

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Etude de l'Effet de Changement Climatique sur la Dynamique de Populations.

Présenté Par : KADA Khadidja Aicha

Mémoire soutenu le date devant le jury composé de :

<i>M.A.Moussaoui</i>	PROFESSEUR UABB TLEMEN	Président
<i>M.T.Mahdjoub</i>	PROFESSEUR UABB TLEMEN	Examineur
<i>M.M.Houbbad</i>	MCA UABB TLEMEN	Examineur
<i>M.S.M.Bouguima</i>	PROFESSEUR UABB TLEMEN	Encadreur

Année universitaire 2017-2018

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma famille, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

Que Dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mon encadreur Monsieur *S.M.Bouguima*, dont le mérite, les sacrifices et les qualités humaines m'ont permis de vivre ce jour.

A Ma chère grand-mère, Ma merveilleuse maman, Mon adorable tante, et mes aimables oncles, qui m'ont soutenu tout le long de mon parcours,

Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté.

A mes très chers amis, collègues d'étude et frères de cœurs, qui m'ont toujours encouragé et étaient présent à mes cotés durant mon chemin d'études supérieurs.

Ainsi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

KADA Khadidja Aicha

Remerciements

En préambule à ce mémoire Je remercie avant tout Dieu qui m'a aidé et donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences, Département des Mathématiques, Université de Tlemcen, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **BOUGUIMA Sidi Mohamed** qui, en tant qu'encadreur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **MOUSSAOUI Ali**, d'abord pour sa compétence, sa disponibilité, et son sens d'écoute et d'échange, Ainsi pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de ce mémoire.

Remerciements

Je tiens à remercier les examinateur Messieurs *MAHDJOUB Tewfik*
et *HOUBBAD Mekki* d'avoir accepté de faire part du jury de ce mémoire.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui
m'ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

Les populations sont souvent influencées par des facteurs externes de leur environnements, ainsi elles développent un sens d'adaptation pour maintenir leur survie, et parmi ses facteurs, on distingue le changement climatique. Dans notre travail, nous proposons un modèle qui décrit l'adaptation de la population avec son environnement.

A notre connaissance, les résultats obtenus sont nouveaux.

Abstract

Populations are often influenced by external factors to their environments, so they develop a sense of adaptation to maintain their survival, and among its factors, we distinguish climate change.

In our work, we propose a model that describes the adaptation of the population with its environment. To our knowledge, the obtained results are new.

Table des matières

Dédicaces	1
Remerciements	2
Résumé	4
Abstract	5
1 Introduction	7
1.1 Préambule	7
1.2 Qu'est ce qu'un système dynamique	8
1.3 Modèle de croissance exponentielle Malthusien	9
1.3.1 Solution analytique	9
1.3.2 Analyse géométrique	10
1.4 Modèle de croissance logistique classique	12
1.4.1 Solution analytique	12
1.4.2 Analyse géométrique	13
1.5 Modèle logistique avec Effet Allee	15
1.5.1 Analyse géométrique	15
1.6 Modèle de compétition	18
1.6.1 Analyse géométrique	19
1.7 Modèle Proie-Prédateur	25
1.7.1 Analyse géométrique	26
2 Préliminaires	31
2.1 Rappels sur la Théorie de Floquet	31
2.2 Systèmes Dynamiques dans le plan	33
3 Équation de Réaction-Diffusion	34
3.1 Équation de Fisher-Kolmogorov (Ondes Progressives)	34
3.2 Équation sans diffusion	34
3.3 Équation avec diffusion et taux de croissance constant	35
3.4 Équation avec diffusion et taux de croissance variable (périodique)	40
3.5 Simulation numérique pour un taux de croissance périodique	44
3.6 Équation avec diffusion et taux de croissance variable (non-périodique)	45
3.7 Simulation numérique pour un taux de croissance non-périodique	47
Perspectives	48

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préambule

L'Analyse des phénomènes en dynamique de populations fait de plus en plus appel à des modèles, mathématiques.

Depuis le moyen age, (Leonardo Pisano Fibonacci 1202, ¹) se posa la question suivante : partant d'un couple de lapin, combien de couples obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif qu'après deux mois ?

Il met au point la fameuse suite qui permet de déduire la quantité de lapins de la saison suivante à partir des quantités des saisons précédents.

Pour tout entier n strictement positif

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Ce fut une contribution majeure à la biomathématique.

Dans notre travail, nous utilisons des équations différentielles pour analyser la dynamique de population.

Des modèles utilisés dans ce cadre, nous retenons deux aspects :

- 1- l'importance du temps pour prédire l'évolution de l'espèce.
- 2- l'importance de l'aspect qualitatif des résultats car les paramètres sont généralement difficiles à estimer pour donner une solution approximative ou analytique.

1. Fibonacci a grandi à Bedjaia où son père était officier des douanes. Et c'est probablement grâce à la culture des commerçants arabes que les premiers calculs ont été formalisés.

Dans la section suivante, nous nous sommes inspirés du travail de (A.Salisbury[3]) et (J.D.Murray[14])

1.2 Qu'est ce qu'un système dynamique

Un système peut être vaguement défini comme un assemblage d'objets interactifs ou interdépendants qui forment collectivement un «ensemble» intégré. Les systèmes dynamiques décrivent l'évolution des systèmes dans le temps.

Que le système s'installe dans un état d'équilibre, se fixe en cycles oscillant régulièrement, ou fluctue de façon chaotique, c'est la dynamique du système qui décrit ce qui se passe (Strogatz, 1994,[17]). Un système qui semble stable et équilibré est, en fait, le résultat de forces agissant en cohorte pour produire un équilibre de tendances. Dans certains cas, seule une petite perturbation est nécessaire pour déplacer le système dans un état complètement différent. Cet événement est appelé une bifurcation.

Les systèmes de phénomènes naturels sont généralement constitués de sous-systèmes discrets avec leurs propres ensembles de forces internes. Ainsi, afin d'éviter les problèmes de complexité intraitable, le système doit être simplifié par la discrétion de l'observateur. Par exemple, nous pourrions dire que pour le microbiologiste, le système en question est la cellule, et de même, l'organe pour le physiologiste, la population pour l'écologiste, et ainsi de suite. Un modèle valable nécessite donc un ensemble de variables sélectionnées avec soin pour représenter le phénomène du monde réel en question.

Le détail des systèmes complexes nécessite un langage pour une description précise, et il s'avère que les modèles mathématiques servent bien à décrire les systèmes considérés. Les systèmes dynamiques peuvent être représentés de diverses manières. Ils sont le plus souvent représentés par des équations différentielles ordinaires (ODE) continues ou des équations aux différences discrètes. D'autres manifestations se retrouvent fréquemment dans les équations différentielles partielles (EDP), les automates à gaz de réseau (LGA), les automates cellulaires (AC), etc. L'objet de ce travail réside principalement dans les systèmes représentés par les équations différentielles.

Le comportement dynamique d'un système peut être déterminé par des entrées provenant de l'environnement, mais comme c'est souvent le cas, le retour d'information du système lui permet de réguler sa propre dynamique en interne.

Un système est dit être à l'équilibre si les forces opposées dans le système sont équilibrées, et à son tour l'état du système reste constant et inchangé.

On dit qu'un système est stable si son état revient à un état d'équilibre après une certaine perturbation (par exemple, une perturbation de l'environnement). Un système est globalement stable si son état revient à l'équilibre suite à une perturbation de n'importe quelle magnitude, alors qu'un système localement stable indique que des déplacements doivent avoir lieu dans un voisinage défini de l'équilibre pour que le système retrouve le même état d'équilibre.

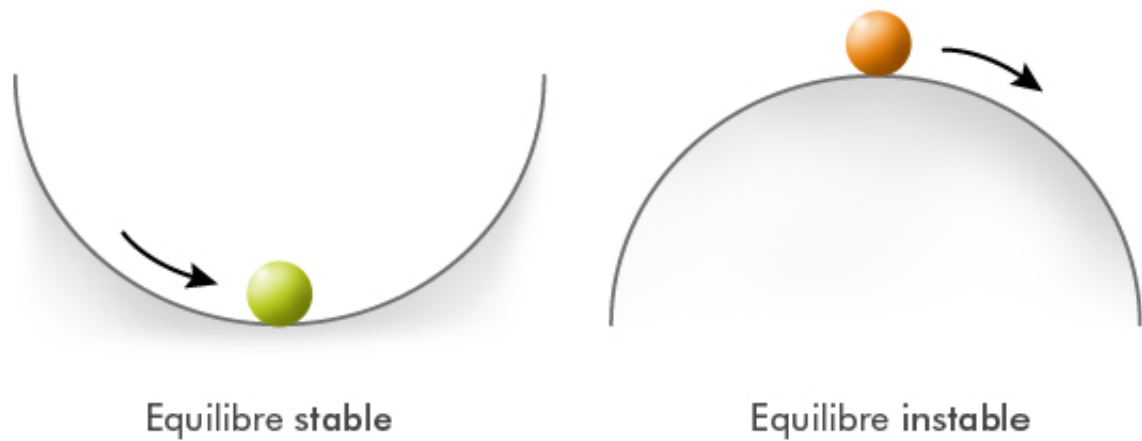


FIGURE 1.1 – Analogie de la roulette pour des équilibres stables et instables

La notion de stabilité est illustrée à la figure 1.1 au moyen d'une bille reposant sur un sommet (position instable) et dans le creux d'une vallée (position stable). Imaginer un paysage avec des pics et des vallées multiples est, par analogie, imaginer un paysage global avec de multiples points de stabilité locaux (vallées) et d'instabilité (pics). Les pics dans le paysage définissent les seuils séparant chacun des équilibres distincts, et donc le niveau de perturbation que le système doit subir est analogue à celui de la magnitude du pic.

1.3 Modèle de croissance exponentielle Malthusien

Thomas Robert Malthus a proposé que la croissance d'une population se poursuive de façon exponentielle si la croissance n'est pas maîtrisée. L'équation de Malthus est notée :

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (1.1)$$

Où N représente la densité de la population et r est une constante représentant le taux de croissance intrinsèque.

Les unités de temps t varient en fonction de l'organisme d'enquête. Par exemple, pour des organismes se multipliant rapidement (par exemple des bactéries), t peut être mesuré en minutes, tandis que pour des organismes se multipliant lentement (par exemple des éléphants), t peut être mesuré en années.

1.3.1 Solution analytique

La solution de l'équation (1.1) est facilement obtenue par la séparation des variables et l'intégration des deux côtés de l'équation, ceci donne :

$$\int_{N(0)}^{N(T)} \frac{dN}{N} = \int_{t=0}^{t=T} r dt$$

$$\ln |N| \Big|_{N(0)}^{N(T)} = rt + c \Big|_0^T$$

$$\ln N(T) - \ln N(0) = (rT + c) - (0 + c)$$

$$\ln(N(T)) - \ln(N(0)) = rT$$

$$\frac{N(T)}{N(0)} = e^{rT}$$

Où $N(T)$ et $N(0)$ sont tout les deux positifs.

En réarrangeant l'équation, nous obtenons la solution exacte

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

1.3.2 Analyse géométrique

La croissance malthusienne décrite par (1.1) peut se manifester à la fois comme croissance exponentielle et décroissance exponentielle, par exemple la croissance exponentielle se produit pour tout $r > 0$ cependant, en inversant le signe de r , le modèle devient celui dans lequel une population décroît exponentiellement dans le temps à mesure que la fraction r d'individus est éliminée par unité de temps.

En regardant la ligne de phase (Figure 1.2), le taux linéaire de variation de la taille de la population, ou densité, est représenté à la fois pour la croissance exponentielle et la décroissance exponentielle.

Points d'équilibres

La seule solution d'équilibre

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

se produit quand

$$N^* = 0$$

Stabilité des points d'équilibre

Qualitativement, on peut juger de la stabilité du point d'équilibre selon que les trajectoires s'approchent de $+\infty$, pour tout $r > 0$ (ie. $N^* = 0$ est **instable**) ou zéro pour tout $r < 0$ (ie. $N^* = 0$ est **stable**).

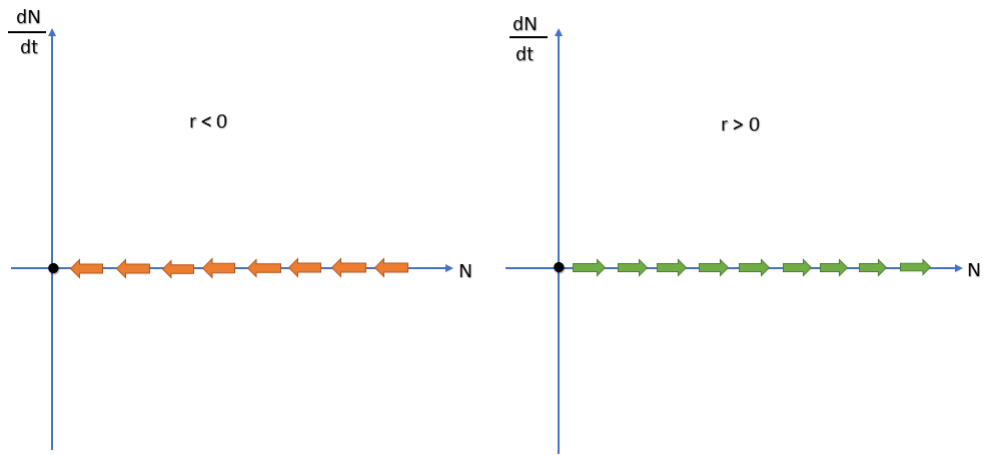


FIGURE 1.2 – Portrait de phase du modèle (1.1)

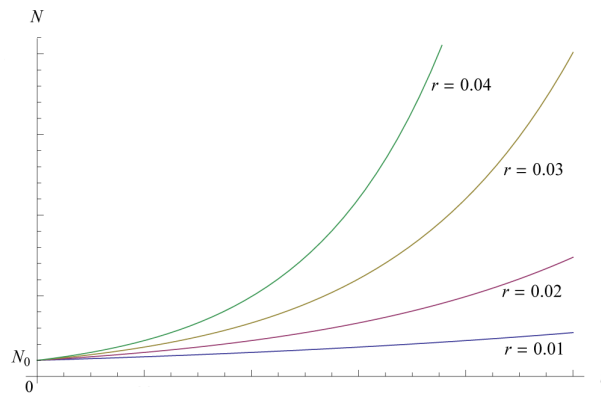


FIGURE 1.3 – Dynamique de croissance exponentielle donnée par Eq.(1.1) : croissance exponentielle pour un ensemble de taux de croissance positifs arbitraires r .

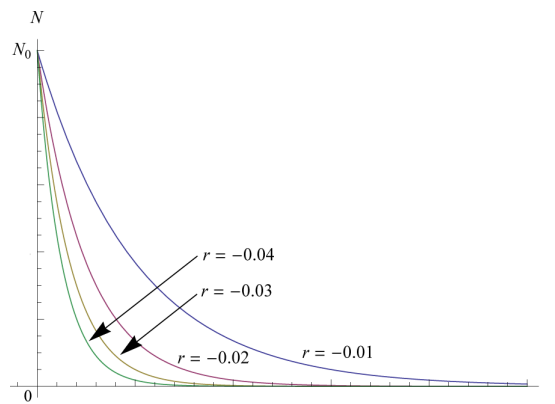


FIGURE 1.4 – Dynamique de croissance exponentielle décrite par Eq.(1.1) : décroissance exponentielle pour un ensemble de taux de croissance négatifs arbitraires r .

1.4 Modèle de croissance logistique classique

L'équation logistique, développée par Verhulst, anticipe une limite, ou capacité limite, sur la croissance de la population. Cette capacité limite est symboliquement représentée par K .

L'ajout du nouveau terme K au modèle est une avancée intuitive du modèle malthusien puisque nous savons de façon réaliste que les individus ne peuvent pas se propager indéfiniment dans un espace fini et que le taux de croissance devrait diminuer à mesure que la densité augmente.

ainsi le modèle logistique est représenté par l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.2)$$

$r > 0$: taux de croissance intrinsèque,

$K > 0$: capacité limite.

1.4.1 Solution analytique

La solution à l'équation (1.2) peut être obtenue par la séparation des variables et l'intégration des deux côtés, ce qui donne :

$$\frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r dt$$

$$\int_{N(0)}^{N(T)} \frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \int_{t=0}^{t=T} r dt$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{\left(1 - \frac{N}{K}\right)}$$

Avec :

$$A = 1, B = \frac{1}{K}$$

D'où :

$$N(T) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

1.4.2 Analyse géométrique

Points d'équilibres

Nous obtenons les points d'équilibre N^* du système en trouvant toutes les valeurs de N qui satisfont $\frac{dN}{dt} = 0$.

$$\frac{dN}{dt} = 0 \implies rN^*\left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0,$$

$$rN^* = 0 \text{ ou } \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0$$

Et nous obtenons

$$N^* = 0$$

$$N^* = K$$

Ainsi, l'équation logistique a exactement deux points d'équilibre.

stabilité des points d'équilibre

Pour

$$f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

On a

$$f'(N) = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right) \tag{1.3}$$

Remplaçons dans (1.3) par le premier point d'équilibre $N^* = 0$

On aura : $f'(0) = r$ d'où :

$N^* = 0$ est **instable**.

Maintenant remplaçons par le deuxième point d'équilibre $N^* = K$

On aura : $f'(K) = -r$ d'où :

$N^* = K$ est **stable**.

Un point d'inflexion se produit à $N = \frac{K}{2}$ pour toutes les solutions qui le traversent, et nous pouvons voir graphiquement que la croissance de N est rapide jusqu'à ce qu'elle franchisse le point d'inflexion $N = \frac{K}{2}$. A partir de là, la croissance subséquente ralentit lorsque N approche asymptotiquement K

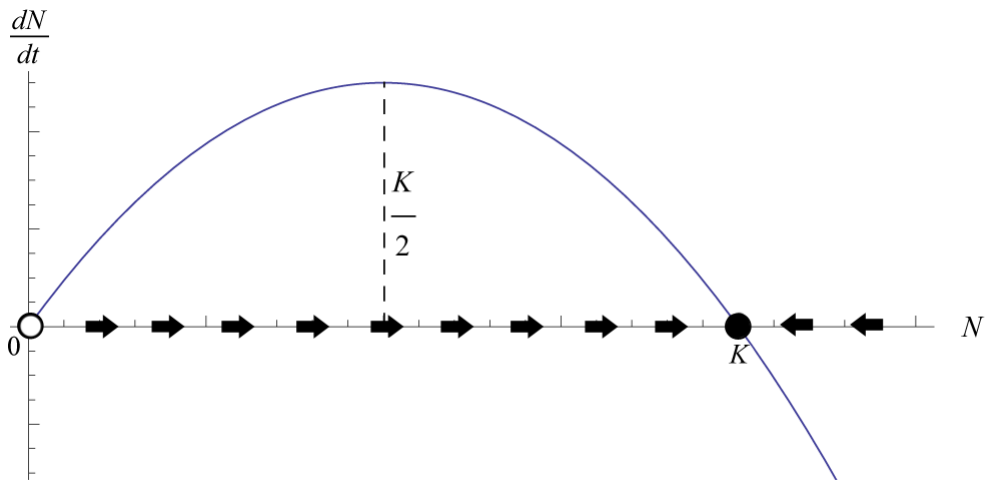


FIGURE 1.5 – Portrait de phase de la croissance logistique, tel que décrit par Eq.(1.2)

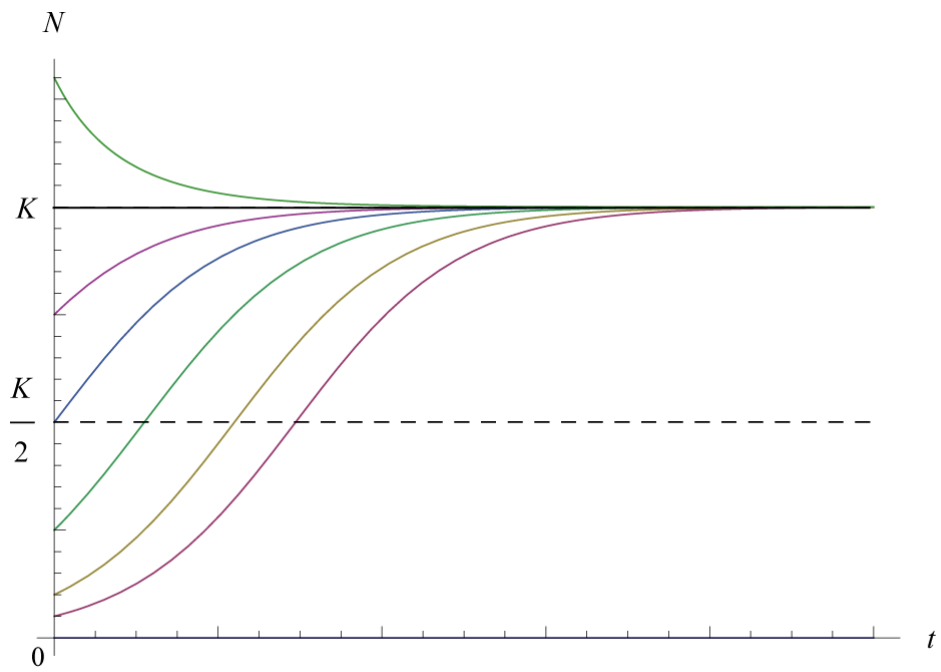


FIGURE 1.6 – Dynamique du modèle logistique donnée par Eq.(1.2)

1.5 Modèle logistique avec Effet Allee

L'effet Allee est caractérisé par le fait qu'au dessous d'un seuil, la population est conduite à son extinction. (Courchamp, Clutton-Brock et Grenfell, 1999 [5]).

Les effets Allee peuvent s'expliquer par plusieurs mécanismes, notamment la disponibilité limitée des partenaires et la coopération affaiblie entre individus (par exemple, si trop peu d'individus sont disponibles pour la recherche coopérative de nourriture, la chasse et la défense).

Pour commencer à incorporer l'effet Allee dans le modèle 1.2, l'insertion d'une valeur seuil critique T (également appelée seuil Allee) est nécessaire pour cela, d'une manière où au-dessus de valeur seuil la population continuera par une croissance logistique ordinaire et en dessous de laquelle la population déclinera.

Ainsi on obtiendra l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = -rN\left(1 - \frac{N}{T}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.4)$$

Où $r > 0$ et $0 < T < K$ (Gruntfest, et al., 1997 as cited by Courchamp, Ludèk, and Gascoigne, 2008 [4]).

1.5.1 Analyse géométrique

Points d'équilibre

Nous obtenons les points d'équilibres N^* en résolvant l'équation suivante : $\frac{dN}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 &\implies -rN^*\left(1 - \frac{N^*}{T}\right)\left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0 \\ -rN^* = 0 &\text{ ou } \left(1 - \frac{N^*}{T}\right) = 0 \text{ ou } \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0 \end{aligned}$$

Et nous obtenons

$$N^* = 0$$

$$N^* = K$$

$$N^* = T$$

stabilité des points d'équilibre

Pour

$$g(N) = -rN\left(1 - \frac{N}{T}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

On a

$$g'(N) = r\left(-1 + \frac{2N(T+K) - 3N^2}{TK}\right) \quad (1.5)$$

Remplaçons dans (1.5) par notre premier points d'équilibre $N^* = 0$:

On aura :

$$g'(0) = -r$$

Sachant qu'on a comme donnée que le taux de croissance $r > 0$ donc :

$$N^* = 0 \text{ est } \text{stable}$$

Voyons maintenant la stabilité de notre deuxième point d'équilibre $N^* = K$,

On aura :

$$g'(K) = r\left(\frac{2KT - K^2}{TK} - 1\right)$$

$$g'(K) > 0 \text{ ssi } T > K \text{ et } g'(K) < 0 \text{ ssi } T < K$$

sachant qu'on a comme donnée initiale que $0 < T < K$ alors :

$$N^* = K \text{ est } \text{stable}$$

Pour le troisième point d'équilibre $N^* = T$ on a :

$$g'(T) = r\left(\frac{2TK - T^2}{TK} - 1\right)$$

$$g'(T) > 0 \text{ ssi } T < K \text{ et } g'(T) < 0 \text{ ssi } T > K$$

Vu qu'on a comme condition $0 < T < K$ alors :

$$N^* = T \text{ est } \text{instable}$$

Nous observons que le comportement de l'équation 1.4 reflète l'effet d'Allee dans la mesure où les individus au-dessous du seuil Allee T s'éteignent et ceux au-dessus du seuil progressent vers leur capacité environnementale K . Le type spécifique est appelé effet Allee fort car les populations en dessous du seuil sont menacées d'extinction, alors que dans le cas d'un effet Allee faible, les populations en dessous du seuil sont simplement affaiblies dans leur taux de croissance.

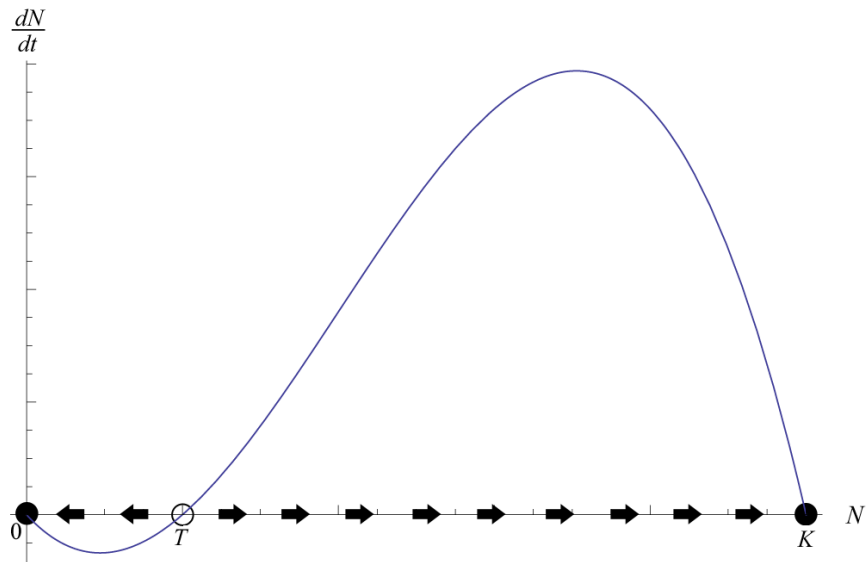


FIGURE 1.7 – Portrait en ligne de phase de l'effet Allee, tel que décrit par Eq.1.4, où T représente la valeur seuil critique Allee et K représente la capacité limite.

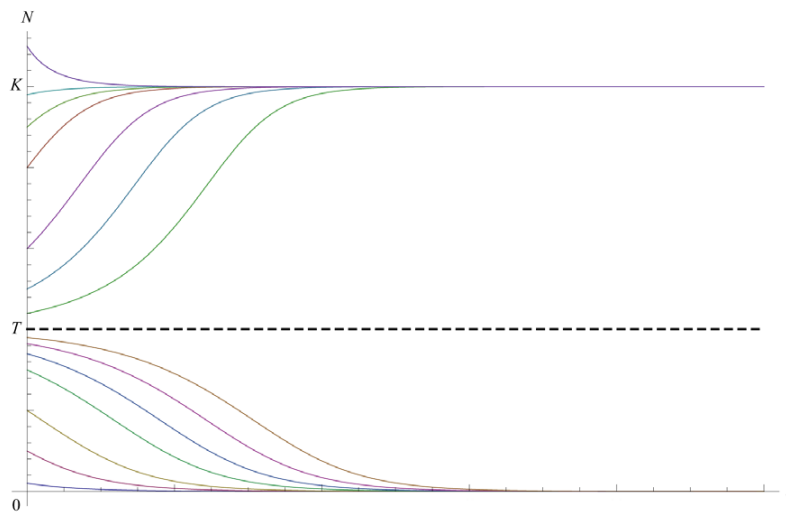


FIGURE 1.8 – Dynamique de l'effet Allee, tel que décrit par Eq.(1.4), où T représente la valeur seuil critique Allee et K représente la capacité limite.

Nous avons précédemment considéré des modèles unidimensionnels dans lesquels des populations homogènes uniques fluctuent en l'absence de relations interspécifiques. Naturellement, les écosystèmes sont constitués de populations appartenant à de multiples espèces, et donc, les effets de ces espèces les uns sur les autres devraient être pris en considération. Le cas le plus simple dans lequel la dynamique communautaire peut être modélisée implique deux espèces en interaction. Ces deux espèces sont modélisées dans l'hypothèse que tout ce qui est en dehors de cette paire (c'est-à-dire l'environnement, les autres espèces, etc.) est maintenu constant. Par conséquent, les deux espèces existeraient isolément.

Désormais, nous considérons des modèles bidimensionnels, ce qui nous permettra de rendre compte des effets de deux espèces les unes sur les autres. Nous explorerons les ramifications écologiques des populations concurrentes, des populations mutualistes et des interactions proies-prédateurs, qui présentent toutes des comportements non linéaires caractéristiques. De plus, nous utiliserons la matrice jacobienne des dérivées partielles et ses valeurs propres pour évaluer les systèmes et leur stabilité.

1.6 Modèle de compétition

Ici, deux ou plusieurs espèces sont en compétition pour la même source de nourriture. Par exemple, la concurrence peut être pour un territoire qui est directement lié aux ressources alimentaires.

Nous discutons ici un modèle de compétition très simple qui démontre un principe assez général que l'on observe dans la nature, à savoir que lorsque deux espèces se disputent les mêmes ressources, une des espèces disparaît habituellement.

Considérons le modèle de compétition Lotka-Volterra à deux espèces avec chaque espèce N_1 et N_2 ayant une croissance logistique en l'absence de l'autre.

L'intégration de la croissance logistique dans les systèmes de Lotka-Volterra les rend beaucoup plus réalistes, mais pour mettre en évidence le principe, nous considérons le modèle le plus simple qui reflète néanmoins de nombreuses propriétés de modèles plus compliqués, en particulier en ce qui concerne la stabilité.

Nous considérons donc :

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right] \quad (1.6)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right] \quad (1.7)$$

Où r_1 , K_1 , r_2 , K_2 , b_{12} et b_{21} sont toutes des constantes positives, et comme précédemment :

r_i , $i = 1, 2$: représente les taux de croissance,

K_i , $i = 1, 2$: représente les capacités limite,

b_{12} et b_{21} mesurent respectivement l'effet compétitif de N_2 sur N_1 et N_1 sur N_2 : ils ne sont généralement pas égaux.

Notons que le modèle de compétition (1.6) et (1.7) n'est pas un système conservateur comme son homologue proie-prédateur de Lotka-Volterra.

Si nous dimensionnons ce modèle en écrivant :

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad \tau = r_1 t, \quad \rho = \frac{r_2}{r_1},$$

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

(1.6) et (1.7) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{d\tau} = \rho u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2). \end{cases} \quad (1.8)$$

1.6.1 Analyse géométrique

Points d'équilibre

Les états stationnaires du système (1.8) sont des solutions de : $f_1(u_1, u_2) = 0$ et $f_2(u_1, u_2) = 0$ et qui sont :

$$(u_1^*, u_2^*) = (0, 0)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (1, 0)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (0, 1)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}} \right)$$

On suppose que $u_1^* > 0$ et $u_2^* > 0$.

Les quatre possibilités sont visibles immédiatement lors du dessin des nullclines $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ dans le plan de phase u_1, u_2 comme c'est représenté dans la (Figure 1.9).

$$\begin{aligned} f_1 = 0 &\implies 1 - u_1 - a_{12}u_2 = 0 \text{ et } u_1 = 0, \\ f_2 = 0 &\implies 1 - u_2 - a_{21}u_1 = 0 \text{ et } u_2 = 0 \end{aligned}$$

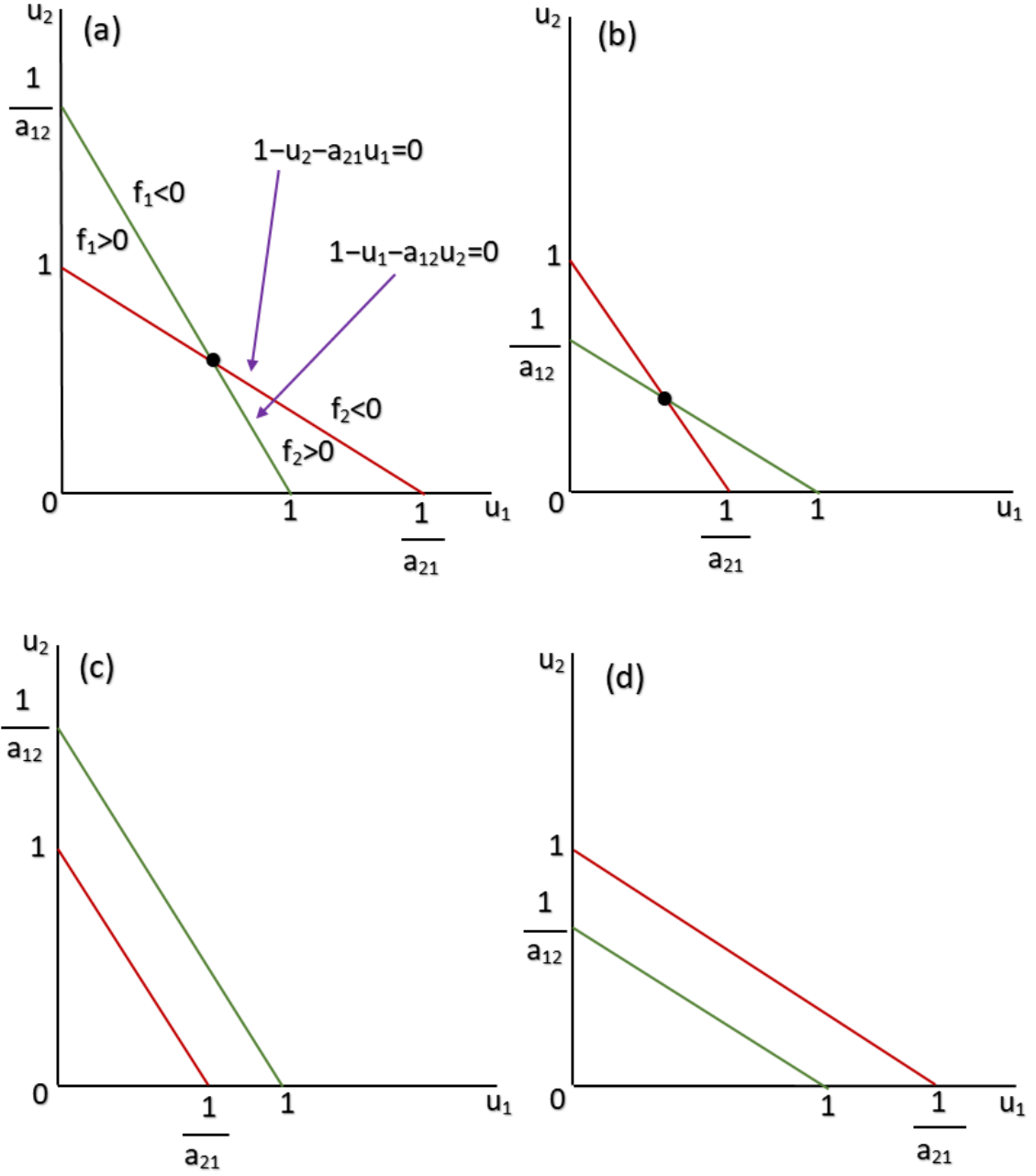


FIGURE 1.9 – La représentation des nullclines pour le modèle (1.8)

La stabilité des points d'équilibre est déterminée par la matrice jacobienne, qui pour notre système (1.8) est :

$$J(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12}u_2 & -a_{12}u_1 \\ -\rho a_{21}u_2 & \rho(1 - 2u_2 - a_{21}u_1) \end{pmatrix}$$

- **stabilité du point d'équilibre (0, 0)**

$$|J(0, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \rho - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \rho$$

Les deux valeurs propres sont positives donc (0, 0) est un point d'équilibre **instable**

- **stabilité du point d'équilibre (1, 0)**

$$|J(1, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -a_{12} \\ 0 & \rho(1 - a_{21}) - \lambda \end{vmatrix} \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$$

Ainsi,

$$\text{le point d'équilibre (1, 0) est } \begin{cases} \text{stable} \\ \text{instable} \end{cases} \text{ si } \begin{cases} a_{21} > 1 \\ a_{21} < 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

- **Stabilité du point d'équilibre (0, 1)**

$$|J(0, 1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1 - a_{12}) - \lambda & 0 \\ -\rho a_{21} & -\rho \end{vmatrix} \implies \lambda_1 = 1 - a_{12}, \lambda_2 = -\rho$$

Ainsi,

$$\text{le point d'équilibre (0, 1) est } \begin{cases} \text{stable} \\ \text{instable} \end{cases} \text{ si } \begin{cases} a_{12} > 1 \\ a_{12} < 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

- **Stabilité du point d'équilibre** $\left(\frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}} \right)$

$$J(u_1^*, u_2^*) = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \begin{pmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & \rho(a_{21} - 1) \end{pmatrix}$$

qui a les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2(1 - a_{12}a_{21})} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1) \pm [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]^2 - 4\rho(1 - a_{12}a_{21})(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)^{1/2}]. \quad (1.11)$$

Le signe de λ , ou $Re(\lambda)$ dans le cas complexe, et donc la stabilité de l'état stationnaire, dépend de ρ, a_{12}, a_{21} . Il y a trois scénarios à envisager.

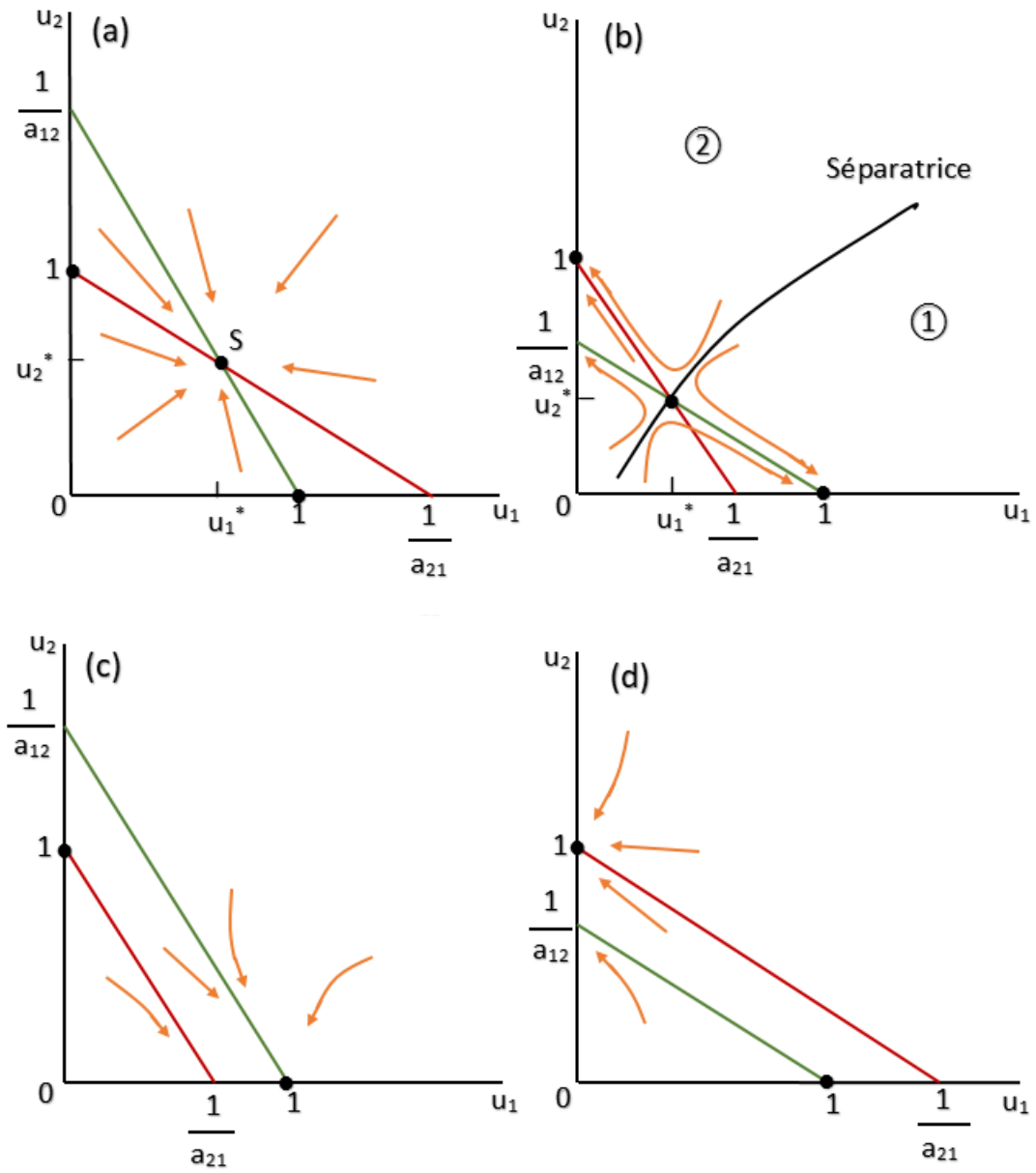


FIGURE 1.10 – Plan de phase du modèle (1.8)

D'abord, notons qu'il y a un ensemble confiné sur la frontière dont le vecteur des dérivés, $(\frac{du_1}{d\tau}, \frac{du_2}{d\tau})$, pointe le long ou vers l'intérieur, ici c'est une boîte rectangulaire dans le plan (u_1, u_2) .

Le rectangle est formé par les deux axes, $u_1 = U_1$, avec $1 - U_1 - a_{12}u_2 < 0$ et $u_2 = U_2$ avec $1 - U_2 - a_{21}u_1 < 0$, tout $U_1 > 1, U_2 > 1$ suffit. Donc le système est toujours globalement stable.

Les différents cas sont :

- (i) $a_{12} < 1, a_{21} < 1$
- (ii) $a_{12} > 1, a_{21} > 1$
- (iii) $a_{12} < 1, a_{21} > 1$
- (iv) $a_{12} > 1, a_{21} < 1$.

Tout ces cas sont analysés de la même manière. Les figures : (Figure(1.9)) (a) à (d) et (Figure(1.10)) (a) à (d) se rapportent à ces cas (i) à (iv) respectivement.

À titre d'exemple, nous considérons seulement l'un d'entre eux, à savoir, (ii). Les résultats sont illustrés dans la (Figure(1.10))

Les flèches indiquent la direction des trajectoires dans le plan de phase. Le comportement qualitatif des trajectoires est donné par les signes de $du_1/d\tau$, à savoir $f_1(u_1, u_2)$ et $du_2/d\tau$ qui est $f_2(u_1, u_2)$, de chaque côté des nullclines.

Analyse du cas (ii), $a_{12} > 1, a_{21} > 1$, (Une espèce élimine l'autre).

Ceci correspond à la Figure (1.9) (b). De (1.9) et (1.10), les points d'équilibres $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont stables. Puisque $1 - a_{12}a_{21} < 0$, alors (u_1^*, u_2^*) , le quatrième état stationnaire, réside dans le quadrant positif, et à partir de (1.11) ses valeurs propres sont telles que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ et donc c'est un point selle.

Dans le plan de phase les orbites tendent vers l'un des deux états stables, comme illustré à la (Figure1.10)(b). Chaque état stable a un domaine d'attraction.

Il y a une ligne séparatrice, qui divise le quadrant positif en 2 régions disjointes ① et ② comme sur la (Figure1.10)(b).

La séparatrice représente la variété stable du point selle.

Mais, de (1.9) à (1.11), seuls les points d'équilibre $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont stables, comme dans la (Figure1.10) (b). Cela peut être une question délicate : qui finit par l'emporter ?.

Tout dépend essentiellement de l'avantage de départ de chaque espèce. Si les conditions initiales se trouvent dans le domaine ①, l'espèce 2 finira par disparaître, $u_2 \rightarrow 0$ et $u_1 \rightarrow 1$; c'est-à-dire $N_1 \rightarrow K_1$. Ainsi, la concurrence a éliminé N_2 .

D'autre part, si N_2 a un avantage de taille initial de sorte que u_1 et u_2 commencent dans la région ② alors $u_1 \rightarrow 0$ et $u_2 \rightarrow 1$ auquel cas l'espèce N_1 disparaît et $N_2 \rightarrow K_2$. On découvre alors le principe d'exclusion qui dépend du stock initial.

Analyse du cas (i), $a_{12} < 1$, $a_{21} < 1$, (Coexistence)

Il y a un état stable où les deux espèces peuvent coexister, comme dans la (Figure 1.9)(a).

En terme de paramètres du système initiale cela correspond à :

$$b_{12} \frac{K_2}{K_1} < 1 \text{ et } b_{21} \frac{K_1}{K_2} < 1.$$

Par exemple, si K_1 et K_2 sont approximativement les même et la compétition interspécifique, mesurée par b_{12} et b_{21} , n'est pas trop forte, ces conditions indiquent que les deux espèces coexistent avec une taille faible pour chacune d'elles. En d'autres termes, la concurrence n'est pas agressive.

D'un autre côté, si b_{12} et b_{21} sont à peu près les mêmes et que K_1 et K_2 sont différentes, alors dans ce cas il n'est pas facile de dire ce qui se passera jusqu'à ce que nous formions et comparions les groupes dimensionnels a_{12} et a_{21} .

Analyse du cas (iii) : $a_{12} < 1$, $a_{21} > 1$, et du cas (iv) : $a_{12} > 1$, $a_{21} < 1$, (Une espèce élimine l'autre)

Dans ces deux cas la compétition interspécifique d'une espèce est beaucoup plus forte que l'autre, ou les capacités limite sont suffisamment différentes pour que

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1} < 1 \text{ et } a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2} > 1$$

ou alternativement $a_{12} > 1$ et $a_{21} < 1$, sont tout à fait définitifs dans le résultat final. Dans le cas (iii), comme illustré dans la (Figure 1.10) (c), la plus forte compétition interspécifique sans dimension de l'espèce u_1 domine et l'autre espèce, u_2 , s'éteint. Dans le cas (iv) c'est l'inverse et l'espèce u_1 s'éteint. Bien que tous les cas n'aboutissent pas à l'élimination des espèces, ceux en (iii) et (iv) le font toujours et en (ii) c'est inévitable en raison des fluctuations naturelles dans les niveaux de population. De ce cas le principe d'exclusion est vérifié indépendamment de la condition initiale.

Ce travail a conduit au principe d'exclusion compétitive mentionné ci-dessus. On notera que les conditions à respecter dépendent des paramètres a_{12} et a_{21} : le paramètre de taux de croissance ρ n'affecte pas les résultats de stabilité, juste la dynamique du système.

Puisque :

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1} \text{ et } a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

, les conditions d'exclusion compétitive dépendent de manière critique de l'interaction entre la concurrence et les capacités limite ainsi que des conditions initiales dans le cas (ii).

Exemple

Supposons que N_1 et N_2 sont deux espèces d'animaux qui consomment la même nourriture, dans la même région.

N_1 : la population des animaux de petite taille,

N_2 : la population des animaux de grande taille.

$$\text{avec } b_{12} = b_{21}, K_1 < K_2$$

et donc

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_1}{K_2} < b_{21} \frac{K_1}{K_2} = a_{21}$$

À titre d'exemple si $b_{12} = 1 = b_{21}$, $a_{12} < 1$ et $a_{21} > 1$ alors dans ce cas $N_1 \rightarrow 0$ et $N_2 \rightarrow K_2$; c'est les grands animaux qui disparaissent.

1.7 Modèle Proie-Prédateur

Rappelons que dans l'équation logistique, la capacité limite est le seul paramètre déterminant dans la stabilisation de la population.

Dans cette section nous montrons que la prédation joue un rôle de même importance que la capacité limite.

Considérons deux populations, N_1 et N_2 , qui représentent les proies et les prédateurs, respectivement. Le système couplé d'équations du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra est comme suit :

$$\frac{dN_1}{dt} = rN_1 - \beta N_1 N_2, \quad (1.12)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \gamma N_1 N_2 - \delta N_2, \quad (1.13)$$

Où, dans l'équation de la population de proies (1.12), r est le paramètre de croissance malthusien et β est un coefficient d'interaction déterminant la vitesse à laquelle la prédation peut se produire (c'est-à-dire la mort de la proie).

Le deuxième terme de (1.12) suppose que le produit des densités $N_1 N_2$ des deux espèces tient compte du fait que les deux espèces doivent se rencontrer pour que la prédation se produise, et le coefficient β détermine la probabilité qu'un événement de prédation se produise avec succès. En Eq (1.13) de la population des prédateurs, γ est le coefficient d'interaction déterminant la quantité de biomasse transférée de la proie au prédateur pour chaque événement de prédation réussie.

La constante δ représente le taux de mortalité des prédateurs, qui décrit la décroissance exponentielle des prédateurs.

La croissance des proies progresse exponentiellement sans limite en l'absence de prédateurs, ce qui entraîne une dynamique de type malthusienne telle que $\frac{dN_1}{dt} = rN_1$, ($r > 0$).

La croissance des prédateurs dépend de l'abondance des proies et, par conséquent, si les proies sont absentes, la croissance des prédateurs décroît exponentiellement de sorte que $\frac{dN_2}{dt} = -\delta N_2$, ($\gamma > 0$). Le taux de prédation dépend de la probabilité qu'un individu prédateur rencontre un individu proie dans une distribution de population spatialement homogène, fournissant les termes régissant la mort des proies et la naissance des prédateurs. C'est-à-dire que le taux de croissance des prédateurs est proportionnel au nombre de proies présentes ($\gamma N_1 N_2$, où γ est une constante positive), et de même, la mort des proies est proportionnelle au nombre de prédateurs présents ($-\beta N_1 N_2$, où β est positif, constant).

1.7.1 Analyse géométrique

Initialement nous pouvons voir le comportement général de N_1 et N_2 en traçant le champ de vecteur (Figure 1.11), et en déterminant les nullclines du système qui se produisent là où $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$.

Les points d'équilibre satisfont le système :

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(r - \beta N_2) \quad (1.14)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\gamma N_1 - \delta) \quad (1.15)$$

L'intersection de N_1 et N_2 révèle le point d'équilibre du système. Les nullclines triviaux sont trouvés à $N_1 = 0$ et $N_2 = 0$, comme suit :

$$r - \beta N_2 = 0 \quad (1.16)$$

$$\gamma N_1 - \delta = 0 \quad (1.17)$$

Ainsi nous obtenons le nullcline $N_2 = \frac{r}{\beta}$ pour N_1 et le nullcline $N_1 = \frac{\delta}{\gamma}$ pour N_2 , (Figure 1.11).

Alternativement, la dynamique nette du modèle peut être visualisée sur la (Figure 1.12), ce qui confirme le comportement oscillatoire stable, suggéré initialement par le champ vectoriel (Figure 1.11). Lorsque $N_2 < \frac{r}{\beta}$, le déclin de la population de proies est inférieur

à son taux de croissance, et donc la population de proies augmente ($\frac{dN_1}{dt} > 0$). De même, lorsque $N_2 > \frac{r}{\beta}$, la prédation exercée par les prédateurs sur les proies domine le facteur

de croissance des proies, et donc la population des proies diminue ($\frac{dN_1}{dt} < 0$). Le même mode d'analyse peut être effectué pour visualiser la dynamique des prédateurs. Lorsque $N_1 < \frac{\delta}{\gamma}$, la conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs au moyen

de la prédation est compensée par la mortalité constante des prédateurs ; par conséquent, la population de prédateurs diminue ($\frac{dN_2}{dt} < 0$), et quand $N_1 > \frac{\delta}{\gamma}$, la croissance des prédateurs par prédation l'emporte sur la mortalité des prédateurs, et par conséquent, la population de prédateurs croît ($\frac{dN_2}{dt} > 0$).

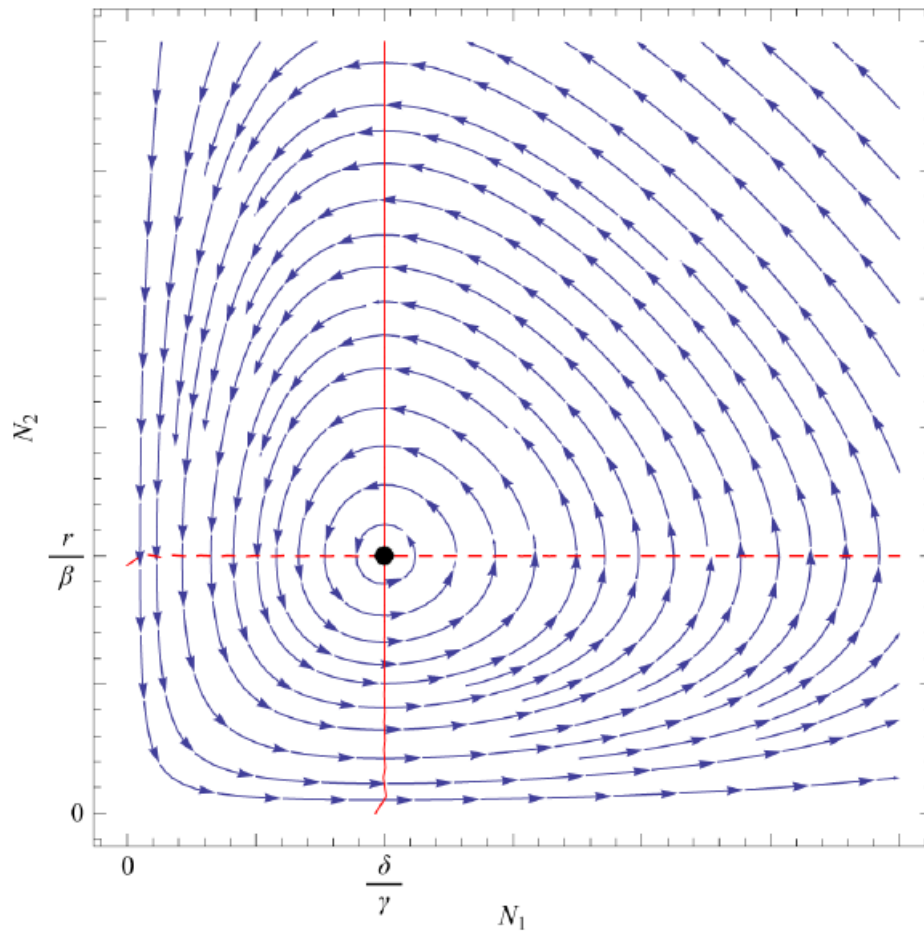


FIGURE 1.11 – Portrait de phase du système proie-prédateur de Lotka-Volterra, décrit par Eq.(1.12), (1.13)

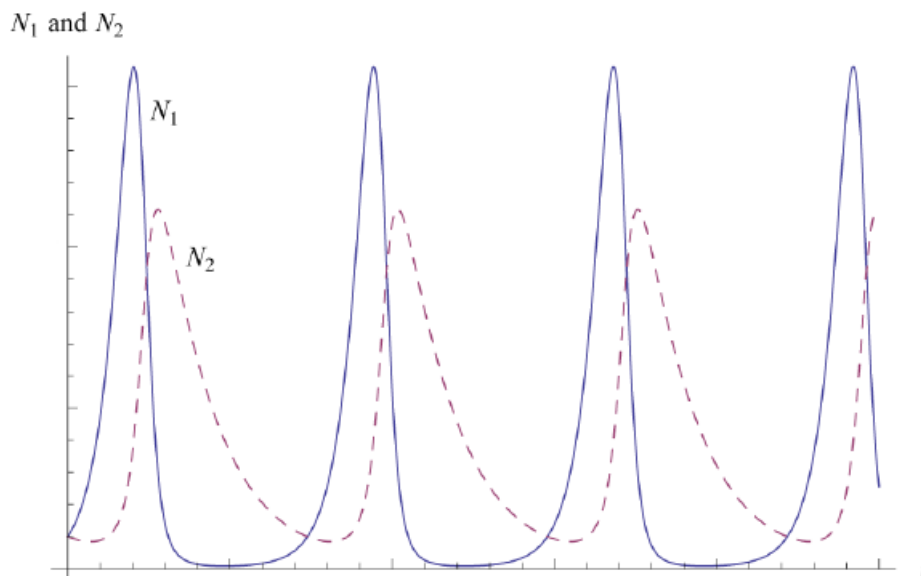


FIGURE 1.12 – Dynamique du système proie-prédateur de Lotka-Volterra, décrit par Eq.(1.12), (1.13)

Points d'équilibre

En mettant les deux équations (1.12) et (1.13) égal à zéro, et résolvant pour N_1 et N_2 nous obtenons les points d'équilibre suivants :

$$(N_1^*, N_2^*) = (0, 0)$$

et

$$(N_1^*, N_2^*) = \left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}\right)$$

Près des points d'équilibre, la dynamique du système peut être approximée par :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= Au + Bv \\ \frac{dv}{dt} &= Cu + Dv\end{aligned}$$

Où $u = N_1 - N_1^*$ et $v = N_2 - N_2^*$

Stabilité

La matrice jacobienne associée au système (1.12),(1.13) est :

$$J(N_1, N_2) = \begin{pmatrix} r - \beta N_2 & -\beta N_1 \\ \gamma N_2 & \gamma N_1 - \delta \end{pmatrix}$$

• Stabilité du point d'équilibre (0, 0)

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres déterminent la stabilité du point, et sont trouvées par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{r - \delta}{2} \pm \frac{\sqrt{(r + \delta)^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -\delta$$

Dans les équations de Lotka-Volterra, $r, \delta > 0$, par conséquent : $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

D'où

(0, 0) est un point d'équilibre **instable**

• **Stabilité du point d'équilibre** $(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta})$

$$J(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\delta \\ \gamma r & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres déterminant la stabilité sont données par :

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-r\delta}$$

Ce sont des valeurs propres purement complexes, ce qui indique que le système linéarisé prévoit un centre.

Pour savoir si le centre est conservé pour le système non linéarisé, cherchons une intégrale première.

On a :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(r - \beta N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\gamma N_1 - \delta) \end{cases} \quad (1.18)$$

Ce qui donne :

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{N_1(r - \beta N_2)}{N_2(\gamma N_1 - \delta)}$$

$$\implies \frac{dN_1}{N_1}(\gamma N_1 - \delta) = \frac{dN_2}{N_2}(r - \beta N_2)$$

$$\implies \gamma N_1 - \delta \ln N_1 = r \ln N_2 - \beta N_2$$

Ainsi on obtient :

$$H(N_1, N_2) = \gamma N_1 - \delta \ln N_1 + \beta N_2 - r \ln N_2 = c$$

Ce qui implique :

$$H(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}) = c$$

Remarquons que : $\frac{\partial H}{\partial N_1}(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}) = \frac{\partial H}{\partial N_2}(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}) = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial N_1} \Big|_{\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}\right)} = \gamma - \frac{\delta}{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial N_2} \Big|_{\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}\right)} = \beta - \frac{r}{\beta} = 0$$

Calculons $HessH(N_1^*, N_2^*)$:

$$HessH(N_1^*, N_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{N_1^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{r}{N_2^{*2}} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$HessH(N_1^*, N_2^*) \Big|_{\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{r} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Remarquons que, les valeurs de la matrice (1.19) sont :

$$\lambda_1 = \frac{\gamma^2}{\delta} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{\beta^2}{r} > 0$$

D'où la matrice (1.19) est définie positive.

Ainsi le point d'équilibre $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{r}{\beta}\right)$ représente un minimum, et tenant compte du fait qu'on travail en dimension 2, alors le système admet un centre non-linéaire.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Rappels sur la Théorie de Floquet

Soit $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{d \times d})$ i.e $A(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice carré de dimension d ,
supposons qu'il existe $T > 0$:

$$A(t + T) = A(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

considérons le système :

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2.1}$$

Lemme 1

Si $X(t)$ est une solution de (2.1), alors $X(t + T)$ est aussi une solution.

Preuve

$$X'(t + T) = A(t + T)X(t + T) = A(t)X(t + T).$$

Lemme 2

*Si $X(t)$ est une matrice fondamentale de (2.1) alors il existe une matrice inversible M
tel que pour tout t :*

$$X(t + T) = MX(t).$$

Preuve

On a $X(t)$ une matrice fondamentale et d'après (Lemme1) $X(t + T)$ est aussi une matrice fondamentale pour le système D'où :

$$X(t + T) = \begin{pmatrix} X_1(t + T) & X_2(t + T) & X_3(t + T) & \dots & X_d(t + T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Avec $X_i(t + T)$, $i = 1, \dots, n$: représentent des solutions du système (2.1),

Donc

$$\begin{aligned}X_1(t+T) &= \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_d X_d(t) \\X_2(t+T) &= \beta_1 X_1(t) + \beta_2 X_2(t) + \dots + \beta_d X_d(t) \\&\vdots \\X_d(t+T) &= \delta_1 X_1(t) + \delta_2 X_2(t) + \dots + \delta_d X_d(t)\end{aligned}$$

D'où :

$$X(t+T) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_d(t) \end{pmatrix}$$

En conclusion

$$X(t+T) = MX(t), \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_d \end{pmatrix}$$

Définition 1

M est dite matrice de Monodromie.

Les valeurs propres de M sont dits multiplicateurs de Floquet.

Lemme 3

Les multiplicateurs de Floquet ne dépendent pas du choix de M

Preuve

Si Y est une autre matrice fondamentale, alors

$$Y(t) = X(t)D$$

$$\text{et } Y(t+T) = X(t+T)D = X(t)MD = Y(t)D^{-1}MD = YD^{-1}MD$$

donc la matrice de Monodromie est :

$$D^{-1}MD$$

cela signifie que les valeurs propres ne changent pas.

Remarque 1

On peut toujours prendre : $X(0) = I$

Lemme 4

Il existe B constante tq $M = e^{BT}$.

Lemme 5

$X(t)e^{-BT}$ est une matrice T -périodique.

Preuve

Soit

$$P(t) = X(t)e^{-BT}$$

alors

$$P(t+T) = X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t)Me^{-Bt}e^{-BT} \stackrel{\text{(Lemme 4)}}{=} X(t)Ie^{-Bt} = X(t)e^{-Bt} = P(t)$$

En conclusion

Théorème 1 (Flocquet)

Chaque matrice fondamentale s'écrit sous la forme :

$$X(t) = P(t)e^{BT}$$

avec P une matrice T -périodique.

2.2 Systèmes Dynamiques dans le plan

Soit l'équation :

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \quad (2.2)$$

Théorème 2 (Poincaré-Bendixson)

Soit K un ensemble non vide, compact, positivement invariant. Alors K contient

un point d'équilibre de (2.2) ou une solution périodique, non constante.

Théorème 3 (Dulac)

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe, s'il existe $g \in C^1(X, \mathbb{R})$ avec $\text{div}(gf) < 0$

ou $\text{div}(gf) > 0$ alors (2.2) n'admet pas de solution périodique.

Chapitre 3

Équation de Réaction-Diffusion

3.1 Équation de Fisher-Kolmogorov (Ondes Progressives)

Pendant longtemps, la diffusion a été utilisée comme un modèle bien connu pour la propagation spatiale dans de nombreux systèmes biologiques. Les équations de réaction-diffusion ont été introduites par Fisher [15], dans l'étude de la mutation des gènes, ensuite développés par Skellam [10] dans la modélisation des ravageurs. Ainsi Okubo [2] et Murray [14] ont utilisé la diffusion dans l'invasion des espèces et la formation de Morphogènes, (i.e formation des nouveau tissus).

L'équation de Fisher-Kolmogorov est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (3.1)$$

$r > 0$ représente le taux de croissance intrinsèque.
 $K > 0$ représente la capacité d'accueil (limite).

3.2 Équation sans diffusion

Après dimensionnement des différents paramètres, on peut se ramener à l'équation :

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u)$$

En résolvant l'équation : $\frac{du}{dt} = 0$ on obtient les points d'équilibre :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = 1$$

D'après la première partie $u = 0$ est **instable** et $u = 1$ est **stable**, avec le taux de croissance constant.

3.3 Équation avec diffusion et taux de croissance constant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u) \quad (3.2)$$

On cherche la solution sous la forme :

$$u = w(x - ct) \geq 0 \quad \text{avec} \quad c > 0$$

vérifiant :

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} w(\rho) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} w(\rho) = 0$$

Théorème 4

Le problème (3.2) admet une solution u de ce type si $c \geq 2$. Si $0 < c < 2$, alors telle solution n'existe pas.

Preuve

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -cw'(y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= w''(y) \end{aligned}$$

D'où :

$$-cw' = w'' + w(1 - w) \quad (3.3)$$

On écrit l'équation (3.3) sous la forme d'un système, ainsi on aura :

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = -cv - w(1 - w) \end{cases} \quad (3.4)$$

Les points d'équilibre du système sont :

$$(w, v) = (0, 0) \quad \text{et} \quad (w, v) = (1, 0)$$

Calculons la jacobienne du système (3.4) :

$$J(w, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2w - 1 & -c \end{pmatrix}$$

- **Stabilité du point d'équilibre** $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de la matrice :

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + c\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = c^2 - 4, \quad c > 0$$

i) $\Delta < 0$ ie $c < 2$ alors les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{-c - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-c + i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On remarque que la partie réelle des valeurs propres $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = -\frac{c}{2} < 0$,

$$0 < c < 2$$

Ainsi pour $c < 2$, le point $(0, 0)$ est un foyer *stable*.

ii) $\Delta \geq 0$ ie $c \geq 2$, les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Il est clair que $\lambda_1 < 0$

Pour λ_2 multiplions par le conjugué :

$$\lambda_2 = \frac{(-c + \sqrt{\Delta})(-c - \sqrt{\Delta})}{2(-c - \sqrt{\Delta})} = \frac{c^2 - \Delta}{2(-c - \sqrt{\Delta})} = \frac{c^2 - (c^2 - 4)}{2(-c - \sqrt{\Delta})} = \frac{4}{2(-c - \sqrt{\Delta})} < 0$$

D'où $(0, 0)$ est un nœud *stable*

- **Stabilité du point d'équilibre** $(1, 0)$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

$\det(J(1, 0)) = -1 < 0$ Donc le point $(1, 0)$ est un point selle (*instable*)

Pour $0 < c < 2$ on a le plan de phase suivant :

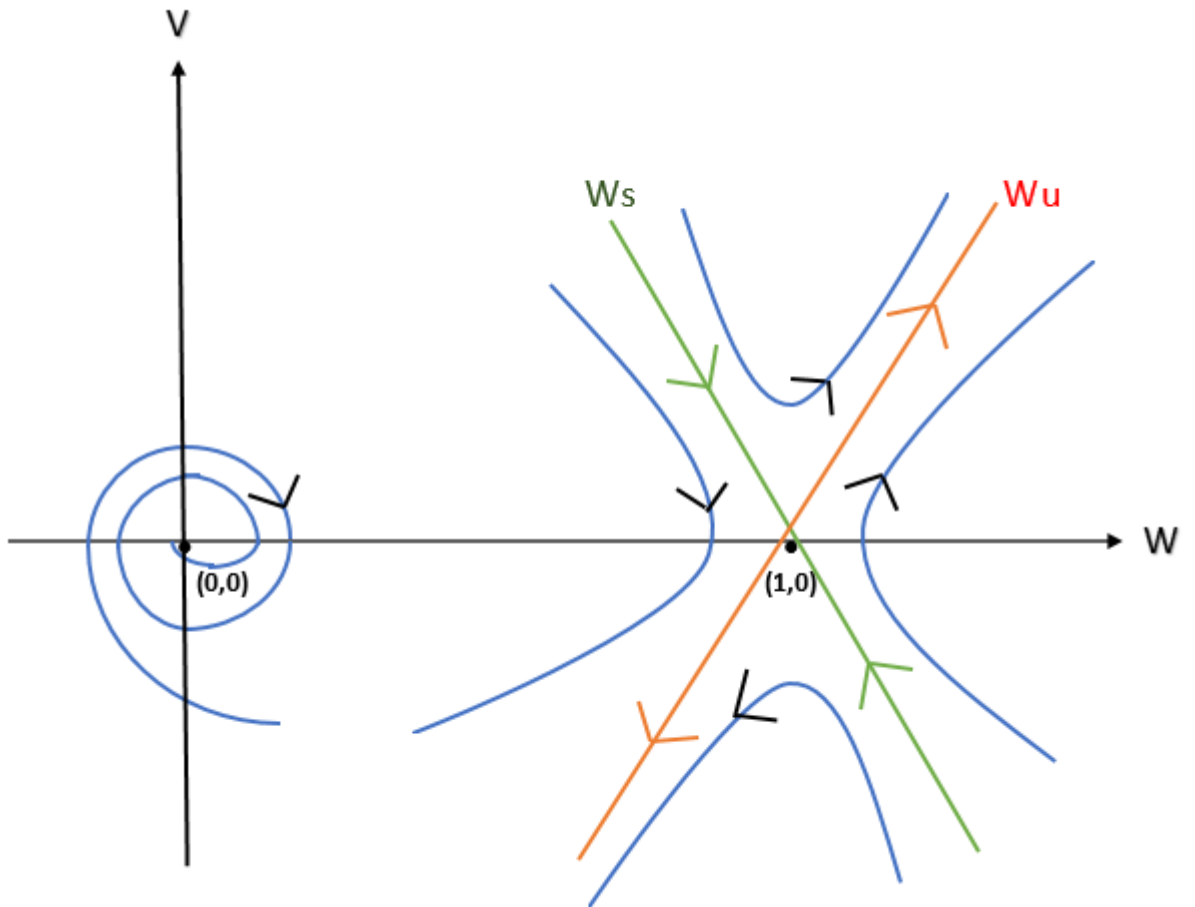


FIGURE 3.1 – Portrait de phase qui décrit la dynamique des orbites autour des points d'équilibre pour $0 < c < 2$

D'après la figure (3.1), la variété stable W_s constitue une séparatrice,

à gauche de W_s les orbites s'approchent du point d'équilibre $(0,0)$ en oscillant, chose qui est impossible du fait que la densité w est positive.

à droite de W_s les orbites deviennent non bornées ce qui est aussi impossible du fait que la capacité limite égale à 1.

Conclusion

Le cas $0 < c < 2$ n'est pas intéressant. Dorénavant on considère $c \geq 2$.

Montrons qu'il existe une orbite hétérocline qui lie les deux points d'équilibre : Soit

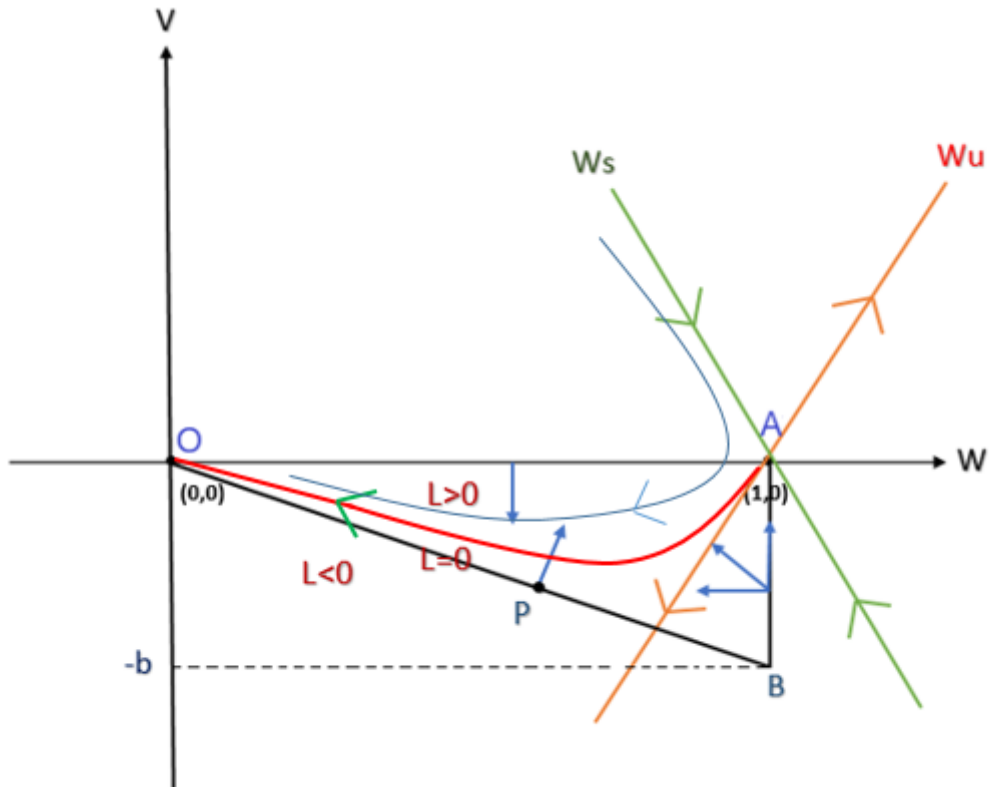


FIGURE 3.2 – Portrait de phase montrant la dynamique des orbites sortant du point A , et la nature du champs à l'intérieur du triangle OAB

$b > 0$, $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (1, -b)$, $O \equiv (0, 0)$

★ sur OA :

$$w > 0, v = 0$$

$$\frac{dw}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = -w(1-w) < 0$$

Ainsi le champs est rentrant.

★ sur AB :

$$w = 1, v < 0$$

$$\frac{dw}{dt} < 0, \frac{dv}{dt} = -cv > 0$$

Du même, le champs est rentrant.

★ sur OB :

l'équation de la droite OB est donnée par :

$$v = -bw$$

Posons

$$L(w, v) = v + bw$$

On remarque que

$$L = 0 \text{ sur } OB$$

et

$$L(1, 0) = b > 0$$

Soit $P(w, v)$ un point sur la droite OB avec $v = -bw$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(P) &= \frac{dv}{dt} + b\frac{dw}{dt} \\ &= -cv + bv - w(1-w) + bv \\ &= -cv + bv - w(1-w) \\ &= -c(-bw) + b(-bw) - w(1-w) \\ &= cbw - b^2w - w + w^2 \end{aligned}$$

Choisissons $b > 0$ de manière que :

$$cb - 1 = b^2 \implies b^2 - cb + 1 = 0$$

$$\Delta = c^2 - 4 > 0 \text{ car } c > 2$$

$$b_1 = \frac{c - \sqrt{\Delta}}{2}, b_2 = \frac{c + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

Donc on choisit b_2 ,

D'où,

$$\frac{d}{dt}L(P) = w^2 > 0$$

Comme

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} v \\ -cv - w(1-w) \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial v}(-cv - w(1-w)) = -c < 0,$$

D'après le critère de Dulac (Théorème 3), le système (3.4) n'admet pas de solution périodique.

Comme le champ vectoriel est rentrant sur les bords du triangle OAB (3.2), alors l'intérieur de OAB est positivement invariant.

D'après le critère de Poincaré-Bendixson (2), les trajectoires du système (3.4) convergent vers le seul point d'équilibre stable $(0,0)$.

3.4 Équation avec diffusion et taux de croissance variable (périodique)

Nous considérons une population qui fait un effort d'adaptation avec le changement d'environnement, On suppose le taux de croissance $r(x,t)$ à la position x et à l'instant t , suit un profil d'onde. Plus précisément

$$r(x,t) = r(x-ct), \text{ avec } r(\rho) > 0 \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

$r(\rho)$ est T -périodique.

Le paramètre c désigne la vitesse du changement, dans notre cas la vitesse des variations climatiques.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = r(x,t)u(1-u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (3.5)$$

qui devient en dimension $n = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r(x-ct)u(1-u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

On cherche une solution sous la forme :

$$u(x,t) = v(x-ct) = v(\rho)$$

v vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -c \frac{dv}{d\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dv}{d\rho}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{d\rho} \right) = \frac{d^2 v}{d\rho^2}$$

ainsi on aura :

$$-c \frac{dv}{d\rho} - \frac{d^2 v}{d\rho^2} = r(\rho)v(1-v)$$

On pose

$$\frac{dv}{d\rho} = F$$

D'où

$$F'' + cF = -r(\rho)v(1-v)$$

On fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} v' = F \\ F' = -cF - r(\rho)v(1-v) \end{cases} \quad (3.6)$$

Où encore

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r(\rho) & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r(\rho)v^2 \end{pmatrix}$$

Posons,

$$G \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(\rho)v^2 \end{pmatrix}$$

Si $\|\bullet\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , alors :

$$\lim_{\left\| \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0} \frac{\left\| G \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\|} \rightarrow 0$$

$$\|G \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ r(\rho)v^2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 0^2 + (r(\rho))^2 v^4$$

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\|^2 = v^2 + F^2$$

$$\frac{\|G \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix}\|^2}{\left\| \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{(r(\rho))^2 v^4}{v^2 + F^2} \leq \frac{r^2(\rho)v^4}{v^2} \leq r^2(\rho)v^2 \xrightarrow{\left\| \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0} 0$$

D'après le (Théorème 2.8) dans (J.P Tian and J.Wang 2014.[12]) la stabilité de l'équilibre du système (3.6) revient à étudier la stabilité de l'équilibre de la partie linéaire.

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r(\rho) & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v' = F \\ F' = -r(\rho)v - cF \end{cases} \quad (3.7)$$

D'après le (Théorème 1) la solution $\begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = e^{\lambda\rho} \begin{pmatrix} P_1(\rho) \\ P_2(\rho) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v = e^{\lambda\rho} P_1(\rho) \\ F = e^{\lambda\rho} P_2(\rho) \end{cases} \quad (3.8)$$

Avec $P_1(\rho)$, $P_2(\rho)$ des fonctions \mathbb{T} -périodiques, et $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ est un exponentiel de Floquet.

Injectons les formules de (3.8) dans (3.7) on aura :

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda\rho} P_1(\rho) + e^{\lambda\rho} P_1'(\rho) = e^{\lambda\rho} P_2(\rho) \\ \lambda e^{\lambda\rho} P_2(\rho) + e^{\lambda\rho} P_2'(\rho) = -r(\rho)e^{\lambda\rho} P_1(\rho) - ce^{\lambda\rho} P_2(\rho) \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} P_1'(\rho) = -\lambda P_1(\rho) + P_2(\rho) \\ P_2'(\rho) = -r(\rho)P_1(\rho) - (\lambda + c)P_2(\rho) \end{cases}$$

Après intégration, nous obtenons

$$\begin{cases} \int_0^T P_1'(s)ds = -\lambda \int_0^T P_1(s) + \int_0^T P_2(s)ds = 0 \\ \int_0^T P_2'(s)ds = -\int_0^T r(s)P_1(s) - (\lambda + c) \int_0^T P_2(s)ds = 0 \end{cases}$$

$$\implies -\int_0^T r(s)P_1(s)ds - (\lambda + c)\lambda \int_0^T P_1(s)ds = 0$$

$$\implies \int_0^T [r(s) - \lambda(\lambda + c)]P_1(s)ds = 0$$

Ainsi si $P_1 > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que,

$$-\lambda(c + \lambda) - r(\rho_0) = 0$$

D'où

$$r(\rho_0) = -\lambda(c + \lambda)$$

Il en est claire que si

$$c + \lambda > 0, \text{ ie } c > \{-\lambda_1, -\lambda_2\}$$

alors

$$\lambda < 0$$

Ce qui implique une extinction de la population.

Théorème 5

Il existe $c^ > 0$ telle que, si $c \geq c^*$ alors $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} (v(\rho), F(\rho)) = 0$*

Preuve

Il suffit de poser $c^ = \text{Max} \{-\lambda_1, -\lambda_2\}$*

En conclusion

Si la vitesse de changement climatique est assez élevée, la population perd son adaptation avec l'environnement et tend vers l'extinction.

3.5 Simulation numérique pour un taux de croissance périodique

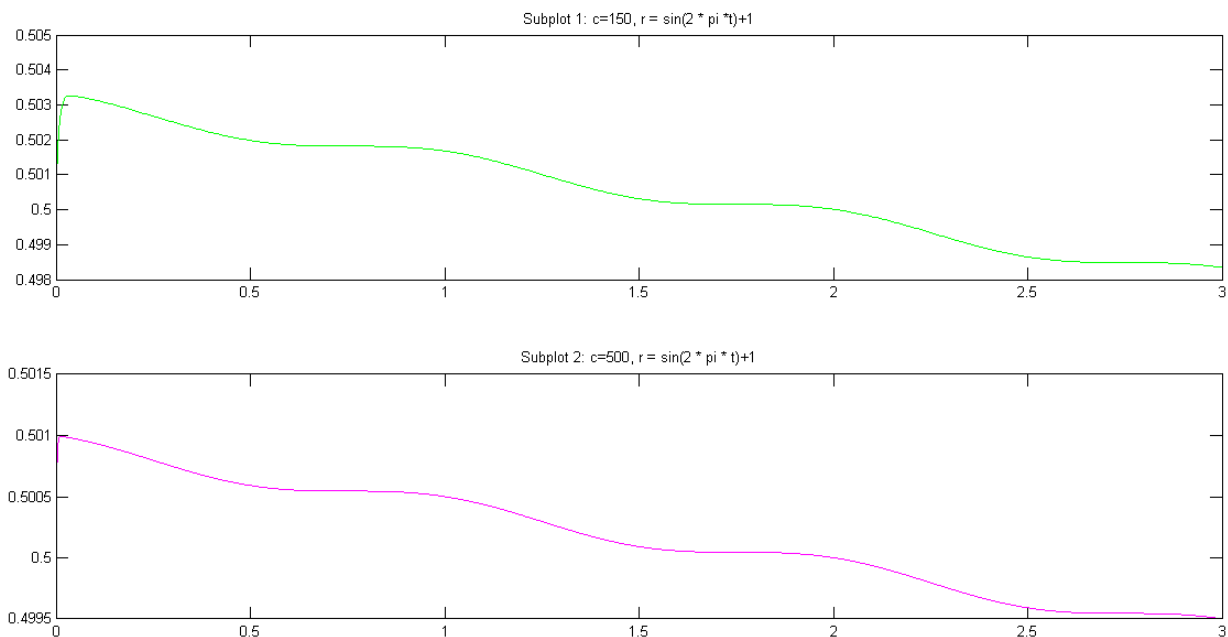


FIGURE 3.3 – comportement des trajectoire du système (3.6), en variant la vitesse du changement climatique

Interprétation biologique

On remarque que la dynamique de la population dépend de son environnement, en particulier de la vitesse du changement climatique c .

Ainsi la population tend vers l'extinction avec une vitesse c assez élevée, $c \geq c^*$, ce qui est illustré dans la (Figure3.3).

3.6 Équation avec diffusion et taux de croissance variable (non-périodique)

Dans cette partie nous allons considérer un modèle plus générale que le modèle précédent, dans le sens où le taux de croissance est toujours variant, mais pas forcément périodique.

On pose :

$$r(x, t) = r(x - ct), \text{ avec } r(\rho) > 0 \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

Avec

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r(x - ct)u(1 - u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

D'après des calculs déjà fait dans la partie précédente on a le système suivant :

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r(\rho) & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v' = F \\ F' = -r(\rho)v - cF \end{cases} \quad (3.9)$$

Posons la fonction de Lyapunov :

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \varepsilon x_1 x_2$$

Nous remarquons que V vérifie :

- i) $V(0, 0) = 0$
- ii) V est définie positive pour ε assez petit,

la matrice associée à V est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - 2\varepsilon^2 = 0 \iff \frac{1}{2} - \lambda = \mp \sqrt{2}\varepsilon$$

D'où

$$\lambda = \frac{1}{2} \mp \sqrt{2}\varepsilon > 0$$

iii) $\frac{d}{dt}V(x_1, x_2)$ est définie négative pour c assez grand,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) &= x_1x_1' + x_2x_2' + \varepsilon x_1x_2' + \varepsilon x_2x_1' \\ &= x_1'(x_1 + \varepsilon x_2) + x_2'(x_2 + \varepsilon x_1) \\ &= x_2(x_1 + \varepsilon x_2) + (x_2 + \varepsilon x_1)(-r(\rho)x_1 - cx_2) \\ &= x_1x_2 + \varepsilon x_2^2 - r(\rho)x_1x_2 - cx_2^2 - \varepsilon r(\rho)x_1^2 - cx_1x_2 \\ &= x_1x_2(1 - c - r(\rho)) + (\varepsilon - c)x_2^2 - \varepsilon r(\rho)x_1^2 \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(x_1(\rho), x_2(\rho)) \rightarrow \infty$$

En effet, en posant :

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \varepsilon x_1x_2$$

$$x_1 = r \cos(\theta)$$

$$x_2 = r \sin(\theta)$$

$$\frac{r^2}{2} \cos^2(\theta) + \frac{r^2}{2} \sin^2(\theta) + \varepsilon r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$= r^2 + \varepsilon r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$= r^2 [1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta)] \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$$

En conclusion

$(0, 0)$ est G.A.S

D'où

Même dans le cas où le taux de croissance $r(\rho)$ n'est pas périodique, la population tend vers l'extinction pour une vitesse de changement climatique assez élevée.

3.7 Simulation numérique pour un taux de croissance non-périodique

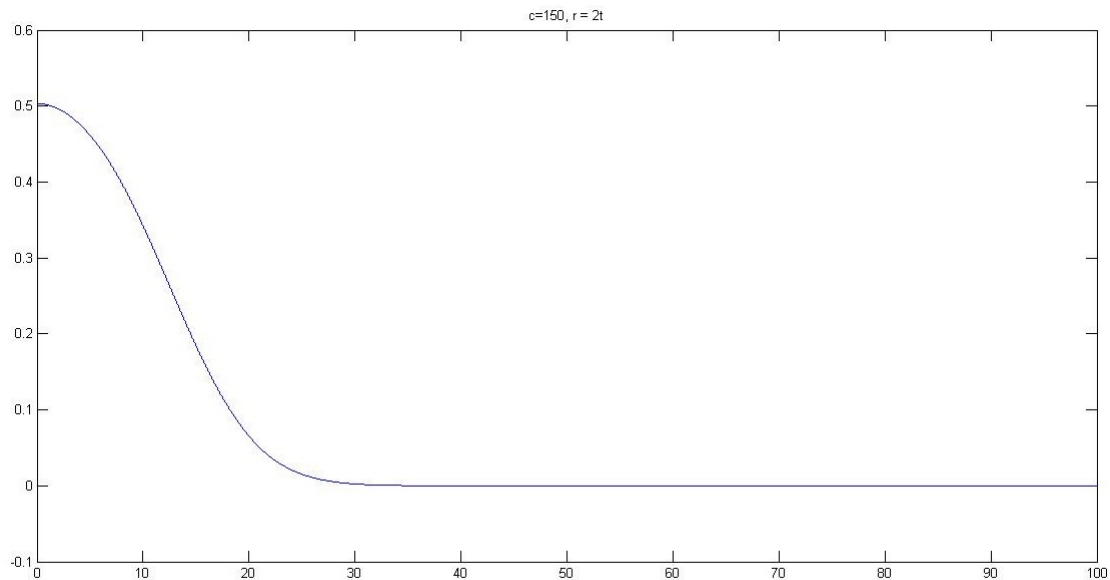


FIGURE 3.4 – comportement des trajectoire du système (3.9), en variant la vitesse du changement climatique

Perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle plus générale que le modèle de Fisher-Kolmogorov, dans le sens où le taux de croissance de la population varie en fonction de la position x et de l'instant t . Il sera intéressant de considérer une population structuré par un caractère physiologique qui exprime l'adaptation de la population.

Références

- [1] I.Petrovsky A.Kolmogorov and N.Piskounov. *Study of the Diffusion Equation with Growth of the Quantity of Matter and Its Applications to a Biological Problem*. Moscow University Mathematics Bulletin, 1989.
- [2] A.Okubo. *Diffusion and Ecological Problems : Mathematical Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [3] A.Salisbury. *Mathematical Models in Population Dynamics*. PhD thesis, New College of Florida, April 2011.
- [4] B.Luděk F.Courchamp and J.Gascoigne. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford : Oxford University Press., 2008.
- [5] T.Clutton-Brock F.Courchamp and B.Grenfell. *Population Dynamics of Obligate Cooperators*, volume 266. The Royal Society, March 1999.
- [6] H.Amann. *Ordinary Differential Equations, An Introduction to Nonlinear Analysis*. de Gruyter, Studies in Mathematics 13, Berlin, NY, 1990.
- [7] J.A.Sherratt. Wavefront propagation in a competition equation with a new motility term modelling contact inhibition between cell populations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol 456, No.2002, 2000, pp. 2365-2386.
- [8] J.D.Murray. *Lectures on Non-Linear Differential-Equation Models in Biology*. Oxford University Press, 1977.
- [9] J.G.Skellam. The wave of advance of advantage genes. *Annals of Eugenics*, Vol 7, No.4, 1937, pp. 353-369.
- [10] J.G.Skellam. Random dispersal in theoretical populations. *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol 53, No.1, 1991, pp. 135-165.
- [11] J.Pastor. *Mathematical Ecology of Populations and Ecosystems. Ecosystems*. Oxford : Wiley-Blackwell., August 2008.
- [12] J.P.Tian and J. Wang. Some results in floquet theory, with application to periodic epidemic models. *Taylor and Francis*, 2014, pp. 1128-1152.
- [13] M.A.J.Chaplain and A.M.Stuart. A mathematical model for the diffusion of tumour angiogenesis factor into the surrounding host tissue. *Mathematical Medicine and Biology*, Vol 8, No.3, 1991, pp. 191-220.
- [14] J.D. Murray. *Mathematical Biology, Third Edition*, volume 17. Springer, 2002.
- [15] R.A.Fisher. the wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, Vol 7, No.4, 1937, pp.353-369.
- [16] Muhammad Shakeel. Travelling wave solution of the fisher-kolmogorov equation with non-linear diffusion. *scientific research*, No.4, 2013, pp.148-160.
- [17] S.H.Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Taylor and Francis, 1994.