

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية

الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



**THESE**

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTORAT 3<sup>ème</sup> Cycle**

**En** : Génie mécanique.

**Spécialité** : Systèmes mécaniques et matériaux

**Par** : HACHEMI Mohammed

**Sujet**

**Analyse dynamique d'une plaque rectangulaire en composite avec des ouvertures**

Soutenue publiquement, le 10/05/2018, devant le jury composé de :

M CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M HOUMAT Abderrahim	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M HAMZA CHERIF Sidi Mohammed	MCA	Univ. Tlemcen	Co- Directeur de thèse
M BOUAZZA Mokhtar	Professeur	Univ. Bechar	Examineur 1
M BELALIA Sid Ahmed	MCA	Univ. Tlemcen	Examineur 2

## *Dédicaces*

*A mes très chers parents, pour leurs encouragements aux moments difficiles, pour leur amour, leurs sacrifices et patience qu'ils ont toujours manifestés à mon égard, qu'ils trouvent ici le témoignage de mon profond respect et gratitude ; et que cette thèse soit un moyen d'exprimer ma reconnaissance et mon éternelle affection pour leur dévouement et pour leur soutien.*

*A mes chers frères Abdeljalil, Ismail, Youcef et mes chères sœurs, et toute la famille HACHEMI et BOUHASSOUNE*

*Hachemi Mohammed..*

## *Remerciements*

Au terme de ce travail, il m'est très agréable d'exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette modeste recherche.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **Houmat Abderrahim**; Professeur à la Faculté de Technologie, de l'Université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen; pour son encadrement, ses précieux conseils, ainsi que ses encouragements et sa confiance. Je lui dois beaucoup pour le contenu du travail présenté.

Ma très vive gratitude va aussi à Monsieur **Hamza Cherif Sidi Mohammed** ; Maître de conférences à la Faculté de Technologie, de l'Université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen, pour avoir accepté de diriger avec beaucoup d'attention et de soin cette thèse, qu'il trouve ici, l'expression de ma profonde et sincère reconnaissance, pour tous ses efforts fournis à mon égard le long de ce travail, son savoir, ses critiques constructives, et sa confiance étaient pour moi d'un grand secours. Je voudrais également saluer ses qualités, mais aussi sa compréhension et son soutien.

Je voudrais également remercier Monsieur **Cheikh Abdelmadjid** ; Professeur à la Faculté de Technologie, de l'Université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen pour avoir accepté de présider ce jury. Pour moi c'est un immense honneur et un vrai bonheur.

Je remercie également Monsieur **Bouazza Mokhtar** ; Professeur à la Faculté de Technologie, de l'Université Tahri Mohamed de Bechar, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Belalia Sid Ahmed**; Maître de conférences à la Faculté de Technologie, de l'Université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen qui a bien voulu juger ce travail.

Mes sincères remerciements sont adressés aussi à Madame **Hachemi N.** ; Docteur en Ecologie et Environnement de l'Université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen, pour son aide, qui m'a apporté un soutien moral qui m'a permis de traverser les moments de doute et de progresser dans la réalisation de ma thèse.

Je remercie en particulier, **Bendahmane Amine, Serdoun Sidi Mohammed Nadjib, Guenanou Ahmed** et **Khaladi Zakaria** pour leurs aides précieux et leurs encouragements continus à achever ma thèse.

# ملخص

هذه الأطروحة تعرض تحليل الاهتزازات الحرة للصفائح المستطيلة المركبة الطبقة ذات الصلابة الثابتة والمتغيرة مع وجود الفتحات. تم صياغة المشكلة بالاستناد على نظريتين الدرجة الأولى والدرجة العالية للصفائح إلى جانب العنصر  $p$ -الرباعي المنحني. تم حساب عناصر مصفوفات الصلابة والكتلة بشكل تحليلي. الحواف المنحنية تم تمثيلها بدقة باستخدام دوال المرح. تم تطوير كود الحساب باستخدام برنامج Mathcad لتحديد الترددات الأساسية والوسائط المصاحبة لمختلف المعلمات الفيزيائية والميكانيكية مثل حجم وشكل الفتحة، سمك اللوحة، زاوية اتجاه الألياف والشروط الحدودية. النتائج التي تم الحصول عليها أظهرت اتفاقاً جيداً من خلال مقارنتها مع الحلول المتاحة. يتم تقديم نتائج جديدة للترددات للوحات مستطيلة ذات صلابة متغيرة مع فتحات.

## الكلمات الرئيسية

اهتزازات حرة؛ لوحة مركبة طبقية مع فتحات. صلابة ثابتة ومتغيرة. نظرية الدرجة الأولى؛ نظرية الدرجة العالية؛ العنصر  $p$ -الرباعي المنحني.

# Résumé

---

Cette thèse présente l'analyse de la vibration libre des plaques rectangulaires composites stratifiées à rigidité constante et variable avec ouvertures. La formulation du problème est basée sur les théories des plaques du premier ordre et d'ordre élevé couplées avec un élément-p quadrilatéral courbé. Les éléments des matrices de rigidité et masse sont calculés analytiquement. Les bords courbés sont représentés avec précision en utilisant la méthode des fonctions de mélange. Un code du calcul est élaboré à l'aide du logiciel Mathcad pour déterminer les fréquences fondamentales et modes associés pour différents paramètres physiques et mécaniques tel que la dimension et forme de l'ouverture, épaisseur de la plaque, angle d'orientation des fibres, et conditions aux limites. Les résultats obtenus montrent un très bon accord avec les solutions disponibles dans la littérature. De nouveaux résultats pour les fréquences des plaques rectangulaires stratifiées à rigidité variable avec ouvertures sont présentés.

## **Mots clés**

*Vibration libre; plaque composite stratifiée avec ouvertures ; rigidité constante et variable; théorie du premier ordre; théorie d'ordre élevé; élément-p quadrilatéral courbé.*

# *Abstract*

---

This thesis presents the analysis of the free vibration of constant and variable stiffness laminated composite rectangular plates with openings. The problem formulation is based on the first-order and high-order plate theories coupled with a curved quadrilateral p-element. The elements of the stiffness and mass matrices are calculated analytically. The curved edges are accurately represented using the blending function method. A calculation code is developed using the Mathcad software to determine the fundamental frequencies and associated modes for different physical and mechanical parameters such as the opening size and shape, plate thickness, fiber orientation angle, and boundary conditions. The results obtained show a very good agreement with the solutions available in the literature. New results for the frequencies of variable stiffness laminated composite rectangular plates with openings are presented.

## **Keywords**

*Free vibration; laminated composite plate with openings; constant and variable stiffness; first-order theory; high-order theory; curved quadrilateral p-element.*

# Sommaire

<b>Sommaire</b> .....	I
<b>Liste des figures</b> .....	IV
<b>Liste des tableaux</b> .....	VI
<b>Liste des symboles et abréviations</b> .....	X
<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Analyse bibliographique</b> .....	3
1.1 Généralités .....	3
1.2 Développement des matériaux composites à rigidité variable .....	5
1.2.1 Bref historique sur les matériaux composites .....	5
1.2.2 Matériaux composites à rigidité variable .....	6
1.3 Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques pour un élément courbé ....	8
1.4 Analyse dynamique des plaques composites avec ouverture .....	10
1.5 Objectif et motivation .....	13
<b>Chapitre 2 : Généralité sur les matériaux composites à rigidité variable</b> .....	15
2.1 Introduction .....	15
2.2 Procédés d'élaboration des composites .....	18
2.2.1 Moulage au contact .....	18
2.2.2 Moulage par projection simultanée .....	18
2.2.3 Enroulement filamentaire .....	19
2.3 Types des structure en composites .....	19
2.3.1 Structures composites sandwich .....	20
2.3.2 Structures composites stratifiées .....	20
2.4 Composite stratifié à rigidité variable (CSRV) .....	21
2.4.1 Concept théorique des fibres curvilignes .....	22
2.4.2 Méthode de la fabrication des fibres curvilignes .....	24
<b>Chapitre 3 : Théorie de plaques composites à rigidité variable</b> .....	28
3.1 Introduction .....	28
3.2 Equations cinématique des théories FSDT et HSDT $C^0$ .....	31
3.3 Relations déformation–déplacement .....	32
3.4 Relations contrainte–déformation .....	33

3.5	Variation parabolique de fibre .....	35
3.6	Energie de déformation et cinétique de la plaque composite à rigidité variable .....	37
<b>Chapitre 4 : Application de la version p de la méthode des éléments finis à la modélisation de l'élément-p quadrilatérale courbé.....</b>		<b>39</b>
4.1	Introduction .....	39
4.2	Méthode des fonctions de mélange (blending) .....	40
4.2.1	Chaine de la transformation Jacobien .....	41
4.3	Modélisation par la version p de la plaque avec ouverture circulaire .....	43
4.3.1	Sélections des fonctions de forme .....	44
4.4	Formulation de l'élément-p quadrilatérale courbé .....	47
4.4.1	Energie de déformation .....	48
4.4.2	Energie cinétique .....	51
4.5	Equations du mouvement de vibration libre .....	53
<b>Chapitre 5 : Elaboration d'un programme de calcul .....</b>		<b>55</b>
5.1	Environnement du programme de calcul .....	55
5.2	Schéma globale du programme de calcul .....	55
5.3	Etapas de fonctionnement du programme de calcul .....	57
5.3.1	Stockage des données générales .....	57
5.3.1.1	Paramètres géométriques .....	58
5.3.1.2	Paramètres physiques .....	58
5.3.1.3	Paramètres de la version-p de la méthode des éléments finis .....	58
5.3.2	Sous-programme des matrices élémentaires .....	58
5.3.3	Sous-programme des matrices globales .....	58
5.3.4	Sous-programme des conditions aux limites .....	58
5.3.5	Sous-programme de calcul des fréquences propres .....	59
<b>Chapitre 6 : Validation et interprétation des résultats .....</b>		<b>61</b>
6.1	Présentation des géométries .....	61
6.2	Convergence et validation .....	63
6.2.1	Plaque CSRC avec l'ouverture N°1 (carrée) .....	63
6.2.2	Plaque CSRC avec ouverture quelconque .....	69
6.2.2.1	Cas N°1 : Plaque CSRC avec l'ouverture N°3 .....	69
6.2.2.2	Cas N°2 : Plaque CSRC avec l'ouverture N°4 .....	73
6.2.3	Plaque CSRV sans ouverture .....	75
6.2.4	Plaque orthotrope sans ouverture .....	78

6.3 Résultats et interprétations .....	81
6.3.1 Plaque CSRC avec l'ouverture N°2 .....	81
6.3.1.1 Cas N°1 : Plaque avec ouverture libre .....	82
6.3.1.2 Cas N°2 : Plaque avec ouverture encastrée .....	84
6.3.1.3 Cas N°3 : Plaque avec ouverture désaxée .....	85
6.3.2 Plaque CSRC avec l'ouverture N°5 .....	87
6.3.3 Plaque CSRV avec l'ouverture N°2 .....	89
6.3.3.1 Cas N°1 : une seule couche .....	89
6.3.3.2 Cas N°1 : Deux couches .....	96
6.3.4 Comparaison entre une plaque CSRV et une plaque CSRC .....	105
<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>111</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>113</b>
<b>Annexe A.....</b>	<b>125</b>

# Liste des figures

Figure 1.1 : Composants d'une aile d'avion. ....	4
Figure 1.2 : Fenêtres d'un avion.....	4
Figure 2.1 : Différentes familles de matrice .....	16
Figure 2.2 : Types des fibres .....	16
Figure 2.3 : Principaux type de renforts (Reyne 2007) .....	17
Figure 2.4 : Types des fibres utilisées dans l'industrie (CARMA 2006). ....	17
Figure 2.5 : Opération de moulage au contact (ANFA 2014). ....	18
Figure 2.6 : Moulage par projection simultanée (CARMA 2006) .....	19
Figure 2.7 : Enroulement filamentaire (Daghia et al. 2011) .....	19
Figure 2.8 : Eléments de structure composite sandwich. ....	20
Figure 2.9 : Eléments d'une structure composite stratifiée. ....	20
Figure 2.10 : Plaque rectangulaire composite avec un espacement variable des fibres. (Leissa et al. 1990). ....	21
Figure 2.11 : Comparaison entre les fibres droites et la configuration des fibres à rigidité variable (Haldar et al. 2015). ....	22
Figure 2.12 : Paramètres du chemin de référence de fibre curviligne. ....	23
Figure 2.13 : Plaques avec des fibres de forme (a) quadratique ou parabolique, (b) cubique et (c) arbitraire ou hyperbolique (Honda et al. 2012). ....	24
Figure 2.14 : Machine de placement automatisé des fibres (AFP). ....	25
Figure 2.15 : Tête de placement de machine AFP (Evans, 2001) .....	26
Figure 2.16 : Fabrication de grande section de fuselage du Boeing 787 Dreamliner par AFP (Ijsselmuiden 2011). ....	27
Figure 3.1 : Géométrie d'une plaque.....	28
Figure 3.2 : Distribution de contrainte du cisaillement transversal de la théorie FSDT. ....	29
Figure 3.3 : Géométrie avant et après déformation d'un élément de la plaque dans le cas de FSDT. ....	31
Figure 3.4 : Géométrie avant et après déformation d'un élément de la plaque dans le cas de HSDT C0. ....	32
Figure 3.5 : Repère global (x, y, z) d'une couche de stratifié de fibre curviligne. ....	34
Figure 3.6 : Orientation des fibre de référence de la plaque CSRV. ....	36
Figure 4.1 : Domaine physique ou réel et domaine de calcul. ....	40
Figure 4.2 : Plaque avec ouverture circulaire discrétisée en 4 éléments p.....	43

---

Figure 4.3 : élément p quadrilatère courbé.....	44
Figure 4.4 : Elément bidimensionnel quadrilatéral .....	45
Figure 4.5 : Dix premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales. ....	46
Figure 5.1 : schéma globale de programme de calcul. ....	56
Figure 6.1 : Plaque rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée).....	61
Figure 6.2 : Plaque rectangulaire avec l'ouverture N°2 (circulaire).. ....	62
Figure 6.3 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°3 . ....	62
Figure 6.4 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°4 . ....	62
Figure 6.5 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°5 .. ....	62
Figure 6.6 : Plaque CSRV sans ouverture.....	75
Figure 6.7 : Plaque rectangulaire avec une ouverture circulaire désaxée.. ....	86
Figure 6.8 : Plaque CSRV à une seule couche avec l'ouverture N° 2... ....	90
Figure 6.9 : Plaque CSRV antisymétrique à deux couches avec l'ouverture N° 2... ....	96
Figure 6.10 : Cinq premiers modes d'une plaque CSRV à deux couches $\pm < 0,0 >$ EEEE et de $r/b = 0.2$ . ....	103
Figure 6.11 : Cinq premiers modes d'une plaque CSRV à deux couches $\pm < 0,40 >$ EEEE et de $r/b = 0.2$ . ....	104
Figure 6.12 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (AAAA).....	107
Figure 6.13 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (EEEE).....	108
Figure 6.14 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (LELE).....	109
Figure 6.15 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (ELLL).....	110

# Liste des tableaux

Tableau 6.1 : Propriétés mécaniques des matériaux.....	64
Tableau 6.2 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $c/a=0$ , $a/h=75$ , matériau (1). .....	65
Tableau 6.3 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $c/a=0.2$ , $a/h=75$ , matériau (1). .....	65
Tableau 6.4 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $c/a=0.4$ , $a/h=75$ , matériau (1).. .....	66
Tableau 6.5 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $c/a=0.6$ , $a/h=75$ , matériau (1).. .....	66
Tableau 6.6 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $(c/a)=0.8$ , $a/h=75$ , matériau (1). .....	66
Tableau 6.7 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), EEEE, $c/a=0.2$ , $a/h=15$ , matériau (1).. .....	67
Tableau 6.8 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), $c/a=0.4$ , $a/h=15$ , matériau (1).. .....	67
Tableau 6.9 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), $c/a=0.6$ , $a/h=15$ , matériau (1).. .....	67
Tableau 6.10 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), $c/a=0.8$ , $a/h=15$ , matériau (1).. .....	68
Tableau 6.11 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée), AAAA, $a/h=100$ , matériau (2).. .....	68
Tableau 6.12 : Propriétés mécaniques de matériau (3). .....	69
Tableau 6.13 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres ( $0^\circ/0^\circ/0^\circ$ ). .....	70
Tableau 6.14 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres ( $15^\circ/-15^\circ/15^\circ$ ).. .....	70

Tableau 6.15 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres ( $30^\circ/-30^\circ/30^\circ$ ).....	71
Tableau 6.16 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres ( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ ).....	71
Tableau 6.17 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). .....	72
Tableau 6.18 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, EEEE.....	72
Tableau 6.19 : Comparaison des cinq premières modes de paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AEAE.....	73
Tableau 6.20 : Complaisons et validation des cinq premières modes de paramètre de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique AAAA avec une ouverture quelconque N°2.....	74
Tableau 6.21 : Complaisons et validation des cinq premières modes de paramètre de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique EEEE avec une ouverture quelconque N°2.....	74
Tableau 6.22 : Propriétés mécanique du matériau (4).....	76
Tableau 6.23 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque CSRV sans ouverture, EEEE.....	76
Tableau 6.24 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque CSRV sans ouverture, AAAA.....	77
Tableau 6.25 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque CSRV sans ouverture, ALLE. ....	77
Tableau 6.26 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque CSRV sans ouverture, LEAE. ....	78
Tableau 6.27 : Propriétés mécanique du matériau (5).....	79
Tableau 6.28 : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, EEEE. ....	79
Tableau 6.29 : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, AAAA.. ....	79
Tableau 6.30 : : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, AA AE.....	80
Tableau 6.31 : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, AELE.....	80
Tableau 6.32 : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, EA EA. ....	80

---

Tableau 6.33 : Comparaison paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire orthotrope, AALA.....	81
Tableau 6.34 : Propriétés mécaniques du matériau (6).....	82
Tableau 6.35 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque composite stratifiée rectangulaire avec une ouverture circulaire, EEEE.....	82
Tableau 6.36 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque composite stratifiée rectangulaire avec une ouverture circulaire, AAAA.....	83
Tableau 6.37 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque composite stratifiée rectangulaire avec une ouverture circulaire, EEEE.....	83
Tableau 6.38 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ d'une plaque composite stratifiée rectangulaire avec une ouverture circulaire, AAAA.....	84
Tableau 6.39 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique avec ouverture circulaire totalement encastree. .....	85
Tableau 6.40 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque rectangulaire composite stratifiée antisymétrique avec ouverture circulaire totalement encastree.....	85
Tableau 6.41 : Premiers modes de paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée symétrique avec une ouverture circulaire désaxée.....	86
Tableau 6.42 : Premiers modes de paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée antisymétrique avec une ouverture circulaire désaxée.....	86
Tableau 6.43 : Propriétés mécanique du matériau (5).....	87
Tableau 6.44 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée symétrique AAAA avec ouverture quelconque N°3.....	87
Tableau 6.45 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée antisymétrique AAAA avec ouverture quelconque N°3.....	88
Tableau 6.46 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée symétrique EEEE avec ouverture quelconque N°3. ....	88
Tableau 6.47 : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque composite stratifiée antisymétrique avec ouverture quelconque, EEEE.....	88
Tableau 6.48 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à une seule couche AAAA. ....	92
Tableau 6.49 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à une seule couche EEEE. ....	93
Tableau 6.50 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à une seule couche LELE. ....	94
Tableau 6.51 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à une seule couche ELLL. ....	95

Tableau 6.52 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à deux couches AAAA. ....	98
Tableau 6.53 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à deux couches EEEE. ....	99
Tableau 6.54 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à deux couches LELE. ....	100
Tableau 6.55 : Cinq premiers paramètres de fréquence $\Omega$ de plaque CSRV à une seule couche ELLL. ....	101

# Liste des symboles et abréviations

## A- Liste des symboles

$u$	Déplacement longitudinale suivant x
$v$	Déplacement longitudinale suivant y.
$w$	Déplacement transversale suivant z.
$\beta_x$	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x.
$\beta_y$	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y.
$\phi_x$	Fonction paramétrée de gauchissement suivant l'axe x.
$\phi_y$	Fonction paramétrée de gauchissement suivant l'axe y.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation
$[T]$	Matrice de transformation de base.
$[Q]$	Matrice de constante élastique
$E$	Module d'élasticité
$G$	Module de cisaillement.
$\nu$	Coefficient de poisson.
$\rho$	Densité.
$\theta$	Angle d'orientation des fibres constate.
$\theta(x)$	Angle d'orientation des fibres curvilignes.
$A$	Constante de proportionnalité des fibres curviligne.
$a$	Largeur de la plaque.
$\gamma$	Paramètre non dimensionnel des fibres curviligne.
$E_d$	Energie de déformation.
$E_c$	Energie cinétique.
$k_s$	Facteur de cisaillement transversal.
$\{a_i\}$	Vecteur des déplacements nodaux.

$[N_i]$	Matrice des fonctions de forme.
$(\xi, \eta)$	Cordonnées locales.
$(x, y)$	Cordonnées cartésiennes.
$X(\xi, \eta)$	Fonction de mélange (blending function) suivant $x$ .
$Y(\xi, \eta)$	Fonction de mélange (blending function) suivant $y$ .
$J$	Jacobienne.
$\{q\}$	Vecteur de déplacement généralisé.
$[K]^e$	Matrice de rigidité élémentaire.
$[M]^e$	Matrice de masse élémentaire.
$\Omega$	Paramètre de fréquence.
$[K]^G$	Matrice de rigidité globale.
$[M]^G$	Matrice de masse globale.

### **B- Liste des abréviations**

FSDT	Théorie du premier ordre de déformation de cisaillement.
HSDT	Théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement.
CPT	Théorie classique des plaques.
TSDT	Théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement.
FRP	Plastiques renforcées des fibres.
CSRC	Composite stratifié à rigidité constante.
CSRV	Composite stratifié à rigidité variable.
MEF	Méthode des éléments finis.
CMO	Composites à matrices organiques.
CMC	Composites à matrices céramiques.
CMM	Composites à matrices métalliques.
TD	Thermodurcissables.
TP	Thermoplastiques.

AFP	Machine de placement automatisé des fibres.
IGA	Méthode d'analyse Isogéométrique
EFG	Méthode de Galerkin.
MKI	Méthode d'interpolation de Kriging.

---

*Introduction*

*Générale*

---

# *Introduction générale*

---



es matériaux composites sont un groupe des matériaux formés en assemblant au moins deux matériaux différents. Ces matériaux possèdent des propriétés de performance plus élevées en comparant avec les matériaux conventionnels. Certaines de ses propriétés sont la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, la résistance aux hautes températures, la conductibilité thermique, la rigidité et la légèreté. Les plaques composites stratifiées à rigidité constante sont faites généralement par des fibres droites. Ces propriétés peuvent être améliorées en proposant des fibres curvilignes, dans lesquels la rigidité de la plaque devient variable.

Les ouvertures ou les découpes dans les structures sont nécessaires pour servir les exigences industrielles dans l'assemblage des éléments, passage des objets,...etc. Les ouvertures dans les éléments structuraux comme les ailes d'avion faites en composites stratifiées, ces éléments peuvent être entraînés un changement dans les caractéristiques dynamiques. Ses effets sont susceptibles d'être assez considérables lorsque la plaque subie de grandes oscillations, en particulier dans les structures des navettes spatiales ou des avions sont fabriquées en utilisant des peaux minces. Les vibrations indésirables peuvent provoquer des défaillances soudaines dues à la résonance en présence de l'ouverture. Donc, Il est important de prédire avec précision les fréquences propres de ces éléments structuraux. L'analyse vibratoire de ces structures peut être effectuée en proposant un modèle théorique des plaques composites, munit d'une ouverture au milieu de la plaque, afin de bien étudier la réponse fréquentielle de ces structures avec différents paramètres physiques et géométriques.

L'objectif principal de cette thèse est l'analyse dynamique des plaques composites stratifiées à rigidité constante et variable, ayant différentes formes d'ouverture. Deux éléments- $p$  quadrilatéraux courbés sont considérés à la modélisation de la plaque avec ouverture, en utilisant les deux théories, du premier ordre de déformation de cisaillement FSDT (First order shear deformation theory) et d'ordre élevé de déformation de cisaillement HSDT  $C^0$  (Higher order shear deformation theory). L'étude est faite en variant les paramètres physiques et géométriques de la plaque, la forme et la taille de l'ouverture, ainsi que la configuration des stratifiées.

## **Organisation de la thèse**

Cette thèse est classée en six chapitres : Le premier chapitre présente la problématique générale de la thèse, avec une analyse bibliographique détaillée sur tous les mots clé qui nous a aidé pour finalisée ce travail, suivi par l'objectif et la motivation des travaux réalisés.

Dans le deuxième chapitre on a réalisé une généralité bien détaillée sur les matériaux composites. Ce chapitre est incluses la définition et les méthodes de fabrication des matériaux composites stratifiés, à rigidité variable (CSRV) et le concept théorique des fibres curviligne.

Le troisième chapitre, est axé sur les théories des plaques composite, suivi par la citation des modèles des deux théories, du premier ordre FSDT et d'ordre élevé HSDT  $C^0$ , qui sont préposés dans cette étude. Dans ce chapitre, on a mentionné le champ de déplacement généralisé des deux théories FSDT et HSDT  $C^0$ , ainsi que les étapes de la résolution des énergies de déformations et de cinétique d'une plaque composite stratifiée à rigidité variable.

Le quatrième chapitre est représenté les procédures de la modélisation de l'élément  $p$  quadrilatérale courbé par la méthode des éléments finis hiérarchiques. Alors que, la description théorique de l'élément est faite par la méthode des fonctions de mélange (blending). En termine ce chapitre par le développement théorique des énergies de déformation et cinétique, afin de déterminer les matrices de rigidité de masse globale de la plaque.

L'organisation de la programmation est montrée dans le cinquième chapitre. Ce chapitre est bien décrit l'organigramme et les procédures de construction du code de calcul et la définition de chaque principaux éléments qui sont accompli dans ce programme.

Le dernier chapitre est inclus tous les résultats et l'interprétation de l'étude de la vibration libres des plaques composites stratifiées à rigidité constate et variable, avec différentes formes des ouvertures. L'objectif de ses études est d'analyser le comportement vibratoire des plaques en composites stratifiées, ayant une ouverture rectangulaire, circulaire et quelconque, en variant les conditions aux limites, l'angle d'orientation des fibres, l'épaisseur de la plaque, la dimension et la forme de l'ouverture. Les fréquences fondamentales obtenues sont validées avec les résultats des solutions disponibles dans la littérature et suivi par des interprétations et des analyses.

Finalement, Cette thèse est clôturée par une conclusion générale et des perspectives.

---

*Chapitre 1 :*  
*Analyse Bibliographique*

---

# CHAPITRE 1

## Analyse Bibliographique

**A** travers de ce chapitre, nous allons présenter l'importance qui nous a menée à réaliser une étude vibratoire sur les plaques composites qui possédant une ouverture et leur rôle industrielle. Nous avons entamé la définition des domaines d'application des structures avec ouverture, en montrant des exemples dans les cas réels, afin de mettre en place le cadre général de la problématique traitée dans ce travail. L'autre partie du chapitre, est une discussion historique détaillée sur tous les mots clé qui nous a aidés pour finaliser le projet de la thèse, tel qu'on a définis l'intérêt de l'utilisation des matériaux composites à rigidité variable et l'application de la méthode des éléments finis hiérarchiques. Après, nous avons effectué une citation généralisée sur les travaux des chercheurs qui ont effectué des études dynamiques sur les plaques composites possèdent une ouverture. L'objectif et la motivation de la thèse sont donnés à la fin de ce chapitre.

### 1.1 Généralités

Les ouvertures sont inévitables dans les structures aéronautiques, mécaniques et civiles, etc.... Elles sont utilisées comme des accès de ventilation pour faciliter la dissipation de la chaleur, la réduction du poids, le passage des lignes du carburant et des lignes électriques. Elles permettent aussi à un accès aux différents composants. Par exemple, dans la structure d'avion, elles sont utilisées pour :

- accéder au réservoir de carburant.
- rendre la structure plus légère.
- l'assemblage et la maintenance (par exemple, des trous ou des petites ouvertures dans les surfaces inférieures des ailes, des ouvertures dans les nervures de l'aile pour diminuer le poids et contrôler des défauts (présentée dans la figure 1.1), etc.).
- faciliter la vérification et la maintenance (des ouvertures de taille moyenne appelées ouvertures de main).

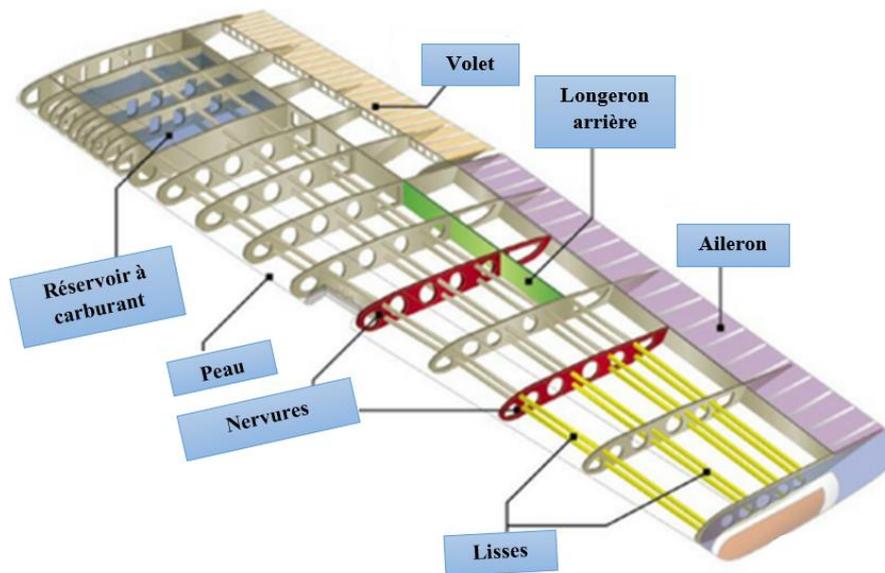


Figure 1.1 Composants d'une aile d'avion (Aerospace engineering blog).

Les structures avec ouverture sont soumises à des nombreux effets au cours de leur durée de vie, comme ; les problèmes de flambage si les charges de compression autour de l'ouverture surchargés, la concentration des contraintes au niveau de cette région et les vibrations indésirables. Les portes et les fenêtres dans la coque cylindrique de l'avion (figure 1.2) sont considérées comme des découpes ou des ouvertures. Elles sont généralement inadaptées à supporter un grand nombre des charges qui sont présentées sur la structure environnante, par conséquent, la structure autour de ces ouvertures doit être renforcée afin de maintenir la résistance requise.



Figure 1.2 : Fenêtres d'un avion (Pt.dreamstime).

Nous constatons aussi que, les concepteurs utilisent des ouvertures de différentes formes et dimensions pour modifier les fréquences fondamentales de la structure, mais avant de l'ajouter dans la structure, il faut bien étudier les comportements dynamiques de ces structures avec ouverture, en tenant compte l'effet des paramètres physiques et mécaniques.

## **1.2 Développement des matériaux composites à rigidité variable**

### **1.2.1 Bref historique sur les matériaux composites**

Actuellement, les matériaux composites sont utilisés dans plusieurs domaines tels que les structures mécaniques, ferroviaires, navals, automobiles, aéronautiques et civiles, etc. Les matériaux composites sont utilisés grâce aux avantages opérationnels par rapport aux autres matériaux, ils montrent des excellentes caractéristiques mécanique et chimique, résistances à la fatigue et à la corrosion, une rigidité plus élevée, et le plus important, la légèreté des structures (un gain au niveau du poids), ce qui aurait un impact primordial sur la consommation d'énergie pour des systèmes mobiles comme les avions et les navettes spatiales...). Ce type de matériaux apporte aussi une grande malléabilité au niveau de la conception et de la réalisation des formes géométriques complexes, capables à servir de nombreuses activités industrielles.

A partir de 1940, les matériaux composites en fibre de verre ont été utilisés dans les dômes des radars militaires pour être transparentes aux fréquences radio et dans les véhicules militaires comme les avions, les hélicoptères et les fusées.

La première voiture en composite a été réalisée et testée en 1947. Ce véhicule avait connu un succès qui a mené au développement de la Corvette 1953.

La première fibre de carbone a été brevetée en 1961, ces fibres de carbone ont amélioré la rigidité des pièces (grande légèreté avec une meilleure rigidité), ouvrant ainsi encore plus d'applications dans les domaines de l'aéronautique, l'automobile et les articles de sport. Le marché maritime a été le plus grand consommateur des matériaux composites dans les années soixante.

L'amélioration des résines a contribué à élargir le marché des matériaux composites aux applications à haute température et les applications corrosives. En 1978, le premier fuselage d'avion (Starship par Ashton) a été développé par l'enroulement filamentaire.

Au milieu des années quatre-vingt-dix, les matériaux composites ont remplacé les matériaux traditionnels tels que le métal et les thermoplastiques. Les concepteurs et les

ingénieurs industriels ont commencé à utiliser les matériaux composites thermodurcissables dans plusieurs domaines, comme les industries de transport et le génie civil...

En 2009, l'entreprise américaine Boeing a construit l'avion Boeing 787 Dreamliner avec 50% en matériaux composites. Ils ont utilisé les fibres de carbone sur le fuselage, ce qu'a permis d'éliminer 1500 feuilles d'aluminium, de réduire le nombre des rivets de 80% et de limiter le nombre des trous percés dans le fuselage à 10000. Les matériaux composites devaient aussi permettre une économie de 30% en coûts de la maintenance, en supprimant les problèmes d'oxydation et de réduire la consommation en carburant.

Actuellement, les matériaux composites sont très commercialisés dans le marché industriel. D'après l'analyse qui a été réalisé par l'institut de composites (SPI) (Brent-Strong 2006) sur le taux d'utilisation des matériaux composites dans l'industrie, le plus grand marché est le transport avec 31%, ensuite il y a la construction avec 19,7%, la marine 12,4% et l'équipement électrique et électronique à 9,9%.

### 1.2.2 Matériaux composites à rigidité variable

La possibilité de réaliser des matériaux composites stratifiés à rigidité variable est devenue nécessaire, surtout avec le développement industriel dans l'amélioration des propriétés mécaniques des stratifiés composites en faisant varier l'angle d'orientation des fibres, afin de renforcer les régions qui subissent une forte concentration de contrainte. Le composite stratifié à rigidité variable (CSRV) a montré des avantages considérables dans la capacité de support de charge par rapport aux stratifiés composites traditionnels. Les travaux des chercheurs (Dinardo et Lagace 1989 ; Leissa et Martin 1989, 1990 ; Hyer et Charette 1991 ; Hyer et Lee 1991; Waldhart 1996) sont arrivés à la conclusion qu'il est faisable d'améliorer les stratifiés composite en modifiant l'angle d'orientation des fibres. Gürdal et Olmedo, (1993a, 1993b) ont proposé une méthode de placement de fibres en modifiant l'angle d'orientation des fibres à travers les coordonnées de l'axe x (fibres curviligne). Ils ont analysé les réponses en plan et de flambage des panneaux composites à rigidité variable par l'utilisation des méthodes analytiques et numériques.

Gürdal et *al.* (2008a, 2008b, 2007) ont défini une forme arbitraire en changeant l'orientation des angles des fibres de façon linéaire entre deux points différents. Ils ont étudié l'effet des réponses dans le plan et de flambage des plaques CSRV en utilisant des méthodes expérimentales et analytiques. Ils ont conclu que ces plaques avaient des propriétés mécaniques

plus souhaitables que les plaques à rigidité conventionnelle. Afin de minimiser la déformation maximale et de maximiser la fréquence fondamentale de la plaque, Honda et Narita (2007, 2008) ont résolu les problèmes d'optimisation de la distribution des fibres courtes des plaques composites stratifiés à rigidité variable. Ils ont observé que les plaques composites stratifiées avec des fibres courtes à distribution optimale sont plus rigide que les plaques à rigidité constante.

Ces mêmes auteurs en 2012, ont développés une technologie de placement des fibres, qui a permet de contrôler la trace et l'endroit des fibres curvilignes dans chaque couche d'une plaque stratifiée. Les fonctions splines sont utilisées pour représenter des fibres de forme arbitraire. La méthode de Ritz est utilisée pour déterminer les fréquences naturelles et les modes propres des plaques composites à rigidité variable. Honda et *al.* (2008) ont proposé la méthode de Ritz pour étudier les vibrations libres d'une plaque stratifiée composite renforcée par des fibres de forme courbées. Ils ont déterminé les paramètres de fréquence et les modes propres des plaques à une seule couche avec des fibres paraboliques en flexion variable et les comparés avec les résultats obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis. Finalement, Ils ont observé que les présentes plaques à des fibres variables ont donné des fréquences plus élevées que les plaques à des fibres constantes, pour une certaine gamme des coefficients géométriques des fibres. Akhavan et *al.* (2013) et Ribeiro et coéquipiers (2011, 2012a, 2012b, 2013) ont examiné la performance mécanique d'une plaque rectangulaire composite stratifiée à rigidité variable avec des fibres curvilignes. Les résultats obtenus sont comparés avec des plaques stratifiées composites à rigidité constante. Ils ont étudié les vibrations libres et forcées pour les cas linéaires et non linéaires, le problème du flambage, les grandes déflexions et les facteurs de sécurité. Ils ont utilisé la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (First order shear deformation theory (FSDT)) et la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement (Third order shear deformation theory « TSDT ») basées sur la méthode des éléments finis hiérarchiques. Ils ont conclu que les fréquences fondamentales des plaques (CSRV) présentent une différence significative par rapport à les plaques composites stratifiées à rigidité constante, ce qui permet d'éviter la forte concentration des contraintes en contrôlant le trajet des fibres à partir de la zone supportée dans la structure. Houmat, (2013) a étudié la vibration libre linéaire et non linéaire des plaques symétriques et antisymétriques rectangulaires « CSRV » avec des fibres curvilignes décalées. Il a résolu le problème en utilisant la théorie classique des plaques minces et la méthode des éléments finis hiérarchiques. Les résultats

montrent que le stratifié antisymétrique produit des fréquences linéaires et non linéaires fondamentales légèrement inférieures à celles des stratifiés symétriques.

### 1.3 Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques pour un élément courbé

La méthode des éléments finis MEF est une méthode d'approximation numérique. Cette méthode est très largement utilisée dans de nombreux domaines ; mécanique des structures (solides), mécanique des fluides, analyse thermique, génie civil,...etc. La méthode des éléments finis est connue sous ces deux versions, la méthode classique (version-h) et la méthode hiérarchique (version-p). La version-h est la plus utilisée dans l'analyse des problèmes mécaniques des structures, dans laquelle la précision des résultats est obtenue par le raffinement du maillage en fixant les degrés  $p$  d'interpolation de l'élément, alors que, la convergence des solutions dans la version-p est achevée par l'enrichissement d'un seul élément en utilisant des fonctions de forme hiérarchiques.

Du point de vue historique, l'analyse par la méthode des éléments finis MEF a été développée en 1943 par R. Courant, qui a utilisé la méthode de Ritz et la minimisation des calculs variationnel pour obtenir des solutions approchées aux systèmes vibratoires. Avec le développement des ordinateurs que la MEF s'est développée, les travaux pionniers dans ce domaine sont ceux de Zienkiewicz et Argyris en 1960.

Les fondements théoriques de la version-p ont été établis dans un document publié par Babuska et *al.* (1981), où ils ont été montrés que, pour une grande classe de problèmes, le taux asymptotique de convergence de la version-p est au moins deux fois celle de la version h. Les résultats des calculs supplémentaires et des preuves de la convergence rapide de la version-p ont été présentés par Babuska et Szabo (1982).

Dans les applications pratiques de la conception de maillage et le choix des degrés des polynômes sont tous les deux importants. En fait, il est possible de réaliser des taux exponentiels de la convergence lorsque la version-p est utilisée en combinaison avec la conception de maillage adéquate. Ce point a été discuté du point de vue de l'ingénierie par Szabo (1986) et du point de vue théorique par Guo et Babuska (1986). La version p de la MEF a été appliquée à l'analyse des vibrations de plaques par Bardell (1991, 1992) et suivi par d'autres chercheurs Houmat (1997a, 1997b) ; Woo et *al.* (2003).

Au début, l'analyse des problèmes mécaniques en utilisant des solutions analytiques est faite généralement pour les cas des géométries régulières. Aujourd'hui, les besoins industriels

au niveau du développement de la forme des structures nécessitent des méthodes des résolutions numériques plus fiables et convenables, pour résoudre les problèmes mécaniques des géométries de forme complexe. La méthode des éléments finis hiérarchiques (version-p) est un outil puissant aux résolutions numériques de ces problèmes.

Il bien dit précédemment, que l'avantage de cette méthode dans la résolution est fondé sur l'augmentation des degrés p d'interpolation des fonctions des formes hiérarchiques et avec un seul élément ; ce qui permet de réduire l'erreur de la discrétisation en vue d'une meilleure représentation des bords courbés à l'aide d'utilisation de la méthode des fonctions de mélange (blending function method), ainsi qu'une correcte continuité des fibres droites et curvilignes des plaques composites stratifiées à rigidité constante et variables.

Les fonctions de mélange (blending) sont développées par Coons, (1964a, 1967). Il a observé ce qu'on appelle des patches bi-cubiques, définis en termes de quatre fonctions de mélange, sont adéquates pour la description des surfaces par une conception assistée par l'ordinateur. Gordon, (1971) a présenté les notions de la base d'une nouvelle classe de méthode pour le rapprochement des fonctions à plusieurs variables. Il a développé des formes complexes en conception assistée par l'ordinateur à l'aide des fonctions de mélange qui sont introduit par Coons. Szabo, (1991) ; Karalyfalvi, (1997) ; Dey, (1997) ont les premiers travaux qui ont utilisé les fonctions de mélange pour décrire la géométrie des surfaces arbitraires courbés basé sur l'application de la version-p de la méthode des éléments finis.

L'implémentation tridimensionnelle de la version-p pour des problèmes structuraux avec des surfaces solides arbitraires par l'application des fonctions de mélange, ont été fait par Düster et *al.* (2001). Houmat, (2006) a appliqué la version-p de la méthode des éléments finis fondé sur les fonctions de forme trigonométriques pour l'analyse de la vibration libre d'une membrane en forme arbitraire avec un élément quadrilatéral courbé. Belalia et Houmat (2010, 2012) ont développé un élément-p triangulaire courbé et appliqué à la vibration libre non-linéaire des plaques sectorielles elliptiques en matériau isotropes et matériau à gradient fonctionnel. Guenanou et Houmat (2017) ont étudié la vibration libre des plaques composites stratifiées circulaires à rigidité variable en adoptant la version-p de la méthode des éléments finis basée sur la théorie du premier ordre. La géométrie de la plaque circulaire est définie exactement à l'aide d'un élément-p quadrilatéral courbé en utilisant les fonctions de mélange.

## 1.4 Analyse dynamique des plaques composites avec ouverture

Il existe pas mal des structures en matériaux isotropes ou composites, possédants des découpes ou des ouvertures de différentes formes et dimensions. La présence de ces ouvertures change les caractéristiques dynamiques de la structure. Par conséquent, il devient nécessaire et inévitable d'étudier l'effet de ces ouvertures sur la réponse vibratoire des structures pour éviter le bruit acoustique, la défaillance mécanique due à la résonance et la fatigue due aux vibrations prolongées en particulier dans les domaines spécifiques, comme aéronautique, aérospatiale et naval. L'étude de comportement vibratoire des plaques avec ouverture a été prise l'attention de nombreux chercheurs. Les travaux réalisés sur l'analyse de la vibration libre des plaques en isotropes et composites avec des ouvertures, sont résumés en utilisant des articles bien connus dans le même contexte.

Les premières études traitées les problèmes des structures avec ouverture sont : Levy et *al.* (1947) ; Kumai (1952) ; Takahasi (1958) ; Joga-Rao et Pickett (1961) ; Schlack (1964) ; Kawai et Ohtsubo (1968) ; Fujita et *al.* (1970) ; Hegarty et Ariman (1975). Paramasivam (1973) a déterminé les fréquences fondamentales d'une plaque isotropes rectangulaire, ayant une ouverture carrée en utilisant la méthode des différences finies. Les résultats obtenus avec les conditions aux limites ; simplement appuyée et encastree. Aksu et Ali (1976) ont développé une théorie pour étudier les caractéristiques dynamiques d'une plaque rectangulaire isotrope et orthotrope avec un ou deux ouvertures rectangulaires. Ils ont utilisé une méthode par la liaison du principe variationnel avec la méthode des différences finies.

Alors que Rajamani et Prabhakaran (1977a, 1977b) ont défini les fréquences fondamentales d'une plaque composite stratifiée symétrique ayant une ouverture rectangulaire située au centre avec différentes conditions aux limites dans les cas des vibrations libres et forcées. Ils ont conclu que la plaque avec l'ouverture est moindre rigide et les fréquences fondamentales influencée par l'angle d'orientation des fibres et la dimension de l'ouverture. Ali et Atwal (1980) ont utilisé la méthode de Rayleigh pour l'analyse dynamique d'une plaque rectangulaire avec une ouverture rectangulaire. Les résultats calculés en faisant varier la dimension de l'ouverture et sont comparés avec les résultats obtenus par la solution de la méthode des éléments finis.

En 1982, Reddy a porté une investigation sur la grande amplitude de vibration d'une plaque rectangulaire composite stratifiée avec une ouverture, en utilisant la méthode des éléments finis et la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT). Il a calculé

les fréquences fondamentales en faisant varier l'épaisseur et la taille de l'ouverture de la plaque. Chang et *al.* (1984) ont étudié la résistance à la rupture et le mode de défaillance d'une plaque composite stratifiée, ayant un ou deux ouvertures. Les procédés de l'étude comportent deux étapes. En premier lieu, la répartition des contraintes dans le stratifié est calculé par l'utilisation de la méthode des éléments finis. En second lieu, la charge de la rupture et le mode de défaillance sont prédits à l'aide de l'hypothèse de défaillance de Yamada et Sun. Après cette étude, ils ont trouvé une bonne concordance entre les résultats analytiques et expérimentaux. Lee et *al.* (1987) ont utilisé la méthode Rayleigh pour déterminer les fréquences fondamentales d'une plaque rectangulaire composite avec une ouverture rectangulaire. Les résultats calculés sont comparés avec les solutions de la méthode des éléments finis et les solutions analytiques.

Alors que Bicos et Springer (1989) ont utilisé la méthode des éléments finis et la théorie de FSDT pour étudier la vibration libre amortie d'une plaque rectangulaire, possédant un ou deux ouvertures circulaires. Ils ont effectué un code de calcul pour déterminer les fréquences propres, les modes propres et les facteurs d'amortissement et les résultats obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux. En 1992, Ramakrishna et *al.* ont examiné le comportement vibratoire d'une plaque composite stratifiée avec une ouverture circulaire au milieu. Ils ont développé un code destiné à déterminer les fréquences fondamentales à l'aide de contrainte hybride de l'élément finis. Ils ont examiné les effets de l'orientation des fibres, l'épaisseur de la plaque et la dimension de l'ouverture sur les quatre premières valeurs propres fréquentielles.

Une étude de la vibration libre (théorique et expérimentale) a été réalisée pour une plaque composite stratifiée symétrique ayant une ouverture centrale, les fréquences propres sont déterminées en faisant varier le paramètre de fréquence, la dimension de l'ouverture et les conditions aux limites de la plaque (Boay 1996). Sivakumar et *al.* (1999) ont utilisé la méthode des éléments finis et la théorie d'ordre élevé de déplacement de cisaillement (Higher order shear deformation theory HSDT  $C^0$ ). Ils ont étudié la vibration libre des plaques composites stratifiés avec des ouvertures (rectangulaire, circulaire et elliptique).

Kumar et Shrivastava (2005) ont réalisé une étude de la vibration libre d'une plaque rectangulaire composite avec une ouverture rectangulaire au milieu. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis et la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement (HSDT), les paramètres de fréquence sont déterminés en variant la dimension de l'ouverture, l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites, les résultats obtenus sont comparés avec la solution de la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT). Zhong et Tian (2007) ont

utilisé la méthode de quadrature et la théorie de FSDT pour examiner les fréquences fondamentales d'une plaque circulaire épaisse avec une ouverture circulaire désaxée, les résultats calculés sont vérifiés avec logiciel ANSYS. En 2008, Liu *et al.* ont étudié la vibration libre et statique d'une plaque rectangulaire isotrope et composite ; avec différentes formes d'ouvertures, en employant la méthode d'interpolation radiale par point. Les fréquences fondamentales sont comparées avec les résultats de logiciel d'ANSYS et les solutions disponibles dans la littérature. Khaldoon, (2009) a utilisé le logiciel ANSYS pour déterminer les fréquences fondamentales de la plaque composite stratifiée (épaisse), ayant une ouverture ; les résultats sont déterminés en faisant varier la dimension et la forme de l'ouverture, l'angle d'orientation des fibres, l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites.

Lee (2010) a analysé la stabilité dynamique d'une plaque quadrilatérale composite stratifiée, sans et avec une ouverture rectangulaire, en utilisant la méthode des éléments finis et la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement (HSDT), les fréquences fondamentales sont calculés afin de montrer principalement l'effet de l'angle d'inclinaison de la plaque avec les paramètres suivantes : la dimension de l'ouverture, l'angle d'orientation des fibres et l'épaisseur de la plaque. Dhanunjaya et Babu (2012) ont étudié l'analyse modale d'une plaque quadrilatérale composite stratifiée symétrique avec une ouverture circulaire. Ils ont traité le problème avec logiciel ANSYS à la base de la théorie classique (Classical plate theory « CPT »). Les résultats des cinq premières modes sont examinés en faisant varier l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ), l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites. Sahoo, (2014) a analysé le comportement vibratoire de coques sphériques composites stratifiées, en variant la taille et l'emplacement de l'ouverture rectangulaire, à l'aide de la méthode des éléments finis et la théorie de FSDT. Alors que Bhardwaj *et al.* (2015) ont réalisé une investigation sur les fréquences fondamentales d'une plaque composite stratifiée ; possédant une ouverture triangulaire, par la méthode des éléments finis et la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), à l'aide du logiciel ANSYS.

Récemment, des plaques possédant des ouvertures quelconques, attirer l'attention des chercheurs pour analyser son comportement vibratoire. Li *et al.* (2014) ont proposé la nouvelle méthode iso-géométrique et les fonctions de B-spline (NURBS) à l'analyse de la vibration libre des plaques isotropes et composites stratifiées, ayant une ouverture quelconque, en employant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement (TSDT  $C^1$ ). En 2015, Yin *et al.* ont appliqué la même méthode pour étudier les problèmes de flambage et la vibration libre des

plaques composites stratifiées avec des ouvertures quelconques, en basant sur la théorie des plaques classiques (CPT).

La recherche a montré clairement qu'il y a très peu des travaux concernant les plaques composites stratifiées à rigidité variable avec ouverture. En 1991, Hyer et Lee ont utilisé la méthode des éléments finis pour analyser la résistance et la performance du flambage d'une plaque composite, à rigidité variable avec une ouverture en considérant des fibres curvilignes. L'angle d'orientation des fibres a été varié d'un élément à un autre. Ils ont constaté que la charge de la rupture est supérieure à celles des plaques avec des fibres droites. L'étude récente de Venkatachari *et al.* (2016), qui ont examiné l'effet de l'environnement hydrothermique sur l'analyse de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée à rigidité variable, ayant une ouverture circulaire avec des fibres curvilignes. Ils ont utilisé la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement, en basant sur l'approche des éléments finis étendus XFEM.

### 1.5 Objectif et motivation

L'objectif de cette thèse est de traiter l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées à rigidité constante, avec différente forme d'ouverture ; rectangulaire, circulaire et quelconque, ainsi qu'à rigidité variable avec une ouverture circulaire (Hachemi *et al.* 2017). L'étude est basée sur les deux théories ; du premier ordre de déformation de cisaillement FSDT et d'ordre élevé de déformation de cisaillement HSDT  $C^0$  (Shankara et Iyengar 1992, 1996), en utilisant la version p de la méthode des éléments finis MEF. La version p de MEF présente un grand avantage dans la modélisation des plaques composites stratifiées à rigidité constante CSRC (Hamza-Cherif 2006, Serdoun et Hamza-Cherif 2016) et à rigidité variable CSRV (Ribeiro *et al.* 2011, 2012a, 2013a, 2012b, 2013b ; Houmat 2013, Guenanou et Houmat 2017), puisqu'il est fondé sur l'enrichissement de l'élément en augmentant le degré p des fonctions de forme hiérarchiques pour atteindre la convergence des résultats. Il est bien connu que la version h de MEF est très utilisée et un outil puissant pour l'analyse vibratoire des plaques, mais il est difficile d'utiliser à la modélisation de la plaque composite stratifiée à rigidité constante ou variable avec une ouverture circulaire. Ceci est dû aux difficultés associées à la continuité de la fibre droite et curviligne et à l'approximation des bords courbés. Un nombre considérable des éléments sont requis dans la version h de MEF pour résoudre adéquatement ce problème, ce qui conduit aux longs temps du calcul. Pour surmonter cet obstacle, deux nouveaux éléments-p quadrilatéraux courbés sont développés et appliqués à l'analyse de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée, avec différentes formes d'ouverture. La

plaque est discrétisée en quatre éléments seulement, dans lesquels les éléments de rigidités réduits transformés sont calculés exactement à l'intérieur de la matrice de rigidité. Les bords courbés sont modélisés exactement en employant les fonctions de mélange (blending function). Enfin, des calculs sont effectués afin de montrer l'effet de l'angle d'orientation des fibres, la forme et la dimension de l'ouverture, l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites sur les fréquences propres de la plaque, ainsi que les résultats obtenus sont comparés à ceux des solutions disponibles dans la littérature.

---

*Chapitre 2 :*  
*Généralité sur les matériaux*  
*composites à rigidité variable*

---

# CHAPITRE 2

## Généralité sur les matériaux composites à rigidité variable



*Le chapitre fait a pour objectif de définir les matériaux composites à rigidité variable. Nous avons déterminé dans ce chapitre, une généralité sur les matériaux composites et aussi la méthode de fabrication et le concept théorique des fibres curvilignes.*

### 2.1 Introduction

Les matériaux composites présentent de grands avantages fonctionnels ; légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite et contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs. Les composites offrent également une flexibilité de conception en permettant d'alléger les structures et en même moulés des pièces de forme complexes. L'ensemble de ces avantages attire l'attention de plusieurs industries tel que l'aéronautique, l'automobile..., en vue d'augmenter l'efficacité et la performance structurelle, en particulier les technologies de haute précision comme la fabrication d'avion et de navette spatiale. Les matières premières des matériaux composites sont coûteuses ; à cette raison, l'étude des caractéristiques mécaniques et les comportements vibratoires des structures composites sont très importants pour sélectionner les propriétés mécaniques convenables de ce matériau avec l'espace du travail.

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs.

Aujourd'hui, il existe trois types de matériaux composites qui sont classés en fonction de la nature de la matrice, les composites à matrices céramiques (CMC), les composites à matrices métalliques (CMM) et les matériaux composites à matrices organiques (CMO) ; les plus utilisés au niveau industriel.

Les composites à matrice organique (CMO) sont constitués principalement de matrices et de renforts.

La matrice contribue à la liaison des fibres, répartit les contraintes subies, apporte la tenue chimique de la structure et donne la forme désirée au produit. Les différentes familles de matrices sont citées dans la figure 2.1.

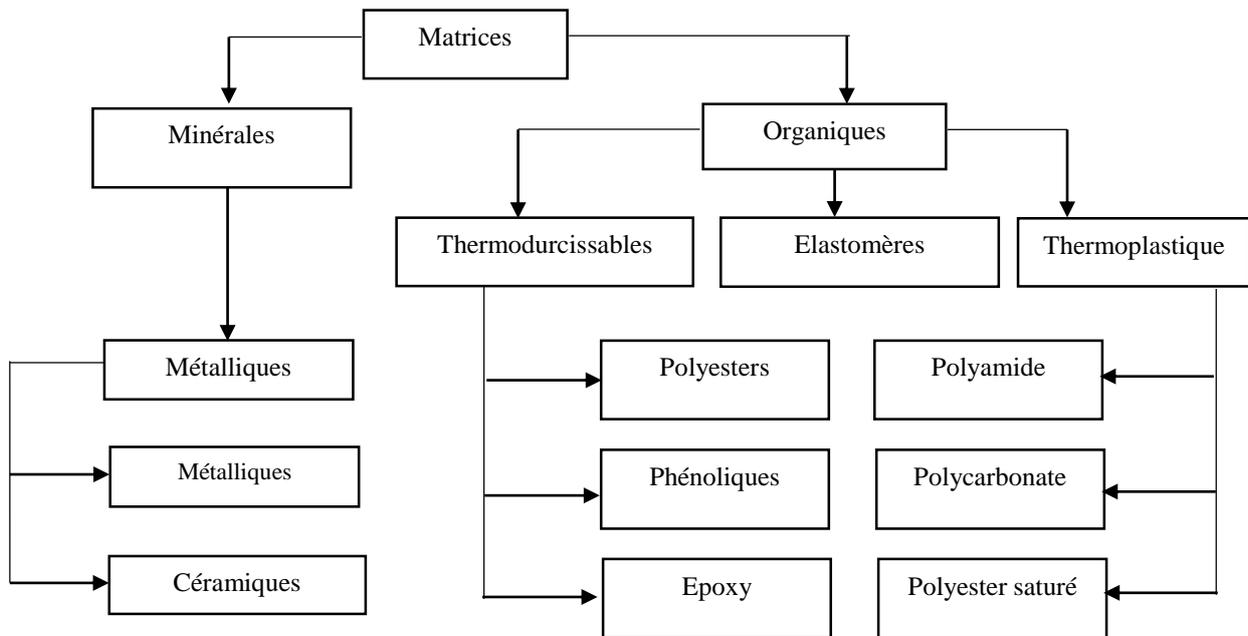


Figure 2.1 : Différentes familles de matrices.

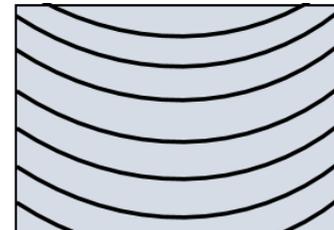
Les renforts contribuent à augmenter la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites. Il existe trois types de fibres : les fibres courtes, les fibres longues et les fibres curvilignes (voir figure 2.2).



(a) Fibres courtes



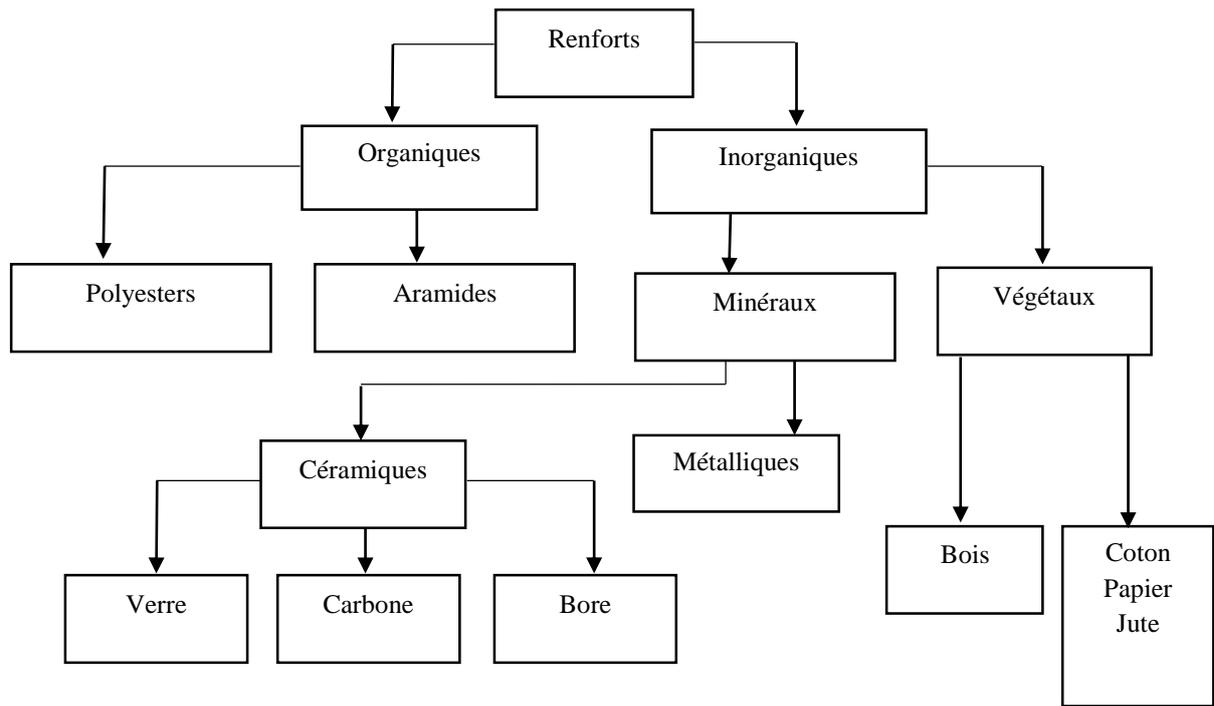
(b) Fibres longues



(c) Fibres curvilignes

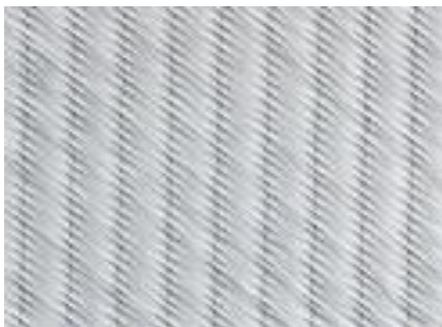
Figure 2.2 : Types des fibres

L'organigramme général des différents types des fibres de renforts est donné par la figure suivante (voir Figure 2.3) :



Figures 2.3 : Principaux type de renforts (Reyne 2007)

En outre, il y a des additifs qui peuvent être ajoutés avec les deux constituants principaux (matrices et renforts) pour améliorer la résistance au feu, diminuer le retrait et la modification des couleurs, etc... Les fibres composites utilisées dans l'industrie sont : la fibre de verre, la fibre de carbone, la fibre d'Aramide et la fibre naturelle.



(a)-Verre



(b)-Carbone

Figure 2.4 : Types de fibres utilisées dans l'industrie (CARMA 2006).



(c)-Aramide



(d)-Naturelle

Figure 2.4 : suite

## 2.2 Procédés d'élaboration des composites

Il existe différents procédés d'élaboration manuelle des structures composites, on peut citer :

### 2.2.1 Moulage au contact

Le moulage au contact (figure 2.5) est une opération manuel, consiste à imprégner des renforts (sous forme de tissu) dans un moule et recouvert d'une matrice thermodurcissable appelé Gelcoat (couche de gel). Après chaque pli de renfort, la résine est déposée au rouleau. Ces processus sont répétées jusqu'à atteindre l'épaisseur finale de la pièce.

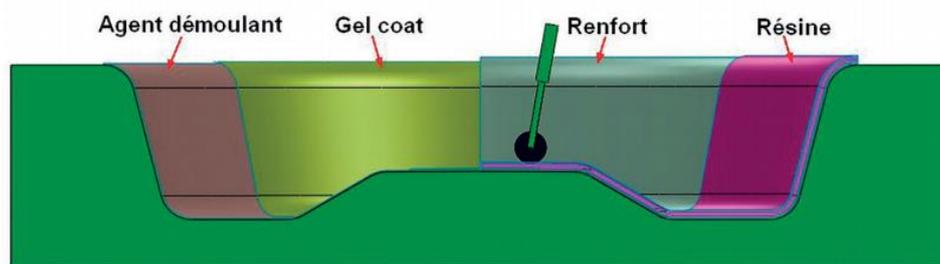


Figure 2.5 : Opération de moulage au contact (ANFA 2014).

### 2.2.2 Moulage par projection simultanée

Le moulage par projection (figure 2.6) est réalisé par une machine qui permet la projection simultanée des fibres coupées d'une résine catalysée sur un moule. La couche des fibres imprégnées de résine est ensuite compactée à l'aide d'un débulleur à température ambiante. L'épaisseur de la pièce est obtenue par la succession des couches projetées et ébullées. Le moulage par projection permet de fabriquer de grandes séries de pièces, avec un coût réduit.

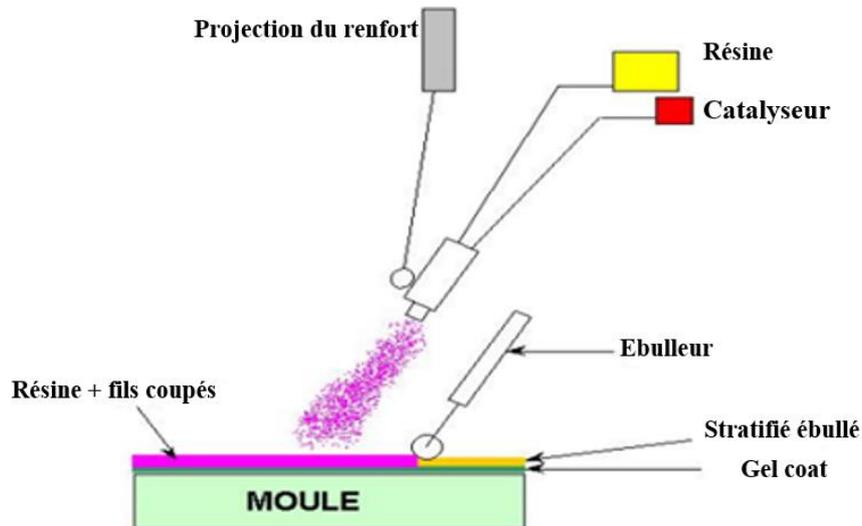


Figure 2.6 : Moulage par projection simultanée (CARMA 2006)

### 2.2.3 Enroulement filamentaire

L'enroulement filamentaire (figure 2.7) est effectué par des fibres longues, qui sont enroulées avec une résine sur un moule appelé mandrin. Notons que, cette méthode est réservée aux pièces de révolution.

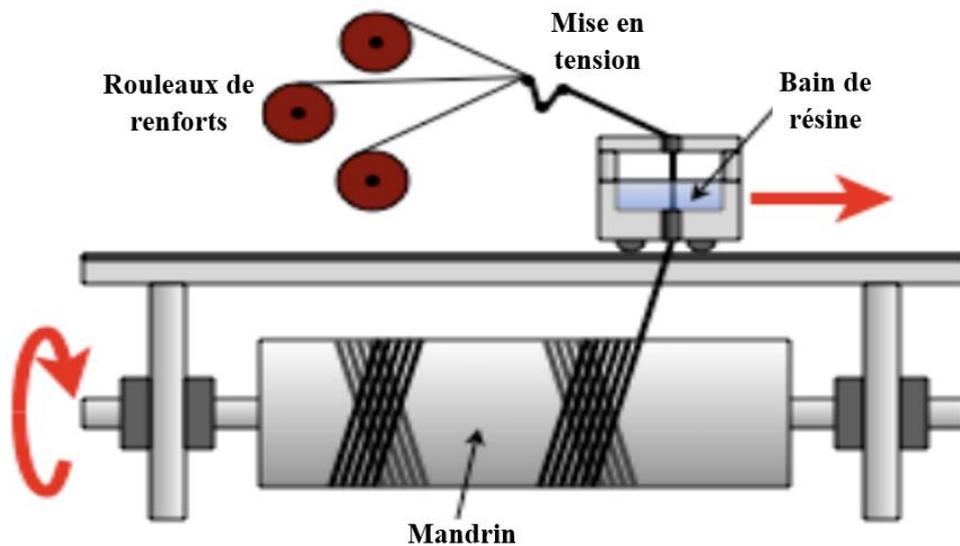


Figure 2.7 : Enroulement filamentaire (Daghia et Gendre 2011)

## 2.3 Types de structure en composite

Il y a deux types des structure en composite, et sont :

### 2.3.1 Structures composites sandwich

Les structures en sandwich sont composées généralement de peaux ou de stratifiées avec une âme structural beaucoup plus épaisse par rapport aux peaux et situées entre les peaux (figure 2.8). Chaque élément dans un sandwich a sa fonction particulière. Ces structures caractérisées par une grande rigidité en flexion et un excellent isolant thermique.



Figure 2.8 : Eléments de structure composite sandwich.

### 2.3.2 Structures composites stratifiées

Structures composites stratifiées (figure 2.9) sont fabriqués généralement par les empilements des couches orthotropes, chaque couche en composite est caractérisée par un type du matériau de matrice et des fibres renforcées droites, l'épaisseur et l'angle d'orientation des fibres. En outre, on peut ajuster les séquences d'empilements ou l'orientation des plis, suivant nos besoins pour améliorer les performances mécaniques de la structure.

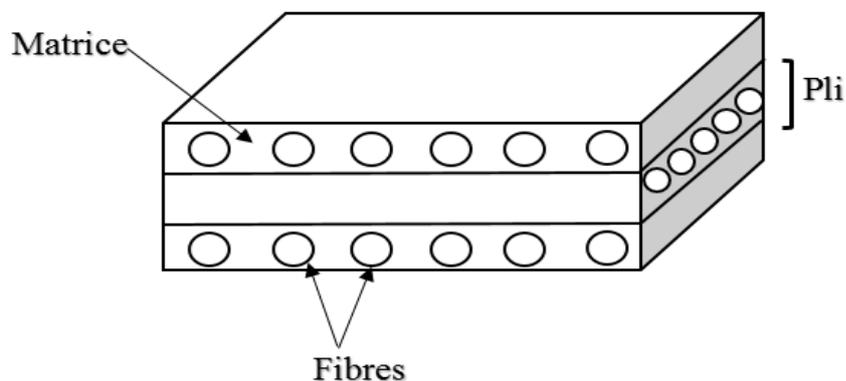


Figure 2.9 : Eléments d'une structure composite stratifiée.

## 2.4 Composite stratifié à rigidité variable (CSRV)

Les développements actuelles aux nombreuses applications industrielles modernes tels que les domaines aéronautiques, aérospatiales, navals,... exigent des modifications ou une amélioration au niveau des matériaux utilisées pour obtenir une rigidité élevée, haute résistance et avec un faible poids. Les matériaux composites stratifiés à rigidité constante sont constitués des nombreux plis composites, chaque pli a des propriétés suivantes : l'épaisseur et l'angle d'orientation des fibres qui reste constante. Après le développement des matériaux composites à rigidité variable a été donnée la possibilité de varier la trajectoire des fibres au long du stratifié, qui sert à ajouter des propriétés plus élevées par rapport aux matériaux composites à rigidité constante. Le matériau CSRV a été vu des développements théoriques par de nombreux chercheurs, en vue d'identifier la performance de fibres à stratifié variable sur les structures.

Il existe deux approches principales pour la création des CSRV ; la variation de fraction volumique des fibres et la variation d'angles d'orientation des fibres dans un stratifié (fibre curviligne).

La première approche qui consiste à créer le CSRV, est fondée sur la variation de fraction volumique des fibres dans le stratifié, ayant des fibres droites parallèles et espacées. Les fibres sont réparties de manière plus dense dans la zone centrale, où la rigidité élevée est nécessaire par rapport aux autres régions comme présenté dans la figure 2.10 (Houmat 2012). Leissa et Martin (1990) ont montré à la base de cette approche que la charge de flambage et la fréquence fondamentale étaient, respectivement augmentées de 38 % et 21 % par rapport aux stratifiés avec de fibres uniforme.

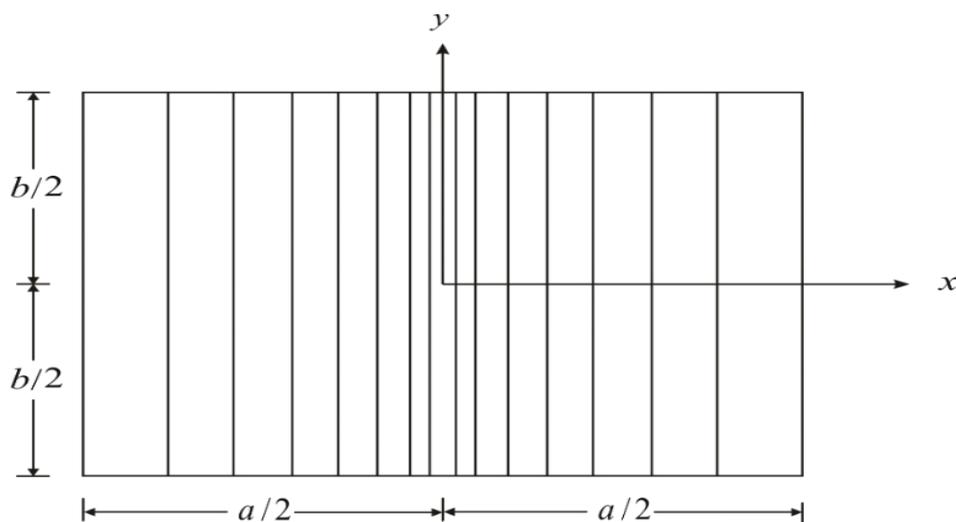


Figure 2.10 : Plaque rectangulaire composite avec un espacement variable de fibres.

L'autre approche consiste à varier l'angle d'orientation de fibre tout au long d'un stratifié. Il montre clairement dans la figure 2.11, lorsque on compare les fibres droites avec les fibres curvilignes, la rigidité est constante tout au long de la plaque ; alors que la concentration des fibres est plus vers la fin de la plaque pour les stratifiés à rigidité variable, ce qui conduit à une plus grande rigidité au niveau des extrémités de la structure. Ces différences dans l'orientation des fibres peuvent mener à différentes propriétés de la rigidité et des différents comportements structurels.

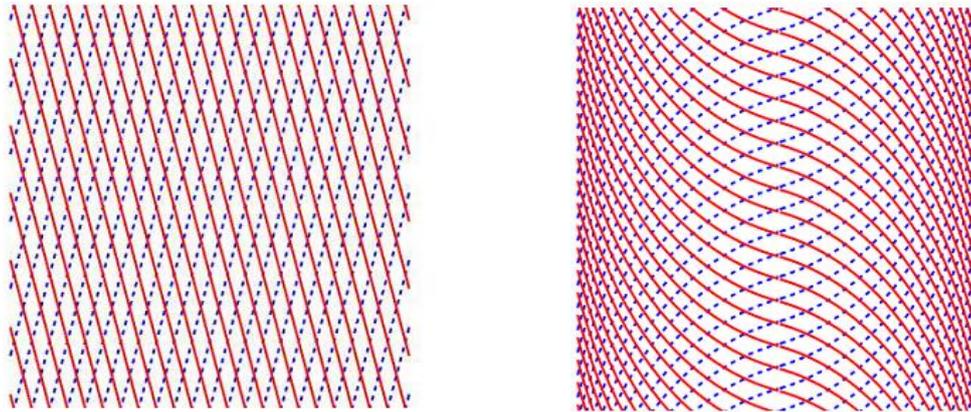


Figure 2.11 : Comparaison entre les fibres droites et les fibres curvilignes (Haldar et *al.* 2015).

Les principaux avantages de ce concept sont :

- Augmenter l'efficacité structurelle en redistribuant les charges internes.
- Evaluer la performance structurelle sans augmentation de poids et d'abaisser le coût de la maintenance au cours du cycle de vie.
- offre une flexibilité à la conception des structures en composites stratifiés, dans lesquels la fibre curviligne peut être orientée au long de l'espace.

### 2.4.1 Concept théorique des fibres curvilignes

La fonction des fibres curvilignes est identifiée par un ensemble de paramètres dans une expression mathématique prédéfinie (Tatting et Gürdal 2001), ou en interpolant une fonction prédéfinie aux points clés prescrits (Huang et *al.* 2005). Les premiers auteurs qui ont introduit un schéma de paramétrage du chemin de fibre sont Gürdal et Olmedo (1993a). Ils définissent les angles des fibres comme variant linéairement selon les axes  $x$  ou  $y$  et démontrent des améliorations de la charge de flambage jusqu'à 80% par rapport aux meilleurs modèles des fibres droites. Ces chemins de courbes curvilignes suivent des arcs de courbure constante afin de simplifier les analyses numériques et également de fournir une relation avec la contrainte de

courbure minimale de n'importe quel machine AFP. Le chemin de fibre curviligne peut être défini en définissant de manière adéquate l'orientation des fibres pour n'importe quel point des coordonnées de stratifié. Ceci est réalisé en déterminant d'abord un «chemin de référence» (Gürdal et al. 2005). Tatting et al. (2008) ont généralisé la formulation qui définit le chemin de fibre pour qu'elle varie linéairement le long d'un axe défini arbitrairement  $x'$ , de sorte que l'angle de fibre  $\theta(x')$  est défini comme suite

$$\theta(x') = \phi + (T_1 - T_0) \frac{|x'|}{d} + T_0 \quad (2.1)$$

Où  $T_0$  et  $T_1$  sont les angles de fibre au début et la fin de la longueur caractéristique  $d$ . L'orientation de l'axe de référence de fibre  $x'$  par rapport à l'axe  $x$  global est définie par l'angle  $\phi$ . Les paramètres de l'équation (2.1) sont définis dans la figure 2.12. En résumé, tous les chemins des fibres curvilignes peuvent être défini par  $\phi(T_0, T_1)$ .

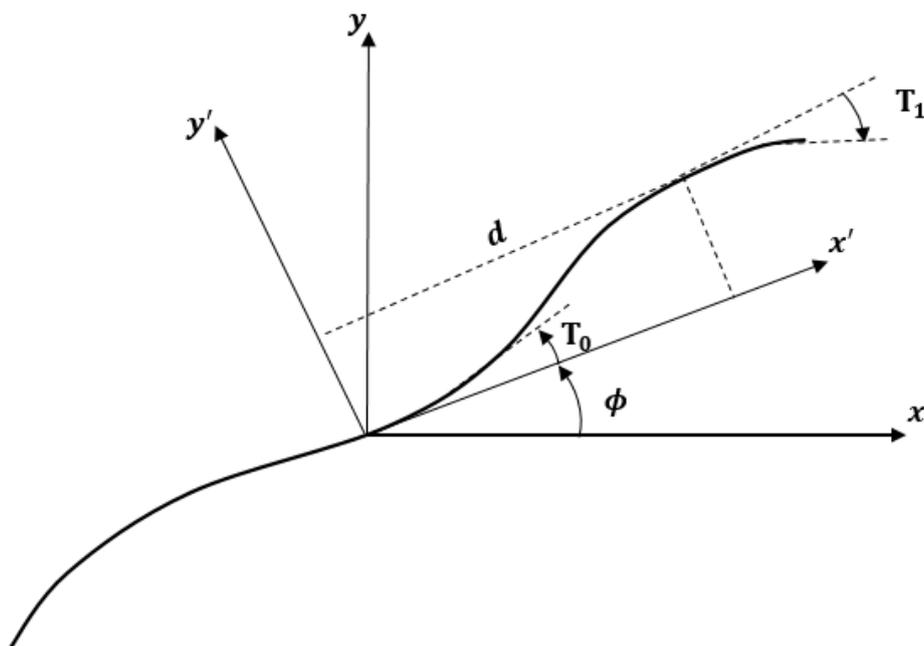


Figure 2.12 : Paramètres du chemin de référence de fibre curviligne.

Il existe différentes formes des fibres curvilignes. Selon Honda et Narita (2012) ont fait une analyse vibratoire de la plaque rectangulaire en composite à rigidité variable. Dans lequel, ils ont montré trois types des formes des fibres curvilignes avec le sens positive ou négative de l'angle d'orientation  $[+T_1]$  et  $[-T_1]$  et qui sont ; paraboliques, cubiques et hyperboliques (figure 2.13 (a-c)).

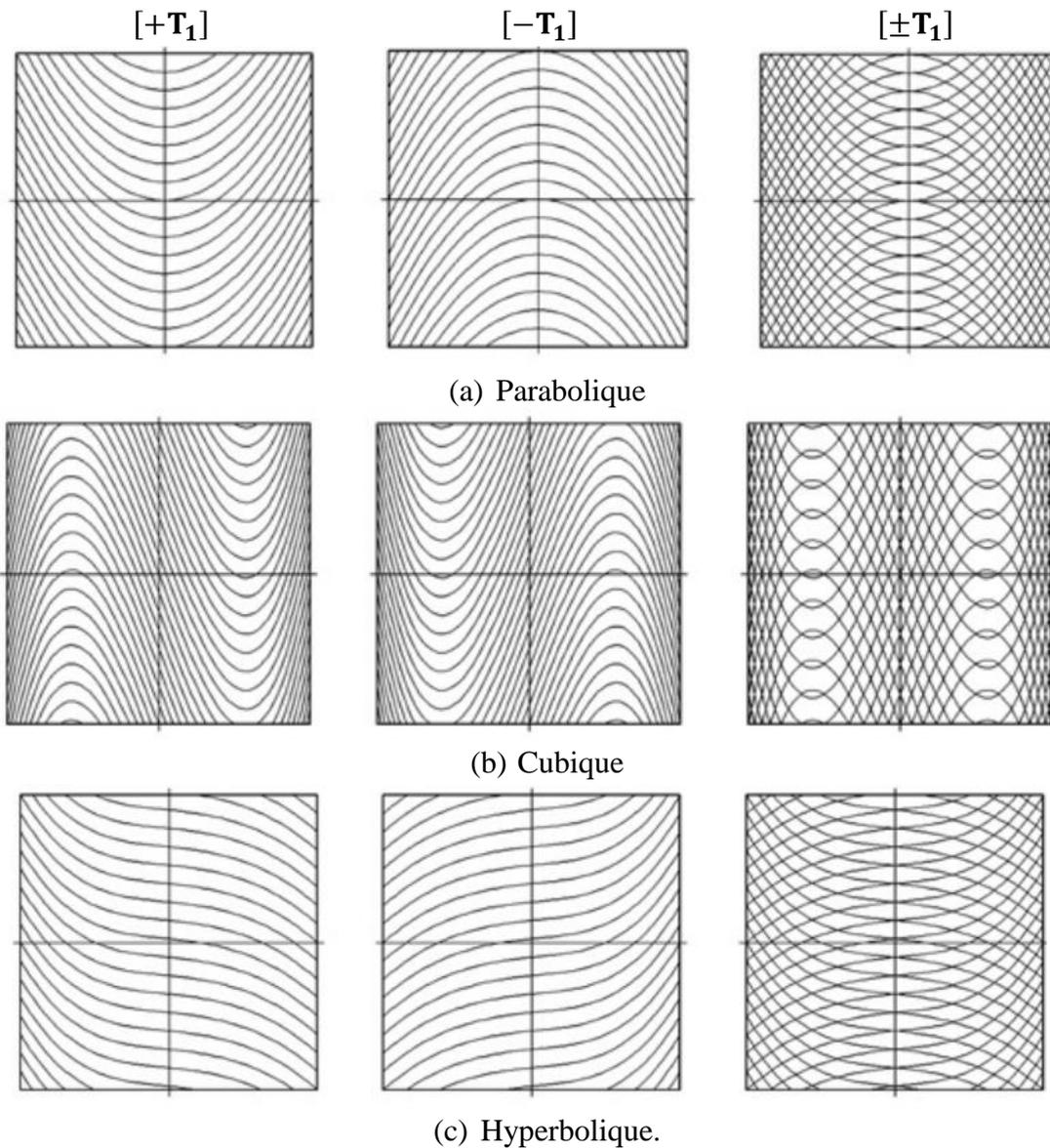


Figure 2.13 : Plaques avec des fibres de forme ; (a) quadratique ou parabolique, (b) cubique et (c) arbitraire ou hyperbolique (Honda et Narita 2012).

#### 2.4.2 Méthode de la fabrication des fibres curvilignes

Au début, la fabrication des composites stratifiés est fondée sur des méthodes manuelles. Ces méthodes sont utilisées dans la réalisation des fibres droites. La technique du placement de la bande est généralement plus efficace pour la fabrication des grandes plaques, mais l'utilisation de cette technique est limitée pour des composants à des géométries simples. Les techniques d'enroulement filamentaire a ses limites en termes de géométries structurales, qui peuvent être produites et qui sont essentiellement limitées aux formes pratiquement cylindriques.

Le nouveau processus de placement automatique des fibres (Automated Fiber Placement, AFP) a ouvert le champ de la réalisation des fibres de forme curviligne. Ce processus a été considéré à la fin des années 1970 (Grant et Martin 2003). Les stratifiés à rigidité variable peuvent être fabriqués en utilisant la technologie de AFP. AFP est une machine robotisée à plusieurs axes de mouvement permettant de se déplacer dans toutes les directions de l'espace. Cette machine est contrôlée par un système de programmation hors-ligne (OLP) (Marouene 2015). AFP est capable de combiner le placement de la bande et les techniques d'enroulement filamentaire pour surmonter les limitations et exploiter les avantages des deux méthodes, ce qui est permet de fabriquer de grandes structures composites de forme complexe (Fayazbakhsh 2013). La figure 2.14 présente une modèle de machine AFP.



Figure 2.14 : Machine de placement automatisé des fibres (AFP).

Selon la recherche de Dirak et co-équipier, (2012), les éléments principaux de la machine AFP sont :

- Tête de placement (présentée à la figure 2.15).
- Plateforme de la machine automatisée.
- Contrôleur électronique et un logiciel.

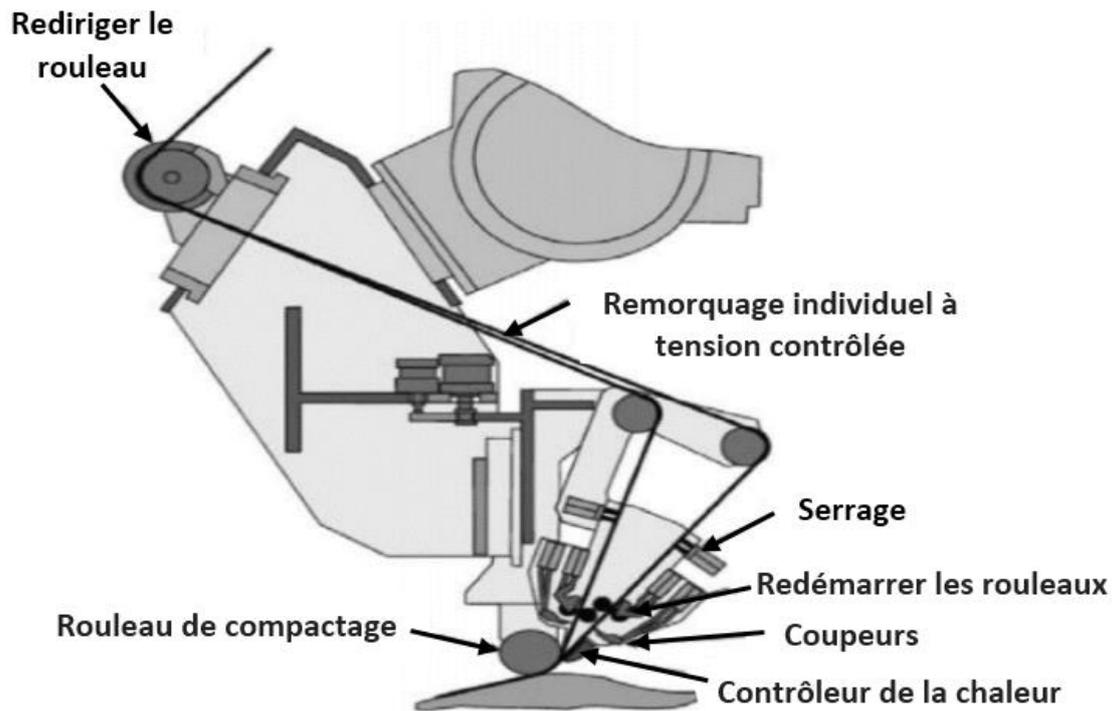


Figure 2.15 : Tête de placement de machine AFP (Evans 2001)

L'utilisation de ce nouveau procédé de mise en forme des matériaux composites, offre un avantage de produire des pièces en composites à fibres curvilignes, avec un haut niveau de précision. La technologie AFP est utilisée actuellement par plusieurs grandes compagnies d'aéronautiques (Evans 1998). Au début des années 90, la première utilisation de la technologie AFP a été faite par la compagnie du Boeing Hélicoptères (Brarth 1990). Après cela, la technologie AFP a été prise l'attention des industries militaires. Cette technologie est très utile pour la fabrication des fuselages des avions qui possédant des fenêtres ou des grosses ouvertures comme par exemple ; le fuselage arrière ou aussi pour la peau des ailes qui connaissent une grande variation d'épaisseur. La Super Hornet F/A-18 utilise la procédé AFP pour la fabrication des peaux en composites à rigidité variable du fuselage arrière et les stabilisateurs (Gürdal et Olmedo 1993a) ; ce qu'il permet de réduire les coûts de main-d'œuvre à 38%. Boeing a profité des plus récentes machines de placement automatisé des fibres d'Ingersoll, pour fabriquer les sections 44 et 46 du fuselage de leur Boeing 787 Dreamliner (figure 2.16). Dans le même contexte, la compagnie Airbus utilise aussi cette technologie à la fabrication des fuselages de l'avion A350 – XWB.



Figure 2.16 : Fabrication de grande section de fuselage du Boeing 787 Dreamliner par AFP (Ijsselmuiden 2011).

Enfin, les études menées dans ce contexte ont montré que les avantages donnés par les composites à rigidité variable sont meilleurs que des composites à rigidité constante. Pour cette raison, nous avons réalisé une étude de comparaison des comportements dynamiques des plaques composites à rigidité variable avec des plaques composites à rigidité constante.

---

*Chapitre 3 :*  
*Théorie de plaques composites à*  
*rigidité variable*

---

# Chapitre 3

## Théorie de plaques composites à rigidité variable



l'objectif de ce chapitre est de présenter les théories des plaques utilisées dans ce travail et qui sont, les théories d'ordre élevé HSDT  $C^0$  et du premier ordre FSDT. Au début, nous présentons une généralité sur les théories des plaques afin de justifier notre choix de ces théories. Le champ de déplacement généralisé des deux théories est indiqué dans la première partie. La dernière partie expose le développement théorique pour déterminer l'énergie de la déformation et de l'énergie cinétique de la plaque composite à rigidité variable.

### 3.1 Introduction

Par définition, une plaque (Figure 3.1) est un élément structural défini par une surface de référence plane et par une épaisseur  $h$ , où l'épaisseur est faible par rapport à la dimension de la longueur  $L_x$  et la largeur  $L_y$  de la plaque.

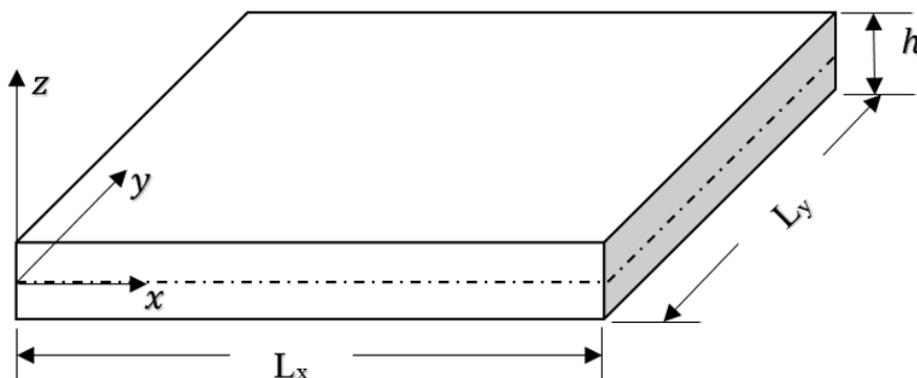


Figure 3.1 : Géométrie d'une plaque.

Le comportement des plaques peut être défini selon de sa théorie appliquée (CPT, FSDT...etc.). Les théories des plaques sont classées en fonction de la nature de son matériau

(isotrope, composite...etc.) et de sa géométrie principalement son épaisseur (mince, modérément épaisse et épaisse).

Le premier modèle des plaques minces, a été donné en 1850 par Kirchhoff et reconnu comme, la théorie classique des plaques minces CPT. L'hypothèse principale de cette théorie est lors de la déformation, la ligne droite normale reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne, dans laquelle l'effet de la déformation et de cisaillement transversal est négligé.

La théorie CPT ne peut pas employer pour une plaque en composite stratifiée, modérément épaisse. L'imprécision est due à la négligence des contraintes transversales de cisaillement et de la déformation transversale normale dans un stratifiée. Reissner (1945) et Mindlin (1951) ont été développé la théorie du premier ordre de déformations de cisaillement FSDT. Cette théorie est une extension de la théorie classique des plaques minces en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal de premier ordre. Dans ce cas, les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction du facteur de correction de cisaillement  $k_s$  pour assurer la distribution parabolique de contrainte de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque (voir la figure 3.2).

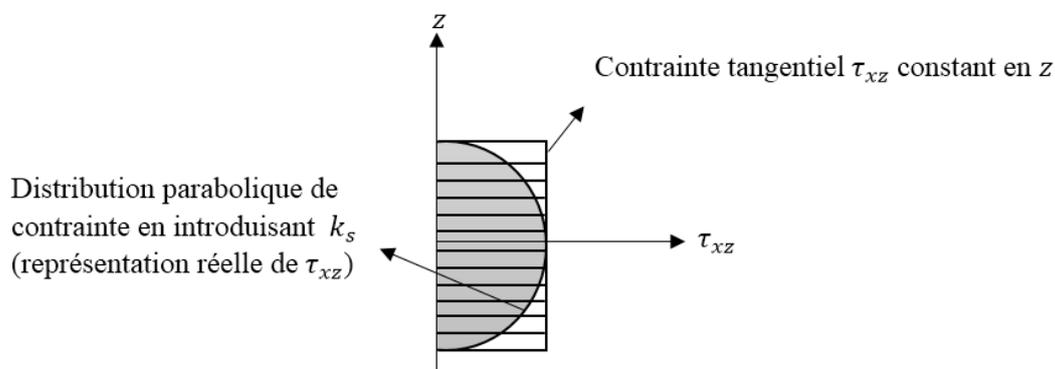


Figure 3.2 : Distribution de contrainte du cisaillement transversal de la théorie FSDT.

Les valeurs couramment utilisés de ce facteur, sont  $k_s = 5/6$  par Reissner (1945) et  $k_s = \pi^2/12$  par Mindlin (1951). La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement FSDT a été étendue pour étudier les problèmes des plaques composites stratifiées en utilisant le facteur  $k_s$  par : Yang et al. (1966) ; Whitney et Pagano (1970) et Reissner (1984).

Dans la théorie FSDT, il n'est pas possible de satisfaire les contraintes de cisaillement des surfaces supérieures et inférieures libre de la plaque. Afin de surmonter la limitation de celle-ci et d'obtenir des contraintes et des déplacements améliorés, on devrait considérer plus de nombre des termes dans la série du champ de déplacement. Reddy (1984) a proposé la théorie

d'ordre élevé de déformation de cisaillement HSDT par l'extension de la théorie de Hencky. Après cela, elle est connue sous le nom de la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement TSDT. Cette théorie est caractérisée par la variation hyperbolique du champ de déplacement au long de l'épaisseur de la plaque, ce qui permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation. En outre, ce modèle n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur de la plaque. La théorie d'ordre élevé qui a été développée par Reddy (1984a) est considérée comme étant la théorie la plus utilisée pour l'analyse des problèmes vibratoire des plaques composites épaisses.

De plus, cette théorie doit être représentée par des fonctions appartenant à l'espace  $C^1$ , ce qui conduit à des dérivés de second ordre dans le vecteur de déformation. Lorsqu'on utilise la méthode des éléments finis, la formulation des fonctions d'interpolation dans l'espace  $C^1$  est beaucoup plus contraignante par rapport à celles appartenant à l'espace  $C^0$ .

Pour cette raison, Shankara et Iyengar (1992, 1996) ont développé un modèle raffiné d'ordre élevé HSDT afin d'éviter les difficultés associées à ces éléments de continuité  $C^1$ , le modèle de Reddy a été légèrement modifié pour devenir suffisant à la continuité  $C^0$  dans le champ de déplacement, ce qui signifie que le vecteur de la déformation contient maintenant que des dérivés du premier ordre. L'avantage de modèle HSDT  $C^0$  a été clairement présenté par le travail récent de Chien et *al.* (2012) qui ont utilisé ce modèle pour améliorer la précision des solutions calculées, sans exiger les facteurs de correction de cisaillement. Ils ont étudiés la vibration libre des plaques composites stratifiées (rectangulaire, quadrilatérale, circulaire et triangulaire) et comparés avec les résultats obtenus par le modèle de FSDT.

Dans notre thèse, nous avons proposé un modèle généralisé des deux théories FSDT et HSDT  $C^0$ , afin de comparer les résultats obtenus par ces deux théories. La comparaison est focalisée généralement sur la précision des résultats en fonction de l'épaisseur de la plaque et ouvre le champ de la réalisation de nombreux exemples concernant, l'analyse vibratoire des plaques composites stratifiées à rigidité constante et variable, avec différentes formes des ouvertures, sachant que la théorie FSDT est identifiée par cinq fonctions des déplacements généralisés et la théorie HSDT  $C^0$  par sept de ces fonctions.

3.2 Equations cinématique des théories FSDT et HSDT C<sup>0</sup>

Une plaque composite stratifiée d’une épaisseur constante  $h$ , de largeur  $a$  et de longueur  $b$  est considérée dans cette étude. Le champ de déplacement généralisé des deux théories FSDT (Mindlin 1951) et HSDT C<sup>0</sup> (Shankara et Iyengar 1992), est donné sous la forme suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\beta_x - \delta f(z)(\beta_x + \phi_x) \\ v(x, y, z) &= v_0 + z\beta_y - \delta f(z)(\beta_y + \phi_y) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où :

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \tag{3.2}$$

où l’équation (3.1) est exprimée en fonction, les déplacements membranaires  $u_0, v_0$ , le déplacement transversale  $w_0$ , des rotations indépendantes  $\beta_x$  et  $\beta_y$  et des fonctions de gauchissement  $\phi_x$  et  $\phi_y$  suivant l’axe  $x$  et  $y$  de la plaque, respectivement. Le symbole  $\delta$  est considéré pour identifier les deux champs de déplacement. Sachant que, lorsque  $\delta = 0$  c’est le FSDT qui est considérée, et  $\delta = 1$  c’est le HSDT C<sup>0</sup> est prise en compte.

Les géométries d’un élément de la plaque avant et après déformation dans le cas des deux théories FSDT et HSDT C<sup>0</sup>, sont représentés dans les figures 3.3 et 3.4, respectivement.

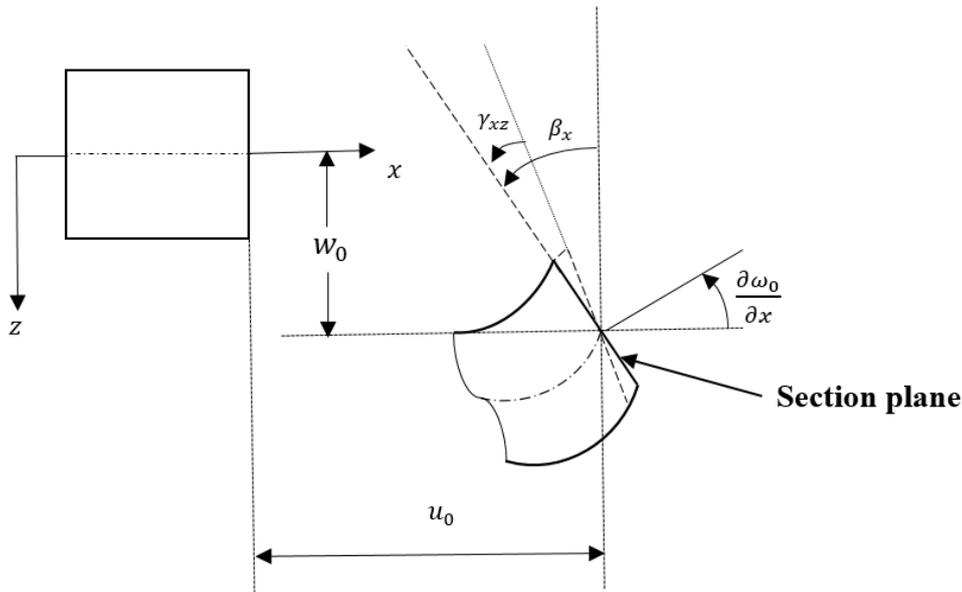


Figure 3.3 : Géométrie avant et après déformation d’un élément de la plaque dans le cas de FSDT.

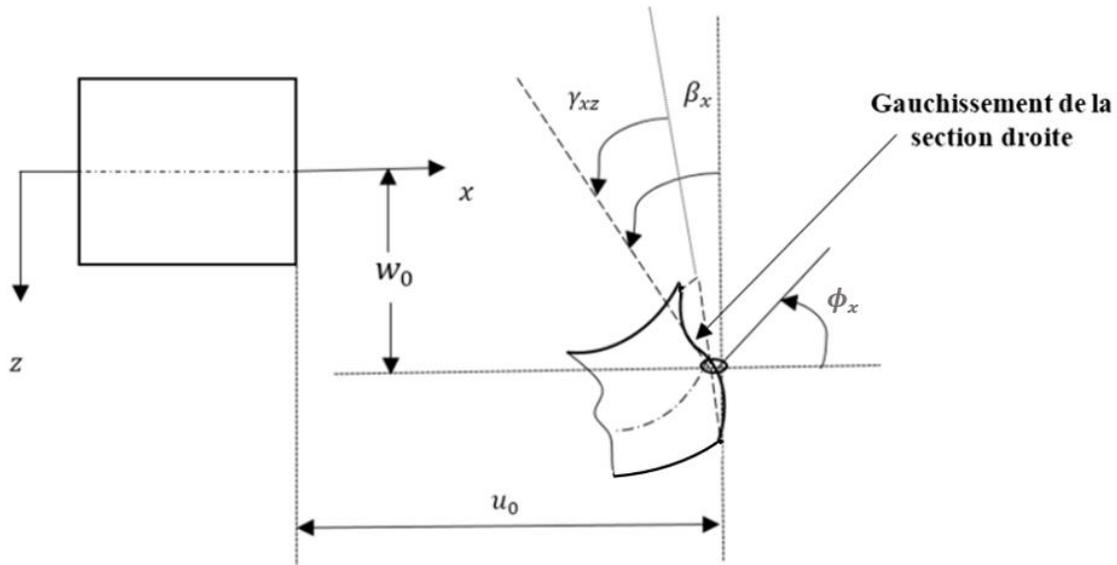


Figure 3.4 : Géométrie avant et après déformation d'un élément de la plaque dans le cas de HSDT  $C^0$ .

### 3.3 Relation déformations–déplacements

La relation entre les déformations et les déplacements dans le cas de la théorie de l'élasticité linéaire des plaques, en se basant sur les hypothèses des deux théories FSDT et HSDT  $C^0$ , tout en négligeant la déformation  $\varepsilon_{zz}$  (hypothèse des déformations planes), est donnée sous la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

En introduisant les équations de champ de déplacement généralisé des théories FSDT et HSDT  $C^0$  (3.1) dans l'équation (3.3), les relations déformations–déplacements seront développées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \delta \frac{\partial f(z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_x + \phi_x \\ \beta_y + \phi_y \end{Bmatrix} \\
&\quad - \delta f(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.4 Relation contraintes–déformations

Les équations constitutives pour une  $k^{\text{ième}}$  couche, dans la coordonnée orthotropique locale dérivée de la loi de Hook généralisée pour la contrainte plane, sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}^k \tag{3.5}$$

Les constantes élastiques d'ingénierie  $Q_{ij}$  sont exprimés en fonctions du module d'élasticité longitudinale et transversale ( $E_1, E_2$ ), les coefficients de Poisson ( $\nu_{12}, \nu_{21}$ ) et les modules de cisaillement ( $G_{1,2}, G_{1,3}, G_{2,3}$ ), et sont donné par.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \tag{3.6}$$

$$Q_{21} = Q_{12}, \quad Q_{33} = G_{1,2}, \quad Q_{44} = G_{2,3}, \quad Q_{55} = G_{1,3} \tag{3.7}$$

Un matériau composite stratifié à rigidité variable possède plusieurs couches (pli) orthotrope, chacune ayant une différente orientation des fibres curvilignes. Par conséquent, il

est nécessaire d'établir des relations de transformation entre les contraintes et les déformations dans un système des coordonnées globales (Figure 3.5).

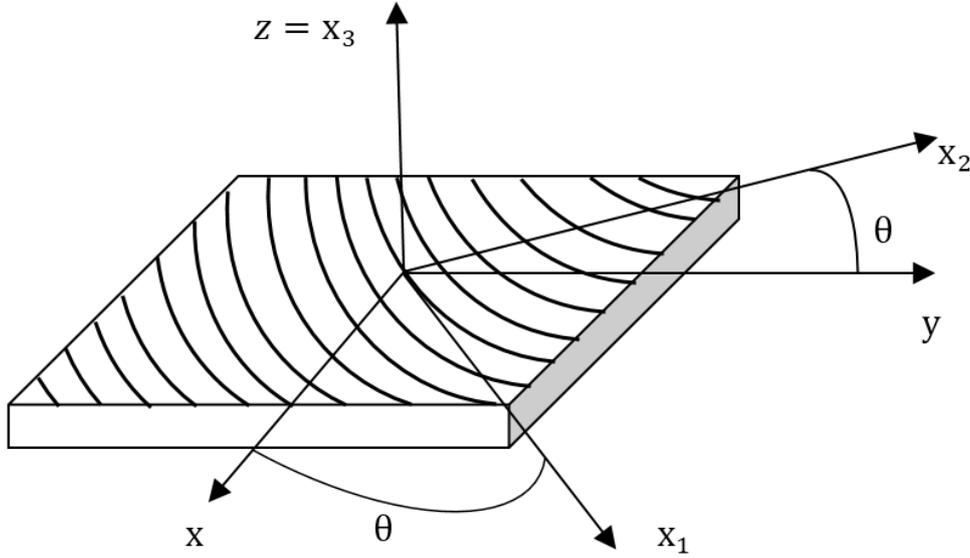


Figure 3.5 : Repère global (x, y, z) d'une couche de stratifié avec de fibre curviligne.

En effectuant une transformation appropriée des coordonnées, la relation contraintes-déformations d'un stratifié unique est définie de ses coordonnées locales  $(x_1, x_2, x_3)$  vers le système des coordonnées globales  $(x, y, z)$ , sous les démarches suivantes.

$$\{\sigma\}_G = [T] \{\sigma\}_L \tag{3.8}$$

$$\{\varepsilon\}_L = [T]^t \{\varepsilon\}_G \tag{3.9}$$

où  $\{\sigma\}_G$  et  $\{\varepsilon\}_G$  sont signifiés respectivement, les tenseurs de contrainte et de déformation des coordonnées globales  $(x, y, z)$  et  $\{\sigma\}_L$  et  $\{\varepsilon\}_L$  sont, les tenseurs de contrainte et de déformation des coordonnées locales  $(x_1, x_2, x_3)$ . La matrice de transformation de base  $[T]$  est donnée avec l'angle d'orientation  $\theta$ , où  $\theta$  varie en fonction de  $x$ . Sachant que, les fibres curvilignes ne sont pas constantes et représentées parallèlement avec l'axe  $x$ .

$$T = \begin{bmatrix} c(x)^2 & s(x)^2 & -2s(x)c(x) & 0 & 0 \\ s(x)^2 & c(x)^2 & 2s(x)c(x) & 0 & 0 \\ s(x)c(x) & -s(x)c(x) & c(x)^2 - s(x)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(x) & s(x) \\ 0 & 0 & 0 & -s(x) & c(x) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

où  $c(x) = \cos \theta(x)$  et  $s(x) = \sin \theta(x)$ , dans lequel,  $\theta(x)$  est l'angle d'orientation de fibre curviligne, mesurée de l'axe  $x$  à l'axe d'une fibre.

A partir de la loi Hooke, on peut s'exprimer la relation entre les équations (3.8) et (3.9), et qui seront sous la forme suivante :

$$\{\sigma\}_G^k = [T][Q^k][T]^t \{\varepsilon\}_G^k = [\bar{Q}^k] \{\varepsilon\}_G^k \quad (3.11)$$

où  $[\bar{Q}^k]$  est la matrice de rigidité réduite transformée d'une  $k^{\text{ième}}$  couche et s'écrit à la forme matricielle suivante.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(x) & \bar{Q}_{12}(x) & \bar{Q}_{13}(x) & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21}(x) & \bar{Q}_{22}(x) & \bar{Q}_{23}(x) & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{31}(x) & \bar{Q}_{32}(x) & \bar{Q}_{33}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}(x) & \bar{Q}_{45}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54}(x) & \bar{Q}_{55}(x) \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.12)$$

### 3.5 Variation parabolique des fibres

Les stratifiés en fibres curvilignes diffèrent des stratifiés avec des fibres droites, précisément dans le fait que l'orientation de l'axe du matériau principal n'est pas constante dans le domaine de stratifié. Cela implique que les éléments de rigidité réduite transformés de la matrice  $[\bar{Q}^k]$  ne sont pas constants et deviennent en fonction de  $x$ . Dans cette étude, on considère que la variation des fibres est parabolique (Honda et al. 2008).

$$f(x) = A \left( x^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right) \quad (3.13)$$

L'angle d'orientation de fibre  $\theta(x)$  est donné par la première dérivée de la fonction  $f(x)$ .

$$\theta(x) = \tan^{-1} \left( \gamma \frac{2x}{a} \right) \quad (3.14)$$

où  $A$  est la constante de proportionnalité,  $a$  est la largeur de la plaque et  $\gamma (= A a)$  est un paramètre non dimensionnel utilisé pour contrôler la forme de la parabole. Comme le montre la figure 3.6, l'orientation de fibre parabolique est variée avec  $x$ , à partir d'une valeur  $T_0$  au centre à une autre valeur  $T_1$  à une distance  $a/2$  de l'origine, dans laquelle la configuration de l'orientation des fibres est indiquée dans cette étude par  $[< T_0, T_1 >]$ .

où

$$T_0 = \theta(0) = 0 \quad (3.15)$$

$$T_1 = \theta \left( \pm \frac{a}{2} \right) = \tan^{-1}(\pm \gamma) \quad (3.16)$$

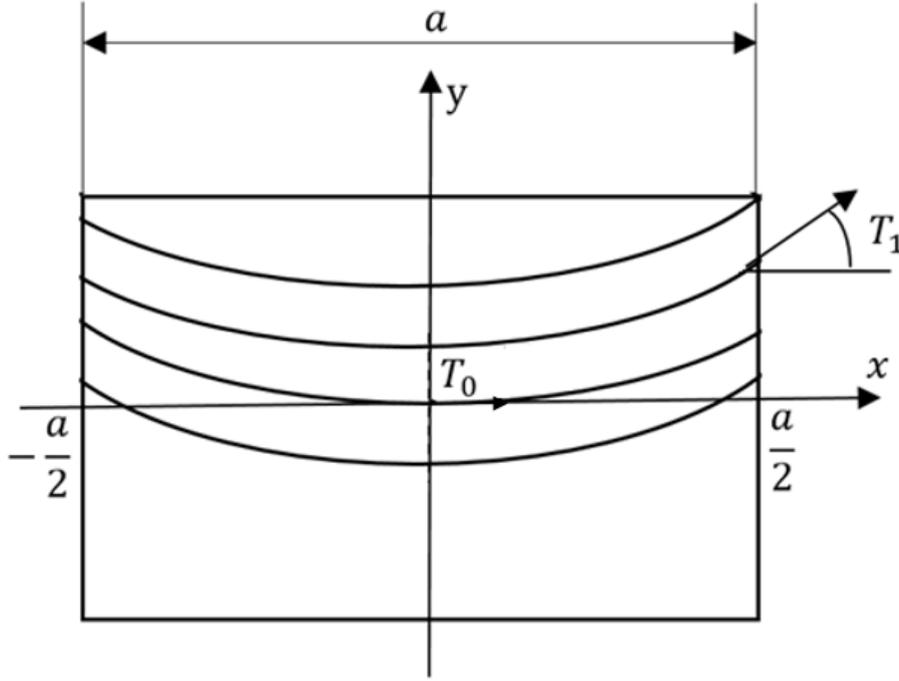


Figure 3.6 : Orientation des fibres paraboliques de la plaque CSRV.

Les éléments de la matrice  $[\bar{Q}^k]$  sont écrits comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}(x) &= Q_{11} c(x)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})c(x)^2 s(x)^2 + Q_{22} s(x)^4 \\ \bar{Q}_{12}(x) &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) c(x)^2 s(x)^2 + Q_{12}(c(x)^4 + s(x)^4) \\ \bar{Q}_{22}(x) &= Q_{11} s(x)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})c(x)^2 s(x)^2 + Q_{22} c(x)^4 \\ \bar{Q}_{33}(x) &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 2Q_{33}) c(x)^2 s(x)^2 + Q_{33}(c(x)^4 + s(x)^4) \\ \bar{Q}_{13}(x) &= (Q_{11} - 2Q_{12} - 2Q_{33}) c(x)^3 s(x) + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{33})c(x)s(x)^3 \quad (3.17) \\ \bar{Q}_{23}(x) &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) c(x) s(x)^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{33})c(x)^3 s(x) \\ \bar{Q}_{44}(x) &= Q_{44} c(x)^2 + Q_{55} s(x)^2 \\ \bar{Q}_{55}(x) &= Q_{44} s(x)^2 + Q_{55} c(x)^2 \\ \bar{Q}_{45}(x) &= (Q_{44} - Q_{55}) c(x) s(x) \end{aligned}$$

En remplaçant l'équation  $\theta(x)$  dans les éléments de la matrice  $[\bar{Q}^k]$ , et peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11}(x) &= \frac{Q_{11}a^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})4a^2\gamma^2x^2 + Q_{22}16\gamma^4x^4}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{12}(x) &= \frac{(Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44})4a^2\gamma^2x^2 + Q_{12}(a^4 + 16\gamma^4x^4)}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{22}(x) &= \frac{Q_{22}a^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})4a^2\gamma^2x^2 + Q_{11}16\gamma^4x^4}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{33}(x) &= \frac{(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 2Q_{33})4a^2\gamma^2x^2 + Q_{33}(a^4 + 16\gamma^4x^4)}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{13}(x) &= \frac{(Q_{11} - 2Q_{12} - 2Q_{33})2a^3\gamma x + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{33})8a\gamma^3x^3}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{23}(x) &= \frac{(Q_{11} - 2Q_{12} - 2Q_{33})8a\gamma^3x^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{33})2a^3\gamma x}{(a^2 + 4\gamma^2x^2)^2} \\ \bar{Q}_{44}(x) &= \frac{Q_{44}a^4 + Q_{55}4\gamma^2x^2}{a^2 + 4\gamma^2x^2} \\ \bar{Q}_{55}(x) &= \frac{Q_{55}a^4 + Q_{44}4\gamma^2x^2}{a^2 + 4\gamma^2x^2} \\ \bar{Q}_{45}(x) &= (Q_{44} - Q_{55})\frac{2a\gamma x}{a^2 + 4\gamma^2x^2}\end{aligned}\tag{3.18}$$

### 3.6 Energie de déformation et cinétique de la plaque composite à rigidité variable

L'équation générale de l'énergie de déformation est donnée par :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma_{ij}\}^t \{\varepsilon_{ij}\} dV \tag{3.19}$$

Après le développement de l'équation (3.19), l'énergie de déformation sera sous la forme suivante :

$$E_d = \frac{1}{2} \iint_{xy} [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}] dx dy \tag{3.20}$$

En introduisant l'équation (3.12) dans (3.20), on obtient :

$$E_d = \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ \bar{Q}_{11}(x)\varepsilon_{xx}^2 + \bar{Q}_{22}(x)\varepsilon_{yy}^2 + 2\bar{Q}_{12}(x)\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2\bar{Q}_{33}(x)\gamma_{xz}^2 + 2\bar{Q}_{13}(x)\gamma_{xy}\varepsilon_{xx} + 2\bar{Q}_{23}(x)\gamma_{xy}\varepsilon_{yy} + k_s(\bar{Q}_{44}(x)\gamma_{xz}^2 + \bar{Q}_{55}(x)\gamma_{yz}^2 + 2\bar{Q}_{45}(x)\gamma_{yz}\gamma_{xz}) \right] dx dy \quad (3.21)$$

Notons que, le facteur de cisaillement transversal  $k_s$  n'est utilisé que dans la théorie FSDT, et il prend la valeur de 1 dans le cas de la théorie HSDT  $C^0$ .

L'expression de l'énergie cinétique d'une plaque stratifiée composite à rigidité variable est exprimée en fonction des composantes du vecteur vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint_{xy} \rho_* \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial t} - \delta f(z) \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial t} - \delta f(z) \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial t} + \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w_0}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

dans lequel  $\rho_*$  représente la densité de la plaque composite stratifiée à rigidité variable.

$$\rho_* = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k dz \quad (3.24)$$

où,  $NL$  signifie le nombre des stratifiés d'une  $k^{\text{ième}}$  couche.

---

*Chapitre 4 :*  
*Application de la version  $p$  de la*  
*méthode des éléments finis à la*  
*modélisation de l'élément- $p$*   
*quadrilatérale courbé*

---

# Chapitre 4

## Application de la version $p$ de la méthode des éléments finis à la modélisation de l'élément- $p$ quadrilatérale courbé



'objectif de ce chapitre, c'est la présentation du processus de modélisation de la plaque avec une ouverture circulaire par la version  $p$  de la méthode des éléments finis. Au début, nous montrons l'intérêt de l'utilisation de la méthode des fonctions de mélange (blending function method) pour la description géométrique des éléments de forme complexe. Notre plaque est discrétisé en quatre éléments- $p$  quadrilatéraux courbés. Les systèmes des équations de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique sont déterminés. Après le développement de ces équations, on obtient l'équation du mouvement de vibration libre, où cette équation est donnée par les matrices globales de rigidité et de masse.

### 4.1 Introduction

La performance de la méthode des éléments finis MEF peut être améliorée en général par le maillage à l'aide de la version-h, ou soit par l'interpolation raffinée par la version-p. Généralement, le taux de convergence de la version-p est plus rapide que celle de la version-h pour le même nombre de degrés de liberté (Zienkiewicz et Taylor 1989). Malheureusement, la modélisation par la version-p est limitée à des formes rectangulaires. Lorsque les géométries sont possédantes des formes complexes, donc il est nécessaire d'appliquer les coordonnées de transformation pour représenter la structure de son domaine physique vers le domaine computationnel. Pour les plaques quadrilatéraux à des surfaces droites, les fonctions de la description géométrique est faite selon les coordonnées des nœuds afin d'identifier dans le système locale  $(\xi, \eta)$  à partir de la relation suivante :

$$X = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta)] \{x_i\} \quad Y = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta)] \{y_i\} \quad (4.1)$$

où  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions de forme, et  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées globale de la plaque.

Les relations mathématiques (4.1) sont exprimées seulement pour les surfaces quadrilatérales à coté droites. Coons (1964b) a été initialement développé une nouvelle série des formulations plus amélioré pour décrire les surfaces paramétriques, et connu sous le nom les fonctions de mélange (blending function). Gordon et Hall (1971,1973) ont montré comment le procédé de la fonction de mélange (blending function) peut être utilisé pour construire des systèmes des coordonnées curvilignes, pour la représentation et le rapprochement des formes complexes, et pour l'interpolation par rapport aux domaines de la courbe arbitraire.

**4.2 Méthode des fonctions de mélange (blending function method)**

Les fonctions de mélange sont généralement développées pour simplifier la description géométrique dans les coordonnées local  $(\xi, \eta)$  ou l'espace de calcul. En basant sur le principe des fonctions de mélange qui a été amélioré par Gordon et Hall (1973), la représentation de domaine d'intérêt est une région quadrilatérale à des cotés curvilignes dans le plan cartésienne  $(x, y)$  et la description géomatique de ce domaine peut être transformé vers le domaine computationnelle ou les coordonnées locale  $(\xi, \eta)$ . La figure 4.1 montre un exemple général de la transformation des coordonnées, pour la description de la géométrie dans l'espace de calcul, la fonction de mélange peut être utilisée pour définir les coordonnées du point et les courbes paramétriques des bords de l'espace physique.

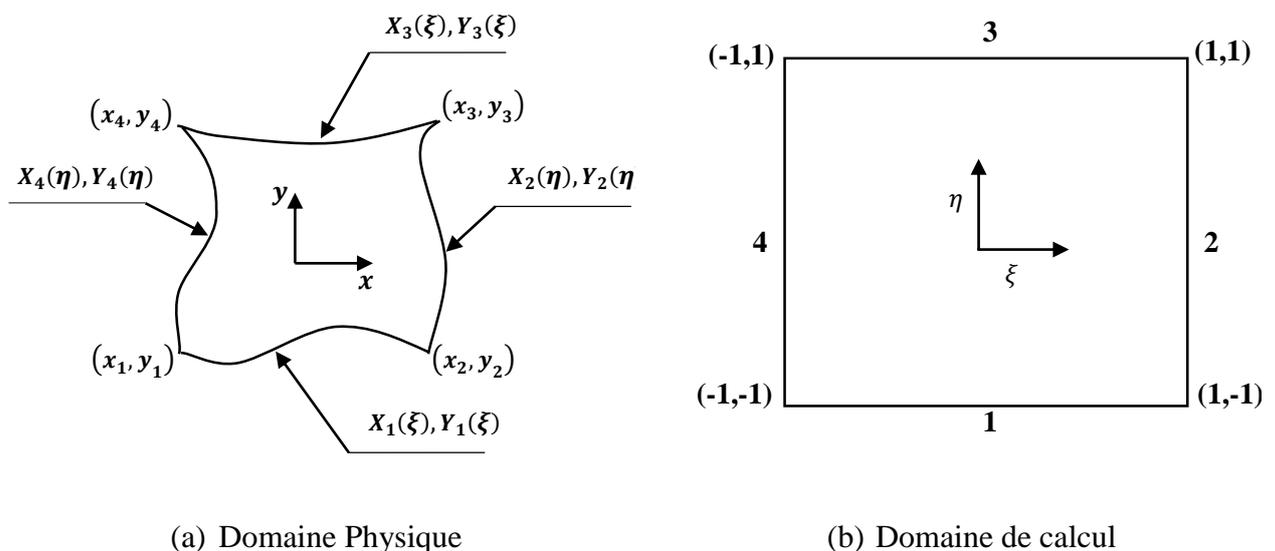


Figure 4.1 : Domaine physique ou réel et domaine de calcul.

Les fonctions de mélange (blending function) sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 X(\xi, \eta) = & \left(\frac{1-\eta}{2}\right) X_1(\xi, -1) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right) X_2(1, \eta) + \left(\frac{1+\eta}{2}\right) X_3(\xi, 1) + \left(\frac{1-\xi}{2}\right) X_4(-1, \eta) \\
 & - \left[ \left(\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\right) x_1 + \left(\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\right) x_2 + \left(\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\right) x_3 \right. \\
 & \left. + \left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\right) x_4 \right] \\
 \\
 Y(\xi, \eta) = & \left(\frac{1-\eta}{2}\right) Y_1(\xi, -1) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right) Y_2(1, \eta) + \left(\frac{1+\eta}{2}\right) Y_3(\xi, 1) + \left(\frac{1-\xi}{2}\right) Y_4(-1, \eta) \\
 & - \left[ \left(\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\right) y_1 + \left(\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\right) y_2 + \left(\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\right) y_3 \right. \\
 & \left. + \left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\right) y_4 \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où les fonctions  $X_i(\xi, \eta)$  et  $Y_i(\xi, \eta)$  représentent les quatre côtés de la limite des courbes paramétriques du domaine physique réel en fonction les coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  et  $x_i$  et  $y_i$  signifient les coordonnées nodales réels des points correspondant aux coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  dans l'espace de calcul.

#### 4.2.1 Chaîne de la transformation Jacobienne

La matrice de transformation à partir de système cartésien  $(x, y)$  vers les coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  est réalisée à l'aide de la matrice de Jacobienne. La chaîne de la transformation Jacobienne dans le cas bidimensionnel est exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial O}{\partial \xi} \\ \frac{\partial O}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial ( )}{\partial x} \\ \frac{\partial ( )}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

Où  $J$  est appelé la matrice **Jacobienne** de la transformation, et exprimé selon la matrice suivant :

$$J = \begin{bmatrix} J_{1,1}(\xi, \eta) & J_{1,2}(\xi, \eta) \\ J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{2,2}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Les termes de la matrice Jacobienne (4.4) sont définis suivant les fonctions de mélange (4.2) et sont obtenus comme :

$$\begin{aligned}
 J_{1,1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta) \frac{dX_1(\xi)}{d\xi} + X_2(\eta) + (1 + \eta) \frac{dX_3(\xi)}{d\xi} - X_4(\eta) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} [-(1 - \eta)x_1 + (1 - \eta)x_2 + (1 + \eta)x_3 - (1 + \eta)x_4] \\
 J_{1,2}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta) \frac{dY_1(\xi)}{d\xi} + Y_2(\eta) + (1 + \eta) \frac{dY_3(\xi)}{d\xi} - Y_4(\eta) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} [-(1 - \eta)y_1 + (1 - \eta)y_2 + (1 + \eta)y_3 - (1 + \eta)y_4] \\
 J_{2,1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[ -X_1(\xi) + (1 + \xi) \frac{dX_2(\eta)}{d\eta} + X_3(\xi) + (1 - \xi) \frac{dX_4(\eta)}{d\eta} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} [-(1 - \xi)x_1 - (1 + \xi)x_2 + (1 + \xi)x_3 + (1 - \xi)x_4] \\
 J_{2,2}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[ -Y_1(\xi) + (1 + \xi) \frac{dY_2(\eta)}{d\eta} + Y_3(\xi) + (1 - \xi) \frac{dY_4(\eta)}{d\eta} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} [-(1 - \xi)y_1 - (1 + \xi)y_2 + (1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)y_4]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

D'où l'inverse de la matrice Jacobienne  $J^{-1}$  est devenu comme suit :

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{2,2}(\xi, \eta) & -J_{1,2}(\xi, \eta) \\ -J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{1,1}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Finalement, on obtient la chaîne de la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial ()}{\partial x} \\ \frac{\partial ()}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial Y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial X(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial ()}{\partial \xi} \\ \frac{\partial ()}{\partial \eta} \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

Où, le déterminant de la matrice Jacobienne est obtenu par :

$$|J| = J_{1,1}(\xi, \eta)J_{2,2}(\xi, \eta) - J_{1,2}(\xi, \eta)J_{2,1}(\xi, \eta) \quad (4.8)$$

### 4.3 Modélisation par la version $p$ de la plaque avec ouverture circulaire

La plaque avec ouverture circulaire est discrétisée en utilisant la version  $p$  de la méthode des éléments finis. Deux nouveaux éléments- $p$  quadrilatéraux courbés sont développés sur la base des deux théories, du premier ordre FSDT et d'ordre élevé HSDT  $C^0$ , dans laquelle la plaque est divisée en quatre éléments- $p$  quadrilatéraux courbés (figure 4.2). Il est important de représenter correctement l'ouverture circulaire de la plaque, donc la méthode de la fonction de mélange est bien adaptée à cet effet. L'insertion de la fonction de mélange est nécessaire pour la description des éléments de la plaque à l'espace de calcul. La largeur, la longueur et le rayon de l'ouverture circulaire sont respectivement  $a$ ,  $b$  et  $r$ .

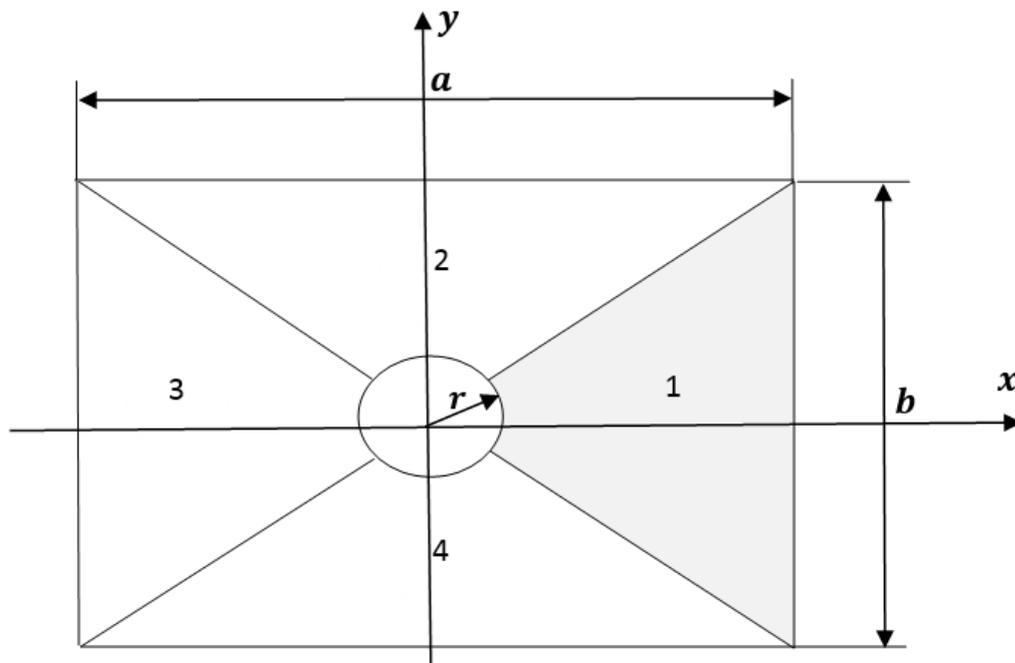


Figure 4.2 : Plaque avec ouverture circulaire discrétisée en 4 éléments- $p$

L'élément- $p$  quadrilatéral courbé (figure 4.3) est défini par ses quatre nœuds des sommets  $(x_i, y_i)$  et les quatre côtés sont  $(X_i, Y_i)$ , où  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ .

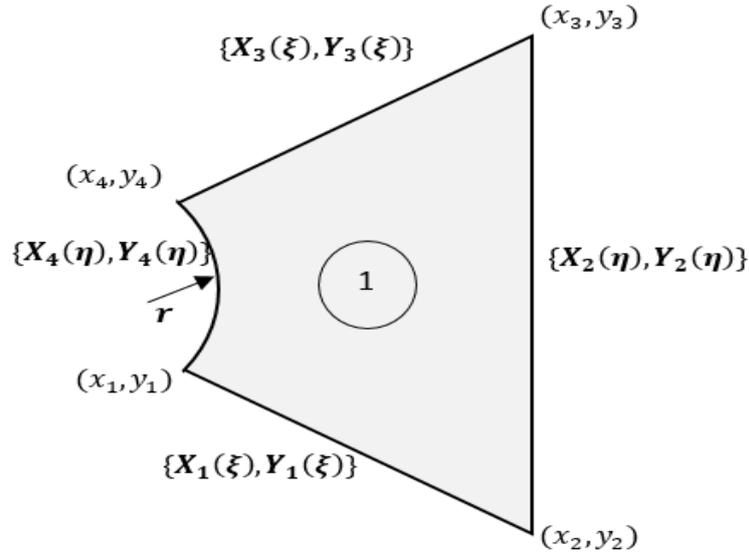


Figure 4.3 : élément-p quadrilatéral courbé.

En utilisant la méthode de la fonction de mélange, les équations correspondantes qui représentent la géométrie de la figure 4.3, sont exprimées comme

$$\begin{aligned}
 X(\xi, \eta) &= \frac{x_1}{4} + x_2 \left( \frac{\xi \eta}{4} - \frac{\eta}{4} \right) + x_3 \left( \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\xi}{4} + \frac{\xi \eta}{4} \right) + \frac{r \cos\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)}{2} - \frac{\xi r \cos\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)}{2} \\
 Y(\xi, \eta) &= \frac{y_1}{4} + y_2 \left( \frac{\xi \eta}{4} - \frac{\eta}{4} \right) + y_3 \left( \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\xi}{4} + \frac{\xi \eta}{4} \right) + \frac{r \sin\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)}{2} - \frac{\xi r \sin\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

### 4.3.1 Sélections des fonctions de forme

Les fonctions de forme hiérarchiques de la version p ont été introduites et développées pour la première fois par : Zienkiewicz et *al.* (1970) et Peano (1975). Ces fonctions doivent compléter les propriétés de la nullité à l'extrémité, l'orthogonalité, la compatibilité avec les éléments internes et le degré de la continuité ( $C^0, C^1 \dots$ ) et en outre, les exigences physiques qui sont imposées aux fonctions de forme, tels que les modes de corps rigides et les axes de symétrie de l'élément (Ahmadian 2011). Il existe deux types des fonctions de formes hiérarchiques, polynomiales et trigonométriques. Les fonctions de forme hiérarchiques d'un élément bidimensionnel quadrilatéral (Figure 4.4) sont généralement constituées des quatre fonctions de forme des nœuds, des bords et les fonctions de forme internes.

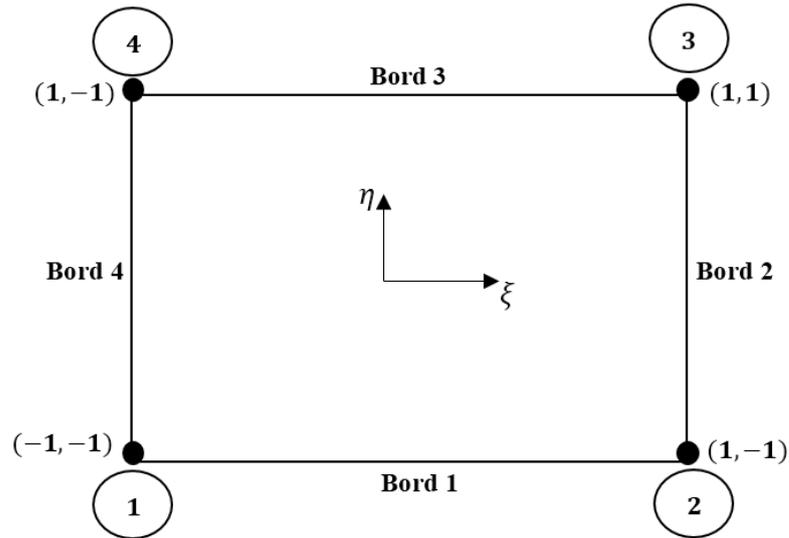


Figure 4.4 : Elément bidimensionnel quadrilatéral.

Fonctions de forme nodales sont ;

$$\begin{aligned}
 \text{Nœud 1 : } N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 \text{Nœud 2 : } N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 \text{Nœud 3 : } N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 \text{Nœud 4 : } N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Fonctions de forme des bords sont ;

$$\begin{aligned}
 \text{Bord 1 : } N_i^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta)g_i(\xi) & i = 3, 4, \dots, p \\
 \text{Bord 2 : } N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)g_i(\eta) & i = 3, 4, \dots, p \\
 \text{Bord 3 : } N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta)g_i(\xi) & i = 3, 4, \dots, p \\
 \text{Bord 4 : } N_i^{(4)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)g_i(\eta) & i = 3, 4, \dots, p
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Fonctions de forme internes sont exprimés comme ;

$$\begin{aligned}
 N_k^{int}(\xi, \eta) &= g_i(\xi) g_j(\eta) \quad k = 1, \dots, \frac{1}{2}(p-2)(p-3) \\
 \text{avec : } i, j &= 2, \dots, p-2; \quad i + j = 4, \dots, p \text{ et } p \geq 4.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

où  $g_i(\xi)$  et  $g_i(\eta)$  pour  $i = 3, 4, \dots, p$  sont des fonctions de forme hiérarchiques.

Dans notre étude, on a sélectionné des fonctions de forme polynomiales, dans lequel ses fonctions sont basées sur les polynômes de Legendre. Les fonctions de forme polynomiales sont données par Szabo et Babuska (1991).

$$g_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$g_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

$$g_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i - 3}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-2}(t) dt ; \quad i = 3, 4 \dots p \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $g_1(\xi)$  et  $g_2(\xi)$  sont les fonctions de forme nodales de l'élément utilisé dans la version h.  $g_i(\xi)$  est la fonction de forme polynomiale pour la continuité  $C^0$ . La figure 4.5 illustre les dix premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales.

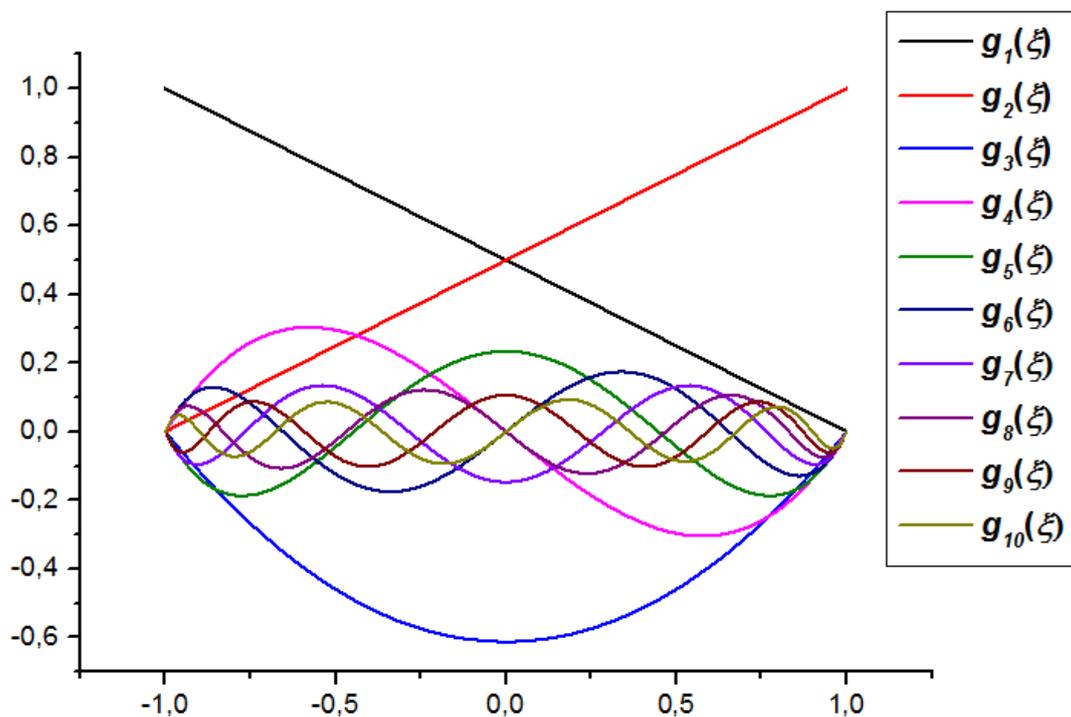


Figure 4.5 : Dix premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales.

#### 4.4 Formulation de l'élément- $p$ quadrilatéral courbé

La modélisation par la version  $p$  de la méthode des éléments finis est faite pour deux éléments- $p$  quadrilatéraux courbés à quatre nœuds, où le premier élément est développé à la base de la théorie FSDT avec cinq degrés de liberté par nœud ( $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y$ ) et le deuxième élément est basé sur la théorie HSDT  $C^0$  avec sept degrés de liberté par nœud ( $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \phi_x, \phi_y$ ). Les modèles nécessitent une continuité  $C^0$  pour toutes les variables. Les déplacements et les rotations des deux éléments- $p$  quadrilatéraux courbés sont exprimés comme :

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P U_i(t) N_i(\xi, \eta) \\
 v_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P V_i(t) N_i(\xi, \eta) \\
 w_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P W_i(t) N_i(\xi, \eta) \\
 \beta_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P \beta_{x_i}(t) N_i(\xi, \eta) \\
 \beta_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P \beta_{y_i}(t) N_i(\xi, \eta) \\
 \phi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P \phi_{x_i}(t) N_i(\xi, \eta) \\
 \phi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^P \phi_{y_i}(t) N_i(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

où  $P = 4 + 4(p - 2) + \frac{1}{2}(p - 2)(p - 3)$ . Les équations (4.15) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [N] \{q\} \tag{4.16}$$

où [N] est la matrice des fonctions de forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_v] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [N_w] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_x}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_y}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\phi_x}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

et

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_{\phi_x} \\ q_{\phi_y} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

dans lequel  $q_u, q_v, q_w, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_{\phi_x}$  et  $q_{\phi_y}$  sont les déplacements généralisés.

#### 4.4.1 Energie de déformation

L'énergie de déformation  $E_d$  exprimée en fonction des déplacements généralisés est donnée en la simplifiant sous la forme suivante ;

$$E_d = E_{d_1} + E_{d_2} + E_{d_3} + E_{d_4} + E_{d_5} + E_{d_6} + E_{d_7} + E_{d_8} \quad (4.19)$$

où

$$E_{d_1} = \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right. \\ + A_{33} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] + 2A_{13} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \\ + 2A_{23} \left[ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] \\ \left. + k_s \left( A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right) \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
E_{d_2} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ 2B_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) + 2B_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + 2B_{12} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \right] \right. \\
& + 2B_{33} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2B_{13} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \right] \\
& \left. + 2B_{23} \left[ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \right] \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{d_3} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ 2D_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + 2D_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + 2D_{12} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] \right. \\
& + 2D_{33} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2D_{13} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] \\
& \left. + 2D_{23} \left[ \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{d_4} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ E_{11} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + E_{22} \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + 2E_{12} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right. \\
& + E_{33} \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right] \\
& + 2E_{13} \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right] + 2E_{23} \left[ \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \right] \\
& \left. + k_s \left( F_{44} (\beta_x)^2 + F_{55} (\beta_y)^2 + 2F_{45} (\beta_x \beta_y) \right) \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{d_5} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ G_{11} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + G_{22} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + 2G_{12} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right. \\
& + G_{33} \left[ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& + 2G_{13} \left[ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + 2G_{23} \left[ \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \\
& \left. + H_{44} (\phi_x)^2 + H_{55} (\phi_y)^2 + 2H_{45} (\phi_x \phi_y) \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{d_6} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ 2I_{11} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + 2I_{22} \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + 2I_{12} \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] \right. \\
& + 2I_{33} \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
& + 2I_{13} \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] \\
& + 2I_{23} \left[ \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
& \left. + 2S_{44}(\beta_x \phi_x) + 2S_{55}(\beta_y \phi_y) + 2S_{45}[(\beta_x \phi_y) + (\beta_y \phi_x)] \right] dx dy \\
E_{d_7} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} k_s \left[ 2S_{144} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \beta_x \right) + 2S_{155} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \beta_y \right) \right. \\
& \left. + 2S_{145} \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \beta_x \right) + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \beta_y \right) \right] \right] dx dy \\
E_{d_8} = & \frac{1}{2} \iint_{xy} \left[ 2S_{244} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \phi_x \right) + 2S_{255} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \phi_y \right) \right. \\
& \left. + 2S_{245} \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \phi_x \right) + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \phi_y \right) \right] \right] dx dy
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Les fonctions  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, I_{ij}, S_{ij}, S_{1ij}$  et  $S_{2ij}$  sont indiqués comme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] dz \tag{4.21}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (z - \delta f(z)) dz \tag{4.22}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (-\delta f(z)) dz \tag{4.23}$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( z^2 + \delta (f(z))^2 - \delta 2z(f(z)) \right) dz \quad (4.24)$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( 1 + \delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 - \delta 2 \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \quad (4.25)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (\delta f(z))^2 dz \quad (4.26)$$

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (4.27)$$

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \left( (f(z))^2 - z(f(z)) \right) \right) dz \quad (4.28)$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \left( \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) \right) dz \quad (4.29)$$

$$S1_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( 1 - \delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \quad (4.30)$$

$$S2_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( -\delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \quad (4.31)$$

où  $NL$  est, le nombre des plis ou des couches.

#### 4.4.2 Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  exprimée dans le chapitre 3, peut être écrite sous la forme suivante :

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_4} + E_{c_5} + E_{c_6} \quad (4.32)$$

où

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \iint_{xy} \rho_A \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
E_{c_2} &= \frac{1}{2} \iint_{xy} 2\rho_B \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right) \right] dx dy \\
E_{c_3} &= \frac{1}{2} \iint_{xy} 2\rho_C \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] dx dy \\
E_{c_4} &= \frac{1}{2} \iint_{xy} \rho_D \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \\
E_{c_5} &= \frac{1}{2} \iint_{xy} \rho_E \left[ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \\
E_{c_6} &= \frac{1}{2} \iint_{xy} 2\rho_F \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] dx dy \tag{4.33}
\end{aligned}$$

où,  $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D, \rho_E$  et  $\rho_F$  sont citées comme ;

$$\rho_A = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k dz \tag{4.34}$$

$$\rho_B = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k (z - \delta f(z)) dz \tag{4.35}$$

$$\rho_C = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k (-\delta f(z)) dz \tag{4.36}$$

$$\rho_D = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( (z^2 + \delta (f(z))^2 - \delta 2z(f(z))) \right) dz \tag{4.37}$$

$$\rho_E = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k (\delta (f(z))^2) dz \tag{4.38}$$

$$\rho_F = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \delta \left( (f(z))^2 - z(f(z)) \right) \right) dz \tag{4.39}$$

### 4.5 Equations du mouvement de la vibration libre

L'équation du mouvement vibratoire libre est donnée en utilisant l'équation de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial E_d}{\partial q} = 0 \quad (4.40)$$

En insérant les équations des énergies de déformation et cinétique dans (4.40), l'équation du mouvement de la vibration libre élémentaire est exprimée selon l'expression suivante :

$$[M]^e \{\ddot{q}\}_e + [K]^e \{q\}_e = 0 \quad (4.41)$$

où  $[K]^e$  et  $[M]^e$  sont les matrices de rigidité et de masse élémentaires, qui sont déterminées respectivement à partir de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique, elles seront sous la forme suivante :

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & 0 & [K_{u\beta_x}] & [K_{u\beta_y}] & [K_{u\phi_x}] & [K_{u\phi_y}] \\ [K_{uv}]^T & [K_{vv}] & 0 & [K_{v\beta_x}] & [K_{v\beta_y}] & [K_{v\phi_x}] & [K_{v\phi_y}] \\ 0 & 0 & [K_{ww}] & [K_{w\beta_x}] & [K_{w\beta_y}] & [K_{w\phi_x}] & [K_{w\phi_y}] \\ [K_{u\beta_x}]^T & [K_{v\beta_x}]^T & [K_{w\beta_x}]^T & [K_{\beta_x\beta_x}] & [K_{\beta_x\beta_y}] & [K_{\beta_x\phi_x}] & [K_{\beta_x\phi_y}] \\ [K_{u\beta_y}]^T & [K_{v\beta_y}]^T & [K_{w\beta_y}]^T & [K_{\beta_x\beta_y}]^T & [K_{\beta_y\beta_y}] & [K_{\beta_y\phi_x}] & [K_{\beta_y\phi_y}] \\ [K_{u\phi_x}]^T & [K_{v\phi_x}]^T & [K_{w\phi_x}]^T & [K_{\beta_x\phi_x}]^T & [K_{\beta_y\phi_x}]^T & [K_{\phi_x\phi_x}] & [K_{\phi_x\phi_y}] \\ [K_{u\phi_y}]^T & [K_{v\phi_y}]^T & [K_{w\phi_y}]^T & [K_{\beta_x\phi_y}]^T & [K_{\beta_y\phi_y}]^T & [K_{\phi_x\phi_y}]^T & [K_{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$[M]^e = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 & [M_{u\beta_x}] & 0 & [M_{u\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 & 0 & [M_{v\beta_y}] & 0 & [M_{v\phi_y}] \\ 0 & 0 & [M_{ww}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [M_{u\beta_x}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_x\beta_x}] & 0 & [M_{\beta_x\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{v\beta_y}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_y\beta_y}] & 0 & [M_{\beta_y\phi_y}] \\ [M_{u\phi_x}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_x\phi_x}]^T & 0 & [M_{\phi_x\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{v\phi_y}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_y\phi_y}]^T & 0 & [M_{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Les termes des matrices élémentaires de rigidité  $[K]^e$  et de masse  $[M]^e$  sont bien détaillés dans l'annexe A.

L'équation du mouvement de la vibration libre de la plaque est donnée par l'assemblage des matrices élémentaires de rigidité  $[K]^e$  et de masse  $[M]^e$ . L'équation de mouvement de la vibration libre globale peut être exprimée comme.

$$[M]^G \{\ddot{q}\}_G + [K]^G \{q\}_G = 0 \quad (4.44)$$

où  $[K]^G$  et  $[M]^G$  sont les matrices de rigidité et de masse globale.

---

*Chapitre 5*

*Elaboration d'un programme  
de calcul*

---

# Chapitre 5

## Elaboration d'un programme de calcul



*'objectif de ce chapitre, c'est de montrer les procédures de l'élaboration du programme de calcul. Un code de calcul a été élaboré en utilisant Mathcad. Ce code permettra de déterminer les fréquences fondamentales des plaques composites stratifiées, possédants différentes formes des ouvertures. La réalisation de ce code est faite par l'implémentation des formules mathématique obtenues dans le chapitre précédent. Sachant que, deux éléments-p quadrilatéraux courbés sont développés, en basant sur les deux théories des plaques composites FSDT et HSDT  $C^0$ . Ce chapitre inclut une description générale sur l'environnement du programme de calcul, un schéma du programme général, suivi par des explications détaillées sur la fonctionnalité de chaque sous-programme.*

### 5.1 Environnement du programme de calcul

Le programme élaboré dans cette étude, est réalisé à l'aide de logiciel Mathcad. Les graphes et les modes propres sont déterminés par logiciel Origin 9.0. L'exécution de notre programme est effectué sur un micro-ordinateur avec un processeur Core i3 (3.0 GHz) et 2 Go de la capacité de RAM.

Ce programme comporte généralement :

- ✓ Des fichiers d'entrée
- ✓ Le programme de calcul.
- ✓ Un fichier de sortie.

### 5.2 Schéma globale du programme de calcul

L'organigramme de la figure 5.1 présente les différentes étapes d'élaboration d'un programme de calcul.

Les étapes nécessaires du programme de calcul sont :

- Lecture des données de tous les paramètres élémentaires nécessaires physiques et géométriques du système ( plaque composite stratifiée avec ouverture), le nombre des degrés polynomiales des fonctions de forme  $p$ , les paramètres élémentaires (nombres

des éléments-p, les tableaux de connectivité des nœuds et des bords, ...), les paramètres physiques (coefficient de poisson, module de Young, densité, module de cisaillement..) et les paramètres géométriques (les dimensions de la plaque, les équations paramétriques élémentaires de la géométrie)

- Calcul des intégrales.
- Création des matrices de rigidité  $[K_e]$  et de masse  $[M_e]$  élémentaire.
- Assemblage des matrices globales de masse  $[MG]$  et de rigidité  $[KG]$ , en fonction des tableaux de localisation des nœuds et des bords, ainsi que le vecteur transformé  $[Tr]$ .
- Introduction des conditions aux limites.
- Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de l'équation  $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0$ .
- Affichage des fréquences propres et modes propres.

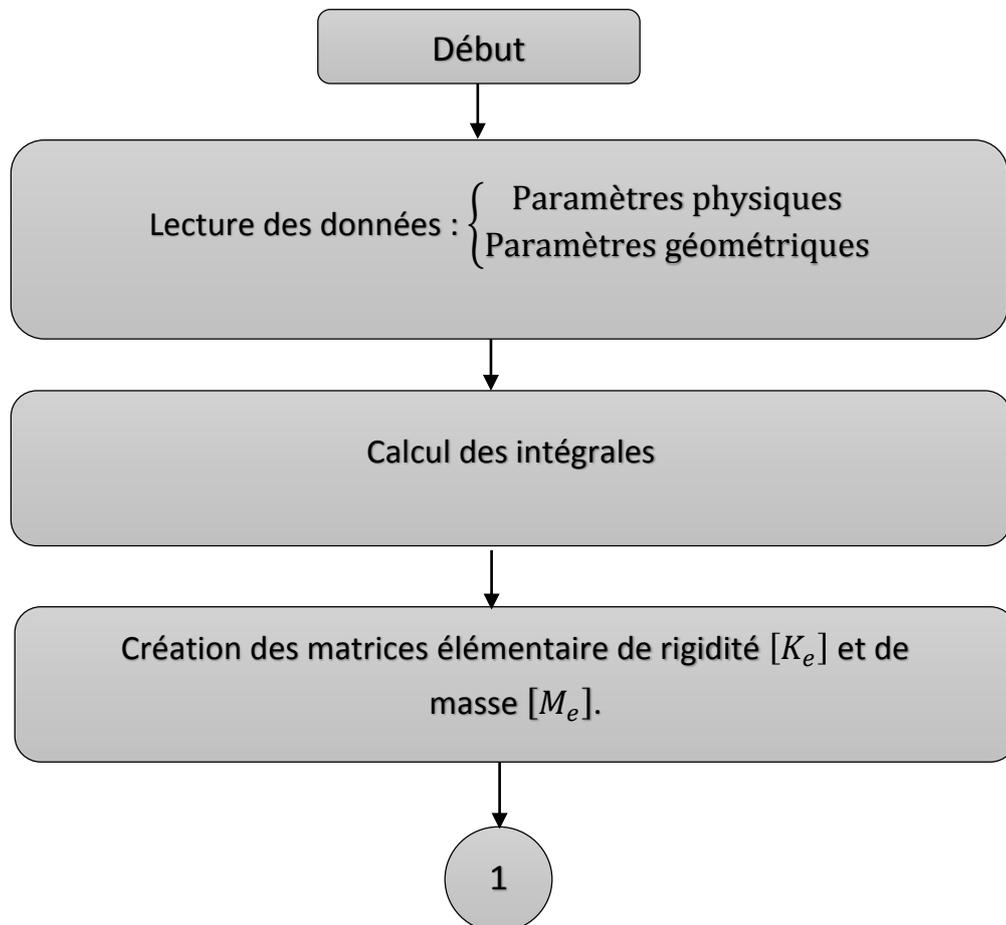


Figure 5.1 schéma globale du programme de calcul.

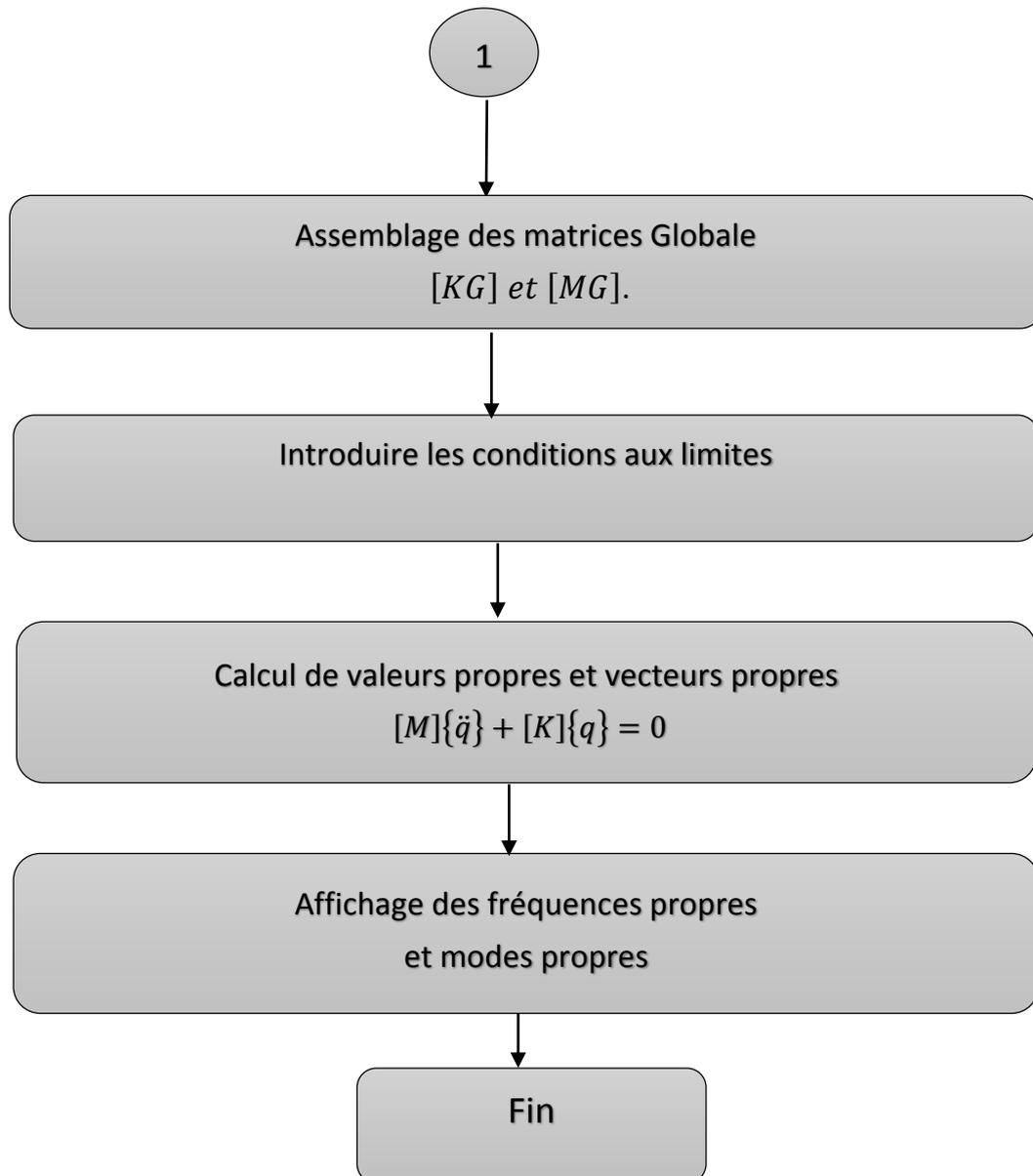


Figure 5.1 suite.

### 5.3 Etapes de fonctionnement du programme de calcul

Le programme de calcul est réalisé pour étudier la vibration libre des plaques composites stratifiées avec différentes forme d'ouverture. L'objectif principal est, de déterminer les fréquences propres et les modes propres. Les sous-programmes principaux du programme de calcul global sont les suivantes :

#### 5.3.1. Stockage des données générales

Les fichiers de stockages contiennent tous les données nécessaires qui identifient les paramètres du système.

**5.3.1.1. Paramètres géométriques**

- L'épaisseur de la plaque  $h$ .
- Les coordonnées géométriques élémentaires  $X(i, j), Y(i, j)$ , dans lesquels ils sont exprimés par les fonctions de mélange (voir le chapitre précédent).

**5.3.1.2. Paramètres physiques**

- Module d'élasticité  $E$
- Module de cisaillement  $G$
- Coefficient de poisson  $\nu$
- Densité  $\rho$  et ainsi que l'angle d'orientation des fibres  $\theta$
- Le nombre des couches  $NP$ .

**5.3.1.3. Paramètres de la version-p de la méthode des éléments finis**

- Fonctions de forme de la version-p de la méthode des éléments finis  $N(n, x)$ .
- Degré du polynôme des fonctions de forme ;  $p$
- Nombre des éléments ;  $NE$
- Nombre totale des nœuds ;  $NTN$
- Nombre totale des bords ;  $NTB$
- Matrice de transformée générale ;  $Transfg$

**5.3.2 Sous-programme des matrices élémentaires**

Ce sous-programme est permet de calculer les intégrales des termes des matrices élémentaires de rigidité  $[K_e]$  et de masse  $[M_e]$ .

**5.3.3 Sous-programme des matrices globales**

Ce sous-programme est réalisé pour déterminer les matrices de rigidité et de masse globale de système, en basant sur l'assemblage des matrices élémentaires, où ce sous-programme est effectuée l'opération de l'assemblage en trois parties :

- Localisation générale des nœuds et des bords des éléments-p ; **LOCG**.
- Matrice des transformées générale ; **Transfg**.
- Assemblage finale des matrices globales ;  $[KG]$  et  $[MG]$

**5.3.4 Sous-programme des conditions aux limites**

Dans la figure 5.2, on a un élément quadrilatère avec 4 nœuds aux sommets et 4 bords aux frontières. Afin de représenter les conditions aux limites, il suffit d'imposer la valeur (0 ou 1) pour déterminer l'état du degré de liberté des nœuds ou des bords de l'élément. La valeur 1 signifie que le degré de liberté est libre et 0 signifié que le degré de liberté est fixe. Nous avons déterminé deux éléments dans ce programme, le premier élément celle de la théorie FSDT qui

contient 5 degré de liberté par nœud et le deuxième élément celle de la théorie HSDT  $C^0$  qui contient 7 degré de liberté par nœud ; et ils sont les suivants :

- $u_0$  : Déplacement suivant l'axe x.
- $v_0$  : Déplacement suivant l'axe y.
- $w_0$  : Déplacement suivant l'axe z.
- $\beta_x$  : Rotation de la section droite autour de l'axe x.
- $\beta_y$  : Rotation de la section droite autour de l'axe y.
- $\phi_x$  : fonction de gauchissement suivant l'axe x (HSDT  $C^0$ ).
- $\phi_y$  : fonction de gauchissement suivant l'axe y (HSDT  $C^0$ ).

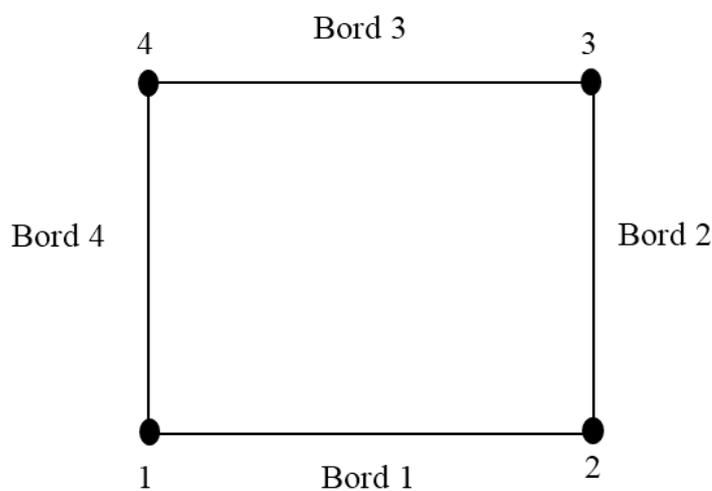


Figure 5.2 : Numérotation des nœuds et des bords de l'élément.

L'exécution des conditions aux limites des nœuds et des bords s'accomplit suivant l'ordre de la numérotation présenté dans la figure 5.2. Dans ce sous-programme, les conditions aux limites sont appliquées sur les matrices globales  $[KG]$  et  $[MG]$ .

### 5.3.5 Sous-programme de calcul des fréquences propres

Après la détermination des matrices de rigidité et de masse globales et l'application des conditions aux limites, les fréquences propres sont résolues par le système d'équation suivant :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (5.1)$$

avec

$$\{q\} = \{Q\} e^{i\omega t} \quad (5.2)$$

L'équation (5.1) peut être exprimé sous la forme suivante ;

$$([K] - \omega^2[M])\{Q\} = 0 \quad (5.3)$$

où  $\omega$  présente la fréquence propre et  $\{Q\}$  présente le vecteur des coordonnées généralisés.

Une transformation a un problème standard qui est réalisée.

$$([A] - \omega^2[I])\{Q\} = 0 \quad (5.4)$$

avec

$$[A] = [M]^{-1}[K] \quad (5.5)$$

Puisque la matrice  $[M]$  est une matrice symétrique, la méthode de Cholesky est utilisée pour la décomposer.

$$[M] = [L][L]^T \quad (5.6)$$

où  $[L]$  est définie la matrice triangulaire inférieure, ce qu'est signifié que tous les termes au-dessus de la diagonale sont égale à 0.

En introduisant (5.5) et (5.6) dans (5.4), il donne ;

$$([L]^{-1}[L]^{-T}[K] - \omega^2[I])\{Q\} = 0 \quad (5.7)$$

Dans lequel, la matrice  $[A]$  est donnée par ;

$$[A] = [L]^{-1}[L]^{-T}[K] \quad (5.8)$$

Equation (5.8) peut résoudre en deux étapes, avec une variable intermédiaire  $[B]$ .

$$[K] = [L][B] \text{ pour } [B] = [L]^T[A] \quad (5.9)$$

et

$$[A] = [L]^T[B] \text{ pour } [A] = [L]^{-1}[L]^{-T}[K] \quad (5.10)$$

Puisque, la matrice  $[A]$  est une matrice symétrique, donc les méthodes de Householder et QR sont appliquées.

---

*Chapitre 6*

*Validation et interprétations  
des résultats*

---

# Chapitre 6

## Validation et interprétations des résultats



*ce chapitre présente les résultats des travaux réalisés, dans lequel, sont inclus plusieurs études de convergence et de validation des fréquences propres de plaques composites stratifiées, ayant différentes formes d'ouverture. L'étude paramétrique a pour objectif de montrer l'effet des propriétés mécaniques des matériaux composites, les dimensions et la forme de l'ouverture sur les fréquences fondamentales. A la fin de ce chapitre, une analyse vibratoire de plaques composites stratifiées à rigidité variable, ayant une ouverture circulaire est effectuée, en examinant l'effet de l'angle d'orientation des fibres.*

### 6.1 Présentation des géométries

Avant d'entamer notre investigation, nous allons présenter les géométries de plaques avec la forme des ouvertures utilisées dans cette thèse (figure 6.1-5).

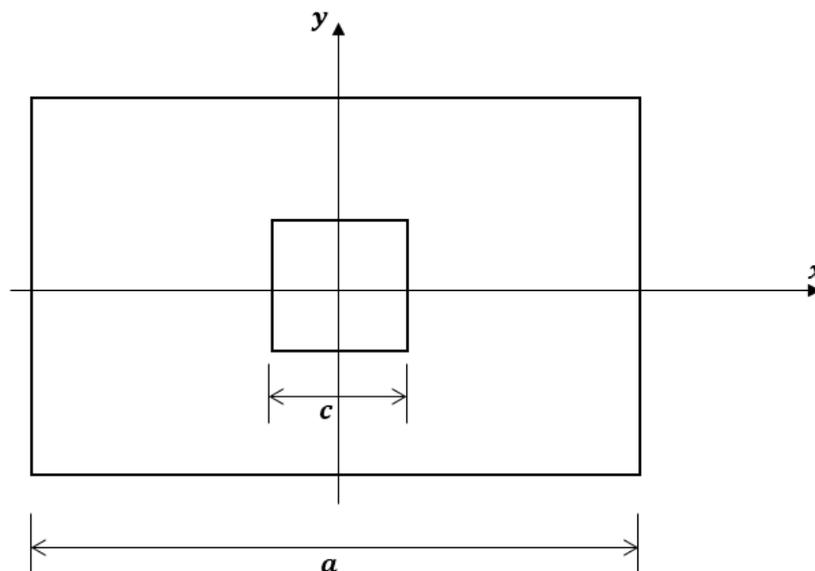


Figure 6.1 : Plaque rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée).

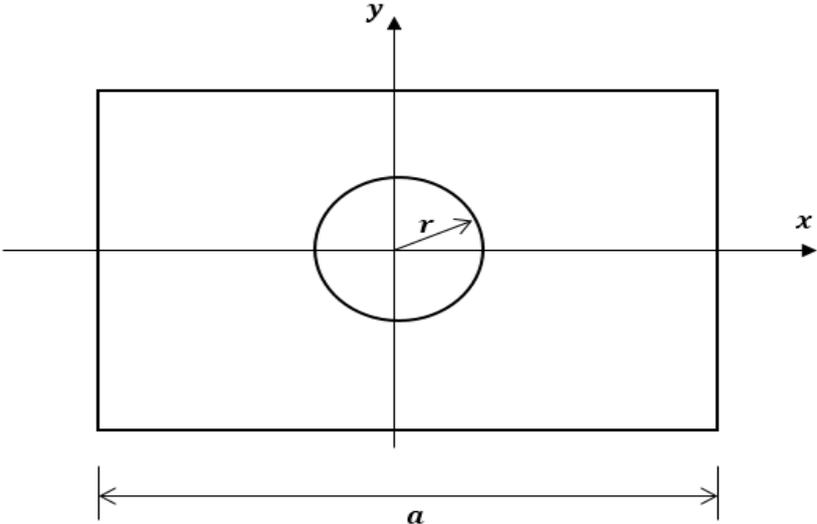


Figure 6.2 : Plaque rectangulaire avec l'ouverture N°2 (circulaire).

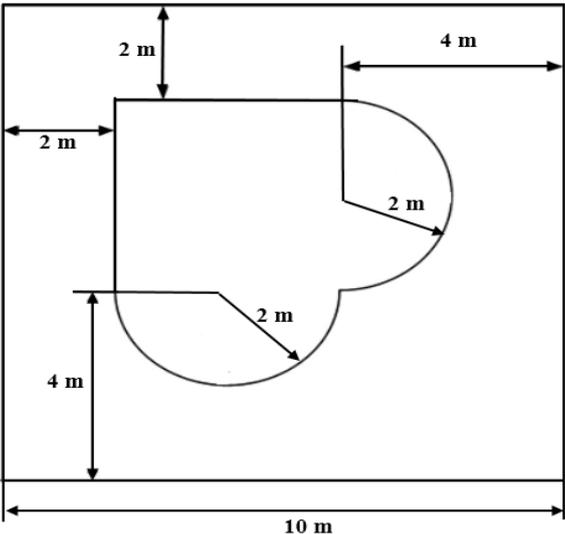


Figure 6.3 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°3.

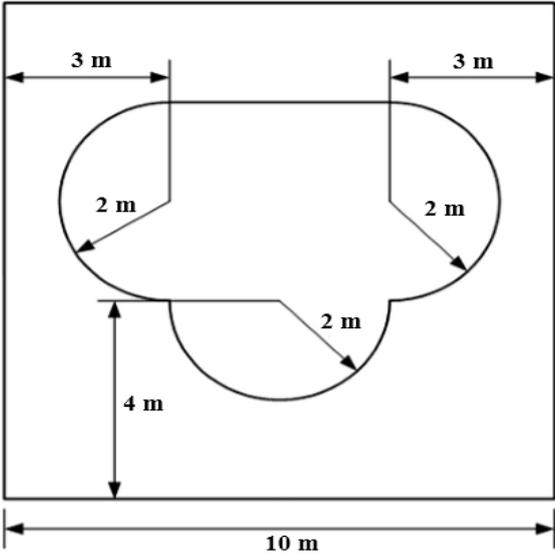


Figure 6.4 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°4.

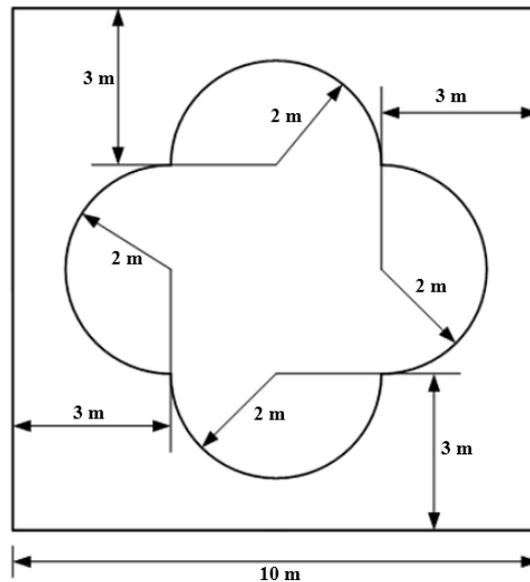


Figure 6.5 : Plaque carré composite avec l'ouverture N°5.

## 6.2 Convergence et validation

Dans la première partie, nous avons réalisé une étude de convergence et de comparaison avec les solutions disponibles dans la littérature. Cette étude concerne de plaques CSRC avec les ouvertures N°1, N°3 et N°4 (figure 6.1, figure 6.3 et figure 6.4), ainsi qu'une plaque CSRV sans ouverture.

### 6.2.1 Plaque CSRC avec l'ouverture N°1 (carrée)

Comme première étape, une étude de convergence et de validation est réalisée pour examiner l'exactitude et la précision des résultats obtenues avec le programme élaboré. La plaque rectangulaire composite stratifiée avec l'ouverture N°1 (carrée) est discrétisée en quatre éléments-p trapézoïdales. La convergence est obtenue en faisant augmenter le degré  $p$  des fonctions de forme hiérarchiques polynomiales, sachant que le nombre des fonctions est fixé à 9. La comparaison est réalisée avec différentes orientations des fibres et des différentes conditions aux limites en utilisant le paramètre de fréquence  $\Omega = \omega (a^2/h) (\sqrt{\rho/E_2})$ .

Deux exemples sont traités pour valider le modèle. Le premier concerne une plaque stratifiée symétriques à 40 couches à épaisseurs égales avec les orientations  $[(\pm 45^\circ/0^\circ)_3(90^\circ/0^\circ/90^\circ)_2]_s$ . Les conditions aux limites utilisées sont :

- Plaque simplement appuyée sur les quatre bords (AAAA).
- Plaque totalement encastree sur les quatre bords (EEEE).

Le deuxième exemple concerne une plaque stratifiée  $[0^\circ/90^\circ]$  à deux couches appuyée sur les quatre bords.

Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés sont indiquées dans le tableau 6.1, où le matériau (1) concerne l'exemple 1 et le matériau (2) concerne l'exemple 2.

Les paramètres de fréquence sont calculés en faisant varier le rapport  $c/a$  de 0 jusqu'à 0.8 avec un pas de 0.2 pour l'exemple 1, deux rapports de la longueur sur l'épaisseur sont adoptés ( $a/h = 75$  et  $a/h = 15$ ). Alors que dans l'exemple 2, le rapport  $c/a$  est varié de 0.2 à 0.6 avec une épaisseur de  $a/h = 100$ .

Les résultats des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque composite rectangulaire avec l'ouverture N°1 (carrée) (figure 6.1) sont indiqués dans les tableaux 6.2-11. Les résultats de l'exemple 1 sont donnés par les tableaux 6.2-10 et qui sont comparés avec les solutions de la FSDT et la HSDT  $C^1$  (Kumar et Shrivastava 2005). Les résultats de l'exemple 2 sont donnés par le tableau 6.11 et qui sont validés avec la FSDT (Sheikh et *al.* 2004) et ANSYS (Khaldoon 2009). Sachant que, les solutions de ces derniers sont obtenues par la version h de la méthode des éléments finis classique.

Les résultats obtenus montrent que la solution converge rapidement en utilisant seulement 9 fonctions de forme hiérarchiques, une bonne concordance est obtenue avec les résultats de la littérature. En outre, on constate que les résultats obtenus par les modèles FSDT et HSDT  $C^0$  montrent une très bonne concordance dans le cas de plaques minces  $a/h = 75$ ,  $a/h = 100$  (voir tableaux 6.2-6 et 6.11) et modérément épaisses  $a/h = 15$  (voir tableaux 6.7-10).

**Tableau 6.1** : Propriétés mécaniques des matériaux.

	$E_1(N/m^2)$	$E_2(N/m^2)$	$G_{12} = G_{13}$ ( $N/m^2$ )	$G_{23}(N/m^2)$	$\nu_{12}$	$\rho (kg/m^3)$
Matériau (1)	$13 \times 10^{10}$	$10^{10}$	$0.5 \times 10^{10}$	$0.33 \times 10^{10}$	0.35	1500
Matériau (2)	25	1	0.5	0.2	0.25	1

**Tableau 6.2 :** Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $c/a = 0$ ,  $a/h = 75$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	$p$	Mode				
		1	2	3	4	5
Présente HSDT	5	13.707	29.002	38.496	54.215	55.169
	6	13.707	29.001	38.493	53.786	54.556
	7	13.707	28.997	38.487	53.715	54.528
	8	13.707	28.997	38.487	53.710	54.526
	9	13.707	28.997	38.487	53.710	54.526
Présente FSDT		13.706	28.997	38.487	53.717	54.520
FSDT (Kumar et Shrivastava 2005)		13.59	29.11	37.79	53.93	55.07
HSDT $C^1$ (Kumar et Shrivastava 2005)		13.71	29.50	38.30	54.85	55.97

**Tableau 6.3 :** Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $c/a = 0.2$ ,  $a/h = 75$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	$p$	Mode				
		1	2	3	4	5
Présente HSDT	5	13.318	28.903	37.102	54.031	55.451
	6	13.246	28.331	36.453	52.653	55.252
	7	13.223	28.292	36.314	52.545	54.254
	8	13.212	28.252	36.234	52.494	54.226
	9	13.203	28.231	36.174	52.477	54.195
Présente FSDT		13.203	28.230	36.170	52.472	54.201
FSDT (Kumar et Shrivastava 2005)		13.15	28.39	35.39	52.40	55.30
HSDT $C^1$ (Kumar et Shrivastava 2005)		13.40	29.06	36.90	53.42	56.27

**Tableau 6.4 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $c/a = 0.4$ ,  $a/h = 75$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	14.249	25.590	28.788	48.726	51.007
Présente FSDT	14.249	25.584	28.779	48.723	50.998
FSDT (Kumar et Shrivastava 2005)	14.24	25.65	28.64	48.71	51.44
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	14.86	26.68	29.91	49.76	54.10

**Tableau 6.5 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $c/a = 0.6$ ,  $a/h = 75$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	19.377	27.783	28.962	43.965	51.215
Présente FSDT	19.375	27.770	28.954	43.940	51.204
FSDT (Kumar et Shrivastava 2005)	19.52	28.20	29.37	45.22	51.65
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	21.06	30.06	31.41	49.42	53.47

**Tableau 6.6 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $c/a = 0.8$ ,  $a/h = 75$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	38.465	45.485	46.155	55.984	82.358
Présente FSDT	38.447	45.434	46.138	55.925	82.310
FSDT (Kumar et Shrivastava 2005)	38.75	45.77	46.51	56.45	86.86
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	40.73	48.53	48.99	60.27	88.73

**Tableau 6.7 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, EEEE,  $c/a = 0.2$ ,  $a/h = 15$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	20.972	32.182	36.248	49.710	53.562
Présente FSDT	20.933	32.158	36.074	49.456	53.568
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	21.50	32.89	37.83	50.47	-

**Tableau 6.8 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, EEEE,  $c/a = 0.4$ ,  $a/h = 15$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	27.174	31.325	34.955	45.953	47.716
Présente FSDT	27.107	31.263	34.771	45.770	47.473
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	27.52	32.06	35.98	47.91	-

**Tableau 6.9 :** Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, EEEE,  $c/a = 0.6$ ,  $a/h = 15$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	44.578	44.796	52.901	55.334	58.524
Présente FSDT	44.506	44.729	52.422	54.798	58.070
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	45.48	45.72	54.90	57.77	-

**Tableau 6.10** : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, EEEE,  $c/a = 0.8$ ,  $a/h = 15$ , matériau (1),  $[(\pm 45^\circ/0^\circ_2)_3(90^\circ/0^\circ_2/90^\circ)_2]_s$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente HSDT	113.881	113.885	121.862	121.910	126.959
Présente FSDT	113.245	113.249	120.567	120.697	123.468
HSDT C <sup>1</sup> (Kumar et Shrivastava 2005)	117.17	117.20	126.96	126.99	-

**Tableau 6.11** : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque stratifiée rectangulaire avec l'ouverture N°1, AAAA,  $a/h = 100$ , matériau (2),  $[0^\circ/90^\circ]$ .

c/a	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
0.2	Présente HSDT	9.116	25.505	25.505	38.032	54.020
	Présente FSDT	9.115	25.488	25.488	38.019	53.985
	FSDT (Sheikh et al. 2004)	9.116	25.500	25.515	38.045	54.033
	ANSYS (Khaldoun 2009)	9.11	25.63	25.80	38.11	53.154
0.4	Présente HSDT	9.101	20.421	20.421	35.479	44.580
	Présente FSDT	9.101	20.402	20.402	35.467	44.510
	FSDT (Sheikh et al. 2004)	9.093	20.409	20.429	35.483	44.599
	ANSYS (Khaldoun 2009)	9.12	20.25	20.34	35.67	44.76
0.6	Présente HSDT	11.146	18.589	18.589	32.996	34.355
	Présente FSDT	11.146	18.574	18.574	32.936	34.345
	FSDT (Sheikh et al. 2004)	11.113	18.536	18.549	32.941	34.271
	ANSYS (Khaldoun 2009)	11.31	18.69	18.71	31.56	34.34

## 6.2.2 Plaque CSRC avec ouverture quelconque

Afin d'élargir le champ d'étude de la vibration libre de la plaque composite stratifiée avec ouverture, on a examiné les paramètres de fréquence en considérant des ouvertures de forme quelconque. La plaque composite stratifiée est discrétisée en 4 éléments- $p$  quadrilatéraux courbés ou le degré  $p$  des fonctions de forme hiérarchique est pris égal à 9. Une étude de comparaison est faite avec les résultats de la littérature, en employant la théorie HSDT  $C^0$  et en tenant compte de l'effet de l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites sur les paramètres de fréquence.

### 6.2.2.1 Cas N°1 : Plaque CSRC avec l'ouverture N°3

Cet exemple traite de la vibration libre de la plaque carrée composite stratifiée avec l'ouverture N°3, illustré dans la figure 6.3. Les propriétés mécaniques du matériau (3) utilisé pour cette étude sont citées dans le tableau 6.12 avec un rapport  $h/a$  égal à 0.006 ou  $a$  égale à 10. Le paramètre de fréquence est donné par  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / D)^{1/2}$  et  $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ . Les paramètres de fréquence sont déterminés avec une plaque composite stratifiée à trois couches antisymétriques. Les conditions aux limites utilisés sont ; AAAA, EEEE et AEAE.

Les tableaux 6.13-19 montrent la comparaison des résultats trouvés avec les résultats disponible dans la littérature : la méthode d'analyse Isogéométrique IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015) et IGA (Shojaee et al. 2012), la méthode sans maillage de Galerkin EFG et la méthode d'interpolation de Kriging MKI (Bui et al. 2011).

**Tableau 6.12** : Propriétés mécanique du matériau (3)

	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}(GPa)$	$\nu_{12}$	$\rho (kg/m^3)$
Matériau (3)	2.45	1	0.48	0.48	0.23	8000

**Tableau 6.13** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée symétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	18.188	30.898	35.821	56.634	61.544
IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	18.192	30.936	36.082	56.420	62.024
IGA (Shojaee et al. 2012)	18.194	30.932	35.678	55.383	62.164
EFG (Bui et al. 2011)	18.226	31.127	36.237	56.874	62.390
MKI (Bui et al. 2011)	18.169	30.303	36.581	57.429	64.145

**Tableau 6.14** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres  $[15^\circ/-15^\circ/15^\circ]$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	19.093	32.103	36.156	57.810	62.767
IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	19.100	32.149	36.458	57.573	63.361
IGA (Shojaee et al. 2012)	18.912	32.045	36.004	56.345	63.370
EFG (Bui et al. 2011)	19.177	32.445	37.238	58.716	63.994
MKI (Bui et al. 2011)	18.323	31.472	37.617	63.077	66.538

**Tableau 6.15** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres [30°/-30°/30°].

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	20.597	33.911	37.302	60.050	64.999
IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	20.606	33.997	37.610	59.797	65.688
IGA (Shojaee et al. 2012)	20.316	33.933	37.074	58.484	65.895
EFG (Bui et al. 2011)	20.926	34.915	39.101	62.222	67.054
MKI (Bui et al. 2011)	20.310	33.987	39.898	58.111	69.699

**Tableau 6.16** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres [45°/-45°/45°].

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	21.303	34.691	37.977	61.149	66.148
IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	21.313	34.801	38.289	60.897	66.885
IGA (Shojaee et al. 2012)	20.982	34.848	37.559	59.325	67.518
EFG (Bui et al. 2011)	21.736	36.079	39.975	63.897	68.525
MKI (Bui et al. 2011)	20.987	34.897	39.269	63.375	69.017

**Tableau 6.17** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AAAA et l'angle d'orientation des fibres  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	18.197	31.039	35.836	56.694	62.002
IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	18.201	31.082	36.096	56.473	62.523
IGA (Shojaee et al. 2012)	18.190	31.087	35.655	55.452	62.582
EFG (Bui et al. 2011)	18.278	32.264	36.134	57.151	65.853
MKI (Bui et al. 2011)	18.027	32.506	37.268	57.698	70.768

**Tableau 6.18** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, EEEE.

Angle d'orientation	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/0°/0°]	Présente	44.250	71.187	81.614	96.891	101.696
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	44.269	71.432	81.620	97.102	101.593
[15°/-15°/15°]	Présente	45.050	71.608	81.301	96.713	101.679
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	45.084	71.802	81.245	96.875	101.969
[30°/-30°/30°]	Présente	45.689	73.281	79.325	96.469	101.064
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	45.736	73.395	79.268	96.545	101.865
[45°/-45°/45°]	Présente	45.944	76.131	76.159	96.347	100.772
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	45.998	76.075	76.253	96.393	101.819
[0°/90°/0°]	Présente	44.409	72.00	81.778	96.974	101.821
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	44.428	72.232	81.787	97.180	101.823

**Tableau 6.19** : Comparaison des cinq premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique, avec l'ouverture N°3, AEAE.

Angle d'orientation	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/0°/0°]	Présente	28.767	38.912	55.266	68.851	79.636
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	28.755	39.330	54.900	68.775	79.955
[15°/-15°/15°]	Présente	29.908	39.336	56.574	70.19	81.330
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	29.909	39.816	56.158	70.114	81.783
[30°/-30°/30°]	Présente	31.892	40.934	59.895	73.675	84.770
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	31.898	41.453	59.480	73.628	85.336
[45°/-45°/45°]	Présente	33.865	42.696	64.260	77.577	88.588
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	33.863	43.227	63.869	77.595	89.129
[0°/90°/0°]	Présente	29.091	39.133	56.101	69.427	80.696
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	29.079	39.560	55.728	69.728	81.042

### 6.2.2.2 Cas N°2 : Plaque CSRC avec l'ouverture N°4

Le deuxième exemple concerne une plaque carrée stratifiée avec l'ouverture N°4, donnée par la figure 6.4.

Les paramètres de fréquence  $\Omega$  où  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / D)^{1/2}$  ou  $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$  sont calculés avec un rapport  $h/a$  égale à 0.01. Les propriétés mécaniques du matériau sont les mêmes propriétés citées dans le tableau 6.12. Les fréquences fondamentales des tableaux 6.20 et 6.21 sont déterminées en variant l'angle d'orientations des fibres et les conditions aux limites.

Les résultats obtenus sont validés avec les solutions disponibles dans la littérature : la méthode d'analyse Isogéométrique IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015) est considérée en se basant sur la théorie classique de plaques minces (CPT). Les paramètres de fréquence indiqués dans les tableaux 6.20 et 6.21 montrent que les résultats obtenus sont en concordance avec les solutions de la littérature.

**Tableau 6.20** : Complaisons des cinq premières modes de paramètre de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique AAAA avec l'ouverture N°4.

Angle d'orientation	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/0°/0°/0°]	Présente	8.513	12.713	18.341	23.711	36.672
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	8.339	12.287	16.710	21.999	35.121
[0°/30°/30°/0°]	Présente	10.270	15.157	21.492	29.708	39.254
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	10.174	14.781	20.531	28.370	38.557
[0°/45°/45°/0°]	Présente	10.788	16.004	23.028	34.19	39.857
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	10.671	15.515	22.275	32.709	39.189
[0°/60°/60°/0°]	Présente	10.344	15.841	23.521	37.465	39.272
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	10.188	15.106	22.794	35.712	38.433
[0°/90°/90°/0°]	Présente	8.773	14.886	23.070	37.548	39.79
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	8.613	13.620	22.285	36.355	37.610

**Tableau 6.21** : Complaisons des cinq premières modes de paramètre de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique EEEE avec l'ouverture N°4.

Angle d'orientation	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/0°/0°/0°]	Présente	29.827	33.535	48.297	52.711	71.431
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	29.623	32.573	47.009	51.321	67.057
[0°/30°/30°/0°]	Présente	31.364	35.672	49.158	57.573	72.738
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	31.182	34.800	48.267	56.120	71.022
[0°/45°/45°/0°]	Présente	33.157	38.448	49.986	63.425	74.193
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	32.968	37.695	49.259	61.773	72.562
[0°/60°/60°/0°]	Présente	35.127	41.904	50.734	69.005	75.812
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	34.955	41.280	50.044	67.271	74.287
[0°/90°/90°/0°]	Présente	37.232	46.126	51.298	73.836	77.601
	IGA(Nurbs) (Yin et al. 2015)	37.103	45.655	50.623	72.562	76.279

### 6.2.3 Plaque CSRV sans ouverture

En première phase, L'étude de convergence et la précision des solutions obtenues dans le cas de la vibration libre d'une plaque carrée composite stratifiée à rigidité variable (CSRV) sans ouverture (figure 6.6) sont analysées. Cette étude est réalisée en faisant varier l'angle d'orientation des fibres paraboliques [ $T_0, T_1$ ] et les conditions aux limites. Afin de calculer le paramètre de fréquence  $\Omega$  où  $\Omega = (\omega a^2) \sqrt{\rho h/D}$  avec  $D = E_1 h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ , deux maillages (1x1) et (2x2) sont adoptés et le degré des fonctions de forme hiérarchiques  $p$  est augmenté. Les propriétés mécaniques du matériau utilisé (matériau (4)) sont indiquées dans le tableau 6.22 et le rapport  $h/a$  est pris égale à 0,001. Les conditions aux limites utilisées sont : EEEE, AAA, ALLE et LEAE où, E, A et L sont, respectivement encastree, appuyée et libre.

D'après les résultats obtenus précédemment, on a observé que les modèles FSDT et HSDT  $C^0$  donnent des résultats assez proches dans les cas de plaques mince et modérément épaisse. Dans la suite de l'étude, on a préféré d'utiliser la FSDT pour les plaques à rigidité variable parce que ce type des structures nécessite un grand temps de calcul comparés aux plaques à rigidité constante.

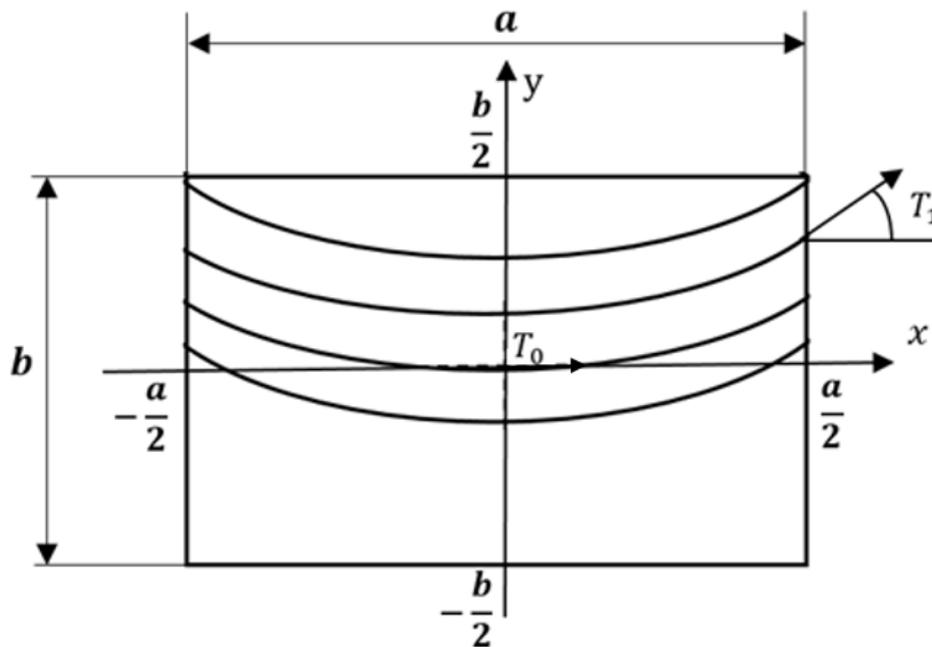


Figure 6.6 : Plaque CSRV sans ouverture.

Les résultats des quatre premiers paramètres de fréquence sont mentionnés dans les tableaux 6.23-26, où sont comparés avec les résultats de la solution de Rayleigh-Ritz et la théorie de CPT (Honda et al. 2008). Les résultats obtenus montrent que la solution converge rapidement avec un maillage (2x2) qu'un maillage (1x1), en adoptant seulement 9 fonctions de forme hiérarchiques. Un très bon accord peut être observé avec les résultats de la solution disponible.

**Tableau 6.22** : Propriétés mécanique du matériau (4).

	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}(GPa)$	$\nu_{12}$
Matériau (4)	138	8.96	7.1	7.1	0.30

**Tableau 6.23** : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV sans ouverture, EEEE.

[< $T_0, T_1$ >]	Méthode	$p$	Mode			
			1	2	3	4
	Présente (1x1)	7	71.99	139.77	158.84	250.29
		8	71.62	136.52	139.18	216.98
		9	70.86	134.57	139.10	216.68
		10	70.85	134.43	136.35	209.56
		11	70.78	134.23	136.31	209.53
[< 0,52 >]	Présente (2x2)	6	71.27	135.73	138.42	216.35
		7	70.83	134.38	136.40	209.11
		8	70.77	134.22	135.97	208.15
		9	70.76	134.18	135.92	207.92
	(Honda et al. 2008)		-	134.2	-	-

**Tableau 6.24** : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV sans ouverture, AAAA.

[< $T_0, T_1$ >]	Méthode	$p$	Mode			
			1	2	3	4
	Présente (1x1)	7	45.58	97.10	105.32	173.94
		8	45.54	96.77	99.65	162.70
		9	45.38	96.32	99.58	162.65
		10	45.36	96.31	98.76	159.90
		11	45.29	96.20	98.74	159.87
[< 0,50 >]	Présente (2x2)	6	45.45	96.50	99.16	161.46
		7	45.35	96.24	98.76	159.73
		8	45.29	96.18	98.57	159.24
		9	45.26	96.16	98.51	159.11
	(Honda et al. 2008)		-	96.21	-	-

**Tableau 6.25** : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV sans ouverture, ALLE.

[< $T_0, T_1$ >]	Méthode	$p$	Mode			
			1	2	3	4
	Présente (1x1)	7	8.26	29.86	72.53	73.48
		8	8.19	29.69	72.07	72.45
		9	8.17	29.64	71.55	72.29
		10	8.16	29.61	71.42	72.26
		11	8.15	29.60	71.33	72.24
[< 0,35 >]	Présente (2x2)	6	8.17	29.66	71.83	72.41
		7	8.15	29.61	71.49	72.26
		8	8.15	29.59	71.34	72.24
		9	8.14	29.58	71.27	72.23
	(Honda et al. 2008)		-	-	71.34	-

**Tableau 6.26** : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV sans ouverture, LEAE.

[< T <sub>0</sub> , T <sub>1</sub> >]	Méthode	p	Mode			
			1	2	3	4
[< 0,45 >]	Présente (1x1)	7	46.67	73.56	123.84	145.33
		8	46.66	73.48	123.45	130.30
		9	45.11	71.91	121.31	130.26
		10	45.11	71.90	121.29	126.27
		11	45.00	71.70	121.13	126.27
[< 0,45 >]	Présente (2x2)	6	45.58	72.65	122.42	129.15
		7	45.02	71.89	121.33	126.62
		8	44.96	71.71	121.15	125.86
		9	44.93	71.64	121.09	125.78
		(Honda et al. 2008)	-	-	121.1	-

### 6.2.4 Plaque orthotrope sans ouverture

Le dernier exemple de comparaison concerne l'analyse de la vibration libre d'une plaque rectangulaire orthotrope sans ouverture, en considérant une plaque à une couche unidirectionnelle avec des fibres rectilignes ([< T<sub>0</sub>, T<sub>1</sub> >] = [< 0,0 >]).

Les six premiers paramètres de fréquence sont calculés en adoptant un maillage uniforme de quatre éléments-p quadrilatéraux (2x2) et en fixant le degré  $p$  des fonctions de forme hiérarchiques à 9. Alors que, le paramètre de fréquence utilisé est ;  $\Omega = a^4 \sqrt{\frac{\rho \omega^2 h}{D(1-\nu_{12}\nu_{21})}}$ , où  $D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$  et le rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque est ;  $a/h = 100$ , où  $b/a = 1$ .

Les propriétés mécaniques du matériau utilisé dans cet exemple sont données par le tableau 6.27. Les conditions aux limites utilisés sont les suivantes : EEEE, AAAA, SSSC, AELE, EAEA et AALA. En outre, cet exemple est réalisé avec la théorie FSĐT.

Les tableaux 6.28-33 donnent une comparaison entre les résultats que nous avons trouvés et les résultats des deux méthodes suivantes : La méthode des éléments discrets « DEM » (Huang et al. 2005) et la méthode de Galerkin « EFGM » (Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012). Selon les tableaux 6.28-33, on peut observer que les résultats obtenus sont en excellent

accord avec les résultats de la littérature, ce qu'est justifiée l'exactitude du modèle traité dans cet exemple.

**Tableau 6.27** : Propriétés mécanique du matériau (5).

	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}(GPa)$	$\nu_{12}$
Matériau (5)	60.7	24.8	12	12	0.23

**Tableau 6.28** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, EEEE.

Méthode	[< $T_0, T_1$ >]	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		6.780	8.958	10.300	11.621	11.724	13.666
(Huang et al. 2005)	[< 0,0 >]	6.780	8.953	10.293	11.615	11.686	13.636
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		6.7484	8.9048	10.2376	11.5664	11.6555	13.6193

**Tableau 6.29** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, AAAA.

Méthode	[< $T_0, T_1$ >]	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		4.901	7.254	8.376	9.797	10.095	11.938
(Huang et al. 2005)	[< 0,0 >]	4.902	7.253	8.374	9.795	10.079	11.924
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		4.9002	7.2562	8.3823	9.7997	10.1161	11.9501

**Tableau 6.30** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, AAAE.

Méthode	$[\langle T_0, T_1 \rangle]$	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		5.241	7.853	8.482	10.112	10.785	12.201
(Huang et al. 2005)	$[\langle 0,0 \rangle]$	5.238	7.855	8.483	10.100	10.756	12.178
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		5.2349	7.8344	8.4850	10.1042	10.7647	12.2377

**Tableau 6.31** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, AELE.

Méthode	$[\langle T_0, T_1 \rangle]$	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		4.905	6.497	8.012	9.136	9.616	11.136
(Huang et al. 2005)	$[\langle 0,0 \rangle]$	4.901	6.486	8.030	9.183	9.615	11.287
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		4.8828	6.4843	7.9550	9.0959	9.6177	11.0582

**Tableau 6.32** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, EAEA.

Méthode	$[\langle T_0, T_1 \rangle]$	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		6.361	7.942	10.156	10.423	11.130	12.827
(Huang et al. 2005)	$[\langle 0,0 \rangle]$	6.361	7.941	10.149	10.408	11.125	12.814
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		6.3370	7.9288	10.0948	10.4357	11.0852	12.8111

**Tableau 6.33** : Comparaison paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire orthotrope, AALA.

Méthode	[< $T_0, T_1$ >]	Mode					
		1	2	3	4	5	6
Présente		3.527	5.953	6.517	8.127	9.419	9.604
(Huang et al. 2005)	[< 0,0 >]	3.533	5.945	6.509	8.129	9.410	9.571
(Bahmyari et Rahbar-Ranji 2012)		3.5268	5.9534	6.5210	8.1283	9.4256	9.6292

### 6.3 Résultats et interprétations

Dans cette section, nous avons présenté les résultats obtenues dans les cas de plaques CSRC et CSRV, en employant les ouvertures N°2 (figure 6.2) et N°5 (figure 6.5).

#### 6.3.1 Plaque CSRC avec l'ouverture N°2

Cette étude est une investigation de la vibration libre d'une plaque rectangulaire composite stratifiée, ayant une ouverture circulaire N°2 (Figure 6.2).

Dans cette étude, on va traiter trois cas différents. Dans le premier cas l'ouverture est libre, dans le deuxième cas l'ouverture est fixée (Encastree), alors que le troisième cas concerne une plaque avec une ouverture désaxée.

Cette étude permettra de voir l'effet de l'ouverture circulaire sur les fréquences de la plaque. On rappelle que notre plaque est discrétisée en quatre éléments-p quadrilatéraux courbés où le degré p des fonctions de forme hiérarchiques est égal à 9. La théorie HSDT est utilisée au long de cette étude.

Les fréquences propres sont examinées en variant le rayon de l'ouverture de la plaque, l'orientation des fibres et les conditions aux limites ; avec un rapport de  $a/h$  égale à 10. Le paramètre de fréquence utilisé est  $\Omega = \omega (a^2/h) (\sqrt{\rho/E_2})$ . Les propriétés mécaniques du matériau utilisé sont indiquées dans le tableau 6.34.

**Tableau 6.34** : Propriétés mécaniques du matériau (6).

	$E_1(N/m^2)$	$E_2(N/m^2)$	$G_{12} = G_{13}$ ( $N/m^2$ )	$G_{23}(N/m^2)$	$\nu_{12}$	$\rho (kg/m^3)$
Matériau (6)	40	1	0.6	0.5	0.25	1

### 6.3.1.1 Cas N°1 : Plaque avec ouverture libre

Dans ce cas, cinq premiers paramètres de fréquence sont calculés en faisant varier le rayon d'ouverture  $r$  de 0.1 à 0.4. Sachant que, l'ouverture circulaire est libre dans cet exemple. Quatre configurations de plaques stratifiées symétriques et antisymétriques à 4 couches sont adoptées, avec les orientations suivantes :  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ,  $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ , et  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ . Les conditions aux limites utilisées dans ce cas sont ; complètement encasté EEEE et simplement appuyée AAAA. Les résultats déterminés de cet exemple sont indiqués dans les tableaux 6.35-6.38. Les résultats obtenus montrent un changement important des paramètres de fréquence lorsqu'on augmente le rayon de l'ouverture  $r$  de la plaque et en outre, l'influence de l'orientation des fibres et les conditions aux limites sur les paramètres de fréquence est observée.

**Tableau 6.35** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée rectangulaire, encadrée des quatre cotés.

Orientation des fibres	$r$	Mode				
		1	2	3	4	5
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.1	23.625	31.622	37.713	47.556	47.711
	0.2	28.462	31.534	36.342	44.479	47.806
	0.3	38.765	38.999	44.614	45.822	55.019
	0.4	59.284	59.358	59.694	59.772	84.020
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	0.1	24.348	36.717	36.717	49.796	57.614
	0.2	29.534	35.638	35.638	46.792	52.906
	0.3	42.027	44.316	44.316	48.205	57.739
	0.4	64.056	64.156	64.156	64.245	91.313

**Tableau 6.36** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée rectangulaire, simplement appuyée des quatre cotés.

Orientation des fibres	$r$	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/90°/90°/0°]	0.1	13.983	24.682	33.097	42.322	43.253
	0.2	12.872	21.448	24.946	38.722	40.635
	0.3	13.254	19.501	21.461	31.979	36.611
	0.4	17.372	21.206	22.596	28.230	39.719
[0°/90°/0°/90°]	0.1	14.356	30.506	30.506	44.321	54.134
	0.2	13.223	24.722	24.722	40.021	47.158
	0.3	13.561	21.565	21.565	33.250	40.820
	0.4	17.670	22.457	22.457	28.927	42.589

**Tableau 6.37** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée rectangulaire, encadrée des quatre cotés.

Orientation des fibres	$r$	Mode				
		1	2	3	4	5
[45°/-45°/-45°/45°]	0.1	21.960	32.904	34.645	46.237	52.727
	0.2	26.510	32.305	32.765	43.897	48.453
	0.3	37.842	40.380	40.650	44.750	53.019
	0.4	58.688	58.757	58.849	58.919	84.564
[45°/-45°/45°/-45°]	0.1	23.140	36.109	36.109	51.161	56.197
	0.2	27.777	34.594	34.594	47.495	51.920
	0.3	39.709	42.595	42.595	47.714	56.530
	0.4	62.150	62.306	62.306	62.466	90.562

**Tableau 6.38** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée rectangulaire, simplement appuyée des quatre cotés.

Orientation des fibres	$r$	Mode				
		1	2	3	4	5
[45°/-45°/-45°/45°]	0.1	17.118	29.121	31.708	43.414	50.318
	0.2	19.009	26.968	27.784	41.337	45.213
	0.3	24.284	27.854	31.546	40.042	43.611
	0.4	35.370	35.804	46.104	48.808	55.241
[45°/-45°/45°/-45°]	0.1	19.084	32.884	32.884	49.317	53.222
	0.2	21.750	30.297	30.297	45.913	48.595
	0.3	28.834	33.959	33.959	44.601	48.138
	0.4	45.168	47.958	47.958	52.907	63.388

On remarque que l'effet du rayon de l'ouverture  $r$  sur les paramètres de fréquences est très significatif en particulier par les premiers modes des cas étudiés précédemment. On observe que les premiers modes augmentent avec l'accroissement du rayon de 0.1 à 0.4 avec une moyenne de 61% , 19% , 62% et 54% pour les tableaux 6.35 à 6.38, respectivement. La même constatation pour les autres modes, seulement dans le cas de la plaque simplement appuyée AAAA du tableau 6.36, on remarque que les paramètres de fréquence (modes 2 à 5) diminuent avec l'augmentation de  $r$ . On constate que la plaque avec l'ouverture N°2 peut être augmentée sa rigidité par l'angle d'orientation des fibres et le nombre des couches.

### 6.3.1.2 Cas N°2 : Plaque avec ouverture encastrée

Afin d'examiner l'effet des conditions aux limites sur les fréquences propres de plaques composites stratifiées, les paramètres de fréquence sont déterminées en fixant les degrés de liberté de l'ouverture et en prenant  $r = 0.2$  . Les propriétés mécaniques du matériau (6) sont utilisées dans ce cas. Deux configurations d'angle d'orientation des fibres sont considérées : symétrique  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  et antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ . Le paramètre de fréquence  $\Omega = \omega (a^2/h)(\sqrt{\rho/E_2})$  est utilisé dans ce cas où le rapport  $a/h$  est pris égale à 10. Les conditions aux limites aux bords sont proposées comme suit ; LLLL, ELEL et ALAL où L, E et A indiquent

que le bord est soit libre, encastré ou appuyé. Les résultats des cinq premiers modes sont indiqués dans les tableaux 6.39 et 6.40.

**Tableau 6.39 :** Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire composite stratifiée symétrique avec ouverture circulaire totalement encastrée.

Angle d'orientation	Condition aux limites	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/90°/90°/0°]	LLLL	9.101	11.302	11.737	13.029	23.171
	ELEL	28.184	29.395	32.038	33.863	47.825
	ALAL	25.377	26.864	28.268	30.154	44.804

**Tableau 6.40 :** Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque rectangulaire composite stratifiée antisymétrique avec ouverture circulaire totalement encastrée.

Angle d'orientation	Condition aux limites	Mode				
		1	2	3	4	5
[0°/90°/0°/90°]	LLLL	9.48	13.349	13.349	16.045	23.093
	ELEL	28.18	28.702	38.938	39.867	58.887
	ALAL	25.185	25.827	35.585	36.575	56.24

### 6.3.1.3 Cas N°3 : Plaque avec ouverture désaxée

L'effet de la position de l'ouverture circulaire sur les vibrations libres est étudié dans ce dernier cas, en décalant la position du centre de l'ouverture suivant l'axe y de la plaque (voir figure 6.7). L'ouverture circulaire est décalée d'une valeur de  $\alpha$  et qui est donnée par les tableaux 6.41 et 6.42. Le paramètre de fréquence  $\Omega = \omega (a^2/h)(\sqrt{\rho/E_2})$ , rayon  $r$  égale à 0.2 et un rapport  $a/h$  égal à 10 sont utilisés dans ce cas. L'investigation est faite avec une plaque stratifiée symétrique [0°/90°/90°/0°] et antisymétrique [0°/90°/0°/90°].

Les conditions aux limites appliqués aux quatre bords sont ; totalement encastrée EEEE et simplement appuyée AAAA, et l'ouverture circulaire reste libre. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 6.41 et 6.42.

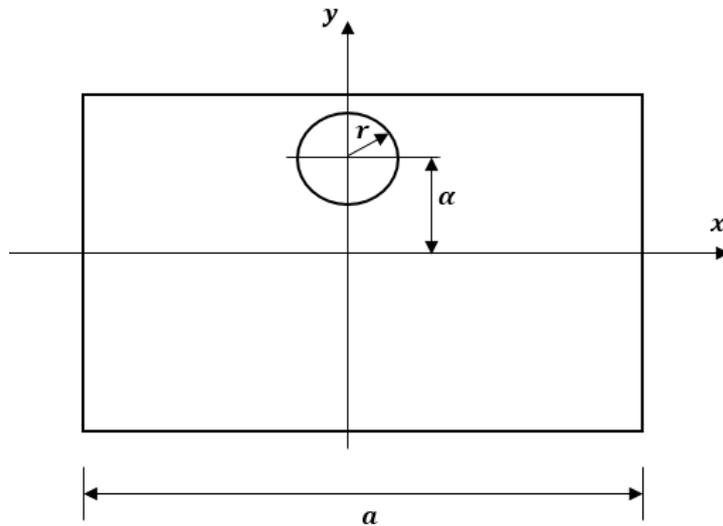


Figure 6.7 : Plaque rectangulaire avec une ouverture circulaire désaxée.

**Tableau 6.41 :** Premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée symétrique avec ouverture circulaire désaxée.

Orientation des fibres	Condition aux limites	$\alpha$					
		0	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29
[0°/90°/90°/0°]	EEEE	28.462	23.561	23.444	23.332	23.225	23.123
	AAAA	12.872	13.776	13.828	13.879	13.928	13.977

**Tableau 6.42 :** Premiers modes de paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque composite stratifiée antisymétrique avec une ouverture circulaire désaxée.

Orientation des fibres	Condition aux limites	$\alpha$					
		0	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29
[0°/90°/0°/90°]	EEEE	29.534	23.218	23.059	22.908	22.765	22.63
	AAAA	13.223	13.428	13.444	13.459	13.476	13.493

Les résultats des tableaux 6.41 et 6.42 montrent l'effet de décalage de l'ouverture circulaire  $\alpha$  sur la première fréquence adimensionnelle pour les deux cas de plaques composites

stratifiées symétrique  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  et antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ . On remarque que pour les conditions aux limites EEEE, la première fréquence diminue lorsque  $\alpha$  augmente et dans le cas AAAA c'est l'inverse que se produit. La variation est plus sensible dans le cas EEEE. On voit que la rigidité de la plaque est fortement influencée par les conditions aux limites imposées aux bords de la plaque.

### 6.3.2 Plaque CSRC avec l'ouverture N°5

L'exemple suivant concerne une plaque carrée avec une ouverture (N°5) dont la forme est donnée par la figure 6.5. Le paramètre de fréquence utilisé dans cet exemple est ;  $\Omega = (\rho h \omega^2 a^4 / D)^{1/2}$  ou  $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$  et le rapport  $h/a$  est pris égale à 0.1. Les conditions aux limites considérées sont simplement appuyée AAAA et encadrée EEEE, ou les propriétés mécaniques du matériau (7) utilisé dans cet exemple sont données par le tableau 6.43. Les cinq fréquences propres adimensionnelles sont déterminées en faisant varier l'angle d'orientation des fibres pour deux cas de plaques stratifiées : symétriques et antisymétriques. Le nombre de couche est pris égal à quatre. Les résultats calculés sont indiqués dans les tableaux 6.44-6.47.

**Tableau 6.43** : Propriétés mécaniques du matériau (7).

	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Matériaux (7)	40	1	0.6	0.6	0.25	8000

**Tableau 6.44** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée symétrique AAAA avec ouverture quelconque N°3.

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
$[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	7.943	10.331	14.301	18.183	27.318
$[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$	18.908	21.600	27.426	31.857	51.702
$[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$	21.347	24.242	30.700	35.723	57.366
$[60^\circ/-60^\circ/-60^\circ/60^\circ]$	18.908	21.600	27.426	31.857	51.702
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	8.167	13.220	17.527	22.229	46.832

**Tableau 6.45** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique AAAA avec ouverture quelconque N°3.

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
[0°/0°/0°/0°]	7.943	10.331	14.301	18.183	27.318
[30°/-30°/30°/-30°]	22.577	27.211	28.697	35.262	59.863
[45°/-45°/45°/-45°]	25.731	31.459	31.459	39.547	67.525
[60°/-60°/60°/-60°]	22.577	27.211	28.697	35.262	59.863
[0°/90°/0°/90°]	8.185	16.196	16.196	22.469	59.814

**Tableau 6.46** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée symétrique EEEE avec ouverture quelconque N°3.

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
[0°/0°/0°/0°]	39.951	40.018	45.697	45.851	65.732
[30°/-30°/-30°/30°]	45.930	45.947	52.637	52.665	91.585
[45°/-45°/-45°/45°]	48.093	48.103	56.778	56.780	102.141
[60°/-60°/-60°/60°]	45.930	45.947	52.637	52.665	91.585
[0°/90°/90°/0°]	51.471	51.724	52.635	52.898	104.581

**Tableau 6.47** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque carrée composite stratifiée antisymétrique EEEE avec ouverture quelconque N°3.

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
[0°/0°/0°/0°]	39.951	40.018	45.697	45.851	65.732
[30°/-30°/30°/-30°]	47.573	47.731	50.708	50.911	99.639
[45°/-45°/45°/-45°]	51.422	52.333	52.333	53.299	116.958
[60°/-60°/60°/-60°]	47.573	47.731	50.708	50.911	99.639
[0°/90°/0°/90°]	52.406	52.578	52.578	52.749	132.851

A partir des tableaux 6.44-47, on voit bien l'effet de l'angle d'orientations des fibres et les conditions aux limites sur le comportement fréquentiel de la plaque composite stratifiée. On constate que lorsqu'on fait varier l'angle d'orientation de  $0^\circ$  à  $45^\circ$ , les fréquences augmentent. Ce constat est vrai pour les deux conditions aux limites AAAA et EEEE, ainsi que pour les plaques symétrique et antisymétrique. Dans le cas de plaques antisymétrique  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$  et  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ , on constate que la deuxième fréquence est une fréquence double.

### 6.3.3 Plaque CSRV avec l'ouverture N°2

En raison du manque relatif d'études sur le comportement vibratoire de plaques CSRV avec une ouverture circulaire, il est intéressant d'étudier le phénomène en considérant l'effet de l'orientation des fibres [ $\langle T_0, T_1 \rangle$ ], la variation du rayon  $r$  de l'ouverture circulaire et les conditions aux limites. La plaque CSRV est discrétisée en quatre éléments- $p$  quadrilatéraux courbés où le degré des fonctions de forme polynomiales  $p$  est pris égal à 9. L'étude est basée sur la variation de [ $\langle T_0, T_1 \rangle$ ] dans laquelle l'angle d'orientation des fibres  $T_0$  est fixé ( $T_0 = 0^\circ$ ), alors que  $T_1$  est variable de  $0^\circ$  à  $50^\circ$  avec un incrément de 10. Quatre conditions aux limites sont imposées aux bords extérieurs de la plaque, comme : EEEE, AAAA, LELE et ELLL ; Cependant, l'ouverture circulaire est laissée libre.

Dans les exemples suivants, l'ouverture circulaire est considérée au centre de la plaque, deux valeurs du rapport  $r/b$  sont considérées 0.1 et 0.2. Le paramètre de fréquence non dimensionnel utilisé est ;  $\Omega = (\omega a^2) \sqrt{\rho h/D}$ , où  $D = E_1 h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ . On considère dans la suite de l'étude, une plaque carrée CSRV avec un rapport  $h/a$  égale à 0,1. Les propriétés mécaniques sélectionnées dans ce cas sont celle du matériau (4) (Tableau 6.22).

Les paramètres de fréquence sont déterminés en deux cas, le premier concerne une plaque CSRV à une seule couche et le deuxième cas fait avec une plaque CSRV à deux couches antisymétriques.

#### 6.3.3.1 Cas N°1 : Une seule couche

Dans le premier cas, la plaque CSRV est constituée d'une seule couche avec des fibres paraboliques (voir Figure 6.8). Les cinq premiers paramètres de fréquence avec différentes conditions aux limites sont présentés dans les tableaux 6.48-51. Deux types de plaques sont considérés ici : plaque sans ouverture et plaque avec ouverture, deux rapports  $r/b$  0.1 et 0.2 sont considérés.

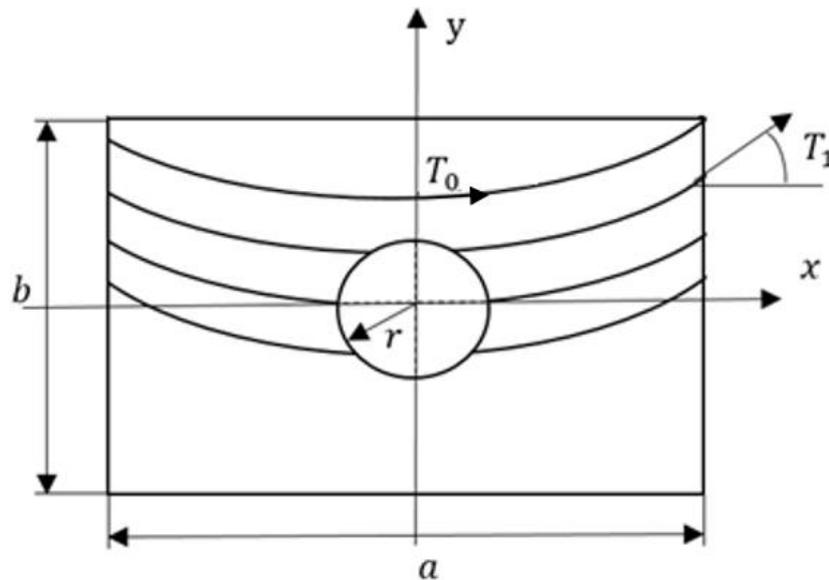


Figure 6.8 : Plaque CSRV à une seule couche avec l'ouverture N° 2.

Les résultats des tableaux 6.48-51 montrent que l'angle d'orientation  $T_1$  augmente, alors que les fréquences fondamentales adimensionnelles diminuent dans les cas des conditions aux limites EEEE, LELE et accroissent dans les cas suivants : AAAA et ELLL.

Plus précisément, quand  $T_1$  est varié de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ , les fréquences fondamentales d'une plaque simplement appuyée augmentent de 6,5%, 10% et 14% pour  $r/b = 0, 0,1$  et  $0,2$  respectivement. La même remarque est faite pour la plaque ELLL mais avec un taux de 28%, 28,67% et 32%. Alors que, dans le cas de la plaque EEEE, les fréquences fondamentales diminuent de 10,83%, 11% et 14% respectivement. Un taux d'environ 26%, 28% et 32% est observé pour la plaque LELE pour  $r/b = 0, 0,1$  et  $0,2$ , successivement. L'effet de l'ouverture circulaire sur les fréquences fondamentales est également montré dans les tableaux 6.48-51.

Pour la plaque EEEE, la différence de pourcentage relatif des fréquences fondamentales est 20% pour  $T_1 = 0^\circ$  et 18% pour  $T_1 = 50^\circ$  où  $r/b$  est varié de 0 à 0.2. Une analyse bien détaillée a été faite pour chaque cas de la plaque CSRV à une seule couche :

❖ Dans le cas de la plaque AAAA à une seule couche :

- 1) Lorsque  $r/b$  varie de 0 à 0.2, la fréquence  $\Omega_1$  diminue pour  $T_1 = 0^\circ$ , mais quand  $T_1$  augmente, la première fréquence  $\Omega_1$  accroît pour  $r/b = 0, 0,1$  et  $0,2$ , cela montre que la plaque peut être renforcée sa rigidité par l'orientation des fibres quand elle perd sa masse avec l'ouverture.
- 2) Lorsque  $T_1$  varie de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ , les premières fréquences  $\Omega_1$  de la plaque avec une ouverture  $r/b = 0$  sont supérieures que les premières fréquences de la plaque avec une

ouverture  $r/b = 0.1$  et  $0.2$ , ça signifie que la plaque sans ouverture est plus rigide que la plaque avec ouverture.

- 3) La première fréquence maximale  $\Omega_1$  est obtenue pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 43$ ).
- 4) La première fréquence pour  $T_1 = 50^\circ$  et  $r/b = 0.2$  ( $\Omega_1 = 42.412$ ) est supérieure que la première fréquence pour  $T_1 = 50^\circ$  et  $r/b = 0.1$  ( $\Omega_1 = 41.866$ ), on voit clairement l'avantage de CSRV, avec une ouverture maximale  $r/b = 0.2$ , on obtient une plaque avec une rigidité plus élevée.

❖ Dans le cas de la plaque EEEE à une seule couche :

- 1) Quand  $T_1$  augmente, la première fréquence  $\Omega_1$  diminue pour  $r/b = 0, 0.1$  et  $0.2$ .
- 2) Lorsque  $T_1$  varie de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ , les premières fréquences  $\Omega_1$  de la plaque avec ouverture ( $r/b = 0.1$  et  $0.2$ ) donnent des valeurs supérieures que les premières fréquences de la plaque sans ouverture ( $r/b = 0$ ), on voit clairement que la plaque avec ouverture perd de sa masse mais elle est plus rigide que la plaque sans ouverture.
- 3) La fréquence  $\Omega_1$  maximale est obtenue pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 83.944$ ).
- 4) La première fréquence pour  $T_1 = 50^\circ$  et  $r/b = 0.2$  ( $\Omega_1 = 72.518$ ) est supérieure que la première fréquence pour  $T_1 = 0^\circ$  et  $r/b = 0.1$  ( $\Omega_1 = 69.537$ ) et pour  $T_1 = 0^\circ$  et  $r/b = 0$  ( $\Omega_1 = 67.512$ ), on peut remarquer que la plaque avec une ouverture  $r/b = 0.2$  perd sa masse mais elle garde sa rigidité par l'orientation des fibres.

❖ Dans le cas de la plaque LELE à une seule couche :

- 1) Le comportement de la fréquence  $\Omega_1$ , est la même observée avec la plaque EEEE à une seule couche ( $T_1$  augmente  $\Rightarrow \Omega_1$  diminue).
- 2) La fréquence  $\Omega_1$  maximale est obtenue pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 64.088$ ).
- 3) Lorsque  $r/b$  varie de  $0$  à  $0.2$ , la fréquence  $\Omega_1$  augmente pour  $T_1 = 0^\circ$  jusqu'à atteindre sa fréquence maximale ( $\Omega_1 = 64.088$ ) et diminue pour  $T_1 = 50^\circ$  jusqu'à atteindre sa fréquence minimale ( $\Omega_1 = 43.658$ ), cela signifie que la plaque CSRV avec ouverture est devenue moins rigide par l'orientation des fibres.

❖ Dans le cas de la plaque ELLL à une seule couche :

- 1) La même constatation a été remarquée en comparant le comportement de la fréquence  $\Omega_1$  avec la plaque AAAA à une seule couche ( $T_1$  augmente  $\Rightarrow \Omega_1$  augmente)
- 2) La première fréquence maximale est donnée pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 4.468$ ).

3) La fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 4.449$ ) est supérieure à celle de la fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 3.493$ ), cela justifie encore une fois que l'orientation des fibres peut être gardée la rigidité de la plaque lorsqu'elle perd sa masse avec ouverture.

**Tableau 6.48** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à une seule couche AAAA.

r/b	[< $T_0, T_1$ >]	Mode				
		1	2	3	4	5
0	[< 0,0 >]	40.374	61.071	99.898	119.273	132.337
	[< 0,10 >]	40.539	61.716	100.782	118.793	132.351
	[< 0,20 >]	41.028	63.618	103.375	117.278	132.364
	[< 0,30 >]	41.774	66.606	107.469	114.480	132.269
	[< 0,40 >]	42.576	70.331	109.947	112.794	131.842
	[< 0,50 >]	43.000	74.423	102.975	119.382	130.678
0.1	[< 0,0 >]	37.902	60.356	100.079	104.682	130.523
	[< 0,10 >]	38.110	60.914	101.066	104.448	130.476
	[< 0,20 >]	38.739	62.529	103.697	103.928	130.262
	[< 0,30 >]	39.762	65.036	102.288	108.437	129.733
	[< 0,40 >]	40.976	68.127	99.91	114.332	128.669
	[< 0,50 >]	41.886	71.475	95.786	121.621	126.823
0.2	[< 0,0 >]	37.171	57.575	77.604	104.699	119.328
	[< 0,10 >]	37.386	58.259	77.626	105.582	119.484
	[< 0,20 >]	38.117	60.215	77.689	108.115	119.973
	[< 0,30 >]	39.451	63.174	77.837	112.028	120.697
	[< 0,40 >]	41.128	66.678	78.139	116.977	121.12
	[< 0,50 >]	42.412	70.184	78.238	120.366	122.558

**Tableau 6.49** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à une seule couche EEEE.

r/b	[< $T_0, T_1$ >]	Mode				
		1	2	3	4	5
0	[< 0,0 >]	67.512	88.385	127.718	140.113	144.989
	[< 0,10 >]	67.088	88.399	128.061	139.381	150.186
	[< 0,20 >]	65.881	88.532	129.175	137.183	152.956
	[< 0,30 >]	64.091	89.056	131.307	133.482	151.230
	[< 0,40 >]	62.055	90.393	128.175	134.835	148.996
	[< 0,50 >]	60.199	93.031	121.030	140.233	146.451
0.1	[< 0,0 >]	69.537	87.625	125.506	129.153	151.990
	[< 0,10 >]	69.027	87.529	124.947	129.526	151.558
	[< 0,20 >]	67.584	87.322	123.295	130.736	150.277
	[< 0,30 >]	65.483	87.244	120.607	133.042	148.181
	[< 0,40 >]	63.205	87.684	116.929	136.810	145.35
	[< 0,50 >]	61.389	89.134	112.131	142.029	142.381
0.2	[< 0,0 >]	83.944	89.845	117.378	140.063	141.818
	[< 0,10 >]	83.232	89.72	116.412	139.97	141.552
	[< 0,20 >]	81.227	89.392	113.65	139.824	140.781
	[< 0,30 >]	78.286	89.063	109.487	139.551	139.978
	[< 0,40 >]	75.054	89.139	104.563	137.857	140.874
	[< 0,50 >]	72.518	90.168	99.653	135.628	142.834

**Tableau 6.50** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à une seule couche LELE.

r/b	[< $T_0, T_1$ >]	Mode				
		1	2	3	4	5
0	[< 0,0 >]	62.318	63.714	71.017	92.508	93.556
	[< 0,10 >]	60.956	63.137	71.031	93.098	100.308
	[< 0,20 >]	57.896	61.414	70.912	94.689	116.64
	[< 0,30 >]	54.369	58.603	70.631	96.934	122.704
	[< 0,40 >]	50.578	54.926	70.281	99.539	113.428
	[< 0,50 >]	45.914	50.881	69.628	102.133	102.588
0.1	[< 0,0 >]	62.782	63.721	72.174	91.393	96.180
	[< 0,10 >]	61.01	63.585	72.015	91.951	102.046
	[< 0,20 >]	57.651	62.082	71.595	93.396	116.125
	[< 0,30 >]	53.812	59.253	71.109	95.336	118.539
	[< 0,40 >]	49.659	55.332	70.682	97.506	111.127
	[< 0,50 >]	44.972	50.664	69.910	99.985	100.511
0.2	[< 0,0 >]	64.088	64.250	84.373	91.453	102.399
	[< 0,10 >]	61.426	65.041	83.762	92.335	106.656
	[< 0,20 >]	57.711	63.966	82.511	94.283	113.006
	[< 0,30 >]	53.519	61.157	81.082	96.635	108.150
	[< 0,40 >]	48.859	56.856	79.354	99.275	101.337
	[< 0,50 >]	43.658	51.369	76.78	92.409	102.286

**Tableau 6.51** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à une seule couche ELLL.

r/b	[< $T_0, T_1$ >]	Mode				
		1	2	3	4	5
0	[< 0,0 >]	3.493	11.130	21.281	25.765	36.602
	[< 0,10 >]	3.512	11.200	21.398	25.453	36.959
	[< 0,20 >]	3.581	11.402	21.970	25.498	37.741
	[< 0,30 >]	3.723	11.772	22.577	25.918	39.064
	[< 0,40 >]	3.985	12.376	24.001	26.821	41.147
	[< 0,50 >]	4.468	13.331	26.483	28.438	44.358
0.1	[< 0,0 >]	3.470	10.788	20.975	25.267	36.162
	[< 0,10 >]	3.491	10.866	21.100	24.987	36.476
	[< 0,20 >]	3.563	11.070	21.523	25.049	37.208
	[< 0,30 >]	3.708	11.455	22.370	25.476	38.477
	[< 0,40 >]	3.976	12.069	23.896	26.378	40.508
	[< 0,50 >]	4.465	13.033	26.538	27.976	43.678
0.2	[< 0,0 >]	3.369	9.967	20.920	22.723	34.039
	[< 0,10 >]	3.399	10.053	21.076	22.585	34.325
	[< 0,20 >]	3.484	10.274	21.567	22.741	35.016
	[< 0,30 >]	3.647	10.664	22.532	23.227	36.246
	[< 0,40 >]	3.937	11.287	24.158	24.245	38.270
	[< 0,50 >]	4.449	12.251	25.741	27.148	41.514

Finalement, les fréquences fondamentales obtenues pour les deux cas de plaques LELE et ELLL à une seule couche sont inférieures par rapport aux plaques EEEE et AAAA, pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 0^\circ$ , la fréquence  $\Omega_1$  atteint son maximum dans le cas de la plaque EEEE ( $\Omega_1 = 83.944$ ) et son minimum dans le cas de la plaque ELLL ( $\Omega_1 = 3.369$ ).

### 6.3.2.2 Cas N°2 : Deux couches

Dans l'exemple suivant, on a réalisé une expérimentation numérique pour examiner les paramètres de fréquence d'une plaque CSRV antisymétrique à deux couches  $[\pm \langle T_0, T_1 \rangle]$ , ayant une ouverture circulaire (figure 6.9) ; dont l'angle d'orientation des fibres  $T_1$  est varié de  $0^\circ$  à  $50^\circ$  (tableaux 6.52-55).

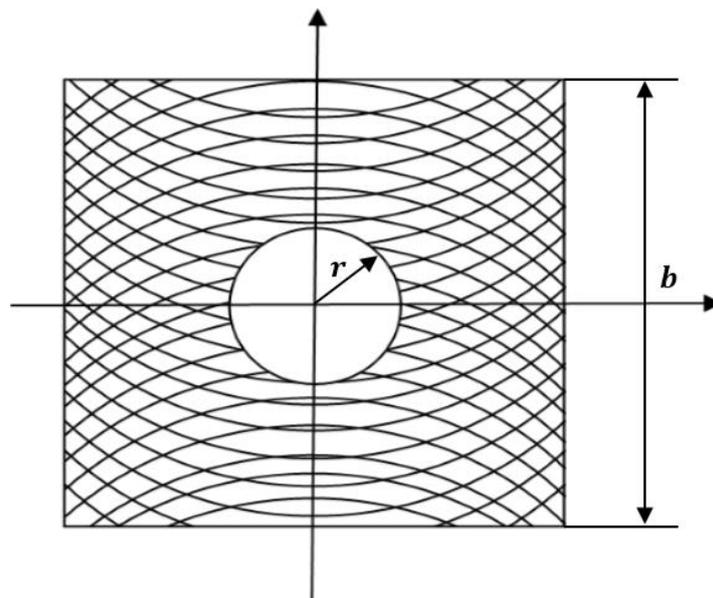


Figure 6.9 : Plaque CSRV antisymétrique à deux couches avec l'ouverture N° 2.

A partir des tableaux 6.52-55, on constate que lorsqu'il y a un accroissement de l'angle d'orientation des fibres  $T_1$ , les fréquences fondamentales sont augmentées pour les plaques AAAA et ELLL et diminuées dans les cas de plaques EEEE et LELE. Les résultats obtenus pour chaque cas de la plaque CSRV à deux couches sont analysés comme suites :

❖ Dans le cas de la plaque AAAA à deux couches :

- 1) Lorsque on augmente  $T_1$ , la fréquence  $\Omega_1$  augmente pour  $r/b = 0, 0.1$  et  $0.2$ .
- 2) Les fréquences  $\Omega_1$  de la plaque sans ouverture ( $r/b = 0$ ) sont supérieures à celles des fréquences  $\Omega_1$  de la plaque avec ouverture ( $r/b = 0.1$  et  $0.2$ ) pour  $T_1$  varie de  $0^\circ$  à  $30^\circ$ . Par contre pour  $T_1$  varie de  $40^\circ$  à  $50^\circ$ , les fréquences  $\Omega_1$  de la plaque avec

ouverture sont plus importants que les fréquences la plaque sans ouverture, on voit bien que l'orientation des fibres à modifier le comportement vibratoire en donnant plus de rigidité à la plaque.

- 3) La première fréquence maximale est obtenue pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 51.086$ ),
- 4) On constate que l'intérêt d'utiliser CSRV, lorsque la plaque perd sa rigidité avec l'ouverture, on peut remédier par l'orientation des fibres.

❖ Dans le cas de la plaque EEEE à deux couches :

- 1) Quand  $T_1$  augmente, la première fréquence  $\Omega_1$  démunie pour  $r/b = 0, 0,1$  et  $0,2$ .
- 2) La fréquence  $\Omega_1$  maximale est obtenue pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 83.944$ ).
- 3) Lorsque  $T_1$  varie de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ , les fréquences  $\Omega_1$  de la plaque avec ouverture ( $r/b = 0.1$  et  $0.2$ ) sont plus élevées que les fréquences  $\Omega_1$  de la plaque sans ouverture ( $r/b = 0$ ), on voit bien que le comportement de la fréquence  $\Omega_1$  n'influence pas avec l'orientation des fibres quand on donne plus de rigidité à la plaque.

❖ Dans le cas de la plaque LELE à deux couches :

- 1) Le comportement de la fréquence  $\Omega_1$ , est la même observée avec la plaque EEEE à deux couches ( $T_1$  augmente  $\Rightarrow \Omega_1$  démunie).
- 2) La fréquence  $\Omega_1$  maximale est donnée pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 64.090$ ).
- 3) Pour  $T_1 = 50^\circ$ , la fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0.2$  ( $\Omega_1 = 43.093$ ) est supérieure que la fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0.1$  ( $\Omega_1 = 41.638$ ) et pour  $r/b = 0$  ( $\Omega_1 = 41.695$ ), cela signifie que la plaque avec ouverture est influencée par l'orientation des fibres en augmentant le nombre de couche.

❖ Dans le cas de la plaque ELLL à deux couches :

- 1) La même constatation a été remarquée en comparant le comportement de la fréquence  $\Omega_1$  avec la plaque ELLL à une seule couche ( $T_1$  augmente  $\Rightarrow \Omega_1$  augmente).
- 2) La fréquence  $\Omega_1$  maximale est obtenue pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 4.681$ ).
- 3) Les fréquences  $\Omega_1$  de la plaque sans ouverture sont supérieures à celles de la plaque avec ouverture pour  $T_1$  varie de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ .
- 4) La fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 4.580$ ) est supérieure que la fréquence  $\Omega_1$  pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 0^\circ$  ( $\Omega_1 = 3.493$ ), on voit bien que la plaque avec ouverture peut être remédié sa rigidité avec le nombre de couche.

Dans le cas de la plaque CSRV à deux couches, la fréquence  $\Omega_1$  donne sa valeur maximale dans la plaque EEEE ( $\Omega_1 = 83.958$ ) et sa valeur minimale dans la plaque ELLL ( $\Omega_1 = 3.369$ ), pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 0^\circ$ .

**Tableau 6.52 :** Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à deux couches AAAA.

r/b	$[\pm < T_0, T_1 >]$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	$[\pm < 0,0 >]$	40.374	61.071	99.898	119.273	132.337
	$[\pm < 0,10 >]$	40.637	62.391	101.562	118.011	131.773
	$[\pm < 0,30 >]$	42.829	70.477	109.838	111.331	129.329
	$[\pm < 0,40 >]$	44.245	74.836	104.084	116.963	128.499
	$[\pm < 0,50 >]$	44.865	78.333	97.414	123.258	127.335
0.1	$[\pm < 0,0 >]$	37.937	60.361	100.115	104.785	130.526
	$[\pm < 0,10 >]$	38.470	61.426	101.988	104.100	129.961
	$[\pm < 0,30 >]$	42.183	68.508	99.491	112.978	127.537
	$[\pm < 0,40 >]$	44.371	72.574	96.282	119.282	126.730
	$[\pm < 0,50 >]$	45.614	75.947	91.89	125.586	126.218
0.2	$[\pm < 0,0 >]$	37.185	57.581	77.736	104.832	119.344
	$[\pm < 0,10 >]$	38.270	58.762	78.232	106.703	119.322
	$[\pm < 0,30 >]$	45.037	66.136	80.644	117.661	120.095
	$[\pm < 0,40 >]$	48.738	70.156	81.496	121.095	123.362
	$[\pm < 0,50 >]$	51.086	73.156	81.303	121.438	128.122

**Tableau 6.53 :** Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à deux couches EEEE.

r/b	$[\pm < T_0, T_1 >]$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	$[\pm < 0,0 >]$	67.512	88.385	127.718	140.113	144.989
	$[\pm < 0,10 >]$	65.765	87.848	127.888	137.723	151.880
	$[\pm < 0,30 >]$	59.368	87.513	127.215	131.340	146.418
	$[\pm < 0,40 >]$	57.896	89.173	120.735	135.521	143.480
	$[\pm < 0,50 >]$	56.336	92.139	113.134	141.021	141.612
0.1	$[\pm < 0,0 >]$	69.556	87.63	125.579	129.182	151.993
	$[\pm < 0,10 >]$	67.509	86.986	123.59	129.39	150.477
	$[\pm < 0,30 >]$	61.084	85.873	115.752	133.295	144.100
	$[\pm < 0,40 >]$	59.111	86.992	111.276	137.972	141.202
	$[\pm < 0,50 >]$	57.879	89.463	105.933	138.77	144.646
0.2	$[\pm < 0,0 >]$	83.958	89.849	117.393	140.108	141.833
	$[\pm < 0,10 >]$	81.194	88.923	114.106	139.288	140.516
	$[\pm < 0,30 >]$	72.432	86.626	103.91	135.828	139.747
	$[\pm < 0,40 >]$	69.861	87.141	100.002	134.256	142.413
	$[\pm < 0,50 >]$	68.497	88.968	96.305	133.265	146.208

**Tableau 6.54** : Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à deux couches LELE.

r/b	$[\pm < T_0, T_1 >]$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	$[\pm < 0,0 >]$	62.318	63.714	71.017	92.508	93.556
	$[\pm < 0,10 >]$	59.424	61.840	70.389	92.864	103.050
	$[\pm < 0,30 >]$	50.916	55.341	69.647	97.177	120.676
	$[\pm < 0,40 >]$	46.506	52.555	70.214	100.570	112.053
	$[\pm < 0,50 >]$	41.695	49.594	70.130	101.217	103.718
0.1	$[\pm < 0,0 >]$	62.791	63.722	72.193	91.405	96.190
	$[\pm < 0,10 >]$	59.691	61.805	71.418	91.66	105.875
	$[\pm < 0,30 >]$	50.829	55.141	70.73	95.301	113.912
	$[\pm < 0,40 >]$	46.423	52.238	71.586	98.283	107.381
	$[\pm < 0,50 >]$	41.638	49.217	71.817	98.314	101.044
0.2	$[\pm < 0,0 >]$	64.090	64.254	84.384	91.458	102.41
	$[\pm < 0,10 >]$	61.535	62.003	82.437	91.567	112.013
	$[\pm < 0,30 >]$	52.714	54.798	80.366	95.205	102.792
	$[\pm < 0,40 >]$	48.102	51.445	80.903	97.667	98.245
	$[\pm < 0,50 >]$	43.093	47.947	80.673	91.075	100.521

**Tableau 6.55 :** Cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  d'une plaque CSRV à deux couches ELLL.

r/b	$[\pm < T_0, T_1 >]$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	$[\pm < 0,0 >]$	3.493	11.130	21.281	25.765	36.602
	$[\pm < 0,10 >]$	3.514	11.298	21.400	26.121	37.058
	$[\pm < 0,30 >]$	3.755	12.487	22.754	29.520	40.458
	$[\pm < 0,40 >]$	4.084	13.360	24.547	33.338	43.320
	$[\pm < 0,50 >]$	4.681	14.367	27.713	39.255	47.155
0.1	$[\pm < 0,0 >]$	3.47	10.789	20.976	25.271	36.165
	$[\pm < 0,10 >]$	3.491	10.962	21.105	25.614	36.604
	$[\pm < 0,30 >]$	3.735	12.158	22.555	28.844	39.885
	$[\pm < 0,40 >]$	4.065	13.04	24.467	32.406	42.669
	$[\pm < 0,50 >]$	4.663	14.032	27.829	37.807	46.409
0.2	$[\pm < 0,0 >]$	3.369	9.968	20.921	22.734	34.047
	$[\pm < 0,10 >]$	3.392	10.145	21.071	23.055	34.406
	$[\pm < 0,30 >]$	3.646	11.341	22.737	25.895	37.190
	$[\pm < 0,40 >]$	3.980	12.187	24.892	28.848	39.736
	$[\pm < 0,50 >]$	4.580	13.104	28.591	33.121	43.394

En comparant les fréquences  $\Omega_1$  obtenues pour les deux cas de la plaque : à une seule couche et à deux couches, on peut constater les points suivants :

- 1- Dans le cas de la plaque CSRV à deux couches, les fréquences  $\Omega_1$  sont supérieures à celle observées dans la plaque CSRV à une seule couche, seulement pour les conditions aux limites suivantes : AAAA et ELLL, donc la plaque avec ouverture peut être compensée sa rigidité par le nombre de couche pour certain condition aux limites.
- 2- Dans le cas de la plaque AAAA, la fréquence  $\Omega_1$  maximale de la plaque à une seule couche est obtenue pour  $r/b = 0$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 43$ ) et à deux couches est donnée pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 50^\circ$  ( $\Omega_1 = 51.086$ ).
- 3- Dans le cas de la plaque LELE, lorsque on varie  $r/b$  de 0.1 à 0.2 et pour  $T_1 = 50^\circ$ , la fréquence  $\Omega_1$  augmente dans le cas de la plaque à deux couches et diminue dans le cas de la plaque à une seule couche.
- 4- On constate que le nombre de couche peut être influencé sur le comportement vibratoire de la plaque CSRV avec ouverture.
- 5- Lorsque  $T_1$  varie de  $10^\circ$  à  $50^\circ$  et pour  $r/b = 0, 0.1$  et  $0.2$ , les fréquences  $\Omega_1$  obtenues dans le cas de plaques EEEE et LELE à une seule couche sont supérieures que les fréquences  $\Omega_1$  obtenues dans le cas de plaques EEEE et LELE à deux couches, ça se voit bien l'importance d'utiliser CSRV ; qu'avec une seule couche, on peut obtenir une plaque plus rigide et légère.
- 6- Concernant la fréquence  $\Omega_1$  maximale et minimale de la plaque, la même remarque a été constatée entre la plaque à une seule couche et la plaque à deux couches.

Finalement, on a tracé les cinq premiers modes propres dans les cas de plaques CSRV  $[\pm < 0,0 >]$  et  $[\pm < 0,40 >]$  à deux couches et pour les conditions aux limite complètement encadrées EEEE (voir figures 6.10 et 6.11). On a constaté que les formes des trois premiers modes propres sont identiques pour les deux cas traités.

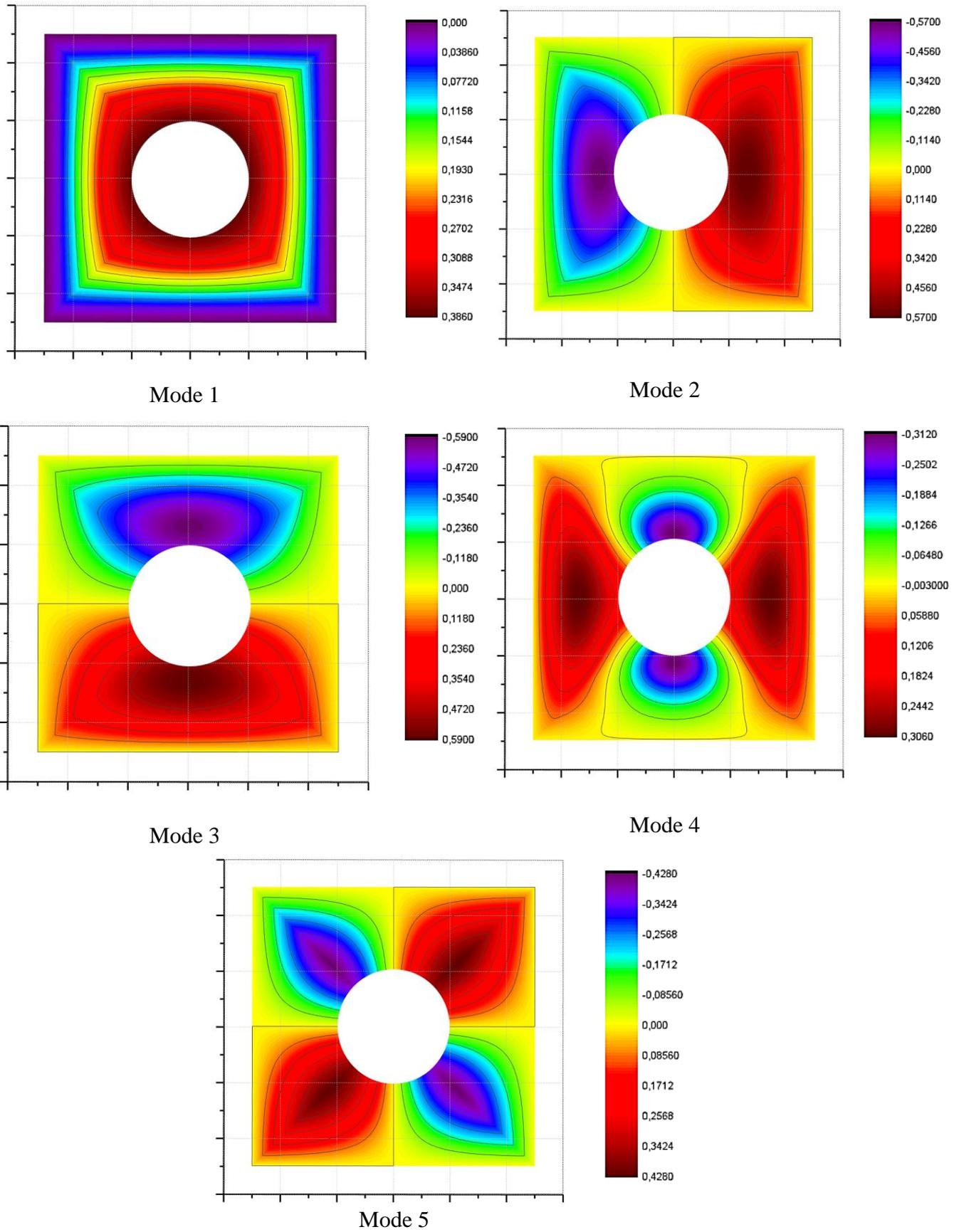


Figure 6.10 : Cinq premiers modes d'une plaque CSRV à deux couches  $[\pm < 0,0 >]$  EEEE et de  $r/b = 0.2$ .

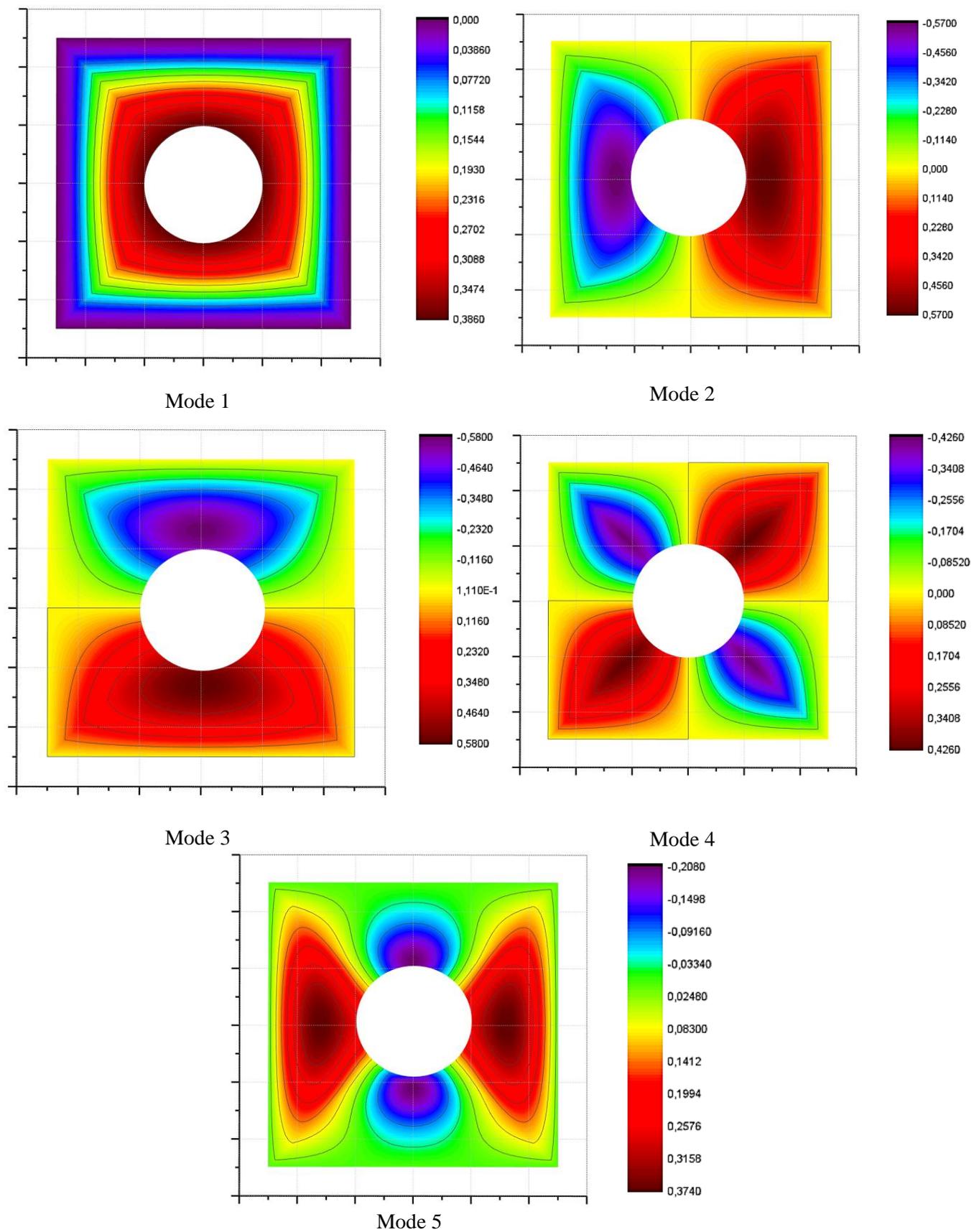


Figure 6.11 : Cinq premiers modes d'une plaque CSRV à deux couches  $[\pm < 0,40 >]$  EEEE et de  $r/b = 0.2$ .

### 6.3.4 Comparaison entre une plaque CSRV et une plaque CSRC

Les figures 6.12-15 montrent des comparaisons des cinq premières paramètres de fréquence  $\Omega$ , où  $\Omega = (\omega a^2) \sqrt{\rho h/D}$  entre la plaque CSRV (fibres paraboliques), ayant une ouverture circulaire et la plaque CSRC (fibres droites) ; possédant la même ouverture, pour une plaque simplement appuyée (AAAA), plaque encastree (CCCC) et les conditions aux limites non uniformes (LELE et ELLL). Les plaques CSRV et CSRC sont constituées dans cette comparaison d'une seule couche. Le rapport  $r/b$  est pris égal à 0.1 et 0.2. Les paramètres de fréquence sont examinés en variant l'angle d'orientation des fibres  $T_1$  de  $0^\circ$  à  $50^\circ$ . Selon les figures 6.12-15, on observe que, les paramètres de fréquence supérieures ( $\Omega_3$  et  $\Omega_4$ ) sont les plus influencées par les variations des angles d'orientation des fibres  $T_1$ , bien que les premières paramètres de fréquence ( $\Omega_1$ ) ne sont pas influencées par ces variations, sauf que dans le cas de la plaque LELE des figures 6.14 (a-b).

Les variations des paramètres de fréquence de la plaque CSRV sont rapprochées et éloignées, où les paramètres de fréquence de croisement sont obtenus dans les cas suivants :

- AAAA : les paramètres de fréquence  $\Omega_3 = 103.697$  et  $\Omega_4 = 103.928$  pour  $r/b = 0.1$  et  $T_1 = 20^\circ$ .
- EEEE : les paramètres de fréquence  $\Omega_4 = 142.029$  et  $\Omega_5 = 142.381$  pour  $r/b = 0.1$  et  $T_1 = 50^\circ$ .
- EEEE : les paramètres de fréquence  $\Omega_4 = 139.551$  et  $\Omega_5 = 139.978$  pour  $r/b = 0.2$  et  $T_1 = 30^\circ$ .
- LELE : les paramètres de fréquence  $\Omega_4 = 99.985$  et  $\Omega_5 = 100.511$  pour  $r/b = 0.1$  et  $T_1 = 50^\circ$ .
- ELLL : les paramètres de fréquence  $\Omega_3 = 24.158$  et  $\Omega_4 = 24.245$  pour  $r/b = 0.1$  et  $T_1 = 40^\circ$ .

Cela montre que les paramètres de fréquence de la plaque CSRV est plus sensible au changement de la variation de l'angle d'orientation des fibres que celles de la plaque CSRC. Ce phénomène est appelé « courbe virant » (curve veering) (Honda et al 2008).

Une observation plus détaillée est effectuée pour chaque figure. Dans le cas de la plaque AAAA, la variation de la fréquence  $\Omega_1$  de la plaque CSRV est supérieure que la variation de la fréquence  $\Omega_1$  de la plaque CSRC, pour  $T_1 = 50^\circ$  et  $r/b = 0.1$ , la fréquence  $\Omega_1$  de la plaque CSRC est égale à 39.915, alors que la fréquence  $\Omega_1$  de la plaque CSRV est égale à 41.886.

Dans le cas de la plaque EEEE, on remarque que la majorité des fréquences de la plaque CSRC sont plus élevées que les fréquences de la plaque CSRV, seulement pour  $T_1 = 50^\circ$  et  $r/b = 0.1$ , la fréquence de la plaque CSRV ( $\Omega_4 = 142.029$ ) est supérieure que la fréquence de la plaque CSRC ( $\Omega_4 = 132.332$ ).

La même constatation pour la plaque ELLL en comparant sa réponse fréquentielle avec le cas de la plaque EEEE. Sauf qu'avec  $T_1 = 30^\circ$ , on a observé que les fréquences  $\Omega_5$  pour  $r/b = 0.1$  et  $0.2$  de la plaque CSRV sont successivement  $\Omega_5 = 38.477$  et  $36.246$ , alors que la plaque CSRC donne ses fréquences maximales à  $\Omega_5 = 37.220$  et  $35.135$ , respectivement pour  $r/b$ .

Par contre, dans le cas de la plaque LELE, on voit que tous les fréquences de la plaque CSRV sont supérieures que les fréquences de la plaque CSRC pour  $r/b = 0.1$  et  $0.2$ . On observe aussi que la fréquence maximale de la plaque CSRV est obtenue pour  $T_1 = 30^\circ$  et  $r/b = 0.1$  ( $\Omega_5 = 118.539$ ), elle est supérieure à celle de la fréquence maximale de la plaque CSRC pour  $T_1 = 40^\circ$  et  $r/b = 0.1$  ( $\Omega_5 = 99.828$ ).

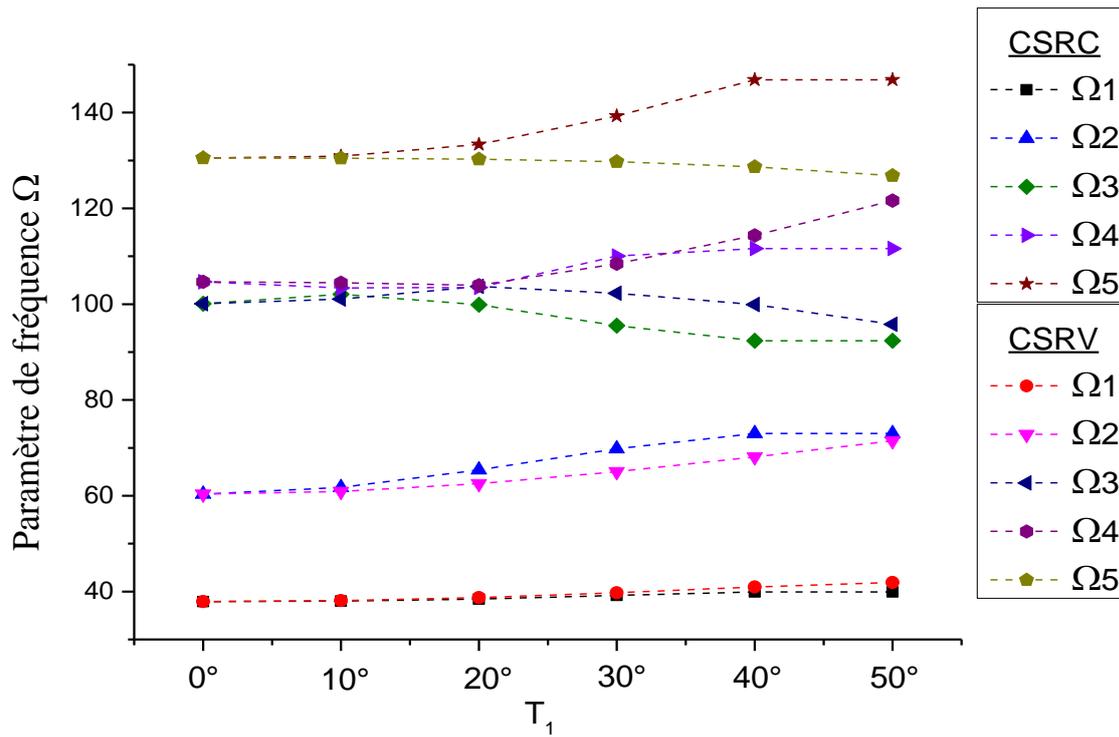
On voit bien que la plaque CSRV donne des fréquences plus élevées que la plaque CSRC, pour certain valeur de l'angle d'orientation des fibres  $T_1$ .

L'effet de l'ouverture de la plaque sur les paramètres de fréquences, en comparant la plaque CSRV avec la plaque CSRC est clairement observé, où dans les cas de plaques AAAA, EEEE et ELLL, nous avons observé ce qui suit :

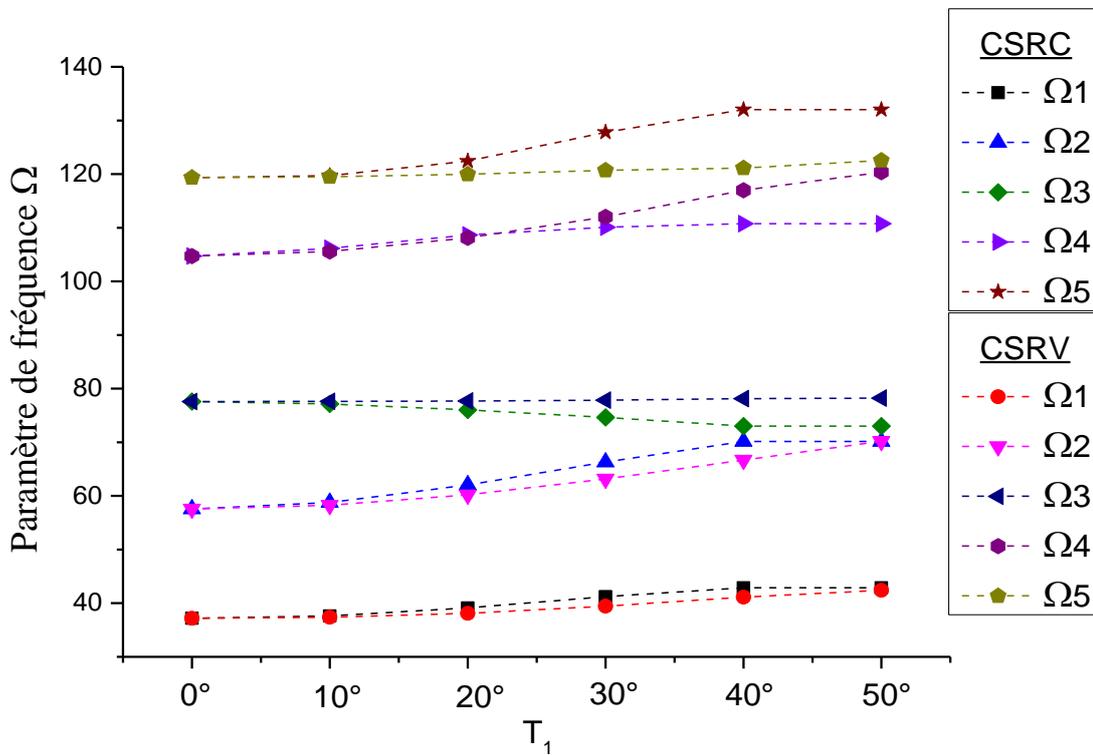
- Pour  $r/b = 0.1$  : les fréquences de la plaque CSRV sont supérieures que les fréquences de la plaque CSRC.
- Pour  $r/b = 0.2$  : les fréquences de la plaque CSRV sont inférieures que les fréquences de la plaque CSRC.

En revanche, dans le cas de la plaque LELE, les fréquences de la plaque CSRV sont supérieures que les fréquences de la plaque CSRC pour  $r/b = 0.1$  et  $0.2$ .

Cela signifie que la plaque CSRV est plus rigide que la plaque CSRC pour certain condition aux limites, lorsque la plaque perd de sa masse avec l'ouverture.

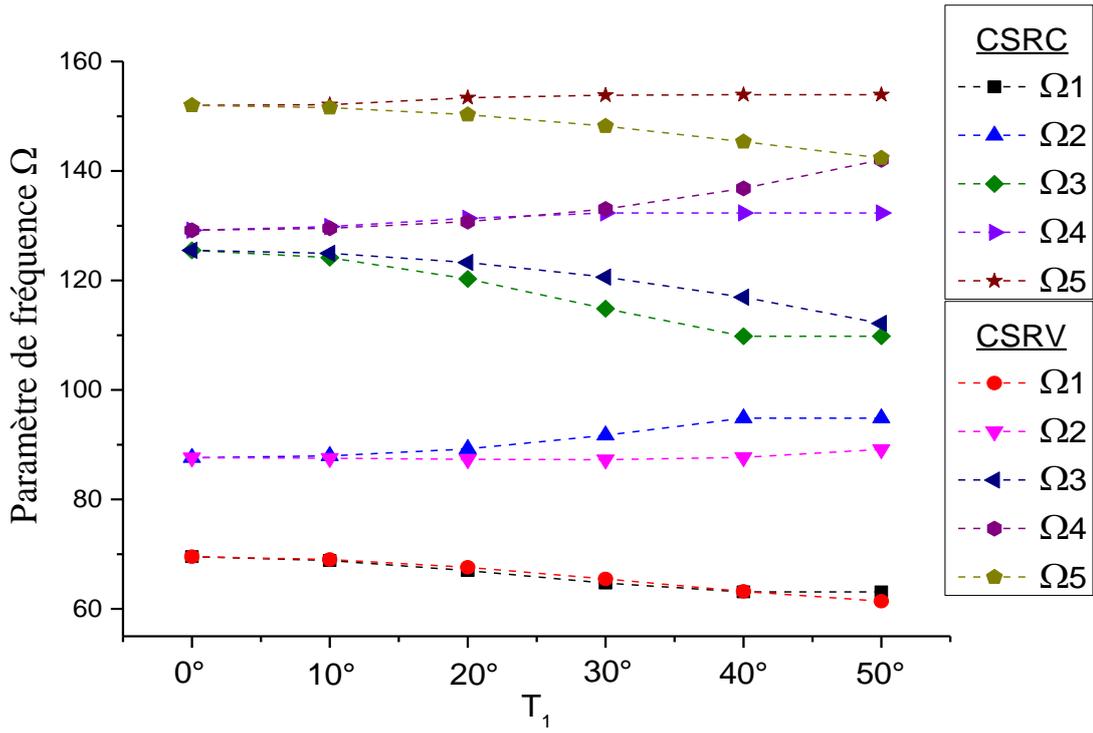


(a) :  $r/b = 0.1$

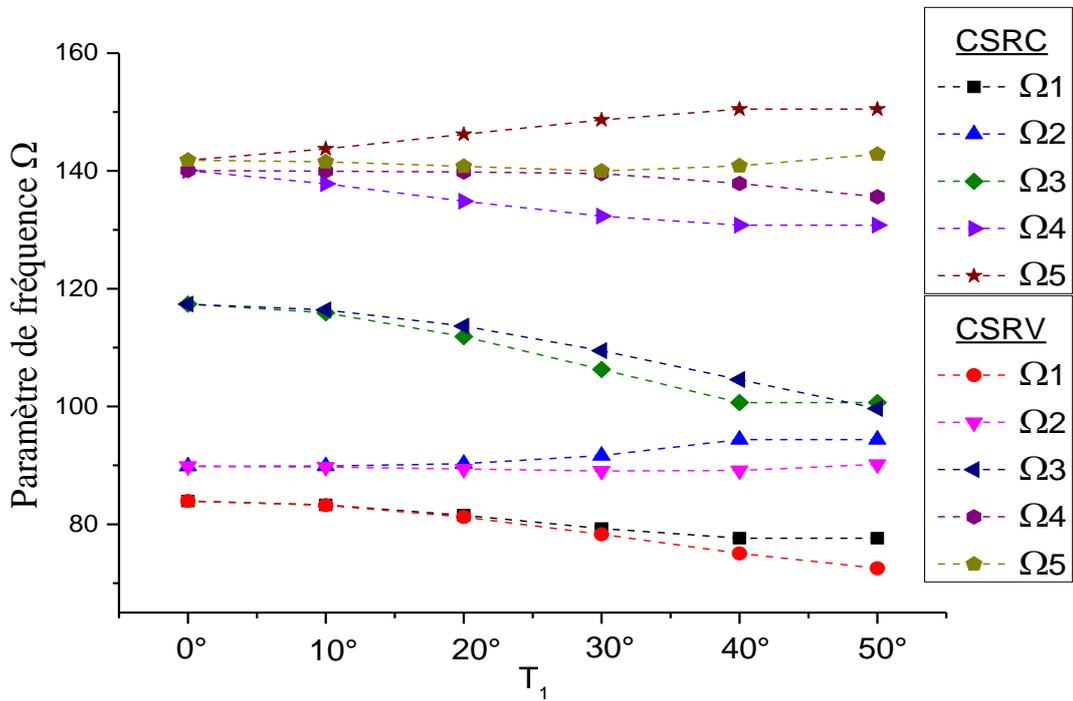


(b) :  $r/b = 0.2$

Figure 6.12 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (AAAA).

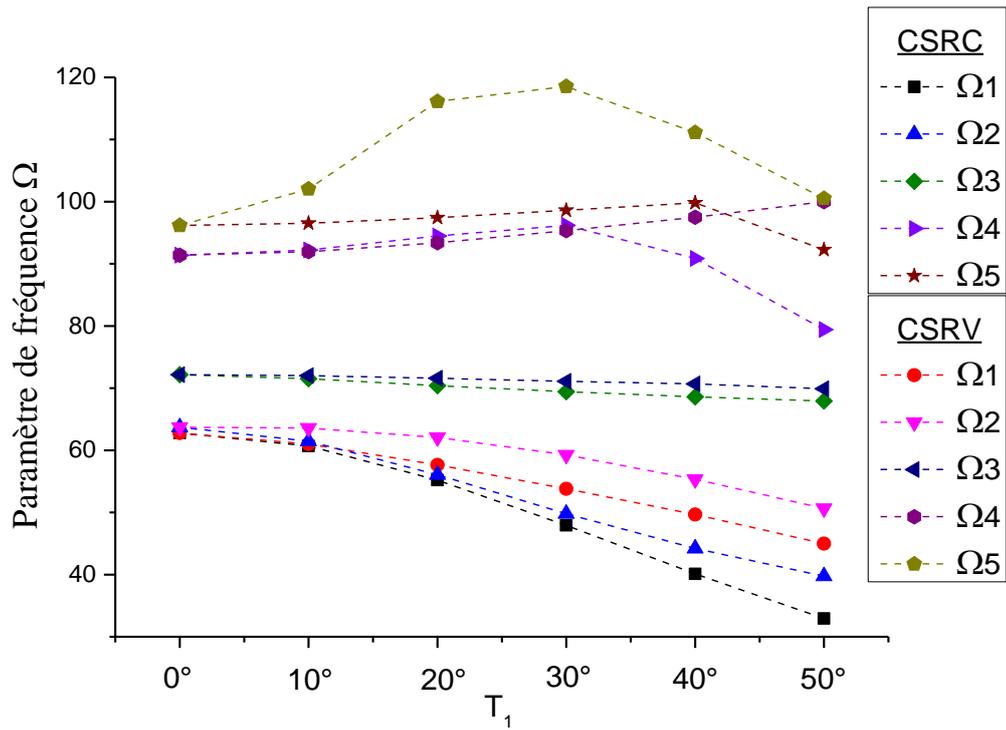


(a) :  $r/b = 0.1$

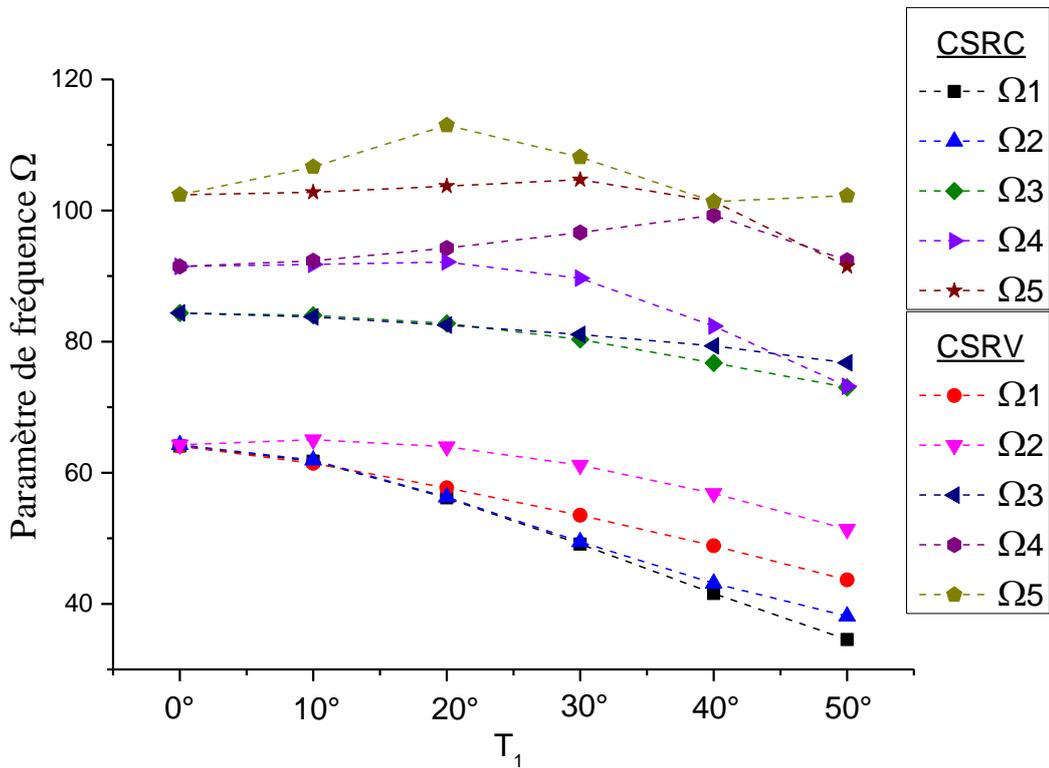


(b) :  $r/b = 0.2$

Figure 6.13 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (EEEE).

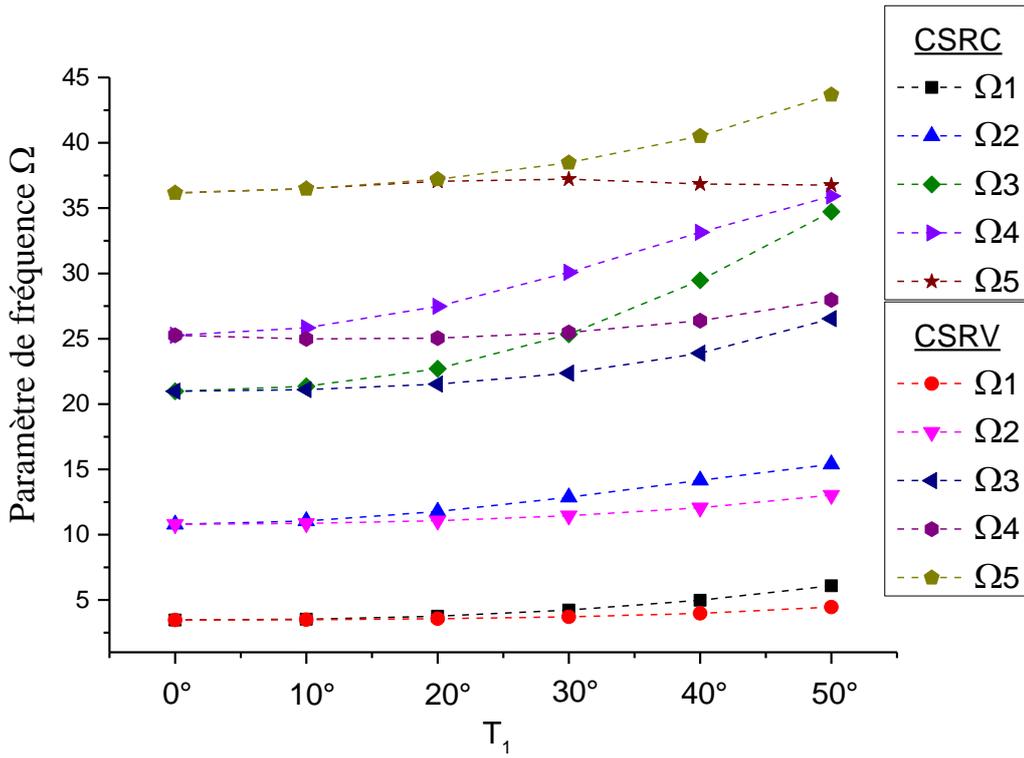


(a) : r/b = 0.1

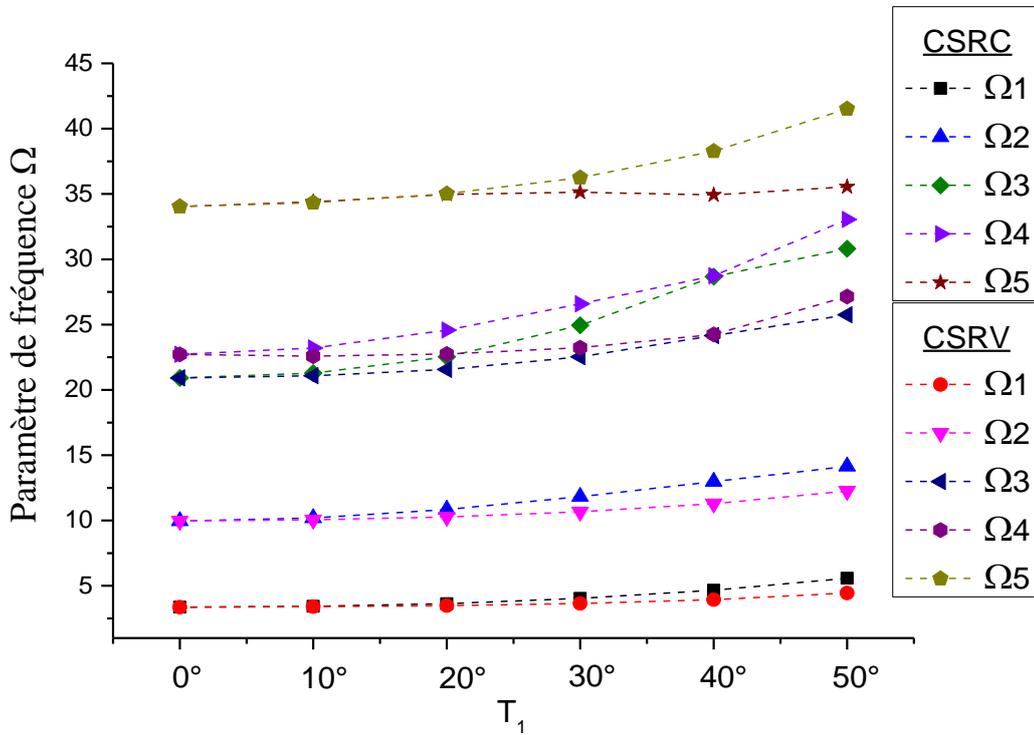


(b) : r/b = 0.2

Figure 6.14 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (LELE).



(a) :  $r/b = 0.1$



(b) :  $r/b = 0.2$

Figure 6.15 (a-b) : Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence  $\Omega$  de la plaque CSRC avec la plaque CSRV (ELLL).

---

*Conclusion*  
*générale et perspectives*

---

## Conclusion générale et perspectives

---



Les ouvertures dans les structures aérospatiales, civiles, mécaniques et marines sont inévitables principalement pour des considérations pratiques. La présence de ces ouvertures change le comportement vibratoire de plaques. L'analyse de la vibration libre de plaques en composite avec des ouvertures a été réalisée dans cette thèse en variant les paramètres physiques et mécaniques de la plaque. Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse apporte plusieurs solutions aux problèmes de vibrations de plaques en composite, ayant différentes formes d'ouverture.

La version p de la méthode des éléments finis basée sur deux nouveaux éléments-p quadrilatéraux courbés de continuité  $C^0$  ont été développés et appliqués à l'analyse de la vibration libre de plaques rectangulaires composites stratifiées avec une ouverture de forme quelconque. Alors que, l'étude vibratoire de plaque composite stratifiée à rigidité variable avec une ouverture circulaire a été effectuée en considérant des fibres de forme paraboliques. Ces nouveaux éléments-p ont été modélisés à la base de deux théories, du premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT  $C^0$ ).

La version h de la MEF est très employée. Les difficultés constatées avec cette version sont à l'exactitude de la représentation des éléments courbés et de la continuité des fibres droites ou curvilignes. Afin de surmonter cet obstacle, la version p de la MEF a été utilisée, où la plaque a été discrétisée en quatre éléments-p et les éléments de rigidité de transformés réduits sont calculés exactement dans la matrice de rigidité. Les bords courbés ont été représentés avec précision en utilisant la méthode des fonctions de mélange, ce qui permet de réduire les erreurs de calcul causées par la discrétisation de l'élément lors de l'utilisation de la version h de la MEF. Les matrices de rigidité et de masse ont été programmées facilement en utilisant un calcul symbolique. La convergence monotone et uniforme se produit lorsque le nombre des fonctions polynomiales augmente. Une haute précision, un calcul numérique stable et une convergence rapide ont été observés dans l'analyse. Les fréquences fondamentales ont été examinées en considérant l'orientation des fibres, la forme et la dimension des ouvertures, l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites. Les résultats obtenus dans cette thèse conduisent à certaines observations, les fréquences fondamentales sont fortement influencées par la forme et la dimension de l'ouverture, de sorte que l'augmentation du rayon de l'ouverture de la plaque

CSRC accroît la fréquence fondamentale, parce que la plaque avec l'ouverture perd de sa masse mais elle compense sa rigidité par l'orientation des fibres et le nombre de couches. Ce type de structure (plaque avec ouverture) a une forte concentration de contrainte autour de sa région de l'ouverture. A la fin de notre étude, une comparaison a été faite entre la plaque CSRV et la plaque CSRC, ayant une ouverture circulaire. Cette comparaison, nous a permis de conclure les points suivantes :

- Les fréquences fondamentales de la plaque CSRV sont plus élevées que la plaque CSRC, pour une certaine valeur de l'angle d'orientation des fibres paraboliques.
- La variation des fréquences fondamentales de la plaque CSRV dépend fortement de l'angle d'orientation des fibres paraboliques au centre et au bord de la plaque.
- Lorsque le rayon de l'ouverture circulaire varie, le comportement des fréquences fondamentales de la plaque CSRV est différent de celui de la plaque CSRC.

L'introduction et le choix des matériaux composites sur ces types des structures sont devenus nécessaires afin d'assurer une structure légère et résistante en même temps. L'étude qu'on a effectuée est restée purement théorique et pleine de perspectives de développement au sein des paramètres de la structure. La recherche sur l'efficacité de l'inclusion des matériaux composites sur ce type des structures est due à une grande importance d'utilisation dans les industries de pointe.

Les perspectives des travaux qui peuvent être menés dans le futur sont :

- Réalisation des études dans le même contexte de cette thèse avec d'autres formes des fibres curvilignes (hyperboliques, sinusoïdales,...).
- Etude des vibrations non-linéaires de plaques composites stratifiées à rigidité constante et variable avec ouverture.

---

*Références*

*Bibliographiques*

---

# *Références Bibliographiques*

---

- Ahmadian, H and S. Farughi. **2011**. "Shape functions of super convergent finite element models." *Thin-Walled Structures* 49: 1178-1183.
- Akhavan, H., P. Ribeiro, and M. F. S. F. de Moura. **2013**. "Composites laminates with linear varying fiber angles under static and dynamic loads." *Structures, structural dynamics, and materials and co-located conferences, Massachusetts, April 8-11*.
- Aksu, G. and R. Ali. **1976**. "Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation." *Journal of Sound and Vibration* 44: 147-58.
- Ali, R. and S. J. Atwal. **1980**. "Prediction of natural frequencies of vibration of rectangular plates with rectangular cutout." *Computers and Structures* 12: 819-23.
- Babuska, I. and B. A. Szabo. **1982**. "On the rates of convergence of the finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18: 323-341.
- Babuska, I. and M. Suri. **1990**. "The p and h-p versions of the finite element methods, an overview." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 80: 5-26.
- Babuska, I., B. A. Szabo and I. N. Katz. **1981**. "The p-version of the finite element method." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 18: 515-545.
- Babuska, I., Plank L. and Rodriguez R. **1991**. "Quality assessment of the a-posteriori error estimation in finite elements." *Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, USA*.
- Bahmyari, E., and A. Rahbar-Ranji. **2012**. "Free vibration analysis of orthotropic plates with variable thickness resting on non-uniform elastic foundation by element free Galerkin method." *Journal of Mechanical Science and Technology* 26: 2685-2694.
- Bardell, N.S. **1991**. "Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method." *Journal of Sound and Vibration* 2: 263-289.

- Bardell, N.S. **1992** “.The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method.” *Computers and Structure* 45: 841–874.
- Belalia, S. A., and A. Houmat. **2010**. “Non-linear free vibration of elliptic sector plates by a curved triangular p-element.” *Thin-Walled Structures* 48: 316–326.
- Belalia, S. A., and A. Houmat. **2012**. “Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p-element.” *European Journal of Mechanics A/Solids* 35: 1-9.
- Bhardwaj H. K., V. Jyoti and K. Sh. Avadesh. **2015**. “Study of free vibration analysis of laminated composite plates with triangular cutouts.” *Engineering Solid Mechanics* 3: 43-50.
- Bicos A. S. and G. S. Springer. **1989**. “Vibrational characteristics of composite panels with cutouts.” *AIAA Journal* 8- 1116-1122.
- Boay, C. G. **1996**. “Free vibration of laminated plates with a central circular hole.” *Composite Structures* 35: 357-68.
- Brarth, J. **1990**. “Fabrication of complex composite structures using advanced fiber placement technology.” 35<sup>th</sup> International SAMPE Symposium and Exhibition, California 710-720.
- Brent-Strong, A. **2006**. “History of Composite Materials-Opportunities and Necessities.” Brigham Young University, Available at <https://www.scribd.com/document/52715713/history-composite-materials> (accessed January 27, 2018).
- Bui, Q. T., N. M. Nguye and C. H. Zhang. **2011**. “An efficient mesh free method for vibration analysis of laminated composite plates.” *Computational Mechanics* 48: 175-93.
- CARMA, **2006**. “Glossaire des Matériaux Composites.” Centre d’Animation Régional en Matériaux Avancés, Actualisation octobre, Disponible à [http://www.materiatech-carma.net/html/pdf/GlossaireMateriauxComposites\\_CARMA.pdf](http://www.materiatech-carma.net/html/pdf/GlossaireMateriauxComposites_CARMA.pdf) (accédé Janvier 27, 2018).

- Chang, F. K., R. A. Scott and G. S. Springer. **1984**. "Failure of composite laminates containing pin loaded hole. Method of solution." *Journal of Composite Materials* 3: 255-278.
- Chang, J. S. and F. J. Shio. **1990**. "Thermal buckling analysis of isotropic and composite plates with hole." *Journal of Thermal Stress* 13:315-32.
- Chien, H., L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi and H. Nguyen-Xuan. **2012**. "Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method." *Applied Mathematical Modelling* 36: 5657-5677.
- Coons, S. A. **1964b**. "Surfaces for computer-aided design of space forms, project MAC, Design Division, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Coons, S. A. **1964a**. "Surfaces for computer Aided design of space figures." Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, USA
- Coons, S. A. 1967. "Surfaces for computer Aided design of space Forms." MIT Project MAC, TR-41.
- Daghia, F and L. Gendre. **2011**. "Quelques procédés de mise en forme des composites." Université de Paris-Saclay, Disponible à [http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/ressources\\_pedagogiques/quelques-procedes-de-mise-en-forme-des-composites#fichiers-liens](http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/ressources_pedagogiques/quelques-procedes-de-mise-en-forme-des-composites#fichiers-liens) (accédé Janvier 30, 2018).
- Dey, S. and M. S. Shephard and J. E. Flaherty. **1997**. "Geometry representation issues associated with p-version finite element computations." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1: 39-55.
- Dhanunjaya, R. K. and K. S. Babu. **2012**. "Modal analysis of thin FRP skew symmetric angle ply laminate with circular cutout." *International Journal of Engineering Research and Technology* 8: 1-5.
- Dinardo, M. T. and P. A. Lagace. **1989**. "Buckling and postbuckling of laminated composite plates with ply drop-offs." *AIAA Journal* 10: 1392-1398.

- Dirk, H.J. A. L., C. Ward and K.D. Potter. **2012**. “The engineering aspects of automated prepreg layup: History, present and future.” *Composites Part B: Engineering* 3: 997-1009.
- Düster, A., H. Bröker and E. Rank. **2001**. “The p-version of the finite element method for three dimensional curved thin walled structures.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52: 673-703.
- Evans, D. O. **1998**. “Fiber placement”, *Handbook of Composites*. Springer 476-487.
- Evans, D. O. **2001**. “Fiber placement.” *ASM handbook, Vol 21, composites*, ASM International, 477–479.
- Fayazbakhsh, K. **2013**. “The impact of gaps and overlaps on variable stiffness composites manufactured by Automated Fiber Placement.” Thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal.
- Fujita, Y., K. Yoshida and H. Arai. **1970**. “Instability of Plates with Holes (3rd Report).” *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*. 127: 161–169.
- Garbo, S. P. and J. M. Ogonowski. **1980**. “Strength predictions of composite laminates with unloaded fastener holes.” *AIAA Journal* 18: 585-9.
- Gordon, W. J. **1971**. “Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.” *SIAM Journal on Numerical Analysis* 8: 158-177.
- Gordon, W. J. and C. A. Hall. **1973**. “Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7: 461-477.
- Grant, C., and J. Martin. **2003**. “Automated processing technology for composites: current status and vision for the future.” *International SAMPE Symposium and Exhibition*. SAMPE, pp. 888-895.
- Guo, B. and I. Babuska. **1986**. “The h-p version of the finite element method. Part 1. Basic approximation results.” *Computational Mechanics* 55: 21-41.

- Gürdal, Z. and R. Olmedo. **1993a**. “In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness concept.” *AIAA Journal* 31: 751 -758.
- Gürdal, Z. and R. Olmedo. **1993b**. “Buckling response of laminates with spatially varying fiber orientations.” *AIAA Journal* 6: 993-1567.
- Gürdal, Z., B. F. Tatting and C. K. Wu. **2008a**. “Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response.” *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 5: 911-922.
- Gürdal, Z., B. F. Tatting, and K. C. Wu. **2005**. “Tow-placement technology and fabrication issues for laminated composite structures.” In 46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Austin, USA, 1-17.
- Gürdal, Z., C. S. Lopes and P. P. Camanho and B. F. Tatting. **2007**. “Progressive failure analysis of tow-placed, variable-stiffness panels.” *Solids and Structures* 44: 8493-8516.
- Gürdal, Z., C. S. Lopes and P. P. Camanho. **2008b**. “Variable-stiffness composite panels: buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates.” *Computers and Structures* 86: 897-907.
- Guenanou, A. and A. Houmat. **2017**. “Free vibration analysis of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibres.” *Science and Engineering of Composite Materials* 24: 111–122.
- Hachemi, M., S. M. Hamza-Cherif and A. Houmat. **2017**. “Free vibration analysis of variable stiffness composite laminate plate with circular cutout.” *Australian Journal of Mechanical Engineering* 1-17. <https://doi.org/10.1080/14484846.2017.1385694>.
- Haldar, A., J. Reinoso, E. Jansen and R. Roles. **2015**. “Multistability of plates through variable stiffness composite using Rayleigh Ritz method.” 7th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials, Ponta-Delgada.
- Hamza-Cherif, S. M. **2006**. “Free vibration analysis of rotating cantilever plates using the p-version of the finite element method.” *Journal of Structural Engineering and Mechanics* 22: 151-167.

- Hegarty, R. F. and T. Ariman. **1975**. “Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes.” *International Journal of Solids and Structures* 11: 89-906.
- Honda, S. and Y. Narita. **2007**. “Design of Composite Plate with Optimally Distributed Short Fibers.” 16th International Conference on Composite Materials, Hokkaido University.
- Honda, S. and Y. Narita. **2008**. “Design for the maximum natural frequency of laminated composite plate by optimally distributed short fibers.” *Journal of System, Design and Dynamics* 6: 1195-1205
- Honda, S. and Y. Narita. **2012**. “Natural frequencies and vibration modes of laminated composite plates reinforced with arbitrary curvilinear fiber shape paths.” *Journal of Sound and Vibration* 331:180-191.
- Honda, S., Y. Oonishi, Y. Narita and K. Sasaki. **2008**. “Vibration analysis of composite rectangular plates reinforced along curved lines.” *Journal of System, Design and Dynamics* 1: 76-82
- Houmat, A. **1997a**. “Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes.” *Journal of Sound and Vibration* 4: 465–472.
- Houmat, A. **1997b**. “An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations.” *Journal of Sound and Vibration* 2: 201–215.
- Houmat, A. **2006**. “Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite-element method.” *Thin-Walled Structures* 9: 943-951.
- Houmat, A. **2012**. “Nonlinear free vibration of a composite rectangular specially-orthotropic plate with variable fiber spacing.” *Composite Structures* 94: 3029-3036.
- Houmat, A. **2013**. “Nonlinear free vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers.” *Journal of Composite Structures* 106: 211-224
- Huang, J. and R. T. Haftka. **2005**. “Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates.” *Structural and multidisciplinary optimization* 5: 335-341.

- Huang, M., X. Q. Ma, T. Sakiyama, H. Matuda, and C. Morita. **2005**. “Free vibration analysis of orthotropic rectangular plates with variable thickness and general boundary conditions.” *Journal of Sound and Vibration* 288: 931-955.
- Hyer, M. W. and H. H. Lee. **1991**. “The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes.” *Composite Structures* 3: 239-261.
- Hyer, M. W. and R. F. Charette. **1991**. “Use of curvilinear fiber format in composite structure design.” *AIAA Journal* 29: 1011-5.
- IJsselmuiden, S. T. **2011**. “Optimal design of variable stiffness composite structures using laminated parameters. Doctoral Thesis, Aerospace Structures and Computational Mechanics Group.
- Joga Rao, C. V. and G. Pickett. **1961**. “Vibrations of plates of irregular shapes and plates with holes.” *Journal of the Aeronautical Society of India* 13: 83-88.
- Karalyfalvi, G. and B. Szabo. **1997**. “Quasi-regional napping for the p-version of the finite element method.” *Finite Elements in Analysis and Design* 27: 85-97.
- Kawai, T. and H. Ohtsubo. **1968**. “A method of solution for the complicated buckling problems of elastic plates with combined use of rayleigh–ritz procedure in the finite element method.” *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* (2nd), Ohio, October.
- Khaldoon, F. B. **2009**. “Free vibration analysis of a symmetric and anti-symmetric laminated composite plate with a cutout at the center.” *Al-Qadisiya Journal for Engineering Sciences* 2: 324-334.
- Kumai, T. **1952**. “Elastic stability of a square plate with a central circular hole under edge thrust.” *Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University*.
- Kumar, A. and R. P. Shrivastava. **2005**. “Free vibration of square laminates with delamination around a central cutout using HSDT.” *Composite Structures* 3: 317-333.

- Lee S. Y. **2010**. “Finite element dynamic stability analysis of laminated composite skew plates containing cutouts based on HSDT.” *Composites Science and Technology* 70: 1249-1257.
- Lee, H. P., S. P. Lim and S. T. Chow. **1987**. “Free vibration of composite rectangular plates with rectangular cutouts.” *Composite Structures* 8: 63-81.
- Leissa, W. and A. F. Martin. **1990**. “Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing.” *Composite Structures* 4: 339-357.
- Levy, S., R. M. Wolley and W. D. Knoll. **1947**. “Instability of simply supported square plate with reinforced circular hole in edge compression.” *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 39: 571-577.
- Li, X., J. Zhang and Y. Zheng. **2014**. “Static and free vibration analysis of laminated composite plates using isogeometric approach based on the third order shear deformation theory.” Hindawi Publishing Corporation *Advances in Mechanical Engineering* 1-16.
- Liu, G. R., X. Zhao, K. Y. Dai, Z. H. Zhong, G. Y. Li and X. Han. **2008**. “Static and free vibration analysis of laminated composite plates using the conforming radial point interpolation method.” *Composites Science and Technology* 2: 354-366.
- Marouene, A. **2015**. “Résistance à la compression et au flambage des composites carbone/époxy à rigidité variable fabriqués par le procédé de placement automatique des fibres.” Thèse de doctorat, Département de Génie Mécanique, Ecole Polytechnique de Montréal.
- Martin, A. F. and A. W. Leissa. **1989**. “Application of the ritz method to plane elasticity problems for composite sheets with variable fiber spacing.” *International journal of Numerical Method in Engineering* 8: 1813-1825
- Mindlin, R. D. **1951**. “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.” *ASME Journal of Applied Mechanics* 18: 31-38.

- Nemeth, M. P. **1988**. “Buckling behavior of compression loaded symmetrically laminated angle-ply plates with holes.” *AIAA Journal* 26: 330-6.
- Paramasivam, P. **1973**. “Free vibration of square plates with square openings.” *Journal of Sound Vibration* 30: 173-8.
- Peano, A. G. **1975**. “Hierarchies of conforming finite elements.” Doctoral Dissertation, Washington University, July.
- Rajamani, A. and R. Prabhakaran. **1977a**. “Dynamic response of composite plates with cutouts. Part I: Simply-supported plates.” *Journal of Sound Vibration* 54: 549-64.
- Rajamani, A. and R. Prabhakaran. **1977b**. “Dynamic response of composite plates with cutouts. Part II: Clamped–clamped plates.” *Journal of Sound Vibration* 54: 565-76.
- Ramakrishna, S., K. M. Rao and N. S. Rao. **1992**. “Free vibration analysis of laminates with circular cutout by hybrid-stress finite element.” *Composite Structures* 8: 63-81.
- Reddy, J. N. **1982**. “Large amplitude flexural vibration of layered composites plates with cutouts.” *Journal of Sound and Vibration* 83: 1-10.
- Reddy, J. N. **1984**. “A simple higher-order theory for laminated composite plates.” *Journal of Applied Mechanics* 51: 745-752.
- Reddy, J. N. **2004**. “Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis, Second Edition.” CRC Press, USA.
- Reissner, E. **1945**. “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.” *ASME Journal of Applied Mechanics* 12: 68-77.
- Reissner, E. **1984**. “On a certain mixed variational theory and a proposed applications.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20: 1366-1368.
- Reyne, M. **2007**. “Les composites.” Presses Universitaires de France (PUF), Novembre.
- Ribeiro, P. **2012a**. “Nonlinear free periodic vibrations of variable stiffness composite laminated plates.” *Journal of Nonlinear Dynamics* 70: 1535-1548.

- Ribeiro, P., and H. Akhavan. **2011**. “Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers.” *Composite Structures* 93: 3040-3047.
- Ribeiro, P., and H. Akhavan. **2012b**. “Non-linear vibrations of variable stiffness composite laminated plates.” *Composite Structures* 94: 2424-2432.
- Ribeiro, P., H. Akhavan, A. Teter, and J. Warminski. **2013**. “A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels.” *Journal of Composite Materials* 22: 2761-2777.
- Sahoo, S. **2014**. “Laminated composite stiffened shallow spherical panels with cutouts under free vibration.” *Engineering Science and Technology, an International Journal* 4: 247-259.
- Sahu, S. K. and P. K. Datta. **2002**. “Dynamic stability of curved panels with cutouts.” *Journal of Sound and Vibration* 4: 683-696.
- Schlack, A. L. **1964**. “Elastic stability of pierced square plates.” *Experimental Mechanics* 6: 167-172.
- Serdoun, S. M. N., and S. M. Hamza-Cherif. **2016**. “Free vibration analysis of composite and sandwich plates by alternative hierarchical finite element method based on Reddys C1 HSDT.” *Journal of Sandwich Structures and Materials* 18: 501-528.
- Setoodeh, S., M. M. Abdalla and Z. Gürdal. **2006**. “Design of variable-stiffness laminates using lamination parameters.” *Composites: Part B* 37: 301-309.
- Shankara, C. A. and N. G. R. Iyengar. **1992**. “Analysis of composite plates with higher order shear deformation theory.” *Mechanics Research Communications* 4: 301-314.
- Shankara, C. A. and N. G. R. Iyengar. **1996**. “A C0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates.” *Journal of Sound and Vibration* 5: 721-738.
- Sheikh, A. H., S. Haldar and D. Sengupta. **2004**. “Free flexural vibration of composite plates in different situations using a high precision triangular element.” *Journal of Vibration and Control* 10: 371-386.

- Shojaee, S., N. Valizadeh, E. Izadpanah, T. Q. Bui and T. V. Vu. **2012**. “Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based Isogeometric finite element method.” *Composite Structures* 5:1677-93.
- Sivakumar, K., N. G. R. Iyengar and K. Deb. **1999**. “Free vibration of laminated composite plates with cutout.” *Journal of Sound and Vibration* 3: 443-470.
- Szabo, B. A. **1986**. “Mesh design for the p-version of the finite element method.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 55: 181-197.
- Szabo, B. and I. Babuska. **1991**. “Finite element analysis.” Wiley, New York.
- Takahasi, S. 1958. “Vibration of rectangular plates with circular holes.” *Japanese Society of Mechanical Engineers Bulletin* 1: 380-385.
- Tatting, B. and Z. Gürdal. **2001**. “Analysis and design of tow-steered variable stiffness composite laminates.” American Helicopter Society Hampton Roads Chapter, Structure Specialists Meeting.
- Tatting, B., Z. Gürdal and C. Wu. **2008**. “Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation ” on the in-plane and buckling response.” *Composites Part A* 5: 911-922.
- Venkatachari, A., S. Natarajan, M. Haboussi, and M. Ganapathi. **2016**. “Environmental effects on the free vibration of curvilinear fibre composite laminates with cutouts.” *Journal of Composites Part B*, 88:131-138.
- Waldhart, C. **1996**. “Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates.” MSc Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Waldhart, C., Z. Gürdal and C. Ribbens. **1996**. “Analysis of tow placed, parallel fiber, variable stiffness laminates.” In *Proceedings of the 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials (SDM) Conference*, Salt Lake City, UT, USA.

- Whitney, J. M. and N. J. Pagano. **1970**. "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates." American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics 37: 1031-1036.
- Woo K. S., C. H. Hong, P. K. Basu and C. G. Seo. **2003**. "Free vibration of skew Mindlin plates by p-version of F.E.M." Journal of Sound and Vibration 4: 637–656.
- Yang, P. C., C. H. Norris and Y. Stavsky. **1966**. "Elastic wave propagation in heterogeneous plates." International Journal of Solids and Structures 2: 665-84.
- Yin S., T. Yu, T. Q. Bui, S. Xia and S. Hirose. **2015**. "A cutout Isogeometric analysis for thin laminated composite plates using level sets." Composite Structures 127: 152-164.
- Zhong, H. and Y. Tian. **2007**. "Flexural vibration analysis of an eccentric annular Mindlin plate." Archive of Applied Mechanics 4: 185-195.
- Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor. **1989**. "The finite element method." 4th Edition, New York, McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O. C., B. M. Irons, F. C. Scott and J. S. Campbell. **1970**. "Three-dimensional stress analysis." Proceedings. IUTAM Symposium. High Speed Computing of Elastic Structures, Liege. 413-431.

### **Références internet**

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| Aerospaceengineeringblog | <a href="http://aerospaceengineeringblog.com/aircraft-structures/">http://aerospaceengineeringblog.com/aircraft-structures/</a>   |
| Pt.dreamstime            | <a href="https://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-royalty-free-windows-e-fuselagem-de-um-avi%C3%A3o-privado-image30713779">https://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-royalty-free-windows-e-fuselagem-de-um-avi%C3%A3o-privado-image30713779</a> |

---

# *Annexe*

---

# Annexe A

## Annexe liée au chapitre 4

### A-1 Termes de la matrice de rigidité élémentaire $[K]^e$

$$\begin{aligned}
[K_{uu}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( A_{11}(J_{2,2})^2 + A_{33}(J_{1,2})^2 - 2A_{13}(J_{2,2}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( A_{11}(J_{2,1})^2 + A_{33}(J_{1,1})^2 - 2A_{13}(J_{2,1}J_{1,1}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \\
& \left. - \left( A_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + A_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2A_{13} \left( (J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}) \right) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
[K_{vv}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( A_{22}(J_{1,2})^2 + A_{33}(J_{2,2})^2 - 2A_{23}(J_{2,2}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( A_{22}(J_{1,1})^2 + A_{33}(J_{2,1})^2 - 2A_{23}(J_{2,1}J_{1,1}) \right) \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \\
& \left. - \left( A_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + A_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2A_{23} \left( (J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}) \right) \right) \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
[K_{uv}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( -2A_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2A_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2A_{13}(J_{2,2})^2 + 2A_{23}(J_{1,2})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( -2A_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2A_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2A_{13}(J_{2,1})^2 + 2A_{23}(J_{1,1})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \\
& + \left( 2A_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2A_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2A_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2A_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \\
& \left. + \left( 2A_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2A_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2A_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2A_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
[K_{u\beta_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( 2B_{11}(J_{2,2})^2 + 2B_{33}(J_{1,2})^2 - 2B_{13} \left( (J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2}) \right) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_x}]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( 2B_{11}(J_{2,1})^2 + 2B_{33}(J_{1,1})^2 - 2B_{13} \left( (J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1}) \right) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\beta_x}]}{\partial\eta} \\
& - \left( 2B_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + 2B_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2B_{13} \left( (J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}) \right) \right) \left( \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_x}]}{\partial\eta} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial[N_{\beta_x}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \right) \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
[K_{u\beta_y}] = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|||} \right)^2 & \left( (-2B_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2B_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2B_{13}(J_{2,2})^2 + 2B_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\xi} \right. \\
& + (-2B_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2B_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2B_{13}(J_{2,1})^2 + 2B_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \\
& + (2B_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2B_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2B_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2B_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \\
& + (2B_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2B_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2B_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) \\
& \left. - 2B_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial[N_{\beta_y}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \right) ||| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
[K_{v\beta_x}] = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|||} \right)^2 & \left( (-2B_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2B_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2B_{13}(J_{2,2})^2 + 2B_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\xi} \right. \\
& + (-2B_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2B_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2B_{13}(J_{2,1})^2 + 2B_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \\
& + (2B_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2B_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2B_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2B_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \\
& + (2B_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2B_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2B_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) \\
& \left. - 2B_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial[N_{\beta_y}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \right) ||| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
[K_{v\beta_y}] = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|||} \right)^2 & \left( (2B_{22}(J_{1,2})^2 + 2B_{33}(J_{2,2})^2 - 2B_{23}((J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2}))) \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\xi} \right. \\
& + (2B_{22}(J_{1,1})^2 + 2B_{33}(J_{2,1})^2 - 2B_{23}((J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1}))) \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \\
& - (2B_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + 2B_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2B_{23}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \left( \frac{\partial[N_v]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\beta_y}]}{\partial\eta} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial[N_{\beta_y}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_v]}{\partial\eta} \right) \right) ||| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
[K_{u\phi_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( \left( 2D_{11}(J_{2,2})^2 + 2D_{33}(J_{1,2})^2 - 2D_{13}((J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2})) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_x}]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( 2D_{11}(J_{2,1})^2 + 2D_{33}(J_{1,1})^2 - 2D_{13}((J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1})) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\phi_x}]}{\partial\eta} \\
& - \left( 2D_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + 2D_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2D_{13}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2})) \right) \left( \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_x}]}{\partial\eta} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial[N_{\beta_x}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \right) \right) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
[K_{u\phi_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( \left( -2D_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2D_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2D_{13}(J_{2,2})^2 + 2D_{23}(J_{1,2})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( -2D_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2D_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2D_{13}(J_{2,1})^2 + 2D_{23}(J_{1,1})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\eta} \\
& + \left( 2D_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2D_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2D_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2D_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\eta} \\
& + \left( 2D_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2D_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2D_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) \right. \\
& \left. - 2D_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_{\beta_y}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \Big) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
[K_{v\phi_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( \left( -2D_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2D_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2D_{13}(J_{2,2})^2 + 2D_{23}(J_{1,2})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\xi} \right. \\
& + \left( -2D_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2D_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2D_{13}(J_{2,1})^2 + 2D_{23}(J_{1,1})^2 \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\eta} \\
& + \left( 2D_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2D_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2D_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2D_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_u]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_{\phi_y}]}{\partial\eta} \\
& + \left( 2D_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2D_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2D_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) \right. \\
& \left. - 2D_{23}(J_{1,1}J_{1,2}) \right) \frac{\partial[N_{\phi_y}]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N_u]}{\partial\eta} \Big) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
[K_{v\phi_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( 2D_{22}(J_{1,2})^2 + 2D_{33}(J_{2,2})^2 - 2D_{23}((J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2})) \right) \frac{\partial [N_v]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + \left( 2D_{22}(J_{1,1})^2 + 2D_{33}(J_{2,1})^2 - 2D_{23}((J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1})) \right) \frac{\partial [N_v]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& - \left( 2D_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + 2D_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2D_{23}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2})) \right) \left( \frac{\partial [N_v]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_v]}{\partial \eta} \right) \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( E_{11}(J_{2,2})^2 + E_{33}(J_{1,2})^2 - 2E_{13}(J_{2,2}J_{1,2}) \right) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \xi} \right. \\
& + \left( E_{11}(J_{2,1})^2 + E_{33}(J_{1,1})^2 - 2E_{13}(J_{2,1}J_{1,1}) \right) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \eta} \\
& - \left( E_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + E_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2E_{13}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2})) \right) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \eta} \\
& \left. + k_s F_{44} [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_x}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( \left( E_{22}(J_{1,2})^2 + E_{33}(J_{2,2})^2 - 2E_{23}(J_{2,2}J_{1,2}) \right) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + \left( E_{22}(J_{1,1})^2 + E_{33}(J_{2,1})^2 - 2E_{23}(J_{2,1}J_{1,1}) \right) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \\
& - \left( E_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + E_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2E_{23}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2})) \right) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \\
& \left. + k_s F_{55} [N_{\beta_y}]^T [N_{\beta_y}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x \beta_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( (-2E_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2E_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2E_{13}(J_{2,2})^2 + 2E_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (-2E_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2E_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2E_{13}(J_{2,1})^2 + 2E_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2E_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2E_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2E_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2E_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2E_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2E_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2E_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2E_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \eta} \\
& \left. + k_s 2 F_{45} [N_{\beta_x}]^T [N_{\beta_y}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( (G_{11}(J_{2,2})^2 + G_{33}(J_{1,2})^2 - 2G_{13}(J_{2,2}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (G_{11}(J_{2,1})^2 + G_{33}(J_{1,1})^2 - 2G_{13}(J_{2,1}J_{1,1})) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& - (G_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + G_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2G_{13}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& \left. + H_{44} [N_{\phi_x}]^T [N_{\phi_x}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 \left( (G_{22}(J_{1,2})^2 + G_{33}(J_{2,2})^2 - 2G_{23}(J_{2,2}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (G_{22}(J_{1,1})^2 + G_{33}(J_{2,1})^2 - 2G_{23}(J_{2,1}J_{1,1})) \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& - (G_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + G_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2G_{23}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& \left. + H_{55} [N_{\phi_y}]^T [N_{\phi_y}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{\phi_x \phi_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( (-2G_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2G_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2G_{13}(J_{2,2})^2 + 2G_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (-2G_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2G_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2G_{13}(J_{2,1})^2 + 2G_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2G_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2G_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2G_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2G_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2G_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2G_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2G_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2G_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& \left. + 2H_{45} [N_{\phi_x}]^T [N_{\phi_y}] \right) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{\beta_x \phi_x}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( (2I_{11}(J_{2,2})^2 + 2I_{33}(J_{1,2})^2 - 2I_{13}((J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2}))) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (2I_{11}(J_{2,1})^2 + 2I_{33}(J_{1,1})^2 - 2I_{13}((J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1}))) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& - (2I_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + 2I_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2I_{13}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \left( \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \right. \\
& \left. + \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \eta} \right) + 2S_{44} [N_{\beta_x}]^T [N_{\phi_x}] \Big) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{\beta_x \phi_y}] = & \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|\mathbb{J}|} \right)^2 \left( (-2I_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2I_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2I_{13}(J_{2,2})^2 + 2I_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (-2I_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2I_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2I_{13}(J_{2,1})^2 + 2I_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2I_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2I_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2I_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2I_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\beta_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& + (2I_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2I_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2I_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2I_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_x}]}{\partial \eta} \\
& \left. + 2S_{45} [N_{\beta_x}]^T [N_{\phi_y}] \right) |\mathbb{J}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_y \phi_x}] = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 & \left( (-2I_{12}(J_{2,2}J_{1,2}) - 2I_{33}(J_{2,2}J_{1,2}) + 2I_{13}(J_{2,2})^2 + 2I_{23}(J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (-2I_{12}(J_{2,1}J_{1,1}) - 2I_{33}(J_{2,1}J_{1,1}) + 2I_{13}(J_{2,1})^2 + 2I_{23}(J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& + (2I_{12}(J_{2,1}J_{1,2}) + 2I_{33}(J_{2,2}J_{1,1}) - 2I_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2I_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_x}]}{\partial \eta} \\
& + (2I_{12}(J_{2,2}J_{1,1}) + 2I_{33}(J_{2,1}J_{1,2}) - 2I_{13}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2I_{23}(J_{1,1}J_{1,2})) \frac{\partial [N_{\phi_x}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \\
& \left. + 2S_{45} [N_{\beta_y}]^T [N_{\phi_x}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_y \phi_y}] = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 & \left( (2I_{22}(J_{1,2})^2 + 2I_{33}(J_{2,2})^2 - 2I_{23}((J_{2,2}J_{1,2}) + (J_{2,2}J_{1,2}))) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \xi} \right. \\
& + (2I_{22}(J_{1,1})^2 + 2I_{33}(J_{2,1})^2 - 2I_{23}((J_{2,1}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,1}))) \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \\
& - (2I_{22}(J_{1,1}J_{1,2}) + 2I_{33}(J_{2,1}J_{2,2}) - 2I_{23}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \left( \frac{\partial [N_{\beta_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\phi_y}]}{\partial \eta} \right. \\
& \left. + \frac{\partial [N_{\phi_y}]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_{\beta_y}]}{\partial \eta} \right) + 2S_{55} [N_{\beta_y}]^T [N_{\phi_y}] \Big) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
[K_{ww}] = \frac{1}{2} k_s \int \left( \frac{1}{|J|} \right)^2 & \left( (A_{11}(J_{2,2})^2 + A_{33}(J_{1,2})^2 - 2A_{13}(J_{2,2}J_{1,2})) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right. \\
& + (A_{11}(J_{2,1})^2 + A_{33}(J_{1,1})^2 - 2A_{13}(J_{2,1}J_{1,1})) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \\
& \left. - (A_{11}(J_{2,1}J_{2,2}) + A_{33}(J_{1,1}J_{1,2}) - 2A_{13}((J_{2,2}J_{1,1}) + (J_{2,1}J_{1,2}))) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w\beta_x}] = \frac{1}{2} k_s \int \frac{1}{|J|} & \left( (2S_{144}(J_{2,2})^2 - 2S_{145}(J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_{\beta_x}] \right. \\
& \left. + (-2S_{144}(J_{2,1})^2 + 2S_{145}(J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_{\beta_x}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w\beta_y}] &= \frac{1}{2} k_s \int \frac{1}{|J|} \left( (2 S_{155} (J_{1,2})^2 - 2 S_{145} (J_{2,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_{\beta_y}] \right. \\
&\quad \left. + (-2 S_{155} (J_{1,1})^2 + 2 S_{145} (J_{2,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_{\beta_y}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w\phi_x}] &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{|J|} \left( (2 S_{244} (J_{2,2})^2 - 2 S_{245} (J_{1,2})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_{\phi_x}] \right. \\
&\quad \left. + (-2 S_{244} (J_{2,1})^2 + 2 S_{245} (J_{1,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_{\phi_x}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w\phi_y}] &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{|J|} \left( (2 S_{255} (J_{1,2})^2 - 2 S_{245} (J_{2,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} [N_{\phi_y}] \right. \\
&\quad \left. + (-2 S_{255} (J_{1,1})^2 + 2 S_{245} (J_{2,1})^2) \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \eta} [N_{\phi_y}] \right) |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Ou :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] dz \tag{A.27}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (z - \delta f(z)) dz \tag{A.28}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (-\delta f(z)) dz \tag{A.29}$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (z^2 + \delta (f(z))^2 - \delta 2z(f(z))) dz \tag{A.30}$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( 1 + \delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 - \delta 2 \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \tag{A.31}$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] (\delta f(z))^2 dz \tag{A.32}$$

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \tag{A.33}$$

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \left( (f(z))^2 - z (f(z)) \right) \right) dz \quad (A.34)$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( \delta \left( \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) \right) dz \quad (A.35)$$

$$S1_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( 1 - \delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \quad (A.36)$$

$$S2_{ij} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [\bar{Q}^k_{ij}] \left( -\delta \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \right) dz \quad (A.37)$$

## A-2 Termes de la matrice de masse élémentaire $[M]^e$

$$[M_{uu}] = [M_{vv}] = [M_{ww}] = \int (\rho_A [N]^T [N]) |J| d\xi d\eta \quad (A.38)$$

$$[M_{u\beta_x}] = \frac{1}{2} \int (2\rho_B [N_u]^T [N_{\beta_x}]) |J| d\xi d\eta \quad (A.39)$$

$$[M_{v\beta_y}] = \frac{1}{2} \int (2\rho_B [N_v]^T [N_{\beta_y}]) |J| d\xi d\eta \quad (A.40)$$

$$[M_{u\phi_x}] = \frac{1}{2} \int (2\rho_C [N_u]^T [N_{\phi_x}]) |J| d\xi d\eta \quad (A.41)$$

$$[M_{v\phi_y}] = \frac{1}{2} \int (2\rho_C [N_v]^T [N_{\phi_y}]) |J| d\xi d\eta \quad (A.42)$$

$$[M_{\beta_x}] = [M_{\beta_y}] = \int (\rho_D [N_\beta]^T [N_\beta]) |J| d\xi d\eta \quad (A.43)$$

$$[M_{\phi_x}] = [M_{\phi_y}] = \int (\rho_E [N_\phi]^T [N_\phi]) |J| d\xi d\eta \quad (A.44)$$

$$[M_{\beta_x\phi_x}] = [M_{\beta_y\phi_y}] = \int (\rho_F [N_\beta]^T [N_\phi]) |J| d\xi d\eta \quad (A.45)$$

Ou :

$$\rho_A = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k dz \quad (A.46)$$

$$\rho_B = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k (z - \delta f(z)) dz \quad (A.47)$$

$$\rho_C = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k (-\delta f(z)) dz \quad (A.48)$$

$$\rho_D = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \left( z^2 + \delta (f(z))^2 - \delta 2z(f(z)) \right) \right) dz \quad (A.49)$$

$$\rho_E = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \delta (f(z))^2 \right) dz \quad (A.50)$$

$$\rho_F = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \delta \left( (f(z))^2 - z(f(z)) \right) \right) dz \quad (A.51)$$

---

## ملخص

هذه الأطروحة تعرض تحليل الاهتزازات الحرة للصفائح المستطيلة المركبة الطباقية ذات الصلابة الثابتة والمتغيرة مع وجود الفتحات. تم صياغة المشكلة بالاستناد على نظريتين الدرجة الأولى والدرجة العالية للصفائح إلى جانب العنصر  $p$ -الرباعي المنحني. تم حساب عناصر مصفوفات الصلابة والكتلة بشكل تحليلي. الحواف المنحنية تم تمثيلها بدقة باستخدام دوال المزج. تم تطوير كود الحساب باستخدام برنامج Mathcad لتحديد الترددات الأساسية والوسائط المصاحبة لمختلف المعلمات الفيزيائية والميكانيكية مثل حجم وشكل الفتحة، سمك اللوحة، زاوية اتجاه الألياف والشروط الحدودية. النتائج التي تم الحصول عليها أظهرت اتفاقاً جيداً من خلال مقارنتها مع الحلول المتاحة. يتم تقديم نتائج جديدة للترددات للوحات مستطيلة ذات صلابة متغيرة مع فتحات.

**الكلمات الرئيسية:** اهتزازات حرة؛ لوحة مركبة طباقية مع فتحات. صلابة ثابتة ومتغيرة. نظرية الدرجة الأولى؛ نظرية الدرجة العالية؛ العنصر  $p$ -الرباعي المنحني.

## Résumé

Cette thèse présente l'analyse de la vibration libre des plaques rectangulaires composites stratifiées à rigidité constante et variable avec ouvertures. La formulation du problème est basée sur les théories des plaques du premier ordre et d'ordre élevé couplées avec un élément- $p$  quadrilatéral courbé. Les éléments des matrices de rigidité et masse sont calculés analytiquement. Les bords courbés sont représentés avec précision en utilisant la méthode des fonctions de mélange. Un code du calcul est élaboré à l'aide du logiciel Mathcad pour déterminer les fréquences fondamentales et modes associés pour différents paramètres physiques et mécaniques tel que la dimension et forme de l'ouverture, épaisseur de la plaque, angle d'orientation des fibres, et conditions aux limites. Les résultats obtenus montrent un très bon accord avec les solutions disponibles dans la littérature. De nouveaux résultats pour les fréquences des plaques rectangulaires stratifiées à rigidité variable avec ouvertures sont présentés.

**Mots clés :** Vibration libre; plaque composite stratifiée avec ouvertures ; rigidité constante et variable; théorie du premier ordre; théorie d'ordre élevé; élément- $p$  quadrilatéral courbé.

## Abstract

This thesis presents the analysis of the free vibration of constant and variable stiffness laminated composite rectangular plates with openings. The problem formulation is based on the first-order and high-order plate theories coupled with a curved quadrilateral  $p$ -element. The elements of the stiffness and mass matrices are calculated analytically. The curved edges are accurately represented using the blending function method. A calculation code is developed using the Mathcad software to determine the fundamental frequencies and associated modes for different physical and mechanical parameters such as the opening size and shape, plate thickness, fiber orientation angle, and boundary conditions. The results obtained show a very good agreement with the solutions available in the literature. New results for the frequencies of variable stiffness laminated composite rectangular plates with openings are presented.

**Keywords:** Free vibration; laminated composite plate with openings; constant and variable stiffness; first-order theory; high-order theory; curved quadrilateral  $p$ -element.

---