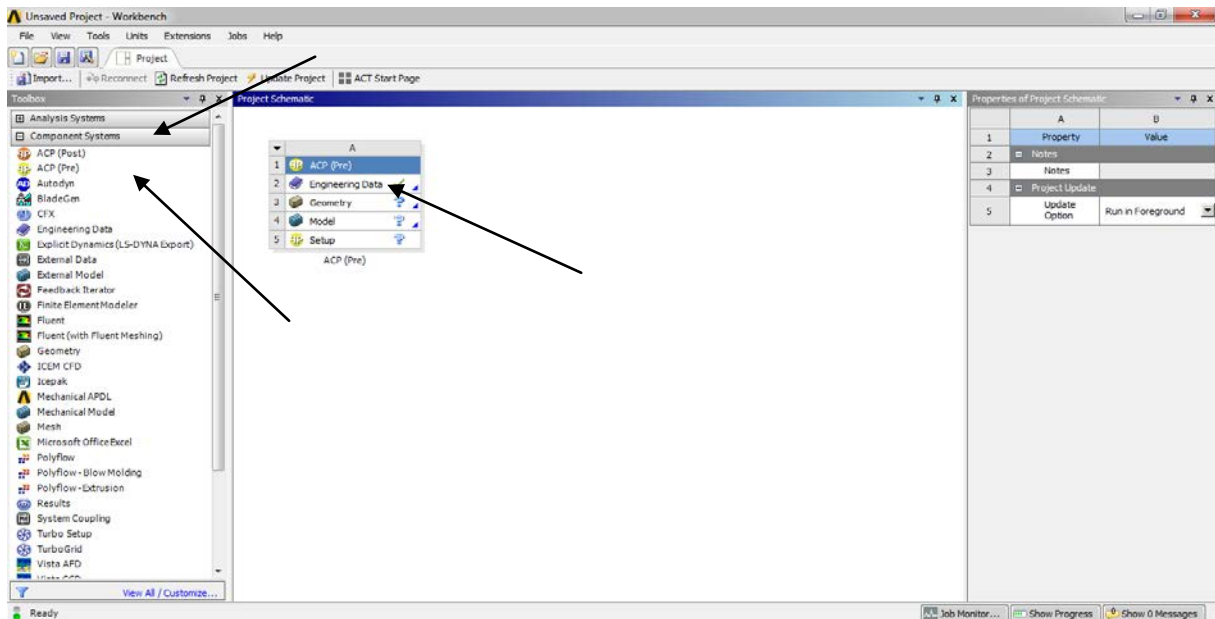
### IV.4. Modélisation des plaques

#### IV.4.1. Procédure de modélisation dans ANSYS Workbench

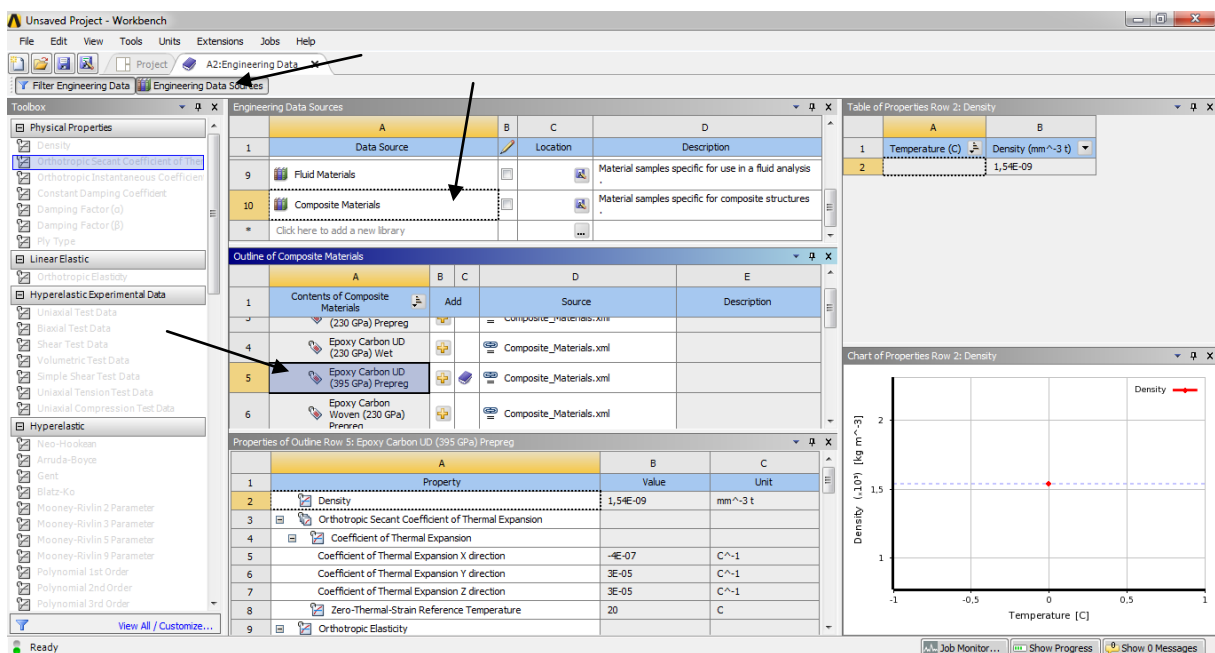
Dans ANSYS Workbench le module **ACP(pre)** est utilisé pour les matériaux composite. Les étapes sont détaillées comme suit :

## Chapitre IV : Résultats et interprétations

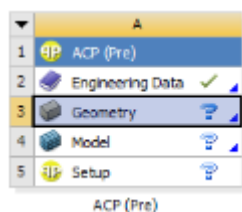
- Aller à Component Système > ACP(pre) > Engineering Data



- Dans la prochaine étape, aller à Engineering Data > composite materials > Epoxy Carbon UD (395Gpa) , et pour la matrice > Resin Epoxy



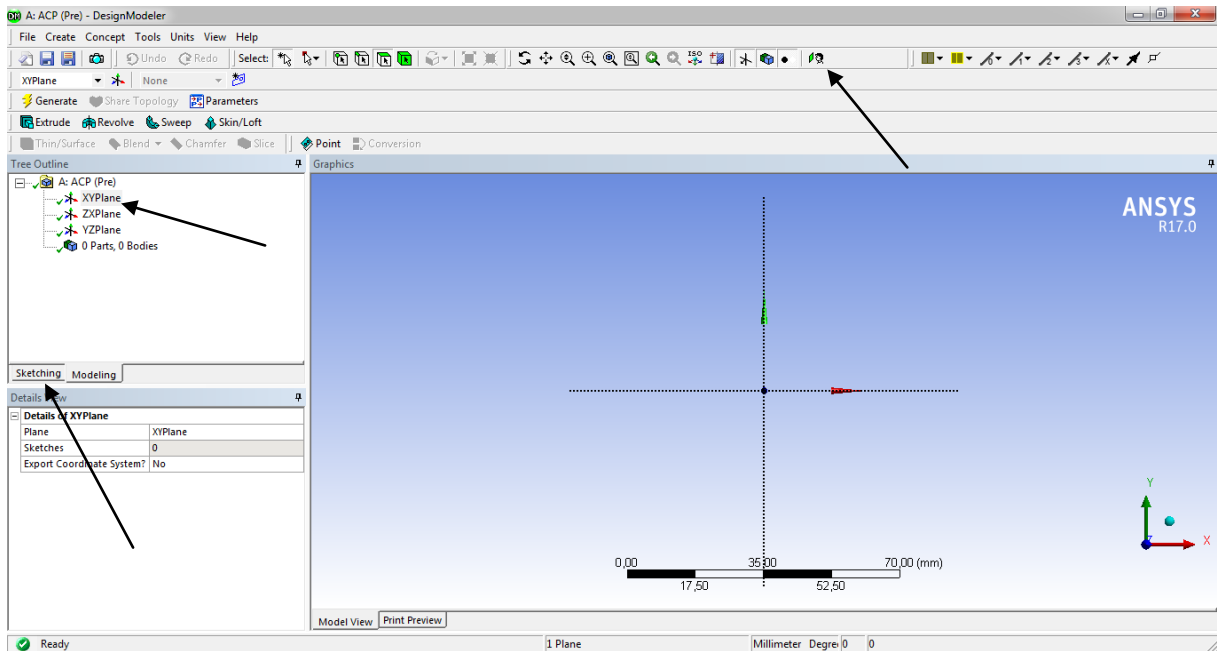
- ✓ Les étapes de la géométrie



Pour la géométrie on à le module **Design Modeler**

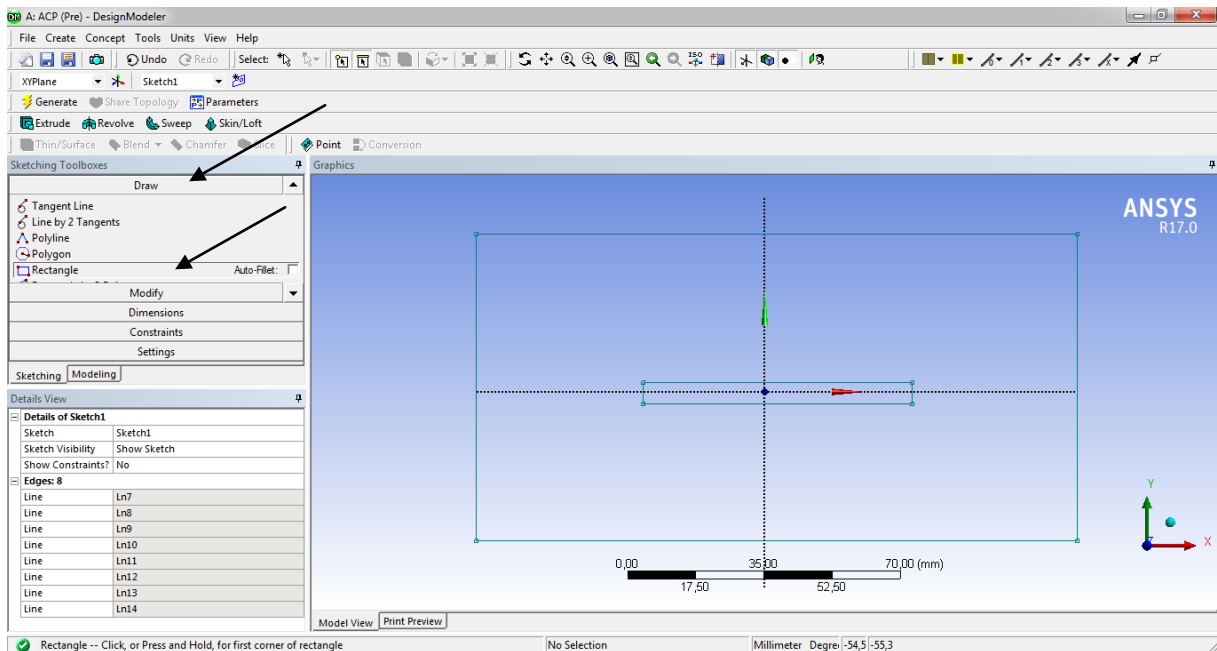
## Chapitre IV : Résultats et interprétations

- Aller à XYPlane > look At Face/plane/Sketch> Modeling



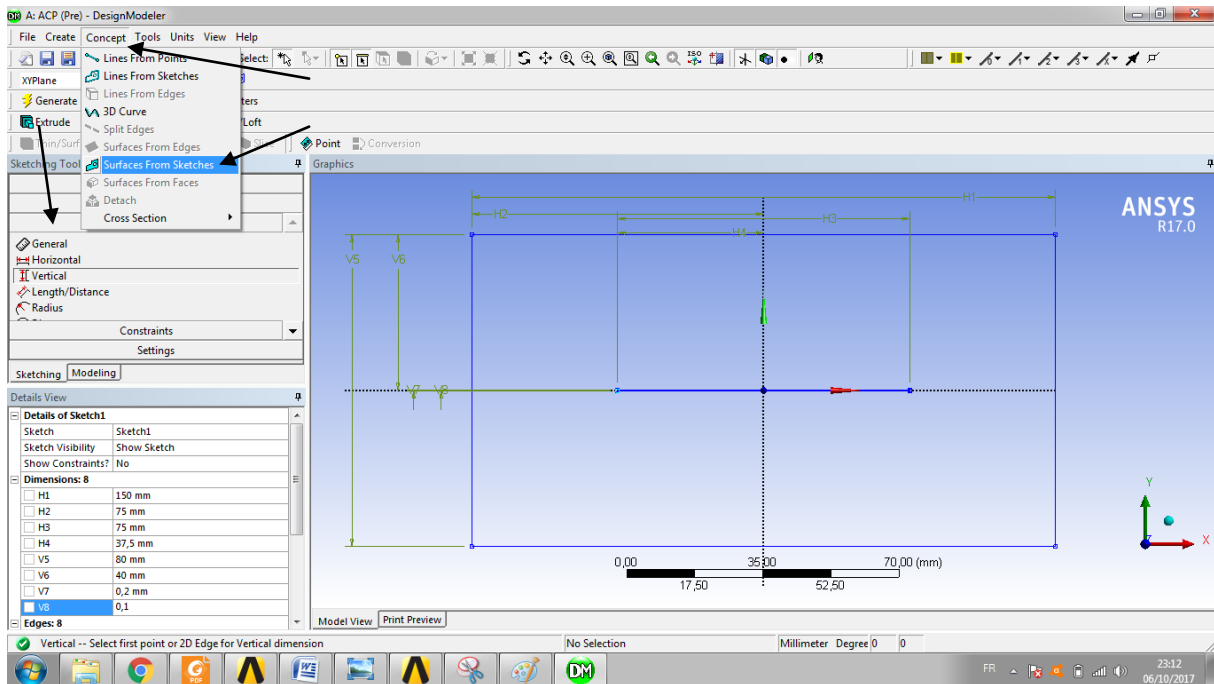
Pour dessiner un rectangle à partir de deux points glissée la Souris De point en point

- Aller à Draw > Rectangle



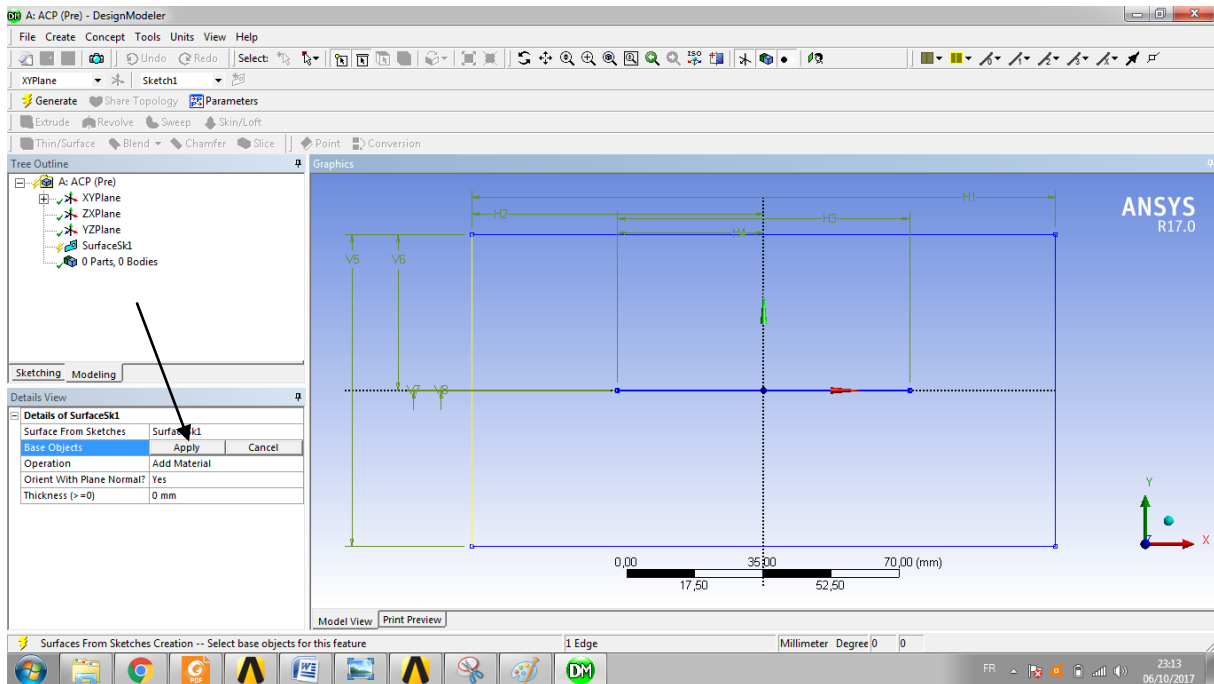
## Chapitre IV : Résultats et interprétations

- Dans la prochaine étape Aller à Dimension > concept > surfaces from sketches



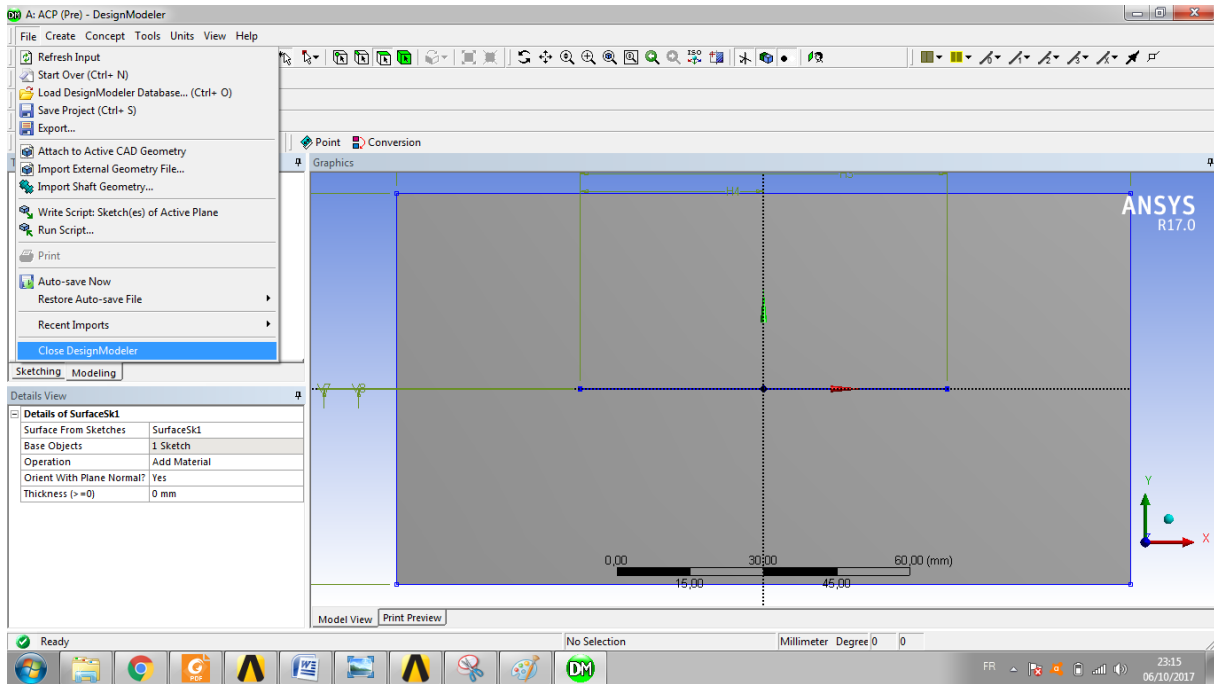
Dans la prochaine étape sélectionné le rectangle

- Aller à Apply

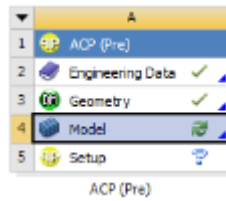


## Chapitre IV : Résultats et interprétations

- Aller à File > Close Design Modeler

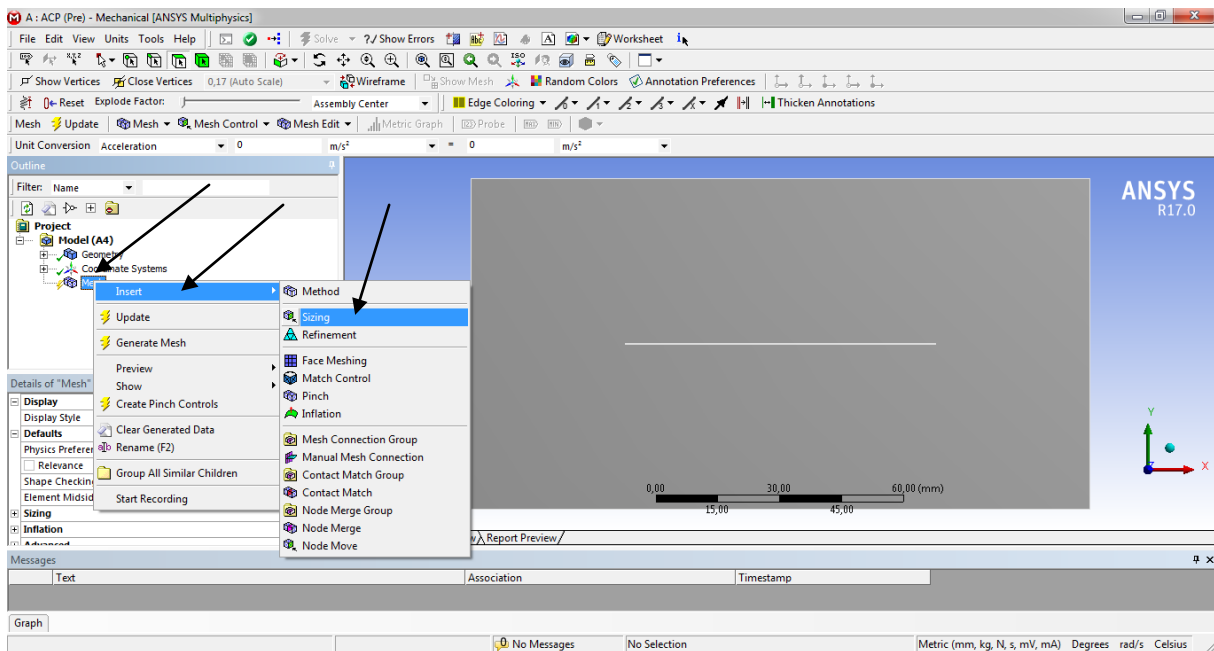


- ✓ Les étapes de maillage



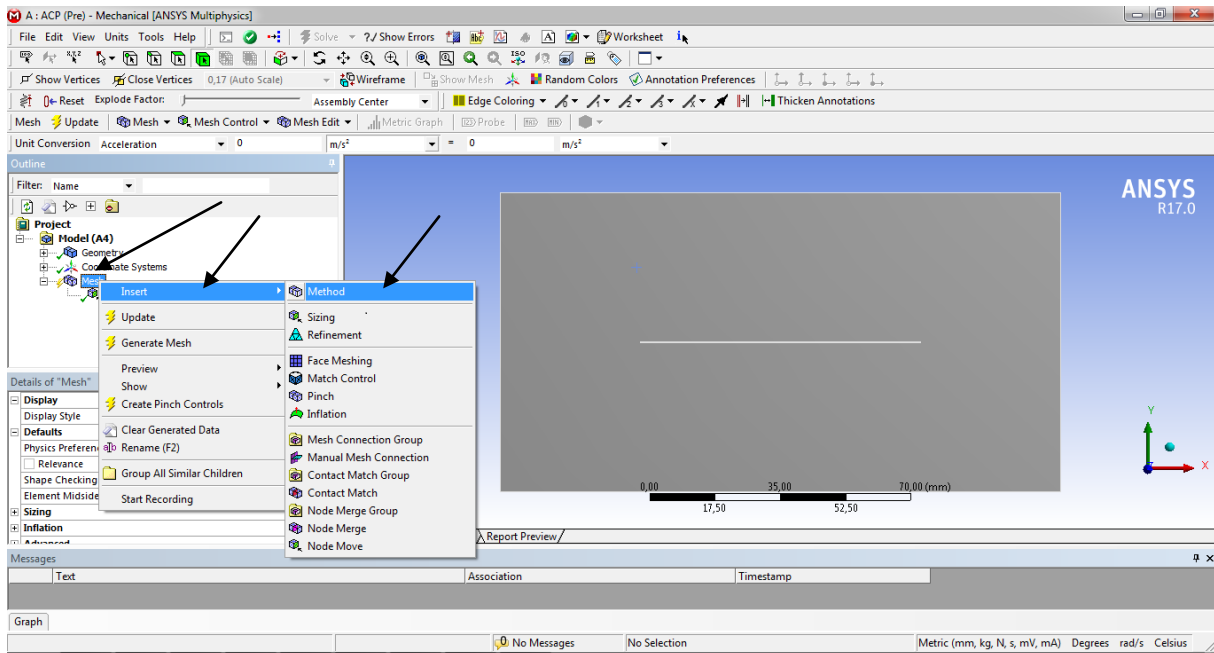
Pour le maillage on à le module **Mechanical**

- Aller à Mech > Insert > Sizing

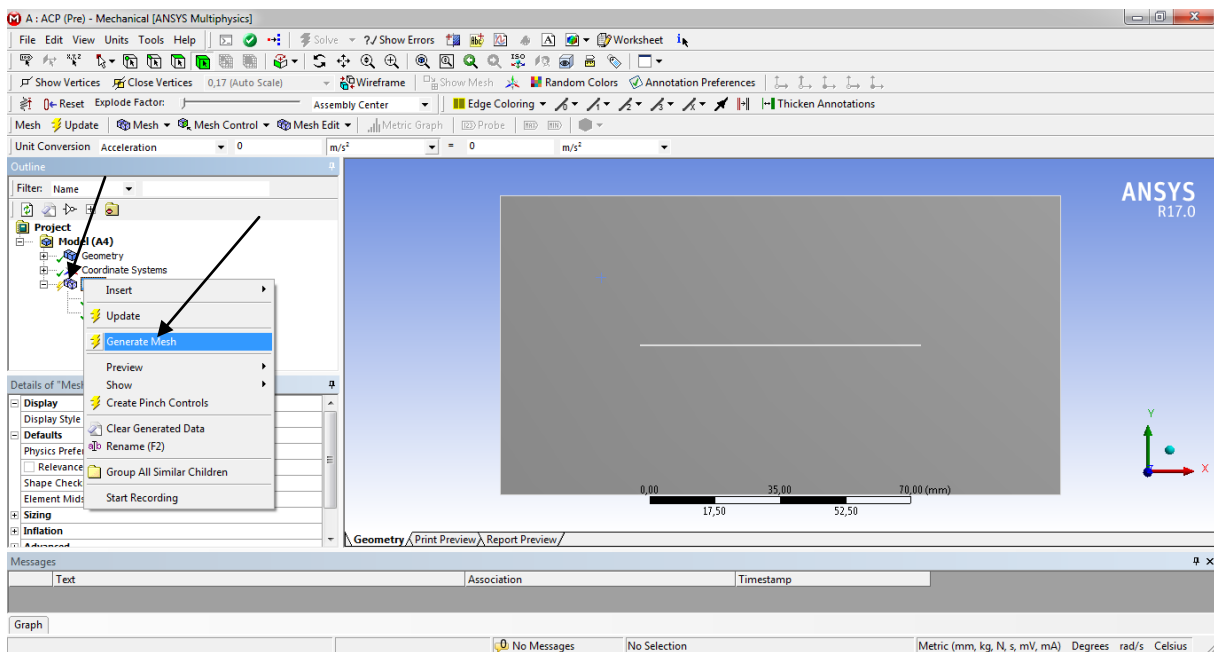


## Chapitre IV : Résultats et interprétations

- Dans la prochaine étape Aller à Mech >Insert >Method



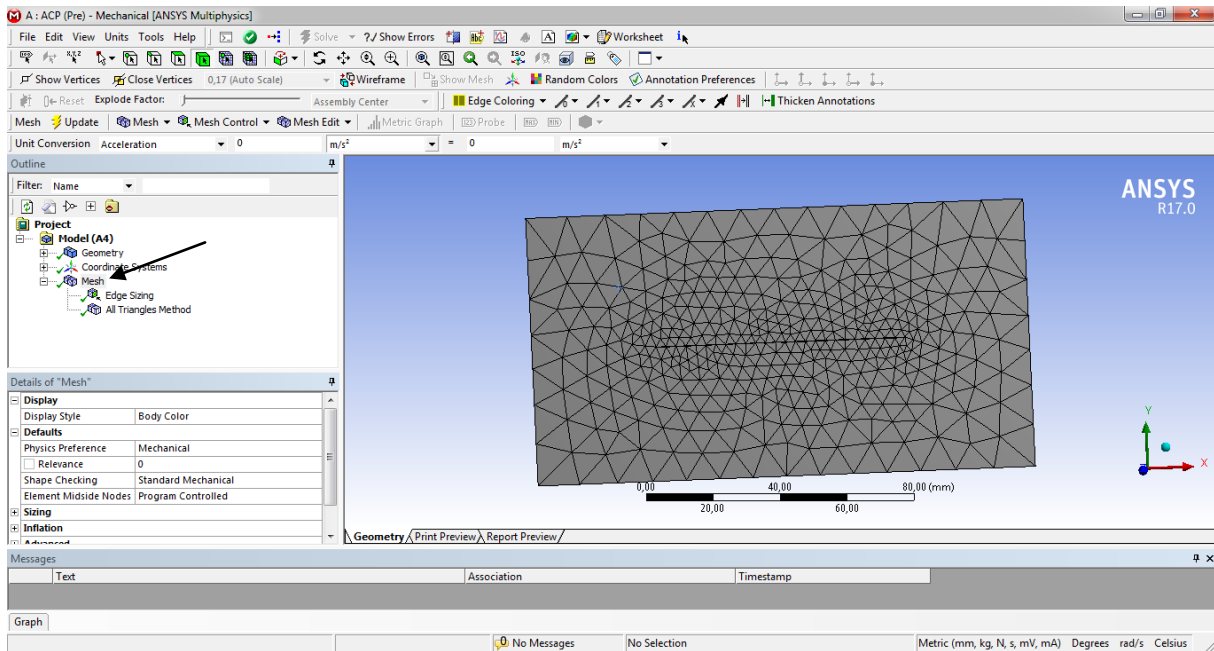
- Aller à Mech >Generate Mech



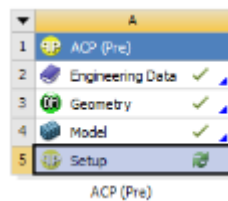


## Chapitre IV : Résultats et interprétations

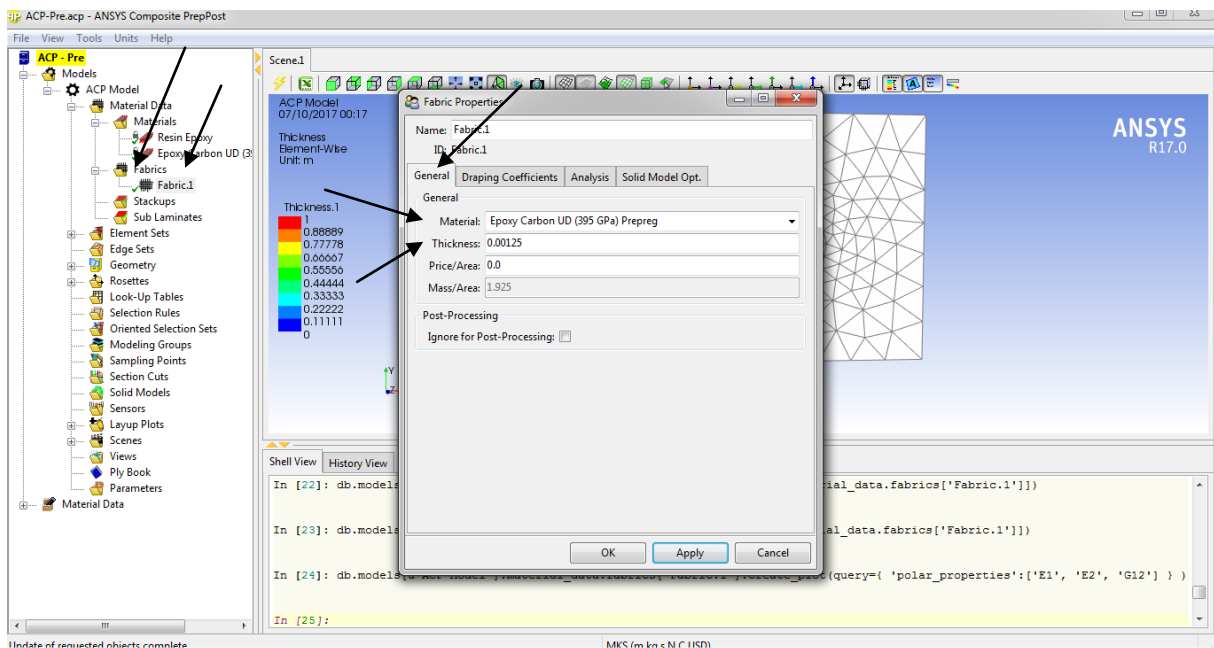
- La dernière étape de maillage Aller à Mech



- ✓ Les étapes pour crée les couche de la plaque

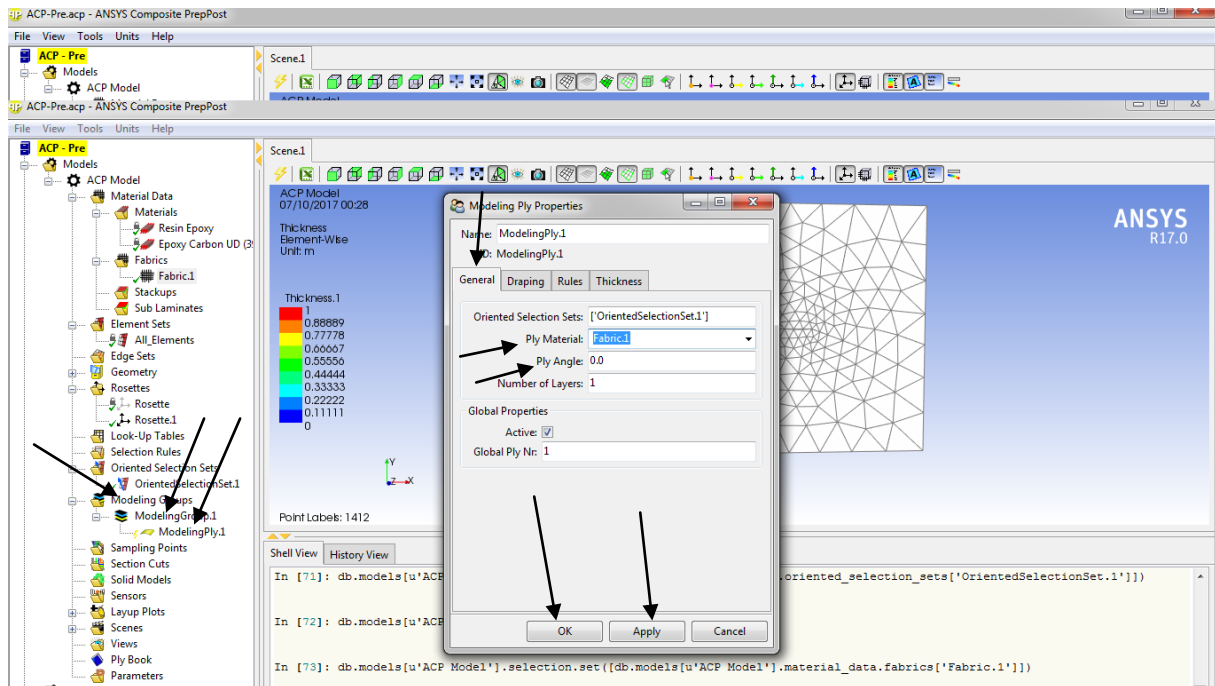


Aller à Fabrics > Fabric.1 > Général > Material > Thickness >Apply>OK



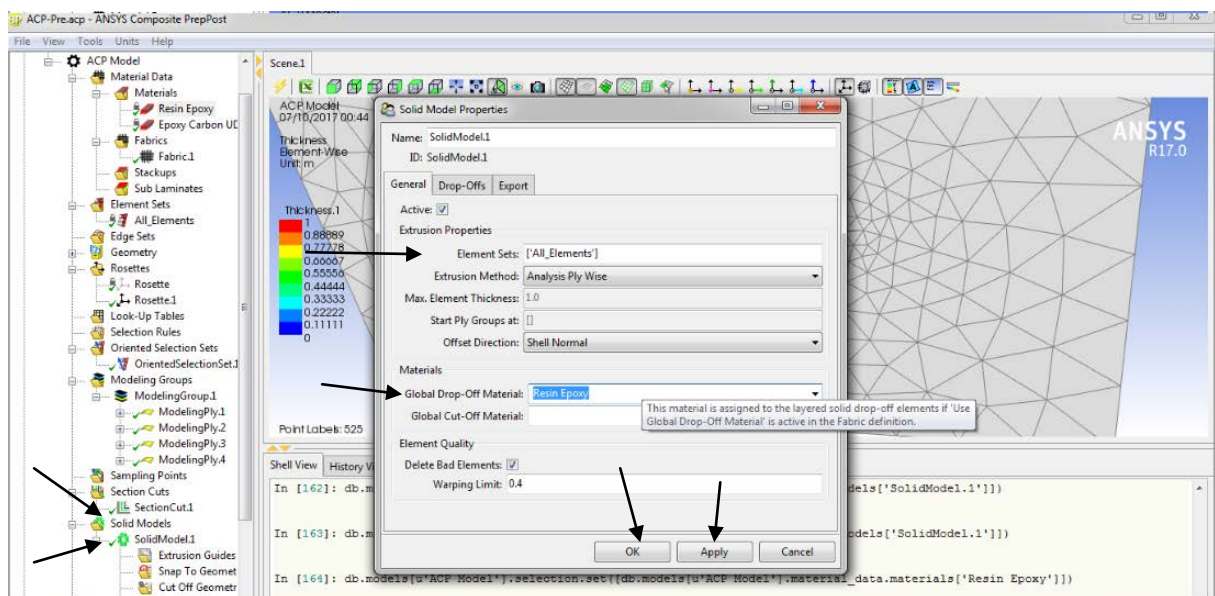
## Chapitre IV : Résultats et interprétations

Dans la prochaine étape aller à Modeling Groups > Create Modeling Groups > ModelingPly1 >General >ply Material(Fabric 1) >Ply Angle (0°)>Apply > OK

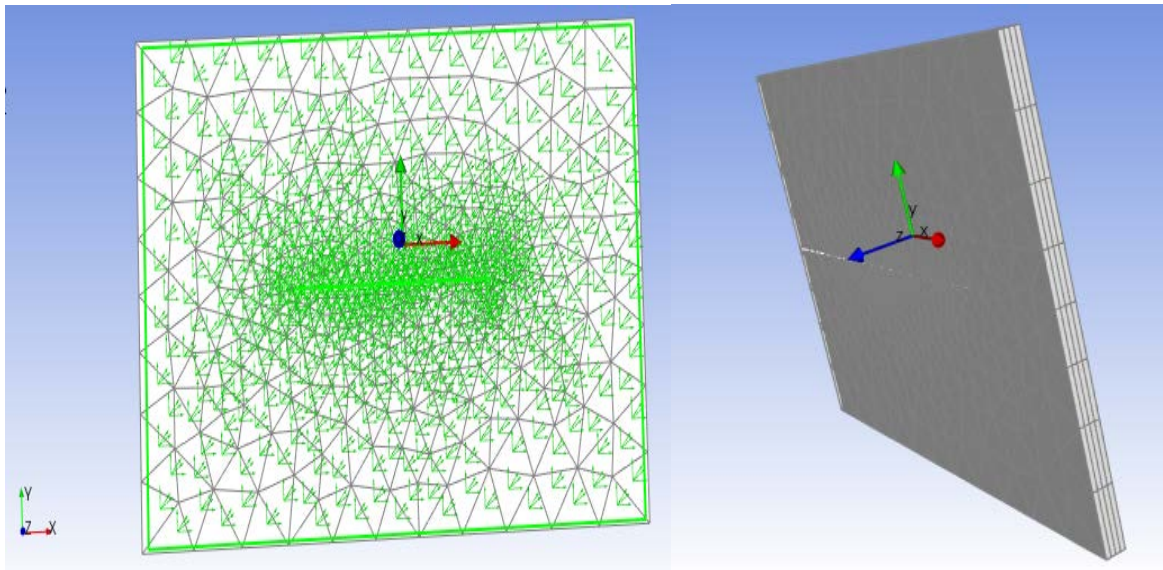


Nous répète cette étape pour différent orientation des fibres 0°/30°/45°/90°

Après ces étapes aller à Solid Models > Create Solid Models > Solid Models.1>Element Sets ( All\_Elements)>Global Drop-Off material ( Resin Epoxy ) >Apply >OK



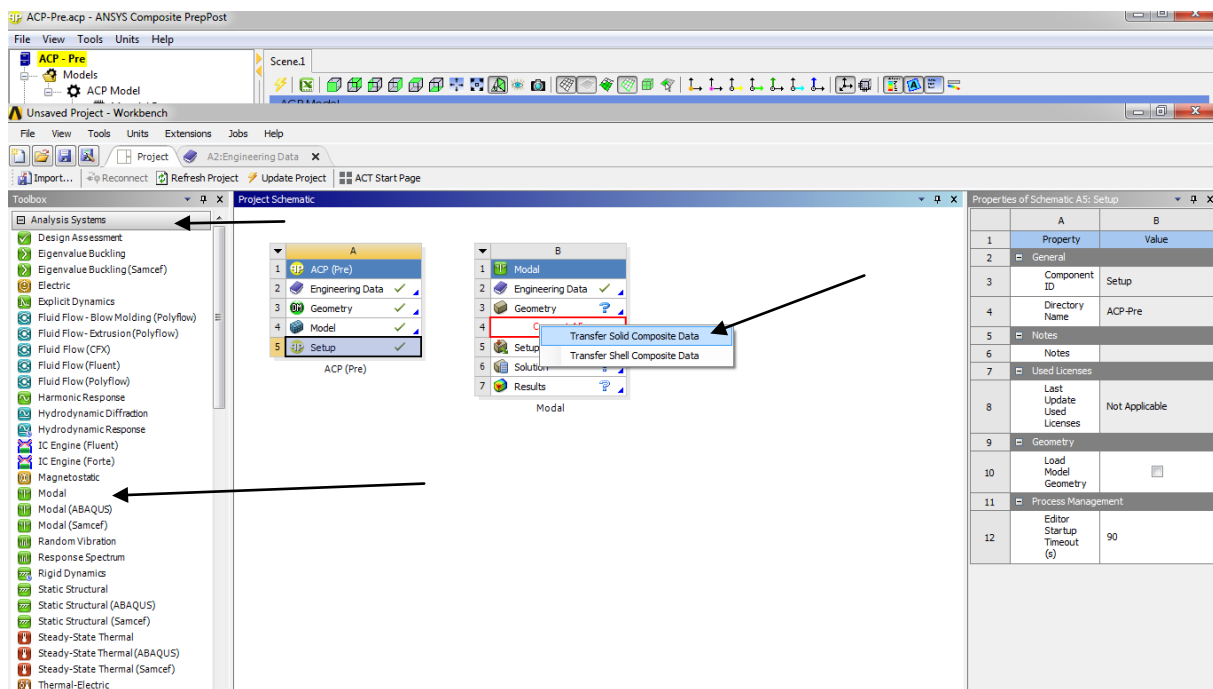
La plaque deviens



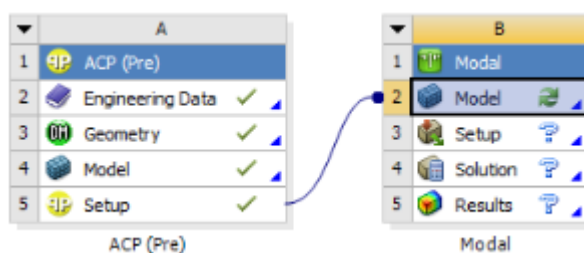
- **Les étapes de l'analyse de vibration**

Pour cela on utilise le module **Modal**

Aller à Analysis Systems > Modal > Transfer Solid Composite Data

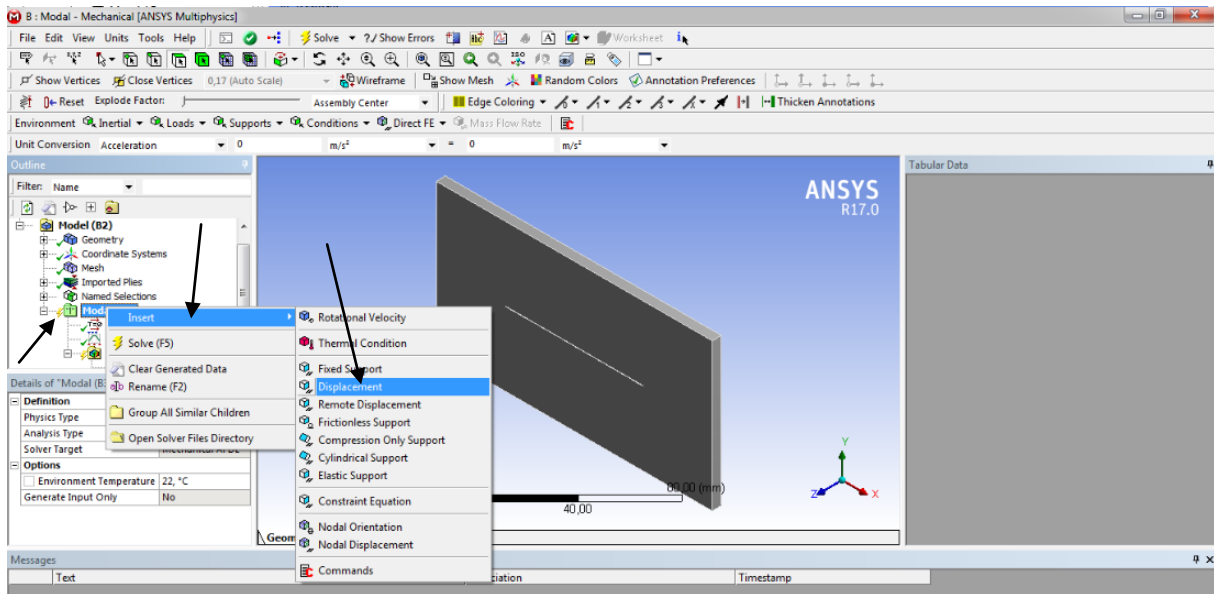


Aller à Modal



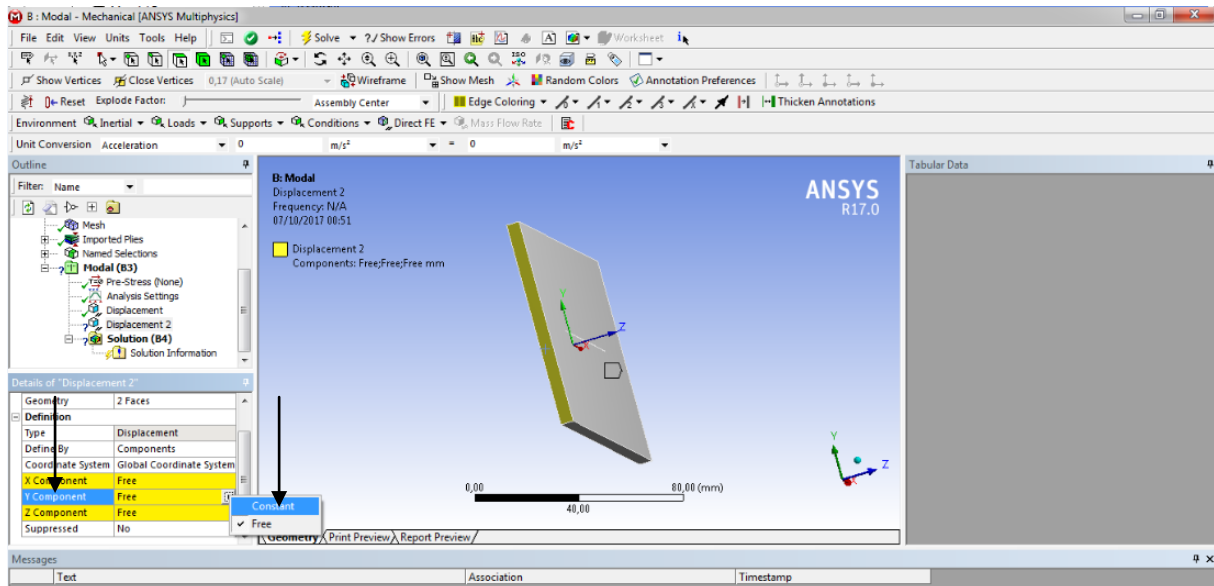
## Chapitre IV : Résultats et interprétations

Dans la prochaine étape aller à Modal(B3) > Insert > Displacement



Sélectionné 2 face selon OX et aller à Y Component > constant

Z component > constant

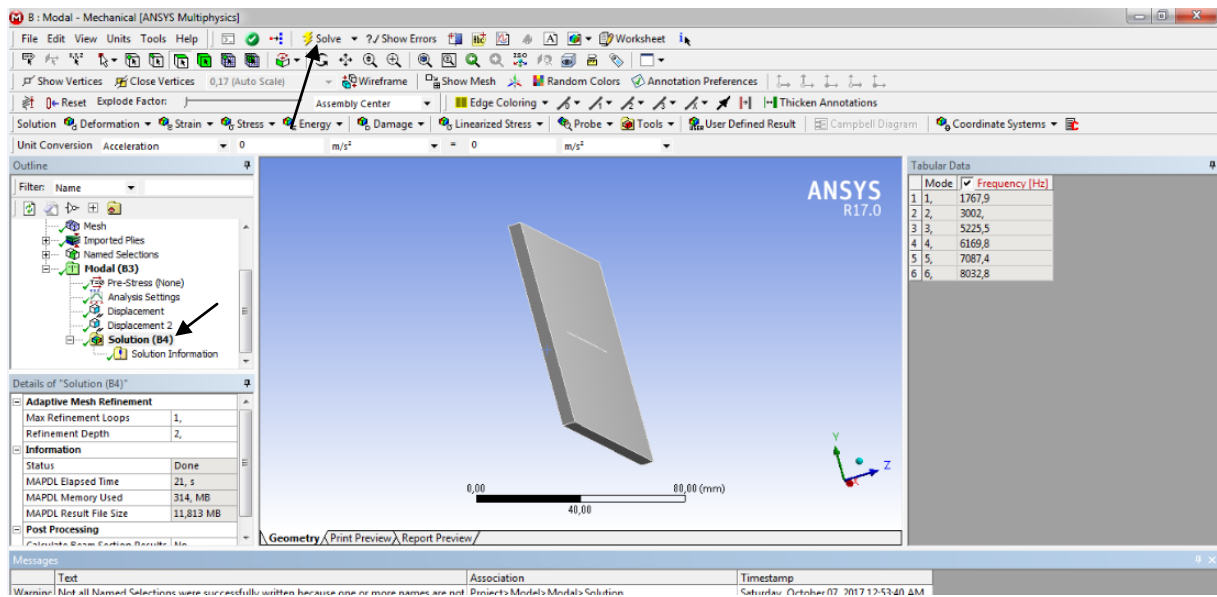


Nous répète cette étape pour les face perpendiculaire à OY , X Component > Constant

Z Component > Constant

Après cela aller à Solve > solution > Tabular Data

## Chapitre IV : Résultats et interprétations



### IV.4.2.plaque isotrope fissuré au centre

Considérons une plaque isotrope de dimension  $L$   $W$   $h$  ayant fissure au centre comme une Montré à la figure(IV.1) la plaque et simplement appuyé,

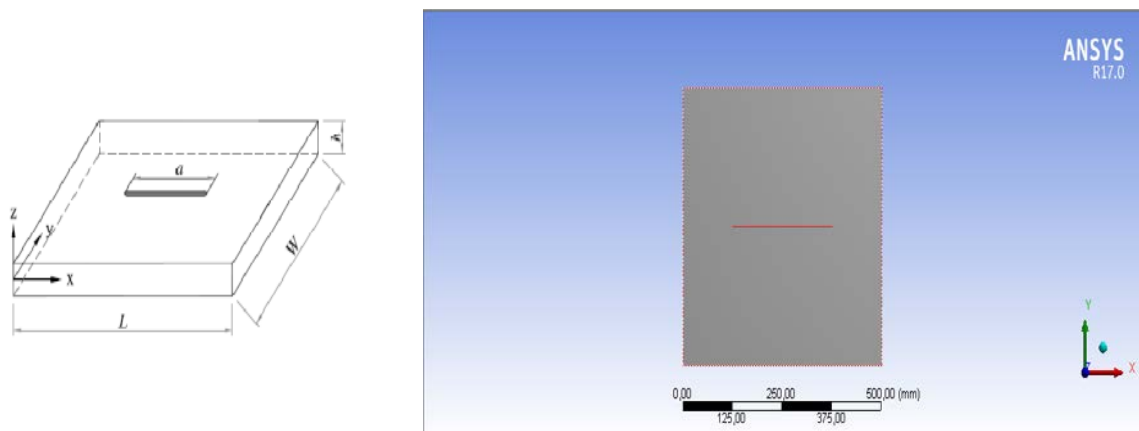


Figure (IV.1) model de plaque fissuré au centre

#### IV.4.2.1. Convergence par raffinement du maillage

Considérons un maillage d'éléments finis et appelons  $l$  la dimension caractéristique d'un élément. On subdivise toujours davantage le domaine, en éléments toujours plus petits,

chaque nouvelle division contenant la précédente, et on conserve, pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ.[32]

**Le tableau (IV.1) :** présente une étude de convergence la discrétisation est réalisée avec un élément ANSYS (3D) la division varie de 20x20 à 100x100 . La convergence est celle des cinqu première fréquence

**Tableau (IV.1):** étude de convergence des fréquences naturelles pour une plaque mince.

L/h =100

L/a	Mode	20x20	25x25	30x30	50x50	100x100
0	1	19,8	19,8	19,8	19,8	19,8
	2	49,477	49,476	49,476	49,476	49,476
	3	49,477	49,476	49,476	49,476	49,476
	4	79,125	79,124	79,124	79,124	79,124
	5	98,882	98,878	98,875	98,874	98,874
0,5	1	17,772	17,747	17,732	17,713	17,711
	2	43,365	43,12	43,056	42,867	42,782
	3	48,825	48,804	48,791	48,775	48,764
	4	77,83	77,772	77,749	77,69	77,664
	5	82,367	82,232	82,154	82,057	81,989

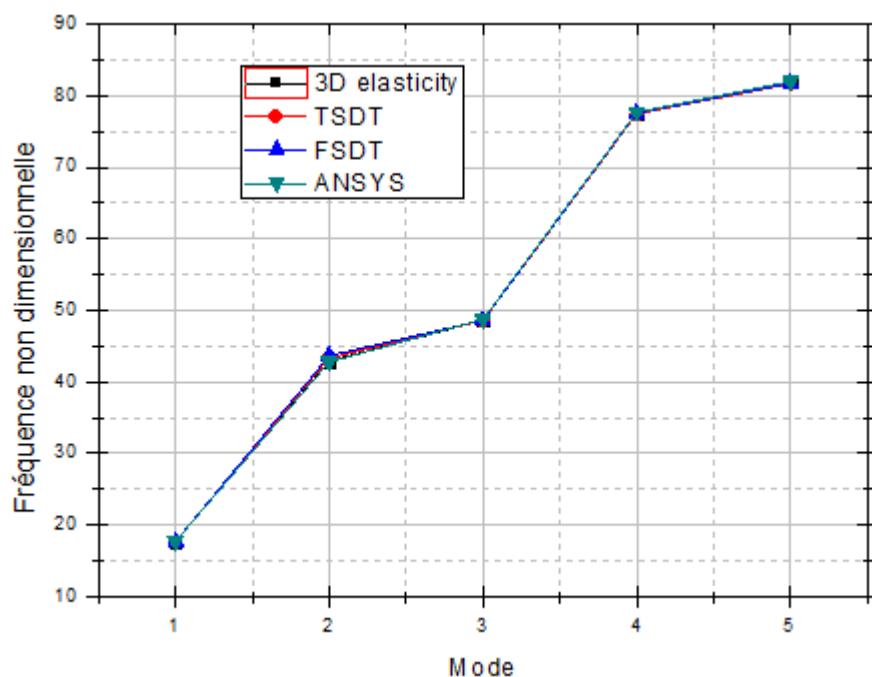
On remarque une bonne convergence de la méthode pour la plaque non fissurée mais elle est moins rapide en présence de fissure et surtout pour les modes supérieurs.

#### IV.4.2.2. validation

**le tableau (IV. 2)** révèle l'effet du rapport L / h sur les cinq premiers Fréquences  $\hat{\omega}=\omega L^2\sqrt{Ph/D}$  h d'une plaque intact et plaque fissuré au centre (a / L = 0,5), où  $D=Eh^3/(12(1-\nu^2))$  est le Rigidité à la flexion de la plaque., la référence [3] utilise l'élasticité 3D et[5] utilise la TSDT et [34] utilise FSDT,

**Tableau (IV. 2) :** Effet du rapport  $L/h$  sur la fréquence non dimensionnelle  $\omega$  de la plaque fissuré au centre ( $a/L = 0,5$ ).

L/h	Source	Mode1	Mode2	Mode3	Mode4	Mode5
10	3D elasticity[35]	16.7507	36.6804	44.7765	67.2474	70.8494
	TSDT[34]	16.7205	37.2500	44.4276	66.8942	70.3951
	FSDT[34]	16.7155	36.8069	44.6413	67.0764	70.5312
	ANSYS	<b>16.9024</b>	<b>36.5575</b>	<b>46.3980</b>	<b>67.2144</b>	<b>69.3287</b>
20	3D elasticity [35]	17.3092	40.5798	47.4863	74.1539	77.9872
	TSDT[34]	17.2894	40.9878	47.2903	73.9589	77.6872
	FSDT[34]	17.2810	40.7329	47.4410	74.1472	77.8016
	ANSYS	<b>17.3313</b>	<b>41.2929</b>	<b>42.2039</b>	<b>74.8129</b>	<b>78.6156</b>
100	3D elasticity [35]	17.6892	42.8930	48.6429	77.5246	81.9196
	TSDT[34]	17.6638	43.3424	48.5695	77.4614	81.7008
	FSDT[34]	17.6595	43.6574	48.6100	77.5809	81.7446
	ANSYS	<b>17,7111</b>	<b>42,7822</b>	<b>48,7643</b>	<b>77,6644</b>	<b>81,9895</b>



**Figure (IV.2)** Comparaison des fréquences naturelle calculées par les références [35],[34], et résultats obtenus sous ANSYS dans le cas de la plaque SSSS

La figure (IV.2) est une représentation graphique du Tableau (IV. 2) . on remarque que les résultats obtenus sont en concordance avec les résultats des [35],[34], Les résultats de structure par les éléments finis sous ANSYS est correcte.



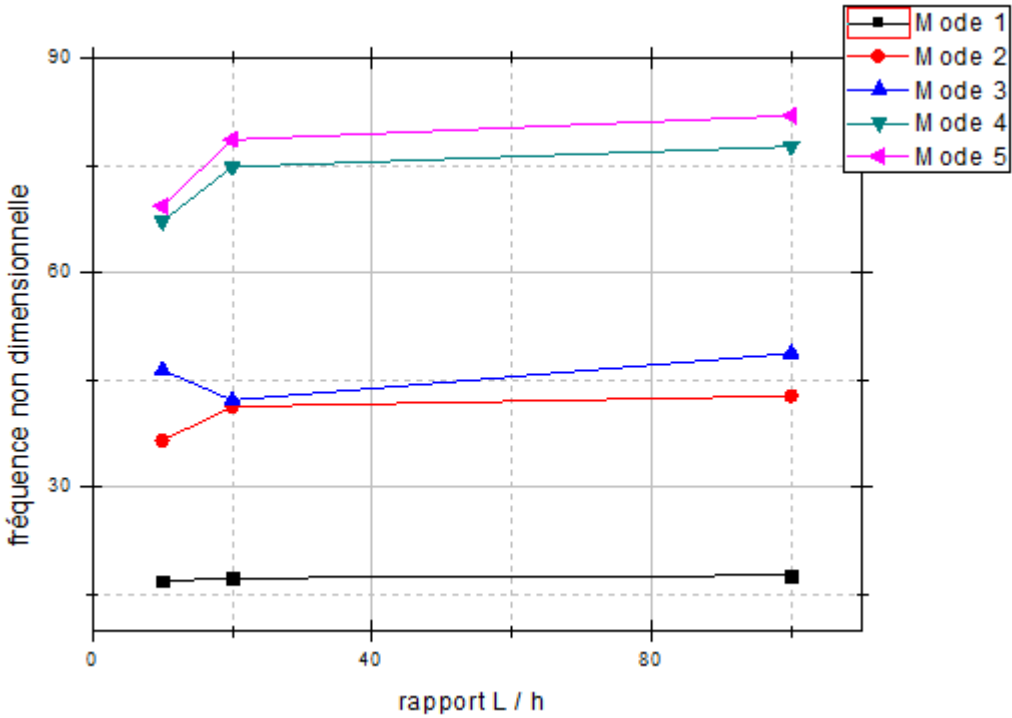


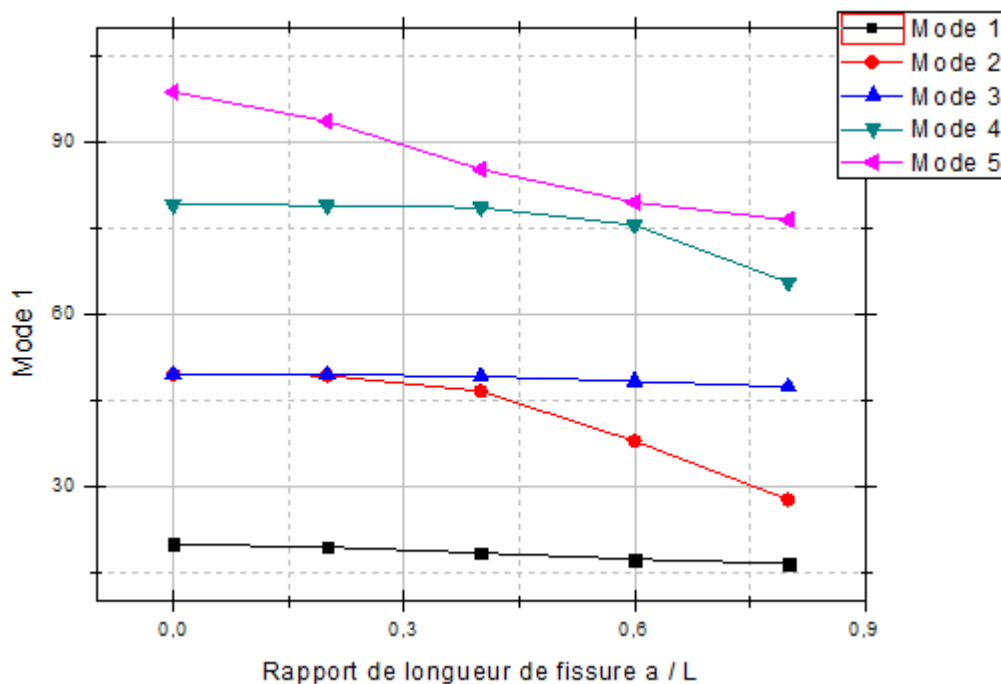
Figure (IV.3) Fréquence naturelle du 5 premier mode en fonction de rapport L/h



**Tableau (IV. 3):** Fréquence naturelle non dimensionnelle de la plaque carrée isotrope via le rapport de longueur de fissure ( $L / h = 100$ )

Mode	Source	Rapport de longueur de fissure $a / L$				
		0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	Stahl [36]	19.739	19.305	18.279	17.193	16.403
	Liew [37]	19.74	19.38	18.44	17.33	16.47
	TSDT[34]	19.732	19.2638	18.2349	17.1305	16.3587
	FSDT[34]	19.732	19.2711	18.2324	17.1204	16.3544
	ANSYS	<b>19.8</b>	<b>19.331</b>	<b>18.283</b>	<b>17.193</b>	<b>16.426</b>
2	Stahl [36]	49.348	49.170	46.624	37.978	27.773
	Liew [37]	49.35	49.16	46.44	37.75	27.43
	TSDT[34]	49.3033	49.098	46.7232	38.1929	27.9035
	FSDT[34]	49.3034	49.1147	46.8296	38.3476	28.0654
	ANSYS	<b>49.476</b>	<b>49.28</b>	<b>46.568</b>	<b>37.862</b>	<b>27.617</b>
3	Stahl [36]	49.348	49.328	49.032	48.223	47.256
	Liew [37]	49.35	49.31	49.04	48.26	47.27
	TSDT[34]	49.3033	49.2557	48.9313	48.1013	47.0781
	FSDT[34]	49.3034	49.2761	48.9668	48.1154	47.088
	ANSYS	<b>49.476</b>	<b>49.45</b>	<b>49.143</b>	<b>48.312</b>	<b>47.285</b>
4	Stahl [36]	78.957	78.957	78.602	75.581	65.732
	Liew [37]	78.96	78.81	78.39	75.23	65.19
	TSDT[34]	78.8423	78.7275	78.3262	75.4169	65.7993
	FSDT[34]	78.8424	78.7689	78.4028	75.4895	65.9949
	ANSYS	<b>79.125</b>	<b>79.054</b>	<b>78.654</b>	<b>75.589</b>	<b>65.584</b>
5	Stahl [36]	98.696	93.959	85.510	79.588	76.371
	Liew [37]	98.70	94.69	86.71	80.32	76.60
	TSDT[34]	98.5193	92.9166	84.9408	79.2038	76.0646
	FSDT[34]	98.5206	93.4560	85.0508	79.1787	76.0581
	ANSYS	<b>98.881</b>	<b>93.729</b>	<b>85.331</b>	<b>79.599</b>	<b>76.495</b>

En utilisant un maillage de 21x21 éléments trianguler , la relation entre les fréquences non dimensionnelles  $\omega$  et le rapport de la longueur de fissure est rapportée dans le tableau (IV. 3) Les résultats obtenus par ANSYS sont en bon accord avec la solution de CPT par Stahl [36] Ils ont utilisé l'approche Levy-Nadia, Liew et al. [37] Ils ont utilisé la méthode de décomposition du domaine, celle de l'élasticité 3D [35].



**Figure (IV.4)** Variation des cinq premières fréquences de mode via des rapports de longueur de fissure a/L

En outre, la comparaison des premières cinq fréquences avec les résultats de ANSYS est représentée sur la figure (IV.4) (représentation graphique du tableau (IV.3)) . Elle révèle que les fréquences diminuent en augmentant le rapport de longueur de fissure. Par exemple, le mode 2, mode 4, mode 5, est beaucoup plus affectée par la longueur de fissure.

#### IV.4.2.3 Analyse modal

pour faire cette analyse en utilise une plaque isotrope mince ( $L/h=100$ ) carré de dimension  $L= 500$  mm avec une fissure au centre de longueur a le rapport ( $a/L=0,8$ ).

Les propriétés physiques et géométriques de la plaque carré mince

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 ; \rho = 7850 \text{ Kg/m}^3 ; \nu = 0.3 .$$

E : Module de Young. ;  $\rho$  : La masse volumique. ;  $\nu$  : coefficient de poisson .

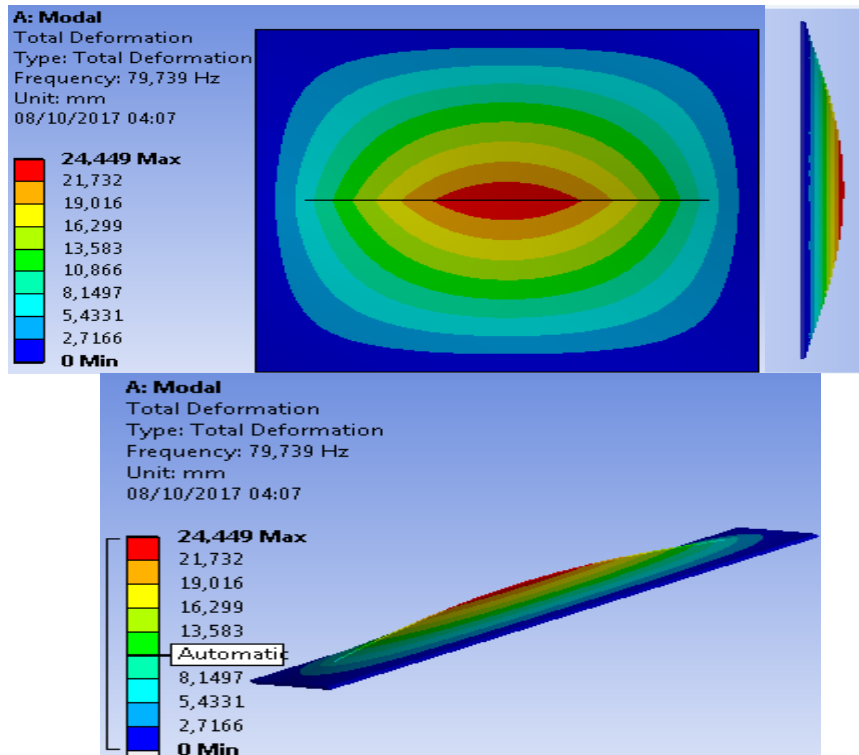


Figure (IV.5) représenté les déformations de première mode de fréquence propre 79,736 Hz

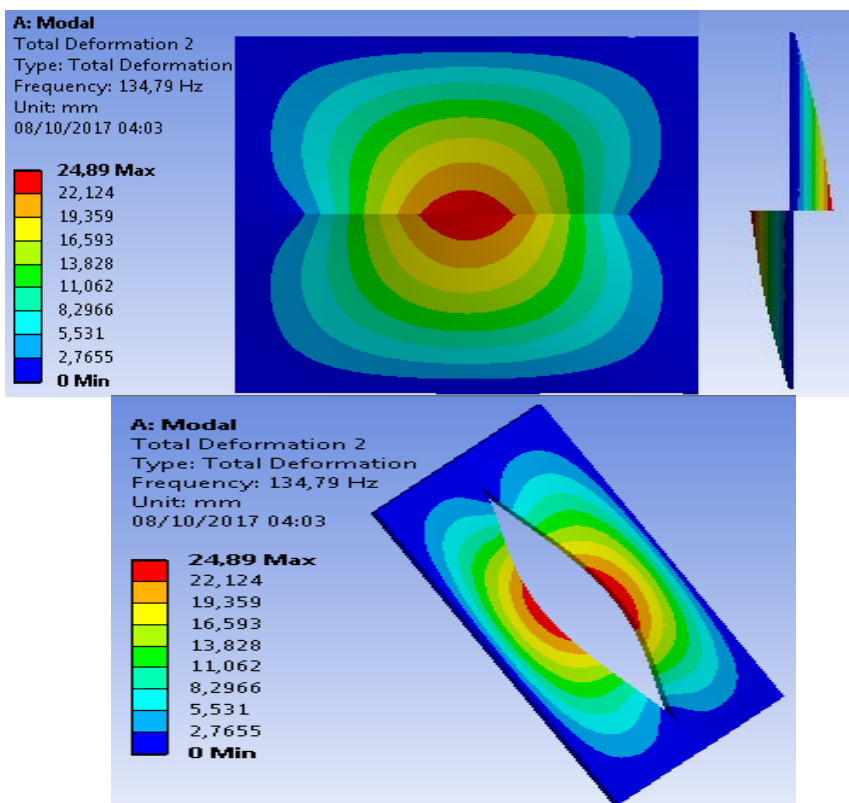


Figure (IV.6) représenté les déformations de Deuxième mode de fréquence propre 134,79 Hz

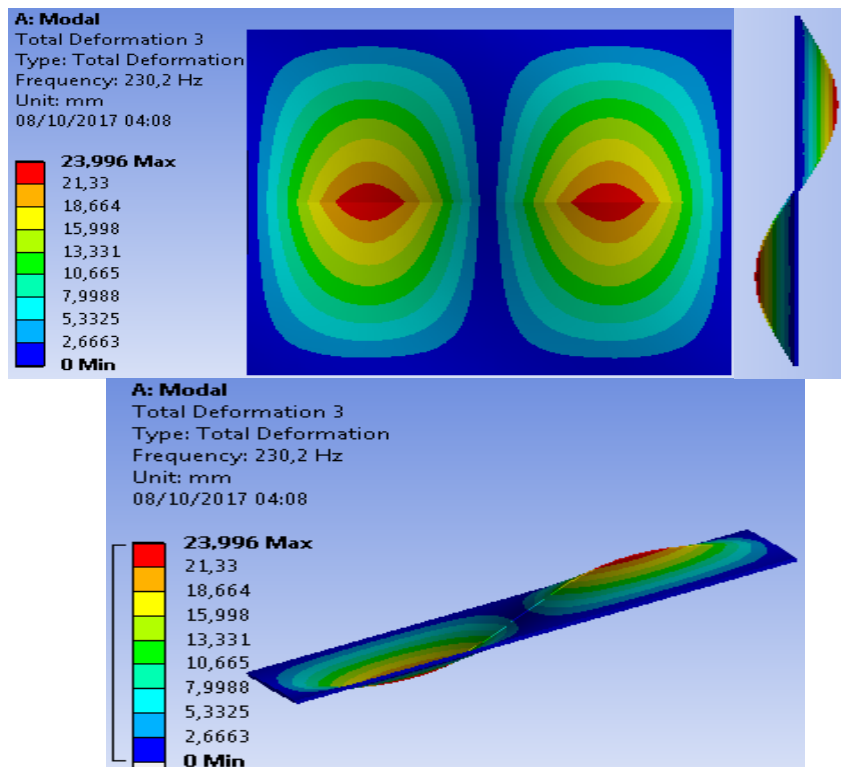


Figure (IV.7) représenté les déformations de troisième mode de fréquence propre 230,2 Hz

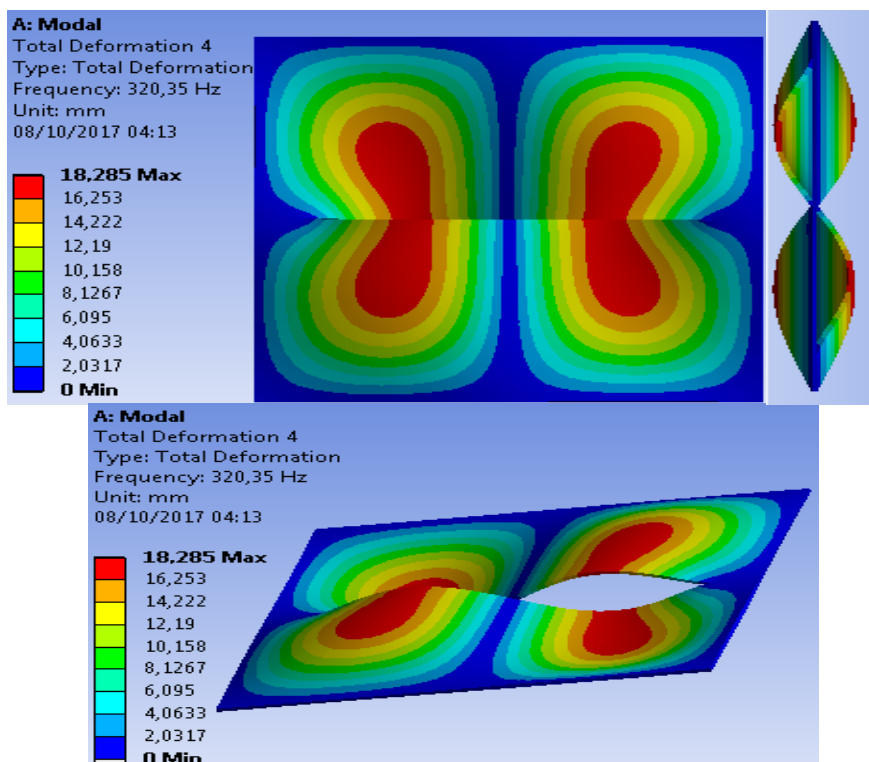
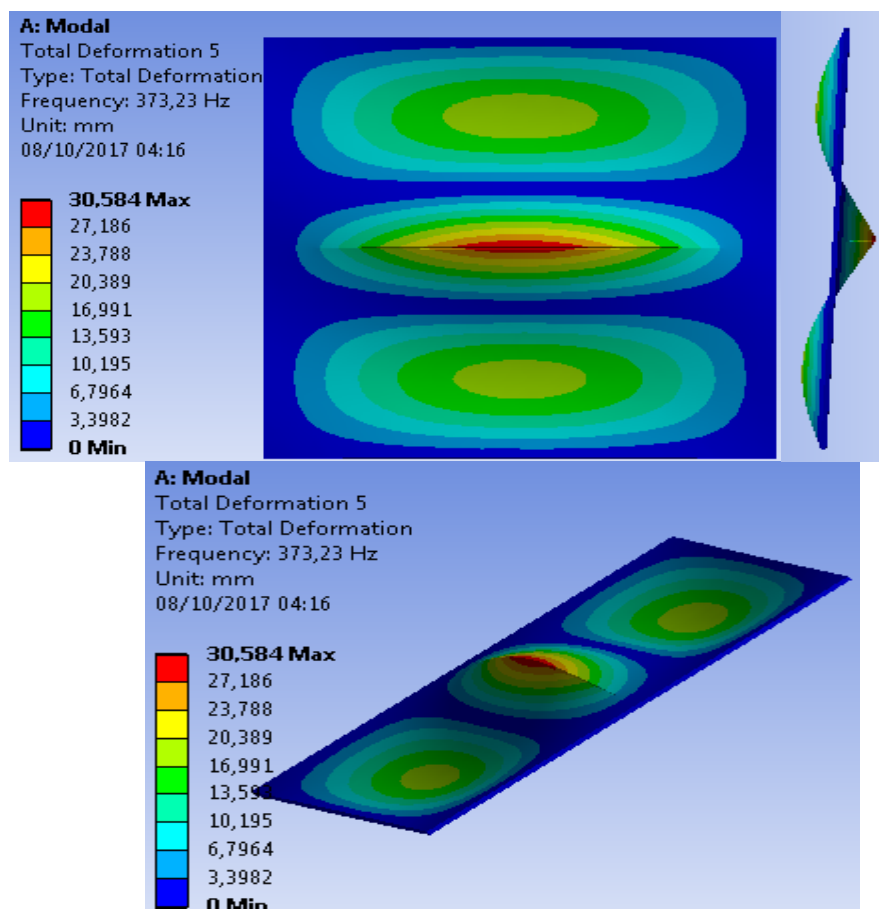


Figure (IV.8) représenté les déformations de quatrième mode de fréquence propre 320,35 Hz



**Figure (IV.9)** représenté les déformations de cinquième mode de fréquence propre 373,23 Hz

Les figures (IV.5.6.7.8.9) sont des Présentation des lignes modales de cinq premiers modes de la plaque SSSS en remarque que le deuxième et le quatrième mode de fréquence le plus influencé de la fissure

#### IV.4.3.plaque composite fissuré

Dans cette exemple nous étudierons une plaque composite rectangulaire fissuré avec des condition aux limite SSSS ; EESS ; EELL rapport longueur de fissure /longueur (a/L) 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 et des orientations de l'angle de fissure 0°/15°/30°/45°/60°/90°

Les propriétés géométrique de la plaque :

Longueur L = 150 mm ; largeur w = 100 mm ; épissure h = 1.5mm

Les propriétés mécaniques de plaque

- **Pour les fibre**

Epoxy carbone UD :  $E_1 = 209$  Gpa,  $E_2 = E_3 = 9.45$  Gpa ,  $G_{12}=G_{13} = 5.5$  Gpa  $G_{23}=3.9$ Gpa

$$\nu_{12}=\nu_{13}=0.27 \quad \nu_{23}= 0.4 ; \rho = 1.48 \times 10^{-9}$$

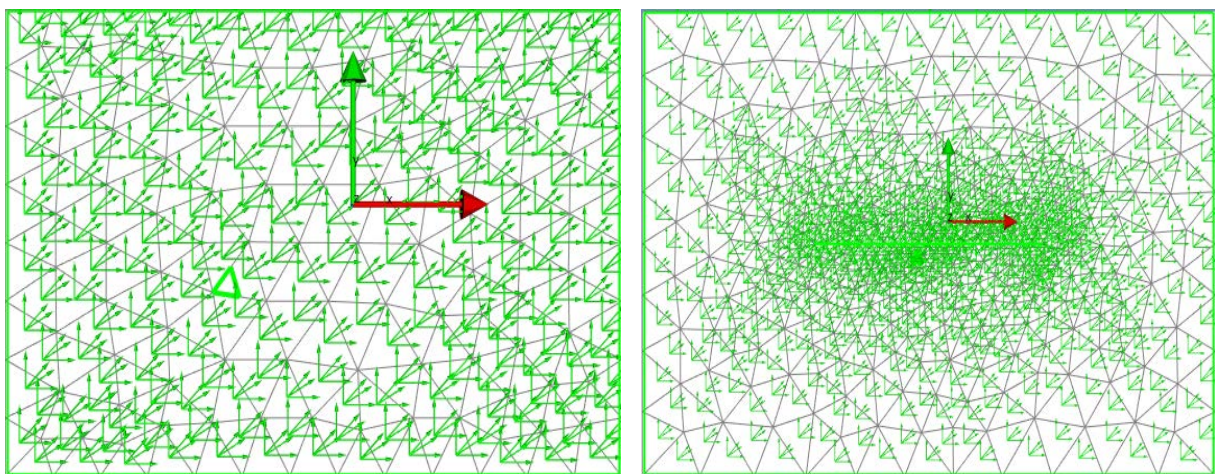
- **Pour la matrice**

Resyn epoxy :  $E= 3.718 \text{ Gpa}$  ;  $G=1.4 \text{ Gpa}$  ;  $\nu = 0.35$  ;  $\rho = 1.16 \times 10^{-9}$

L'orientations des couche de plaque  $[0^\circ/30^\circ/45^\circ/90^\circ]$

#### IV.4.3.1. Influence de rapport a/L sur la plaque composite

La figure (IV.10) nous montre les orientations des fibres de la plaque composite intact et fissuré



**Figure (IV.10)** représenté une plaque composite intact agache et adroite plaque composite fissuré ces modèle obtenu par ANSYS ACP (pre)

**Tableau (IV. 4):** Fréquence propre de la plaque composite via le rapport de longueur de fissure (a/L) les conditions aux limites sont SSSS

a/L	Mode1	Mode2	Mode3	Mode4	Mode5
0	405,98	809,37	1311,8	1536,2	1676,2
0.2	401,04	808,81	1309,1	1529,4	1669,6
0.4	395,37	805,34	1305,0	1522,2	1661,0
0.6	391,53	801,88	1303,5	1519,9	1659,2
0.8	389,47	799,30	1301,1	1517,8	1653,9

La figure (IV.11) est une représentations graphique du tableau (IV.4) qui représente les cinq premiers Mode de fréquences propres de vibration de la plaque composite Pour différentes valeurs de a/L.

En remarque que le rapporte  $a/L$  ont influence importante sur les fréquences propres d'une plaque composite rectangulaire si le rapport  $a/L$  augmente les fréquences propres diminue Ceci est évident et clair dans Les figure (IV.12), (IV.13), (IV.14), (IV.15), (IV.16) qui représente les fréquence de chaque mode pour différentes valeurs de  $a/L$ .

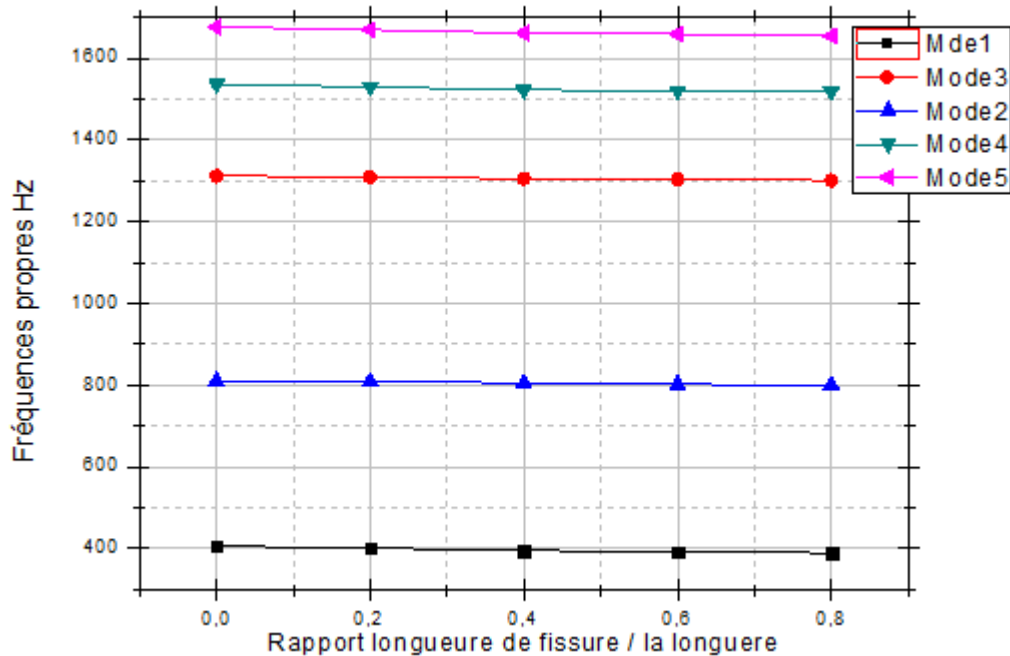


Figure (IV.11) : les cinq premiers Mode de fréquence propres de vibration de la plaque composite Pour différentes valeurs de  $a/L$

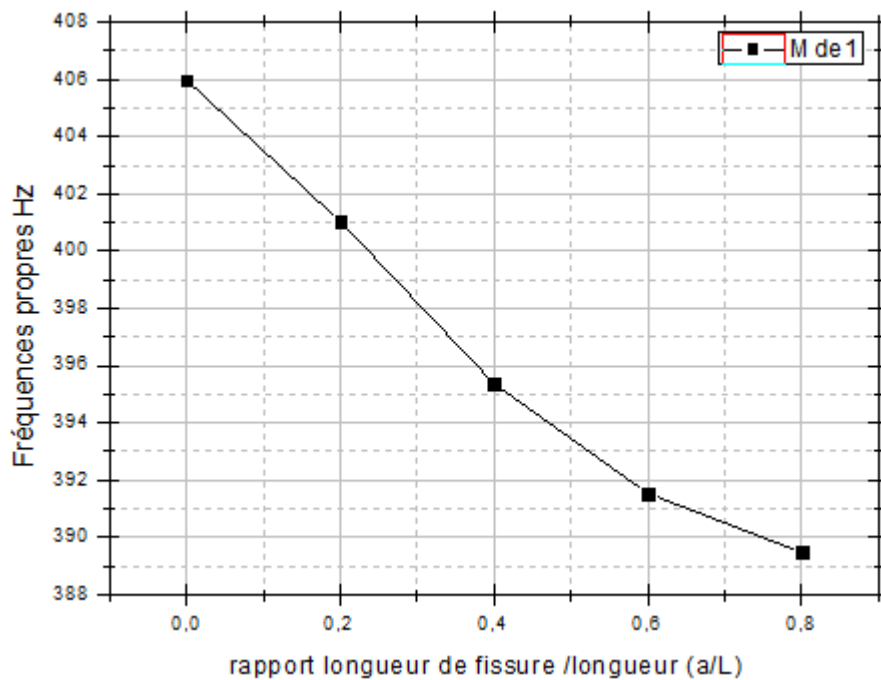


Figure (IV.12) : le premier Mode de fréquence propre

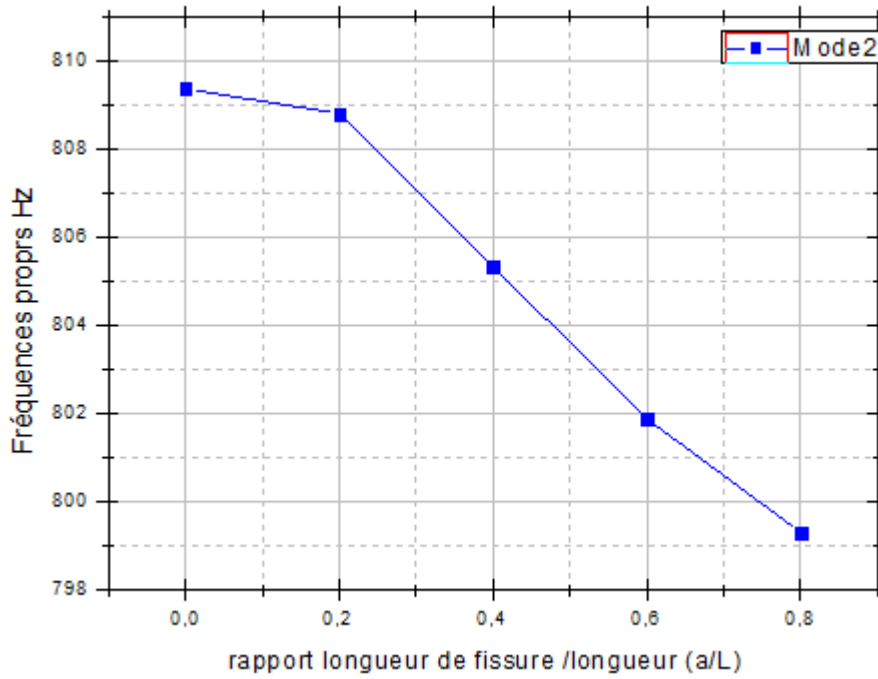


Figure (IV.13) : le deuxième Mode de fréquence propre

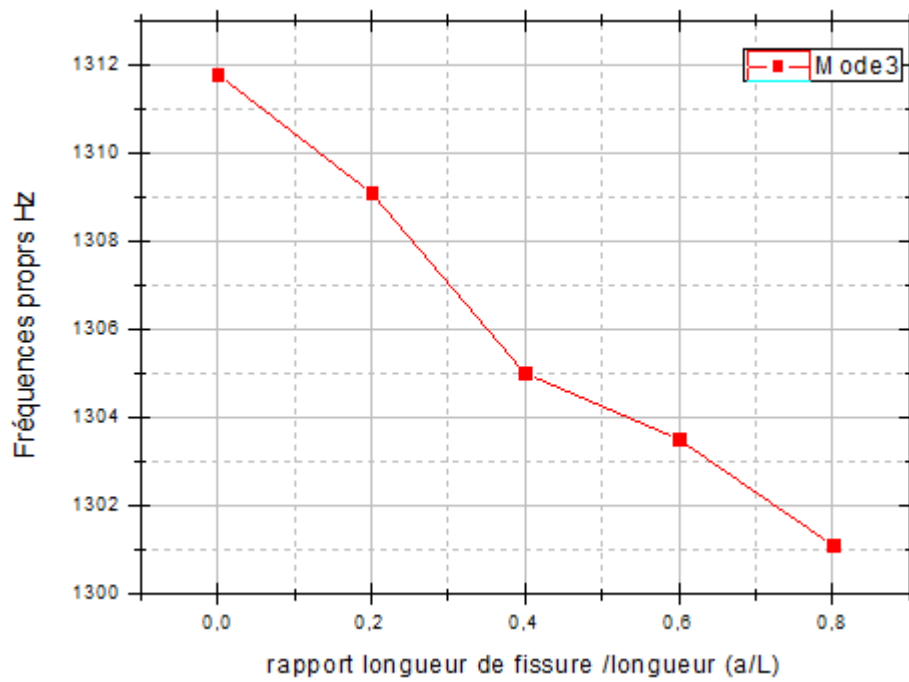


Figure (IV.14) : le troisième Mode de fréquence propre



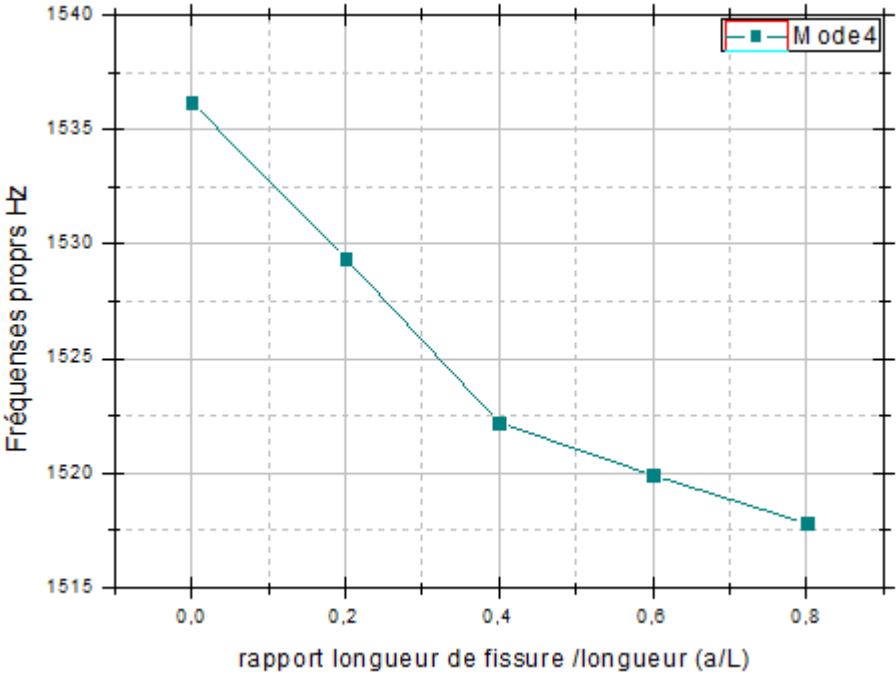


Figure (IV.15) : le quatrième Mode de fréquence propre

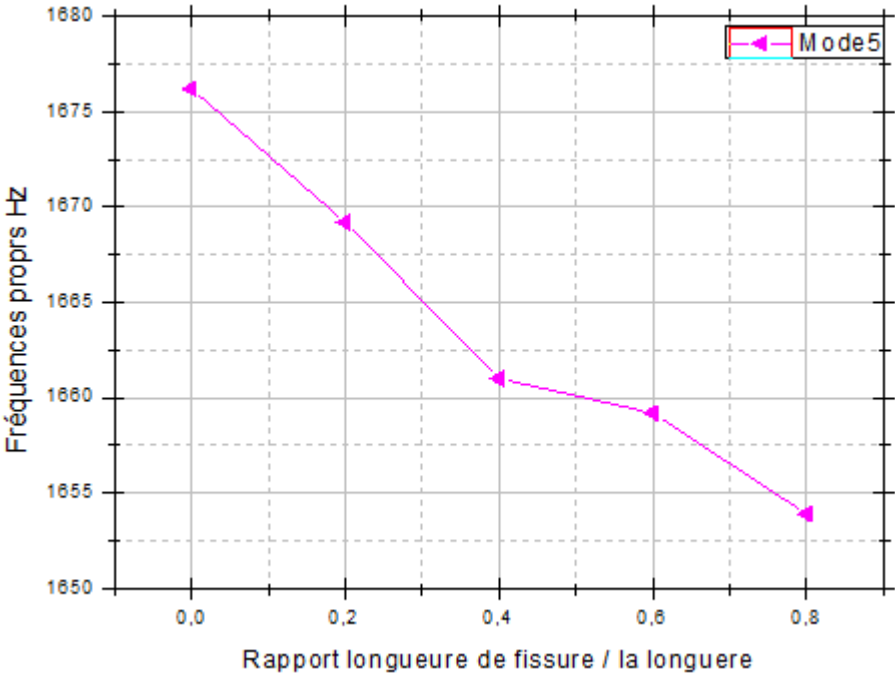
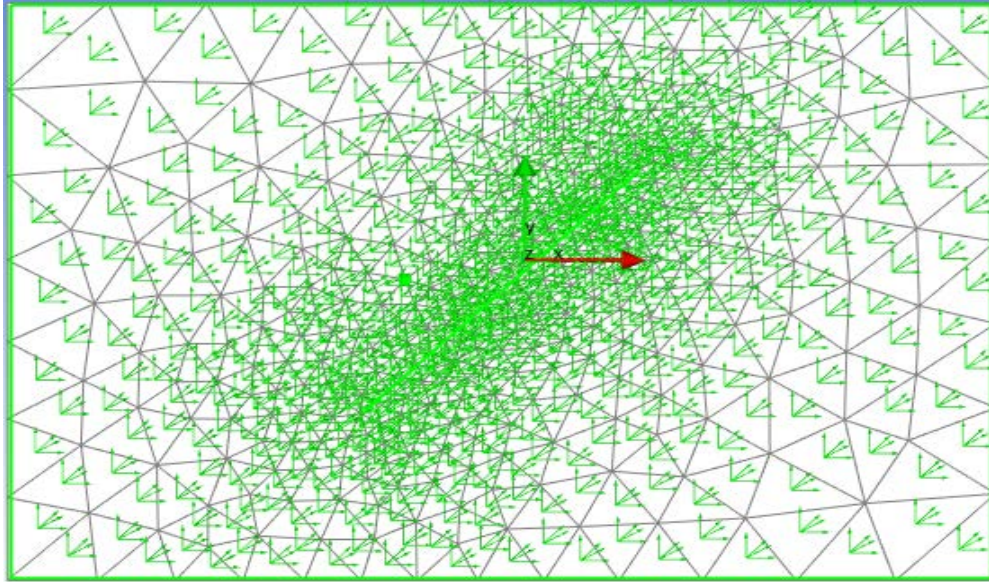


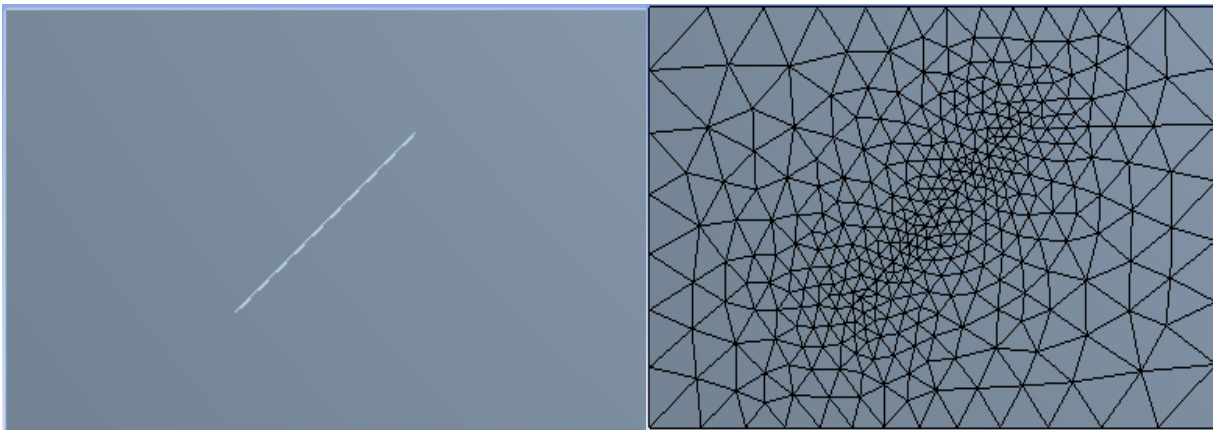
Figure (IV.16) : le cinquième Mode de fréquence propre

#### IV.4.3.2. Influence de rapport a/L sur la plaque composite

La Figure (IV.17) nous montre des plaques composite avec orientation de l'angle de fissuré  $\beta = 45^\circ$



a ) modèle ANSYS ACP(pre) plaque composite nous montre les orientations des fibres



b ) plaque composite

c ) plaque composite avec maillage

**Figure (IV.17)** plaques composite avec orientation de l'angle de fissur  $\beta = 45^\circ$

**Tableau (IV. 5):** Fréquence propre de la plaque composite pour différentes orientations de l'angle  $\beta$  de fissure les conditions aux limites sont SSSS

Angle de fissure $\beta$ (deg)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
0°	405,98	809,37	1311,8	1536,2	1676,2
15°	397,11	807,09	1304,6	1524,4	1664,6
30°	399,02	806,83	1301,	1514,	1663,8
45°	401,47	807,62	1301,8	1508,8	1666,8
60°	403,12	807,64	1304,7	1503,3	1665,4
90°	403,76	807,37	1306,6	1496,8	1651,9

La figure (IV.18) est une représentation graphique du tableau (IV.5) qui représente les cinq premiers Modes des fréquences propres de vibration de la plaque composite pour différentes valeurs de l'angle d'orientation de la fissure,  $\beta$ . L'angle d'orientation est choisi de 0° à 90°.

La figure (IV.19) présente la fréquence propre du premier mode en remarque que la fréquence propre diminue avec l'augmentation de l'angle de fissure jusqu'à 15° puis augmente lorsque  $\beta$  dépasse 15°.

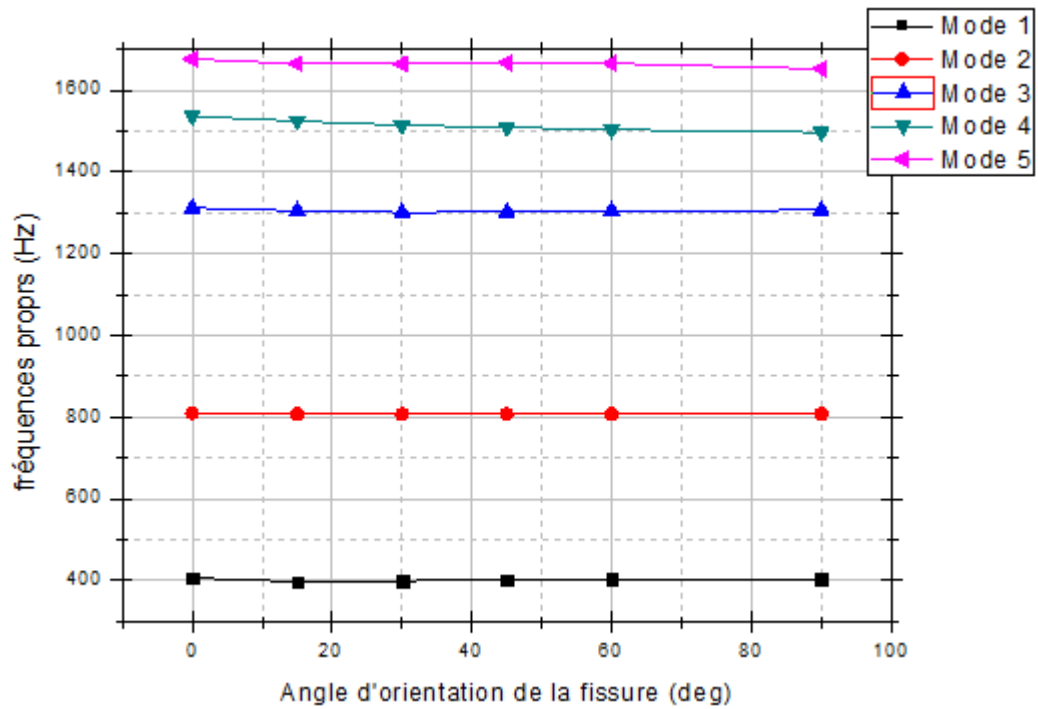
La figure (IV.20) présente la fréquence propre de deuxième mode. Voir que la fréquence propre diminue jusqu'à 30° puis augmente lorsque  $\beta$  dépasse 30° puis diminue qu'on le passe 60°.

La figure (IV.21) présente la fréquence propre de troisième mode. Dans cette mode la fréquence diminue jusqu'à 30° puis augmente lorsque  $\beta$  dépasse 30°.

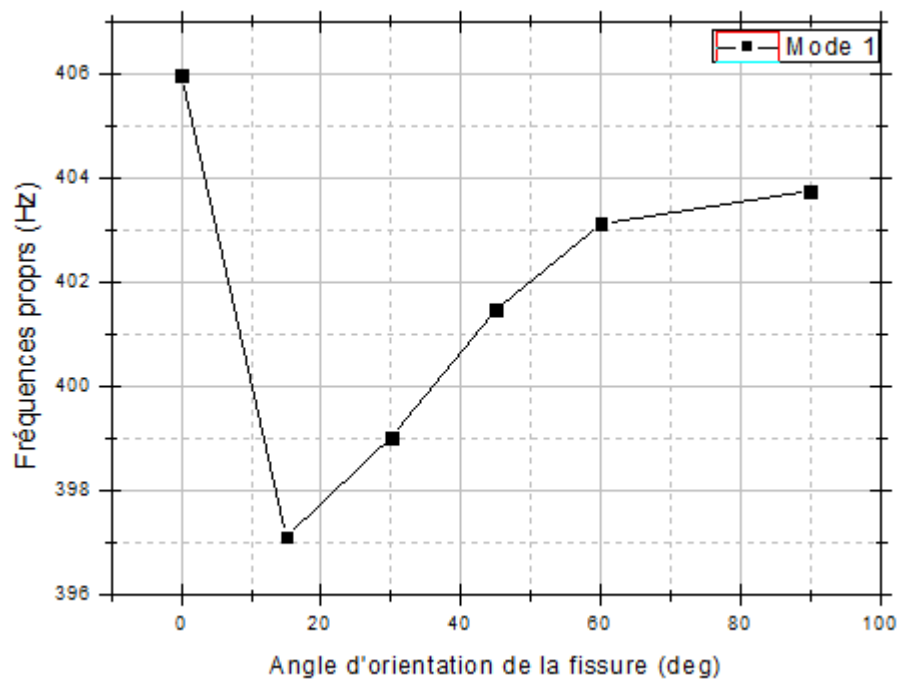
La figure (IV.22) présente la fréquence propre de quatrième mode. En remarque que la fréquence diminue avec l'augmentation de l'angle de fissure.

La figure (IV.23) présente la cinquième mode de fréquence propre. La fréquence diminue jusqu'à 30° puis augmente. Ensuite il diminue qu'on le dépasse 45°.

Cette tendance semblable dans l'effet d'orientation des fissures a également été étudiée par Maruyama et Ichinomiya (1989)[38] qui ont fait des expériences sur des plaques rectangulaires serrées avec une fissure à différents angles d'orientation.



**Figure (IV.18)** les cinq premiers Mode de fréquence propres de la plaque composite pour différent orientation d'angles de fissure  $\beta$



**Figure (IV.19)** : le premier Mode de fréquence propre

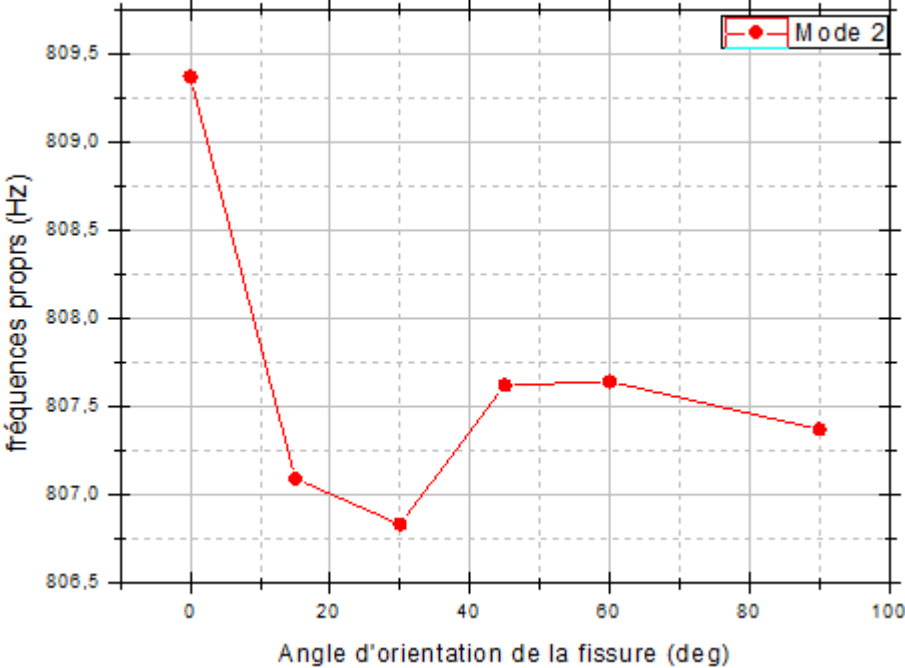


Figure (IV.20) : le deuxième Mode de fréquence propre

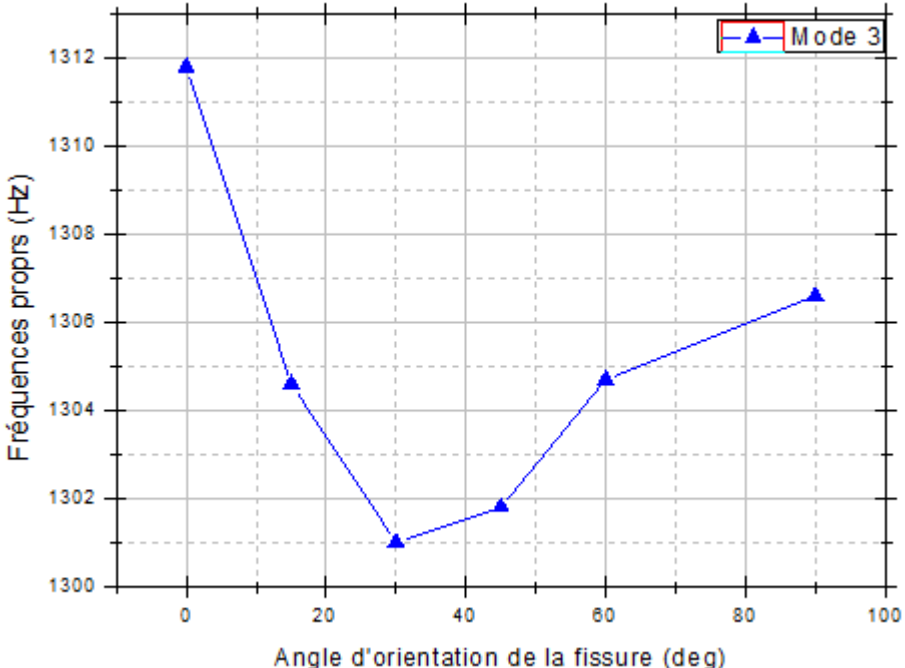


Figure (IV.21) : le troisième Mode de fréquence propre

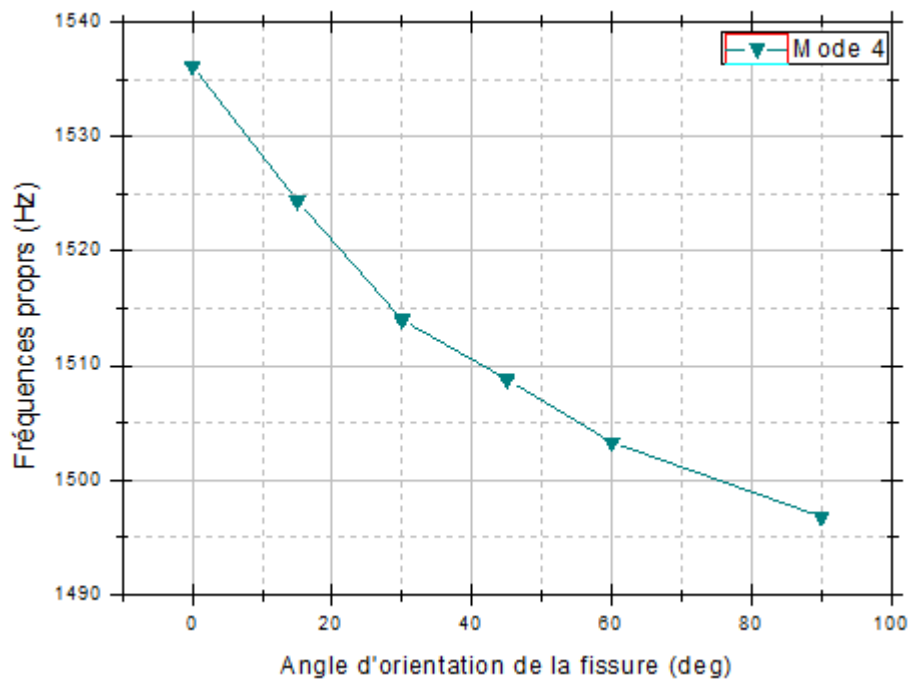


Figure (IV.22) : le quatrième Mode de fréquence propre

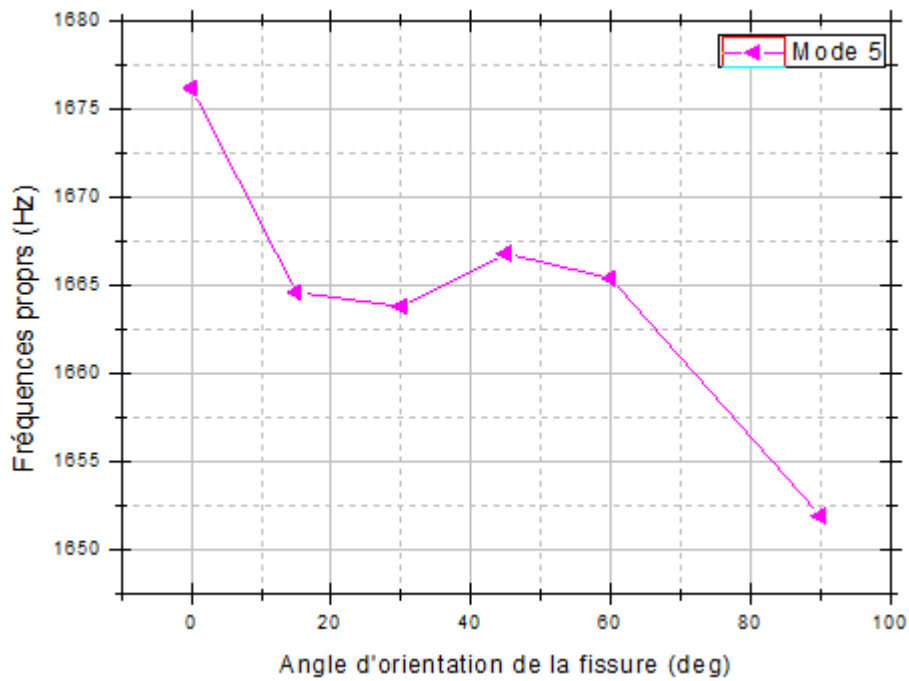


Figure (IV.23) : le cinquième Mode de fréquence propre

## Conclusion

En utilisant la méthode des éléments finis, le problème des plaques composites fissurées est traité dans le présent travail.

La procédure de modélisation géométrique en utilisant les modules Design Modeler et ACP de Ansys Workbench est détaillée dans le chapitre IV. Un maillage raffiné est réalisé par le module Mechanical. L'élément employé est l'élément SHELL 281 c'est un élément 2D à 8 nœud qui permis la modélisation des stratifiés composite.les fonctions de formes de l'élément sont présentés dans le chapitre III.

Dans le chapitre Résultats et interprétation le problème de la plaque isotrope fissurée est considéré afin de réaliser une étape de validation et de convergence par la suit les plaques composites fissurées avec une fissure de plusieurs longueur et de différentes orientation sont considérées. Une étude vibratoire et une analyse modale sont accomplies afin de tirer les points suivants :

- La fissure à de grande influence sur les fréquences propre d'une plaque.
- La présence de fissure diminue la rigidité de la structure ce qui diminue la fréquence propre.
- L'augmentation de la longueur de fissure mène à une diminution de fréquence.
- Le comportement en vibration est fortement influencé par l'orientation de la fissure.
- Certains angles (exemple du cas de  $15^\circ$  à  $30^\circ$  du tableau (IV. 5)) présente des fréquences plus importantes que d'autres angles.
- Des modes favorise l'ouverture de la fissure plus que d'autres modes (exemple mode 2 et 4) du cas précédent.

En perspective, le cas de l'interaction et d'influence des conditions aux limites avec l'orientation et la longueur d'une fissure peut être étudié.

Aussi la vibration forcée de la plaque composite fissurée, l'interaction de fissure et effet de température, fissure et orientation des fibres, peuvent être l'objectif de futurs travaux.

## Références bibliographiques

- [1]. Owen DRJ, Li ZH. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods – II. Vibration and stability. Computers & Structures 1987
- [2] Noor AK. Free vibrations of multilayered composite plates. AIAA Journal 1973; 11: 1038-1039.
- [3] Vuksanovic Dj. Linear analysis of laminated composite plates using single layer higher-order discrete models. Composite Structures 2000; 48: 205-211.
- [4] Matsunaga H. Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory. Composite Structures 2000; 48: 231-244.
- [5] Nayak AK, Sheno RA, Moy SSJ. Transient response of composite sandwich plates. Composite Structures 2004; 64: 249-267.
- [6] Qian GL, Gu SN, Jiang JS. A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. Computers & Structures 1991; 39 (5): 483-487.
- [7] Krawczuk M. Natural vibrations of rectangular plates with a through crack. Archive of Applied Mechanics 1993; 63 (7): 491-504.
- [8] Yuan J, Dickinson SM. The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh– Ritz method. Journal of Sound and Vibration 1992; 159 (1): 39–55.
- [9] Liew KM, Hung KC, Lim MK. A solution method for analysis of cracked plates under vibration. Engineering Fracture Mechanics 1994; 48 (3): 393-404
- [10]. Khadem SE, Rezaee M. Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate. Journal of Sound and Vibration 2000; 236 (2): 245-258.
- [11] Huang CS, Leissa AW, Chan CW. Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits. International Journal of Mechanical Sciences 2011; 53: 436–445.
- [12] Huang CS, Lin YJ. Fourier series solutions for vibrations of a rectangular plate with a straight through crack. Applied Mathematical Modelling 2016; 40: 10389-10403.
- [13] Berthelot J-M., “*Matériaux composites*”, Editions Eyrolles, 2010.
- [14] Laurent Gornet., “*Généralité sur les matériaux composites*”, ECN, Centre Nantes, 2011.
- [15] Jean-Claude RIGAL., André NEGRIER, “*Présentation des matériaux composites*”, plastiques et composites, *Technique de l'ingénieur*, 1991.
- [16] *Glossaire Matériaux Composites, CARMA –Actualisation octobre 2006.*
- [17] Bruno CASTANIE., et al, “*Structure en matériaux composites stratifiés*”, Institut Clément Ader, *Technique de l'ingénieur*, 2013.
- [18] LaarejMerad, “*Etude par spectroscopie raman et modélisation d'une résine composite RTM*”, Thèse de doctorat, Université Abou Bakr BELKAID de Tlemcen, 2010.
- [19] Philippe COGNARD, “*Application des matériaux composites anticorrosion dans L'industrie*”, *résistance à la corrosion et au vieillissement, Technique de l'ingénieur*, 2005.
- [20] Philippe COGNARD, “*Collage des composites : constructions aérospatiale, Automobile et ferroviaire*”, Technologie avancées et système de transport, Paris, 2004.



- [21] Nicola PICCIRELLI., Alain GIOCOSA, “*Les composites dans l’industrie automobile*”, *Transport et technologie, Technique de l’ingénieur*, 2011.
- [22] Patrice HAMELIN, “*Renforcement des ouvrages d’art par matériaux composites*”, plastiques et composites, *Technique de l’ingénieur*, 2002.
- [23] Brahim ATTAF, “*Eco-conception et développement des pales d’éoliennes en Matériaux composites*”, *Revue des Energies Renouvelables Bou Ismail Tipaza*, 2010.
- [24] Samir GHORAB., “*Comportement viscoélastiques des matériaux orthotropes*”, Mémoire de magister, département de génie mécanique, Université Mentouri Constantine., 2005.
- [25] Yves DEBARD « RDM Compléments théoriques Bibliographie » I.U.T(2001)
- [26] O.Rahmani, et S.Kabdani, « Introduction à la méthode des éléments finis pour les Ingénieurs », office des publications universitaires, édition (1994).
- [27] Jean-Luis Batoz, « Modélisation des structures par éléments finis », volume 2, Poutres et Plaques.
- [28] K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat ». *J. Numer. Methods Engrg*, 2003
- [29] J. PITKÄRANTA, Y. LEINO, O. OVASKAINEN, and J. PIILA. « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells ». *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 1995.
- [30] C. BAIocchi and C. LOVADINA. « A shell classification by interpolation » *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2002.
- [31] AUGUIB SALAH ‘vibration des plaques stratifiées , influence de la cinématique’ Mémoire de Magister , Université M’hamed BOUGARA Boumerdes
- [32] Abderrazak Elgharbi Analyse du comportement dynamique des plaques statistiques rectangulaires minces symétriques en matériaux composites, 2010.
- [33] Autar K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials* , Second Edition 2006.
- [34] Help ANSYS version 17.0
- [35] Loc V. Tran, Hung Anh Ly, M. Abdel Wahab, H. Nguyen-Xuan Vibration analysis of cracked FGM plates using higher-order shear deformation theory and extended isogeometric approach (2015 )S0020-7403(15)00079-X.
- [36] C.S. Huang, P.J. Yang, M.J. Chang, Three-dimensional vibration analyses of functionally graded material rectangular plates with through internal cracks, *Composite Structures*, 94 (2012) 2764-2776.
- [37] B. Stahl, L. Keer, Vibration and stability of cracked rectangular plates, *Int. J. Solids Struct.* 8 (1972) 69–91.
- [38] K.M. Liew, K.C. Hung, M.K. Lim, A solution method for analysis of cracked plates under vibration, *Engineering Fracture Mechanics* 48 (1994) 393–404.
- [39] MARUYAMA, K. & ICHINOMIYA, O. 1989. Experimental study of free vibration of clamped rectangular plates with straight narrow slits. *JSME International Journal, Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry* 32, 187-193.

---

## Résumé

Le problème de plaque composite fissuré est traité dans le présent travail. La méthode des Eléments finis est employée avec l'utilisation d'élément Shell 281 du logiciel ANSYS wokbenche pour générer un maillage tridimensionnel. La fissure passe le long de l'épaisseur de la plaque et provoque une réduction significative de sa rigidité. Dans le cadre de ce projet, de nombreux cas sont étudiés, dont l'effet de la longueur et de l'angle de fissuration. Une série de cas possibles est testée avec l'étude de la convergence. Les résultats numériques de cette étude ont été obtenus avec des projections graphiques.

**Mot clés :** plaque composite fissuré, les Eléments finis, longueur et l'angle de fissuration

## الملخص

في العمل الحالي تتم مناقشة مشكل تصدع لوحة مركبة باستخدام طريقه العناصر المحددة بواسطة استعمال عنصر SHELL 281 من برنامج ANSYS Workbench لتوليد شبكة ثلاثية الأبعاد. التصدع يمر على طول سمك اللوحة و يسبب انخفاض كبير في صلابتها. في هذا المشروع يتم دراسة العديد من الحالات بما في ذلك تأثير طول و زاوية التصدع و يتم اختبار سلسلة من الحالات الممكنة مع دراسة التقارب و قد تم التحصل على نتائج عددية مع توقعات الرسوم البيانية .

**الكلمات الرئيسية :** الصفيحة المركبة المتصدعة , العناصر المنتهية , الطول و زاوية التصدع

## Abstract

The problem of cracked composite plate is discussed in the present work. The Finite Elements method is used with the use of the Shell 281 element of the ANSYS wokbench software to generate a three-dimensional mesh. The crack passes along the thickness of the plate and causes a significant reduction in its rigidity. In this project, many cases are studied, including the effect of the length and the angle of cracking. A series of possible cases is tested with the study of convergence. The numerical results of this study were obtained with graphical projections.

**Keywords :** cracked composite plate , finite elements , length and crack angle