

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE
UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID - TLEMCCEN
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MASTER

Option : Systèmes dynamiques et applications à la dynamiques de populations

Présenté par :

Mr.CHEKROUN Abdennasser

Thème

Fonction de Lyapunov et stabilité globale
pour un modèle de Kermack-McKendrick
avec l'âge d'infection

Devant le jury composé de :

Mr. K. Yadi , M.C.A. Université de Tlemcen. **Président.**

Mr. G. Senouci Bereksi , M.C.A. Université de Tlemcen. **Examineur.**

Mr. S. Miri , M.C.B. Université de Tlemcen. **Examineur.**

Mr. T.M. Touaoula , M.C.A. Université de Tlemcen. **Encadreur.**

Mr. B.Perthame , Professeur. Université Pierre et Marie Curie. **Invité.**

Année universitaire : 2011 — 2012

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur TOUAOULA, qui, en tant que mon encadreur, s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciements aussi à notre chef de département de mathématiques, Mr Benmiloud MEBKHOUT.

C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à messieurs :K. Yadi, S. Miri, G. Senouci Bereksi, B.Perthame d'avoir bien voulu présider mon jury, d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :
A mes très chers parents.
A mon Frère : Salah Edine.
A ma soeur : Soumia et son mari Mohamed.
A ma petite nièce : Wissem, Meriem .
A toute ma famille et spécialement à mes cousins.
A tous mes amis sans exception .
A mes collègues : Merwan, Oussama, Soufiane, Yassine, Rima, Kheira, Wafaa, Ikram
Zoubida , Ilhem, Awatif, Nawal , Nesrine, Ibtissem, Kamila
et les autres collègues de ma promotion et du département .
A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie .
A tous mes enseignants.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	5
1.1 Généralités sur les équations différentielles	5
1.2 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov	7
1.3 Rappels et compléments	8
2 Modélisation mathématique	10
2.1 Modélisation mathématique appliquée à la dynamique de populations	10
2.2 Modélisation mathématique en épidémiologie	15
2.3 Le modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection et interprétation	18
3 Existence et unicité des solutions pour le modèle de Kermack-McKendrick structuré en âge d'infection	23
3.1 L'équation non linéaire de renouvellement	23
3.2 Existence des solutions du problème linéaire	25
3.3 Existence des solutions du problème non linéaire	30
4 Comportement asymptotique des solutions	35
4.1 La stabilité du point d'équilibre trivial	35
4.2 Fonction de Lyapunov et stabilité asymptotique globale du point d'équilibre endémique	38
4.3 Analyse numérique et exemples	42
Bibliographie	47

Introduction

L'épidémiologie décrit les variations de fréquence des maladies dans les groupes humains, et recherche les déterminants de ces variations, et des facteurs qui pourraient les causer. Elle vise à la compréhension des causes des maladies, à l'amélioration de leurs traitements et moyens de prévention. Une maladie infectieuse est une maladie provoquée par la transmission d'un micro-organisme : virus, bactérie, parasite, champignon...

Parmi les maladies infectieuses les plus répandues et les plus connues, on citera à titre d'exemple : la Tuberculose, le Paludisme, et le SIDA .

Il est légitime de se poser la question : quel rapport avec les mathématiques ?

On pourrait y répondre comme suit :

On commence par collecter des données (épidémie : nombre de malades, temps de guérison, pourcentage de mortalité . . .) , autrement dit des chiffres . Il s'agit de modéliser ces paramètres à savoir convertir un problème concret, issu du monde réel, en un problème de nature mathématique, puis on passe à la résolution et l'analyser du modèle, cela peut permettre de comprendre, de prédire, d'agir . . .

La vaccination pose encore aujourd'hui des problèmes nouveaux, pour lesquels la modélisation mathématique demeure indispensable. Notamment, la disparition programmée des maladies amène à réfléchir sur la nécessité de renforcer la vaccination ou de l'arrêter . La diminution rapide de l'immunité vaccinale est également à l'origine de questions de santé publique que l'on peut étudier par modélisation.

Le théorème du seuil à été reformulé par la notion du ratio de reproduction de l'épidémie, noté R_0 , dont l'interprétation usuelle est le nombre de cas directement infectés par un unique infecté dans une population entièrement susceptible. L'intuition, et les mathématiques, montrent que lorsque R_0 est plus grand que 1, on aura l'apparition d'une épidémie ; et inversement lorsque R_0 est inférieur ou égal à 1 .

Dans les articles correspondant à cette étude (Kermack et al., 1927 ; Kermack,et al., 1932 ; Kermack et al., 1933), les auteurs décrivent ce qui est maintenant connu sous le nom de modèle " SIR " , le modèle fondamental sous sa forme la plus simple en EDO.

Ce modèle correspond au système d'équations suivant

$$\begin{cases} S'(t) = \lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases}$$

où $S(t)$ représente la population des susceptibles à l'instant t , $I(t)$ celle des infectés et $R(t)$ celle des réfractaires. Plusieurs paramètres sont utilisés pour rendre compte de la dynamique de cette population : λ constante correspond aux naissances dans la population, supposées toutes susceptibles, $1/\mu$ est la durée de vie moyenne, $1/\gamma$ la durée infectieuse moyenne et β correspond au taux de contact menant à une transmission effective de la maladie.

Dans ce mémoire nous étudions un modèle structuré en âge d'infection, où la contagiosité et le taux d'enlèvement peuvent dépendre de l'âge d'infection. Si le nombre de reproduction de base $R_0 \leq 1$, on démontre que l'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable. Pour $R_0 > 1$, une fonction de Lyapunov est utilisée pour montrer que l'unique équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Soit le modèle de KERMACK-MCKENDRICK appliqué en épidémiologie étudié dans ce mémoire (on donne plus de détails dans un des chapitres qui suivent :

$$(1) \quad \begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L^1_+(0, +\infty). \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les équations différentielles

Définition 1.1.1

Une équation différentielle (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n . Par exemple, une telle équation pourrait être

$$y'(t) = 2 y(t) \text{ ou } y = 0.5 t^2 y''(t) - 6t.$$

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (ED)$$

où F est une fonction de $(n + 2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où t et y sont à valeurs dans \mathbb{R} . Une solution à une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ (une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois continument dérivable) telle que pour tout $t \in I$, on ait $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^n(t)) = 0$.

Remarque : On dit souvent intégrer l'ED au lieu de trouver une solution à l'ED.

On considère maintenant l'équation différentielle :

$$y' = f(t, y(t)) \quad (\varepsilon)$$

Le problème de Cauchy :

Considérons l'équation différentielle (ε) et E ouvert de \mathbb{R}^n . Le problème de Cauchy est le suivant : on se donne un intervalle I de \mathbb{R} , $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$ et on cherche toutes les solutions $y : I \rightarrow E$ de (ε) telles que $y(t_0) = y_0$.

Définition 1.1.2

On dira que l'application $f : U \rightarrow E$ est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $U \subset \mathbb{R} \times E$ si et seulement si, quelque soit $(t_0, z_0) \in U \subset \mathbb{R} \times E$, il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de (t_0, z_0) dans $\mathbb{R} \times E$, tel qu'il existe une constante $C_0 > 0$ vérifiant :

$$\forall (t, z), (t, x) \in U_0, \| f(t, z) - f(t, x) \| \leq C_0 \cdot \| z - x \|.$$

Théorème 1.1.1

Avec les notations de l'équation différentielle (ε) , si f est continue sur U et localement lipschitzienne en sa seconde variable sur U , quelque soit $(t_0, y_0) \in U$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une fonction $y : I_0 \rightarrow E$, telle que :

- $y(t_0) = y_0$,
- y est une solution de (ε) ,
- pour tout intervalle $J \subset I_0$ contenant t_0 , il n'existe qu'une seule solution de (ε) passant par y_0 en t_0 . Il s'agit de $y|_J$.

Soit l'équation différentielle autonome :

$$y' = f(y(t)) \quad (\varepsilon 1)$$

En générale on ne sait pas résoudre l'équation différentielle $(\varepsilon 1)$, alors on fait une étude qualitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre (points singuliers, fixes, stationnaires) c'est-à-dire les points où la vitesse s'annule.

Définition 1.1.3

Le point y^* est dit point d'équilibre du système $(\varepsilon 1)$ si $f(y^*) = 0$ autrement dit y^* est une solution constante de l'équation $y' = f(y(t))$.

Définition 1.1.4

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ,

1. V est dite définie positive si :
 - (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi-définie positive si :
 - (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$.
4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

1.2 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov

Soit l'équation différentielle

$$\dot{y} = f(y), \quad (1.1)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit y^* un point d'équilibre de l'équation (1.1).

Définition 1.2.1

L'équilibre y^* est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $y(t)$ de (1.1) on a

$$\|y(0) - y^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|y(t) - y^*\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.2

L'équilibre y^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $y(t)$ de (1.1) on a

$$\|y(0) - y^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0.$$

Remarque :

Si un point d'équilibre est stable mais pas asymptotiquement stable on parle de la stabilité neutre.

Théorème 1.2.1 (Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe [5])

Soit $y(t)$ solution de $\dot{y} = f(y)$

et soit V une fonction de classe C^1 définie positive sur Ω un voisinage de $y^* = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

- (i) Si $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative alors y^* est stable.
- (ii) Si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative alors y^* est asymptotiquement stable.

Dans le cas (i) $V(y)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii) $V(y)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

Preuve :

(ii) $V(x, y)$ Lyapunov stricte dans le cas planaire.

Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que Ω contient $(0, 0)$.

Soit le cercle C de centre $(0, 0)$ inclus dans Ω . Sur ce cercle V admet un minimum $V > M$ car $(V(x, y) > 0 \text{ si } (x, y) \neq (0, 0))$.

Soit U l'ensemble des points intérieur à C et inférieur à M en V alors U n'est pas vide car $(0, 0) \in U$ et $V(0, 0) = 0 < M$

Soit (x, y) une solution telle que $(x(0), y(0)) \in U$, on a $0 \leq V(x(t), y(t)) \leq M$.

On prend $t = t_n = n$ alors :

$V(x(t_n), y(t_n)) = V(x(n), y(n))$ converge car V décroissante le long des solutions et minorée par 0 ,

donc

$$V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'un autre coté on applique le théorème des accroissements finis à V dans $[n, n+1]$ alors $\exists s_n \in]n, n+1[$ tel que

$$0 \longleftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n))) = \frac{d}{dt} V(x(s_n), y(s_n)).$$

$(x(s_n), y(s_n))$ se trouve dans un compact donc on peut extraire une sous suite $(x(r_n), y(r_n))$ qui converge.

$$\frac{dV}{dt} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x(r_n), y(r_n)) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} (x_\infty, y_\infty) = 0,$$

dela $(x_\infty, y_\infty) = (0, 0)$ car $V'(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0, 0)$ (Lyapunov stricte).

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Théorème 1.2.2 (Théorème d'invariance de LaSalle [5])

Soit $\mathbb{R}^n \ni y \longrightarrow V(y)$ de classe C^1 et définie positive

$$\frac{d}{dt} V(y) \leq 0.$$

Alors, pour toute condition initiale y_0 , la solution de $\dot{y} = f(y)$ (définie pour tout temps $t > 0$) converge asymptotiquement vers le plus grand sous-ensemble invariant contenu dans l'ensemble des points $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que $\frac{d}{dt} V(\xi) = 0$.

1.3 Rappels et compléments

Théorème 1.3.1 (Inégalité de Jensen)

Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables et $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, où Ω est ouvert de \mathbb{R}^n supposons que :

$$g \geq 0 \text{ p.p sur } \Omega, \int_{\Omega} g(x) dx = 1, fg \text{ et } \phi(f)g \in L^1(\Omega),$$

alors

$$\phi\left(\int_{\Omega} f(x)g(x) dx\right) \leq \int_{\Omega} \phi(f(x))g(x) dx.$$

Soit maintenant le théorème qui donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.3.2 (Théorème du Point Fixe Métrique (Picard) [10])

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$ c-à-d $\varphi(a) = a$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := \varphi(x_p)$ converge vers a .

Théorème 1.3.3 (Lemme de Gronwall [10])

Soit ϕ une fonction continue sur un intervalle $[0, T]$, on suppose qu'il existe $k > 0$ et f continue sur $[0, T]$ tels que :

$$\phi(t) \leq f(t) + k \int_0^t \phi(u) du,$$

alors

$$\phi(t) \leq f(t) + k \int_0^t f(u) e^{k(t-u)} du.$$

Corollaire 1.3.1

Soit φ une fonction dérivable définie sur un intervalle J de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R}^n . Soit $t_0 \in J$. On suppose que pour $t \in J$, avec $t \geq t_0$, l'application φ vérifie :

$$\|\varphi'(t)\| \leq \lambda(t)\|\varphi(t)\| + \mu(t),$$

où λ et μ deux fonctions continues définies sur J ; la fonction λ est à valeurs positives ou nulles.

soit ψ définie sur J , vérifiant l'équation :

$$\psi'(t) = \lambda(t)\psi(t) + \mu(t),$$

et satisfaisant $\|\varphi(t_0)\| \leq \psi(t_0)$

Alors pour tout $t \geq t_0$ on a :

$$\|\varphi(t)\| \leq \psi(t).$$

Chapitre 2

Modélisation mathématique

Les modèles mathématiques des phénomènes biologiques sont de plus en plus réalistes et utiles dans la pratique, un reflet de leur utilisation pour aider à comprendre les processus dynamiques et faire des prédictions pratiques.

La modélisation mathématique en biologie est nécessaire dans de nombreuses disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, la génétique, l'épidémiologie, la médecine et fait intervenir la plupart des domaines des mathématiques, analyse réelle et complexe, algèbre, calcul différentiel et intégral, analyse numérique, probabilités et statistique,...

2.1 Modélisation mathématique appliquée à la dynamique de populations

Un des domaines de la biologie où les mathématiques sont les plus représentées et depuis fort longtemps est la dynamique des populations. Ce terme doit être entendu en un sens très large. La dynamique des populations n'étudie pas seulement l'évolution des populations animales, végétales ou bactériennes, mais concerne aussi la génomique au niveau cellulaire. La dynamique des populations consiste non seulement à décrire la taille de la population étudiée au cours du temps mais aussi à expliquer les comportements évolutifs observés ainsi que les interactions entre les espèces vivantes et leur milieu.

Dans ce qui suit, nous considérons certains modèles déterministes en guise d'introduction à la dynamique de populations.

1-Modèle de croissance exponentielle de Malthus [9]

On considère une population dont l'effectif au cours du temps est représenté par une fonction réelle :

$$N : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

En l'absence d'interaction avec une autre population, on peut schématiser l'évolution de N par la loi générale :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}] \times N \times \Delta t$$

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}] \times N$$

on passe à la limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dN}{dt} = [\text{taux de naissances} - \text{taux de décès}] \times N$$

On peut écrire la loi d'évolution malthusienne

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) \times N, \quad b, d > 0$$

Cette approche, revient à Malthus en 1798.

La solution est donnée par : $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$

Propriétés :

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$

Si $b > d$ il y a croissance exponentielle de la population.

Si $b < d$ il y a décroissance exponentielle de la population qui tend vers une extinction.

Si $b = d$ la population reste constante.

Défaut majeur : Ne tient pas compte de la capacité du milieu à soutenir une croissance exponentielle et c'est assez irréaliste. En effet, si l'on considère les estimations de croissance passées et les prévisions pour la population mondiale totale du 17^{ème} au 21^{ème} siècles, on remarque que la croissance n'est pas exponentielle.

2-Modèle de croissance logistique de Verhulst [9]

Ce modèle est introduit pour corriger le défaut évoqué ci-dessus, bien sûr il faut présenter un certain ajustement à la croissance exponentielle . Verhulst (1838, 1845) a proposé qu'un processus d'auto limitation devrait fonctionner quand une population devient trop importante. Il a suggéré :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad N(0) = N_0, \quad r = b - d > 0$$

Si $K > 0$: capacité limite de l'environnement.

Si $K = +\infty$ on retrouve le modèle de Malthus.

Si r le taux intrinseque.

La solution est donnée par :

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{[K + N_0(e^{rt} - 1)]} \longrightarrow K \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

3-Deux populations en interaction

Soit maintenant le cas de deux populations en interaction :

$x(t)$: densité de la population 1.

$y(t)$: densité de la population 2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \pm h(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(y) \pm k(x, y) \end{cases}$$

où $f(x)$ et $g(y)$ modélise la croissance de la population isolée et $h(x, y)$ et $k(x, y)$ modélise l'interaction entre les deux populations

Pour le choix de $h(x, y)$ et $k(x, y)$ et leurs signes on a :

- $(-, -)$ chaque population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre , c'est le cas des populations en compétition.
- $(-, +)$ ou $(+, -)$ une population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre , et l'effet inverse dans l'autre sens est positive , c'est le cas par exemple de la prédation .
- $(+, +)$ chaque population favorise la croissance de l'autre population par exemple le cas

du mutualisme.

Exemple pour le cas de prédation :

Pour mieux comprendre la modélisation, prenons le cas de prédation. Il est usuel de supposer que les proies et les prédateurs se déplacent en exploitant leur milieu au hasard. Cela conduit à un modèle de type "action de masse" où le nombre moyen de rencontres entre les proies et les prédateurs est proportionnel au produit des effectifs, de ce fait on doit avoir un terme négatif dans l'équation des proies parce que qu'il y a disparition des proies consommées par les prédateurs de type $h(x, y) = -axy$.

Ici a est un paramètre constant positif qui rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques.

h : s'appelle fonction de Lotka-Volterra ou de type 1

Dans l'équation des prédateurs on doit s'attendre à un terme de la même forme parce que les proies tuées sont assimilées par les prédateurs et leur permettent de maintenir la croissance de leur population $k(x, y) = -eh(x, y) = eaxy$.

Où e : rendement de conversion de biomasse proie en biomasse prédateur.

Supposons que x est la densité de la proie se développant avec une croissance logistique :

$$f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

y est caractérisé par une mortalité naturelle :

$$g(y) = -my$$

On obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ \frac{dy}{dt} = -my + eaxy \end{cases}$$

4-Equation structurée en âge

Soit $n(t, a)$ la densité de population qui a l'âge a à l'instant t où $a \in [0, a_+]$ avec a_+ l'âge maximal.

Soit $\int_{a_1}^{a_2} n(t, a) da$: le nombre d'individus qui ont l'âge $a \in [a_1, a_2]$ à l'instant t (l'intégrale somme tous les individus qui ont l'âge $a \in [a_1, a_2]$ à l'instant t).

$P(t) = \int_0^\infty n(t, a) da$ est la taille totale de notre population à l'instant t .

Soit β le taux de fertilité ou de naissance alors :

$\int_{a_1}^{a_2} \beta n(t, a) da$: le nombre des naissances produit des individus dans l'âge $a \in [a_1, a_2]$ à l'instant t .

Posons $B(t) = \int_0^\infty \beta n(t, a) da$: le nombre total des naissances à l'instant t .

Soit μ le taux de mortalité alors le nombre total de décès à l'instant t est égal :

$$\int_0^\infty \mu n(t, a) da$$

Il est logique de prendre $\beta = \beta(a, P(t))$ et $\mu = \mu(a, P(t))$ dépendant de l'âge et de la population totale.

Supposons que la population change d'un temps t à un temps $t+h$ alors

$\int_t^{t+h} B(s) ds$: le nombre de naissances entre t et $t+h$.

Le nombre des individus disparus par mortalité à l'instant $t+s$ qui ont un âge inférieure ou égal à $a+s$ est égal :

$$\int_0^{a+s} \mu n(t+s, \sigma) d\sigma,$$

donc le nombre des individus qui évoluent et qui meurent entre $[t, t+h]$ est :

$$\int_0^h \int_0^{a+s} \mu n(t+s, \sigma) d\sigma ds.$$

Le nombre des individus de la population qui ont un âge inférieur à a est égal :

$$N(t, a) = \int_0^a n(t, s) ds.$$

donc $N(t+h, a+h) - N(t, a) = \int_t^{t+h} B(s) ds - \int_0^h \int_0^{a+s} \mu n(t+s, \sigma) d\sigma ds$

donc $\frac{N(t+h, a+h) - N(t, a)}{h} = \frac{\int_t^{t+h} B(s) ds - \int_0^h \int_0^{a+s} \mu n(t+s, \sigma) d\sigma ds}{h}$

En faisant tendre $h \rightarrow 0$ on obtient

$$N_t - N_a = B(t) - \int_0^a \mu n(t, \sigma) d\sigma \quad \text{avec } N_t = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ et } N_a = \frac{\partial N}{\partial a}$$

$$\int_0^a n_t(t, \sigma) d\sigma + n(t, a) = - \int_0^a \mu n(t, \sigma) d\sigma$$

On dérive et on obtient :

$$n_t(t, a) + n_a(t, a) = -\mu n(t, a).$$

Conclusion le Modèle MACKENDRICK-FOESTER est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} n(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t, a) = -\mu n(t, a), \\ n(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a, p(t)) n(t, a) da, \\ n(0, a) = n_0(a) \end{array} \right.$$

Remarque : On peut aussi voir que la variation de la population est égale :

$$dn(t, a) = \frac{\partial n}{\partial a} da + \frac{\partial n}{\partial t} dt = -\mu n(t, a) dt.$$

Puisque on avance dans l'âge physique comme dans le temps on a $\frac{da}{dt} = 1$ donc $da = dt$

D'où, après simplification :

$$\frac{\partial n}{\partial a} + \frac{\partial n}{\partial t} = -\mu n(t, a).$$

2.2 Modélisation mathématique en épidémiologie

Soit une population saine (constituée de susceptibles) et supposons qu'un individu infecté est introduit dans cette population , il va déclencher l'infection et celle-ci se propage d'un individu à un autre à travers un contact. Après un certain temps les infectés se rétablissent et deviennent immunisés ou réfractaire, ce qui revient à dire que la probabilité d'être infecté une 2^{ème} fois est faible .

Ainsi la population est divisée en trois classes d'individus :

SUSCEPTIBLES → INFECTES → REFRACTAIRES

Pour pouvoir créer un modèle pour cette situation nous allons suivre les 3 étapes suivantes :

1- Identification des quantités qui nous intéressent

S : nombre des susceptibles.

I : nombre des infectés

R : nombre des refractaires

2- identification des variables indépendantes

tel que le temp t l'espace x , l'age a, \dots

Dans notre exemple on a $S(t), I(t), R(t)$

3- On quantifie les transitions et les interactions entre les classes**Définition :**

On appelle force d'infection θ la probabilité par unité de temps (le taux), pour qu'un susceptible devienne infecté .

Suivant cette définition on construit notre modèle.

$$S(t+h) - S(t) = -\theta(I)S(t)h$$

$$I(t+h) - I(t) = \theta(I)S(t)h - \alpha I h$$

$$R(t+h) - R(t) = \alpha I(t)h$$

Après le passage à la limite $h \rightarrow 0$ on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\theta(I)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \theta(I)S(t) - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{array} \right.$$

On suppose que la force d'infection est proportionnelle au nombre d'infectés i.e : $\theta(I) = \beta I$ où β est appelé le taux de transmission.

Le modèle devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta I S \\ \frac{dI}{dt} = \beta I S - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{array} \right.$$

Ici le modèle ne prend pas en compte la mortalité ni la natalité et par conséquent la population totale est considérée comme constante.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Étant donnée maintenant une maladie, une question fondamentale est de savoir si elle peut se propager dans la population, pour cela on va introduire une nouvelle notion qu'on appelle le taux de reproduction de base.

Définition :

On appelle taux de reproduction de base, noté R_0 le nombre moyen d'individus infectés produit par un seul infecté dans une population constituée initialement uniquement d'individus sains, autrement dit le nombre moyen de cas secondaires par cas primaires dans une population vierge.

L'intuition, et les mathématiques, montrent que lorsque R_0 est plus grand que 1, il y a apparition d'épidémie ; et tel n'est pas le cas lorsque R_0 est inférieur à 1 .

On peut donner une formule explicite de R_0 :

$$R_0 = C P \Delta T$$

avec

* C le nombre moyen de contacts.

* P la probabilité pour que le contact entre infectés et susceptibles conduit réellement à une transmission de la maladie.

* ΔT la période moyenne d'inféctiosité .

Ici CP représente le contact réussi.

L'un des avantages de mesurer la croissance dans la génération de base et que pour plusieurs modèles nous avons une expression explicite pour R_0 en fonction des paramètres . En effet en prenant en compte les hypothèses faites :

- Le contact réussi $CP = \beta N$.

- La période d'inféctiosité $\Delta T = \frac{1}{\alpha}$.

donc

$$R_0 = \beta N \frac{1}{\alpha}.$$

On a $CP = \beta N$ car le contact dans la population initiale se fait avec toute la population N puisque on l'a supposée saine (constituée uniquement de susceptibles) multipliée par le taux de transmission.

Pour la période d'inféctiosité on va utiliser une approche probabiliste pour prouver que $\Delta T = \frac{1}{\alpha}$. Pour cela on suppose que les infectés deviennent immédiatement contagieux (il n'y'a pas une période de latence) . Pour plus de détails voir [11]

On pose $P(t)$: la probabilité d'être toujours contagieux à l'instant t après l'infection. On a alors :

$$\begin{cases} P_I(t+h) - P_I(t) = -\alpha P_I(t)h \\ P_I(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dP_I(t)}{dt} = -\alpha P_I(t) \\ P_I(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_I(t) = e^{-\alpha t}.$$

Soit X la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$X(\omega)$: la durée de la période d'infectiosité de l'individu $\omega \in \Omega$

alors $P_I(t) = P_I(X(\omega) > t) = e^{-\alpha t}$

La fonction de répartition $F(t) = P_I(X(\omega) \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}$

La fonction de densité $F'(t) = f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ donc l'espérance est égale à

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\alpha}.$$

d'où la résultat.

2.3 Le modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection et interprétation

Dans cette section nous considérons le modèle structuré en âge d'infection suivant[12] :

$$\begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{dR}{dt} = \int_0^{\infty} (\nu_I(a) - r) i(t, a) da - \nu_r R(t), \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad R(0) \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L_+^1(0, +\infty). \end{cases} \quad (1)$$

Dans le modèle (1) la population est décomposée en trois classes ($S(t)$) des individus

susceptibles, $(i(t, a))$ des individus infectés et des individus réfractaire $(R(t))$. On désigne par $a \geq 0$ l'âge où l'infection commence, par conséquent $i(t, a)$ est la densité des individus infectés à l'instant t et qui ont l'âge d'infection a .

Si on donne deux valeurs $0 \leq a_1 < a_2 \leq +\infty$ alors le nombre des individus qui ont l'âge d'infection entre a_1 et a_2 et :

$$\int_{a_1}^{a_2} i(t, a) da.$$

On peut avoir plusieurs interprétations de l'âge d'infection . Par exemple un individu peut être exposé c-à-d infecté mais pas encore contagieux de $a = 0$ à $a = a_1$ et qu'il devient infectieux de $a = a_1$ à $a = a_2$.

Dans le modèle $\gamma > 0$ est un paramètre qui représente une contribution positive qui entre dans $S(t)$, et $\nu_s > 0$ le taux de mortalité des susceptibles. La fonction $\beta(a)$ peut être interprétée comme la probabilité d'être infectieux (capable de transmettre la maladie) avec l'âge d'infection $a \geq 0$, alors la quantité :

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) i(t, a) da.$$

représente le nombre d'individus contagieux . La fonction $\beta(a)$ décrit exactement la probabilité d'infectiosité pour la progression de la maladie d'un individu infecté.

On a aussi $\eta > 0$ le taux de transmission de l'infection d'un infecté à un susceptible, $\nu_I(a)$ est le taux de quitter les individus infectés et qui devient réfractaire , de ce fait on s'attend à un terme de la même forme dans l'équation des réfractaires moins r le taux de disparition par mortalité naturel des infectés. Finalement ν_r est le taux de mortalité des individus réfractaires .

En conséquence de ce qui précède on a la quantité :

$$I_{\nu_I}(a) = \exp\left(-\int_0^a \nu_I(l) dl\right)$$

qui représente exactement la probabilité d'être toujours infecté.

On a besoin de faire quelques suppositions pour que le problème soit bien posé :

- La fonction $a \longrightarrow \beta(a)$ est bornée et uniformément continue de $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.
- La fonction $a \longrightarrow \nu_I(a)$ appartient à $L_+^\infty(0, +\infty)$.

Remarque :

On peut remarquer que le modèle est une généralisation du modèle SIR . Pour le voir calculons le nombre total de tous les infectés à l'instant t en intégrant l'équation en $i(t, a)$ pour éliminer la variable a , cela revient à dire sommer tous les infectés à l'instant t .

Pour faciliter la notation ; on suppose que $\nu_I(a) = \nu_I$ et $\beta(a) = \beta$ donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} da + \int_0^{+\infty} \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} da = \int_0^{+\infty} -\nu_I(a) i(t, a) da$$

$$\text{alors } \int_0^{+\infty} \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} da - i(t, 0) = -\nu_I \int_0^{+\infty} i(t, a) da \quad \text{avec } i(t, +\infty) = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} i(t, a) da - i(t, 0) = -\nu_I \int_0^{+\infty} i(t, a) da$$

On pose $I(t) = \int_0^{+\infty} i(t, a) da$ (les infectés à l'instant t) . Ainsi :

$$I'(t) = -\nu_I I(t) + \eta S(t) \beta \int_0^{\infty} i(t, a) da.$$

A propos de l'équation des réfractaires elle vérifie ceci :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \int_0^{\infty} (\nu_I(a) - r) i(t, a) da - \nu_r R(t) \\ R(0) \geq 0 \end{cases}$$

D'où le modèle SIR déduit :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma - \nu_s S(t) - \eta \beta S(t) I(t) \\ \frac{dI}{dt} = -\nu_I I(t) + \eta \beta S(t) I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \int_0^{\infty} (\nu_I(a) - r) i(t, a) da - \nu_R R(t) \end{cases}$$

Revenons à notre modèle (1) :

$$\begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a) \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L_+^1(0, +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

Cherchons les points d'équilibre du modèle (1), donc la variation par rapport au temps est nulle : [12]

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma - \nu_s \bar{S} - \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) \bar{i}(a) da = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial \bar{i}(a)}{\partial a} = -\nu_I(a) \bar{i}(a) \quad (3) \\ \bar{i}(0) = \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) \bar{i}(a) da \end{array} \right.$$

$$(3) \Rightarrow \bar{i}(a) = \bar{i}(0) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} .$$

D'un autre coté

$$\bar{i}(0) = \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) \bar{i}(0) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} da \quad \text{donc} \quad \bar{i}(0) = \bar{i}(0) \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} da$$

$$\text{alors} \quad \bar{i}(0) \left(1 - \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} da \right) = 0$$

Donc

$$1- \text{ soit } \bar{i}(0) = 0 \Rightarrow \bar{i}(a) = 0$$

$$\bar{i}(a) = 0 \Rightarrow \bar{S} = \frac{\gamma}{\nu_s} \quad \text{donc} \quad (\bar{S}_F, \bar{i}_F(a)) = \left(\frac{\gamma}{\nu_s}, 0 \right) \quad \text{est un point d'équilibre.}$$

$$2- \text{ soit } \eta \bar{S} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} da = 1 \Leftrightarrow \bar{S}_E = \frac{\gamma}{R_0 \nu_s}$$

On aura le seul point d'équilibre endémique $(\bar{S}_E, \bar{i}_E(a))$.

Par l'intuition mathématique on pose

$$R_0 = \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(l) dl} da .$$

et on montre dans le chapitre 4 que lorsque R_0 est plus grand que 1, on aura une épidémie ; et l'extinction lorsque R_0 inférieur à 1.

Remarque :

On peut faire une simplification dans notre problème par $\gamma = \nu_s$ suivant le changement

de variable suivant $s(t) = \frac{\nu_s}{\gamma} S(t)$ alors :

$$\begin{aligned} s'(t) = \frac{\nu_s}{\gamma} S'(t) &\Rightarrow \frac{\gamma}{\nu_s} s'(t) = S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ &\Rightarrow s'(t) = \nu_s - \frac{\nu_s}{\gamma} \nu_s S(t) - \eta \frac{\nu_s}{\gamma} S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ &\Rightarrow s'(t) = \nu_s - \nu_s s(t) - \eta s(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions pour le modèle de Kermack-McKendrick structuré en âge d'infection

3.1 L'équation non linéaire de renouvellement

L'équation de renouvellement joue un rôle essentiel dans la modélisation en biologie et apparaît dans divers domaines : dynamiques de populations, la prolifération cellulaire, en épidémiologie et en l'écologie...

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle non linéaire structuré en âge qui se pose dans de nombreux contextes différents. Il peut être écrit comme une équation aux dérivées partielles sur la fonction inconnue $n(x, t) \geq 0$ qui représente la densité des individus d'âge x , au temps t (voir [1])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))n(t, x)dx, \\ n(0, x) = n_0(x) \geq 0 \\ S(t) = \int_0^\infty \psi(x)n(t, x)dx. \end{array} \right. \quad (\varepsilon_1)$$

On verra ultérieurement que, grâce à ce modèle général et avec un bon choix de B et

de d , on retrouve plusieurs autres modèles extraits de celui-là . Le modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection est un cas particulier. Finalement on démontre l'existence du problème général (ε_1) avec l'analyse classique de l'équation du transport . Regardons maintenant la relation entre le modèle (ε_1) et l'équation de renouvellement.

- Modèle de McKendrick-Foerster et l'équation de renouvellement :

Soit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t, a) + \frac{\partial}{\partial x}n(t, a) = -\mu(a) n(t, a) \\ n(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)n(t, a)da, \\ n(0, a) = \phi(a) \end{cases}$$

On resout l'équation le long des caractéristiques, fixons $t_0, a_0 > 0$ et posons $\bar{n}(h) = n(t_0 + h, a_0 + h)$. On aura :

$$\frac{d\bar{n}}{dh} = -\bar{\mu}(h) \bar{n} \text{ avec } \bar{\mu}(h) = \mu(a_0 + h),$$

d'où $\bar{n}(h) = e^{-\int_0^h \bar{\mu}(\sigma)d\sigma} \bar{n}(0)$

donc $n(t_0 + h, a_0 + h) = n(t_0, a_0)e^{-\int_0^h \mu(a_0 + \sigma)d\sigma}$,

Si $a > t$ alors $(t_0, a_0) = (0, a - t)$ et $h = t$.

Si $t > a$ alors $(t_0, a_0) = (t - a, 0)$ et $h = a$.

$$n(t, a) = \begin{cases} n(t - a, 0)e^{-\int_0^a \mu(\sigma)d\sigma} & \text{si } t > a, \\ \phi(a - t)e^{-\int_0^t \mu(a - t + \sigma)d\sigma} & \text{si } a > t. \end{cases}$$

Posons :

$$B(t) = \int_0^\infty \beta(a)n(t, a)da,$$

ainsi

$$B(t - a) = \int_0^\infty \beta(a)n(t - a, a)da = n(t - a, 0),$$

alors

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)n(t, a)da + \int_t^\infty \beta(a)n(t, a)da.$$

Nous en déduisons

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)n(t - a, 0)e^{-\int_0^a \mu(\sigma)d\sigma} da + \int_t^\infty \beta(a)\phi(a - t)e^{-\int_0^t \mu(a - t + \sigma)d\sigma} da,$$

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)B(t - a)e^{-\int_0^a \mu(\sigma)d\sigma} da + \int_t^\infty \beta(a)\phi(a - t)e^{-\int_0^t \mu(a - t + \sigma)d\sigma} da.$$

Alors $B(t)$ satisfait l'équation de renouvellement (équation intégrale de Volterra) :

$$B(t) = h(t) + \int_0^t B(a) G(t - a)da.$$

3.2 Existence des solutions du problème linéaire

Dans ce paragraphe on considère $S(t)$ une fonction localement bornée. Soit l'équation de renouvellement linéaire suivante [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))n(t, x)dx, \\ n(0, x) = n_0(x) \geq 0. \end{cases} \quad (\varepsilon_2)$$

On définit tout d'abord la solution faible comme suit :

Définition 3.2.1

Une fonction $n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ satisfait l'équation de renouvellement linéaire (ε_2) au sens faible si $\int_0^\infty B(t, x) |n(t, x)| dx \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $T > 0$, pour toute fonction test $\psi \in C^1_c([0, T] \times [0, \infty))$ sachant que $\psi(T, x) \equiv 0$, on a :

$$-\int_0^T \int_0^\infty n(t,x) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(t,x) - d(x,S(t))\psi(t,x) \right\} dx dt = \int_0^\infty n_0(x)\psi(0,x)dx + \int_0^T \psi(t,0) \int_0^\infty B(x,S(t))n(t,x)dx dt.$$

Nous allons énoncer un théorème qui sera utile par la suite :

Théorème 3.2.1 (Dérivation d'un produit de composition [3])

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n et $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $\forall s \in \mathbb{R} |G'(s)| \leq M$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$(G \circ u) \in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Théorème 3.2.2

Soit $M > 0$ tel que $B(.,.), d(.,.) < M$, $S(t) \geq 0$, $S(t) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $n_0 \in L^\infty(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$. Alors il existe une solution unique et faible $n \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (ε_2) , et en plus $n(t,x) \geq 0$ quand $n_0 \geq 0$, et

$$\int_0^\infty |n(t,x)| dx \leq e^{\|(B-d)_+\|_\infty t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx.$$

Preuve :

Cherchons la solution dans l'espace :

$$E = C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+)) \quad \forall T > 0,$$

$u \in E$ implique que u continue par rapport au temps et $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, avec la norme définie comme suit :

$$\|u\|_E = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t,x) + d(x,S(t))n(t,x) = 0, & t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ n(t,0) = \int_0^\infty B(x,S(t))m(t,x)dx, & (\varepsilon_3) \\ n(0,x) = n_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

On définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow E \\ m &\longmapsto n \end{aligned}$$

où n est la solution du problème (ε_3) .

Il est facile d'observer que A est un opérateur linéaire. Montrons qu'il est aussi contractant, c-à-d :

$$\| A(m_1 - m_2) \|_E \leq K \| m_1 - m_2 \|_E \quad \forall m_1, m_2 \in E \text{ avec } 0 < K < 1,$$

ou bien

$$\| n_1 - n_2 \|_E \leq K \| m_1 - m_2 \|_E \quad \forall m_1, m_2 \in E \text{ avec } 0 < K < 1,$$

avec n_1, n_2 les solutions associées à m_1 et m_2 respectivement.

Posons $n = n_1 - n_2$ et $m = m_1 - m_2$.

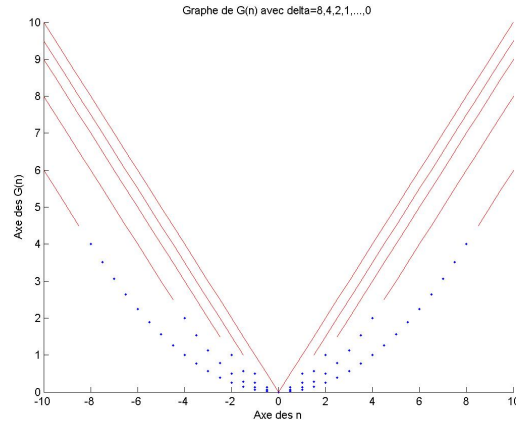
On soustrait les problèmes en n_1 et n_2 associées à m_1 et m_2 respectivement. On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))m(t, x)dx, & (\varepsilon_{3.1}) \\ n(0, x) = 0. \end{cases}$$

A présent, on veut faire apparaître la norme dans l'équation précédente. Pour cela on va multiplier par une fonction $G'_\delta(n)$ et on intègre l'équation, de tel sorte que $G_\delta(n)$ tende vers $|n|$ dans $L^1(\mathbb{R}^+)$.

On définit $G_\delta(n)$ comme suit :

$$G_\delta(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2\delta} & \text{si } |n| \leq \delta \\ |n| - \frac{\delta}{2} & \text{si } |n| > \delta \end{cases}$$



On a $G_\delta(n) \leq M|n|$, elle est sous linéaire. De plus $G_\delta(n) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} |n|$ p.p et dans $L^1(\mathbb{R}^+)$.

On multiplie $(\varepsilon_{3.1})$ fois $G'_\delta(n)$ donc :

$$\frac{\partial G_\delta(n)}{\partial t} + \frac{\partial G_\delta(n)}{\partial x} + d(x, S(t))G'_\delta(n)n = 0,$$

$$\frac{\partial G_\delta(n)}{\partial t} + \frac{\partial G_\delta(n)}{\partial x} + d(x, S(t))(G'_\delta(n)n - G_\delta(n)) + d(x, S(t))G_\delta(n) = 0.$$

$$\text{On a } G'_\delta(n) = \begin{cases} \frac{n}{\delta} & \text{si } |n| \leq \delta \\ 1 & \text{si } n > \delta \\ -1 & \text{si } n < -\delta \end{cases}$$

$$\text{et } (G'_\delta(n)n - G_\delta(n)) = \begin{cases} \frac{n^2}{\delta} - \frac{n^2}{2\delta} & \text{si } |n| \leq \delta \\ n - (n - \frac{\delta}{2}) & \text{si } n > \delta \\ -n - (-n - \frac{\delta}{2}) & \text{si } n < -\delta \end{cases}$$

On remarque que : $(G'_\delta(n)n - G_\delta(n)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Donc après le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$, on voit que $|n|$ vérifie le problème au sens de distribution :

$$\begin{cases} |n|_t + |n|_x + d(x, S(t))|n| = 0, \\ |n(t, 0)| = \left| \int_0^\infty B(x, S(t))m(t, x)dx \right|, \\ n(0, x) = 0 \geq 0. \end{cases} \quad (\varepsilon_{3.2})$$

En intégrant l'équation $(\varepsilon_{3.2})$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty |n(t, x)|dx - |n(t, 0)| + \int_0^\infty d(x, S(t))|n(t, x)|dx &= 0, \\ \int_0^\infty |n(t, x)|dx &\leq \int_0^t |n(s, 0)|ds, \\ &\leq \int_0^t \left| \int_0^\infty B(x, S(t))m(s, x)dx \right| ds, \\ &\leq MT \|m\|_E, \\ \|n\|_E &\leq MT \|m\|_E. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir T petit, de telle sorte que $MT < 1$ et par suite l'opérateur A est contractant. Le théorème du point fixe de Banach assure l'existence d'un point fixe unique c-à-d $An = n$, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle $[0, T]$ du problème (ε_2) .

On applique à chaque fois la même procédure entre $[kT, (k+1)T]$ et on change la condition initiale $n(0, x) = n(kT, x)$. A la fin on recolle toutes les solutions obtenues sur chaque intervalle et on aura une solution globale $n > 0$ pour chaque $m > 0$, d'où la résultat du théorème. \square

Maintenant on démontre l'estimation :

$$\int_0^\infty |n(t, x)| dx \leq e^{\|(B-d)+\|_\infty t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx.$$

En intégrant l'équation $(\varepsilon_{3.1})$:

$$\frac{\partial}{\partial t}|n(t, x)| + \frac{\partial}{\partial x}|n(t, x)| + d(x, S(t))|n(t, x)| = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^\infty |n(t, x)| dx - |n(t, 0)| &= - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx \\
 &\leq |n(x, 0)| - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx, \\
 &\leq \int_0^\infty B(x, S(t)) |n(t, x)| dx - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx, \\
 &\leq \int_0^\infty [B(x, S(t)) - d(x, S(t))] |n(t, x)| dx, \\
 &\leq \Lambda \int_0^\infty |n(t, x)| dx \quad \text{avec } \Lambda = \| (B - d)_+ \|_\infty,
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_0^\infty |n(t, x)| dx \leq e^{\Lambda t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx \quad \square.$$

3.3 Existence des solutions du problème non linéaire

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions du problème (voir [1]) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t)) n(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0 \\
 n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t)) n(t, x) dx, \\
 n(0, x) = n_0(x) \geq 0, \\
 S(t) = \int_0^\infty \psi(x) n(t, x) dx.
 \end{array} \right. \quad (\varepsilon_1)$$

On suppose l'existence d'un réel L tel que pour tout $x, S_1, S_2 \geq 0$ on a :

$$|B(x, S_1) - B(x, S_2)| \leq L |S_1 - S_2|, \quad |d(x, S_1) - d(x, S_2)| \leq L |S_1 - S_2|.$$

On peut prouver qu'il existe $m, M > 0$ tels que $m \leq S(t) \leq M$.

Théorème 3.3.1

Soit $M > 0$ tel que $B(.,.), d(.,.), \psi(.) < M$, $n_0 \in L^\infty(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$ alors il existe une solution faible unique $n \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (ε_1) .

Preuve :

Pour prouver ce résultat on utilise la même procédure que précédemment. Soit

$$E = C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+)) \quad T > 0,$$

avec la norme définie comme suit :

$$\|u\|_E = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.$$

On définit aussi E_+ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ non négatives et on pose $\Lambda = \|(B - d)_+\|_\infty$.

D'après le théorème (3.2.1) et pour $S \in C([0, T])$ on a $n \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+))$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))n(t, x)dx, \\ n(0, x) = n_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

On définit maintenant l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : E_+ &\longrightarrow E_+ \\ S(t) &\longmapsto \int_0^\infty \psi(x)n(t, x)dx \end{aligned}$$

Pour prouver le théorème (3.3.1), il est suffisant de montrer que A est contractant .

Cela revient à dire que l'opérateur admet un point fixe alors :

$$S(t) = \int_0^\infty \psi(x)n(t, x)dx.$$

Soit $n_1(t, x), n_2(t, x)$ deux solutions correspondant à $S_1(t)$ et $S_2(t)$ alors $n := n_1 - n_2$

satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}n(t, x) + d(x, S_1(t))n(t, x) + [d(x, S_1(t)) - d(x, S_2(t))]n_2 = 0, \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S_1(t))n(t, x) + [B(x, S_1(t)) - B(x, S_2(t))]n_2 dx, \\ n_1(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

De là, $|n(t, x)|$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}|n| + \frac{\partial}{\partial x}|n| + d(x, S_1(t))|n| \leq |d(x, S_1(t)) - d(x, S_2(t))|n_2, \\ |n(t, 0)| \leq \int_0^\infty B(x, S_1(t))n(t, x) + |B(x, S_1(t)) - B(x, S_2(t))|n_2 dx, \\ n_1(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

En intégrant par rapport à l'âge , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty |n(t, x)|dx &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}|n|dx, \\ &\leq \int_0^\infty -\frac{d}{dx}|n| - d(x, S_1(t))|n| + |d(x, S_1(t)) - d(x, S_2(t))|n_2 dx, \\ &\leq |n(t, 0)| - \int_0^\infty d(x, S_1(t))|n|dx + L|S_1(t) - S_2(t)| \int_0^\infty n_2(t, x) dx, \\ &\leq \int_0^\infty B(x, S_1(t))n(t, x) + |B(x, S_1(t)) - B(x, S_2(t))|n_2 dx \\ &\quad - \int_0^\infty d(x, S_1(t))|n|dx + L|S_1(t) - S_2(t)| \int_0^\infty n_2(t, x) dx, \\ &\leq \Lambda \int_0^\infty |n(t, x)|dx + 2L|S_1(t) - S_2(t)| \int_0^\infty n_2(t, x) dx, \\ &\leq \Lambda \int_0^\infty |n(t, x)|dx + 2L(\sup_{t \in [0, T]} |S_1(t) - S_2(t)|)|n_0|_{L^1} e^{\Lambda t}, \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on a :

$$\int_0^\infty |n(t, x)| dx \leq 2Lt |n_0|_{L^1} e^{\Lambda t} (\sup_{t \in [0, T]} |S_1(t) - S_2(t)|),$$

ainsi

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^\infty |n(t, x)| dx \leq 2LT |n_0|_{L^1} e^{\Lambda T} (\sup_{t \in [0, T]} |S_1(t) - S_2(t)|).$$

Finalement, on déduit que :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |AS_1 - AS_2| &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^\infty \psi(x) (n_1(t, x) - n_2(t, x)) dx \right|, \\ &\leq M \sup_{t \in [0, T]} \int_0^\infty |n(t, x)| dx, \\ &\leq 2MLT |n_0|_{L^1} e^{\Lambda T} (\sup_{t \in [0, T]} |S_1(t) - S_2(t)|). \end{aligned}$$

On choisit T petit de telle sorte que A soit contractant, d'où l'existence et unicité de la solution du problème (ε_1) .

Remarque :

Essayons maintenant de faire une extension du problème (ε_1) à notre problème :

$$(1) \quad \begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L^1_+(0, +\infty). \end{cases}$$

On résout l'équation des susceptibles explicitement :

$$S'(t) + \nu_s S(t) + \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da = \gamma;$$

Par un simple calcul,

$$S(t) = \left(S_0 + \frac{\gamma}{\nu_s + \eta \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da} \right) e^{-\nu_s t} e^{-\eta \int_0^t \int_0^\infty \beta(a) i(s, a) da ds}.$$

Soit $S(t) = \Gamma(I(t))$ avec $I(t) = \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da,$

et

$$\Gamma(I(t)) = (S_0 + \frac{\gamma}{\nu_s + \eta} \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da - 1) e^{-\nu_s - \eta \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da}.$$

Donc $S(t)$ est une fonction de $I(t)$ et le problème (1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a)i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da, \\ = \eta \Gamma(I(t)) \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da, \\ = \int_0^\infty \eta \Gamma(I(t)) \beta(a)i(t, a)da, \\ = \int_0^\infty B(a, I(t))i(t, a)da \quad \text{avec } B(a, I(t)) = \eta \Gamma(I(t)) \beta(a). \end{array} \right.$$

Chapitre 4

Comportement asymptotique des solutions

4.1 La stabilité du point d'équilibre trivial

Soit le système suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L^1_+(0, +\infty). \end{cases}$$

On considère maintenant l'extinction de la maladie dans le cas de $R_0 \leq 1$.

$$\text{Posons} \quad R_0 = \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(\sigma) d\sigma} da.$$

Soit le nombre de tous les infectés à l'instant t défini comme suit :

$$I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da.$$

$$\text{On suppose} \quad \beta \in L^\infty(\mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad S(0) + I(0) \leq \frac{\gamma}{\nu_s}, \quad (1.1)$$

$$\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \nu_I(\sigma) d\sigma} da \leq 1. \quad (1.2)$$

Pour simplifier l'équation des susceptibles, on utilise le changement de variable vu en

page 22 pour obtenir : $\nu_{I(a)} = \nu_I = \nu_s$.

On peut choisir $r < \nu_I$ sachant que $\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^\infty \beta(a) e^{-ra} da = 1$.

On pose $f(r) = \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^\infty \beta(a) e^{-ra} da - 1$. alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = -1.$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} f(r) = +\infty \quad \text{donc} \quad \exists r \setminus f(r) = 0.$$

Pour prouver l'extinction de l'infection on introduit le problème suivant :

$$\begin{cases} \phi'(x) - r\phi(x) = -\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \beta(x), \\ \phi(0) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

dont la solution positive est facile à trouver .

Soit le théorème suivant :

Théorème 4.1.1

On suppose que les hypothèses (1.1) , (1.2) sont vérifiées. Alors la solution $i(t,a)$ du problème vérifie :

$$\int_0^\infty i(t,a) \phi(a) da \leq A e^{-ct},$$

avec A, c des constantes positives .

Preuve :

On résout le problème (2) en $\phi(a)$

$$\phi'(a) - r\phi(a) = -\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \beta(a) \Rightarrow (e^{-ra} \phi(a))' = -\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \beta(a) e^{-ra},$$

$$\Rightarrow e^{-ra} \phi(a) - \phi(0) = -\eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^a \beta(a') e^{-ra'} da',$$

$$\Rightarrow \phi(a) = e^{ra} (1 - \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \int_0^a \beta(a') e^{-ra'} da').$$

Multiplions le problème par ϕ et intégrons. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da &= -\nu_I \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da - \int_0^\infty i_a(t, a) \phi(a) da, \\
&= -\nu_I \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da + \int_0^\infty i(t, a) \phi_a(a) da - [i(t, a) \phi(a)]_0^\infty, \\
&= -\nu_I \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da + \int_0^\infty i(t, a) (r \phi(a) - \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \beta(a)) da + i(t, 0) \phi(0), \\
&= -\nu_I \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da + r \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da - \int_0^\infty i(t, a) \eta \frac{\gamma}{\nu_s} \beta(a) da, \\
&\quad + \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da,
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da = -(\nu_I - r) \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da + (\eta S(t) - \eta \frac{\gamma}{\nu_s}) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da. \quad (3)$$

On a aussi $i_t(t, a) + i_a(t, a) + \nu_I i(t, a) = 0$.

$$\text{Intégrons} \quad I'(t) + \nu_I I(t) = i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da.$$

On fait la somme de cette équation et l'équation en $S(t)$, d'où

$$(I(t) + S(t))' + \nu_I (I(t) + S(t)) = \gamma,$$

La solution est :

$$I(t) + S(t) = (S(0) + I(0) - \frac{\gamma}{\nu_I}) e^{-\nu_I t} + \frac{\gamma}{\nu_I}.$$

Si $S(0) + I(0) \leq \frac{\gamma}{\nu_I}$ on a $S(t) \leq \frac{\gamma}{\nu_I}$.

Alors d'après (3) on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da \leq -(\nu_I - r) \int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da.$$

Par le Lemme de Gronwall on a :

$$\int_0^\infty i(t, a) \phi(a) da \leq A e^{-ct}.$$

D'où la résultat.

4.2 Fonction de Lyapunov et stabilité asymptotique globale du point d'équilibre endémique

Dans ce paragraphe on montre comment trouver la fonction de Lyapunov pour montrer la stabilité globale du point d'équilibre endémique quand il existe . On suppose donc :

$$R_0 > 1$$

Soit le système :

$$(1) \quad \begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = i_0 \in L_+^1(0, +\infty). \end{cases}$$

Quand $R_0 > 1$ le comportement est plus délicat à étudier par rapport au cas trivial; on considère :

$$\bar{a} = \sup\{a \geq 0 : \beta(a) > 0\}.$$

On définit :

$$\widehat{M}_0 = \{i \in L_+^1(0, +\infty) : \int_0^{\bar{a}} i(a) da > 0\}.$$

Soit

$$M_0 := [0, +\infty) \times \widehat{M}_0,$$

et

$$\partial M_0 := [0, +\infty) \times L_+^1(0, +\infty) \setminus M_0.$$

Soit le résultat suivant[12] :

Théorème 4.2.1

Supposons que $R_0 > 1$. Alors chaque solution du système (1) avec une condition initiale dans ∂M_0 (respectivement dans M_0) reste dans ∂M_0 (respectivement dans M_0). De plus, chaque solution avec une condition initiale dans ∂M_0 converge vers $(\bar{S}_E, 0)$ et chaque solution avec une condition initiale dans M_0 converge vers l'équilibre endémique (\bar{S}_E, \bar{I}_E) . En outre, (\bar{S}_E, \bar{I}_E) est localement asymptotiquement stable.

Preuve : On se propose de ne donner que la convergence vers l'équilibre endémique.

Pour simplifier l'équation en susceptibles et par un changement de variables on retrouve :

$$\gamma = \nu_s = \nu_I(a) = K.$$

On fait un changement de variable pour simplifier l'équation du transport des infectés :

$$I(t, a) = i(t, a)e^{Ka}.$$

On remarque que $I(t, 0) = i(t, 0)$.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = K - KS(t) - I(t, 0), \\ \frac{\partial I(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial I(t, a)}{\partial a} = 0, \\ I(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka} I(t, a) da. \end{cases}$$

Soit maintenant le problème stationnaire :

$$\begin{cases} K = K\bar{S} + \bar{I}(0), \\ \bar{I}(a) = \bar{I}(0) = \eta\bar{S} \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka}\bar{I}(a) da. \end{cases}$$

Donc $\eta\bar{S} \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka} da = 1$ où $\bar{I}(0) \neq 0$ par hypothèse .

On calcule maintenant la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right) &= g'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right)\frac{1}{\bar{S}}[K - KS(t) - I(t, 0)], \\ &= g'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right)\frac{1}{\bar{S}}[K\bar{S} + \bar{I}(0) - KS(t) - I(t, 0)], \\ &= Kg'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right) + \frac{\bar{I}(0)}{\bar{S}}g'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right) - K\frac{S(t)}{\bar{S}}g'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right) - g'\left(\frac{S(t)}{\bar{S}}\right)\frac{\bar{I}(t, 0)}{\bar{S}}. \end{aligned}$$

D'autre part en dérivant :

$$\int_0^\infty g\left(\frac{I(t, a)}{\bar{I}(a)}\right)\phi(a) da \quad \text{on obtient :}$$

$$I_1 = \frac{d}{dt} \int_0^\infty g\left(\frac{I(t, a)}{\bar{I}(a)}\right) \frac{1}{\bar{I}(a)} \left(-\frac{\partial I}{\partial a}\right) \phi(a) da;$$

Etant donné que $\frac{\partial}{\partial a}(\frac{I}{\bar{I}}) = \frac{1}{\bar{I}}\frac{\partial I}{\partial a} - \frac{\bar{I}'(a)}{\bar{I}^2}I(t, a) = \frac{1}{\bar{I}}\frac{\partial I}{\partial a}$ (puisque $\frac{\partial \bar{I}}{\partial a} = 0$)

Donc

$$I_1 = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} g(\frac{I}{\bar{I}}) \phi(a) da .$$

Maintenant en intégrant par parties on obtient :

$$I_1 = g(\frac{I(t,0)}{\bar{I}(0)})\phi(0) + \int_0^\infty g(\frac{I(t,a)}{\bar{I}(a)})\phi'(a)da.$$

Rappelons que

$$I_2 = \frac{d}{dt}g(\frac{S(t)}{\bar{S}}) = g'(\frac{S(t)}{\bar{S}})\frac{1}{\bar{S}}[K - KS(t) - I(t,0)].$$

Introduisons une fonction h telle que :

h convexe .

$$h(x.y) \leq h(x) + h(y) .$$

$$g(x) = h(x) + x - 1.$$

et supposons que $\phi'(a) = -\eta\bar{S}\beta(a)e^{-Ka}\phi(0)$.

On a

$$I_1 = g(\frac{I(t,0)}{\bar{I}(0)})\phi(0) + \int_0^\infty g(\frac{I(t,a)}{\bar{I}(a)})\phi'(a)da,$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq h(\frac{I(t,0)}{\bar{I}})\phi(0) + \frac{I(t,0)}{\bar{I}}\phi(0) - \phi(0) + \int_0^\infty h(\frac{I(t,a)}{\bar{I}})\phi'(a)da + \int_0^\infty \frac{I(t,a)}{\bar{I}}\phi'(a)da + \int_0^\infty -\phi'(a)da, \\ &= h(\frac{\bar{S}}{\bar{S}}\eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka}\frac{I(t,0)}{\bar{I}}da)\phi(0) + \int_0^\infty h(\frac{I(t,a)}{\bar{I}})[- \eta\bar{S}\beta(a)e^{-Ka}\phi(0)]da + \frac{I(t,0)}{\bar{I}}\phi(0) - \end{aligned}$$

$$\phi(0)\eta\bar{S} \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka}\frac{I(t,a)}{\bar{I}}da.$$

Par l'Inégalité de Jensen et par les hypothèses émises :

$$I_1 \leq h(\frac{S(t)}{\bar{S}})\phi(0) + \frac{I(t,0)}{\bar{I}}\phi(0) - \frac{\bar{S}}{S(t)}\frac{I(t,0)}{\bar{I}}\phi(0),$$

$$I_1 \leq h(\frac{S(t)}{\bar{S}})\phi(0) + (1 - \frac{\bar{S}}{S(t)})\frac{I(t,0)}{\bar{I}}\phi(0).$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 I_2 &= g'(\frac{S(t)}{\bar{S}})^{\frac{1}{\bar{S}}}[k\bar{S} + \bar{I}(0) - KS(t) - I(t, 0)], \\
 &= (h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + 1)[k + \frac{\bar{I}(0)}{\bar{S}} - K\frac{S(t)}{\bar{S}} - \frac{I(t,0)}{\bar{S}}], \\
 &= (h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + 1)[k + \frac{\bar{I}(0)}{\bar{S}} - K\frac{S(t)}{\bar{S}}] - \frac{I(t,0)}{\bar{S}} - h'(\frac{S(t)}{\bar{S}})^{\frac{1}{\bar{S}}}I(t, 0).
 \end{aligned}$$

Si $\frac{\phi(0)}{\bar{I}} = \frac{1}{\bar{S}}$ on a $\phi(0) = \frac{\bar{I}(0)}{\bar{S}}$,

alors $I_1 + I_2 \leq h(\frac{S(t)}{\bar{S}})\phi(0) - (\frac{1}{S(t)} + \frac{1}{\bar{S}}h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}))I(t, 0) + (h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + 1)[K + \phi(0) - K\frac{S(t)}{\bar{S}}]$.

Si $h'(\frac{S(t)}{\bar{S}})^{\frac{1}{\bar{S}}} + \frac{1}{S(t)} = 0$ alors $h'(x) = -\frac{1}{x}$ avec $x = \frac{S(t)}{\bar{S}}$,

alors $h(x) = -\ln x$

$$I_1 + I_2 \leq h'(\frac{S(t)}{\bar{S}})K(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}}) + (h(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + 1)\phi(0) + K(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}}),$$

$$I_1 + I_2 \leq k[h(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + h'(\frac{S(t)}{\bar{S}})(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}})] - K[h(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + \frac{S(t)}{\bar{S}} - 1] + \phi(0)[h(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + h'(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + 1],$$

$$\text{On a } h(\frac{S(t)}{\bar{S}}) + h'(\frac{S(t)}{\bar{S}})(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}}) = -\ln \frac{S(t)}{\bar{S}} - \frac{1}{\frac{S(t)}{\bar{S}}} + 1.$$

D'autre part :

$$h(x) + x - 1 = -\ln x + x - 1 \geq 0 \quad \text{si } x \in (0, \infty).$$

$$h(x) + h'(x) + 1 = -\ln x - \frac{1}{x} + 1 \leq 0 \quad \text{si } x \in (0, \infty).$$

$$\text{donc } I_1 + I_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[\int_0^\infty g(\frac{I(t, a)}{\bar{I}})\phi(a)da + g(\frac{S(t)}{\bar{S}})] \leq 0.$$

$$V(S, I) = \int_0^\infty g(\frac{I(t, a)}{\bar{I}})\phi(a)da + g(\frac{S(t)}{\bar{S}}),$$

$$\text{avec } g(x) = x - \ln x - 1.$$

On remarque que $V(S, I)$ est bien une fonction de Lyapunov avec $\frac{d}{dt}V(S, I) \leq 0$.

Traitons le cas $\frac{d}{dt}V(S, I) = 0$ et utilisant le Théorème de Lasalle pour obtenir la stabilité asymptotique de (\bar{S}, \bar{I}) .

$$\frac{d}{dt}V(S, I) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[\int_0^\infty g(\frac{I(t, a)}{\bar{I}})\phi(a)da + g(\frac{S(t)}{\bar{S}})] = 0,$$

donne

$$\begin{cases} h(x) = -h'(x)(1-x), & (1) \\ h(x) = 1-x, & (2) \\ h(x) + h'(x) = -1, & (3) \end{cases}$$

De (2) et (3) on a $x = 1$ et (1) est vérifié,

alors $S(t) = \bar{S}$ et $I(t, 0) = K - KS(t) = K - K\bar{S} = \bar{I}(0)$.

On a $I(t, 0) = \bar{I}(0)$ alors $\eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka}I(t, a)da = \eta\bar{S} \int_0^\infty \beta(a)e^{-Ka}\bar{I}(a)da,$

ce qui donne $I(t, a) = \bar{I}$.

Ainsi

$$\Omega = \{(S(t), I(t, a)) \mid \dot{V} = 0\} = \{(\bar{S}, \bar{I})\}.$$

D'après le théorème de Lyapunov et le théorème de Lasalle, on conclut que (\bar{S}, \bar{I}) est globalement attractif.

4.3 Analyse numérique et exemples

Soit notre problème (1) :

$$\begin{cases} S'(t) = \gamma - \nu_s S(t) - \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)I(t, a)da, \\ \frac{\partial I(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial I(t, a)}{\partial a} = -\nu_I(a)I(t, a), \\ I(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a)I(t, a)da, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \quad i(0, \cdot) = I_0 \in L^1_+(0, +\infty). \end{cases} \quad (1)$$

On propose dans ce paragraphe une approximation numérique de notre problème (1). Pour calculer une solution approchée on se donne une discrétisation en temps et en âge d'infection. Cette dernière consiste à donner un ensemble de point $(t_n)_{n=0\dots N}$ de $[0, T]$ et un ensemble de point $(a_i)_{i=0\dots M}$ de $[0, A]$ avec A tres grand. Pour simplifier on considère un pas constant $k = \frac{T}{N}$ et $h = \frac{A}{M}$

On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0 \dots N$ et $a_i = ih$ pour $i = 0 \dots M$.

On veut chercher une solution approchée de notre problème, plus précisément on cherche à déterminer :

$$\begin{aligned} S(t_n) &\simeq S_n \quad n = 0 \dots N, \\ I(t_n, a_i) &\simeq I_i^n \quad n = 0 \dots N \quad i = 0 \dots M. \end{aligned}$$

Posons $f(t_n, S_n) = \gamma - \nu_s S_n - I_0^n$ avec $I_0^n \simeq I(t, 0) = \eta S(t) \int_0^\infty \beta(a) I(t, a) da$.

Ces inconnus discret d'une discrétisation par la méthode d'Euler explicite en temps et schéma de transport en âge de I_i^n et par la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre de S_n vérifient le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{I_i^{n+1} - I_i^n}{k} + \frac{I_i^n - I_{i-1}^n}{h} = -\nu_I(a_i) I_i^n, \\ \text{donc } I_i^{n+1} = -k\nu_I(a_i) I_i^n - \frac{k}{h}(I_i^n - I_{i-1}^n) + I_i^n, \quad (2) \\ i = 1 \dots M, \quad n = 0 \dots N - 1, \\ I_0^n = \eta S_n \sum_{i=1}^M \beta(a_i) I_i^n h, \quad n = 1 \dots N, \\ K_1 = f(t_n, S_n), \\ K_2 = f(t_n + \frac{k}{2}, S_n + \frac{k}{2} K_1), \\ K_3 = f(t_n + \frac{k}{2}, S_n + \frac{k}{2} K_2), \\ K_4 = f(t_n + k, S_n + k K_3), \\ S_{n+1} = S_n + \frac{k}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad n = 0 \dots N - 1, \\ S_0, I_i^0, \quad i = 0 \dots M, \end{array} \right.$$

Proposition 4.3.1

Le schéma (2) est consistant d'ordre 1, en plus il est stable sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) $k \leq h$ (voir [15]).

Exemples :

1- Dans notre exemple on va donner des valeurs pour les paramètres de telle sorte que $R_0 < 1$. Prenons : $\gamma = 365$, $\eta = 0.00015$, $\beta(a) = 0.1$, $\nu_I = 0.1$, $\nu_s = 0.1$.

Alors $R_0 = 0.5475$, on est dans le cas où les susceptibles convergent vers $S_F = \frac{\gamma}{\nu_s} = 3650$ (Figure 4.1). Prenons $i(0, a) = 50(a+2)e^{-0.4(a+2)}$ et deux conditions initiales $S(0) = 1000$ et $S(0) = 9000$.

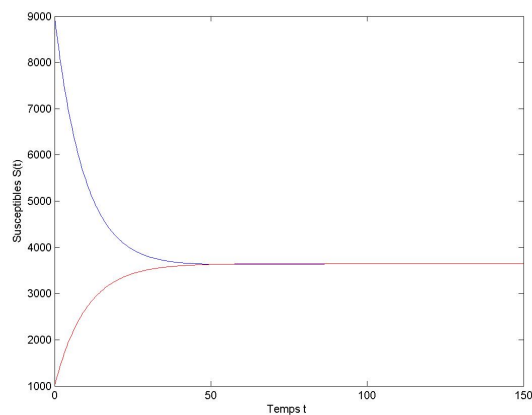


FIG. 4.1 – Les susceptibles pour $R_0 < 1$

Puisque $R_0 \leq 1$ on aura l'extinction des infectés , on trace la somme de tous les infectés d'âge a (Figure 4.2) .

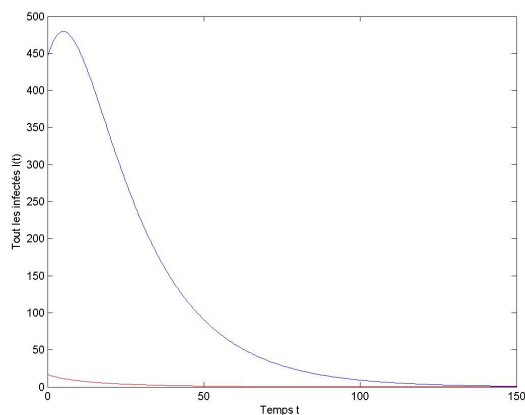


FIG. 4.2 – Tout les infectés pour $R_0 < 1$

2- Soit Maintenant $\gamma = 365$, $\eta = 0.0015$, $\beta(a) = 0.1$, $\nu_I = 0.1$, $\nu_s = 0.1$. On est dans le cas endémique avec $R_0 = 5.475 > 1$

Alors les susceptibles tendent vers $S_E = \frac{\gamma}{R_0\nu_s} = 666$ (Figure 4.3)

Prenons $i(0, a) = 50(a + 2)e^{-0.4(a+2)}$ et $S(0) = 2000$.

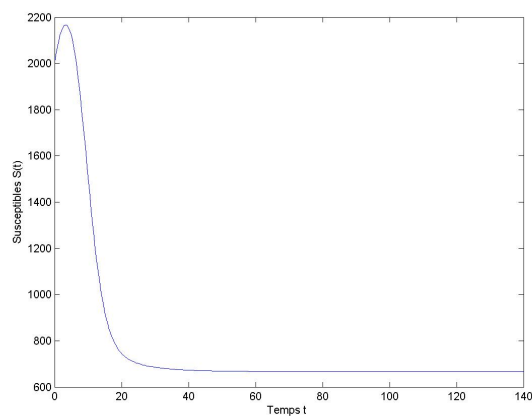


FIG. 4.3 – Les susceptibles pour $R_0 > 1$

Dans ce cas les infectés convergent vers $i(a) = 298 e^{-a}$. La (figure 4.4) représente tous les infectés qui ont l'âge $a = 0$. On voit que $i(a) = 298$.

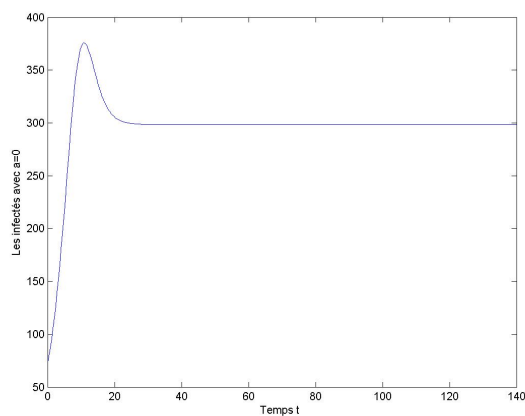


FIG. 4.4 – Les infectés d'âge zero pour $R_0 > 1$

De même on a représenté les infectés à l'instant t qui ont l'âge d'infection a dans la figure 4.5 :

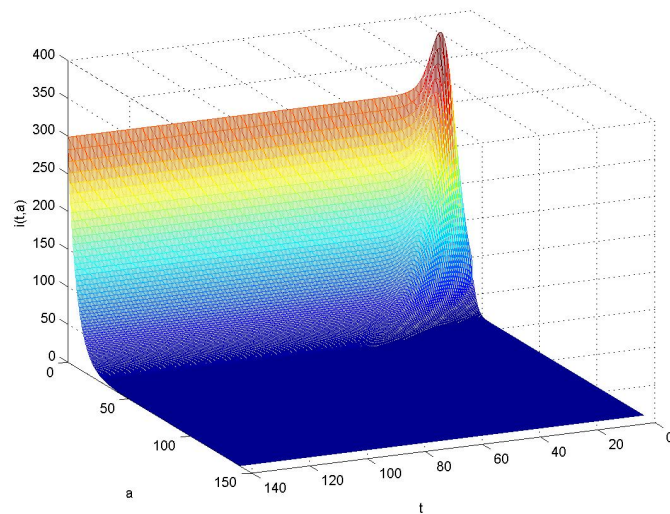


FIG. 4.5 – Les infectés à l'instant t d'âge a pour $R_0 > 1$

Remarque : Toute les simulations numériques de ce mémoire ont été effectuées sous C++ et Matlab.

Conclusion :

Dans ce mémoire on a étudié un modèle épidémiologique structuré en âge de l'infection, on a démontré que le problème est bien posé , il avait l'objectif de démontrer la stabilité globale asymptotique des équilibres c'est la partie essentielle de ce travail. Après cela on a donné des exemples numériques pour valider les résultats théoriques obtenus.

L'épidémiologie théorique des maladies transmissibles est devenue une discipline à part entière, distincte de la démographie théorique et de l'écologie mathématique et offre un terrain d'application immense pour les mathématiques et les statistiques.

Au-delà des résultats théoriques, cette discipline vise à fournir des bases quantitatives pour la réflexion de santé publique autour des maladies infectieuses. Dans cette direction, on notera que l'utilisation des modèles plus vraisemblables (et plus complexes mathématiquement) serait cependant souhaitable . Dans le futur, on prévoit d'étudier des modèles plus généraux et avec une meilleure précision.

Bibliographie

- [1] B.PERTHAME, S.K. TUMULURI, Nonlinear renewal equations. Selected topic in Cancer modeling, Model. Simul. sci. Eng. Technol. Berkhauser, Boston, M A, 65-96, 2008.
- [2] F. BRAUER AND C. CASTILLO-CHAVEZ, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer, New York, 2000.
- [3] H.BREZIS, Analyse Fonctionnelle théorie et applications, 1987, Masson .
- [4] H.R. THIEME AND C. CASTILLO-CHAVEZ, How may infection-age-dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS ? SIAM. J. Appl. Math. 53 (1993), pp. 1447-1479. ,
- [5] H. REINHARD, Equation différentielles Fondement et applications, 1982, BORDAS.
- [6] H.R. THIEME, Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators, Differential Integral Equations 3 (1990), pp. 1035-1066.
- [7] H.R. THIEME, Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. ,
- [8] H.R. THIEME AND C. CASTILLO-CHAVEZ, On the role of variable infectivity in the dynamics of the human immunodeficiency virus epidemic, in Mathematical and Statistical Approaches to AIDS Epidemiology, C. Castillo-Chavez, ed., Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 83, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989, 157-176.
- [9] J.D. MURRAY, Mathematical Biology : I. An Introduction. Third Edition, 2001, Springer
- [10] J-P. DEMAILLY, Analyse numérique et équations différentielles ; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996),

-
- [11] O. DIEKMANN AND J.A.P. HEESTERBEEK, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, Chichester, UK, 2000.
- [12] P.MAGAL, C.C. MCCLUSKEY, G.F. WEBB, G. F.(2010), Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model, *Applicable Analysis*, 89 : 7, 1109 - 1140 .
- [13] P. MAGAL, Compact attractors for time periodic age-structured population models, *Electron. J. Differential Equations* 2001(65) (2001), pp.1-35.
- [14] R.M. ANDERSON AND R.M. MAY, *Infectious Diseases of Humans : Dynamics and Control*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.
- [15] R. HERBIN, *Polycopie de cours M1 Analyse numérique des EDP*, Marseille, 2011/2012.