

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des sciences
Département de mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Ondes progressives pour un modèle proie-prédateur avec diffusion

Présenté Par : **BOUANANI NADIA**

Mémoire soutenu le 01-07-2018 devant le jury composé de :

<i>M. A.Moussaoui.</i>	PR. UNIVERSITÉ DE TLEMCEEN.	Président
<i>M. S.E.Miri.</i>	MCA. UNIVERSITÉ DE TLEMCEEN.	Examineur
<i>M. Y. O. Boukarabila.</i>	MCB. UNIVERSITÉ DE TLEMCEEN.	Examineur
<i>M. T.M.Touaoula.</i>	PR. UNIVERSITÉ DE TLEMCEEN.	Encadreur
<i>M. M.N.Frioui.</i>	DOCTORANT. UNIVERSITÉ DE TLEMCEEN.	Invité

Année universitaire 2017-2018

Je dédie ce travail

A mes chers parents qui m'ont encouragé et soutenu
pendant toutes ces années, que Dieu les protège.

A ma merveilleuse sœur et à mes deux frères.

A mon grand père maternel, que Dieu le bénisse.

A toutes mes amies.

Remerciements

Je remercie ALLAH tout puissant de m'avoir donnée le courage, la volonté et la patience, pour la réalisation de ce travail.

Je remercie M.T.M.Touaoula d'avoir accepté de m'encadrer et m'aider tout le long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie M.A. Moussaoui d'avoir accepter de présider le jury et je tiens aussi à remercier M. S.E.Miri et M. Y. O. Boukarabila d'avoir fait partie du jury et d'examiner ce travail.

Je remercie M. M.N.Frioui. de m'avoir honorer de sa présence parmi les membres du jury sans oublier son aide et sa patience tout le long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction	4
1 Outils mathématiques	7
2 Modèle proies-prédateurs	13
2.1 Introduction	13
2.2 Principaux résultats	15
2.3 Preuves des principaux résultats	17
2.3.1 Preuve du théorème 1	18
2.3.2 Preuve du théorème 2	42
Bibliographie	45

Introduction

Les ondes progressives ont été utilisées pour modéliser la propagation des ondes de concentration chimique, la colonisation de l'espace par une population, la propagation spatiale des épidémies.

L'existence de telles ondes progressives est généralement une conséquence du couplage de divers effets tels que la diffusion. [13]

R.A Fisher [5] a été parmi les premiers à étudier ce phénomène en 1937, dans la même année Kolmogoroff , Petrovskii, et Piskunov ont généralisé son travail.

Dans ce mémoire, on va s'intéresser aux équations de réaction-diffusion qui ont la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

avec f est une fonction de $C^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et u bornée.

Les ondes progressives sont définies mathématiquement par une solution $u(z)$ avec z est la variable de l'onde telle que

$$u(x, t) = u(x - ct) = u(z), \quad z = x - ct$$

$c > 0$ représente la vitesse de l'onde.

Modèle de proie-prédateur

La population des prédateurs se nourrit des proies. Ce qui augmente leur taux de croissance et en même temps crée une diminution du taux de la population des proies. [14].

Le modèle de Lotka-Volterra est devenu plus réaliste, en additionnant d'autres conditions qui influent sur le taux de croissance des prédateurs-proies, comme suit :

$$\begin{cases} u' &= Au - H(u, w), \\ w' &= -Cw + eH(u, w), \end{cases} \quad (1)$$

où u, w représentent la densité des proies et prédateurs, respectivement.

$$H(u, w) = B \frac{uw}{1 + Eu},$$

H est la fonction réponse de type Holling II, qui a un taux d'absorption chez les prédateurs, qui diminue, car ils ont une capacité limitée à transformer les aliments. Pour plus de détails [8].

Le modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies et la fonction réponse de type Holling II est le suivant :

$$\begin{cases} u' &= Au(1 - \frac{u}{k}) - B \frac{uw}{1 + Eu}, \\ w' &= -Cw + D \frac{uw}{1 + Eu}. \end{cases} \quad (2)$$

Ici, u et w représentent la population des proies et des prédateurs respectivement à l'instant t . Où A, B, C et D sont des constantes positives telles que :

A : le taux de croissance intrinsèque de la population proie en l'absence de préda-

teur.

B : le taux de prédation maximale du prédateur sur les proies

E : la constante de saturation pour les prédateurs.

D : le taux de conversion de la biomasse des proies en prédateurs.

C : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

k : la capacité limite.

Chapitre 1

Outils mathématiques

Soit l'équation différentielle

$$x' = f(x) \tag{1.1}$$

Définition 1 [11] Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite lipschitzienne dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une constante k avec telle que $\forall x_1, x_2 \in \Omega$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

Théoreme 1 On suppose que f est lipschitzienne, alors pour une condition initiale $x_0 \in \Omega$ l'équation (1.1) admet une solution unique $t \rightarrow \phi(x_0, t)$ définie sur l'intervalle maximal d'existence.

Définition 2 [10]

Un espace topologique est une paire ordonnée (X, τ) , où X est un ensemble et τ est une collection de sous-ensembles de X satisfaisant les trois axiomes suivants :

- (1) X et \emptyset appartiennent à τ
- (2) toute réunion d'éléments de τ appartient toujours à τ
- (3) l'intersection de tout nombre fini d'éléments de τ appartient à τ

Définition 3 [2]

Soit X un espace topologique. Le flot est une application continue $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que

- $\phi(x, 0) = x$.
- $\phi(x, t_1 + t_2) = \phi(\phi(x, t_1), t_2)$ pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

On note parfois $\phi(x, t)$ par $x \cdot t$

Définition 4 [9]

Soit ϕ un flot de X , alors on définit

- $\delta(x) = \phi_t(x) : t \in \mathbb{R}$ est l'orbite de x .
- $\delta^+(x) = \phi_t(x) : t \geq 0$ est la semi orbite positive de x .
- $\delta^-(x) = \phi_t(x) : t \leq 0$ est la semi orbite négative de x .

Définition 5 [9]

Soit ϕ un flot de X . On dit que M est un ensemble invariant par ϕ si $\forall x \in M, \delta(x) \subset M$.

Définition 6 On dit que x_e est un point d'équilibre s'il vérifie $f(x_e) = 0$.

Définition 7 [9]

Soit x la solution de l'équation (1.1). Sans perte de généralité, on considère que $x_e = 0$. On appelle fonction de Lyapunov, toute fonction $V : x \rightarrow V(x)$ continument différentiable qui satisfait les propriétés suivantes

- $V(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x) < 0$ si $x \neq 0$

alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement et exponentiellement stable.

Théoreme 2 Lasalle

On suppose que : $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$

- $\exists c$ tel que l'ensemble $\Gamma_c = \{x \in \Gamma : V(x) \leq c\}$ est borné

$$- \forall x \in \Gamma_c, V(x) \leq 0$$

Soit $K = \{x \in \Gamma_c, \dot{V}(x) = 0\}$ Soit M le plus grand ensemble invariant inclus dans K . En particulier si $M = \{0\}$ alors 0 est localement asymptotiquement stable.

Définition 8 *Bifurcation de Hopf* [1]

Soit le système suivant

$$\begin{cases} u' = f(u, w, c), \\ w' = g(u, w, c). \end{cases} \quad (1.2)$$

Soient $\lambda_1(c)$ et $\lambda_2(c)$ les racines de l'équation caractéristique, avec $\lambda_{1,2}(c) = a(c) \pm ib(c)$.

Soit les hypothèses suivantes il existe un c_0 tel que

$$\begin{aligned} & - a(c_0) = 0, b(c_0) \neq 0 \\ & - \frac{da}{dc}(c_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Si elles sont vérifiées alors on a une bifurcation de Hopf et $c = c_0$ est une valeur de bifurcation.

Définition 9 [10]

Soit X et Y deux espaces topologiques. on dit que la fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue si pour chaque ensemble ouvert $A \subset Y$ l'image réciproque de A ,

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

est un ensemble ouvert de X .

Définition 10 [10]

Un espace est connexe s'il ne peut pas être représenté comme l'union de deux ou plusieurs sous-ensembles ouverts non vides et disjoints.

Pour cette partie vous pouvez aussi voir [16]

Définition 11 [7]

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On note $I = [0, 1]$, on dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x) \text{ et } H(x, 1) = g(x)$$

On dit alors que H est une homotopie de f à g .

Définition 12 [10]

Soit X un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X .

Une fonction continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r(a) = a$ pour tout $a \in A$ est appelé une rétraction de X à A .

l'ensemble A est appelé un rétracte de X s'il existe une rétraction $r : X \rightarrow A$.

Définition 13 [2]

Notons Y un espace topologique et $S \subset \mathbb{R}$ et soit $y_0 \in Y$, soit $y(s, y_0) = y_0 \cdot s$ la solution de (1.1)

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact, et soit ∂W le bord de W tel que $\partial W = W^0 \cup W^- \cup W^+$.

- Ensemble Sortant :

$$W^- := \{y_0 \in \partial W \mid \forall s > 0, y_0 \cdot [0, s) \not\subseteq W\}$$

- Ensemble Rentrant :

$$W^+ := \{y_0 \in \partial W \mid \forall s > 0, y_0 \cdot [0, s) \subset \text{int } W\}$$

- Ensemble Tangent :

$$W^0 := \partial W - (W^- \cup W^+)$$

Corollaire 1 [7]

On dit que W^- n'est pas un rétracte par déformation si W et W^- n'ont pas le même nombre de composantes connexes, c'est une condition suffisante.

Quand on étudie un système dynamique, on cherche à voir s'il existe un ensemble invariant dans une région de l'espace de phase. Pour les dynamiques les moins complexes on peut calculer l'ensemble invariant directement, mais ce n'est pas toujours le cas comme par exemple la dynamique de Van Der Pol, donc on peut seulement chercher une information sur l'ensemble invariant maximal.

Définition 14 [17]

La méthode de rétraction qui est introduite par Tadeusz Wazewski, est une méthode pour prouver l'existence de solutions qui restent dans un ensemble donné et se réfère à des équations différentielles décrivant une évolution dans le temps.

L'ensemble W est appelé ensemble de Wazewski s'il est compact et son ensemble sortant W^- est fermé.

Il existe une condition topologique sur les ensembles de Wazewski qui nous donne l'existence d'invariants non vides à l'intérieur, car ces ensembles ne contiennent pas toujours des invariants.

Théoreme 3 Propriété de Wazewski

Soit W un ensemble de Wazewski. Si son ensemble sortant W^- n'est pas un rétracte par déformation de W alors il existe un invariant non vide dans $\text{Int } W$.

Définition 15 [2]

Un bloc isolant est un ensemble compact W qui satisfait

- L'ensemble sortant W^- est fermé
- $\forall T > 0, \{x \in W \mid \varphi([-T, T], x) \subseteq W\} \subseteq \text{int } W$

Exemple 1 [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y + (x^2 - 1)(x + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (1.3)$$

prenons le carré $W = [-2, 2] \times [-2, 2]$ contient un ensemble invariant. W^- est représenté par les quatre segments rouges voir figure (1.1), qui est fermé, tel que W est un bloc isolant pour (1.3)

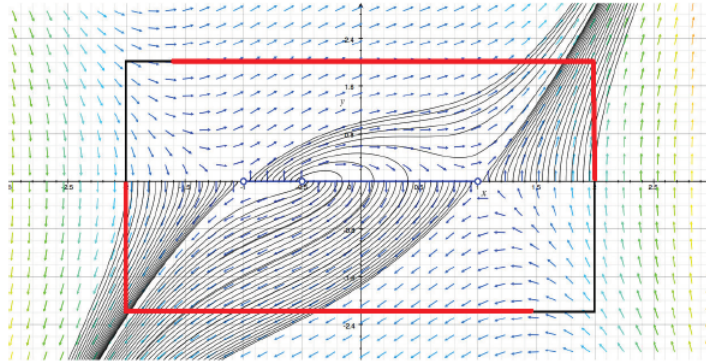


FIGURE 1.1 – l'ensemble sortant en rouge du système(1.3)

Chapitre 2

Modèle proies-prédateurs

2.1 Introduction

Le but de ce travail est d'établir l'existence d'une solution de type ondes progressives pour un modèle de proies prédateurs avec diffusion.

Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + Au(1 - \frac{u}{k}) - B \frac{uw}{1 + Eu}, \\ w_t = d_2 w_{xx} - Cw + D \frac{uw}{1 + Eu}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les fonctions u et w sont respectivement les densités de proies et prédateurs, d_1 et d_2 sont les coefficients de diffusion, A est le taux de croissance des proies, C est le taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies, k est la capacité limite, B et D représentent le taux d'interaction pour les deux espèces, le paramètre E mesure l'effet de satiété c'est à dire que la consommation des proies par unité de nombre des prédateurs ne peut pas continuer de croître linéairement avec le nombre de proies disponible mais doit saturer à la valeur $1/E$, voir Freedman[6] et May[12]

Pour simplifier, on prend le changement de variables suivant :

$$u^* = Eu, \quad w^* = \frac{Bw}{C}, \quad t' = Ct, \quad x' = \sqrt{\frac{C}{d_2}}x, \quad d = \frac{d_1}{d_2}, \quad \alpha = \frac{A}{ECK}, \quad b = EK, \quad \beta = \frac{D}{EC}.$$

Avec ces nouvelles variables, le modèle (2.1) devient :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + u[\alpha(b-u) - B\frac{w}{1+u}], \\ w_t = w_{xx} - w(1 - \frac{\beta u}{1+u}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Le système (2.2) admet trois points d'équilibre : $(0, 0)$, $(b, 0)$ et (u_0, w_0) , correspondant au système d'équations différentielles ordinaires sans diffusion, avec

$$u_0 = \frac{1}{\beta - 1}, \quad w_0 = \alpha\left(\frac{1}{\beta - 1} + 1\right)\left(b - \frac{1}{\beta - 1}\right).$$

On prend $b > 1$ ou de manière équivalente que $E > \frac{1}{K}$ de sorte que l'effet de satiété est assez grand. Nous avons également besoin que $\beta > \frac{1+b}{b} > 1$, ce qui assure que l'équilibre correspondant à la coexistence des deux espèces soit positif. Enfin, $\alpha > 0$ et $0 < d \leq 1$, nous donne que la population de proies se disperse plus lentement que les prédateurs.

Les points d'équilibre $(0, 0)$ et $(b, 0)$ sont des points selles, et (u_0, w_0) correspond à la coexistence des deux espèces.

La solution de type onde progressive qu'on cherche est une orbite hétérocline reliant $(b, 0)$ et (u_0, w_0) .

2.2 Principaux résultats

Afin d'établir l'existence de solutions de type ondes progressives du système (2.2), nous supposons que les solutions s'écrivent sous la forme suivante $u(x, t) = u(x + ct)$, $w(x, t) = w(x + ct)$, où $s = x + ct$, ici le paramètre $c > 0$ représente la vitesse de l'onde. Le système (2.2) devient

$$\begin{cases} cu' &= du'' + \alpha u(b - u) - \frac{wu}{1 + u}, \\ cw' &= w'' - w + \frac{\beta wu}{1 + u}, \end{cases} \quad (2.3)$$

satisfaisant les conditions aux limites :

$$u(-\infty) = b, \quad u(+\infty) = u_0, \quad w(-\infty) = 0, \quad w(+\infty) = w_0. \quad (2.4)$$

On réécrit le système (2.3) en tant que système d'équations différentielles du premier ordre dans \mathbb{R}^4 .

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= \frac{c}{d}v + \frac{\alpha}{d}u(u - b) + \frac{wu}{d(1 + u)}, \\ w' &= z, \\ z' &= cz + w - \frac{\beta wu}{1 + u}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit $y(s, y_0)$ l'unique solution de (2.5) satisfaisant $y(0, y_0) = y_0$.

Notons $y(s, y_0) = y_0 \cdot s$, soit Y un ensemble topologique et $S \subset \mathbb{R}$ tel que $y_0 \in Y$, $s \in S$.

Soit W in compact de \mathbb{R}^n , on définit

$$W^- = \{y_0 \in W \mid \forall s > 0, y_0 \cdot [0, s] \not\subseteq W\}.$$

W^- est appelé l'ensemble de sortie immédiat de W .

Soit $\Sigma \subseteq W$, on définit

$$\Sigma^0 = \{y_0 \in \Sigma \mid \exists s_0 = s_0(y_0) \text{ tel que } y_0 \cdot s_0 \notin W\}.$$

Pour $y_0 \in \Sigma^0$, on définit

$$T(y_0) = \sup\{s \mid y_0 \cdot [0, s] \subseteq W\}.$$

$T(y_0)$ est appelé le temps de sortie. Notons que $y_0 \cdot T(y_0) \in W^-$ et $T(y_0) = 0$ si et seulement si $y_0 \in W^-$.

Proposition 1 [15]

Supposons que

- (i) Si $y_0 \in \Sigma$ et $y_0 \cdot [0, s] \subseteq \bar{W}$, alors $y_0 \cdot [0, s] \subseteq W$;
- (ii) Si $y_0 \in \Sigma$ et $y_0 \cdot s \in W$, $y_0 \cdot s \notin W^-$, alors il existe un ensemble ouvert V_s qui contient $y_0 \cdot s$ et disjoint de W^- ;
- (iii) $\Sigma = \Sigma^0$, Σ est un ensemble compact et il intersecte la trajectoire de $y' = f(y)$ qu'une seule fois.

Alors la fonction $F(y_0) = y_0 \cdot T(y_0)$ est un homéomorphisme de Σ vers son image sur W^- .

Notons que si un ensemble $W \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions (i) et (ii) est alors

un ensemble de Wazewski.

Nous présentons maintenant les principaux résultats comme suit.

Théorème 1 [15]

(i) Si $0 < c < \sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}$, alors il n'existe pas de solution positives du système (2.5) satisfaisant les conditions aux limites (2.4).

(ii) Si $c \geq \sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}$, $\frac{b+1}{b} < \beta < \frac{b}{b-1}$, et $(1 - \alpha)(\beta - 1) \geq \frac{2\beta}{1+b} \sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}$, alors il existe des solutions positives du système (2.5) satisfaisant les conditions aux limites (2.4), qui correspondent aux solutions de type ondes progressives du système (2.2).

Théorème 2 [15]

si $\frac{b+1}{b} < \beta \leq \frac{1}{1 - \sqrt{2/(1+b)}}$, alors le paramètre β traverse la courbe de bifurcation $c^2 = \frac{1}{1+d} - \frac{d(1+d)p}{r}$ à β_0 dans le plan (β, c) , où $r = \frac{\alpha(1+b)}{\beta} - \frac{2\alpha}{\beta-1} < 0$, $p = \frac{\alpha b(\beta-1) - \alpha}{d\beta} < 0$, le système (5) subit une bifurcation de Hopf au point d'équilibre $(u_0, 0, w_0, 0)$ et une solution périodique de faible amplitude correspondant à une solution de type onde progressive de faible amplitude du système (2.2).

2.3 Preuves des principaux résultats

Dans cette partie on va faire une linéarisation du système (2.5) au point $(b, 0, 0, 0)$ et on va voir le comportement des trajectoires sur la variété instable en $(b, 0, 0, 0)$. On va définir l'ensemble de Wazewski W et son ensemble sortant W^- . Nous allons aussi construire le triangle topologique Σ .

2.3.1 Preuve du théorème 1

La matrice jacobienne associée au système(2.5)

$$J(u, v, w, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{d}(2u - b) + \frac{w}{d(1+u)^2} & \frac{c}{d} & \frac{u}{d(1+u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\beta w}{(1+u)^2} & 0 & 1 - \frac{\beta u}{(1+u)} & c & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne au point $(b, 0, 0, 0)$

$$J(b, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha b}{d} & \frac{c}{d} & \frac{b}{d(1+b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\beta b}{(1+b)} & c \end{pmatrix}$$

on obtient le polynôme caractéristique suivant :

$$D(\lambda) = [\lambda^2 - c\lambda - (1 - \frac{\beta b}{(1+b)})][\lambda^2 - \frac{c}{d}\lambda - \frac{\alpha b}{d}]$$

Les discriminants :

$$\Delta_1 = c^2 + 4(1 - \frac{\beta b}{(1+b)}) \quad \Delta_2 = \frac{c^2}{d^2} + \frac{4\alpha b}{d}$$

d'où les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{\frac{c}{d} - \sqrt{\frac{c^2}{d^2} + \frac{4\alpha b}{d}}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - \frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{c + \sqrt{c^2 - \frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}}{2} \quad \lambda_4 = \frac{\frac{c}{d} + \sqrt{\frac{c^2}{d^2} + \frac{4\alpha b}{d}}}{2}$$

si on a $0 < c < \sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}$, alors $\Delta_1 < 0$, les valeurs propres λ_2 et λ_3 sont complexe avec une partie réel positive :

$$\lambda_2 = \frac{c - i\sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b} - c^2}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{c + i\sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b} - c^2}}{2}$$

Par les Théorèmes 6.1 et 6.2 dans [8], il y a une base d'une variété instable de 2-dimension en $(b, 0, 0, 0)$, le point est un point en spirale sur cette variété instable, et la trajectoire approchant $(b, 0, 0, 0)$ quand $s \rightarrow -\infty$ doit avoir $w(s) < 0$ pour certains s . Cela contredit l'exigence d'avoir une solution de type onde progressive positive. Donc la première partie du théorème 1 est prouvée.

Si on a $c \geq \sqrt{\frac{4(\beta b - 1 - b)}{1+b}}$. On observe que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$, les vecteurs propres e_2, e_3, e_4 associés respectivement à $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, sont

$$e_2 = (1, \lambda_2, p(\lambda_2), \lambda_2 p(\lambda_2)), \quad e_3 = (1, \lambda_3, p(\lambda_3), \lambda_3 p(\lambda_3)), \quad e_4 = (1, \lambda_4, 0, 0)$$

où $p(\lambda) = \frac{1+b}{b}[(d-1)\lambda^2 - \frac{\beta b - 1 - b}{1+b} - \alpha b] < 0$. D'après le théorèmes 6.1 et 6.2 dans [8], on a une variété instable forte Ω_1 tangente à e_4 au point $(b, 0, 0, 0)$, et la représentation paramétrique de la variété instable forte à 1 dimension Ω_1 dans un

petit voisinage de $(b, 0, 0, 0)$ est

$$f_1(m) = (b, 0, 0, 0)^T + me_4 + O(|m|).$$

Il y a aussi une variété instable forte de 2 dimensions Ω_2 tangente à l'espace de e_4 et e_3 en $(b, 0, 0, 0)$, et une représentation paramétrique pour la variété instable forte à 2 dimension dans un petit voisinage de $(b, 0, 0, 0)$ est

$$f_2(m, n) = (b, 0, 0, 0)^T + me_4 + ne_3 + O(|m| + |n|).$$

Enfin, il existe une variété instable forte de 3 dimensions Ω_3 tangente à l'espace de e_4 , e_3 et e_2 en $(b, 0, 0, 0)$, et une représentation paramétrique pour la variété instable Ω_3 de 3 dimensions dans un petit voisinage de $(b, 0, 0, 0)$ est

$$f_3(m, n, l) = (b, 0, 0, 0)^T + me_4 + ne_3 + le_2 + O(|m| + |n| + |l|).$$

La construction de l'ensemble de Wazewski W est similaire à celle de Dunbar [3] : il sera le complément de quatre blocs dans \mathbb{R}^4 , dont deux sont choisis pour que z' ait le même signe que z donc les solutions entrant dans ces blocs n'auraient pas $z \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$, l'autre paire de blocs est choisie pour que v' ait le même signe que v et donc les solutions entrant dans ces blocs n'auront pas $v \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$. W est défini comme suit

$$W = \mathbb{R}^4 \setminus (P \cup Q \cup T \cup S),$$

où

$$P = \{(u, v, w, z) | u < u_0, w > w_0, z > 0\},$$

$$Q = \{(u, v, w, z) | u > u_0, w < w_0, z < 0\},$$

$$S = \{(u, v, w, z) | u > u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > 0, v > 0\},$$

$$T = \{(u, v, w, z) | u < u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0, v < 0\},$$

on remarque que $P \cap T \neq \emptyset$, $Q \cap S \neq \emptyset$, alors que toutes les autres intersections par paires sont vides. Nous avons

$$\partial W = (\partial T \setminus P) \cup (\partial P \setminus T) \cup (\partial Q \setminus S) \cup (\partial S \setminus Q),$$

$$W^- = \partial W \setminus (\{(u_0, 0, w_0, 0)\} \cup J_1 \cup J_2),$$

$$N = \{(u, v, w, z) | w = z = 0\},$$

$$H = \{(u, v, w, z) | u = v = 0\}.$$

Avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \{(u, v, w, z) | u > u_0, w \leq 0, z = 0\} \\ &\cup \{(u, v, w, z) | u = b, w \leq w_0, z = 0\} \\ &\cup \{(u, v, w, z) | u > u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > 0, v \leq 0, z = 0\} \\ &\cup \{(u, v, w, z) | u > u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, w > w_0, v \leq 0, z = 0\} \\ &\cup \{(u, v, w, z) | u > u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, w > w_0, v < 0, z = 0\} \\ &\cup \{(u, v, w, z) | u > u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, w > w_0, z < 0\}, \end{aligned}$$

J_1 est l'ensemble des points sur ∂W qui sortent de W et n'entrent pas dans Q , T ou S , cela peut se produire de trois façons. Certains points de la variété invariante N ne peuvent pas entrer dans T ou S , bien sûr, ils resteront dans N pour toujours et donc ils n'entreront pas dans Q .

Les points sur ∂W avec $z = 0, w < 0$ entreront dans W à partir de Q et ne seront donc pas des points de sortie. Les points sur ∂W avec $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, u > u_0, w > w_0, z < 0$ ne seront pas des points de sortie.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \{(u, v, w, z) | u = 0, w \leq \alpha b, z < 0, v = 0\} \\
&\cup \{(u, v, w, z) | u = 0, w \leq w_0, z \geq 0, v = 0\} \\
&\cup \{(u, v, w, z) | u < 0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, v = 0\} \\
&\cup \{(u, v, w, z) | u < 0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0, w \geq w_0, z < 0, v = 0\} \\
&\cup \{(u, v, w, z) | u < u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0, w < w_0, v = 0\} \\
&\cup \{(u, v, w, z) | u < u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, z < 0, v < 0\}.
\end{aligned}$$

J_2 est l'ensemble des points sur W qui sortent de W et n'entre pas dans P , ou T , cela peut également se produire de trois façons. Quelques points dans la variété invariante H ne peuvent pas entrer dans P , ils resteront dans H pour toujours et donc n'entreront pas dans T . Les points sur ∂W avec $u < 0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0, v = 0$ ne seront pas des points de sortie. Les points sur ∂W avec $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0, u < u_0, z < 0$ ne seront pas aussi des points de sortie.

Pour prouver que W^- est l'ensemble décrit ci-dessus, on va juste donner la preuve d'une partie de $\partial W, \partial T \setminus P$, et les autres preuves sont similaires. La frontière de ∂T est $u = u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0$ ou $v = 0$. Nous considérons les cas suivants pour discuter $\partial T \setminus P$.

(1) $u = u_0, w = w_0, v < 0$.

(i) $z < 0$, alors $w < w_0, v < 0$ implique que $u < u_0$. Le calcul direct montre que

$$\left[\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} \right]' \Big|_{(u_0, v, w_0, z)} = \left[v \left(\alpha - \frac{w}{(1+u)^2} \right) + \frac{z}{1+u} \right] \Big|_{(u_0, v, w_0, z)} < 0$$

Par conséquent, la trajectoire entre dans T .

(ii) $z = 0$, puisque $v < 0, u < u_0$, et

$$[\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u}]'|_{(u_0, v, w_0, z)} = [v(\alpha - \frac{w}{(1 + u)^2})]_{(u_0, v, w_0, z)} < 0$$

Donc la trajectoire entre aussi dans T.

(iii) $z > 0$, alors $w > w_0$, $z > 0$, $u < u_0$, la trajectoire entre dans P.

(2) $u = u_0$, $w < w_0$, $v < 0$.

Puisque $v < 0$ implique que $u < u_0$, et au point $u = u_0$, nous avons

$$\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} = \alpha(u_0 - b) + \frac{w}{1 + u_0} < \alpha(u_0 - b) + \frac{w_0}{1 + u_0} = 0$$

Autrement dit, la trajectoire entre dans T.

(3) $u = u_0$, $w = w_0$, $v = 0$.

(i) $z = 0$, c'est un point singulier et il n'est pas dans l'ensemble de sortie.

(ii) $z > 0$, alors $w > w_0$, on a

$$v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1 + u}]_{(u_0, w_0)} = 0$$

$$v'' = \frac{1}{d}[cv' + v(\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u}) + u[\alpha v + \frac{z}{1 + u} - \frac{wv}{(1 + u)^2}]]_{(u_0, w_0)}$$

$$= \frac{1}{d}[\frac{uz}{1 + u}]_{(u_0, w_0)} > 0.$$

Cela implique que u augmente, et v a un minimum, donc $v > 0$. Puisque

$[\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u}]' = \frac{w'}{1 + u} > 0$, et $\alpha(u_0 - b) + \frac{w_0}{1 + u_0} = 0$, nous obtenons

$\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} > 0$. Par conséquent, la trajectoire entre dans S.

(iii) $z < 0$, alors $w < w_0$. On obtient

$$v' = \frac{1}{d} \left[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1 + u} \right] \Big|_{(u_0, w_0)} = 0,$$

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{1}{d} \left[cv' + v \left(\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} \right) + u \left[\alpha v + \frac{z}{1 + u} - \frac{wv}{(1 + u)^2} \right] \right] \Big|_{(u_0, w_0)} \\ &= \frac{1}{d} \left[\frac{uz}{1 + u} \right] \Big|_{(u_0, w_0)} < 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que $\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} < 0$. Donc, u est décroissante, v a un maximum, et $v < 0$, donc la trajectoire entre dans T.

(4) $u = u_0, w < w_0, v = 0$.

comme

$$\begin{aligned} v' \Big|_{u=u_0} &= \frac{1}{d} \left[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1 + u} \right] \Big|_{u=u_0}, \\ &= \frac{1}{d} \left[u_0 \left[\alpha(u_0 - b) + \frac{w}{1 + u_0} \right] \right] \\ &< \frac{1}{d} \left[u_0 \left[\alpha(u_0 - b) + \frac{w_0}{1 + u_0} \right] \right] = 0, \end{aligned}$$

et

$$\alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} \Big|_{u=u_0} = \alpha(u_0 - b) + \frac{w}{1 + u_0} < \alpha(u_0 - b) + \frac{w_0}{1 + u_0} = 0$$

Par conséquent, la trajectoire entre dans T.

(5) $0 < u < u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1 + u} = 0, v < 0$.

(i) $z > 0$, puisque $w = \alpha(b - u)(1 + u)$, $w_0 = \alpha(b - u_0)(1 + u_0)$, et $\beta < \frac{b}{1 + b}$, alors $u_0 > b - 1$, et $w - w_0 = \alpha(u - u_0)(u + u_0 + 1 - b) > 0$. Par conséquent $w > w_0$, la trajectoire entre en P.

(ii) $z = 0$, puisque $\beta < \frac{b}{b + 1}$, alors $1 - \beta + \frac{\beta}{1 + u} > 1 - \beta + \frac{\beta}{1 + u_0} > 0$, et $z' = cz + w - \frac{\beta uw}{1 + u} = w \left[1 - \beta + \frac{\beta}{1 + u} \right] > 0$, c'est-à-dire, $z > 0$. La preuve est

similaire à (5i), nous avons $w > w_0$, donc la trajectoire entre dans P.

(iii) $z < 0$, la trajectoire n'entre pas dans P et T, et cela est inclus dans J_2 .

(6) $0 < u < u_0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0$, $v = 0$.

(i) $z < 0$, alors w diminue, et $[\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}]' = \frac{z}{1+u} < 0$, c'est-à-dire, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$. Puisque $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] = 0$ et $v'' = \frac{1}{d}[cv' + v(\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}) + u[\alpha v + \frac{z}{1+u} - \frac{wv}{(1+u)^2}]] = \frac{1}{d}\frac{uz}{1+u} < 0$, alors v est décroissant et a un maximum. Donc $v < 0$, la trajectoire entre dans T.

(ii) $z = 0$, alors $z' = cz + w[1 - \frac{\beta u}{1+u}] = w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u}] > w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u_0}] = 0$, ce qui implique que $z > 0$. Semblable à (5i), nous avons $w > w_0$, la trajectoire entre dans P.

(iii) $z > 0$, la trajectoire entre dans P.

(7) $-1 < u < 0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0$, $v = 0$.

(i) $z < 0$, alors $v' = 0$, $v'' = \frac{1}{d}\frac{uz}{1+u} > 0$, donc v a un minimum et $v > 0$, mais $[\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}]' = \frac{w'}{1+u} < 0$, ce qui implique que $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, S ou P, Q.

(ii) $z = 0$, alors $z' = w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u}] > 0$, ce qui implique que $z > 0$, $v'' = 0$, $v''' = \frac{uz'}{1+u} < 0$, donc v est décroissante et a un maximum. Par conséquent $v < 0$. Le calcul direct montre que $[\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}]' = \frac{z}{1+u} > 0$, c'est-à-dire, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > 0$, la trajectoire n'entre pas dans T. De même, la trajectoire n'entre pas dans P, Q, S.

(iii) $z > 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, S ou P, Q.

(8) $0 < u < u_0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, $v = 0$, $w > w_0$.

(i) $z < 0$, alors $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] < 0$, cela implique que v est décroissant et $v < 0$, de sorte que la trajectoire entre dans T.

(ii) $z = 0$, alors $z' = w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u}] > w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u_0}] = 0$, c'est-à-dire que z augmente, et $z > 0$. La trajectoire entre dans P.

(iii) $z < 0$, ces points sont à l'intérieur de P et ne sont pas pris en compte.

(9) $0 < u < u_0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, $v = 0$, $w < w_0$.

Nous avons $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] < 0$, ce qui implique que v est décroissante et $v < 0$. Par conséquent, la trajectoire entre dans T.

(10) $u < 0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, $w \geq w_0$, $v = 0$.

(i) $z > 0$, ces points sont à l'intérieur de P et ne sont pas pris en compte.

(ii) $z = 0$, puisque $z' = w[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u}] > 0$, e qui implique que z augmente, nous avons $z > 0$, donc la trajectoire entre dans P.

(iii) $z < 0$, alors $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] > 0$, c'est-à-dire que v est croissante et que $v > 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, S ou P, Q, ceci est inclus dans J_2 .

(11) $u < 0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, $w < w_0$, $v = 0$. on a $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] > 0$, et $v > 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, Q ou P, S, ceci est inclus dans J_2 .

(12) $u = 0$, $v = 0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$. Les points sont sur la variété invariante H. La trajectoire est la solution des équations

$$\begin{cases} w' = z \\ z' = cz + w \end{cases}$$

alors $w < \alpha b$, puisque $\beta < \frac{b}{b-1} < \frac{b+1}{b-1}$, on a $\alpha b - w_0 = \alpha u_0[\frac{1}{\beta-1} + 1 - b] > 0$, donc $\alpha b > w_0$.

(i) $z > 0$, si $w \geq w_0$, alors $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] = 0$, $v'' = 0$, ..., $v^{(n)} = 0$.

La trajectoire n'entre pas dans T, Q ou P, T, ceci est inclus dans J_2 .

(ii) $z = 0$, alors $z' = cz + [1 - \frac{\beta u}{1+u}] = w > 0$, z augmente et $z > 0$. Similairement à (12i), si $w > w_0$, ces points sont dans P et ne seront pas considérés; si $w \geq w_0$, alors la trajectoire n'entre pas dans T, Q ou P, S, ceci est inclus dans J_2 .

(iii) $z < 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, Q ou P, S, c'est inclus dans J_2 .

(13) $u = 0, v = 0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} = 0$, donc $w = \alpha b > w_0$.

(i) $z > 0$, ces points sont à l'intérieur P et ne seront pas considérés.

(ii) $z = 0$, alors $z' = w > 0$, la trajectoire entre dans P.

(iii) $z < 0$, la trajectoire n'entre pas dans T, Q ou P, S, c'est inclus dans J_2 .

Afin d'utiliser la proposition 1, nous construisons l'ensemble Σ par une série de lemmes (Lemme 1 - Lemme 6). Ensuite, nous prouvons qu'il doit y avoir une trajectoire à travers Σ qui ne quitte pas W par les lemmes 7 et 8. Finalement, nous choisissons une fonction de Lyapunov et nous utiliserons le principe d'invariance de LaSalle pour montrer que la trajectoire approche le point $(u_0, 0, w_0, 0)$.

Lemme 1 *Considérons une solution $y(s, y_0)$ avec $y_0 \in \Omega_1$, et $u_0 < b$, alors il y a un s_0 fini tel que $u(s_0, y_0) < u_0, v(s_0, y_0) < 0$, c'est-à-dire, si vous choisissez m_1, m_2 tel que $m_1 < \frac{c}{d} < \lambda_4 < m_2, m_2[u(0) - b] < v(0) < m_1[u(0) - b]$, alors $m_2[u(s) - b] < v(s) < m_1[u(s) - b]$.*

Démonstration 1 *considérons le système*

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{c}{d}v + \frac{u}{d}[\alpha(u - b)] \end{cases} \quad (2.6)$$

la solution de (2.5) dans N est donnée par $(u(s), v(s), 0, 0)$, où $(u(s), v(s))$ est la solution de (2.6), la variété instable forte Ω_1 est contenue dans la variété invariante N . De même, la variété instable forte Ω_1 est contenue dans la variété invariante W . Nous considérons d'abord la solution de (2.6), on a que la solution dans Ω_1 doit approcher $(b, 0)$ tangent au vecteur propre $(-1, -\lambda_4)$ dans la région $u < b, v < 0$.

Si la condition initiale y_0 satisfait $m_2[u(0) - b] < v(0) < m_1[u(0) - b]$, on prend $m_1 < \frac{c}{d} < \lambda_4 < m_2$, alors dans la région $0 < u < b, v < 0$, la trajectoire d'une solution

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

qui commence de Ω_1 satisfait

$$m_2[u(s) - b] < v(s) < m_1[u(s) - b].$$

En fait, s'il existe des $s > 0$ tel que $m_2[u(s) - b] \geq v(s)$, soit $s_1 = \inf\{s \mid m_2[u(s) - b] \geq v(s)\}$. Pour $s \in [0, s_1)$, on a $m_2[u(s) - b] > v(s)$, $v(s_1) = m_2[u(s_1) - b]$ et $u(s) > 0$, donc $v'(s_1) < m_2u'(s_1)$ en substituant (2.6) dans $v'(s_1) < m_2u'(s_1)$, on obtient

$$\left(\frac{c}{d} - m_2\right)v(s_1) + \frac{\alpha}{d}u(s_1)[u(s_1) - b] < 0.$$

en utilisant $v(s_1) = m_2[u(s_1) - b]$, on a

$$\left(\frac{c}{d} - m_2\right)m_2[u(s_1) - b] + \frac{\alpha}{d}u(s_1)[u(s_1) - b] < 0.$$

Si il existe un certain s_2 tel que $u(s_2) - b = 0$, $u'(s_2) \geq 0$, $0 < s_2 \leq s_1$, $0 \leq u'(s_2) < 0$, alors $u(s_2) < b$. Ainsi,

$$m_2\left(m_2 - \frac{c}{d}\right) - \frac{\alpha}{d}u(s_1) < 0.$$

Puisque $0 \leq u(s_1) \leq b$, $m_2\left(m_2 - \frac{c}{d}\right) - \frac{\alpha b}{d} < 0$, on a $m_2 < \frac{\frac{c}{d} + \sqrt{\frac{c^2}{d^2} + \frac{4\alpha b}{d}}}{2} = \lambda_4$, c'est une contradiction avec le choix de $m_2 > \lambda_4$. Donc on a $m_2[u(s) - b] < v(s)$. De la même manière, nous pouvons prouver que

$$v(s) < m_1[u(s) - b].$$

Puisque $u' = v$, par intégration on obtient

$$b - c_1 \exp\{m_2 s\} < u(s) < b - c_2 \exp\{m_1 s\}$$

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

Pour $s > 0$ tel que $u(s)$ satisfait $0 < u(s) < b$. Alors il existe s_0 assez grand tel que $u(s_0) < u_0$, $v(s_0) < 0$.

En utilisant le champ de vecteurs, la normale à la ligne $m_2[u(s) - b] - v(s) = 0$ est notée par $n_t = (m_2, -1)$, alors $n_t \cdot F' = [b - u(s)][-m_2^2 + \frac{c}{d}m_2 + \frac{\alpha b}{d}] < 0$ dans la région $u(s) < b$, $v(s) < 0$, donc la trajectoire pénètre dans cette région. De même, nous pouvons prouver que la trajectoire coupe la ligne $v(s) = m_1[u(s) - b]$, voir (2.1).

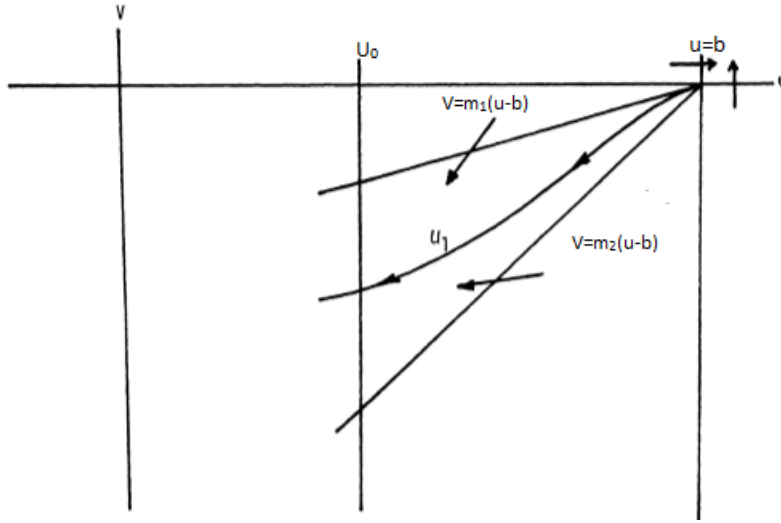


FIGURE 2.1 – Le portrait de phase du lemme 1 et lemme 2 (ii)

Lemme 2 (i) Une solution $y(s, y_0)$ dans Ω_1 qui approche $(b, 0, 0, 0)$ quand $s \rightarrow -\infty$ dans la région $u > b$, $v > 0$ reste dans cette région pour tout s .

(ii) Toute trajectoire qui vérifie $w(0) > 0$, $z(0) > \frac{c}{2}w(0)$, aura $w(s) > 0$ et $z(s) > \frac{c}{2}w(s)$ pour tout $s > 0$ tel que $u \leq b$.

Démonstration 2 On a que la normale à la ligne $v = 0 (u > b)$ est $n_t = \{0, 1\}$, donc $n_t \cdot F' = \frac{c}{d}u(u - b) > 0$. La normale à la ligne $u = b, (v > 0)$ est $n_t = \{1, 0\}$, donc $n_t \cdot F' = \frac{c}{d}v > 0$. Ainsi, la région $u > b, v > 0$ est invariante.

Supposons qu'il existe un s tel que $u(s) < b$, mais $z(s) \leq \frac{c}{2}w(s)$, soit $s_1 = \inf \{s | z(s) \leq$

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

$\frac{c}{2}$, $u(s) < b$. Puisque $w(0) > 0$, $z'(s_1) - \frac{c}{2}w'(s) \leq 0$.

En utilisant $z(s_1) = \frac{c}{2}w(s_1)$, on obtient $\frac{c^2}{4} + 1 - \beta + \frac{\beta}{1+u(s)} \leq 0$, puisque $u(s) \leq b$, on aura $\frac{c^2}{4} + 1 - \beta + \frac{\beta}{1+u(s)} < 0$, c'est-à-dire, $c^2 \leq \frac{4(b\beta-b-1)}{1+b}$, c'est une contradiction avec $c^2 > \frac{4(b\beta-b-1)}{1+b}$. Ceci complète la preuve.

Lemme 3 Soit y une solution qui approche $(b, 0, 0, 0)$ et tangente à e_3 dans la région $u < b$ quand $s \rightarrow -\infty$. Supposons que $(1 - \alpha)(\beta - 1) \geq \frac{2\beta}{1+b} \sqrt{\frac{b\beta}{1+b}}$ et u est décroissante jusqu'à ce que y entre dans la région

$$T = \{(u, v, w, z) | u < u_0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0, w > 0\}.$$

alors la solution doit satisfaire $v(s) < -\frac{c}{2\alpha(1+b)}w(s)$.

Démonstration 3 La solution y approche $(b, 0, 0, 0)$ et est tangente à e_3 . Le vecteur propre e_3 en $(b, 0, 0, 0)$ a des composantes $v = \lambda_3(u - b)$, $w = p(\lambda_3)(u - b)$, où $p(\lambda_3) < 0$, $v = u' < 0$. Ainsi, u décroît dans la région $u < b$. Puisque $0 < d \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} &= \alpha(u - b) + \frac{p(\lambda_3)(u - b)}{1+u} = (b - u) \left[-\frac{p(\lambda_3)}{1+u} - \alpha \right] \\ &\geq (b - u) \left[-\frac{p(\lambda_3)}{u+1} - \alpha \right] \\ &\geq \frac{b - u}{b} \left[(1 - d)\lambda_3^2 + \frac{\beta b - 1 - b}{1+b} \right] > 0 \end{aligned}$$

Alors dans la région $u < b$, le vecteur propre e_3 en $(b, 0, 0, 0)$ réside dans la région où $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > 0$.

Par conséquent, si $s \rightarrow -\infty$, la solution y satisfait

$$u_0 < u < b, v < 0, w > 0, \alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > 0$$

Maintenant, nous supposons que $y(s) \in T$, $v(s_1) \geq -\frac{c}{2\alpha(1+b)}w(s)$, et s_1 est la première valeur tel que $u(s) \leq b$ pour $s < s_1$. D'après le lemme 2, $z(s_1) > \frac{c}{2}$, donc

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

$\alpha(1+b)v(s_1) + z(s_1) > 0$. Soit

$$s_2 = \sup\{s < s_1 \mid \alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} \geq 0\}$$

Puisque $s \rightarrow -\infty$, $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} > 0$, la valeur s_2 est finie. Comme $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} < 0$ pour $s > s_2$ et $\alpha(u(s_2) - b) + \frac{w(s_2)}{1+u(s_2)} = 0$, on a que $[\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}]'_{s=s_2} \leq 0$. On réécrit la dernière inégalité comme $v(s_2)[\alpha(1-b) + 2\alpha u(s_2)] + z(s_2) \leq 0$. Mais comme $s = s_1$, nous avons

$$\begin{aligned} v(s_1)\left[\alpha - \frac{w(s_1)}{(1+u(s_1))^2}\right] + \frac{z(s_1)}{1+u(s_1)} &= \frac{1}{1+u(s_1)}\left[v(s_1)(\alpha + \alpha u(s_1) - \frac{w(s_1)}{1+u(s_1)})\right] + z(s_1) \\ &\geq \frac{1}{1+u(s_1)}\left[v(s_1)(\alpha(1+b) - \frac{v(s_1)w(s_1)}{1+u(s_1)}) + z(s_1)\right] \\ &\geq \frac{1}{1+u(s_1)}[\alpha(1+b)v(s_1) + z(s_1)] > 0. \end{aligned}$$

Par la continuité des fonctions, $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}$ a un minimum positif pour certains $s_3 \in (s_2, s_1)$, et $y(s_3) \in T$. Alors

$$[\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}]'_{s=s_3} = 0, \quad [\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}]''_{s=s_3} \geq 0,$$

qui peut être écrit comme

$$\alpha v'(s_3) + \frac{z'(s_3)}{1+u(s_3)} + \frac{2\alpha v(s_3)^2}{1+u(s_3)} - \frac{w(s_3)v(s_3)}{(1+u(s_3))^2} \geq 0.$$

Puisque $s_2 < s_3 < s_1$, $\alpha(u(s_3) - b) + \frac{w(s_3)}{1+u(s_3)} < 0$, en supposant que $(1-\alpha)(\beta-1) \geq \frac{2\beta}{1+b} \sqrt{\frac{b\beta-1-b}{1+b}}$, on aura que $\frac{(1-\alpha)w(s_3)}{1+u(s_3)} + 2\alpha w(s_3) \geq 0$. puisque $y(s_3) \in T$, $\beta > \frac{b+1}{b}$, on

peut voir que

$$\frac{w(s_3)}{1+u(s_3)} \left[1 - \frac{\alpha^2 u(s_3)^2}{1+u(s_3)} + \frac{(\alpha^2 b - \beta)u(s_3)}{1+u(s_3)} - \frac{2\alpha w(s_3)u(s_3)}{(1+u(s_3))^2} \right] < 0.$$

donc

$$\alpha v'(s_3) + \frac{z'(s_3)}{1+u(s_3)} + \frac{2\alpha v(s_3)^2}{1+u(s_3)} - \frac{w(s_3)v(s_3)}{(1+u(s_3))^2} < 0$$

une contradiction. Ainsi, l'inégalité $v(s) \geq -\frac{c}{2\alpha(1+b)}w(s)$ ne peut pas tenir. Ceci prouve le lemme 3.

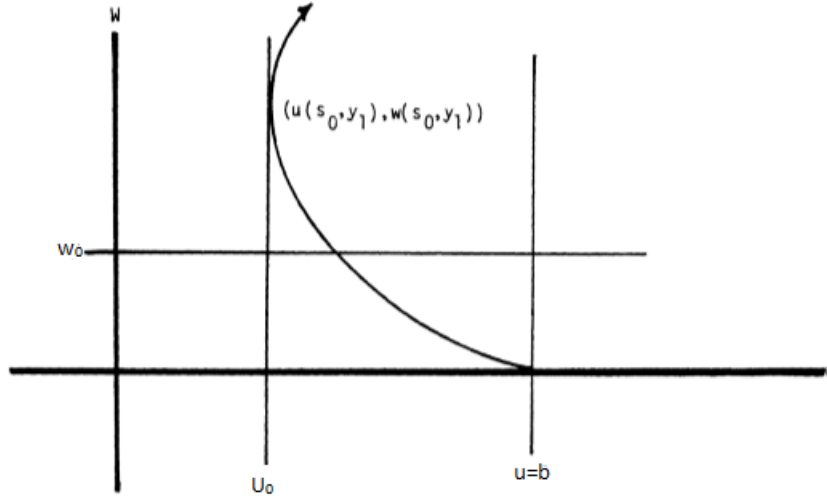
Considérons un petit cercle sur Ω_2 paramétriquement donné par

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} b + \varepsilon \cos(\theta + \varphi) + \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon) \\ \lambda_4 \varepsilon \cos(\theta + \varphi) + \lambda_3 \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon) \\ p(\lambda_3) \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon) \\ \lambda_3 p(\lambda_3) \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

La phase φ est donnée de telle sorte que $g(0)$ soit sur Ω_1 dans la région $u < b$, et le paramètre $\theta \in [0, 2\pi]$. On choisit g de sorte que lorsque θ croît de 0, $b + \varepsilon \cos(\theta + \varphi) + \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon)$ décroît et $p(\lambda_3) \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon)$ croît de 0. Soit A un élément de l'ensemble $\{\theta \in [0, 2\pi], \text{ il existe } s_0 \text{ tel que } u(s_0, g(\theta)) = u_0, v(s, g(\theta)) \leq 0, s \leq s_0\}$, Alors A contient 0 d'après les lemmes 1 et 2, A non vide et borné. Soit $\theta_1 = \sup A$ et $y_1 = g(\theta_1)$.

Lemme 4 *Il existe un s_0 tel que*

$$u(s_0, y_1) = u_0, w(s_0, y_1) > w_0, v(s_0, y_1) = 0$$


 FIGURE 2.2 – La projection dans le plan $u - w$

Démonstration 4 (a) Puisque $g(0) \in \Omega_1$ avec $u < b$, si $u(s_0, g(0)) = u_0$, alors

$v(s_0, g(0)) = \frac{d}{ds}u(s_0, g(0)) < 0$, par conséquent $u(s_0(\theta), g(0)) = u_0$ pour θ dans un petit voisinage de $\theta = 0$. Donc, $\theta_1 \neq 0$. par le lemme 2, si $g(\theta^*)$ est dans la branche de Ω_1 avec $u > b$, alors $\theta_1 < \theta^*$.

(b) $y(s, y_1) \notin \{(u, v, w, z) \mid u_0 < u < b, 0 < w < w_0, \forall s > 0\}$. Sinon $w' = z \forall s > 0$, donc w ne sera pas bornée.

(c) Il n'existe pas de $s_1 > 0$ tel que $v(s_1, y_1) = 0$, $u_0 < u(s_1, y_1) < b$, $w(s_1, y_1) > 0$. Sinon, si un tel s_1 existe, d'après lemme 3 on remarque que $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} \geq 0$, $u_0 < u(s) < b$, $w(s) > 0$. Si $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} = 0$, alors d'après $z(s) > 0$, on a que w est croissante. puisque $v(s_1, y_1) = 0$, on a $[\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}]' = \frac{z(s_1)}{1+u(s_1)} > 0$ et $\alpha(u(s) - b) + \frac{w(s)}{1+u(s)} > 0$, $u(s) > 0$ pour tout $s > s_1$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\alpha(u(s) - b) + \frac{w(s)}{1+u(s)} > 0$, $u(s) < 0$ pour $s \in (s_1 - \delta, s_1)$, alors la trajectoire $y(s)$ entre dans T , voir le lemme 7 de [3], on aura que $v(s) > -\frac{c}{4}w(s)$. C'est une contradiction avec le lemme 3.

Si il existe s_1 tel que $u(s_1) > 0$, $\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u} > 0$, alors $v'(s_1) = cv + u[\alpha(u-b) + \frac{w}{1+u}] > 0$, donc v est croissante, basé sur l'hypothèse que $v(s_1, y_1) =$

0, $u_0 < u(s_1, y_1)$. Le théorème des fonctions implicites et la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales implique qu'il existe un $s_1 = s_1(\theta)$ tel que $v(s_1(\theta), y_1(\theta)) = 0$, $u_0 < u(s_1(\theta), y_1(\theta))$ pour tout θ dans le voisinage de θ_1 . puisque il n'y a pas en T , $\alpha(u(s_1(\theta)) - b) + \frac{w(s_1(\theta))}{1+u(s_1(\theta))} > 0$, alors $v'(s_1(\theta), y_1(\theta)) > 0$ pour $\theta < \theta_1$. Ceci contredit la définition de θ_1 et prouve le cas (c).

(d) Il est impossible que $u(s, y_1) > u_0$ soit vrai pour tout s . Puisque u est décroissante et w est croissante, w ne peut pas être bornée. Si c'est vrai, alors $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} > \alpha(u - b) + \frac{w}{1+b}$. Donc $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}$ ne peut pas être bornée. Comme dans la preuve du lemme 1, on a $v(s) > m_1(u(s) - b)$, ou $m_1 > \lambda_4$. ça veut cela dire que $v(s)$ est bornée intérieurement par $m_1(u_0 - b)$. Alors $v'(s_1) = cv + u[\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u}]$ est croissante, ceci veut dire que v ne reste pas négative, donc u n'est pas décroissante, et ceci contredit (c).

(e) Nous avons d'après la partie (c) que $v(s, g(\theta)) < 0$ tant que $u(s, g(\theta)) \geq u_0$, et si il existe un s_0 tel que $u(s_0, y_1) = u_0$, $w(s_0, y_1) < w_0$, alors

$$\alpha(u_0 - b) + \frac{w}{1 + u_0} < \alpha(u_0 - b) + \frac{w_0}{1 + u_0} = 0$$

Ceci veut dire que la trajectoire entre dans T , alors on $v(s_0, g(\theta)) < 0$. cela est en contradiction avec la définition de θ_1 . Donc il n'existe pas un s_0 tel que $u(s_0, y_1) = u_0$, $w(s_0, y_1) < w_0$.

(f) Il n'existe pas un s_0 tel que $u(s_0, y_1) = u_0$, $w(s_0, y_1) = w_0$. Sinon, d'après (e), si $v(s_0, y_1) < 0$, ceci contredit la définition de θ_1 . Si $v(s_0, y_1) = 0$, la trajectoire entre dans T , en utilisant les même hypothèses utilisé dans (c), on a une contradiction.

Lemme 5 Il existe une valeur θ_2 de sorte que la coordonnée v de $g(\theta_2)$ est nulle et $\theta_2 > \theta_1$

Démonstration 5 *On sait d'après les lemmes précédent que les solutions partant de l'arc $g(\theta)$, $0 < \theta < \theta_1$, en Ω_2 entre dans T ou P . $\arg g(\theta)$ fournit un côté de la quadrilatère Σ , le second côté du quadrilatère est composé de deux parties, une partie est un arc $g(\theta)$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, ou θ_2 satisfait $\lambda_4 \varepsilon \cos(\theta + \varphi) + \lambda_3 \varepsilon \sin(\theta + \varphi) + O(\varepsilon) = 0$, soit $y_2 = g(\theta_2)$, la deuxième partie est un arc du cercle qui est l'intersection de la sphère qui entoure $(b, 0, 0, 0)$ dans Ω_2 et l'hyperplan $v=0$, voir (2.3).*

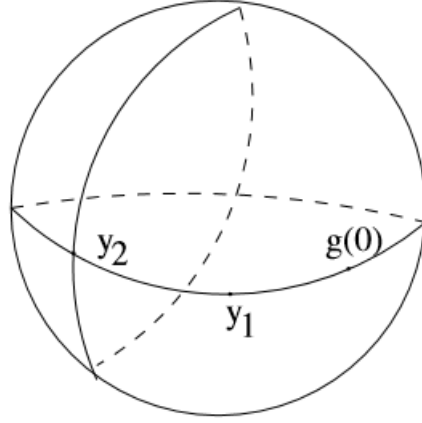


FIGURE 2.3 – Le deuxième coté de la quadrilatère Σ

Maintenant, nous construisons les autres côtés du quadrilatère Σ .

Lemme 6 *La sphère croise l'hyperplan défini par $v = 0$ et $z = 0$ dans une courbe fermée lisse, et il existe un point, disons y_3 , sur la sphère telle que les coordonnées v et z de y_3 sont toutes les deux nulles.*

Démonstration 6 *notons que*

$$g_1(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} b + \varepsilon \cos \theta \sin \varphi + \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) \\ \lambda_4 \varepsilon \cos \theta \sin \varphi + \lambda_3 \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) \\ p(\lambda_3) \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + p(\lambda_2) \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) \\ \lambda_3 p(\lambda_3) \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 p(\lambda_2) \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

On va montrer qu'il existe une fonction $\varphi(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ de classe C^1 et $\varphi(\theta) \in [0, \pi]$ tel que les coordonnées v, z de $g_1(\theta, \varphi) = 0$ satisfont

$$\lambda_4 \varepsilon \cos \theta \sin \varphi + \lambda_3 \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) = 0, \quad (2.7)$$

$$\lambda_3 p(\lambda_3) \varepsilon \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 p(\lambda_2) \varepsilon \cos \varphi + O(\varepsilon) = 0. \quad (2.8)$$

On divise respectivement (2.7), (2.8) par ε des deux côtés et on note

$$G(\theta, \varphi) = \lambda_4 \cos \theta \sin \varphi + \lambda_3 \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi + O(1) = 0, \quad (2.9)$$

$$H(\theta, \varphi) = \lambda_3 p(\lambda_3) \sin \theta \sin \varphi + \lambda_2 p(\lambda_2) \cos \varphi + O(1) = 0. \quad (2.10)$$

En $(\theta_2, \pi/2)$, $\partial G/\partial \varphi = -\lambda_2 \neq 0$, $\partial H/\partial \varphi \neq 0$, donc le théorème des fonctions implicites implique que, pour ε assez petit, il existe une courbe définie par

$$\cot \varphi = (\lambda_4 \cos \theta + \lambda_3 \sin \theta) / -\lambda_2$$

tel que θ et φ se trouvent dans un voisinage de la courbe.

Les points qui satisfont $\partial G/\partial \varphi \neq 0$ sont dans un voisinage de la courbe définie par

$$\cot \varphi = \lambda_2 / (\lambda_4 \cos \theta + \lambda_3 \sin \theta)$$

Ainsi, θ sur la sphère donnée par $\varphi(\theta)$ peut être étendue à une courbe fermée lisse $H(\theta, \varphi)$ sur la sphère. Nous pouvons obtenir le résultat similaire à propos de (2.10). La preuve du reste est similaire à la première partie de ce lemme.

Maintenant, nous choisissons un petit voisinage de $(b, 0, 0, 0)$ tel que les conditions requises dans le lemme 1 au lemme 6 sont satisfaites.

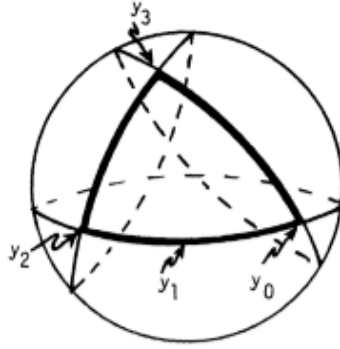


FIGURE 2.4 – Le triangle topologique Σ dans la sphère

Soit ε suffisamment petit pour assurer les conditions requises dans Lemme 5 et 6. Nous savons du lemme 1 au lemme 6 qu'il y a un triangle topologique défini sur la sphère, les trois sommets sont y_0 qui est déterminé par le lemme 1, $y_2 = g(\theta_2)$, et y_3 qui sont déterminés par le lemme 6. Mais ce triangle ne satisfait pas la condition (ii) de la proposition 1 parce qu'il y a un petit voisinage dans \mathbb{R}^4 autour du point $(b, 0, 0, 0)$ qui contient des points de W^- . Nous devons donc modifier le coin y_0 . Comme dans [3], d'après le lemme 6, soit U un petit voisinage de \mathbb{R}^4 autour du point y_0 . Soit U suffisamment petit pour qu'il ne contienne ni y_1 ni y_3 . Soit aussi U assez petit pour que si $y^* \in U$, alors il existe un $s_0(y^*)$ tel que $u(s_0(y^*), y^*) = u_0$. Rappelons que $y(s, y_0)$ croise $u = u_0$ transversalement en $s = s_0$.

Soit E une petite boule dans \mathbb{R}^4 centrée sur y_0 contenue dans U . Considérons la courbe de l'intersection de la sphère ∂E avec la sphère dans Ω_3 définie par $H(\theta, \varphi)$. Cette courbe est le quatrième côté de Σ . Soit y_4 l'intersection de ∂W avec l'arc qui est l'intersection de la sphère définie par $H(\theta, \varphi)$ et l'hyperplan $z = 0$, soit y_5 l'intersection de la sphère définie par $g(\theta)$. Ainsi, nous avons déterminé le troisième et quatrième côtés voir (2.5).

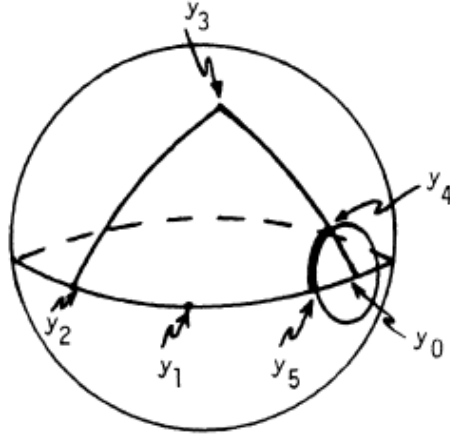


FIGURE 2.5 – Le quatrième coté de la quadrilatère Σ

Lemme 7 *Il existe un $y^* \in \Sigma$ tel que la solution $Y(s, y^*) = (u_1(s), v_1(s), w_1(s), z_1(s))$ reste dans la région W , et $0 < u_1 < b$, $0 < w_1 < L$ ou L est un réel positif pour tout s .*

Démonstration 7 *On a que l'ensemble W est fermé. Afin d'utiliser la proposition 1 pour prouver ce lemme, nous devons vérifier les conditions (ii) et (iii) de la proposition 1. Supposons que $y_0 \in \Sigma$, $s < T(y_0)$, $Y(s, y_0) \in W$, $Y(s, y_0) \notin W^-$. puisque $W^- \subseteq \text{int}W$ ou $W^- \subseteq \partial W \setminus W^-$, si $Y(s, y_0) \in \text{int}W$, alors il existe un ensemble ouvert U autour de $Y(s, y_0)$ disjoint de ∂W .*

Si $Y(s, y_0) \in \partial W \setminus W^-$, parce que N et H sont des variétés invariantes, $Y(s, y_0) \notin N$ ou H . Il y'a plusieurs cas à éliminer.

Si $Y(s, y_0)$ est dans la partie de $\partial W \setminus W^-$ avec $u > u_0$, $w < 0$, $z = 0$, alors $z' = cz + w(1 - \beta + \frac{\beta}{1+u}) > w(1 - \beta + \frac{\beta}{1+u_0}) = 0$ et la trajectoire était précédemment dans l'ensemble Q , ce qui contredit l'hypothèse $s < T(y_0)$.

Si $Y(s, y_0)$ est dans la partie de $\partial W \setminus W^-$ avec $u < u_0$, $\alpha(u - b) + \frac{w}{1+u} < 0$, $v = 0$, alors $v' = \frac{1}{d}[cv + \alpha u(u - b) + \frac{uw}{1+u}] > 0$ et la trajectoire était précédemment en T , cela contredit l'hypothèse $s < T(y_0)$.

Par construction, il s'en suit que Σ est compact, croise chaque trajectoire qu'une

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

seule fois et est simplement connexe. Si $\Sigma = \Sigma^0$, puisque W^- n'est pas simplement connexe, par la proposition 1, c'est impossible. Donc $\Sigma \neq \Sigma^0$, c'est-à-dire qu'il existe un point y^* tel que $Y(s, y^*) \in W$ pour tout s .

Supposant que s_1 est le premier temps tel que $w_1(s_1) > L$ avec $u(s_1) \leq u_0$, puisque $Y(s, y^*)$ est dans W , $Y(s, y^*) \notin P$, donc $z_1(s_1) < 0$. Ceci implique que $w_1(s)$ est décroissant et doit avoir dépassé L à un autre moment $s_2 \neq s_1$. Cela est une contradiction avec le premier temps s_1 . Par conséquent, $w_1(s)$ est borné. De même, nous pouvons prouver que $u_1(s)$ est borné.

Lemme 8 La solution $Y(s, y^*)$ reste dans Ω pour tout s , ou

$$q > \frac{1}{2} \left(c + \sqrt{c^2 - 4 \left(\beta - 1 - \frac{\beta}{1+b} \right)} \right).$$

$$\Omega = \{ (u, v, w, z) \mid 0 < u < b, 0 < w < L, -\frac{1}{c}w < z < qw, -\frac{L+1}{c}u < v < \frac{b\alpha}{c}u \}.$$

Démonstration 8 Supposons qu'il existe un s_1 tel que $z_1(s_1) < -\frac{1}{c}w_1(s_1)$. Si il existe un s_2 tel que $z_1(s_2) = -\frac{1}{c}w_1(s_2)$, alors $z'_1(s_2) + \frac{1}{c}w'_1(s_2) \geq 0$. En remplaçant dans $w' = z$ et $z' = cz + w - \frac{\beta uw}{1+u}$ on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} + c \right) w_1(s_2) + w_1(s_2) \left[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u_1(s_1)} \right] &\geq 0 \\ -\frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} + c \right) w_1(s_2) + w_1(s_2) \left[1 - \beta + \frac{\beta}{1+b} \right] &\geq 0 \end{aligned}$$

Ceci implique que $-\frac{1}{c^2} \geq 0$, qui est une contradiction, nous aurons que $z_1(s_1) < -\frac{1}{c}w_1(s_1)$. Nous aurons la même chose pour $s > s_1$, $z'_1(s) = cz_1(s) + w_1(s) \left[1 - \beta + \frac{\beta}{1+u_1(s)} \right] \leq cz_1(s) + w_1(s) < 0$ et $z_1(s) < z_1(s_1)$ pour $s > s_1$. Donc $w'_1(s)$ est strictement négative est bornée loin de zéro par $z_1(s_1)$ et $w_1(s_1) < 0$ pour un s finie. Ceci est une contradiction. Le reste de la preuve est similaire.

Lemme 9 la trajectoire $y(s, y^*) \rightarrow (u_0, 0, w_0, 0)$ quand $s \rightarrow +\infty$

Démonstration 9 *L'équation caractéristique du système (2.5) linéarisé au point $(u_0, 0, w_0, 0)$ est donné par*

$$\lambda^4 - \left(c + \frac{c}{d}\right)\lambda^3 + \frac{c^2 - r}{d}\lambda^2 + \frac{cr}{d}\lambda + \frac{\alpha b(\beta - 1) - \alpha}{d\beta} = 0 \quad (2.11)$$

où $r(\beta) = \frac{\alpha(1+b)}{\beta} - \frac{2\alpha}{\beta-1}$. Puisque $\frac{b+1}{b} < \beta < \frac{b+1}{b-1}$, on a que $r < 0$, $\frac{\alpha b(\beta-1) - \alpha}{d\beta} > 0$. en utilisant le critère de Routh-Hurwitz, on peut voir que l'équation caractéristique à deux valeurs propres avec partie réelle positive et deux autres avec partie réelle négative. Par le théorème 6.2 de [8], il y a une variété stable de 2-dimension au point $(u_0, 0, w_0, 0)$. Pour montrer que la solution va s'approcher du point $(u_0, 0, w_0, 0)$, on construit une fonction de Lyapunov comme suit

$$V = [c(u - u_0) - dv] + u_0 \left[d \frac{v}{u} - c \log \frac{w}{w_0} \right] + u_0 [c(w - w_0) - z] + u_0 w_0 \left[\frac{z}{w} - c \log \frac{w}{w_0} \right].$$

On a que $V(u, v, w, z)$ est continue et bornée dans Ω , et

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{ds} &= \frac{\partial V}{\partial u} \cdot u_t + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot v_t + \frac{\partial V}{\partial w} \cdot w_t + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot z_t \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} + \alpha(u - u_0)(b - u) - \frac{uw}{1+u} - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} + \left[\frac{u_0 w}{1+u} - u_0 w \right] + \frac{\beta u_0 u w}{1+u} \\
&\quad + w_0 u_0 - \frac{\beta u_0 w_0 u}{1+u} \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} + \alpha(u - u_0)(b - u) - \frac{uw}{1+u} - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} - \frac{u_0 u w}{1+u} + \frac{\beta u_0 u w}{1+u} \\
&\quad + w_0 u_0 - \frac{\beta u_0 w_0 u}{1+u} \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} + \alpha(u - u_0)(b - u) + \left[\frac{\beta u_0 u w}{1+u} - \frac{uw}{1+u} - \frac{u_0 u w}{1+u} \right] - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} \\
&\quad + u_0 w_0 - \frac{\beta u_0 w_0 u}{1+u} \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} + \alpha(u - u_0)(b - u) - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} + u_0 w_0 - \frac{\beta u_0 w_0 u}{1+u} \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} + \alpha(u - u_0)(b - u) - w_0 u_0 \left[1 - \frac{\beta u}{1+u} \right] \\
&= -\frac{u_0 v^2}{u^2} - \frac{u_0 w_0 z^2}{w^2} + \frac{\alpha(u - u_0)^2}{1+u} [b - 1 - u_0 - u].
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{b+1}{b} < \beta < \frac{b+1}{b-1}$, $\frac{dV}{ds} \leq 0$ dans Ω . $\frac{dV}{ds} = 0$ si et seulement si $u = u_0$, $z = 0$, le sous ensemble invariant le plus large de ce segment est l'unique point $(u_0, 0, w_0, 0)$. Le Principe d'invariance de Lasalle, nous donne que $y(s) \rightarrow (u_0, 0, w_0, 0)$ quand $s \rightarrow +\infty$

2.3.2 Preuve du théorème 2

Pour prouver le théorème 2, nous fixons α , d et b , alors que β et c nous les laissons comme paramètres. Ce choix de paramètre revient à fixer les valeurs du taux de croissance et la capacité limite de la proie et à faire varier l'efficacité du prédateur. Nous cherchons des racines purement imaginaires de l'équation caractéristique (2.11). En substituant $\lambda = ki$ en (2.11) et en simplifiant, nous avons

$$\begin{cases} K^4 - \frac{c^2 - r(\beta)}{d} K^2 + p(\beta) = 0 \\ K^2 = -\frac{r(\beta)}{1+d} \end{cases}$$

où $r(\beta) = \frac{\alpha(1+b)}{\beta} - \frac{2\alpha}{\beta-1}$, $p(\beta) = \frac{\alpha b(\beta-1) - \alpha}{d\beta}$. Puisque $\beta < \frac{b+1}{b-1}$, on obtient que $r(\beta) < 0$, $p(\beta) < 0$. Ainsi, une paire de valeurs propres imaginaires existe si les paramètres β et c satisfont la condition $c^2 = \frac{1}{1+d} - \frac{d(1+d)}{r} p$.

On considère λ en fonction de β , et dérivons l'équation caractéristique (2.11) par rapport à β

$$\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} = \frac{\frac{r'}{d}\lambda^2(\beta) - \frac{cr'}{d}\lambda(\beta) - p'}{4\lambda^3(\beta) - 3\lambda^2(\beta)(c + \frac{c}{d}) + \frac{2(c^2-r)}{d}\lambda(\beta) + \frac{cr}{d}} \quad (2.12)$$

Substituons $\lambda = Ki$ dans (2.12), on obtient

$$\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} = -\frac{(r'K^2 + p'd) + cr'Ki}{(3K^2c(1+d) + cr) + (2K(c^2 - r) - 4dK^3)i}$$

Après quelques calculs, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}\right) &= -cr\left[\frac{rr'(3-d)}{(1+d)^2} - 2dp' + \frac{(r-2c^2)r'}{1+d}\right] \\ &= \frac{-2c\alpha r}{1+d} \left\{ \left(\frac{2}{\beta-1} - \frac{1+b}{\beta}\right) \frac{2\alpha}{1+d} \left(\frac{1+b}{\beta^2} - \frac{2}{(\beta-1)^2}\right) + \frac{1+b}{\beta^2} (c^2 - 1 - d) - \frac{2c^2}{(\beta-1)^2} \right\} \end{aligned}$$

2.3. PREUVES DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

soit $m = \left(\frac{2}{\beta-1} - \frac{1+b}{\beta}\right)\frac{2\alpha}{1+d}$, et on réécrit $Re\left(\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}\right)$ comme suit

$$Re\left(\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}\right) = \frac{-2\alpha cr}{1+d} \left\{ (m + c^2) \left(\frac{1+b}{\beta^2} - \frac{2}{(\beta-1)^2} \right) - \frac{(1+b)(1+d)}{\beta^2} \right\}$$

Puisque $\frac{b+1}{b} < \beta \leq \frac{1}{1-\sqrt{2/(1+b)}}$, on a $Re\left(\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}\right) < 0$. Cela implique que la condition transversale est satisfaite. Ainsi, nous avons prouvé le théorème 2.

Bibliographie

- [1] P. Auger. Modélisation mathématique en Écologie. 2010.
- [2] C. Conley. Isolated invariant sets and the morse index. 1978.
- [3] S. Dunbar. Traveling wave solutions of diffusive *Lotka – Volterra* equations : A heteroclinic connection in \mathbb{R}^4 . *Trans Amer Math Soc*, 286(2) :557–594, Dec 1984.
- [4] K. Mischaikow et M. Mrozek. Conley index theory ». in : Handbook of dynamical systems ii. 2002.
- [5] R. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. 1937.
- [6] H. I. Freedman. Deterministic mathematical models in population ecology. 1980.
- [7] A. Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge University Press*, 2002.
- [8] C. S. Holling. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 1965.
- [9] H. K. Khalil. Non linear systems. *Prentice Hall*, 2002.
- [10] T. Lawson. Topology : A geometric approach. oxford graduate texts in mathematics. *Oxford University Press*, 2003.
- [11] S. Lynch. dynamical systems with applications using mathematica. 2007.

- [12] R. May. Stability and complexity in model ecosystems. *Princeton University Press*, 1974.
- [13] J. D. Murray. Mathematical biology : I. an introduction, third edition. *Springer*, 17, 2002.
- [14] E. Renshaw. Modelling biological populations in space and time. *Cambridge Studies in Mathematical Biology*, 1991.
- [15] J Huang· G Lu· S Ruan. Existence of traveling wave solutions in a diffusive predator-prey model. page 132–152, 2003.
- [16] M. Sameh. Une méthode topologique pour la recherche d'ensembles invariants de systèmes continus et à commutation. 2016.
- [17] T. Wazewski. Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. *Ann. Soc. Polon. Math*, 1947.