République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tlemcen

Faculté des Sciences

Départément de Mathématiques

Thème

La méthode du point fixe pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles .

Présenté par

FERROUI Sarra

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialitè : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Soutenu publiquement, le 30/09/2018, devant le jury composé de :

Président	Mr. YEBDRI Mustapha	université de Tlemcen.
Examinateur	Mr. BENSEDIK Ahmed	université de Tlemcen.
Encadreur	Mme. MERZAGUI-DAOUDI Naima	université de Tlemcen.

Année universitaire : 2017 - 2018

Dédicaces

Au nom du Dieu le clément et miséricordieux louange à ALLAH le tout puissant, et que Dieu benisse le prophète Mohammed et sa famille et ses compagnons.

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissances et de remerciement à

Ma chère mère.

La mémoire de mon père.

Mes chers frères Zaki et Harroun.

Ma chère grand-mère.

La mémoire de mes autres grands-parents.

Tous les membres de ma famille petits et grands.

Tous les éléments de ma promotion et mes camarades.

Tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui nous sont chers.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
Je remercie tout particulièrement mon encadreur Madame Merzagui-Daoudi Naima d'avoir dirigé mon travail avec beaucoup d'éfforts et de patience. Ces qualités pédagogiques remarquables m'ont permis de profiter de ces connaissances et ont contribué à l'avancement de mon travail en ne négligeant ni ses conseils avisés et ni ses critiques constructives.
Monsieur Yebdri Mustapha, a accepté de m'honorer en présidant le jury de ce mémoire. Je lui exprime toute ma profonde reconnaissance.
Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à monsieur Bensedik Ahmed d'avoir accépté d'examiner ce mémoire.
Pour tous mes amis qui m'ont apportée leur soutient moral pendant ces années d'études, je les en remercie sincèrement.
Un très grand merci à tous les éléments de ma famille qui m'ont toujours soutenue, je leur adresse toute ma gratitude du fond du coeur.
Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce travail.

Résumé

Le but de ce travail est l'application de la méthode du point fixe à quelques problèmes aux limites associés à des équations aux dérivées partielles.

Après le rappel de quelques notions d'analyse fonctionnelle necessaires au développement de ce travail nous introduisons les théorèmes de point fixe utilisés (Schauder, Schaefer, Banach et Krasnoselskii).

Nous achevons le travail par l'exposé d'applications des théorèmes de point fixe à des équations aux dérivées partielles elliptiques et hyperboliques.

Mots-clés : équations aux dérivées partielles, point fixe, solution faible

Abstract

The aim of this work is the application of the fixed point method to boundary value broblems associated to nonlinear partial differential equations.

In the first chapter we present some tools : notions of functional analysis together with fixed point theorems (Schauder, Schaefer, Banach, Krasnoselskii).

In the second chapter we end up by exposing the applications of fixed point theorems to some elliptic and hyperbolic partial differential equations.

Keywords : partial differential equations, fixed point, weak solution

Table des Matières

Abréviations

EDO	Equations differentielles ordinaires
EDP	Equations aux dérivées partielles

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$	Elément de $\mathbb{R}^n$
$\Gamma = \partial\Omega$	Frontière de Ω
B_R	Boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}$
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact
$D'(\Omega)$	Espace dual de $C_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$p.p$	presque partout
$\mid \Omega \mid$	La mesure de Ω
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$	Gradient de u
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$	Le laplacien de u
$p^* = \frac{np}{n-p}$	Exposent critique de Sobolev
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^P(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaces de Sobolev
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$
$C^1(\Omega)$	Espace des fonctions de classe C^1 dans Ω

Introduction

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, elles apparaissent trés souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels. Elles sont omniprésentes dans les sciences appliquées, Physique, Chimie, Biologie ([21] , [30]).

Sur de nombreux points, elles généralisent aux contexte multi-dimentionnel les équations differentielles ordinaires. Les trois classes d' EDP (elliptiques, hyperboliques et paraboliques)([5], [6] [27]), servent à analyser et à comprendre beaucoup de phénomènes naturels, par exemple les équations de Poisson (elliptique) et de la chaleur (parabolique) modélisent des phénomènes de diffusion de la chaleur ou de la matière (par exemple un polluant dans une rivière, ou des bactéries dans un organe,...etc), ou encore d'une charge électrique. L'équation des ondes (hyperbolique) modélise des phénomènes de propagation, comme celle du son ou de la lumière. L'équation des ondes et de la chaleur sont dites d'évolution car elles modelisent en général un phénomène qui évolue avec le temps(non stationnaire). L'équation de Poisson est quant à elle stationnaire : elle modelise en général un phénomène à l'équilibre dans l'espace. L'équation de Poisson, aussi appelée équation de Laplace, peut être vue comme un cas particulier de l'équation de la chaleur lorsque l'équilibre est atteint, c'est-à-dire lorsque la fonction inconnue ne dépend plus du temps.

Les EDP non linéaires sont souvent à l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En effet, la majorité des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et si on les modélise par des équations linéaires on risque, dans certains cas,

d'effacer des événement que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte, on peut dire que c'est l'existence de ces phénomènes nouveaux : apparition de chocs ou de singularités, comportement asymptotique profondément différent de celui des problèmes linéaires qui rend la théorie difficile et qui conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste([3]). On note parmi les problèmes qui sont modélisés par des EDP non linéaires par exemple l'équilibre d'un corps déformable éléctromécanique ou thermodinamique, l'évolution du potentiel électrique, des problèmes de propagation diffusion, celles concernant les lois de conservation ou celles de type transport, par exemple l'équation de Boltzmann (décrit l'évolution d'un gaz hors d'équilibre), les problèmes de la turbulence ou ceux liés aux interactions entre fluides([11]).
Les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires, une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique. Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et les propriétés qualitatives de ces solutions (degré topologique, point fixe, transversalité topologique), les méthodes variationnelles et les méthodes numériques ([8] [9] [10], [14], [26]).
La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire elle fournit des outils puissants pour l'étude de solvabilité de beaucoup de problèmes. Le développement de la théorie du point fixe a donné un grand ressort sur l'avancement de l'analyse non linéaire.

La méthode du point fixe est basée sur le théorème du point fixe qui a la formulation générale suivante : $T : X \longrightarrow X$ tel que X un espace de Banach et T un opérateur vérifiant ceraines hypothèses spécifiques (continuité, compacité, contraction) alors il existe $u \in X$ tel que $Tu = u$ c'est-à-dire T admet un point fixe.
Dans ce travail, se basant sur la méthode du point fixe nous étudions l'existence de solutions faibles de problèmes de Dirichlet associés à des EDP, de la forme :

$$\begin{cases} Lu = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où L est un opérateur differentiel.

Les théorèmes du point fixe utilisés sont : le théorème de Banach, le théorème de Schauder, le théorème de Schaefer et en particulier le théorème de Krasnoselskii qui est en général utilisé souvent dans le cas d'EDO.

Ce mémoire est constitué de deux chapitres. Dans le premier chapitre "préliminaires" on introduit les outils nécessaires à la suite de ce travail et en faisant référence aux documents suivants ([4] [7] [12] [13] [29] [31] [33]). Dans le deuxième chapitre des application des théorèmes du points fixe à des problèmes non linéaires sont présentées et en faisant référence aux documents suivants([4], [29], [31]).

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduisons les notions necessaires au développement du thème de ce mémoire nous rappelons quelques théorèmes et définitions d'analyse fonctionnelle et nous introduisons les théorèmes de point fixe utilisés : le théorème de Banach, le théorème de Schauder, le théorème de Schaefer et le théorème de Krasnoselskii. Nous faisons référence aux ouvrages [2], [32], et [20]

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espaces fonctionnels

Espace de Lebesgue :

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 *On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de Lebesgue integrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. $L^1(\Omega)$ est muni de la norme,*

$$\| f \|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega | f(x) | \, dx.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$; *On pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \quad mesurable\ et \ \mid f \mid^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

$L^p(\Omega)$ *est muni de la norme,*

$$\| f \|_{L^p} = (\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Espace de Sobolev :

Définition 1.2 *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega)/ \ il\ existe\ g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \\ tels\ que \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad pour\ tout\ i = 1, ..n \end{array} \right\}$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. *Pour* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on note* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p},$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\| u \|_{W^{1,p}} = (\| u \|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
L'espace $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert, il est muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\| u \|_{H^1} = (\| u \|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

Espaces C^r

Définition 1.3 *Soit $r \geq 0$ un entier et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.*

$\circ$ *$C^0(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.*

$\circ$ *$C^r(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre r continues, c'est-à-dire $D^a f \in C^0(\Omega)$ pour tout $a \in A_m$, $0 \leq m \leq r$, où A_m est l'ensemble des multi-indices d'ordre m. Nous posons également*

$$\nabla^m f = \{D^a f\}_{a \in A_m} .$$

$\circ$ *$C^0(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées. Nous munissons cet espace de la norme*

$$\| f \|_{C^0(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} \{| f(x) |\} .$$

$\circ$ *$C^r(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions bornées de $C^r(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'odre r peuvent être étendues continuement sur $\bar{\Omega}$ et bornées. Nous munissons cet espace de la norme*

$$\| f \|_{C^r(\bar{\Omega})} := \sum_{m=0}^{r} \| \nabla^m f \|_{C^0(\bar{\Omega})} .$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, nous omettons la dépendance en $\bar{\Omega}$ et écrivons simplement

$$\| f \|_{C^r} = \sum_{m=0}^{r} \| \nabla^m f \|_{C^0} .$$

$\circ$ *$C^r_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^r(K)$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.*

Fonction Hölderienne

Définition 1.4 *Soit f une fonction définie sur Ω. On dit que f est Hölderienne d'exposant α dans $]0,1]$ s'il existe une constante positive C_α telle que pour tout $x, y \in \Omega$,*

$$| f(x) - f(y) | \leq C_\alpha \mid x - y \mid^\alpha .$$

Remarque 1.1 $\circ$ *On définit*

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ f \in C(\bar{\Omega}), \quad \sup_{x,y\in\bar{\Omega},\ x\neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^\alpha} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| f \|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x\in\Omega} | f(x) | + \sup_{x\neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^\alpha}$$

ensuite on définit

$$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}),\ D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}),\ \textit{pour tout} \ \mid \beta \mid = m \right\}.$$

$\circ$ *Pour $\alpha = 0$, on notera $C^{r,0}(\bar{\Omega}) = C^r(\bar{\Omega})$ c'est-à-dire que les fonctions hölderiennes de parametre 0 sont identifiées avec les fonctions continues usuelles.*

$\circ$ *Pour $\alpha = 1$, l'ensemble $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ correspond à l'espace des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe une constante $K > 0$ tel que*

$$| f(x) - f(y) | \leq K \mid x - y \mid \quad \textit{pour tout } x, y \in \bar{\Omega}.$$

$\circ$ *Quand $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous convenons que l'espace $C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ doit être compris comme $C^{r,\alpha}(\bar{\mathbb{R}}^n)$, ce qui implique que toutes les dérivées de f sont bornées dans $\mathbb{R}^n$.*

1.2.2 Ensemble compact

Définition 1.5 *Soit K un ensemble d'un espace de Banach E. On dit que K est compact si il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini. Ceci est traduit de la manière suivante : si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ alors il existe un sous ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.*

1.2.3 Partie relativement compacte

Définition 1.6 *([22]) Une partie d'un espace de Banach est relativement compact si et seulement si son adhérence est compacte.*

1.2.4 Domaine régulier

Notation 1 *Nous introduisons des notations utilisées dans la suite*
Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$ on écrit
$x = (x', x_n)$ *avec* $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ *et on pose* $\mid x' \mid = (\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
On note :
- $\circ$ $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n); \quad x_n > 0\}$
- $\circ$ $S = \{x = (x', x_n); \quad \mid x' \mid < 1 \text{ et } \mid x_n \mid < 1\}$
- $\circ$ $S_+ = S \cap \mathbb{R}^n_+$
- $\circ$ $S_0 = \{x = (x', x_n); \quad \mid x' \mid < 1 \text{ et } x_n = 0\}$.

Définition 1.7 *On dit qu'un ouvert Ω est de classe C^1 si pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$ il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $H : S \longrightarrow U$ bijective telle que*

$$H \in C^1(\bar{S}), \; H^{-1} \in C^1(\bar{U}), \; H(S_+) = U \cap \Omega \text{ et } H(S_0) = U \cap \Gamma.$$

1.2.5 Quelques définitions (application compacte, complètement continue et contractante)

Soient X et Y sont deux espaces de Banach.

Définition 1.8 *On dit qu'une application continue $T : X \longrightarrow Y$, est compacte si $T(X)$ est inclus dans un sous ensemble compact de Y.*

Définition 1.9 *On dit que l'application $T : X \longrightarrow Y$ est complètement continue si l'image de chaque borné dans X est contenue dans un sous ensemble compact de Y.*

Définition 1.10 *Une application $T : X \longrightarrow X$ est une contraction, s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que*

$$\| Tx - Ty \|_X \leq k \| x - y \|_X, \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

1.2.6 Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème 1.1 *([31]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier, pour $p \in [1, \infty)$*

- *Si $1 \leq p \leq n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q \leq p^*$*
- *Si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < \infty$*
- *Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega)$ pour $0 \leq \gamma \leq 1 - \frac{n}{p}$,*

toutes ces injections sont compactes.

Pour plus de détails concernant ce théorème consulter ([1])

1.2.7 Théorème des injections de Sobolev

Théorème 1.2 *([7]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$;*
- *Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$, (mais pas pour $q = +\infty$);*

• *Si* $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0,$ *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Toutes ces injections sont continues.

Sans hypothèse de régularité sur Ω*, les injections sont vraies localement :*

$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}_{loc}(\Omega)$ *elles restent globalement vraies si on remplace* $W^{k,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{k,p}(\Omega)$.

1.2.8 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.3 *([13]) Soit* H *un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire noté* $(.,.)$ *et la norme associée notée* $\| \, . \, \|$ *.Et* $\langle .,. \rangle$ *représente le crochet de dualité de* H *avec son espace dual.*

Soit $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application bilinéaire, pour laquelle il existe des constantes* α*,* $\beta > 0$ *tel que*

(i)

$$| B(u,v) | \leq \alpha \| u \| \| v \| \quad (u, v \in H)$$

(ii)

$$\beta \| u \|^2 \leq B(u,u) \quad (u \in H).$$

Finalement, soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme linéaire bornée sur* H*, alors il existe un unique élément* $u \in H$ *tel que*

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in H$$

1.2.9 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.4 *([31]) Pour $p \in [1, \infty)$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, p)$ tel que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}$$

1.2.10 Fonction harmonique

Définition 1.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction tel que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f = 0$ sur Ω.*

1.2.11 Inégalité de Harnack

Notation 2 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné : $V \subset\subset U$ exprime $V \subset \bar{V} \subset U$ tel que $\bar{V}$ compact.*

Théorème 1.5 *([13]) Pour n'importe quel ensemble ouvert connexe $V \subset\subset U$ il existe une constante positive c qui depend seulement de V tel que pour toute fonction u harmonique positive ou nulle dans U,*

$$\sup_V u \leq c \inf_V u$$

En particulier pour tout $x, y \in V$

$$\frac{1}{c} u(y) \leq u(x) \leq c u(y)$$

Remarque 1.2 *Ces inégalités affirment que les valeurs d'une fonction harmonique positive ou nulle dans V sont toutes comparables : u ne peut pas être très petite (ou bien très grande) en n'importe quel point de V sauf si u est très petite (ou bien très grande) partout dans V.*

1.2.12 Fonction superharmonique

Définition 1.12 *Une fonction superharmonique dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est une fonction* $u \in C^1(\Omega)$ *avec* $\Delta u \leq 0$ *dans* $D'(\Omega)$ *c'est-à-dire :*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \geq 0 \qquad \text{pour tout } v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.2}$$

tel que $v(x) \geq 0$ *sur* Ω.

1.2.13 Inégalité de Harnack faible

Nous présentons des propriétés des fonctions superharmoniques soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$un ouvert borné régulier :

Proposition 3 *([29])Soit* $\rho > 0$, $n \geq 3$ *et* $p \in [1, \frac{2n}{n-2})$. *Il existe une constante* $\eta_0 > 0$ *telle que pour toute fonction superharmonique positive ou nulle* u *dans* $B_{4\rho}$, *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$u(x) \geq \eta_0 \parallel u \parallel_{L^p(B_{2\rho})} \qquad \text{pour tout } x \in B_\rho$$

Et par conséquent on a la proposition suivante :

Proposition 4 *([29]) Soit* $B_{4\rho} \subset \Omega$, $n \geq 3$, $p \in [1, \frac{2n}{n-2})$ *et* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. *Il existe une constante* $\eta_1 > 0$ *telle que pour toute fonction superharmonique positive ou nulle* u *dans* Ω, *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$u(x) \geq \eta_1 \parallel u \parallel_{L^p(\Omega_0)} \text{ pour tout } x \in B_\rho.$$

Proposition 5 $[(\text{[29]}; Harnack\ faible\ globale)]$ *Il existe* $p \in [1, \infty[$, *et un ensemble* $K \subset$

Ω tel que K compact et un nombre positif η tel que

$$u(x) \geq \eta \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \text{ pour tout } x \in K.$$

et pour toute u une fonction superharmonique positive ou nulle tel que $u \in C^1(\Omega)$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

1.2.14 Principe du maximum faible

Proposition 6 *([31]) Soit $u \in H^1(\Omega)$ et on suppose que $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$. De plus on suppose que $\Delta u \leq 0$ dans Ω au sens faible, i.e.*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \geq 0 \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0,$$

alors $u \geq 0$ presque partout dans Ω.

Théorème 1.6 *(La convergence dominée)([7]) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega, d\mu)$, Ω borné, tel que pour chaque $f_n \longrightarrow f$ presque partout sur Ω, il existe une fonction $g \in L^p(\Omega, d\mu)$, tel que*

$$\mid f_n \mid \leq g \qquad p.p,$$

alors $f \in L^p(\Omega, d\mu)$ et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel f_n - f \parallel_{L^p(\Omega, d\mu)} = 0.$$

1.2.15 Quelques propriétés de l'opérateur Laplacien

Proposition 7 *([31]) Pour tout $\mu \geq 0$ l'application $v \mapsto (-\Delta + \mu I_d)^{-1} v$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve: On prend une suite $v_n \in L^2(\Omega)$. On peut extraire de cette suite une sous-suite $v_{n'} \rightharpoonup v$ (car $L^2(\Omega)$ est un espace reflexif). On va montrer que la suite des solutions (des faibles solutions dans $H_0^1(\Omega)$) de

$$-\Delta w_{n'} + \mu w_{n'} = v_{n'} \quad \text{dans } \Omega$$

converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Après on montrera que de toute suite bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $H_0^1(\Omega)$, et c'est la compacité par conséquent. La formulation variationnelle est la suivante :

$$\int_\Omega \left(\nabla w_{n'} \nabla \Phi + \mu w_{n'} \Phi\right)(x)dx = \int_\Omega \left(v_{n'} \Phi\right)(x)dx$$

pour tout $\Phi \in H_0^1(\Omega)$.
On choisit $\Phi = w_{n'}$ pour obtenir :

$$\int_\Omega \mid \nabla w_{n'}(x) \mid^2 dx \leq \int_\Omega \left(v_n w_{n'}\right)(x)dx$$

$$\leq \| v_{n'} \|_{L^2(\Omega)} \| w_{n'} \|_{L^2(\Omega)}$$

et par l'négalité de Poincaré, on obtiendra :

$$\| w_{n'} \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega \left(v_n w_{n'}\right)(x)dx$$

$$\leq \| v_{n'} \|_{L^2(\Omega)} \| w_{n'} \|_{H_0^1(\Omega)} \ .$$

Par conséquent la suite $w_{n'}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une autre sous-suite, $w_{n''}$ qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite $w^{"}$. Passant à la limite à la formulation variationnelle le long de sous-suite, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\nabla w^{''} \nabla \Phi + \mu w^{''} \Phi\right)(x)dx = \int_\Omega \left(v\Phi\right)(x)dx$$

La proposition (8) montre que ce problème admet une unique solution, $w^{''} = w$ qui ne depend pas de la sous-suite extraite, et donc $w_{n'} \rightharpoonup w$ dans $H_0^1(\Omega)$. Le théorème de Rellich-Kondrachov (1.1) montre que $w_{n'} \rightharpoonup w$ dans $L^2(\Omega)$. On a par conséquent les deux formulations variationnelles suivantes :

$$\int_\Omega (\nabla w \nabla \Phi + \mu w \Phi)(x)dx = \int_\Omega (v\Phi)(x)dx$$

et

$$\int_\Omega (\nabla w_{n'} \nabla \Phi + \mu w_{n'} \Phi)(x)dx = \int_\Omega (v_{n'}\Phi)(x)dx$$

soustrayant ces deux identités, et on choisit $\Phi = w - w_{n'}$, on a

$$\int_\Omega \mid \nabla(w - w_{n'})(x) \mid^2 + \mu \mid (w - w_{n'})(x) \mid^2 dx = \int_\Omega (v - v_{n'})(w - w_{n'})(x)dx$$

le côté droit est le produit de la suite faiblement convergente par une suite fortement convergente, alors

$$\lim_{n' \longrightarrow \infty} \int_\Omega (v - v_{n'})(w - w_{n'})(x)dx = 0$$

où $w_{n'} - w \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\lim_{n' \longrightarrow \infty} \int_\Omega \mu \mid (w - w_{n'})(x) \mid^2 dx = 0$$

Par conséquent le dernier terme au côté droit a une limite, et

$$\lim_{n' \longrightarrow \infty} \int_\Omega \mid \nabla(w - w_{n'})(x) \mid^2 dx = 0$$

c'est-à-dire, $w_{n'} \longrightarrow w$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

Proposition 8 *([31]) Soit $\mu \geq 0$. Alors l'application $g \mapsto (-\Delta + \mu I_d)^{-1} g$ est une application*

- *continue de $L^2(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$,*

• *compact de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$.*

Preuve: La première partie est parce que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ est une injection continue. La deuxième partie est parce que $(-\Delta + \mu I_d)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ peut être vu comme composition de l'application continue $(-\Delta + \mu I_d)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ et l'injection compact $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et comme la composition d'un opérareur linéaire compact et un opérateur linéaire continu est encore compact. ■

1.2.16 Opérateur de Nemitsky

Définition 1.13 *Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de Carathéodory si*
$f(x, u)$ est une fonction continue en u pour presque tout $x \in \Omega$,
$f(x, u)$ est mesurable en x pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.14 *Si f est une fonction de Carathéodory et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction, alors on définit une nouvelle fonction*

$$F{:}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad par \quad F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

F est dit opérateur de Nemitsky.

Remarque 1.3 *Si f est indépendante de x (on parle de cas autonôme)*

$$F(u)(x) = f(u(x)) = (f \circ u)(x).$$

Lemme 1.1 *([31]) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ telle que*

$$\mid f(t) \mid \leq a + b \mid t \mid^r,$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $r > 0$ (des constantes positives). Alors l'application $u \mapsto F(u)$ est *continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$ pour $p \geq \max(1, r)$, et elle transforme les sous-ensembles bornés de $L^p(\Omega)$ en sous-ensembles bornés de $L^{\frac{P}{R}}(\Omega)$.*

Preuve: Utilisant l'inégalité de Jensen ([18])

$$(a + b \mid t \mid^r)^{\frac{p}{r}} \leq 2^{\frac{p}{r}-1} a^{\frac{p}{r}} + 2^{\frac{p}{r}-1} b^{\frac{p}{r}} \mid t \mid^p \leq C(1 + \mid t \mid^p),$$

où C est une constante positive qui depend seulement de a, b, p, et r. Pour $u \in L^p(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |F(u)(x)|^{\frac{p}{r}} \, dx = \int_\Omega \mid f(u(x)) \mid^{\frac{p}{r}} dx \leq C(a, b, p, r)(\mid \Omega \mid + \int_\Omega u^p dx) < \infty,$$

par conséquent $f(u) \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$. Soit u_n une suite qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$. Il existe une sous-suite $u_{n'}$ et une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que $u_{n'}$ converge presque partout vers u, c'est-à-dire, pour presque tout $x \in \Omega$, $u_{n'}(x) \to u(x)$, et $\mid u_{n'}(x) \mid \leq g(x)$ presque partout dans Ω. (C'est par application du théorème de Riesz-fisher). De la continuité de f on a

$$\mid f(u(x)) - f(u_{n'}(x)) \mid \to 0 \qquad \text{p.p sur } \Omega,$$

et

$$\mid f(u(x)) - f(u_{n'}(x)) \mid^{\frac{p}{r}} \leq C(1 + g(x)^p + \mid f(u(x)) \mid^p),$$

où C est une autre constante positive qui depend seulement de a, b, p, et r. Le coté gauche est indépendant de n' et il est dans $L^1(\Omega)$. On peut appliquer le théorème de la convergence dominée (1.6) pour conclure que

$$\int_\Omega \mid f(u(x)) - f(u_{n'}(x)) \mid^{\frac{p}{r}} dx \to 0$$

c'est-à-dire

$$\| f(u(x)) - f(u_{n'}(x)) \|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Où la limite ne depend pas de la sous-suite, cette convergence est vérifiée pour u_n.

Lemme 1.2 *([31]) Soit $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\mid g(z,p) \mid \leq a + b \mid z \mid^{\alpha} + c \mid p \mid,$$

où a, b, et c sont des constantes positives. Et $0 < 2\alpha < 2^*$ où $2^* = \frac{2n}{n-2}$ si $n \geq 3$, et $2^* = \infty$ si $n = 1, 2$ alors l'application $u \mapsto g(u, \nabla u)$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$, et elle transforme les sous-ensembles bornés de $H_0^1(\Omega)$ en sous-ensembles bornés $L^2(\Omega)$.

■

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

1.3.1 Notion de point fixe

Définition 1.15 *Soit (X, d) un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-ensemble non vide et fermé et $T : M \longrightarrow X$ une application. Une solution de l'équation $Tx = x$ est appelée un point fixe de T.*

1.3.2 Théorème de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est défini sur des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Ce théorème fut démontré en 1930 [32]. Nous en donnerons les deux formulations utilisées dans la suite de notre travail :

Théorème 1.7 *([31]) Soit X un espace de Banach, $M \subset X$ non vide, fermé et convexe et $T : M \subset X \longrightarrow M$ un opérateur continu tel que $T(M)$ est précompact. Alors T admet un point fixe.*

Théorème 1.8 *([31]) Soit X un espace de Banach, $M \subset X$ non vide, férmé, borné, et convexe et $T : M \subset X \longrightarrow M$ un opérateur compact. Alors T admet un point fixe.*

Remarque 1.4 *Ce théorème a une grande influence sur la théorie du point fixe et sur la théorie des équations differentielles.*
Une conséquence, appelée le théorème du point fixe de Schaefer, est particulièrement utile pour prouver l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ce théorème de Schaefer est en fait un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Schauder et Leray ([28]).

1.3.3 Théorème de Schaefer

Théorème 1.9 *Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ une application compacte tel que l'ensemble*

$$\{x \in X \ / \ \textit{il existe } \lambda \in [0,1]; \ x = \lambda Tx\}$$

soit borné.
Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, il existe $x \in X$ tel que $x = \lambda Tx$.

Corollaire 1.1 *([31]) Soit X un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur compact tel qu'il existe $b > 0$, et $a \in [0,1[$,*

$$\| Tx \| \leq a \| x \| + b \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Alors T admet un point fixe.

1.3.4 Théorème de Banach

Le théorème de point fixe de Banach 1922.(ou bien appelé aussi théorème de contraction) fournit une méthode constructive pour trouver le points fixe.

Théorème 1.10 *(théorème 5.1)([15]) Soit un espace de Banach X et une application*

$$T : X \longrightarrow X$$

contractante, alors T admet un unique point fixe, c'est-à-dire il existe une unique solution de l'équation $Tx = x$.

Le théorème suivant est un résultat du théorème de Banach permettant de montrer l'existence de solutions pour des problèmes aux limites dont la formulation abstraite est de la forme

$$Lu + Qu = f.$$

Où L est un opérateur aux dérivées partielles, Q un opérateur non linéaire.

Théorème 1.11 *([4];Théorème 2.8) .Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*
(H1) X un espace de Banach et Y, Z deux espaces normés tels que $Y \subset Z$.
(H2) $L : X \longrightarrow Z$ est une application linéaire admettant un inverse à droite sur Y, c'est-à-dire il existe $L^{-1} : Y \longrightarrow X$ et $L.L^{-1} = Id_Y$, tel que il existe une constante $k > 0$

$$\| L^{-1} f \|_X \leq k \| f \|_Y, \quad \textit{pour tout } f \in Y. \tag{1.3}$$

(H3) Q est une application non linéaire $Q : B_\rho \longrightarrow Y$, où

$$B_\rho = \{u \in X : \| u \|_X \leq \rho\}; \rho > 0,$$

vérifiant :
$Q(0) = 0$ *et,*

$$\| Q(u) - Q(v) \|_Y \leq c(\| u \|_X, \| v \|_X) \| u - v \|_X, \ \textit{pour tout } u, v \in B_\rho \tag{1.4}$$

où $c \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ est séparément croissante et $c(0,0) = 0$.

Alors , pour tout $f \in Y$ satisfaisant les inégalités

$$\| f \|_Y \leq \frac{\rho}{2k}, \tag{1.5}$$

$$c(2k \| f \|_Y, 2k \| f \|_Y) \leq \frac{1}{4k}, \tag{1.6}$$

il existe une unique fonction $u \in B_\rho$ telle que :

$$Lu = Q(u) + f \quad et \| u \|_X \leq 2k \| f \|_Y . \tag{1.7}$$

Remarque 1.5 *La preuve est une application du théorème de Banach les hypothèses (H1), (H2),et (H3) sont formulées pour pouvoir appliquer le théorème de Banach pour plus de détails consulter ([4])*

1.3.5 Théorème de Krasnoselskii

L'étude des phénomènes naturels et physiques peut, par modélisation mathématique, être ramenée à l'étude de l'existence de solutions d'équations abstraites de type :

$$Sx + Tx = x, \quad x \in K, \tag{1.8}$$

(où K est un ensemble fermé convexe d'un espace de Banach E), c'est-à-dire la recherche du point fixe d'un opérateur que l'on peut écrire sous la forme d'une somme d'un opérateur compact et d'une contraction. Le théorème de point fixe de Krasnoselskii permet de solutionner une certaine classe de problèmes différentiels, dont l'écriture abstraite est (1.8). Le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour des opérateurs définis sur un cône (Kest un cône), et ses généralisations ont été appliqués avec succès pour établir l'existence et la multiplicité des solutions pour des problèmes aux limites de différents types. Les solutions positives des équations différentielles sont considérées dans plusieurs articles, notamment ceux de J. Henderson et H.Wang [16], R. Ma [23] et N.Merzagui et al[

[24], [25]] . Dans ce travail nous nous intéressons en particulier à l'existence de solutions pour des équations aux dérivées partielles elliptiques. Ce théorème a connu plusieurs développements, differntes variantes ont été appliquées avec succès dans la solvabilité de differents problèmes aux limites, pour plus de détails consulter ([17]).

Pour énoncer le théorème de Krasnoselskii, nous précisons certaines notions figurant dans ce théorème.

Cône

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $| \, . \, |$et $\| \, . \, \|$ tel que

$$| x | \leq c \| x \| \quad \text{pour tout } x \in E,$$

où c est une constante positive. .

Définition 1.16 *$C \subset E$ est dit un cône, si C vérifie les propriétés suivantes :*
1) $C \neq \{0\}$
2) $\lambda C \subset C$ pour pour tout $\lambda \geq 0$
3) $C \cap (-C) = \{0\}$.

Remarque 1.6 *On peut définir un ordre sur E par C*

$$\textit{Pour tout } x, y \in E \ x \leq y \ \ \textit{si } x - y \in C.$$

Théorème de point fixe de Krasnoselskii (compression-expansion)

Pour deux nombres r, R on suppose que $0 < cr < R$ on notera

$$C_{r,R} = \{u \in C : r \leq \| u \|, \ \ | u | \leq R\}$$

$C_{r,R}$ est borné par rapport à la norme $| \ |$, mais peut ne pas être borné par rapport à la norme $\| \ \|$.

Théorème 1.12 $[([29]; Theor\grave{e}me 2.1)]$ *Si l'application* $N : C_{r,R} \longrightarrow C$ *est complètement continue par rapport à la topologie engendrée par la norme* $\| \,.\, \|$, *et bornée par rapport à la norme* $\| \ \|$. *De plus si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(b1) $N(u) \nleq u$ *pour tout* $u \in C$, *avec* $\| u \| = r$,

(b2) $N(u) \ngeq u$ *pour tout* $u \in C$, *avec* $| u | = R$.

Alors N *admet au moins un point fixe dans* C, *avec* $r < \| u \|$ *et* $| u | < R$.

Le théorème suivant est une variante du théorème de Krasnoselskii pouvant etre appliquée à des problèmes semi-linéaires elliptiques, l'hypothèse basique sera l'inégalité de Harnack faible qui impose cette version.

Théorème 1.13 $[([29]; Th\acute{e}or\grave{e}me 2.2)]$ *Si l'application* $N : C_{r,R} \longrightarrow C$ *est compacte par rapport à la norme* $\| \ \|$, *et il existe une constante* C_1 *telle que*

$$\| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_\infty \leq C_1 \quad \textit{pour tout } u \in C_{r,R},\ \lambda > 0,\ \textit{et } \lambda u \in C_{r,R}.$$

De plus si les conditions suivantes sont satisfaites :

h1) $N(u) \ngeq u \quad \forall u \in C \quad \| u \| = r$

h2) $N(u) \nleq u \quad \forall u \in C \quad | u | = R$.

Alors l'application N *admet un point fixe dans* C, *avec* $r < \| u \|$ *et* $| u | < R$.

Preuve: Soit $\tilde{N} : C_{r,R} \longrightarrow C$ donnée par :

$$\tilde{N}(u) = \left(\frac{R}{| u |} + \frac{r}{\| u \|} - 1\right)^{-1} . N\left(\left(\frac{R}{| u |} + \frac{r}{\| u \|} - 1\right)u\right).$$

$\tilde{N}$ est bien définie pour $(\frac{R}{|u|} + \frac{r}{\|u\|} - 1)u \in C_{r,R}$ pour tout $u \in C_{r,R}$.

Aussi on note que si $\| u \| \leq M$, alors

$$\left(\frac{R}{| u |} + \frac{r}{\| u \|} - 1\right)^{-1} \leq \frac{M}{r}$$

Par conséquent $\tilde{N}$ transforme les bornés en sous ensembles relativement compact par rapport à $\| \ \|$ donc $\tilde{N}$ est completement continue, de plus la condition

$$\| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \| \leq C_1,$$

implique

$$\| \tilde{N}(u) \| = \| (\frac{R}{\mid u \mid} + \frac{r}{\| u \|} - 1)^{-1} N((\frac{R}{\mid u \mid} + \frac{r}{\| u \|} - 1)u) \| \leq C_1$$

avec $\lambda = (\frac{R}{|u|} + \frac{r}{\|u\|} - 1)$. Ce qui implique que $\tilde{N}(C_{r,R})$ est bornée par rapport à $\| \ \|$ on note que $(\frac{R}{|u|} + \frac{r}{\|u\|} - 1)^{-1} \longrightarrow \infty$ lorsque $\mid u \mid \longrightarrow R$ et $\| u \| \longrightarrow +\infty$. Finalement on observe que $\tilde{N}$ vérifie les hypothèses du théorème (1.12)([29]). Ce qui implique que $\tilde{N}$ admet un point fixe et par conséquent N admet un point fixe tel que :

$$\tilde{N}(y) = (\frac{R}{\mid y \mid} + \frac{r}{\| y \|} - 1)^{-1}.N((\frac{R}{\mid y \mid} + \frac{r}{\| y \|} - 1)y) = y$$

ce qui equivaut à écrire,

$$N(\frac{R}{\mid y \mid} + \frac{r}{\| y \|} - 1)y = (\frac{R}{\mid u \mid} + \frac{r}{\| u \|} - 1)$$

■

Corollaire 1.2 [[*13*], section2.4] *Soient des entiers* $1 \leq n \leq 3$ *et* $m := [\frac{n+2}{2}]$, *un scalaire* $T > 0$ *et des fonctions* $f \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$. *Alors le problème de Cauchy associé à l'équation des ondes*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t) \qquad : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ u(x,0) = g(x), \ u_t(x,0) = h(x) : x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

En particulier, il existe une constante $K = K(T) > 0$ *telle que*

$$\| u \|_{C^2} \leq K(\| f \|_{C^m} + \| g \|_{C^{m+1}} + \| h \|_{C^m}).$$

Chapitre 2

Applications des théorèmes du point fixe

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions de quelques exemples d'équations aux dérivées partielles par la methode de point fixe.
Nous présenterons des applications des théorèmes de Schauder, Scheafer et Krasnoselskii pour des problèmes de Dirichlet associés à des EDP elliptiques. Nous en démontrons l'existence de solutions faibles. L'existence de solutions fortes sera établie par application du théorème de point fixe de Banach pour un problème de Cauchy associé à une EDP hyperbolique.

2.2 Applications du théorème de Schauder

1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = e^{-u} & dans\ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La fonction f; $f(x) = \exp(-x)$; est continue, croît rapidement quand $u \longrightarrow -\infty$. f est bornée sur

$$C = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq 0\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent on peut considerer l'application

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad C \subset H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u \quad &\mapsto \quad T(u) = (-\Delta)^{-1} f(u). \end{aligned}$$

L'ensemble C est un cône car pour $\lambda \geq 0$ et $u \geq 0$, $\lambda u \in C$ ($H_0^1(\Omega)$ est un espace vectoriel) et $\lambda u \geq 0$ par conséquent C est un convexe férmé.

D'après le principe du maximum faible (6), $T(C) \subset C$, car $C \subset H_0^1(\Omega)$, et T : $H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ car$T(u)$ $(-\Delta)^{-1} f(u) \geq 0$.

$T(C)$ est précompact. En effet, notons que pour tout ϕ continue sur $H_0^1(\Omega)$ et , $\phi \leq 1$, lorsque $u \in C$ alors pour $v = \phi(u)$

$$T(C) \subset (-\Delta)^{-1}(\{v \in L^2(\Omega) \ tel \ que \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt[2]{\mid \Omega \mid}\}).$$

D'après la proposition (7) $T(C)$ est contenu dans un ensemble (borné) compact férmé, et il est par conséquent précompact, et l'existence d'une solution positive est obtenue par le théorème du point fixe de Schauder (1.7).

2. Considerons le problème suivant :

On cherche une solution faible $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = F(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Sous des conditions appropriées sur F

On convient de noter $F(u)$ l'opérateur de Nemitsky assicié à f c-à-d $F(u) = f \circ u$

Théorème 2.1 *([31]) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ tel que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \mid f(t) \mid = a < \infty$. Alors le problème (2.1) admet une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$, i.e.*

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla \Phi)(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(u(x))\Phi((x))\, dx \qquad \textit{pour tout } \Phi \in D(\Omega).$$

Preuve: Ce résultat est établi par l'application du théorème du point fixe de Schauder (1.8) à l'opérateur

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ u \quad &\mapsto \quad (-\Delta)^{-1} F(u) \end{aligned}$$

T est continue. Le lemme (1.1) montre que $u \mapsto f(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La proposition (8) montre que $(-\Delta)^{-1}$ est continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ qui s'injecte continument dans $L^2(\Omega)$.

On cherche un ensemble convexe non vide borné et férmé M tel que $T : M \longrightarrow M$.

Soit $u \in L^2(\Omega)$, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz Tu satisfait

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla Tu \nabla Tu)(x) dx = \int\limits_{\Omega} f(u(x)) Tu(x) dx \leq a \mid \Omega \mid \parallel Tu \parallel_{L^2(\Omega)},$$

Par consequent en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\parallel Tu \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \parallel \nabla Tu \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \leq a \mid \Omega \mid C(\Omega) \parallel Tu \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

Alors si on définit $R = a \mid \Omega \mid C(\Omega)$ et on choisit $M = \left\{ u, \text{ tel que } \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \leq R \right\}$ alors on a $T : M \longrightarrow M$.

Pour la compacité de T utilisant l'inégalité de Poincaré dans (2.1) on obtient :

$$\| \nabla T u \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq R \| \nabla T u \|_{L^2(\Omega)},$$

donc $T(M) \subset \left\{ u, \text{ tel que } \| u \|_{H^1(\Omega)} \leq R \right\}$ et par l'injection de compact de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, T est compacte. ■

2.3 Application du théorème de Schaefer

On cherche une solution faible $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u, \nabla u) + \mu u = h & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\mu \geq 0$, $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ croît au plus linéairement à l'infini i.e il existe $a > 0$, $b > 0$ telles que

$$| g(z, p) | \leq a + b(| z | + | p |)$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, et $h \in L^2(\Omega)$. Le lemme(1.2) qui représente une généralisation du lemme (1.1) montre que $g : u \mapsto g(u, \nabla u)$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 2.2 *([31]) Si $b = 0$, c'est-à-dire si g est bornée, alors il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.2), i.e. pour tout $\Phi \in D(\Omega)$*

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \Phi + g(u, \nabla u)\Phi + \mu u \Phi)(x)dx = \int_\Omega (h\Phi)(x)dx \quad .$$

Si $b \neq 0$ le résultat est vérifié à condition que μ soit plus grande qu'une constante dépendante de Ω et M_2 seulement.

Remarque 2.1 *Si $g(u, \nabla u)$ n'est pas bornée, il pourrait ne pas exister une solution pour μ arbitraire.*

Preuve: Nous allons utiliser le théorème de Schaefer (1.1). Trouver T un opérateur compact, continu sur $H_0^1(\Omega)$. Avec $H_0^1(\Omega)$ l'espace de Banach muni de la norme donnée par

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

T devant satisfaire l'estimation à priori suivante:

$$\| Tu \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \| u \|_{H_0^1(\Omega)} + \beta \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha < 1$ indépendante de u. C'est suffisant pour obtenir l'éxistence d'un point fixe de T. Si T est choisi tel que un point fixe correspond à une solution faible du problème (2.2).

1)Pour le choix de T : considérons

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \\ u \quad &\mapsto \quad (-\Delta + \mu Id)^{-1}(-g(u, \nabla u) + h) \end{aligned}$$

Alors, T est bien défini et continu car le lemme (1.2) montre que $-g(u, \nabla u)$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$, et la propostion(8) montre que $(-\Delta + \mu I_d)^{-1} v$ est continu de $L^2(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$.

2) Pour l'estimation à priori (2.3): Soit u donnée ($u \in H_0^1(\Omega)$), pour $v = Tu$ on a alors pour tout $\Phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla \Phi \nabla v + \mu v \Phi)(x) \, dx = \int_\Omega (-g(u, \nabla u)\Phi + h\Phi)(x) \, dx \tag{2.4}$$

choisissons $\Phi = v$, et on majore le second membre de l'égalité (2.4) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_\Omega \mid \nabla v(x) \mid^2 + \mu \mid v(x) \mid^2 dx \leq \parallel g(u, \nabla u(x)) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq (a + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)}) \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} + b \parallel u \parallel_X \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \tag{2.5}$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré (1.4) :

$$c(\Omega) \parallel v \parallel_X^2 \leq \int_\Omega \mid \nabla v(x) \mid^2 dx,$$

pour $c(\Omega)$ une constante positive depend seulement de Ω. Et l'inégalité suivante qui est vérifiée pour tout $k, \gamma, \delta > 0$

$$\gamma\delta \leq \frac{k}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2k}\delta^2$$

on obtient :

$$b \parallel u \parallel_{H_0^1(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} c(\Omega) \parallel u \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{b^2}{2c(\Omega)} \parallel v \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

$$(a + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)}) \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c(\Omega)}{4} \parallel v \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(a + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)})^2}{c(\Omega)}$$

où

$$\parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)}$$

En divisant les deux membres de (2.5) par $c(\Omega)$ on obtient :

$$\frac{3}{4} \parallel v \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\mu}{c(\Omega)} \parallel v \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{(a + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)})^2}{c(\Omega)^2} + \frac{b^2}{2c(\Omega)^2} \parallel v \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

si $\mu \geq \frac{b^2}{2C(\Omega)^2}$, ceci implique que :

$$\parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt[2]{\frac{2}{3}} \parallel u \parallel_{H_0^1(\Omega)} + \frac{a + \parallel h \parallel_{L^2(\Omega)}}{c(\Omega)}$$

La compacité de T dans ce cas n'est pas une application direct du théorème de Rellich-Kondrachov : g est seulement continue, il n'y a pas de raison pour être compacte (elle peut être par exemple $\| u \|_{H_0^1(\Omega)}$). Après on a $(-\Delta + \mu I_d)v$ en fait compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Avec ce résultat, T est la composée d'une application continue pour laquelle l'image des sous-ensembles bornés est aussi bornée et une application compact, elle est par conséquent compacte. ■

2.4 Application du théorème de Banach

Dans cette section, on applique la méthode du point fixe au problème de Cauchy associé à l'équation des ondes semi linéaire suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) + q(x,t,u(x,t)) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x), \; u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.6}$$

Sans perte de généralité, on suppose $c = 1$, quitte à effectuer un changement de variables. On commence par fixer les notations qui seront utilisées dans la suite.
Le problème sera donc de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + q(x,t,u(x,t)) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x), \; u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.7}$$

Notation 9 *Pour tout $T > 0$ nous écrivons*

$$\mathbb{R}^n_T := \mathbb{R}^n \times (0,T) \text{ et } \bar{\mathbb{R}}^n_T := \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

On considère l'hypothèse de régularité suivante sur q

$$q \in C^k(\bar{\mathbb{R}}^n_T \times \mathbb{R})$$

Soit un multi indice $a = (a_1, a_2)$ *avec* $a_1 \in \mathbb{N}^n$ *et* $a_2 \in \mathbb{N}$, *et* $b \in N$ *tels que*

$$0 \leq \mid a \mid, b \leq k.$$

Alors nous notons les dérivées partielles

$$D^a_{x,t} q := \frac{\partial^{|a|} q}{\partial x^{a_1} \partial t^{a_2}} \quad et \quad D^b_y q = \frac{\partial^b q}{\partial y^b}.$$

De plus, pour tout $u \in C^0(\mathbb{R}^n_T)$, *nous notons* Q *l'opérateur de Nemitsky associé à la fonction* q *(1.14) définie pour tout* $(x, t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T$ *par*

$$Q(u)(x, t) := q(x, t, u(x, t))$$

Ensuite nous considerons les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

$[A_1]$ Pour $n = 1, 2, 3.$ $m := [\frac{n+2}{2}]$, $r \in \mathbb{N}$ et $T > 0$, $g \in C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n)$,

$[A_2]$ Il existe une constante $M > 0$ tel que

$$q \in C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T \times [-M, M]), \; q = q(x, t, y),$$

pour tout $(x, t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T$ et $\mid y_1 \mid, \mid y_2 \mid \leq M$, nous avons les inégalités

$$\mid D^a_{x,t} q(x, t, y_1) - D^a_{x,t} q(x, t, y_2) \mid \leq \gamma_1(\mid y_1 \mid + \mid y_2 \mid) \mid y_1 - y_2 \mid, \tag{2.8}$$

$$\mid D^b_{x,t} D^c_u q(x, t, y_1) - D^b_{x,t} D^c_u q(x, t, y_2) \mid \leq \gamma_2 \mid y_1 - y_2 \mid, \tag{2.9}$$

avec $0 \leq \mid a \mid, \mid b \mid + c \leq r + m$, $c \geq 1$ et $\gamma_i > 0$ des constantes indépendantes de (x, t),

$[A_3]$ Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\| q \|_{C^{r+m}} \leq \lambda.$$

Remarque 2.2 *Les espaces de fonctions $C^r(\mathbb{R}^n)$ sont compris au sens de la définition (1.3) c'est-à-dire que si $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$, alors u et ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont bornées dans $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 2.3 *([4]) Sous les hypothèses A_1, A_2, A_3, il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, T, \lambda, \gamma_i) > 0$ tel que si Q, g et h satisfont :*

$$\| Q(0) \|_{C^{r+m}} + \| g \|_{C^{r+1+m}} + \| h \|_{C^{r+m}} \leq \varepsilon, \tag{2.10}$$

alors le problème le problème (2.7)admet une unique solution $u \in C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$. De plus, il existe une constante

$$k = k(r, T, M, \lambda, \gamma_i) > 0$$

telle qu'on ait l'inégalité :

$$\| u \|_{C^{r+2}} \leq k(\| Q(0) \|_{C^{r+m}} + \| g \|_{C^{r+1+m}} + \| h \|_{C^{r+m}}).$$

Preuve: Le théorème (1.11) est utilisé pour établir ce résultat (2.3). On fixe le cadre fonctionnel. Soient les espaces fonctionnels

$$X := C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T),$$

$$Y := C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \times C^{r+1+m}(\mathbb{R}^n) \times C^{r+m}(\mathbb{R}^n),$$

$$Z = C^r(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \times C^r(\mathbb{R}^n) \times C^r(\mathbb{R}^n).$$

Soient les applications

$$L : X \longrightarrow Z$$

et

$$Q\,[.] : X \longrightarrow Y$$

définies par

$$Lu := Lu(x,t) := (u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), u(x,0), u_t(x,0)),$$

$$Q[u] := Q[u](x,t) := ((q(x,t,u(x,t)) - q(x,t,0))\,, 0, 0) \;\text{ avec } Q[0] = 0.$$

Soit $F \in Y$ défini par :

$$F(x,t) := (q(x,t,0), g(x), h(x)).$$

On obtient donc l'équation équivalente

$$Lu + Q[u] = F. \tag{2.11}$$

Ensuite on vérifie les trois hypothèses du théorème (1.11).

$X := C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$est un espace de Banach.

$Y \subset Z$, car si on prend par exemple un élément $(u, g, t) \in Y$ cela veut dire que

$$\begin{cases} u \in C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \\ g \in C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n) \\ t \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

et on sait que

$$\begin{cases} C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \subset C^r(\mathbb{R}^n_T) \\ C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n) \subset C^r(\mathbb{R}^n) \\ C^{r+m}(\mathbb{R}^n) \subset C^r(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

donc $(u,g,t) \in Z$ et par conséquent $Y \subset Z$, alors l'hypothèse (H1) est vérifiée.
L'hypothèse (H2) du théorème(1.11) c-à-d l'inversibilité à droite de l'opérateur L est vérifiée en se basant sur le corollaire (1.2).
Dans le corollaire (1.2) l'unicité de la solution garantit l'inversibilité à droite de l'application linéaire

$$(Lu(x,t) = (u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), u(x,0), u_t(x,0))$$

sur Y, c'est à dire il existe $L^{-1} : Y \to X$ tel que $L.L^{-1} = I_{d_Y}$, et (d'après le théorème 1.2) en particulier, il existe une costante : $K = K(T) > 0$ telle que

$$\| u \|_{C^2} \leq K(\| f \|_{C^m} + \| g \|_{C^{m+1}} + \| h \|_{C^m})$$

ce qui garantit l'hypothèse suivante :

$$\| L^{-1}F \|_X \leq K \| F \|_Y \quad \text{pour toute } F \in Y,$$

et donc l'hypothèse (H2) du théorème (1.11) est vérifiée.
L' hypothéses (H3) est vérifiée par le lemme technique (2.1) donné et démontré à la fin de la preuve du théorème (2.3)
Nous avons $Q[.] : X \longrightarrow Y$ et

$$Q[u] := Q[u](x,t) = (q(x,t,u(x,t)) - q(x,t,0), 0, 0)$$

et $Q[0] = 0$. Et on suppose que $Q(x,t,0) = 0$ pour tout $(x,t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T$.
Soient $u, v \in C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$ tel que $\| u \|_{C^{r+2}}, \| v \|_{C^{r+2}} \leq M$ ce qui garantit la condition

$$Q : B_\rho = \{u \in X : \| u \|_X \leq \rho\} \longrightarrow Y$$

de l'hypothèse (H3) du théorème (1.11). Donc d'après le lemme précédent $Q[u] \in C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$ et

$$\| Q[u] - Q[v] \|_{C^{r+m}} \leq k(\| u \|_{C^{r+2}} + \| v \|_{C^{r+2}}) \| u - v \|_{C^{r+2}}$$

qui veut dire que l'inégalité

$$\| Q(u) - Q(v) \|_Y \leq c(\| u \|_X, \| v \|_X) \| u - v \|_X$$

du théorème(1.11) est vérifiée.
Alors d'après le théorème (1.11) le problème (2.11) admet une unique solution ce qui est équivalent à dire que le problème (2.7) admet une unique solution. ∎

Remarque 2.3 ∘ *Si $n > 3$, alors on a nécessairement besoin que $f \in C^m(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$, avec $m \geq 3$. Puisque la solution de l'équation des ondes ne peut pas gagner en régularité, il n'est plus possible de trouver une application non-linéaire $q \in C^m(\bar{\mathbb{R}}^n_T \times \mathbb{R})$ telle que :*

$$(x, t) \mapsto q(x, t, u(x, t)) \in C^m(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \text{ si } u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_T).$$

∘ *On peut généraliser le résultat avec un terme semi-linéaire $q(u, u_t, \nabla_x u)$ dépendant des dérivées premières, mais seulement pour $n = 1$. En effet, pour la même raison que dans la remarque précédente, l'absence de gain de régularité ne nous laisse, aux mieux, que la possibilité d'avoir $q(u, u_t, \nabla_x u) \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$, alors que la régularité minimale requise pour $n \geq 2$ est de classe C^2.*
∘ *On est pas en mesure d'améliorer le résultat avec des paires espaces fonctionnels ayant un ordre de dérivation different, c'est-à-dire utiliser*

$$X_1 := C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_T), X_2 := C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T),$$

$$Y_1 := C^m(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \times C^{m+1}(\mathbb{R}^n) \times C^m(\mathbb{R}^n),$$

et

$$Y_2 := C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \times C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n) \times C^{r+m}(\mathbb{R}^n).$$

avec $r > 0$ *entier.*

2.5 Application du théorème de Krasnoselskii

On onsidère le problème de Dirichelet associé à une équation élliptique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u\left((x)\right) = f(u(x)) \textit{ pour} \text{ presque tout } x \in \ \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.12}$$

Sous les hypothèses suivantes :

Ω domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et $f(u) = f \circ u$.

Le but de ce travail est de montrer l'existence des solutions positives i.e $u \in C^1(\Omega)$, $u(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et u vérifie le problème (2.12). Δu est considéré comme distribution. L'hypothèse de base va être l'inégalité faible globale de Harnack pour les fonctions positives superharmoniques. Et pour montrer l'existence des solutions pour le problème (2.12) on utilise le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.4 *([29])Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(A_1) Il existe $p \in [1,\infty[$, un ensemble $K \subset \Omega$ tel que K compact et un nombre positif η tel que :

$$u(x) \geq \eta \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \quad \textit{pour tout } x \in K,$$

et chaque fonction positive superharmonique $u \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

(A_2) Il existe $C_0 > 0$ et $\theta \in \left[1, \frac{2p}{n}\right] \cap [1, p]$, telle que $f(\tau) \leq C_0\tau^\theta$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$.

(A_3) Il existe $r > 0$ tel que :

$$\frac{\max\limits_{\tau\in[0,r]} f(\tau)}{r} <\| (-\Delta)^{-1}.I_d \|_{\infty}^{-1},$$

où I_d est l'application identité.

(A_4) Il existe $R > cr$ tel que :

$$\frac{\inf\limits_{\tau\in[\eta R,\infty[} f(\tau)}{R} >\| (-\Delta)^{-1} I_{\mid K} \|_{L^p(\Omega)}^{-1},$$

où K est le compact de Ω défini dans (A_1)

Alors le problème (2.12) admet une solution positive qui satisfait à $\| u \|_{\infty} > r$ et $\| u \|_{L^p} < R$.

Preuve: On reformule les hypothèses du problème (2.12) comme celles du théorème de Krasnoselskii : on suppose que l'inégalité de Harnack faible globale(5) notée par (A_1) dans le théorème précédent est vérifiée :

A_1) Il existe $p \in [1,\infty[$, un ensemble $K \subset \Omega$ tel que K compact et un nombre positif η tels que :

$$u(x) \geq \eta \| u \|_{L^p(\Omega)} \quad \text{pour tout } x \in K,$$

et chaque fonction positive superharmonique $u \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour appliquer le théorème du point fixe de Krasnoselskii :

Soit

$$E = C_0(\bar{\Omega}) := \{u \in C(\bar{\Omega}) \ : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

et on munit E de deux normes suivantes :

$$1) \ \| u \|_{\infty} = \max_{x\in\Omega} | u(x) |$$

et

$$2)\ \ \| u \|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} | u(x) |^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifie que l'inégalité $\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c \| u \|_\infty$ est vraie pour tout $u \in E$. Soit $u \in E$, on sait que Ω est borné de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$\begin{aligned} \| u \|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} | u(x) |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} &\leq (\int_{\Omega} \max_{x\in\Omega} | u(x) |^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \max_{x\in\Omega} | u(x) | \, (\int_{\Omega} d\mu(x))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| u \|_\infty \, (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc $\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c \| u \|_\infty$, avec $c = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$, ou $\mu(\Omega)$ est la mesure de Ω.

Considérons l'ensemble

$$C = \{u \in C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+), u(x) \geq \eta \| u \|_{L^p(\Omega)} \ \forall x \in k\}$$

On vérifie que C est un cône :

Soit $u \in C$ et $\lambda \geq 0$ montrons alors que $\lambda u \in C$.

$u \in C$ équivalent à $u \in C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ et $u(x) \geq \eta \| u \|_{L^p(\Omega)}$

ce qui entraine que $\lambda u \in C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ car $C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ est un espace vectoriel.

Pour $\lambda \geq 0, si\ u \in C$, on a

$$\lambda u(x) \quad \geq \lambda(\eta \| u \|_{L^p(\Omega)})$$

ce qui entraine que

$$\lambda u(x) \geq | \lambda | \eta \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

et par suite

$$\lambda u(x) \geq \eta \| \lambda u \|_{L^p(\Omega)}$$

car $\| \, . \, \|_{L^p(\Omega)}$ est une norme.

Maintenant on définit les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{rcl} N & : & C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+) \longrightarrow C(\bar{\Omega}) \\ u & \mapsto & N(u) = (-\Delta)^{-1}.F(u), \end{array}$$

où F désigne l'opérateur de Nemitsky associé à f.

$$\begin{array}{rcl} F & : & C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+) \longrightarrow C(\bar{\Omega}), \\ u & \mapsto & F(u)(x) = f(u(x)). \end{array}$$

Et,

$$\begin{array}{rcl} -\Delta & : & H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & -\Delta u \end{array}$$

$-\Delta$ est inversible car on peut obtenir l'unicité de la solution du problème (2.12) par le théorème de Lax-Milgram(1.3)

On veut finalement trouver que N admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$N(u_0) = u_0 \text{ équivalent à dire que } (-\Delta)^{-1}.F(u_0) = u_0$$

ceci implique que

$$-\Delta u_0 = F(u_0),$$

c'est à dire l'équation suivante sera vérifiée.

$$-\Delta u\,((x)) = f(u(x)) \text{ pour presque tout } x \in \ \Omega$$

Puisque $f \geq 0$ (par hypothèse), et $(-\Delta)^{-1}$ est positif (par application du principe du maximum (6)), on a N application telle que :

$$N : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{+}) \longrightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{+})$$

Donc $N(u) = (-\Delta)^{-1}.F(u) \geq 0$ et $N(u)$ est continue aussi par l'inégalité faible globale de Harnack la condition (A_1) ceci implique que

$$N(C) \subset C.$$

Ensuite si l'on suppose que :

(A_2) Il existe $C_0 > 0$ et $\theta \in \left[1, \frac{2p}{n}\right] \cap [1, p]$, telle que $f(\tau) \leq C_0 \tau^{\theta}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}^{+}$.

Alors cette condition garantit que pour tout $R > 0$ la restriction de N à

$$C_R = \left\{u \in C : \| \, u \, \|_{L^P(\Omega)} \leq R\right\}$$

est compact par rapport à la norme $\| \ \|_{\infty}$. Et qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\| \, \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \, \|_{\infty} \leq C_1 \qquad u \in C,$$

avec $\| \, u \, \|_{L^p} \leq R$ et $\lambda \in (0, 1)$.

En effet, si on pose $q = \frac{p}{\theta}$ alors on a $F(C_R)$ est bornée dans $L^q(\Omega)$ car pour $u \in C_R$, on a

$$\begin{aligned}
\| F(u) \|_{L^q(\Omega)} &= (\int_\Omega | F(u)(x) |^q)^{\frac{1}{q}} = (\int_\Omega | F(u)(x) |^{\frac{p}{\theta}})^{\frac{\theta}{p}} \\
&\leq (\int_\Omega | C_0 u(x)^\theta |^{\frac{p}{\theta}} \, dx)^{\frac{\theta}{p}} \\
&\leq (C_0^{\frac{p}{\theta}} (\int_\Omega | u(x)^\theta |^{\frac{p}{\theta}} \, dx))^{\frac{\theta}{p}} \\
&\leq C_0 (\int_\Omega | u(x)^\theta |^{\frac{p}{\theta}} \, dx)^{\frac{\theta}{p}} \\
&\leq C_0 \| u \|^\theta_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C_0 R^\theta < \infty
\end{aligned}$$

D'ou $N(C_R)$ est bornée dans $W^{2,q}(\Omega)$ pour $q > \frac{n}{2}(1.2)$. On déduit que $N(C_R)$ est relativement compact dans $C(\bar{\Omega})$. Donc la restriction de N dans C_R est compact par rapport à la norme$\| \ \|_\infty$. De plus par application de la condition (A_2) on obtient

$$\| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_\infty \leq \gamma \| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_{W^{2,q}(\Omega)}$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned}
\gamma \quad \| \quad \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_{W^{2,q}(\Omega)} &\leq \gamma \frac{1}{\lambda} \| (-\Delta)^{-1} I_d \| \| F(\lambda u) \| \ _{L^q(\Omega)} \\
\leq \quad & \gamma \frac{1}{\lambda} \| (-\Delta)^{-1} I_d \| C_0 \| (\lambda u)^\theta \|_{L^q(\Omega)} \\
\leq \quad & \gamma \lambda^{\theta - 1} \| (-\Delta)^{-1} I_d \| C_0 \| u \|^\theta_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

car $\lambda^{\theta-1} \leq 1 \ et \ \lambda \in (0,1)$

et par suite,

$$\gamma \| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq \gamma \| (-\Delta)^{-1} \| C_0 R^\theta := C_1$$

ce qui montre que pour tout $u \in C$ tel que $\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq R$, et $\lambda \in (0,1)$, on a

$$\| \frac{1}{\lambda} N(\lambda u) \|_\infty \leq C_1$$

Maintenant on suppose que l'hypothèse (A_3) est vérifiée :

(A_3) Il existe $r > 0$ tel que :

$$\frac{\max_{\tau \in [0,r]} f(\tau)}{r} < \| (-\Delta)^{-1} I_d \|_\infty^{-1},$$

où I_d est l'application identité.

Alors si $u \in C$, $\| u \|_\infty = r$ et $N(u) \geq u$ pour $f(u(x)) \leq \max_{\tau \in [0,r]} f(\tau)$ on a :

$$r = \| u \|_\infty \leq \| N(u) \|_\infty \leq \| (-\Delta)^{-1} I_d \|_\infty \max_{\tau \in [0,r]} f(\tau) < r,$$

C'est une contradiction, donc (A_3) garantit (h1) du thèorème de Krasnoselskii(1.13), c'est-à-dire $N(u) \ngeq u \quad \forall u \in C, \| u \|_\infty = r$.

Finalement on suppose que l'hypothèse (A_4) est vérifiée :

(A_4)Il existe $R > cr$ tel que

$$\frac{\inf_{\tau \in [\eta R, \infty[} f(\tau)}{R} > \| (-\Delta)^{-1} I \restriction_K \|_{L^p(\Omega)}^{-1},$$

où K est le compact de Ω défini par (A_1)

Ici par $h \restriction_K$ on a noté la fonction $h(x)$ pour $x \in K$. $h(x) = 0$ pour $x \in \Omega \backslash K$.

Soit $u \in C$, $\| u \|_{L^p} = R$ supposons que $N(u) \leq u$.

Pour

$$F(u)(x) = f(u(x)) \geq \inf_{\tau \in [\eta R, \infty[} f(\tau), \forall x \in K.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} R = \| u \|_{L^p(\Omega)} &\geq \| N(u) \|_{L^p} \\ &\geq \| (-\Delta)^{-1}.F(u) \mid_K \|_{L^p} \\ &\geq \| (-\Delta)^{-1}.I \mid_K \|_{L^p} . \inf_{\tau \in [\eta R, \infty[} f(\tau) \\ &> R \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc (A_4) guarantit l'hypothèse (h2) du thèorème de Krasnoselskii (1.13) c'est-à-dire $N(u) \nleq u \ \ \forall u \in C$, tel que $\| u \|_{L^p(\Omega)} = R$.
Et par conséquent le problème (2.12) admet une solution qui represente un point fixe pour N c'est-à-dire :

$$(-\Delta)^{-1}.F(u_0) = u_0 \text{ ce qui est équivalent à dire que } F(u_0) = -\Delta u_0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Enoncé et démonstration du lemme (2.1)

Lemme 2.1 *([4]) Sous les hypothèses [A_1],[A_2] et [A_3] indiquées dans l'application du théorème de Banach, on suppose de plus que*

$$Q(x,t,0) = 0 \quad \textit{pour tout } (x,t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T \tag{2.13}$$

Soient $u, v \in C^{r+2}(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$ tels que

$$\| u \|_{C^{r+2}}, \| v \|_{C^{r+2}} \leq M.$$

Alors

$$Q[u] \in C^{r+m}(\bar{\mathbb{R}}^n_T) \tag{2.14}$$

et nous avons les inégalités

$$\| Q[u] - Q[v] \|_{C^{r+m}} \leq k(\| u \|_{C^{r+2}} + \| v \|_{C^{r+2}}) \| u - v \|_{C^{r+2}},$$

où $k > 0$ est une constante indépendante de u, v.

Preuve: L'assertion (2.14) est évidente, car $m \leq 2$ pour $1 \leq n \leq 3.N$ous démontrons le lemme pour le cas $n = 3$, $m = 2$, et $r = 0$, les autres cas étant très similaires.Etape1: Dans cette étape préliminaire, nous montrons quelques inégalités qui seront utilisées dans la suite de la preuve. Nous désignerons par K_i des constantes indépendantes des variables x, t et y. Les inégalités (2.8) et (2.13) impliquent que pour tout $(x, t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T$,

$$\begin{aligned} & \mid \quad q_y(x,t,0) \mid = \mid \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{q(x,t,h) - q(x,t,0)}{h} \mid \\ \leq & \quad \lim_{h \longrightarrow 0} K_0 \mid h \mid = 0 \end{aligned}$$

combiné avec l'inégalité (2.9), nous obtenons également

$$\mid q_y(x,t,y) \mid \leq K_1 \mid y \mid \quad \text{pour tout (x,t,y)} \in \bar{\mathbb{R}}^n_T \times [-M, M].$$

De plus, puisque les applications considérées sont uniformément bornées, nous avons

$$\mid q_{yy}(x,t,y) \mid \leq K_2, \ \mathit{pour} \text{ tout (x,t,y)} \in \bar{\mathbb{R}}^n_T \times [-M, M]$$

En appliquant les mêmes raisonnement sur les dérivées de q par rapport à x et t, nous avons, pour tout opérateur differentiel $D^a_{x,t}$ avec $0 \leq \mid a \mid \leq 2$,
Les inégalités

$$\mid D^a_{x,t} q_y(x,t,y) \mid \leq K_1 \mid y \mid \text{ pour tout (x,t,y)} \in \bar{\mathbb{R}}^n_T \times [-M, M] \tag{2.15}$$

$$\mid D^a_{x,t} q_{yy}(x,t,y) \mid \leq K_2 \quad \text{pout tout } (x,t,y) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T \times [-M, M] \tag{2.16}$$

Etape 2 Montrons l'inégalité

$$\| Q[u]-Q[v] \|_{C^2} \leq K(\| u \|_{C^2} + \| v \|_{C^2}) \| u-v \|_{C^2}, \qquad (2.17)$$

avec u,v $\in C^2(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$ tels que $\| u \|_{C^2}, \| v \|_{C^2} \leq M$.
Soient $(x,t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_T$.
1)Par (2.8), nous avons directement

$$\begin{aligned} | \quad & Q[u](x,t)-Q[v](x,t) | \leq K_0(| u | + | v |) | u-v | \\ \leq \quad & K_0(\| u \|_{C^2} + \| v \|_{C^2}) \| u-v \|_{C^2} \end{aligned}$$

L'éstimation des dérivées partielles d'ordre 1 étant identique pour chaque variable, nous effectuons uniquement celle en t.Puisque

$$\frac{\partial q(x,t,u(x,t))}{\partial t} = q_t(x,t,u(x,t)) + q_y(x,t,u(x,t))u_t(x,t),$$

alors

$$\begin{aligned} | \quad & \frac{\partial}{\partial t}[Q[u](x,t)-Q[u](x,t)] |=| q_t[u]+q_y[u]u_t-q_t[v]+q_y[v]v_t | \\ \leq \quad & | q_t[u]-q_t[v] | + | q_y[u] || u_t-v_t | + | q_y[u]-q_y[v] | v_t \end{aligned}$$

Les inégalités (2.8), (2.9) et (2.15) impliquent que

$$| q_t[u]-q_t[v] | \leq K_0(| u | + | v |) | u-v |,$$

$$| q_y[u]-q_y[v] | \leq K_1 | u-v |,$$

$$| q_y[u] | \leq K_1 | u |,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& \mid \quad \frac{\partial}{\partial t}[Q[u](x,t) - Q[v](x,t) \mid \leq K_0(\mid u \mid + \mid v \mid) \mid u - v \mid \\
+K_1 & \mid \quad u \mid\mid u_t - v_t \mid + K_1 \mid u - v \mid\mid v_t \mid \\
& \leq \quad K_3(\| u \|_{C^2} + \| v \|_{C^2}) \| u - v \|_{C^2}
\end{aligned}
$$

Pour l'estimation des dérivées partielles d'ordre 2, nous effectuons également une seule. Puisque

$$
\frac{\partial^2 Q(x,t,u(x,t))}{\partial x_i \partial x_j} = Q_{x_i x_j}[u] + Q_{x_i y}[u] u_{x_j} + Q_{x_J y}[u] u_{x_i} + Q_{yy}[u] u_{x_i} u_{x_j} + Q_y[u] u_{x_i x_j},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \mid \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}[Q[u](x,t) - Q[v](x,t)] \mid \\
& \leq \quad \mid Q_{x_i x_j}[u] - Q_{x_i x_j}[v] \mid + \mid Q_{x_i y}[v] \mid\mid u_{x_i} - v_{x_i} \mid + \mid Q_{x_j y}[u] - Q_{x_j y}[v] \mid\mid u_{x_j} \mid + \\
& \mid \quad Q_{x_i y}[u] - Q_{x_i y}[v] \mid\mid u_{x_i} \mid + \mid Q_{x_j y}[v] \mid\mid u_{x_j} - v_{xj} \mid + \mid Q_{yy}[u] - Q_{yy}[v] \mid\mid u_{x_i} \mid\mid u_{x_j} \mid + \\
& \mid \quad Q_{yy}[v] \mid\mid u_{x_i} - v_{x_i} \mid\mid u_{xj} \mid + \mid Q_{yy}[v] \mid\mid v_{x_i} \mid\mid u_{x_i} - v_{x_j} \mid \\
+ & \mid \quad Q_y[u] - Q_y[v] \mid\mid u_{x_i x_j} \mid + \mid Q_y[v] \mid\mid u_{x_i x_j} - v_{x_i x_j} \mid \\
& \leq \quad K_0(\mid\mid u \mid + \mid v \mid\mid) \mid u - v \mid + K_1 \mid u - v \mid (\mid u_{x_i} \mid + \mid u_{x_j} \mid) \\
+K_1 & \mid \quad u - v \mid\mid u_{x_i} \mid\mid u_{x_j} \mid + K_1 \mid v \mid (\mid u_{x_i} - v_{x_j} \mid + \mid u_{x_j} - v_{x_j} \mid) \\
+K_2 & \mid \quad u_{x_i} - v_{x_i} \mid\mid u_{x_j} \mid + K_2 \mid v_{x_i} \mid\mid u_{x_j} + v_{x_j} \mid + K_1 \mid u - v \mid\mid u_{x_i x_j} \mid \\
+K_1 & \mid \quad v \mid\mid u_{x_i x_j} - v_{x i x_j} \mid \\
& \leq \quad K_3(\| u \|_{C^2} + \| v \|_{C^2}) \| u - v \|_{C^2}
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé les inégalités (2.8) (2.9) (2.15) et (2.16), ce qui achène à la vérification de (2.17). ∎

Bibliographie

[1] R.A.Adams, The Rllich-Kondrachov theorem for umbonded domains, SpringerLink, volume :29, 1968, pp 390-394, Link.springer.com/article/10.1007/BF00283902.

[2] M.K. Agoston, Algebraic topology, A first course, M. Dekker, New York, 1976.

[3] C.Bardos, Equations aux dérivées partielles non linéaires, Universalis. :http://www.universalis.fr/encyclopedie/derivees-partielles-equations-aux-equations-non-lineaires/.

[4] S.Basterrechea, Application aux équations au dérivées partielles d'une méthode par point fixe et le problème des deux puits, Analyse mathématique et applications, directeur de thèse : B.Dacorogna, Ecole polythechnique fédérale de Lausanne, Suisse, 2015, (191).

[5] H.Berastycki, M.Esteban, Existance and bifurcation of solutions for an elliptic degenerate problem. Journal of differential equation. 134(1997), p.3-25.

[6] L.Boccardo, F.murat, J.P.Puel, Existence results for some quasilinear parabolic equations. Nonlinear Anal. 13(1989), p373-392.

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Dunod, Paris, 2005.

[8] R.Courant, Dirichlet's Principle. Interscience Publishers , Pure and Applied Mathematics, a series of Texts and Monographs, New York .3(1967)

[9] R.Courant , D.Hilbert, Methods of mathematical physics, Intersience, New-York (1943).

[10] J.Cronin, Fixed point and topological degree in nonlinear analysis, American mathematical society, AMS(1964).

[11] A.Djabi, Etude mathématique de systèmes non linéaires aux dérivées partielles modélisant des phénomènes mécaniques, Mathématiques Appliquées, Abderrahmane Mira -Bejaia, Algerie, 2016, webtv.univ-bejaia.dz/wordpress/wp-content/uplods/2016/11/soutnance-doctorat-LMD-en mathématiques-par-M-DJABI-Abdelmoumen-03-novembre-2016-PDF.pdf.

[12] E.Dumas, J.Romain, Notes de cours : Introduction aux EDP d'évolution, Université de Grenoble(36).

[13] L.C.Evans, Parttial Differential Equations, Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[14] M.Frigon, Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations differentielles ordinaires. Instytut Matematyczny Polskiej Academi Nauk(Warszawa), 1990.

[15] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[16] J.Henderson, H.Wang, Positive solutions fon nonlinear eigenvalue problems, J. Math. Anal. Appl. 208(1997), p.252-259.

[17] M.K.Kwong, On Krasnoselskii's cone fixed point theorem, Hindawi publishing corporation, volume (2008),(18), DOI10.1155/2008/164537,(2008).

[18] J.L.W.Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta math., vol.30, 1906, p.175-193.

[19] John F., Partial differential relations, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] O.Kavian, Introduction à la théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques, Springer-Verlag
,https://www.ljll.math.upmc.fr/smets/ULM/Kavian.pdf

[21] P.D.Lax, Hyperbolic systems of conservation laws ll, Comm. Pure App. Math. 10(1957), p.537-566.

[22] P.Lissy, ultlisation de la notion de compacité, May 29, 2010.

[23] R.Ma, Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problems, Electron. Journal of Different. Equat. 34(1999)1–8.

[24] N.Daoudi-Merzagui, Y.Tabet, Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities, Filomat 27:3(2013), 485-497, DOI10.2298/FIL13034855D.

[25] N.Daoudi-Merzagui, M.Hellal, Multiple positive solutions for nonlinear first order periodic impulsive boundary-value systems with sign changing nonliniarities, Lithuanian Mathematical journal (2016), volume 56, Issue1, pp32-48.

[26] N.Point, J.H.Saiac. Equations aux dérivées partielles-mathématiques et méthodes numériques. cours de l'ESCPI.(2005).

[27] A.Porretta, J.Vovelle, L solutions to first order hyperbolic equations in bounded domains. Comm. Partial Diff .Equa 28(2003), p.381-403.

[28] R.Precup, D.O'Regan, Theorems of Leray-Schauder type and application, Gordon and Breach science publishers, October 24, 2002.

[29] R.Precup, Positive solutions of semi-linear elliptic problems via Krasnoselskii type théorèms in cones and Harnack's inequality, Applied Mathematics, Babes-Bolyai, Romania, 2000.

[30] M.Ribot, systèmes d'équations aux dérivées partielles pour la biologie. modèles, analyse numerique et simulation. (2014), https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01095921/document.

[31] M.Rupflin, Fixed Point Methods for Nonlinear PDE, 2017, https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/4738.

[32] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalr̈aumen, Studia Math. 2 (1930), 171–180.

[33] Quelques rappels de topologie sur un espace metrique www.cmap.polytechnique.fr/lefebvre/SEMESTRE.../cours2.pdf.