

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Tlemcen  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



Thème  
Les méthodes variationnelles et la résolution numérique d'un problème  
de Convection-Diffusion stationnaire.

Présenté par  
**TIANTI Souad**  
Pour l'obtention du diplôme de  
**Master**

Spécialité : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Soutenu publiquement, le 27/09/2018, devant le jury :

<b>Président</b>	Mr. B.MEBKHOUT	M.A.A université de Tlemcen.
<b>Examineur</b>	Mr. A.BENCHAIB	M.A.A université de Tlemcen.
<b>Encadreur</b>	Mr. F.ABI-AYAD	M.A.A université de Tlemcen.

Année universitaire : 2017 - 2018

# Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à l'étude des méthodes variationnelles, en général, et à la méthode des éléments finis en particulier pour la résolution numérique d'un problème de convection-diffusion stationnaire.

On commence, dans un premier temps, par présenter le cadre théorique du problème d'EDP (formulation variationnelle dans un espace de Sobolev et approximation variationnelle en dimension finie) permettant d'appliquer ultérieurement une méthode d'éléments finis. C'est l'objet du premier chapitre.

Au chapitre II et dans un second temps, on procède à l'étude des problèmes de convection-diffusion avec une attention particulière portée sur la convection-diffusion stationnaire en  $nD$  et en  $1D$  d'une façon spécifique.

En fin, au chapitre III on met l'accent sur la méthode variationnelle dite d'éléments finis simpliciaux afin de pouvoir l'utiliser ensuite lors de la discrétisation d'un problème de convection-diffusion stationnaire multidimensionnelle. On termine ce mémoire par une application à un problème de convection-diffusion stationnaire monodimensionnelle avec simulation numérique.

# Abstract

In this memoir, we are interested in the study of variational methods, in general, and the finite element method, in particular for the numerical resolution of a stationary convection-diffusion problem.

We first begin by presenting the theoretical framework of the problem PDE (variational formulation in a Sobolev space and finite dimensional variational approximation) allowing a finite element method to be applied later. This is the subject of the first chapter.

In chapter II and in a second time, we proceed to the study of the problems of convection-diffusion with a particular attention carried on the stationary convection-diffusion in nD and in 1D in a specific way.

Finally, in Chapter III, we focus on the variational method so-called of simplicial finite elements in order to use it later in the discretization of a multidimensional stationary convection-diffusion problem. We end this dissertation by an application to a mono-dimensional stationary convection-diffusion problem with numerical simulation.

# Dédicaces

*Je dédie ce mémoire à :*

- *Mes très chers parents qui m'ont encouragée et motivée tout au long de mes études et qui ont toujours été présents à mes côtés durant mes moments difficiles.*
- *Mes chers frères : Mohamed et Soufiene, mes chers sœurs Hayet et Fayza.*
- *Mes neveux Mohamed, Badro et Hamza.*
- *Tous mes amis*
- *Tous ceux qui m'aiment.*

# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Monsieur F. ABI-AYAD pour ses aides et sa disponibilité.

Je remercie chaleureusement notre chef de département des Mathématiques monsieur B. MEBKHOUT pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie mon examinateur Monsieur A. BENCHAIIB pour son aide et ses conseils et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie aussi mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin.

Souad TIANTI

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Préliminaires d'analyse fonctionnelle</b>	<b>8</b>
1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev . . . . .	8
1.2 Formulation variationnelle générale . . . . .	9
1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel . . . . .	10
1.3.1 Théorème de Lax-Milgram . . . . .	10
1.3.2 Exemples de formulation variationnelle pour problèmes elliptiques . . . . .	10
1.4 Théorie de l'approximation variationnelle . . . . .	13
1.5 Etude de la convergence . . . . .	14
<b>2 Etude théorique des problèmes de convection-diffusion</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Modèle physique . . . . .	18
2.3 Problème de convection-diffusion stationnaire . . . . .	19
2.4 Étude théorique d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D . . . . .	22
2.4.1 La formulation variationnelle . . . . .	23
2.4.2 L'existence et l'unicité de la solution . . . . .	23
<b>3 Approche numérique des problèmes de convection-diffusion</b>	<b>27</b>
3.1 La méthode des éléments finis . . . . .	27
3.1.1 Définition d'un élément fini . . . . .	27
3.1.2 Famille d'éléments finis . . . . .	31
3.1.3 Éléments finis simpliciaux . . . . .	32
3.2 Discrétisation par éléments finis d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D	33

# Introduction

Les méthodes variationnelles représentent une classe importante de méthodes de résolution numérique des problèmes d'origine physique ou mécanique (le transport de polluants, les écoulements dans les conduites, la modélisation de la pollution atmosphérique, etc) qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles. En général, ces équations n'admettent pas de solutions analytiques sauf dans des cas très simplifiés. C'est pourquoi un recours aux méthodes de résolution numériques est nécessaire. Il existe plusieurs méthodes numériques : méthode des éléments finis, méthode des volumes finis, et la méthode des caractéristiques, etc. Chaque méthode de résolution numérique d'un problème continu comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces dernières peuvent, par exemple, représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécanique, thermodynamique, acoustique, etc.). Cette méthode permet donc de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée « suffisamment » faible sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact (conditions de type Dirichlet ou Neumann).

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement à la présentation de certains problèmes elliptiques en dimension une, et à leur résolution numérique par la méthode des éléments finis.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va rappeler les notions de base sur les espaces de Sobolev, la formulation et l'approximation variationnelles.

Dans le deuxième chapitre, on donne quelques phénomènes physiques qui modélisent l'équation de convection-diffusion. On va utiliser ensuite les résultats du premier chapitre pour étudier théoriquement des problèmes de convection-diffusion avec les conditions au bord de type Dirichlet.

Enfin, dans le troisième chapitre, on va appliquer une méthode de type éléments finis pour approcher la solution du problème de convection-diffusion en dimension une. On commencera par donner quelques définitions et résultats concernant les éléments finis, puis on va l'appliquer pour un exemple simple dont on peut calculer la solution approchée et la comparer avec la solution théorique facilement retrouvée.

# Chapitre 1

## Préliminaires d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons les principales notions de base sur la théorie de l'approximation variationnelle et l'étude de certains problèmes aux limites elliptiques linéaires. Nous rassemblons donc ci-après un certain nombre de définitions et de résultats déjà démontrés dans les références indiquées à la fin de cet ouvrage [1], [2] et [5].

### 1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, on va définir quelques espaces de Sobolev usuels que l'on notera par  $H^m(\Omega)$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ces espaces sont des espaces de Hilbert.

**Définition 1.1** *on appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega$  l'espace :*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  étant la dérivée partielle d'ordre 1 de  $v$  par rapport à  $x_i$  au sens des distributions.

On munit  $H^1(\Omega)$  du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

et on note

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1(\Omega)}}$$

la norme correspondante.



**Définition 1.2** On désigne par  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . On note

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

c'est à dire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists \{v_n\}_{n \geq 1} \subset D(\Omega) \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

## 1.2 Formulation variationnelle générale

Soit  $V$  un espace de Hilbert réel de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et de norme  $\|\cdot\|_V$ . Fixons une forme bilinéaire continue

$$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (u, v) \longmapsto a(u, v).$$

La bilinéarité de  $a$  signifie que  $a$  est linéaire par rapport à  $u$  et  $v$ , tandis que la continuité de  $a$  est équivalente à l'existence d'une constante  $M_a > 0$  telle que

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \forall u, v \in V.$$

On considère le problème variationnel général suivant : Etant donné  $L \in V'$ , trouver  $u \in V$  solution de

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V. \tag{1.1}$$

L'existence d'une solution à ce problème est basée sur la coercivité de la forme bilinéaire  $a$  :

**Définition 1.3** On dit que la forme bilinéaire  $a$  est  $V$  – elliptique (ou coercive sur  $V$ ) si et seulement si il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V.$$

On peut alors démontrer le résultat suivant connu sous le nom de Théorème de Lax-Milgram.

## 1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel

### 1.3.1 Théorème de Lax-Milgram

**Théorème 1.1** [2] *Si la forme bilinéaire  $a$  est  $V$ -elliptique, alors le problème (1.1) a une solution unique  $u \in V$ . De plus, on a*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}.$$

### 1.3.2 Exemples de formulation variationnelle pour problèmes elliptiques

Dans cette section, on montre comment écrire certains problèmes concrets sous la forme variationnelle (1.1).

**Exemple 1.1** *(Le problème de Dirichlet en dimension 1)*

*On prend pour  $\Omega$  l'intervalle réel  $]0, 1[$ . Etant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , on veut trouver la solution  $u$  du problème*

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

*On suppose que la solution  $u$  de (1.2) existe et qu'elle est suffisamment régulière : Disons  $u \in H^2(\Omega)$ . Alors en multipliant l'équation du problème par une "fonction test"  $v \in H^1(\Omega)$ , on obtient*

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

*En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient*

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

*Comme il n'y a aucune raison que les termes de bord soient nuls, on prend  $v \in H_0^1(\Omega)$ , cette dernière identité implique alors*

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3)$$

*Comme les conditions de bord  $u(0) = u(1) = 0$  impliquent que  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on voit que le bon choix est de prendre :*

$$V = H_0^1(\Omega),$$

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On a ainsi montré que si  $u \in H^2(\Omega)$  est solution de (1.2), alors elle est solution de (1.3), ou de manière équivalente, solution de (1.1) avec le choix fait ci-dessus. Grâce au Lemme de Lax-Milgram, on va maintenant montrer que le problème (1.3) admet une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Vérifions-en les hypothèses : La bilinéarité de  $a$  et la linéarité de  $L$  découlent de la linéarité de l'intégrale, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on vérifie que la forme  $a$  et  $L$  sont continues. En effet

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

et

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Reste à vérifier la coercivité de la forme  $a$  sur  $H_0^1(\Omega)$  qui découle de l'inégalité de Poincaré puisque

$$a(u, u) = |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Le lemme de Lax-Milgram assure donc l'existence d'une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (1.3). Montrons maintenant qu'elle est solution du problème de départ (1.2) : Les conditions de bord sont satisfaites puisque  $u \in H_0^1(\Omega)$ , et comme  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  le problème (1.3) implique

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in D(\Omega)$$

En conséquence,  $u$  satisfait

$$u'' = -f \text{ dans } D'(\Omega).$$

Comme par hypothèse,  $f \in L^2(\Omega)$ , on en déduit que  $u, u', u'' \in L^2(\Omega)$ , ce qui prouve que  $u \in H^2(\Omega)$ . L'équation (1.2) est donc satisfaite au sens de  $L^2(\Omega)$ .

**Exemple 1.2** (Le problème de Dirichlet en dimension supérieure)

Comme dans la section précédente, on peut généraliser si on prend un problème de Dirichlet en dimension supérieure :

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  de frontière  $\partial\Omega$   $C^1$  – par morceaux. Etant donné  $f \in L^2(\Omega)$ .

On veut trouver la solution  $u$  de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

On suppose d'abord que la solution  $u \in H^2(\Omega)$ . Alors en multipliant l'équation par une "fonction test"  $v \in H^1(\Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

En utilisant la formule de Green, on aura pour tout  $v \in H^1(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx.$$

On peut prendre  $v \in H_0^1(\Omega)$ , et on obtient

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.5)$$

Comme on a la condition  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on voit qu'il faut prendre :

$$V = H_0^1(\Omega),$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

La coercivité de la forme  $a$  sur  $H_0^1(\Omega)$  est vérifiée d'après l'inégalité de Poincaré puisque

$$a(u, u) = |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram le problème (1.5) a une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$ , et comme  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $u$  vérifie

$$-\Delta u = f \text{ dans } D'(\Omega) \supset H^{-1}(\Omega).$$

Ainsi cette solution est aussi solution de (1.4) mais dans un sens plus faible car l'équation n'est satisfaite qu'au sens des distributions.

## 1.4 Théorie de l'approximation variationnelle

On reprend le cadre abstrait précédent : soient  $V$  un espace de Hilbert réel; une forme bilinéaire  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto a(u, v)$ , continue et  $V$  - *elliptique*, et une forme linéaire  $L$  continue sur  $V$ . La méthode d'approximation (dite méthode de Galerkin) du problème (1.1) consiste à remplacer l'espace  $V$  par une famille de sous-espaces  $V_h$  de dimension finie,  $h > 0$ , et on résout le problème suivant : Trouver  $u_h \in V_h$ , solution de

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h. \quad (1.6)$$

**Lemme 1.1** *Si la forme bilinéaire  $a$  est  $V$  - elliptique, alors le problème (1.6) a une solution unique  $u_h \in V_h$ .*

**Preuve:** Comme  $V_h$  est un espace fermé pour la norme de  $V$ , on a clairement que la forme bilinéaire  $a$  restreinte à  $V_h$  c'est-à-dire  $a|_{V_h}$  est continue et  $V_h$  - *elliptique*. De même,  $L|_{V_h} \in V_h'$ , puisque

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \forall v \in V,$$

implique par restriction que

$$|L(v_h)| \leq C \|v_h\|, \forall v_h \in V_h.$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (1.6) a une solution unique  $u_h \in V_h$ . La preuve du Lemme est terminée. ■

La solution  $u_h$  ainsi obtenue est appelée l'approximation de Galerkin de  $u$ .

Maintenant, on va montrer que la résolution de (1.6) est équivalente à la résolution d'un système linéaire (fini). Ce qui est veut dire qu'il peut être résolu numériquement. Pour cela et pour  $h > 0$  fixé, considérons  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  une base de  $V_h$ ,  $N$  étant sa dimension. Ainsi  $v_h \in V_h$  si et seulement si il existe  $\{\beta_i\}_{i=1}^N$  tel que

$$v_h = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j,$$

En particulier  $u_h \in V_h$ , donc on peut écrire

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$$

Avec cette notation, le problème (1.6) est équivalent à

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) \beta_k \alpha_j &= \sum_{k=1}^N L(\varphi_k) \beta_k, \forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N \\ \iff \sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j &= L(\varphi_k), 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Ce dernier système linéaire peut s'écrire

$$A_h X_h = L_h,$$

où  $A_h$ , dite de rigidité, est la matrice carrée tel que

$$A_h = (a(\varphi_j, \varphi_k))_{1 \leq k, j \leq N},$$

le vecteur donné  $L_h$  est la matrice colonne :

$$L_h = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $X_h$  est le vecteur inconnu :

$$X_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A_h$  étant inversible ( la forme bilinéaire étant  $V_h$ -*elliptique* ), donc le système linéaire admet une solution unique. Ce qui est implique que le problème (1.6) admet  $u_h \in V_h$  comme solution unique.

## 1.5 Etude de la convergence

Une fois l'existence de  $u_h$  établie, il nous faut comparer  $u$  et  $u_h$ . Le but étant de montrer que

$$u - u_h \longrightarrow 0,$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ . Pour cela on établit le théorème suivant connu sous le nom de Théorème de Céa.

**Théorème 1.2** (Céa) [2]

Soient  $u \in V$  la solution du problème (1.1) et  $u_h \in V_h$  la solution du problème (1.6). Alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

**Preuve:** Comme (1.1) est vraie pour tout  $v \in V$ , donc l'identité suivante reste vraie pour tout  $v_h \in V_h$  i.e.,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Retranchant cette identité à (1.6), on obtient :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h.$$

Ainsi, on peut écrire que

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h,$$

On sait que  $a$  est  $V$ -elliptique et continue donc

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h \\ &\leq M_a \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h \\ \iff \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

**Théorème 1.3** [5]

On suppose qu'il existe un sous espace  $V_0$  dense dans  $V$  et une application

$$r_h : V_0 \rightarrow V$$

tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0, \forall v \in V_0.$$

Alors, la méthode d'approximation variationnelle converge, c'est à dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

où  $u \in V$  la solution du problème (1.1) et  $u_h \in V_h$  la solution du problème (1.6).

**Preuve:** Voir [5] [théorème 3.1-3, page 62]. ■

**Remarque 1.1** On dit que la convergence est d'ordre  $k$  si et seulement si il existe  $M > 0$  (indépendant de  $h$ ) tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq Mh^k.$$



## Chapitre 2

# Etude théorique des problèmes de convection-diffusion

Le but de ce chapitre est l'étude théorique de quelques problèmes de convection-diffusion stationnaires dans le cas unidimensionnel, et dans le cas multidimensionnel avec des conditions au bord de type Dirichlet. Cette étude est basée sur la formulation variationnelle de ces problèmes. Celle-ci permet d'obtenir aisément l'existence et l'unicité des solutions. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3] et [4].

### 2.1 Introduction

L'équation de convection-diffusion est une combinaison des équations de diffusion et de convection (advection). Cette équation décrit des phénomènes physiques dans lesquels des particules, de l'énergie ou d'autres paramètres physiques sont transférés dans un système physique selon deux processus : Diffusion et convection. Sa forme générale est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u - \operatorname{div}(\vec{v}u) + f$$

où :

$u$  : est la variable d'intérêt (concentration de l'espèce pour le transfert de masse, température pour le transfert de chaleur).

$k$  : est la diffusivité (coefficient de diffusion) qui est constant.

$\vec{v}$  : est le champ de vitesses avec lequel la quantité de particule se déplace. C'est une fonction du temps et de l'espace, :  $\vec{v} = f(\text{heure}, \text{lieu})$ .

$f$  : décrit les "sources" ou les "puits" de la concentration  $u$ . Par exemple : pour une espèce chimique,  $f > 0$  signifie qu'une réaction chimique crée plus d'espèces, et  $f < 0$  signifie qu'une réaction chimique détruit l'espèce.

$\nabla$  : représente le gradient, et  $\Delta$  : représente le laplacien.

Dans cette équation on distingue deux termes :

- $k\Delta u$  : décrit la diffusion, si on imagine que  $u$  est la concentration d'un produit chimique. Lorsque la concentration est faible quelque part par rapport aux zones environnantes, la substance va diffuser à partir de l'environnement, de sorte que la concentration va augmenter. Inversement, si la concentration est élevée par rapport à l'environnement, alors la substance va diffuser et la concentration va diminuer.
- $-\operatorname{div}(\vec{v}u)$  : décrit la convection (ou advection). A travers un exemple, on peut imaginer une personne debout sur la rive d'une rivière, mesurant la salinité de l'eau (quantité de sel) chaque seconde. En amont, on jette un seau de sel dans la rivière. Un peu plus tard, on verrait la salinité monter soudainement, puis tomber, à mesure que la zone d'eau salée passe. Ainsi, la concentration à un endroit donné peut changer à cause du débit.

## 2.2 Modèle physique

On considère un modèle de convection-diffusion. La convection est due au mouvement de l'air (le vent) qui disperse le polluant. Ce phénomène est un phénomène macroscopique (mélanges de masses d'air). Le phénomène de diffusion est un phénomène microscopique, les particules des espèces chimiques polluantes ont tendance à aller des zones de haute concentration vers les zones de faible concentration. Dans le modèle convection-diffusion, ces deux types de dispersion sont pris en compte. Par ailleurs, on suppose que le polluant est constitué d'un seul composant chimique et celui-ci n'interagit avec aucun autre composant. On n'a donc pas de réaction chimique et cette hypothèse simplifie considérablement le modèle. On note  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  ou  $3$ ,  $T$  un réel  $T > 0$ ,  $\vec{v}(x)$  la vitesse de l'air au point  $x$ ,  $x \in \Omega$ , et  $u(x, t)$  la concentration au point  $x$  et au temps  $t$ .

L'équation du modèle est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k\Delta u(x, t) + \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x, t) = 0, \quad t \in ]0, T[.$$

où  $k > 0$  est le coefficient de diffusivité du polluant dans l'air.

## 2.3 Problème de convection-diffusion stationnaire

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que le problème précédent est en état d'équilibre  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , tel que le champ de vitesse  $\vec{v}$  décrit un écoulement incompressible (c'est-à-dire qu'il a une divergence nulle  $\text{div } \vec{v} = 0$ ).

On voudrait alors trouver la solution  $u$  du problème de convection-diffusion stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -k\Delta u + \vec{v} \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ , et

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix},$$

avec  $v_i(x) \geq 0$  et borné  $\forall x \in \Omega$ , et de plus :  $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $v_{i_0}(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega$  où  $\beta$  est une constante positive.

$k > 0$  est le coefficient de diffusivité, et

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \\ \vec{v} \cdot \nabla &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

On pose  $V = H_0^1(\Omega)$ . Supposons que la solution  $u \in H^2(\Omega)$ , alors en multipliant l'équation de problème (2.1) par une "fonction test"  $w \in V = H_0^1(\Omega)$ , et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -k \int_{\Omega} \Delta u(x) w(x) dx + \int_{\Omega} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) w(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) w(x) dx. \\ \iff -k \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} w(x) dx + \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) w(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green cette égalité devient :

$$k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} w d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx.$$

Comme  $w \in H_0^1(\Omega)$ , alors :

$$k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx, \forall w \in V$$

Donc le problème (2.1) devient sous forme variationnelle : Trouver  $u \in V$  solution de

$$a(u, w) = L(w), \forall w \in V. \quad (2.2)$$

où

$$a(u, w) = k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx,$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx.$$

On montre que le problème (2.2) admet une solution unique. D'après le théorème de Lax-Milgram, il suffit de montrer que  $a$  est continue sur  $V \times V$ ,  $V$  - *elliptique* et que  $L$  est continue sur  $V$ .

- La continuité de la forme  $a$  : Soient  $u, w \in V = H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx \right| \\ &\leq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |v_i(x)| \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| |w(x)| dx \\ &\leq k \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\leq k \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + c(\Omega) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c(\Omega) \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc

$$|a(u, w)| \leq (k + c(\Omega)) \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par suite, on peut écrire :

$$\forall u, w \in V = H_0^1(\Omega) \quad |a(u, w)| \leq M_a \|u\|_V \cdot \|w\|_V$$

où :  $M_a = k + c(\Omega)$  est la constante de continuité de  $a$ .

- $V$  - *ellipticité* de la forme  $a$  : soit  $w \in V = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(w, w) &= k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} w(x) dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} w(x) dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w^2}{\partial x_i} dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2) dx, \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2 \eta) dx,$$

où

$$\eta = (1, \dots, 1)^T$$

D'après la formule de Stokes on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2) dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2 \eta) dx = \int_{\partial\Omega} w^2 \eta \cdot \vec{n} d\sigma(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} w^2 n_i d\sigma(x), \end{aligned}$$

avec

$$\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)^T \text{ est le vecteur normal.}$$

mais  $w \in H_0^1(\Omega)$ , donc

$$w|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow w^2|_{\partial\Omega} = 0,$$

On en conclut alors que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2) dx = 0$$

On obtient alors :

$$a(w, w) \geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx,$$

Donc, on peut écrire

$$a(w, w) \geq k \|w\|_V^2.$$

D'où la forme bilinéaire  $a$  est  $V$  – *elliptique*.

- la continuité de la forme  $L : \forall w \in V = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq \int_{\Omega} |f(x) w(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| |w(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$|L(w)| \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V, \forall w \in V.$$

D'où la continuité de la forme  $L$  sur  $V$ , avec  $C_L = c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$  est la constante de continuité de la forme  $L$ .

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel (2.2) a une solution unique  $u \in V = H_0^1(\Omega)$ .

## 2.4 Étude théorique d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D

Soit  $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  une fonction continue donnée, et soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Nous cherchons une fonctions  $u \in [0, 1] \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x) \text{ dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Si on considère le cas simple où  $f = f_0 = \text{constante}$ , alors dans ce cas le problème devient :

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = f_0 \text{ dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.4.1 La formulation variationnelle

Maintenant on va déterminer la formulation variationnelle du problème (2.3) :

On pose alors  $V = H_0^1(]0, 1[)$ . Supposons que la solution  $u$  de (2.3) soit suffisamment régulière. Disons  $u \in H^2(]0, 1[)$ . En multipliant ensuite l'équation dans (2.3) par une "fonction test"  $v \in V$  et en intégrant sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on obtient :

$$-\varepsilon \int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx.$$

En intégrant par parties le premier terme, on obtient :

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx.$$

Comme on a la fonction  $v \in H_0^1(]0, 1[)$  ( $v$  satisfait  $v(0) = v(1) = 0$ ), cette dernière identité implique que

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V$$

C'est la formulation faible (variationnelle) du problème de convection-diffusion stationnaire en 1D (2.3).

### 2.4.2 L'existence et l'unicité de la solution

On va montrer que le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.4)$$

admet une solution unique, où

$$a(u, v) = \varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx.$$

et

$$L(v) = f_0 \int_0^1 v(x) dx.$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, on va montrer que le problème (2.4) admet une solution unique  $v \in H_0^1(]0, 1[)$ .

Vérifions-en les hypothèses : La bilinéarité de  $a$  et la linéarité de  $L$  découlent de la linéarité de l'intégrale.

Reste à prouver :

- La continuité de  $a$  : Soient  $v, w \in V = H_0^1(]0, 1[)$ , on a :

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= \left| \varepsilon \int_0^1 v'(x) w'(x) dx + \int_0^1 v'(x) w(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |v'(x)| |w'(x)| dx + \int_0^1 |v'(x)| |w(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + c(0, 1) \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq (\varepsilon + c(0, 1)) \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Par suite, on peut écrire :

$$\forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \cdot \|w\|_V.$$

où

$$M_a = \varepsilon + c(0, 1)$$

est la constante de continuité de la forme bilinéaire  $a$ , et

$$\|v\|_V = \|v'\|_{L^2(0,1)} = \left( \int_0^1 (v'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où la continuité de  $a$ .



- $V$  - ellipticité de  $a$  : soit  $v \in V = H_0^1(]0, 1[)$ , on a :

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 v'(x) v(x) dx.$$

Mais, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 v'(x) v(x) dx &= [v^2(x)]_0^1 - \int_0^1 v'(x) v(x) dx \\ &= - \int_0^1 v'(x) v(x) dx, \text{ car } v(0) = v(1) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 v'(x) v(x) dx &= - \int_0^1 v'(x) v(x) dx \\ &\implies 2 \int_0^1 v'(x) v(x) dx = 0 \\ &\implies \int_0^1 v'(x) v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v'(x))^2 dx = \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Donc

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \varepsilon \|v\|_V^2.$$

où  $\varepsilon$  est la constante de  $V$  - ellipticité de  $a$ .

- La continuité de  $L$  : soit  $v \in V = H_0^1(]0, 1[)$ ,

$$|L(v)| = \left| f_0 \int_0^1 v(x) dx \right| \leq |f_0| \int_0^1 |v(x)| dx.$$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$|L(v)| \leq |f_0| \|1\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$|L(v)| \leq |f_0| c(0,1) \|v\|_V, \forall v \in V = H_0^1(]0,1[).$$

Ce qui montre que  $L$  est bien continue, avec  $C_L = |f_0| c(0,1)$  est la constante de continuité de  $L$ . Par le théorème de Lax–Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.4).

## Chapitre 3

# Approche numérique des problèmes de convection-diffusion

Ce chapitre est consacré à la discrétisation des problèmes de convection-diffusion stationnaire en 1D par la méthode des éléments finis [2], [5].

### 3.1 La méthode des éléments finis

#### 3.1.1 Définition d'un élément fini

On considère un triplet  $(K, P, \Sigma)$  où

- (i)  $K$  est un sous-ensemble fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide,
- (ii)  $P$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie et composé de fonctions définies sur  $K$ ,
- (iii)  $\Sigma$  est un ensemble fini de  $N$  points  $a_i (i = 1, \dots, N)$ , et on note  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ .

**Définition 3.1** On dit que  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant si et seulement si pour tout  $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ , il existe une fonction  $p \in P$  et une seule telle que

$$p(a_i) = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, N.$$

**Définition 3.2** Le triplet  $(K, P, \Sigma)$  est appelé élément fini de Lagrange s'il satisfait (i), (ii), (iii) et si  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant.

Etant donné un élément fini  $(K, P, \Sigma)$ , il existe donc pour tout entier  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) une fonction  $p_i \in P$  et une seule telle que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Plus généralement pour toute fonction  $v$  définie sur  $K$  à valeurs réelles, il existe une fonction  $p \in P$  et une seule qui interpole  $v$  sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire qui vérifie

$$p(a_j) = v(a_j), \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

**Définition 3.3** soit  $(K, P, \Sigma)$  un élément fini de Lagrange, l'ensemble  $\{p_i\}_{i=1}^N$  est dit base de fonctions de forme de  $P$  si

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

où  $p_i$  est appelée fonction de forme de  $P$ .

Voici quelques exemples d'éléments finis :

**Exemple 3.1**  $K = [a_1, a_2]$  est un intervalle réel avec  $a_1 < a_2$ ,  $P = P_1(K)$  est l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 1$  sur  $K$ ,  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1,2}$ , avec :

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

et  $\{p_1, p_2\}$  est une base de fonctions de forme de  $P_1(K)$ .

**Exemple 3.2**  $K = [a_1, a_2]$  est un intervalle réel avec  $a_1 < a_2$ . Prenons  $P = P_2(K)$  l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 2$  sur  $K$ , et  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1,2,3}$ , avec

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

où  $a_3 = a_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$  : est le milieu du segment  $[a_1, a_2]$ , et  $\{p_1, p_2, p_3\}$  : base de fonctions de forme de  $P_2(K)$ .

**Exemple 3.3**  $K$  est un triangle de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P = P_1(K)$  est l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 1$  sur  $K$ ,  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1,2,3}$ , avec :

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

où  $a_i, i = 1, 2, 3$  désignent les trois sommets de triangle, et  $\{p_i\}_{i=1}^3$  est une base de fonctions de forme de  $P_1(K)$ .

**Exemple 3.4**  $K$  est un triangle de  $\mathbb{R}^2, P = P_2(K)$  : l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 2$  sur  $K$ , et  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1,2,3} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}$ , tel que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 6,$$

où  $a_i, i = 1, 2, 3$  sont les trois sommets de  $K$ , et  $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$  désigne le milieu du côté  $[a_i, a_j]$   $1 \leq i < j \leq 3$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_4 & : = a_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\ a_5 & : = a_{2,3} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) \\ a_6 & : = a_{1,3} = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) \end{aligned}$$

et  $\{p_i\}_{i=1}^6$  une base de fonction de forme de  $P_2(K)$  dans cet exemple.

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la  $P$ -unisolvance, qui sont plus faciles à vérifier que la définition 3.1.

**Lemme 3.1** [2]

$\Sigma$  est  $P$ -unisolvant si et seulement si

(a) il existe  $N$  fonctions  $p_i \in P, i = 1, \dots, N$  linéairement indépendantes telles que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \forall j = 1, \dots, N.$$

où

$$\Sigma = \{a_j\}_{i=1}^N.$$

(b)  $\dim P = \text{card}(\Sigma)$ .

**Preuve:** [2]

$\Rightarrow$  Soit l'application

$$\begin{aligned} L & : P \rightarrow \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto (p(a_i))_{i=1}^N \end{aligned}$$

Il est clair que la  $P - unisolvance$  de  $\Sigma$  est équivalente à la bijectivité de  $L$ . Il est évident que  $L$  est linéaire, donc  $L$  est un isomorphisme de  $P$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il en découle que  $\dim P = \text{card}\Sigma$  (b). On définit à présent les fonctions  $p_i$  comme l'image réciproque de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$   $\{e_i\}_{i=1}^N$ , où

$$e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^N, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

autrement dit

$$p_i = L^{-1}(e_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Comme l'image d'une base par un isomorphisme reste une base, on en déduit alors (a).

☞ Pour établir la  $P - unisolvance$  de  $\Sigma$ , on montre que  $L$  défini ci-dessus est une bijection. Puisque  $\dim P = \text{card}\Sigma = N$ , alors  $P$  et  $\mathbb{R}^n$  ont la même dimension, la bijectivité de  $L$  est équivalente à la surjectivité de  $L$ , en effet étant donnée  $N$  scalaires réels  $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N$ , on associe la fonction

$$p = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j,$$

$p$  est une combinaison linéaire unique des fonctions  $p_j, 1 \leq j \leq N$ , et par conséquent il existe une unique fonction  $p \in P$  telle que

$$p(a_j) = \alpha_j, \quad (j = 1, \dots, N)$$

D'où la  $P - unisolvance$  de  $\Sigma$ .

La preuve est ainsi terminée. ■

**Définition 3.4** *Supposons que  $(K, P, \Sigma)$  est un élément fini de Lagrange. Pour toute fonction  $v$  définie sur  $K$ , on appelle  $P - interpolé$  de  $v$  sur  $\Sigma$ , l'unique élément  $\Pi v \in P$  tel que :*

$$\Pi v(a_i) = v(a_i), \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{3.1}$$

On définit  $\Pi v$  par

$$\Pi v = \sum_{j=1}^N v(a_j) p_j.$$

**Exemple 3.5** *Si on reprend les exemples 3.1, 3.2 qui sont des éléments finis de Lagrange, si  $v \in C([a_1, a_2])$ , on reconnaît en  $\Pi v$  l'interpolé de Lagrange (au sens classique) de  $v$  aux points  $a_i (i = 1, \dots, N)$ .*

### 3.1.2 Famille d'éléments finis

**Définition 3.5** [2]

Deux éléments finis de Lagrange  $(K, P, \Sigma)$  et  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  sont dits équivalents si et seulement si il existe une application bijective  $F : \widehat{K} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$  telle que

- (i)  $K = F(\widehat{K})$  une partie compacte et connexe,
- (ii)  $P = \left\{ p : K \longrightarrow \mathbb{R} : p \circ F \in \widehat{P} \right\}$ ,
- (iii) il existe  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  et  $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{a}_i\}_{i=1}^N, \forall p \in P, i = 1, \dots, N$ , tel que  $\Sigma = F(\widehat{\Sigma})$ .

De plus, si la bijection  $F$  est choisie affine inversible, alors  $(K, P, \Sigma)$  et  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  sont dits affine-équivalents. (ou affinement équivalents).

**Remarque 3.1**  $F : \widehat{K} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$  est affine inversible s'il existe une matrice inversible  $A$  et un vecteur  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$F(x) = Ax + b,$$

où

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

**Exemple 3.6** On reprend l'exemple 3.1 : Soit  $K = [a_1, a_2]$  et  $\widehat{K} = [\widehat{a}_1, \widehat{a}_2]$  deux intervalles réels non vides, avec  $a_1 < a_2$  et  $\widehat{a}_1 < \widehat{a}_2$ ,  $P = P_1(K)$  et  $\widehat{P} = P_1(\widehat{K})$  sont les ensembles des polynômes de degré  $\leq 1$  sur  $K$  et  $\widehat{K}$  respectivement. On pose  $\Sigma_K = \{a_i^K\}_{i=1,2}$  et  $\Sigma_{\widehat{K}} = \{\widehat{a}_i^{\widehat{K}}\}_{i=1,2}$ . Alors les éléments finis  $(K, P_1(K), \Sigma_K)$  et  $(\widehat{K}, P_1(\widehat{K}), \Sigma_{\widehat{K}})$  sont affine-équivalents. En effet, soit l'application affine

$$F : \widehat{x} \mapsto \alpha \widehat{x} + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

qui est inversible car : on a

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \exists \widehat{x} \in \widehat{K} \text{ tel que } x = F(\widehat{x}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \widehat{a}_1 + \beta = a_1 \\ \alpha \widehat{a}_2 + \beta = a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & 1 \\ \widehat{a}_2 & 1 \end{pmatrix} = \widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 \neq 0$$

Ce système admet une solution unique puisque  $\widehat{a}_2 - \widehat{a}_1 \neq 0$ , donc  $F$  est inversible. La deuxième propriété de la définition se déduit du fait que la composée de deux polynômes de degré  $\leq 1$  est encore un polynôme

de degré  $\leq 1$ . La dernière propriété découle du fait que

$$F(\widehat{a}_i) = a_i, i = 1, 2.$$

**Théorème 3.1** [2]

Soient  $(K, P, \Sigma), (\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  deux éléments finis affinement équivalents. L'ensemble  $\{p_i\}_{i=1}^N$  est une base de  $P$  associée à l'élément fini  $(K, P, \Sigma)$  si et seulement si l'ensemble  $\{\widehat{p}_i\}_{i=1}^N$  est une base de  $\widehat{P}$  associée à l'élément fini  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ .

De plus, si on a

$$v(a_i) = \widehat{v}(\widehat{a}_i), \forall i = 1, \dots, N.$$

Alors

$$\widehat{\Pi}v = \widehat{\Pi}\widehat{v},$$

Pour toute fonction  $v$  définie sur  $K$ .

**Preuve:** Voir [2] [Théorème 6.19, page 74]. ■

### 3.1.3 Éléments finis simpliciaux

Soit  $(K, P, \Sigma)$  un élément fini de Lagrange où le domaine géométrique  $K$  est un  $n$ -simplexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$ , un  $n$ -simplexe de  $\mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe de  $(n+1)$  points  $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, n+1$  non situés dans un même hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . C'est-à-dire tels que la matrice  $A$  d'ordre  $(n+1)$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

soit inversible. Dans ce cas le domaine géométrique  $K$  est appelé  $n$ -simplexe de sommets  $a_j, j = 1, \dots, n+1$ .

**Exemple 3.7** Si  $n = 2$  le 2-simplexe  $K$  est un triangle non dégénéré et si  $n = 3$  le 3-simplexe  $K$  est un tétraèdre.

Le but de la méthode des éléments finis, est de décomposer (discrétiser) le domaine d'étude de l'EDP en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). De plus, on va chercher la fonction solution  $u$



comme étant interpolée par des « bouts » de solutions définis sur chaque élément de décomposition de  $K$ .

### 3.2 Discrétisation par éléments finis d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D

On reprend le problème (2.3) du chapitre II dont la formulation variationnelle est donnée par :

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V. \quad (3.2)$$

et on applique la méthode des éléments finis :

On approche la solution  $u$  du problème (2.3) par une méthode d'éléments finis. Soit  $a_1, \dots, a_N$   $N$  points situés à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$  de longueur uniforme  $h$  ( $h = \frac{1}{N+1}$ ) tel que

$$a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_N < 1 = a_{N+1}.$$

Soit  $V_h$  un sous espace de  $V = H_0^1([0, 1])$  de dimension finie. On pourra construire  $V_h$  comme un espace de fonctions continues telles que leurs restrictions aux intervalles de subdivision de  $[0, 1]$  est une fonction polynomiale de degré  $\leq 1$  c'est-à-dire :

$$V_h = \{v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[lh, (l+1)h]} \in P_1, \forall l = 0, \dots, N, v(0) = v(1) = 0\},$$

avec

$$\dim V_h = N.$$

On considère maintenant les  $N$  fonctions de base de  $V_h$  :  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) telles que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

avec  $a_j = jh$  : les nœuds intérieurs à  $]0, 1[$ . Une telle fonction s'écrit certainement sous la forme :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-a_i}{h} & \text{si } a_{i-1} \leq x \leq a_i \\ 1 - \frac{x-a_i}{h} & \text{si } a_i \leq x \leq a_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \notin [a_{i-1}, a_{i+1}] \end{cases}$$

Le graphe de la fonction  $\varphi_i$  est représenté dans la figure (3.3)

(3.3)

Une approximation standard de (3.2) par éléments finis de degré 1 consiste à chercher  $u_h \in V_h$  tel que

$$\varepsilon \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 u_h'(x) v_h(x) dx = f_0 \int_0^1 v_h(x) dx, \forall v_h \in V_h. \quad (3.4)$$

On peut alors écrire  $u_h$  comme combinaison linéaire des fonctions de base  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ , c'est-à-dire

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x), \forall x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

où

$$u_i = u_h(a_i), i = 1, \dots, N,$$

est la valeur de  $u_h$  au nœud  $a_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Ensuite, on choisit  $v_h = \varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Le problème (3.4) est donc équivalent à chercher  $u_1, \dots, u_N$  tel que

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 (\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i'(x) \varphi_j(x)) dx = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

Ici encore, on obtient un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues

$$AU = F, \quad (3.7)$$

où  $A$  est la matrice carré d'ordre  $N \times N$ , de coefficients

$$A_{j,i} = \int_0^1 (\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i'(x) \varphi_j(x)) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

et  $F$  le vecteur de composantes

$$F_j = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Finalement,  $U = (u_1, \dots, u_N)$  est le vecteur inconnu.

# Algorithme

- Etape 0 : entrées  $\varphi_i, i = 1, \dots, N, ai = ih$  et  $f_0$ .
- Etape 1 : sorties :

$$A_{j,i} = \int_0^1 (\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i'(x) \varphi_j(x)) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$
$$F_j = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

- Etape 2 : résolution du système linéaire sous forme matricielle (système tridiagonal), avec

$$A_{j,i} = \begin{cases} \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{1}{2} & \text{si } j < i \\ \frac{2\varepsilon}{h} & \text{si } j = i \\ \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{1}{2} & \text{si } j > i \end{cases}$$

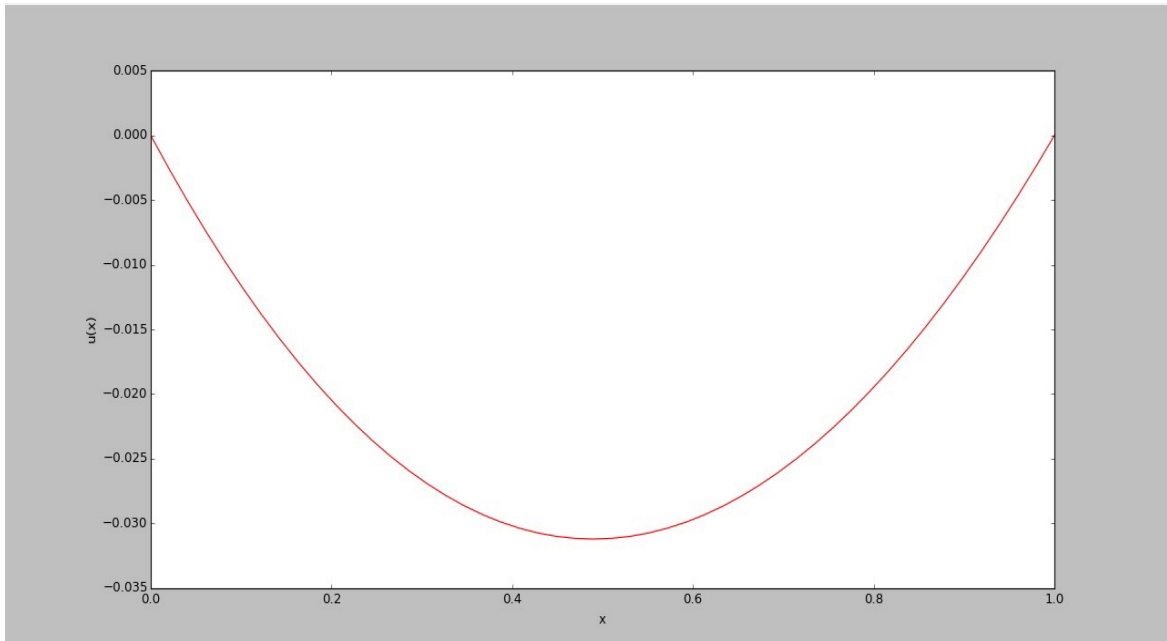
et

$$F_j = f_0 h.$$

**Remarque 3.2** *Comme la matrice  $A$  est tridiagonale, la méthode la plus adaptée pour résoudre un tel système (3.7) est la méthode de Thomas qui utilise un processus de remontée.*

# Résultat de simulation

```
#la resolution analytique du probleme:
import math
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
eps=10(-10)
x=np.linspace(0,1)
y=[]
for n in x :
y.append((np.exp(1/eps)-np.exp(n/eps))/(np.exp(1/eps)-1)+n-1)
plt.plot(x,y,'b')
plt.ylabel('u(x)')
plt.xlabel('x')
```



Le graphe de la solution  $u$

(3.8)

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a résolu numériquement les problèmes de convection-diffusion stationnaires avec conditions au bord par les méthodes variationnelles. Le but principal a été de voir comment discrétiser ces problèmes par une méthode des éléments finis de degré 1.

# Bibliographie

- [1] Haim Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications (Masson, Paris), 1983.
- [2] Serge Nicaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles (Edition Dunod, Paris), 2000.
- [3] Jacques Rappaz & Marco Picasso, Introduction à l'analyse numérique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [4] P.A.Raviart, Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides, Collection des E&R, EDF, n40, Edition EYROLLES, 1981.
- [5] P.A.Raviart & J.M.Tomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Edition Dunod, Paris), 1998.