République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des sciences
Département de mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du
Diplôme de master en mathématiques.
Option : Biomathématiques et Modélisation

Existence de solutions de type ondes progressives pour un modèle structuré en âge et en espace

Présenté Par : BOUZOUINA Chaima

Mémoire soutenu le 01/07/2018 devant le jury composé de :

M. **S.E. MIRI**	MCA UABB Tlemcen	Président
M. **A. MOUSSAOUI**	Professeur UABB Tlemcen	Examinateur
Dr. **I.M. MOSTEFAOUI**	MCB ESG2E Oran	Examinatrice
M. **M.T. TOUAOULA**	Professeur UABB Tlemcen	Encadreur
M. **M.N. FRIOUI**	Doctorant UABB Tlemcen	Invité

Année universitaire 2017-2018

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien, leur encouragement et leur confiance en moi. Comme j'apprécie pleinement les professeurs Mokrane et Saad Allah de l'Ecole Normale Supérieure Kouba pour m'avoir orienté vers la renommée université de Tlemcen.

Par la même occasion, je remercie mon encadreur le professeur Touaoula, pour ses précieux conseils et son soutien durant toute la période du travail sans lesquels le mémoire n'aurait pas pu se terminer.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, Je tiens également à remercier Mr. Frioui ainsi que toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Abstract :

This work is devoted to the study of the existence of travelling wave solutions for a simple epidemic model (SI). This model consists of a single scalar equation with age-dependence and spatial structure. It also assures some qualitative properties of travelling waves : exponential decay and monotonicity with respect to the direction of the front's propagation. We will use the comparison principle extensively

- to construct suitable sub and super solutions
- to use the classical sliding method to obtain the qualitative properties of the wave front.

Key-words

Travelling wave solutions, sub and super solutions, sliding method of Berestycki, monotonicity of the travelling waves, KPP equation, age and space structured equation.

Résumé :

Ce travail concerne l'étude d'existence des solutions de type ondes progressives pour un modèle épidémique simple (SI). Ce modèle est composé d'une équation scalaire dépendante de l'âge et avec une structure spatiale. On a aussi des propriétés qualitatives des ondes progressives : la décroissance exponentielle et la monotonie par rapport à la direction de la propagation de l'onde progressive de type "front". On utilisera souvent le principe de comparaison :

- pour la construction des sous et sur solutions convenables.
- pour obtenir les propriétés qualitative de l'onde progressive en utilisant la méthode de glissement.

Mots-clés

Solutions de type ondes progressives, sous et sur solutions, méthode de glissement de Berestycki, monotonie des ondes progressives, équation KPP, équation structurée en âge et en espace.

Table des matières

Introduction et présentation du modèle

L'étude de la propagation des ondes connaît un développement rapide compte tenu du nombre d'articles publiés sur ce sujet (Plus que 20 articles publiés entre Janvier et Mai 2018) et sa pleine soumission aux modèles mathématiques. Ce mémoire s'intéresse à l'étude d'un modèle SI (Susceptible Infecté) structuré en âge et en espace. Ce travail est largement inspiré de l'article [7].
La variable d'âge désigne l'âge chronologique d'un individu. Notre objectif est d'étudier le système classique du point de vue de propagation des épidémies.
On note par $p(t,a,x)$ la distribution de la population exposée à une épidémie où $a \in (0, a_M)$ est l'âge physiologique et $a_M \in (0,+\infty)$ est l'âge maximal d'un individu. $t \geq 0$ désigne le temps et $x \in \mathbb{R}$ est la position d'un individu. Cette population peut être divisée en deux sous-populations : les susceptibles et les infectés.
Soient $S(t,a,x)$ la distribution d'âge des susceptibles et $I(t,a,x)$ la distribution d'âge des infectés.
Avec ces notations, le modèle considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} + \dfrac{\partial I}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} + SI - \mu(a) I \\ I(t,0,x) = \int_0^{a_M} \beta(a) I(t,a,x) da \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{\partial S}{\partial a} = d\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} - SI - \mu(a) S \\ S(t,0,x) = \int_0^{a_M} \beta(a) S(t,a,x) da \end{cases} \tag{1}$$

μ : taux de mortalité
β : taux de croissance
Ces taux sont supposés les mêmes pour les deux classes d'individus (infectés et susceptibles). La maladie n'est donc pas mortelle.
On considère uniquement une transmission verticale, cela signifie que la reproduction des deux sous-populations est dans leur classes-mêmes. La maladie est héréditaire.
Dans ce travail, on considère que la maladie n'affecte pas la diffusion de la population c'est à dire le coefficient $d = 1$.
Cette supposition nous permet en sommant de réduire le système à une seule équation.
Pour empêcher la population de l'extinction ou de l'explosion au cours du temps, on considère que la population totale $P = I + S$ a un taux de croissance unitaire : plus précisément, on suppose que la naissance et la mortalité gardent l'équilibre de la population.
Au cours du temps, la population totale tend vers un état stationnaire. Mathématiquement parlant, cette condition peut se traduire ainsi :

$$R_0 = \int_0^{a_M} \beta(a) \exp(-\int_0^a \mu(t) dt) da = 1$$

R_0 représente le taux de reproduction de la population totale. Cette condition nous assure l'existence de plusieurs états stationnaires (voir [11]) et nous permet de chercher des solutions hétéroclines qui relient deux états stationnaires différents.
On cherche plus exactement des solutions du système avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{array}{cc} I(t,a,-\infty) = \exp(-\int_0^a \mu(s) ds), & I(t,a,+\infty) = 0 \\ S(t,a,-\infty) = 0, & S(t,a,+\infty) = \exp(-\int_0^a \mu(s) ds) \end{array} \tag{2}$$

Ces conditions peuvent être interprétées comme suit :
Quand $x = +\infty$ la population est composée des susceptibles uniquement.
Quand $x = -\infty$ la population est totalement infectée.

Puisque $d = 1$ en sommant les deux équations du système (1) on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \mu(a)P \\ P(t,0,x) = \int_0^{a_M} \beta(a)P(t,a,x)da \end{cases}$$

Sa solution indépendamment de x est donnée ainsi :

$$P_\infty(t,a) = \exp(-\int_0^a \mu(s)ds)$$

On définit la fonction π ainsi :

$$\pi(a) = \exp(-\int_0^a \mu(s)ds) \tag{3}$$

Avec $a \in (0, a_M)$ Cette fonction représente le taux de survie des individus à l'âge a.
et puisque la taille de la population totale ne dépend pas de x on aura ainsi :

$$S(t,a,x) = \pi(a) - I(t,a,x) \tag{4}$$

Par conséquent, le système (1) se réduit à une seule équation scalaire de I et on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} + \dfrac{\partial I}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} + (\pi(a) - I)I - \mu(a)I \\ I(t,a,-\infty) = \exp(-\int_0^a \mu(s)ds), \quad I(t,a,+\infty) = 0 \\ I(t,0,x) = \int_0^{a_M} \beta(a)I(t,a,x)da \end{cases} \tag{5}$$

Avec π définie comme (3).
On effectue le changement de variable suivant :

$$u(t,a,x) = \frac{I(t,a,x)}{\pi(a)} \tag{6}$$

En dérivant ce u par rapport à t et a on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\pi(a)}\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial a} &= \frac{1}{\pi(a)^2}[\frac{\partial I}{\partial a}\pi(a) - I\pi'(a)] \end{aligned}$$

Avec

$$\pi'(a) = -\int_0^a \mu'(s)ds \exp(-\int_0^a \mu(s)ds) = -\mu(a)\pi(a)$$

Donc on a

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{\pi(a)}[\frac{\partial I}{\partial a} + \mu(a)I]$$

En sommant les deux dérivées partielles de u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} &= \frac{1}{\pi(a)}[\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a} + \mu(a)I] \\ &= \frac{1}{\pi(a)}[\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + (\pi(a) - I)I] \\ &= \frac{1}{\pi(a)}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{I}{\pi(a)}(\pi(a) - I) \end{aligned}$$

En réécrivant le système (5) pour u on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi(a)u(1-u) \\ u(t,a,-\infty) = 1, \quad u(t,a,+\infty) = 0 \\ u(t,0,x) = \int_0^{a_M} \beta(a)\pi(a)u(t,a,x)da \end{cases} \tag{7}$$

On définit la fonction γ_u ainsi

$$\gamma_u(a) = \beta(a)\pi(a)$$

La fonction γ_u est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et elle vérifie cette condition

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$$

On remarque que γ_u est une mesure de probabilité.
On suppose aussi que :
La fonction π est continue, positive sur $\mathbb{R}^+$ et bornée.
La fonction $\gamma_u \pi$ n'est pas identiquement nulle sur l'intervalle $(0, a_M)$.
On considère le système (7) et on cherche des solutions de type ondes progressives. Ces solutions sont de la forme :

$$u(t,a,x) = \tilde{u}(a, x-ct) \tag{8}$$

Avec c un nombre réel quelconque, $\tilde{u}$ une fonction quelconque. Par la suite, on enlève le tilde pour simplifier l'écriture.
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u(1-u) \\ u(a,-\infty) = 1, \quad u(a,+\infty) = 0 \\ u(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u(a,x)da \end{cases} \tag{9}$$

En ignorant les fonctions démographiques, l'équation précédente se réduit à un modèle de type KPP (Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov). On considère ici une généralisation du modèle de type KPP avec des fonctions démographiques. L'objectif principal est de prouver l'existence de la solution pour l'équation précédente en prouvant ces deux théorèmes

Théorème 1 *Soient*

- γ_u *continue, positive sur* $\mathbb{R}^+$*et* $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$.
- π *continue positive et bornée sur* $\mathbb{R}^+$.
- $\gamma_u \pi$ *une fonction non-identiquement nulle sur* $(0, a_M)$.

Alors il existe $c^* > 0$ *tel que pour tout* $c > c^*$ *le système* (9) *a une solution positive.*

Ce théorème assure l'existence de la solution pour le système (5). Cette solution est positive seulement. Pour prouver qu'elle est de type onde progressive on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 2 *Soient*

- $\mu : [0, a_M] \to \mathbb{R}^+$ *continue vérifiant :* $\int_0^{a_M} \mu(a)da = +\infty$

- $\beta : [0, a_M] \to \mathbb{R}^+$ *continue vérifiant :* $\int_0^{a_M} \beta(a)\pi(a)da = 1.$

Alors il existe $c^* > 0$ *tel que pour toute vitesse* $c > c^*$ *le système* (5) *a une solution de type onde progressive.*
De plus, cette onde progressive s'annule à l'âge $a = a_M$.

La preuve de ces résultats revient à l'application du principe de comparaison pour construire des sous/sur solutions convenables (chapitre 2). Pour cette construction on suit la méthode développée par Berestycki et al. dans [2].
Dans le chapitre 3, on utilisera ces sous/sur solutions pour prouver le résultat d'existence d'une solution pour le problème. La preuve se compose essentiellement de deux étapes.

— La première consiste à considérer un problème similaire sur un intervalle borné dans l'espace. La bornitude nous permet d'utiliser un argument de point fixe dû à la compacité de quelques opérateurs.
— La deuxième est une procédure de limite. On fait tendre la longueur de l'intervalle borné à l'infini pour obtenir une solution du système (9) sur tout l'axe réel. Les sous/sur solutions nous permettent d'éviter une dégénérescence dans la procédure de limite.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la monotonie des solutions d'une classe de problèmes particulière (le problème précédent en remplaçant u(1-u) par f avec des conditions supplémentaires). Ces résultats seront obtenus en utilisant une méthode de glissement.
Cette méthode a été introduite par Berestycki et Nirenberg dans [3] et a été utilisée par plusieurs auteurs pour prouver la monotonie des solutions de type ondes progressives et l'unicité de la solution pour quelques équations particulières.
Elle -la méthode- est utilisée plus précisément par Berestycki et Hamel dans [2] ou par Coville dans [6].

Chapitre 1

Outils mathématiques

1.1 Définitions

Définition 1 *(Front de propagation)*
Les ondes progressives sont des solutions particulières invariantes par translation en espace. Une telle solution s'écrit sous la forme suivante : $u(t,x) = v(x-ct)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $t > 0$*. avec* $c \in \mathbb{R}$ *une constante qui représente la vitesse de l'onde. Si de plus pour* $z = x - ct$
$\lim_{z \to \mp\infty} v(z) = v^{\mp}$ *telle que* $v+ \neq v-$*. Alors l'onde est dite de type front.*

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u), & \textit{dans} \quad (0,T] \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & \textit{dans} \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Pour assurer l'unicité on suppose que pour $c_0 > 0$ et $b < \dfrac{1}{4T}$ u satisfait la condition suivante

$$|u(t,x)| \leq c_0 \, \mathrm{e}^{b|x|^2} \qquad \textit{quand} \qquad |x| \to +\infty \tag{1.2}$$

Définition 2 *(Sous/sur solution)*
Soit u *solution du problème parabolique* (1.1)*. Une fonction* $u_- \in C^2((0,T] \times \mathbb{R})$ *est* ***sous-solution*** *si*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_-}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \leq F(u_-), & \textit{dans} \quad (0,T] \times \mathbb{R} \\ u_-(0,x) \leq u_0(x), & \textit{dans} \quad \mathbb{R} \\ |u_-(t,x)| \leq c_0 \, \mathrm{e}^{b|x|^2} & \textit{quand} \quad |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Une fonction $u_+ \in C^2((0,T] \times \mathbb{R})$ *est* ***sur-solution*** *si*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_+}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} \geq F(u_+), & \textit{dans} \quad (0,T] \times \mathbb{R} \\ u_+(0,x) \geq u_0(x), & \textit{dans} \quad \mathbb{R} \\ |u_+(t,x)| \leq c_0 \, \mathrm{e}^{b|x|^2} & \textit{quand} \quad |x| \to +\infty \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 3 *(Ensemble convexe)[9]*
Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel E.
X est dit convexe ssi pour tout $x, y \in X$ et pour tout $\alpha \in [0,1]$ on a $(1-\alpha)x + \alpha y \in X$.

Définition 4 *(Application compacte)[9]*

- *Soient E et F deux espaces de Banach.*

- *Soit $K : E \to F$ une application linéaire continue.*

*K est dite compacte si $K(\overline{B_E})$ l'image de la boule d'unité fermée $\overline{B_E}$ par K est **relativement compacte** (en norme) dans F.*

1.2 Théorèmes

Théorème 3 *(Régularité Holderienne)[12]*
Soient $T > 0$ *et* $\alpha \in (0,1)$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert.*
On suppose que $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0,T])$
$u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *et sur* Γ *on a :* $u_0 = 0$ *et* $-\triangle u_0 = f(x,0)$
Alors la solution de ce problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad sur \ (0,T) \times \Omega \\ u = 0 \quad sur \ (0,T) \times \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \quad sur \ \Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

vérifie

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C^{\alpha,\alpha/2}([0,T] \times \overline{\Omega})$$

.

Théorème 4 *(Théorème de point fixe de Schauder)[4]*

- *Soit* E *un espace de Banach*
- *Soit* H *un convexe fermé de* E

Alors toute application continue et compacte $T : H \to H$ *admet un point fixe.*

Théorème 5 *(Théorème d'Ascoli)*

- *Soit* K *un espace métrique compact.*
- *Soit* H *un sous-ensemble borné de* $C(K)$*.*

On suppose que H *est uniformément équi-continu i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \qquad tel\ que \quad d(x_1,x_2) < \delta \therefore |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in H \tag{1.6}$$

Alors H *est relativement compact dans* $C(K)$

Théorème 6 *(Principe de comparaison parabolique)*

- *Soient* $T > 0$, f *et* $\dfrac{\partial f}{\partial u} \in C([0,T] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R})$
- *Soient* $u, v \in C_1^2((0,T) \times \Omega) \cap C([0,T] \times \overline{\Omega})$ *t.q.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(t,x,u) \geq 0 \geq \dfrac{\partial v}{\partial t} - \triangle v - f(t,x,v) \quad sur \ (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) \geq v(0,x) \qquad sur \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega} \ \ ou \ \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \geq \dfrac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors $u \geq v$ *dans* $[0,T] \times \overline{\Omega}$

Chapitre 2

Construction des sous et sur solutions

Dans ce chapitre, on va construire des sous/sur solutions strictes pour le problème (9) qui sont indispensables pour obtenir l'existence de la solution.
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u(1-u) \\ u(a,-\infty) = 1, \quad u(a,+\infty) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que $0 \leq u_0 \leq 1$.
Soit (u, c) une solution classique du problème (2.1) d'après le principe de comparaison parabolique u vérifie cette condition

$$0 \leq u \leq 1 \tag{2.2}$$

Mais on remarque que 0 et 1 sont des solutions du problème précédent.

2.1 Construction d'une sur-solution stricte

Pour u solution on a

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u - \pi(a)u^2$$

mais $\pi(a)u^2 > 0$ alors u vérifie l'inégalité :

$$\frac{\partial u}{\partial a} \leq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u$$

et

$$u(a,-\infty) = 1, \quad u(a,+\infty) = 0$$

On construit une sur-solution stricte de la forme suivante

$$\overline{u}(a,x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a) \tag{2.3}$$

avec $\lambda > 0$ et $\phi(a) \geq 0$.
Pour que cette fonction $\overline{u}$ soit une sur-solution elle doit vérifier

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \pi(a)\overline{u} \\ \overline{u}(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\overline{u}(a,x)da \end{cases} \tag{2.4}$$

Calculons $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial a}$, $\dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}$, $c\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial a} = \frac{\partial[\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a)]}{\partial a} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi'(a).$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a)] = \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a).$$
$$c\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = c\frac{\partial[\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a)]}{\partial x} = -c\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a).$$

En remplaçant dans l'équation (2.4), on obtient

$$\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi'(a) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a)[\lambda^2 - c\lambda + \pi(a)].$$

D'où on obtient l'équation suivante :

$$\phi'(a) - \phi(a)[\lambda^2 - c\lambda + \pi(a)] = 0.$$

Sa solution est de la forme :

$$\phi(a) = \exp\int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s))ds \tag{2.5}$$

En remplaçant ϕ dans $\overline{u}$ on obtient :

$$\overline{u}(0,x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\exp(\int_0^a \lambda^2 - c\lambda + \pi(s)ds)da$$

On aura donc une équation du paramètre λ comme suit :

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)\exp(\int_0^a \lambda^2 - c\lambda + \pi(s)ds)da = 1 \tag{2.6}$$

Cette équation est étudiée dans le lemme suivant :

Lemme 1 *Il existe $c^* > 0$ telle que l'équation (2.6) :*
- *n'admet pas de solution positive pour $c < c^*$*
- *admet une seule solution pour $c = c^*$ telle que $\lambda = \frac{c^*}{2}$*
- *admet exactement deux solutions λ_1 et λ_2 pour $c > c^*$ tel que*

$$0 < \lambda_1 < \frac{c}{2} < \lambda_2.$$

On constate dans la preuve du lemme que cette valeur critique c^* est implicitement donnée par l'équation suivante

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)\exp(-\frac{c^{*2}a}{4} + \int_0^a \pi(s)ds)da = 1. \tag{2.7}$$

Ce qui donne uniquement la valeur de $c^* > 0$.
Preuve. On définit la fonction F

$$F(\lambda, c) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\exp\int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s))dsda$$

Cette fonction est définie pour $(\lambda, c) \in \mathbb{R}^2$ et elle est de classe C^1.
La dérivée de cette fonction par rapport à λ est donnée ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, c) = (2\lambda - c)\int_0^{a_M} a\gamma_u(a)\exp\int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s))dsda$$

Puisque $\gamma_u(a) > 0$ pour $a > 0$ on a donc

$$\int_0^{a_M} a\gamma_u(a) \exp \int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s)) ds da > 0$$

Le signe de la dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}$ dépend du signe de $(2\lambda - c)$

Pour $c > 0$ la fonction $\lambda \to F(\lambda, c)$ est décroissante sur l'intervalle $(0, \frac{c}{2})$ et croissante sur $(\frac{c}{2}, +\infty)$.

Et puisque $\int_0^a \pi(s)ds > 0$ alors $\exp \int_0^a \pi(s)ds > \exp(0) = 1$ on a ainsi

$$F(0, c) = \textstyle\int_0^{a_M} \gamma_u(a) \exp \int_0^a \pi(s) ds da > \int_0^{a_M} \gamma_u(a) da = 1$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda, c) = +\infty$$

Par conséquent, la solution de l'équation $F(\lambda, c) = 1$ dépend de la position du $\min_{\lambda \in \mathbb{R}^+} F(\lambda, c) = F(\frac{c}{2}, c)$ par rapport à 1.

Posons

$$G(c) = F(\frac{c}{2}, c) = \int_0^{a_M} a\gamma_u(a) \exp(-\frac{c^2 a}{4} + \int_0^a \pi(a')da')da$$

En calculant la dérivée de cette fonction par rapport à c

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial c} &= \int_0^{a_M} -\frac{ca}{2}\gamma_u(a) \exp(-\frac{c^2 a}{4} + \int_0^a \pi(a')da')da \\ &= -\frac{c}{2} \int_0^{a_M} a\gamma_u(a) \exp(-\frac{c^2 a}{4} + \int_0^a \pi(a')da')da < 0\end{aligned}$$

Alors G est continue et décroissante par rapport à c et pour

$$G(0) = F(0, 0) = \textstyle\int_0^{a_M} \gamma_u(a) \exp(\int_0^a \pi(s)ds)da > 1$$

$$\lim_{c \to +\infty} G(c) = \lim_{c \to +\infty} F(\frac{c}{2}, c) = 0$$

On obtient par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un certain $c^* \in (0, +\infty)$ tel que $G(c^*) = 1$. Revenons à l'équation (2.6) et puisque $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$.

On a

$$\triangle = c^2 - 4\pi(a)$$

Si $\triangle > 0$ alors on a deux solutions différentes

$$\lambda_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\pi(a)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\pi(a)}}{2}$$

Si $\triangle = 0$ alors on a une seule solution $\lambda = \frac{c}{2}$.

Si $\triangle < 0$ alors il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Cela achève la preuve du lemme.

On considère le cas $c > c^*$. On obtient une sur solution qui assure le comportement exponentiel de la solution de (9) au voisinage de $+\infty$.

On suppose que $c > c^*$ est fixé, soit $\lambda > 0$ la plus petite solution de (2.6) ($\lambda < \frac{c}{2}$).

$$\overline{u}(a, x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \exp \int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s))ds.$$

Supposons que u_0 la donnée initiale du problème (2.1) vérifie l'inégalité suivante

$$u_0(x) \leq \overline{u}(0, x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'après le principe de comparaison, on obtient que la solution u vérifie

$$0 \leq u \leq \min(1, \overline{u}).$$

2.2 Construction des sous-solutions strictes

Maintenant, on construit une sous-solution stricte pour u. On remarque qu'on a

$$1 - u \geq \max(0, 1 - \overline{u}) \geq \max(0, 1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x})$$

Pour une constante $\alpha > 0$ et suffisamment grande.

$$1 - \overline{u} \geq 1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Alors $\alpha \geq \phi(a) = \mathrm{e}^{\int_0^a \lambda^2 - c\lambda + \pi(s)ds}$ pour tout $a \in (0, a_M)$

$$\alpha \geq \mathrm{e}^{a_M} > 1$$

On cherche une sous solution stricte $\underline{u}$ qui vérifie cette inéquation

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial a} \leq \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + c\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \pi(a)\underline{u}(1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x})^+$$

$\underline{u}$ est de la forme suivante

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (\mathrm{e}^{-\lambda x} - k\, \mathrm{e}^{-(\lambda+\eta)x})\phi(a) \\ &= (1 - k\, \mathrm{e}^{-\eta x})\overline{u} \end{aligned}$$

Et ϕ définie comme dans (2.5). Cherchons l'intervalle dans lequel $1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est strictement positive (puisque $(1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x})^+ = 0$ quand $\alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x} > 1$).

$$\begin{aligned} 1 - \alpha\, \mathrm{e}^{-\lambda x} &> 0 \\ x &> \frac{1}{\lambda}\log(\alpha) = x_M \end{aligned}$$

Alors pour $a \in (0, a_M)$ et $x > x_M = \frac{1}{\lambda}\log(\alpha)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial a} &= (1 - k\, \mathrm{e}^{-\eta x})\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \phi'(a) \\ c\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} &= (k(\lambda + \eta)\, \mathrm{e}^{-\eta x} - \lambda)c\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \phi(a) \\ \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} &= (\lambda^2 - k(\lambda + \eta)^2\, \mathrm{e}^{-\eta x})\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \phi(a) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.2) on obtient

$$(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x})\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi'(a) \leq \lambda^2-c\lambda+k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2+c(\lambda+\eta)]+\pi(a)(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x})(1-\alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda x})\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\phi(a)$$

Comme on a

$$\phi'(a) = \pi(a)\phi(a)$$

Alors on obtient

$$(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x})\pi(a) \leq \lambda^2-c\lambda+k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2+c(\lambda+\eta)]+\pi(a)(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x})-\alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x})$$

En simplifiant on aura

$$\alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-k\,\mathrm{e}^{-\eta x}) \leq \lambda^2 - c\lambda - k(\lambda+\eta)^2\,\mathrm{e}^{-\eta x} + kc(\lambda+\eta)\,\mathrm{e}^{-\eta x}$$

Pour $x > \dfrac{1}{\eta}\log(k)$ on a $k\,\mathrm{e}^{-\eta x} \leq 1$ et on rappelle que $\lambda^2 - c\lambda = -\pi(a) < 0$ (λ est la plus petite solution de (2.6) $\lambda < \dfrac{c}{2}$) Donc

$$\lambda^2 - c\lambda + k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)] \leq k\,\mathrm{e}^{-\eta x}(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta))$$

En multipliant par $-e^{\eta x}$ on obtient

$$-k(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta) \leq \alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(k - \mathrm{e}^{\eta x})$$

Si on pose

$$p(\eta) = \lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta).$$

On obtient $p(0) = 0$ et $p'(0) > 0$ (car $p'(\eta) = -2(\lambda+\eta) + c$ et $\lambda < \dfrac{c}{2}$)
Alors on a $p(\eta) > 0$ pour tout $0 < \eta < c - 2\lambda^*$ avec $\lambda^* = \sqrt{c^2 - 4\pi(a)}$
En remplaçant dans (2.2) on a

$$-kp(\eta) + \alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{(-\lambda+\eta)x} \leq g(x).$$

Avec $g(x) = k\alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$ on a $g'(x) = -\lambda k\alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} < 0$ et on a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
Alors pour $k >> 1$ et $0 < \eta < c - 2\lambda^*$ on doit avoir pour tout $x > x_M$

$$-kp(\eta) + \alpha\pi(a)\,\mathrm{e}^{(-\lambda+\eta)x} < 0$$

Donc, avec un choix pareil des constantes η et k on a (2.2) est vérifiée quand $x > x_M$.
On considère maintenant le cas $x < x_M$.
Dans ce cas, et puisque $(1 - \alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda x})^+ = 0$ on a $\underline{u}$ vérifie cette inégalité

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial a} \leq \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + c\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}$$

En remplaçant $\underline{u}$ par son équivalent on obtient

$$\phi'(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1 - k\,\mathrm{e}^{-\eta x}) \leq \phi(a)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda^2 - c\lambda + k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)].$$

$$\pi(a)(1 - k\,\mathrm{e}^{-\eta x}) \leq \lambda^2 - c\lambda + k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)]$$

Comme on a $x < x_M$ donc $1 < k\,\mathrm{e}^{-\eta x}$ et $\lambda^2 - c\lambda < 0$ on obtient

$$k\,\mathrm{e}^{-\eta x}(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)) \leq \lambda^2 - c\lambda + k\,\mathrm{e}^{-\eta x}[-(\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)]$$

Et on a $k\,\mathrm{e}^{-\eta x}(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta)) > 0$ alors on a

$$\pi(a)(1 - k\,\mathrm{e}^{-\eta x}) \leq 0 \leq k\,\mathrm{e}^{-\eta x}(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta))$$

Pour $k >> 1$ et pour que cette inégalité soit vraie il suffit d'avoir

$$\pi(a)\,\mathrm{e}^{\eta x} - k\pi(a) \leq \pi(a)\,\mathrm{e}^{\eta x} \leq k(\lambda^2 - c\lambda - (\lambda+\eta)^2 + c(\lambda+\eta))$$

On a $h(x) = \mathrm{e}^{\eta x}$ une fonction croissante sur $(-\infty, x_M]$ alors

$$\sup_{x \leq x_M} h(x) = \lim_{x \to x_M} h(x) = \mathrm{e}^{\eta x_M}$$

il suffit d'avoir l'inégalité pour le $\sup_{a,x}(\pi(a)\,\mathrm{e}^{\eta x})$.
π est continue sur $[0, a_M]$ fermé borné alors π est bornée et atteint ses bornes i.e

$$||\pi||_\infty < \infty$$

.
D'où cette condition suffisante

$$||\pi||_\infty\,\mathrm{e}^{\eta x_M} \leq kp(\eta) \tag{2.8}$$

Elle est vérifiée pour $k \geq \dfrac{||\pi||_\infty\,\mathrm{e}^{\eta x_M}}{p(\eta)}$ puisque $p(\eta) > 0$.
On suppose que la donnée initiale u_0 pour (2.1) vérifie l'inégalité $u_0(x) \geq \underline{u}(0,x)$, d'après le principe de comparaison on obtient $u \geq \underline{u}$ mais on a aussi $0 \leq u \leq 1$ d'où on aura

$$u \geq \max(0, \underline{u})$$

.
Soit $Y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in (0,1)$ tel que

$$\underline{u}(a,Y) > \epsilon > 0 \tag{2.9}$$

pour tout $a \in [0, a_M]$. On suppose que la donnée initiale vérifie cette condition $u_0(x) \geq \epsilon$ (pour éviter le 0)pour tout $x \leq Y$.
D'après le principe de comparaison on obtient $u(a,x) \geq \epsilon$ pour tout $a \in (0, a_M)$ et $x \leq Y$.
Puisque $u(a, -\infty) = 1$ et $\epsilon < 1$, il existe un $Z < Y$ tel que pour tout $x \leq Z$ et tout $a \in (0, a_M)$ on a $u(a,x) \geq \epsilon$.
En plus, si on définit la fonction v sur $[0, a_M] \times [Z, Y]$ par $v \equiv \epsilon$ on a d'un côté

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Et d'un autre

$$\frac{\partial u}{\partial a} - \triangle u - c\frac{\partial u}{\partial x} - \pi(a)u(1-u) = 0$$

On obtient l'inéquation différentielle suivante sur $(0, a_M) \times (Z, Y)$

$$\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c\frac{\partial v}{\partial x} - \pi(a)v(1-v) \leq 0 \leq \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial x} - \pi(a)u(1-u)$$

Pour tout $x \in [Z, Y]$ on a $u_0(x) \geq \epsilon$ et pour tout $a \in (0, a_M)$ on a

$$u(a, Z) \geq \epsilon, \qquad u(a,Y) \geq \underline{u}(a,Y) \geq \epsilon \tag{2.10}$$

D'après le principe de comparaison on a pour tout $a \in (0, a_M)$ et tout $Z \leq x \leq Y$ on a

$$u(a,x) \geq \epsilon$$

.
Finalement, suite à la définition de Z (on fait tendre Z à $-\infty$) on conclut que pour tout $a \in (0, a_M)$ et tout $x \leq Y$ on a $u(a,x) \geq \epsilon$. (Bornitude inférieure de la solution u)
Il existe une sous-solution ϵ pour u sur l'intervalle $(-\infty, Y)$ où la fonction u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial a} \geq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)\epsilon(1-u)$$

Soit u_1 la sous-solution qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial a} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c\frac{\partial u_1}{\partial x} + \pi(a)\epsilon(1-u_1) \\ u_1(a,-\infty) = 1 \\ u_1(a,Y) < 0 \\ u_1(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a) u_1(a,x)da \end{cases} \tag{2.11}$$

On cherche une sous solution de la forme

$$u_1(a,x) = 1 - k\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(a) \tag{2.12}$$

Avec $\xi > 0$ et $\varphi > 0$.
Calculons $\frac{\partial u_1}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$ et $c\frac{\partial u_1}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial a} &= -k\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi'(a) \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -k\xi^2\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(a) \\ c\frac{\partial u_1}{\partial x} &= -kc\xi\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(a) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.11) on obtient

$$\varphi'(a) = (\xi^2 + c\xi - \epsilon\pi(a))\varphi(a)$$

En intégrant cette équation sur $(0,a)$ on obtient

$$\varphi(a) = \exp\int_0^a (\xi^2 + c\xi - \epsilon\pi(s))ds \tag{2.13}$$

Avec $\varphi(0) = 1$, calculons $u_1(0,x)$

$$\begin{aligned} u_1(0,x) &= 1 - k\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(0) \\ &= 1 - k\,\mathrm{e}^{\xi x} \\ &= \int_0^{a_M} \gamma_u(a)[1 - k\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(a)]da \end{aligned}$$

De ces deux dernières lignes on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{a_M} \gamma_u(a)[1 - k\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\varphi(a)]da + k\,\mathrm{e}^{\xi x} \\ &= \int_0^{a_M} \gamma_u(a)da + k\,\mathrm{e}^{\xi x}(1 - \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\varphi(a)da) \end{aligned}$$

Rappelons que $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$ et que $k\,\mathrm{e}^{\xi x} \neq 0$ et en remplaçant φ par son équivalent on aura

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)\exp(\int_0^a (\xi^2 + c\xi - \epsilon\pi(s))ds)da = 1 \tag{2.14}$$

Comme $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$ on a $\triangle = c^2 + 4\epsilon\pi(s) > 0$
Alors il existe $\xi^* = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 + 4\epsilon\pi(s)}}{2} > 0$ unique (l'autre est négative) vérifiant (2.14)
Il reste à choisir k suffisamment grand pour que $u_1(a, Y) < 0$ quelque soit a.

$$u_1(a, Y) = 1 - k \exp(\xi Y + \int_0^a (\xi^2 + c\xi - \epsilon\pi(s))ds) < 0$$

On a $\xi = \xi^*$ alors $k > \mathrm{e}^{-\xi^* Y}$ puisque $\xi^{*2} + c\xi^* - \epsilon\pi(s) = 0$
Si on suppose maintenant que la donnée initiale du problème (2.1) vérifie

$$u_0(x) \geq u_1(0, x)$$

pour tout $x \leq Y$.
On obtient par le principe de comparaison que u satisfait la condition suivante :

$$u(a, x) \geq u_1(a, x)$$

pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in (-\infty, Y]$
D'où on obtient pour $k \geq \max(\mathrm{e}^{-\xi^* Y}, \mathrm{e}^{a_M}, \dfrac{||\pi||_\infty \, \mathrm{e}^{\eta x_M} \, p(\eta)}{)}$

$$\max(\underline{u}(a, x), \epsilon 1_{x \leq Y}, u_1(a, x)) \leq u(a, x) \leq \min(1, \overline{u}(a, x)).$$

Cette estimation sera utilisée pour prouver l'existence de la solution de type onde progressive.

Chapitre 3

Existence de la solution

L'objectif de ce chapitre est de prouver le Théorème.1 (voir "introduction et présentation du modèle"). Cette preuve est répartie en deux étapes :

— Dans la première, on considère un problème similaire sur un intervalle borné.

— La deuxième sera un passage à la limite en faisant tendre la longueur de l'intervalle vers l'infini.

3.1 Le problème sur un domaine borné

Pour $c > c^*$, on note par f la fonction définie par

$$f(a, x) = \max(\underline{u}(a, x), \epsilon 1_{x \leq Y}, u_1(a, x))$$

Les fonctions $\underline{u}, u_1$ et les constantes ϵ, Y sont définies précédemment.
Soit $X > 0$ donné. On considère le problème suivant pour $x \in (-X, X)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u(1-u) \\ u(a, \pm X) = f(a, \pm X) \\ u(0, x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u(a, x)da \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce problème est parabolique avec une donnée initiale non-locale. On note par E_X le sous-ensemble fermé et convexe défini ainsi

$$E_X = \{v \in C^0([-X, X]) : \quad f(0, x) \leq v(x) \leq 1\}$$

On prouve le résultat suivant

Proposition 1 • *Soit γ_u une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da =$* 1

- *Soit π une fonction continue, positive et bornée sur $\mathbb{R}^+$.*
- *$\gamma_u \pi$ n'est pas identiquement nulle sur $(0, a_M)$.*

Pour tout $c > c^*$ et pour tout $X > Y$ le problème (2.4) admet une seule solution classique $u \in E_X$.

La preuve de ce résultat exige un argument de point fixe.
Cela dépend essentiellement de la bornitude de l'intervalle $[-X, X]$ qui assure la compacité de l'injection $H^1(-X, X) \hookrightarrow C^0([-X, X])$
Preuve : Soit $c > c^*$ donné.
On considère le problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial U}{\partial x} + \pi(a)U(1-U) \\ U(a, \pm X) = f(a, \pm X) \\ U(0, x) = v(x) \in E_X \end{cases} \tag{3.2}$$

L'équation admet une solution globale unique notée ainsi $S_a v$ régulière c-à-d

$$S_a v \in C^0([0, a_M), C^0([-X, X]) \cap L^2(0, a_M, H^1(-X, X)).$$

Soit $v \in E_X$.
Puisque la fonction constante 1 est une sur solution et pour tout a, on a

$$U(a, \pm X) = f(a, \pm X) \leq 1$$

on obtient

$$S_a v \leq 1$$

.
De cette condition, on obtient que la fonction $\underline{u}$ est une sous solution. Puisque $v \geq \underline{u}(0, .)$ et $f(a, \pm X) \geq \underline{u}(a, \pm X)$ on a $S_a v \geq \underline{u}$.
Par conséquent, on a $S_a v(Y) > \epsilon$. Mais ϵ est une sous solution et $v \geq \epsilon$ dans $(-X, Y)$ et les fonctions $f(a, \pm X) > \epsilon$. On obtient que $S_a v \geq \epsilon$ sur $(-X, Y)$.
Finalement, cette dernière inégalité implique que u_1 est une sous solution sur $(-X, Y)$.
On a $v \geq u_1(0, .)$ sur $(-X, Y)$ et $f(a, \pm X) \geq u_1(a, \pm X)$ On aura $S_a v \geq u_1$
Alors on a $S_a v \geq f$
On définit l'opérateur

$$\Phi : E_X \to C^0([-X, X])$$
$$v \to \Phi(v) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a) S_a v da$$

On rappelle que γ_u est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$
L'opérateur Φ est une application de E_X vers E_X car $\Phi(v)(x) \in C^0([-X, X])$ et on a
Pour $v \in E_X$ on a $v \leq 1$ alors $S_a v \leq 1$ en multipliant par $\gamma_u(a)$ et en intégrant sur l'intervalle $(0, a_M)$ on obtient

$$\Phi(v)(x) \leq 1$$

On a aussi $v \geq f(0, x)$ alors $S_a v \geq f(a, x)$:

$$S_a v \geq \underline{u} \to \Phi(v)(x) \geq \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\underline{u}(a, x)da = \underline{u}(0, x)$$
$$S_a v \geq \epsilon \to \Phi(v)(x) \geq \int_0^{a_M} \gamma_u(a)\epsilon da = \epsilon$$
$$S_a v \geq u_1 \to \Phi(v)(x) \geq \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u_1(a, x)da = u_1(0, x)$$

On obtient que

$$\Phi(v)(x) \geq \int_0^{a_M} \gamma_u(a)f(a, x)da = f(0, x) \tag{3.3}$$

Par conséquent, $Im(\Phi) \subset E_X$.
On prouve maintenant que Φ est équi-continue. Soit $x, y \in (-X, X)$ t.q. $|y - x| \leq \epsilon_1$ on a

$$\begin{aligned}
|\Phi(v)(x) - \Phi(v)(x)| &\leq \int_0^{a_M} \gamma_u(a)|S_a v(x) - S_a v(y)| da \\
&\leq \int_0^{a_M} \gamma_u(a) \int_x^y |\frac{\partial S_a v(\rho)}{\partial \rho}| d\rho da \\
&\leq \int_0^{a_M} \gamma_u(a) (\int_x^y |\frac{\partial S_a v(\rho)}{\partial \rho}|^2 d\rho)^{1/2} (y - x)^{1/2} da \\
&\leq \epsilon_1 \int_0^{a_M} \gamma_u(a) ||S_a v||_{W^{1,2}(-X,X)} da \\
&\leq \epsilon_1 M
\end{aligned}$$

Grâce à l'injection compacte $H^1(-X, X) \hookrightarrow C^0([-X, X])$ on a Φ est un opérateur compacte. Par conséquent, $\Phi(E_X) \subset E_X$ est relativement compacte.
En appliquant le théorème de point fixe de Schauder, on aura une solution $u_0 \in E_X$ pour l'équation suivante $\Phi(v) = v$. Alors, la solution $S_a u_0$ du problème parabolique (3.2) assure l'existence de la solution de type onde progressive du problème (2.4) dans un domaine borné.
Cette solution vérifie

$$f \leq u \leq \min(1, \overline{u})$$

Elle est régulière : puisque $u_0 \in C^0([-X, X])$, on a $S_a u_0 \in L^2(0, a_M, H^1(-X, X))$ et puis $u_0 = \Phi(u_0) \in H^1(-X, X)$.
En appliquant la régularité parabolique on obtient

$$S_a u_0 \in L^2(0, a_M, H^2(-X, X))$$

Avec $u_0 \in H^2(-X, X)$. Par itération on obtient que u est une solution classique c-à-d de classe C^1 par rapport à la variable a et de classe C^2 par rapport à l'espace (x).

3.2 Le passage à la limite (X tend vers $+\infty$)

Cette partie est dédiée à la preuve du théorème 1. En plus, on doit prouver que la fonction u a une décroissance exponentielle quand $x \to +\infty$ c-à-d

$$\lim_{x \to +\infty} u(a, x) \, \mathrm{e}^{\lambda x} = \phi(a) \text{ uniformément par rapport à } a \in [0, a_M]. \tag{3.4}$$

λ est la plus petite racine de l'équation (2.6) et $\phi(a) = \exp \int_0^a (\lambda^2 - c\lambda + \pi(s)) ds$.
La preuve consiste à prolonger la solution du problème (3.2) sur $\mathbb{R}$ (quand $X \to +\infty$). D'abord on doit trouver des estimations locales indépendamment de X et cela va assurer quelques résultats de compacité qui seront nécessaires pour passer à la limite et obtenir la solution du problème sur tout $\mathbb{R}$.
Preuve. Soit $c > c^*$ donné.
On note par u la solution du problème (3.2) avec $u \in E_X$.
Par les estimations paraboliques et puisque u est bornée indépendamment de X ($0 \leq u \leq 1$) on obtient que u est relativement compacte par la topologie de $C^0_{loc}((0, a_M) \times \mathbb{R})$.
On note par X_n la suite numérique strictement positive et $X_n \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et u_n converge vers une fonction u par la topologie de $C^0_{loc}((0, a_M) \times \mathbb{R})$.
On a $u_n \in E_{X_n}$ ($f \leq u_n \leq \min(1, \overline{u})$), en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on aura u

vérifie cette condition :

$$f \leq u \leq \min(1, \overline{u}) \tag{3.5}$$

f est définie comme suit : $f(a,x) = \max(\underline{u}(a,x), \epsilon 1_{x \leq Y}, u_1(a,x))$
En plus, on a u_n solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial a} = \triangle u_n + c\dfrac{\partial u_n}{\partial x} + \pi(a)u_n(1-u_n) \\ u_n(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u_n(a,x)da \\ u_n(a,\pm X) = f(a,\pm X) \end{cases} \tag{3.6}$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ t.q.

$$supp\phi \subset \mathbb{R}^+ \times (-X_n, X_n)$$

En multipliant l'équation de (3.6) par ϕ et en intégrant sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}(\frac{\partial u_n}{\partial a} - \triangle u_n - c\frac{\partial u_n}{\partial x} - \pi(a)u_n(1-u_n))\phi(a,x)dadx = 0$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \phi}{\partial a} + \triangle \phi - c\frac{\partial \phi}{\partial x} + \pi(a)(1-u_n))u_n(a,x)dadx + u_n(0,.)\phi(0,.) = 0$$

Comme $0 \leq u_n \leq 1$ et en passant à la limite $(n \to +\infty)$ on obtient pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}(\frac{\partial \phi}{\partial a} + \triangle \phi - c\frac{\partial \phi}{\partial x} + \pi(a)(1-u))u(a,x)dadx + u(0,.)\phi(0,.) = 0$$

On intègre par parties et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}(-\frac{\partial u}{\partial a} + \triangle u + c\frac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)(1-u)u)\phi(a,x)dadx = 0 \tag{3.7}$$

Alors u vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \triangle u + c\frac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u(1-u) \qquad \text{au sens des distributions}$$

D'après la condition initiale de u_n on a

$$u_n(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u_n(a,x)da$$

Comme $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$ alors

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)[u_n(a,x) - u_n(0,x)]da = 0$$
$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)[u_n(a,x) - u(a,x) + u(a,x) - u_n(0,x) + u(0,x) - u(0,x)]da = 0$$

En passant à la limite (quand n tend vers $+\infty$) on aura

$$\int_0^{a_M} \gamma_u(a)[u(a,x) - u(0,x)]da = 0$$

Enfin on a

$$u(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u(a,x)da$$

Il reste à vérifier que u a les limites prévues à l'infini : cela découle facilement de (3.5) :

Lorsque $x \to -\infty$ on a

$$\begin{array}{l} \overline{u}(a,-\infty) = +\infty \\ u(a,-\infty) \leq \min(1,\overline{u}(a,-\infty)) = 1 \\ \underline{u}(a,-\infty) = -\infty \\ \epsilon \in (0,1) \\ u_1(a,-\infty) = 1 \\ f(a,-\infty) = 1 \leq u(a,-\infty) \end{array} \tag{3.8}$$

Alors $u(a,-\infty) = 1$
Lorsque $x \to +\infty$ on a

$$\begin{array}{l} \overline{u}(a,+\infty) = 0 \\ u(a,+\infty) \leq \min(1,\overline{u}(a,+\infty)) = 0 \\ \underline{u}(a,+\infty) = 0 \\ f(a,+\infty) = 0 \leq u(a,+\infty) \end{array} \tag{3.9}$$

Alors $u(a,+\infty) = 0$ (u_1 et ϵ ne sont pas des sous-solutions pour $x > Y$)
De plus, au voisinage de $+\infty$ on a

$$u(a,x) - \overline{u}(a,x) = 0 = \mathrm{e}^{-\lambda x}(\mathrm{e}^{\lambda x}\, u(a,x) - \phi(a))$$

Comme $\mathrm{e}^{-\lambda x} \neq 0$ On a $\mathrm{e}^{\lambda x}\, u(a,x) - \phi(a) = 0$.
On a terminé ainsi la preuve du Théorème 1. (la solution trouvée est faible mais on peut passer par itération à la solution classique)
On aborde maintenant la preuve du Théorème 2.
Preuve : On définit une fonction π

$$\pi(a) = \begin{cases} \exp(-\int_0^a \mu(s)ds) & \text{pour } \ a \in [0,a_M). \\ 0 \quad \text{pour } \ a \geq a_M. \end{cases} \tag{3.10}$$

Avec $\gamma_u(a) = \beta(a)\pi(a)$.
D'après la condition $\int_0^{a_M} \mu(a)da = +\infty$ et $\int_0^{a_M} \beta(a)\exp(-\int_0^a \mu(s)ds)da = 1$. les fonctions μ et γ_u sont continues et positives sur $\mathbb{R}^+$.
Alors en appliquant le Théorème 1, on assure l'existence de $c^* > 0$ t.q. pour tout $c > c^*$ l'équation (9) admet une solution strictement positive.
Soit $c > c^*$ donnée et u une solution strictement positive de (9). Si on pose $I = \pi(a)u$ on a I une solution de type onde progressive pour (5) associée à une vitesse d'onde c.
Finalement, on remarque que $\pi(a_M) = 0$ et u est bornée ce qui implique la disparition de I à l'âge maximal ($I(a_M,.) = 0$). Ce qui achève la preuve du Théorème 2.

Remarque 1 *Dans cette preuve, tous les résultats restent vrais pour $a_M = +\infty$.*

Chapitre 4

Monotonie d'une onde progressive

Dans ce chapitre, on étudie la monotonie d'une solution de type onde progressive pour une classe de problèmes contenant ceux en considération.

4.1 Résultats de monotonie et corollaire

On considère un problème plus général (on remplace $u(1-u)$ par $f(u)$ dans (9)). Voici le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)f(u) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(a,x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(a,x) = 0 \\ u(0,x) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u(a,x)da \end{cases} \tag{4.1}$$

La convergence de u est uniforme par rapport à $a \in [0, a_M]$.
On suppose que ce système possède une solution classique strictement positive notée par u et qu'elle a une décroissance exponentielle quand x tend vers $+\infty$. Autrement formulé, on suppose qu'il existe une constante strictement positive λ et une fonction ϕ régulière vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a \in [0, a_M]$

$$\mathrm{e}^{-\lambda x}(1 - h_1(x))\phi(a) \leq u(a,x) \leq \mathrm{e}^{-\lambda x}(1 + h_2(x))\phi(a) \tag{4.2}$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions continues et positives tendant vers zéro quand $x \to +\infty$. On va prouver ce résultat :

Théorème 7 *Soient*

- π *une fonction continue et positive sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\pi(a) > 0$ *pour tout* $a \in [0, a_M)$ *et* $\pi(a) = 0$ *pour tout* $a \geq a_M$
- γ_u *continue, positive sur* $\mathbb{R}^+$*et* $\int_0^{a_M} \gamma_u(a)da = 1$.
- f *la fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $f'(1) < 0$.

Si u *est une solution classique du problème* (4.1) *vérifiant* (4.2) *et*

$$0 < u(a,x) < 1 \qquad \textit{pour tout } a \in [0, a_M] \quad \textit{et } x \in \mathbb{R}$$

Alors, la solution u est strictement décroissante par rapport à x pour tout $a \in [0, a_M]$. c-à-d

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, x) < 0 \qquad \textit{pour tout } \ a \in [0, a_M] \quad \textit{et } \ x \in \mathbb{R}$$

Avant de prouver le résultat, Voyons quelques propriétés topologiques de l'ensemble des vitesses d'ondes admissibles F.

Corollaire 1 *Sous les mêmes hypothèses précédentes (celles du théorème précédent) On considère ce problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{da} = \pi(a)u(1-u) \\ u(0) = \int_0^{a_M} \gamma_u(a)u(a)da \end{cases} \tag{4.3}$$

Il admet deux solutions seulement dans l'intervalle compact $[0, 1]$ qui sont les fonctions constantes 0 et 1.
Alors l'ensemble des vitesses c telle que (4.1) admet une solution classique strictement décroissante est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

Sous quelques conditions sur les fonctions démographiques, ce corollaire assure l'existence d'une onde progressive de type "front" pour la vitesse d'onde critique c^*.
Ici, on est incapable de prouver que cette valeur correspond à la vitesse minimale des vitesses d'ondes progressives c-à-d il n'existe pas de solution positive de type onde progressive pour une vitesse $c < c^*$.

Preuve. Soit $F = \{c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (4.1) \text{ admet une solution classique } u \text{ strictement décroissante}\}$
Soit c_n une suite réelle convergente vers l'entier c_0 et telle que pour tout $n \geq 1$, le problème (4.1) admet une solution classique strictement décroissante notée par u_n ($c_n \in F$).
On cherche à prouver que $c_0 \in F$
Puisque le problème est invariant par rapport à la translation (dans la direction de x) c-à-d si $u(a, x)$ est une solution de (4.1) $u(a, x + b)$ l'est aussi, alors on peut supposer que pour tout $n \geq 1$

$$\underset{a \in [0, a_M]}{min} u_n(a, 0) = \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

Car si $u_n(a, x)$ est une solution de (4.1) $u_n(a, 0)$ l'est aussi alors elle vérifie

$$\frac{\partial u_n(a, 0)}{\partial a} = \pi(a)u_n(a, 0)(1 - u_n(a, 0))$$

On pose $g(u_n) = u_n(1 - u_n)$ on aura $g'(u_n) = 1 - 2u_n = 0$ si $u_n = \dfrac{1}{2}$ (cette valeur est le minimum). Par les estimations paraboliques, on peut extraire une sous-suite de la suite u_n qu'on note u_n aussi (pour simplifier) convergente vers une fonction u_0 régulière ($u_0 \in C^1_{loc}((0, a_M) \times \mathbb{R})$).
Alors, u_0 est strictement décroissante par rapport à x et vérifie

$$\underset{a \in [0, a_M]}{min} u_0(a, 0) = \frac{1}{2}.$$

Par la monotonie, la fonction $u_0(a, x)$ a des limites à l'infini c-à-d $\underset{x \to \pm\infty}{lim} u_0(a, x) = u^{\pm}(a)$.
Ces fonctions sont des solutions du problème (4.3).
D'autre part, puisque $\underset{a \in [0, a_M]}{min} u_0(a, 0) = \dfrac{1}{2}$. on a $u^-(a) \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $a \in [0, a_M]$.
On conclue que $u^- \equiv 1$. En appliquant le principe de comparaison on obtient $u^- > u^+$

donc $u^+ \equiv 0$.
Finalement, (u_0, c_0) est une solution classique de (4.1) strictement décroissante ($c_0 \in F$). Par cela on clôture la preuve du corollaire.

4.2 La preuve du Théorème 7.

Pour prouver le théorème 7. On suit la méthode de Coville dans [6]. Notre preuve va être répartie en trois étapes. Dans la première étape, on prouve l'existence d'un $\tau > 0$ tel que pour tout $(a, x) \in [0, a_M) \times \mathbb{R}$ on a

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tau)$$

Dans la deuxième étape, on prouve que pour tout $\tilde{\tau} \geq \tau$ on a

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tilde{\tau}) \qquad \forall (a, x) \in [0, a_M) \times \mathbb{R}$$

Finalement, on prouve que

$$\inf \tau = 0$$

.
Commençons par ce lemme qui nous aidera excessivement dans la preuve du théorème 7.

Lemme 2 *Soient*

- f *la fonction de classe* $C^1(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$f'(1) < 0$$

- $\delta > 0$ *tel que*

$$f'(p) < 0 \quad \forall p \in \{p \in \mathbb{R} \text{ tel que } |p - 1| < \delta\}$$

Pour tout $\tau_0 > 0$ *il existe* $M(\tau_0) > 0$ *vérifiant :*

$$|u(a, x) - 1| < \frac{\delta}{2} \;\; \forall a \in [0, a_M], \;\; \forall x < -M(\tau_0), \tag{4.5}$$

$$u(a, x) < \frac{\delta}{2} \;\; \forall a \in [0, a_M], \;\; \forall x > M(\tau_0), \tag{4.6}$$

$$u(a, x + \tau) - u(a, x) < 0 \;\; \forall a \in [0, a_M], \;\; \forall x > M(\tau_0), \;\; \forall \tau > \tau_0. \tag{4.7}$$

Ce lemme vient de la supposition (4.2) avec le comportement de u à l'infini ($x = +\infty$).

4.2.1 Première étape

Elle est résumée dans le lemme suivant :

Lemme 3 *Il existe* $\tau > 0$ *t.q. pour tout* $a \in [0, a_M]$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tau). \tag{4.8}$$

La preuve de ce lemme 3. nécessite l'utilisation du lemme technique suivant :

Lemme 4 *S'il existe des constantes M, α et β t.q.*

$$1 - u(a,x) < \frac{\delta}{2}, \quad \forall (a,x) \in [0,a_M] \times (-\infty, -M-1], \tag{4.9}$$

$$u(a,x) > u(a, x+\beta) \quad \forall x \in [-M-1, +\infty), \ \ \forall a \in [0, a_M], \tag{4.10}$$

$$u(a,x) + \alpha > u(a, x+\beta) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall a \in [0, a_M]. \tag{4.11}$$

Alors on a

$$u(a,x) \geq u(a, x+\beta) \quad \forall (a,x) \in [0,a_M] \times \mathbb{R}$$

On suppose que ce lemme 4. est prouvé et on prouve le lemme 3.

Preuve du lemme 3. Soit $\tau_0 > 0$ et $M = M(\tau_0)$ donné par le lemme 2.
on a pour tout $x \leq -M-1 < -M$ et $a \in [0, a_M]$ on a par le lemme 2 $1 - u(a,x) < \delta/2$ (hypothèse 1 du lemme 4). On suppose qu'il existe $D > 0$ t.q. pour tout $b \geq D$, et tout $(a,x) \in [0,a_M] \times [-M-1, M+1]$ on a (hypothèse 2 du lemme 4)

$$u(a,x) > u(a, x+b).$$

Car si on suppose le contraire, on obtient que pour tout $n \geq 0$ il existe $b_n \geq n$, $(a_n, x_n) \in [0, a_M] \times [-M-1, M+1]$ t.q.

$$u(a_n, x_n) \leq u(a_n, x_n + b_n).$$

On peut donc extraire des sous-solutions convergentes. On suppose que

$$\begin{array}{l} a_n \to a_0 \in [0, a_M] \\ x_n \to x_0 \in [-M-1, M+1] \end{array}$$

Donc quand $n \to +\infty$ ($b_n \to +\infty$) on obtient que $u(a_0, x_0) \leq u(a_0, +\infty) = 0$.
Contradiction ! puisque u est supposée strictement positive.
D'après le lemme 2. pour tout $b > \tau_0$ et $a \in [0, a_M]$ et $x > M$ on a $u(a, x+b) - u(a,x) < 0$.
Par conséquent, pour tout $b > max(D, \tau_0)$ on obtient que
Pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x > -M-1$,

$$u(a,x) > u(a, x+b)$$

Finalement, puisque u strictement positive et bornée alors on peut trouver $\alpha > 0$ assez grand t.q.
pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(a,x) + \alpha > u(a, x+b)$.(hypothèse 3)
Car pour tout $x \leq -M-1$ on a

$$u(a, -\infty) = 1 < u(a,x) + \delta/2$$

et aussi u borné alors $u(a, x+b) < u(a, -\infty)$ on obtient

$$u(a, x+b) < u(a,x) + \delta/2$$

$(\alpha \geq \delta/2)$
pour tout $x > -M-1$ on a $u(a, x+b) < u(a,x) < u(a,x) + \alpha$ $(\alpha > 0)$
En appliquant le lemme 4. alors

$$u(a,x) \geq u(a, x+b)$$

$\forall (a,x) \in [0, a_M] \times \mathbb{R}$. c.q.f.d
On finit cette section par la preuve du lemme 4. "technique"

Preuve du lemme 4. Soit

$$\alpha^* = \inf\{\alpha > 0, \;\; u(a,x) + \alpha > u(a, x+\beta) \;\; \forall (a,x) \in [0, a_M] \times \mathbb{R}\}$$

on va démontrer que $\alpha^* = 0$. cette propriété va conclure la preuve du lemme 4.
On suppose par l'absurde que $\alpha^* > 0$. Puisqu'on a

$$\underset{x \to \pm\infty}{lim} u(a,x) + \alpha^* - u(a, x+\beta) = \alpha^*.$$

On peut trouver $a_0 \in [0, a_M]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$u(a_0, x_0) + \alpha^* = u(a_0, x_0 + \beta)$$

On définit une fonction

$$w(a,x) = u(a,x) + \alpha^* - u(a, x+\beta)$$

.
On a par définition $w \geq 0$ et $w(a_0, x_0) = 0$.
D'après la 2ème hypothèse du lemme 4. on a pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \geq -M - 1$

$$u(a,x) - u(a, x+\beta) > 0$$

c-à-d que $w(a,x) > 0$. Alors pour avoir $w(a_0, x_0) = 0$ on doit vérifier que $x_0 < -M - 1$.

1/ $a_0 \in (0, a_M)$:
Puisque w atteint sa valeur minimale en (a_0, x_0) on obtient

$$\nabla_{(a,x)} w(a_0, x_0) = 0 \;\; \text{et} \;\;\; \triangle_x \, w(a_0, x_0) \geq 0$$

Cela résulte que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial a} - \triangle w - c\frac{\partial w}{\partial x}\right)(a_0, x_0) \leq 0.$$

avec $\triangle_x = \triangle$ pour simplifier l'écriture.
D'autre part, la fonction w vérifie cette équation

$$\frac{\partial w}{\partial a} - \triangle w - c\frac{\partial w}{\partial x} = \pi(a)[f(u(a,x)) - f(u(a, x+\beta))].$$

On obtient que

$$f(u(a_0, x_0)) - f(u(a_0, x_0 + \beta)) \leq 0.$$

On rappelle que $u(a_0, x_0 + \beta) = u(a_0, x_0) + \alpha^*$ on obtient

$$f'(d)\alpha^* \geq 0$$

Avec

$$f'(d) = \lim_{\beta \to 0} \frac{f(u(a_0, x_0 + \beta)) - f(u(a_0, x_0))}{u(a_0, x_0 + \beta) - u(a_0, x_0)}$$

Et

$$d \in [u(a_0, x_0), u(a_0, x_0 + \beta)] = [u(a_0, x_0), u(a_0, x_0) + \alpha^*]$$

Finalement, comme $x_0 < -M - 1$ d'après le lemme 2. on a $1 - u(a_0, x_0) < \dfrac{\delta}{2}$. alors $1 - \dfrac{\delta}{2} < u(a_0, x_0) \leq d \leq u(a_0, x_0) + \alpha^*$

On rappelle que $f'(d) < 0$ pour $d > 1 - \dfrac{\delta}{2}$
on aura $f'(d) \leq 0$
Mais $f'(d)\alpha^* \geq 0$ ce qui implique que $\alpha^* \leq 0$ contradiction !

2/ $a_0 = 0$:
On rappelle que $w(0, x_0) = u(0, x_0) + \alpha^* - u(0, x_0 + \beta) = 0$ on a donc

$$\begin{aligned} w(0, x_0) &= \int_0^{a_M} \gamma_u(a)(u(a, x_0) + \alpha^* - u(a, x_0 + \beta))da \\ &= \int_0^{a_M} \gamma_u(a) w(a, x_0) da \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque la fonction w est positive. On obtient que $w(a, x_0) \equiv 0$ p.p. sur $(0, a_M)$ Cela prouve qu'il existe $a_1 \in (0, a_M)$ t.q. $w(a_1, x_0) = 0$ et ce cas a été traité au dessus. (on remplace a_0 par a_1) et on trouve que $\alpha^* \leq 0$ contradiction avec l'hypothèse.
3/$a_0 = a_M$.
Puisque $w(a_M, x_0) = 0$, il existe $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ t.q. $\alpha^* > \epsilon$.

$$|w(a, x)| \leq \epsilon \text{ pour tout}(a, x) \in E$$

Où $E = (a_M - \eta, a_M + \eta) \times (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$.
On prouve maintenant que pour tout $(a, x) \in E$ on a

$$f(u(a, x)) - f(u(a, x + \beta)) \geq 0$$

Comme précédemment puisque $x_0 > -M - 1$ on a $1 - u(a, x_0) \leq \dfrac{\delta}{2}$. On prolonge cette condition sur E : on suppose que $1 - u(a, x) < \delta$ pour tout $(a, x) \in E$
Par conséquent, pour tout $(a, x) \in E$ on aura

$$u(a, x + \beta) - u(a, x) = \alpha^* - w(a, x) \geq \alpha^* - \epsilon > 0$$

En plus, pour tout $(a, x) \in E$ on peut trouver $d \in (u(a, x), 1)$ t.q.

$$f(u(a, x)) - f(u(a, x + \beta)) = -f'(d)(u(a, x + \beta) - u(a, x))$$

D'après $d \geq u(a, x) > 1 - \delta$ on obtient que $f'(d) < 0$ (lemme 2) et

$$f(u(a, x)) - f(u(a, x + \beta)) \geq 0$$

sur E. Finalement, On rappelle que w vérifie

$$\left(\frac{\partial w}{\partial a} - \triangle w - c\frac{\partial w}{\partial x}\right)(a_M, x_0) \leq 0.$$

On applique le principe de maximum sur E (puisque $w(a_M, x_0) \leq 0$ alors $w(a, x) \leq 0$ pour tout $(a, x) \in E$) on aura $w \equiv 0$ sur E.
Alors on peut trouver $(a_2, x_0) \in [0, a_M] \times \mathbb{R}$ t.q. $w(a_2, x_0) = 0$.
On applique la première partie de la preuve, on obtient donc $\alpha^* = 0$ ainsi on arrive à la fin de la preuve du lemme 4.

4.2.2 Deuxième étape

La deuxième étape de la preuve consiste à appliquer le lemme suivant :

Lemme 5 *S'il existe $\tau > 0$ t.q. pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tau)$$

Alors pour tout $\tilde{\tau} \geq \tau$ on a

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tilde{\tau})$$

La preuve de ce lemme est automatique à partir de ces deux lemmes techniques.

Lemme 6 *On suppose qu'il existe $\tau > 0$ t.q. pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$u(a, x) \geq u(a, x + \tau)$$

S'il existe $\tau > 0$ t.q. pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(a, x) > u(a, x + \tau)$$

Lemme 7 *S'il existe $\tau > 0$ t.q. pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$u(a, x) > u(a, x + \tau)$$

Alors il existe $\epsilon > 0$ t.q. pour tout $\tilde{\tau} \in [\tau, \tau + \epsilon]$ on a

$$u(a, x) > u(a, x + \tilde{\tau}) \ \ \forall (a, x) \in [0, a_M] \times \mathbb{R}$$

On déduit le lemme 5. à partir des lemmes 6. et 7.

Preuve du lemme 5. Sous les hypothèses du lemme 5. On peut introduire l'ensemble non-vide

$$A = \{\tilde{\tau} \geq \tau, \ \ \forall t \in [\tau, \tilde{\tau}], \ \ \forall a \in [0, a_M], \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ u(a, x) \geq u(a, x + t)\}.$$

On suppose par l'absurde que

$$supA = \tilde{\tau}_0 < +\infty$$

. Par la continuité de la fonction u on obtient que

$$\forall a \in [0, a_M], \, \forall x \in \mathbb{R} \quad u(a, x) \geq u(a, x + \tilde{\tau}_0).$$

En appliquant le lemme 6. on aura

$$\forall a \in [0, a_M], \, \forall x \in \mathbb{R} \quad u(a, x) > u(a, x + \tilde{\tau}_0).$$

En appliquant le lemme 7. on obtient qu'il existe $\epsilon > 0$ t.q. pour tout $\tilde{\tau} \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_0 + \epsilon]$

$$u(a, x) > u(a, x + \tilde{\tau})$$

Pour tout a et x. Pour $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 + \epsilon$ on a $u(a, x) \geq u(a, x + \tilde{\tau}_0 + \epsilon)$.
Alors, $\tilde{\tau}_0 + \epsilon \in A$ ce qui contredit la définition de $\tilde{\tau}_0$. On arrive ainsi à la fin de la preuve du lemme 5.
Prouvons maintenant le lemme 6.

Preuve du lemme 6. Cette preuve découle facilement du principe de comparaison. Soit

$$w(a,x) = u(a,x) - u(a,x+\tau)$$

Alors cette fonction w vérifie le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial a} - \triangle w - c\dfrac{\partial w}{\partial x} - A(a,x)w = 0. \\ w(0,x) = u(0,x) - u(0,x+\tau) \geq 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Ici $A(a,x)$ est une fonction lisse. En appliquant le principe de comparaison, on obtient que $w > 0$ ou $w \equiv 0$. Si On suppose que $w \equiv 0$, alors la fonction u est τ-périodique par rapport à la variable x ($u(a,x+\tau) = u(a,x)$) ce qui contredit sa limite à l'infini.
Prouvons maintenant le lemme 7.

Preuve du lemme 7. Soit $M = M(\tau)$ donné par le lemme 2. Par la continuité de la fonction u on peut trouver $\epsilon_0 > 0$ t.q. pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ on a

$$u(a,x) > u(a,x+\tau+\epsilon) \text{ pour tout } a \in [0,a_M] \text{ et } x \in [-M-1, M+1]$$

D'après le lemme 2. on obtient que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$u(a,x) > u(a,x+\tau+\epsilon) \text{ pour tout } a \in [0,a_M] \text{ et } x > M$$

Donc en assemblant les deux inégalités précédentes on aura pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$u(a,x) > u(a,x+\tau+\epsilon) \text{ pour tout } a \in [0,a_M] \text{ et } x > -M-1$$

Finalement, pour tout $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$, on peut trouver $\alpha > 0$ assez grand t.q. pour tout $a \in [0,a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u(a,x) + \alpha > u(a,x+\tau+\epsilon)$$

En appliquant le lemme 4, on obtient que

$$u(a,x) \geq u(a,x+\tau+\epsilon) \text{ pour tout } a \in [0,a_M] \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Ainsi on clôture la preuve du lemme 7.

4.2.3 Troisième et dernière étape

On définit

$$\tau^* = \inf\{\tau > 0,\ \forall \tilde{\tau} > \tau,\ u(a,x) \geq u(a,x+\tilde{\tau})\ \forall (a,x) \in [0,a_M] \times \mathbb{R}\}$$

On a alors le résultat suivant qui nous aide à compléter la preuve du théorème 7. :

Lemme 8 *On a* $\tau^* \leq 0$.

Preuve du lemme 8. On suppose par l'absurde que $\tau^* > 0$.
Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout $(a,x) \in [0,a_M] \times \mathbb{R}$ on a

$$u(a,x) \geq u(a,x+\tau^*-\epsilon)$$

Par la définition de τ^* et la continuité de u on a

$$u(a,x) \geq u(a, x+\tau^*) \tag{4.13}$$

en appliquant le lemme 6. on obtient

$$u(a,x) > u(a, x+\tau^*)$$

On introduit maintenant $M_1 = M(\dfrac{\tau^*}{2})$ donné par le lemme 2. Puisque la fonction u est continue on peut trouver $\epsilon_1 > 0$ t.q. pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$, $a \in [0, a_M]$ et $x \in [-M_1, M_1]$:

$$u(a,x) > u(a, x+\tau^* - \epsilon)$$

Par le lemme 2. (inég3) on a

$$u(a,x) > u(a, x+\tau)$$

Pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x > M_1$ et $\tau \geq \dfrac{\tau^*}{2}$.
Par conséquent, il existe $\epsilon > 0$ t.q. pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x > -M_1$ on a

$$u(a,x) > u(a, x+\tau^* - \epsilon)$$

Par le lemme 4, on obtient pour tout $a \in [0, a_M]$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u(a,x) > u(a, x+\tau^* - \epsilon)$$

Finalement par le lemme 5, on obtient pour tout $\tilde{\tau} \geq \tau^* - \epsilon$

$$u(a,x) \geq u(a, x+\tilde{\tau})$$

Contradiction avec la définition de τ^* et on achève la preuve du lemme 8.

Chapitre 5

Simulation numérique du modèle

5.1 Discrétisation

La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes. la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. En apparence, cette méthode apparaît comme étant la plus simple car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue. On veut discrétiser le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \pi(a)u \\ u(a,-\infty) = 1, \quad u(a,+\infty) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

(C'est le problème que vérifie la sur-solution) Avec

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand} \quad x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{quand} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si u est C^2 sur $[0, a_M]$ on a par le développement de Taylor au voisinage de (a, x) $(\theta \in (a, a+k))$

$$u(a+k, x) = u(a, x) + k\frac{\partial u}{\partial a}(a, x) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(\theta, x)$$

Alors quand k tend vers 0 on peut approcher $\dfrac{\partial u}{\partial a}(a, x)$ par $\dfrac{u(a+k, x) - u(a, x)}{k}$

Si u est C^3 sur On a par le développement de Taylor au voisinage de (a, x) $(\xi_1 \in (x, x+h))$

$$u(a, x+h) = u(a, x) + h\frac{\partial u}{\partial x}(a, x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, x) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, \xi_1)$$

Alors on peut approcher $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a, x)$ par $\dfrac{u(a, x+h) - u(a, x)}{h}$

On a aussi pour $\xi_2 \in (x-h, x)$

$$u(a, x-h) = u(a, x) - h\frac{\partial u}{\partial x}(a, x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, x) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, \xi_2)$$

En sommant (5.1) avec (5.1) on obtient

$$u(a, x+h) + u(a, x-h) = 2u(a, x) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, x) + O(h^3)$$

On peut approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, x)$ par $\frac{u(a, x+h) + u(a, x-h) - 2u(a, x)}{h^2}$

5.1.1 Schéma différences finies

Soit R, N et M de $\mathbb{N}$ fixés. On définit les points de discrétisation du maillage par

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, & i &\in \{0, 1, ..., N+1\} & h &= \frac{2R}{N+1} \\ a_j &= a_0 + jk, & j &\in \{0, 1, ..., M\} & k &= \frac{a_M}{M} \end{aligned}$$

On note par u_i^j la fonction $u(a, x)$. Soit h le pas de discrétisation par rapport à x et k le pas de discrétisation par rapport à a.
On obtient le schéma numérique suivant

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \frac{2u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j}{h^2} + c\frac{u_i^j - u_{i+1}^j}{h} - \pi^j u_i^j = 0$$

Le schéma est d'ordre 2 par rapport à l'espace et d'ordre 1 par rapport à l'âge. Avec la condition initiale

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si} x \leq 0 \\ 0 & \text{si} x > 0 \end{cases}$$

et les conditions au bord suivantes

$$u_0^j = 1 \qquad\qquad u_{N+1}^j = 0$$

Après les calculs on aura cette relation

$$u_i^{j+1} = \frac{k}{h^2}u_{i-1}^j + (1 - \frac{2k}{h^2} - \frac{ck}{h})u_i^j + (\frac{k}{h^2} + \frac{ck}{h})u_{i+1}^j + k\pi^j u_i^j$$

5.2 Simulation sur MATLAB

On a pris $R = 50$ et $a_M = 100$ et π^j constante assez petite. On obtient les figures suivantes de la solution u approchée du problème (5.1).

Pour voir que cette onde progressive s'annule en a_M assez grand on choisit par exemple $a_M = 600$ et o

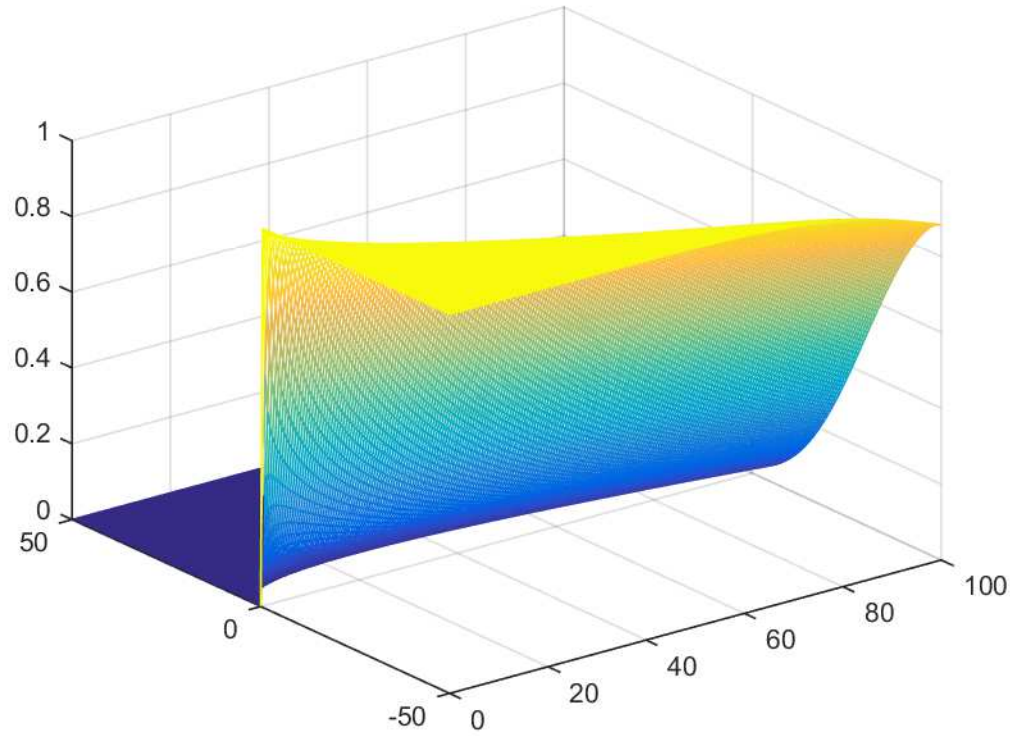

FIGURE 5.1 – la solution du problème u en fonction de a et x

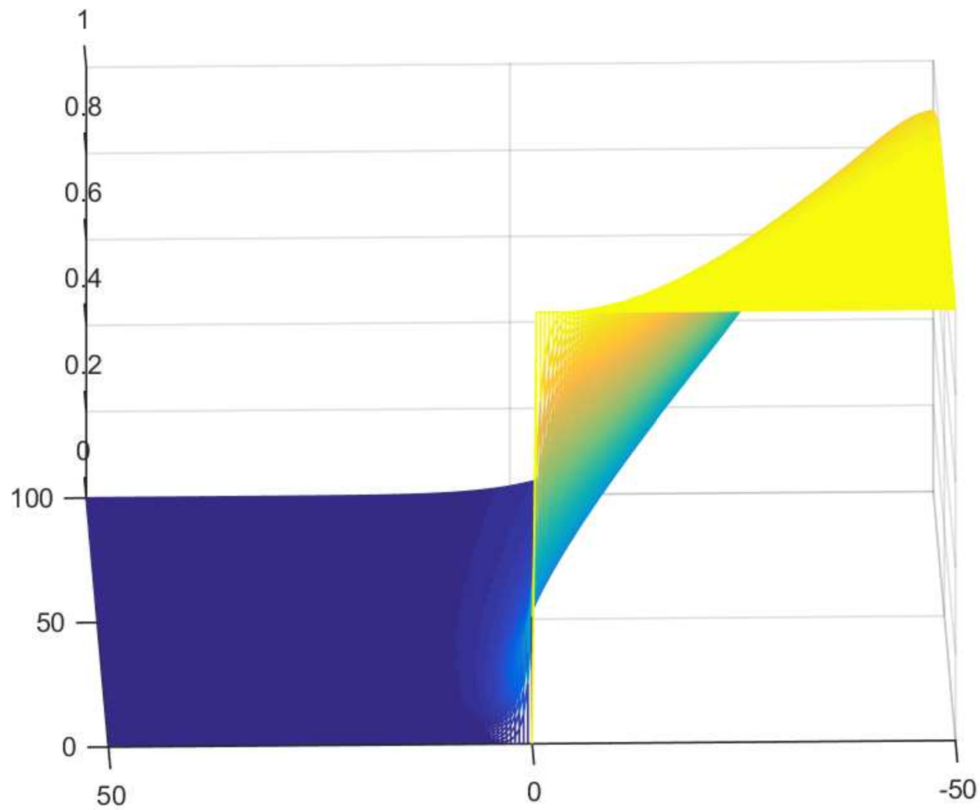

FIGURE 5.2 – la solution u quand a=0

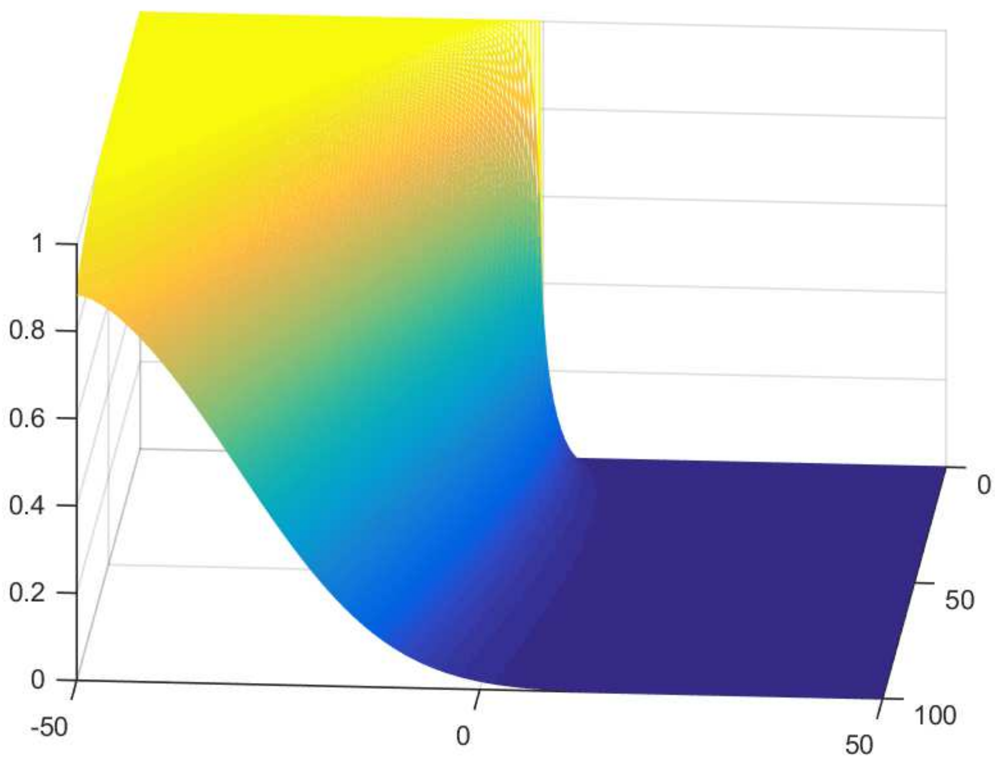

FIGURE 5.3 – la solution u quand a=100

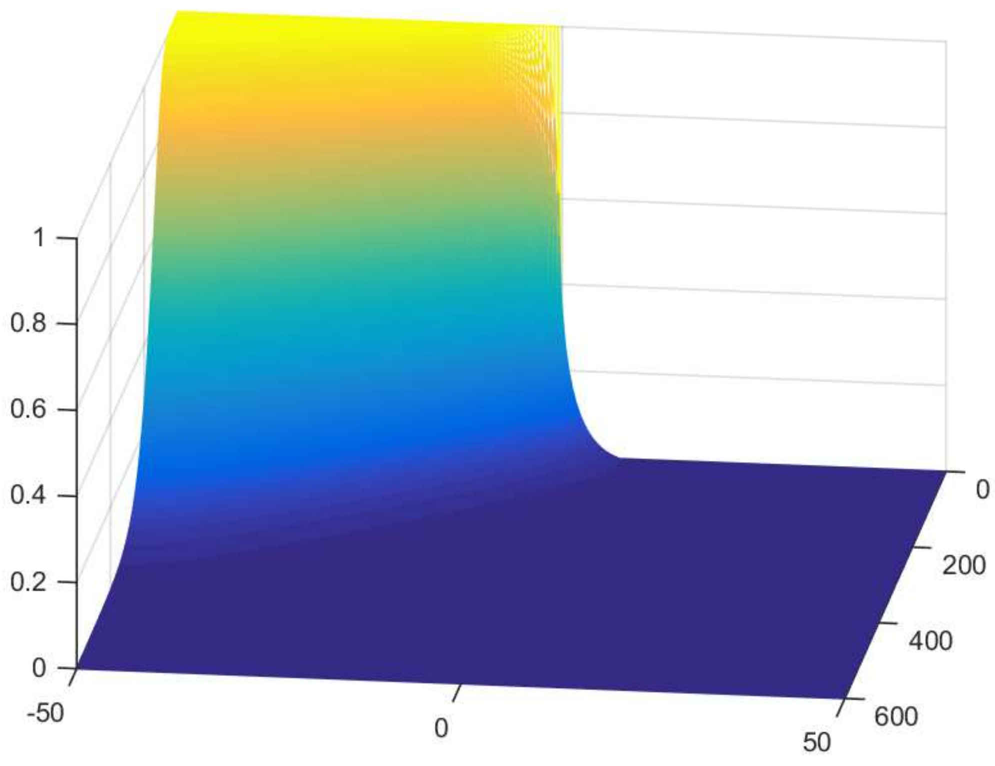

FIGURE 5.4 – la disparition de la solution u quand a=600

Chapitre 6

Conclusion

Coté théorique

- Tout le travail précédent a été fait sur l'axe $\mathbb{R}$ seulement. Toutefois, la généralisation sur $\mathbb{R}^n$ est relatée dans la dernière partie de l'article [7]. Il faut alors appliquer la théorie spectrale (Krein Rutman) et l'alternative de Fredholm [5] pour prouver l'existence de l'onde progressive. Le temps m'a manqué pour aborder cette partie de l'étude.

- Pour la partie de l'existence de l'onde progressive, On aurait pu travailler directement sur $C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ mais dans ce cas là on doit utiliser une généralisation du théorème de point fixe de Schauder sur un espace localement convexe et séparé (généralisé par Singbal [10])

Coté pratique

- Les EDPs paraboliques non linéaires précédentes sont fondées sur l'effet régularisant du laplacien (dans ce cas $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$). On peut le voir dans les figures précédentes où on a commencé par un u_0 qui n'est même pas de classe C^0 et on obtient pour un a_M assez grand une solution de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
  Il est clair dans la Figure 5.4 que l'onde progressive disparaît à partir de $a \geq a_M$ comme le Théorème 2 l'indique. On peut dire ainsi que pour a assez grand u est de classe C^∞.

- Le modèle précédent peut être appliqué pour étudier partiellement la propagation des maladies génétiques suivantes :
  — **Daltonisme** elle affecte la capacité de percevoir la couleur à cause d'une absence ou mauvais fonctionnement des cônes rétiniens.

  — **Syndrome de Down** elle est causée par la présence d'une copie supplémentaire du chromosome 21.

Bibliographie

[1] H. Berestycki, F. Hamel *Front propagation in periodic excitable media* Comm. Pure Appl.Math.,Paris, 2002.

[2] H. Berestycki, F. Hamel, A.Kiselev, L.Ryzhik *Quenchingand propagation in KPP reaction diffusion equations with heat loss* LATP, 2004.

[3] H. Berestycki, L. Nirenberg *On the method of moving planes and the sliding method* Bol. da Soc. Brasileira de Math., 1991.

[4] H. Brézis *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Dunod, Paris, 2005.

[5] G. Carlier *Analyse fonctionnelle, Notes de cours* ENS, 2008-2009.

[6] J.Coville *On the uniqueness and monotonicity of solutions of non-local reaction diffusion equation* Annali di matematica Pura ed Applicata,Volume 185, 2006.

[7] A. Ducrot, *Travelling wave solutions for a scalar age structured equation.* Discrete and continuous dynamical systems series, 2007.

[8] L.C. Evans *Partial differential equations* American Mathematical Society, California, 1998.

[9] K. Deimling *Nonlinear Functional Analysis* American Mathematical Society, New York, 1989.

[10] B.V. Singbal, *Generalized form of Schauder-Tychonoff's fixed-point principle.* F. F.Bonsall, Lectures on some fixed-point theorems of functional analysis, Mimeographednotes, Tata Institute, Bombay, 1962.

[11] G.F. Webb *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, New York, 1989.

[12] W. Zhuoqun, Y. Jingxue, W. Chunpeng *Elliptic and Parabolic Equations* World Scientific, New Jersey, 2006.