



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Abou bekr Belkaid – Tlemcen**  
**Faculté de Technologie**

**Département de Génie Electrique et Electronique**

**Filière : Génie Industriel**

**Spécialité : Ingénierie de la production**

**Projet de Fin d'Etudes de Master**

**Année Universitaire : 2017/2018**

**Intitulé :**

**Optimisation du temps de cycle d'un AS/RS multi allées**

**Présenté par :**

**BEKKARA Nour El Houda**

**Jury :**

**Président :**

**Zaki SARI, professeur, Université de Tlemcen.**

**Encadrant :**

**Sihem KOULOUGHLI, maitre de conférences classe A, Université de Tlemcen.**

**Examineur :**

**Zahira DIB, Maitre de conférences classe B, Université de Tlemcen.**

**Examineur :**

**Amaria KHEDIM , MAA maitre-assistant classe A, Université de Tlemcen.**

**Examineur :**

**Fouad MALIKI , MAA maitre-assistant classe A, Université de Tlemcen.**

## Table des matières

### Remerciement

### Introduction générale

### Chapitre 1 : Introduction aux systèmes automatisés stockage/déstockage

1.1.Introduction : .....	4
1.2.Définition, fonction, composition et utilité des AS/RS : .....	4
1.2.1.Définition : .....	4
1.2.2.Fonction : .....	4
1.2.3.Composition : .....	5
1.2.4.Terminologie : .....	5
1.2.5.Avantages d'un AS/RS : .....	6
1.2.6.Inconvénients : .....	7
1.3.Les types d'un AS/RS : .....	8
1.3.1.AS/RS à charge unitaire : .....	8
1.3.2.AS/RS Multi allées .....	9
1.3.3.AS/RS à racks glissants (racks mobiles) : .....	9
1.3.4.AS/RS à mini charge .....	9
1.3.5.AS/RS à carrousel.....	10
1.3.6.AS/RS à étagères profondes .....	11
1.3.7.AS/RS à navettes : .....	11
1.3.8.AS/RS à convoyeur gravitationnel : .....	12
1.4.Conception d'un AS/RS : .....	12
1.5.Méthodologies de stockage : .....	13
1.6.Disposition de l'espace de stockage.....	14
1.7.Quelques paramètres influant sur le coût et le temps de cycle : .....	15
1.8.Mesure de performances d'un système de stockage : .....	16
1.9.Etat de l'art : .....	18
1.10.Conclusion : .....	19

### Chapitre 2 : Optimisation des dimensions d'un AS/RS multi allées pour un temps de déplacement entre deux casiers minimal

2.1.Introduction : .....	21
2.2.Description de l'AS/RS multi allées : .....	21

2.3.Fonctionnement de l'AS/RS multi allées .....	22
2.4.Expression analytique discrète du temps de cycle pour l'AS/RS multi Allées :.....	23
2.4.1.Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi Allées : .....	25
2.4.2.Expression analytique discrète du temps de double cycle pour l'AS/RS multi allées	25
2.4.3.Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi allées	27
2.4.4.Expression analytique continue du temps moyen de déplacement entre deux casiers pour l'AS/RS multi allées.....	27
2.5.Etude de continuité pour l'expression de temps de déplacement entre deux casiers .....	30
2.5.1.Continuité de chacune des restrictions dans son domaine Respectif.....	31
2.5.2.Continuité de la fonction globale ETB sur les frontières de son domaine .....	31
2.6.Optimisation du temps moyen de déplacement entre le casier de stockage et le casier de déstockage d'un AS/RS multi allées .....	32
2.6.1.Formulation du problème : .....	33
2.6.2.Résolution du problème de la détermination des trois dimensions optimales.....	37
2.7.Conclusion :.....	42

**Chapitre 3 : représentation graphique de l'expression de temps de déplacement entre deux casiers, et interprétation des résultats :**

3.1.Introduction .....	45
3.2.Représentation graphique :.....	45
3.2.1Réduction à une fonction à une variable :.....	45
3.3.Valeur de minimum global :.....	46
3.4.Situation globale des minima : .....	47
3.5.Expression en (tp, th, tv) relative au domaine D17 :.....	47
3.6.Conclusion :.....	47

Conclusion générale

Références

Résumé

## Liste des figures

<b>Figure1.1</b> : classification des AS/RS [4] .....	8
<b>Figure 1.2:</b> AS/RS a charge unitaire [5] .....	9
<b>Figure1.3</b> : AS/RS a mini charge [6] .....	10
<b>Figure1.4</b> : AS/RS à carrousel [7] .....	10
<b>Figure1.6</b> : AS/RS à étagères profondes [8] .....	11
<b>Figure1.7</b> : AS/RS à navette [9] .....	12
<b>Figure1.7</b> : AS/RS à convoyeur gravitationnel [2] .....	12
<b>Figure 2.1</b> : AS/RS multi allée [2]:.....	22
<b>Figure2.2</b> : simple cycle.....	23
<b>Figure 2.3</b> : double cycle .....	23
<b>Figure2.4</b> : Tracé de $F1\alpha(x)$ en faisant varier l'angle $\alpha$ de $5^\circ$ à $85^\circ$ avec un pas de $5^\circ$ .....	46



# Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1</b> : terminologie.....	5
<b>Tableau1.2</b> : Mesure de performances d'un système de stockage.....	16
<b>Tableau 2.1</b> : Notation .....	24
<b>Tableau 2.4</b> : l'expression de ETB.....	28
<b>Tableau 2.5</b> : des limites.....	31
<b>Tableau 2.6</b> : fonction à deux variables.....	34
<b>Tableau 2.8</b> : les dérivés premiers pour la 17-eme restriction.....	38
<b>Tableau 2.8</b> calcul des dérivées secondes .....	38
<b>Tableau 2.9</b> résumé des résultats analytiques de l'optimisation de la fonction du temps de déplacement entre deux casiers.....	41
<b>Tableau 3.1</b> les deux premières restrictions de la fonction $F\alpha(x)$ .....	45
<b>Tableau3.2</b> minimum globale de la fonction ETB.....	47

# Remerciements

Qu'il me soit dans cette prestigieuse occasion l'honneur d'adresser mes sincères remerciements à tous ceux et celles qui m'ont formé, m'ont aidé, étaient présent pour moi et suivi mes pas pour arriver à cette étape, à ceux-là je suis profondément reconnaissante.

Je tiens tout d'abord à remercier DIEU de m'avoir accompagné durant mon parcours et aidé à arriver à cette étape.

Je voudrai adresser toute mes gratitudees à mon encadreur KOULOUGHLI Sihem, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, malgré ses lourdes et bien nombreuses charges, elle était souvent présente pour moi.

J'adresse mes sincères remerciements à Latifa GHOMRI pour ses conseils, son aide durant la réalisation de mon projet de fin d'étude, et je remercie tous mes professeurs, et toute personne, qui a participé à ma formation.

Je remercie aussi SARI Zaki, KHEDIM Amaria , DIB Zahira et Malki Fouad d'avoir accepté d'évaluer mon travail au sein du jury de soutenance.

Je désire aussi remercier mes parents pour leurs soutiens, leurs conseils, leurs présences et leurs confiances en moi, ils m'ont toujours poussé vers l'avant, je remercie aussi mes chers frères pour leurs encouragements et leurs soutiens et surtout leurs compagnies, aucun remerciement n'est digne d'exprimer ma reconnaissance.

Je désire remercier plus particulièrement ma sœur Fatima, elle était ma source de motivation et d'encouragement.

Je remercie B.Thiziri et B.Khadidja pour leurs soutiens, conseils ainsi que leurs disponibilités, elles m'ont apporté le support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Je voudrai exprimer mes reconnaissances envers mes amis et collègues qui m'ont aidé et supporté durant toute l'année.

*BEKKARA Nour El Houda*

# **Introduction générale**



## Introduction générale

De nos jours, les entreprises doivent entrer dans une course à la compétitivité, dans presque tous les secteurs. Il leur faut augmenter la rapidité, l'efficacité et la rentabilité de leurs processus opérationnels, et c'est ce qui justifie l'automatisation des processus. L'un des défis majeurs est que ces entreprises restent en compétitivité. Or, cela dépend en grande partie de leur productivité. Pour atteindre un haut niveau de productivité, les entreprises doivent adapter et optimiser leurs processus de stockage en conséquence. Un magasin de stockage entièrement automatisé répond à ces exigences et fait gagner du temps et réduit les frais dans différents processus d'exploitation et de production.

Parmi les systèmes qui répondent aux exigences actuelles, on trouve les systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS. Ce sont les systèmes les plus élaborés. Ils ont été largement utilisés dans les environnements de distribution et de production depuis leur introduction dans les années 1950. Ces systèmes automatisés présentent de nombreux avantages par rapport aux systèmes classiques de stockage à savoir : une réduction de la main-d'œuvre, des dépenses revues à la baisse pour le stockage, une meilleure traçabilité des produits stockés, un débit optimisé du système, une amélioration de la sécurité dans une entreprise, un excellent contrôle des stocks, ils peuvent fournir des charges de tous genres (outils, matériaux, palettes, produits...) avec des temps de réponse rapide pour entretenir les demandes de fabrication, d'entreposage, et des applications de distribution. En plus, la surface au sol disponible peut être exploitée au maximum. Ces systèmes, de plus en plus utilisés, sont constitués de racks de stockage, de machines de stockage/déstockage (S/R : Storage retrieval machine) et de point d'entrée/sortie de l'aire de stockage et d'un système de contrôle supervisant le tout.

Ils existent plusieurs types d'AS/RS, dans ce mémoire nous avons choisi d'étudier les AS/RS multi allées, ce type de système est composé d'un ensemble de racks fixes, à leurs tours disposés par paires, de manière parallèle et séparés par des allées. Chacune de ces allées, appelée une allée de service, donne accès aux deux racks. De plus une allée commune, perpendiculaire aux racks, relie toutes les allées de service, cette dernière est dite allée

transversale. Enfin, d'une machine S/R capable de circuler sur deux axes horizontaux et un axe vertical.

Plusieurs mesures peuvent être appliquées pour évaluer un AS/RS, en vue de l'optimisation d'espace et les coûts d'investissement. Parmi ces mesures : le taux d'utilisation de la machine S/R, le temps moyen de cycle, la capacité et la densité de stockage, débit du système.

Dans le but de déterminer les dimensions optimales d'un AS/RS multi allées pour un temps de double cycle minimal. Nous avons commencé par l'optimisation du temps de déplacement entre le casier de stockage et de casier de déstockage(ETB).

Dans le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS et leur principaux termes et concepts. Nous les définissons en présentant leur fonctionnalité et leur composant ainsi que leurs avantages et inconvénients. Ensuite, nous présentons une classification des AS/RS, nous exposons par la suite les méthodologies de stockage et les mesures utilisées pour l'évaluation des performances, et à la fin nous donnons un état de l'art en citant les travaux de recherches réalisés sur ces types de systèmes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous proposons d'optimiser le temps de déplacement entre casier de stockage et casier de déstockage ETB. Pour se faire, nous avons utilisé l'expression analytique du ETB lorsque les opérations de stockage et de déstockage se font sur deux allées différentes la fonction ETB est une fonction à trois variables réelles positives, elle a été développée par Ghomri et all [1], nous avons effectué un changement de variables permettant de réduire la fonction à trois variable a une fonction à de deux variable .la recherche des points critique et la détermination de leur nature a été résolue par l'application du théorème de Stewart .

Dans le troisième chapitre, un autre changement de variable est réalisé, permettant de passer à une fonction à une seule variable paramétrée, dans le but de visualiser la fonction ETB ainsi que son minimum dans le plan.

# Chapitre I

## Introduction aux systèmes automatisés stockage/déstockage

## 1. Introduction :

L'activité principale dans un entrepôt est le transport des matériaux pour stocker des marchandises pour une durée limitée. La réduction des stocks et plus généralement l'élimination des opérations qui n'apportent pas de valeur ajoutée est toujours à l'ordre du jour afin de réduire les coûts de production.

Les systèmes automatisés de stockage et de déstockage sont utilisés dans les entrepôts pour transporter et protéger le flux de matériaux qui passent par le processus de fabrication ou qui attendent d'être envoyés aux clients. Un AS / RS est une combinaison d'équipements et de commandes qui manipule, stocke et récupère les matériaux avec précision et rapidité. Les grands systèmes stockent et récupèrent généralement les charges de palettes. Les petits systèmes traitent les produits dans des bacs, des plateaux ou des caisses.

AS/RS minimisent l'espace et la main-d'œuvre nécessaires pour stocker les matériaux. Ils offrent également de très petits temps de cycle de prélèvement et de mise en place ainsi qu'une gestion des stocks plus précise. Ces systèmes sont particulièrement populaires dans les pays où la main-d'œuvre est chère et l'espace limité.

Dans ce chapitre, nous présentons au début les définition, fonction, composition et les avantages d'un système de stockage AS/RS. Avant de parler de la conception et les différentes méthodologies de stockage on va voir une description de quelques types des AS/RS. Ensuite on va citer des différentes composantes des aires de stockage ainsi que leurs dispositions et les paramètres qui influent sur le coût et le temps de cycle. Enfin un état de l'art détaillé sur les AS/RS sera présenté.

## 2. Définition, fonction, composition et utilité des AS/RS :

### 1.2.1 Définition :

Selon le Material Handling Institute [2] : Un système AS/RS est défini comme : « Une combinaison d'équipements et de systèmes de contrôle qui prend en charge, stocke et déstocke des produits avec précision, exactitude et célérité sous un certain degré d'automatisation »

### 1.2.2 Fonction :

Les systèmes automatisés de stockage et de déstockage éliminent l'intervention humaine dans l'exécution d'ensembles d'opérations de base qui comprend :

- La Récupération d'un article au point de dépôt pour un stockage.
- Le Transport de manière automatisée l'article à stocker à l'endroit qui lui a été dédié selon la politique de stockage adoptée.
- Le déstockage un produit à la demande de l'utilisateur, et sa livraison à la station de livraison de manière automatisée.
- Un système de commande et supervision contrôle toutes les opérations qui assure le bon fonctionnement de l'AS/RS.

### 1.2.3 Composition :

Un système automatisé de stockage/déstockage est composé d'une série d'allées avec des étagères de stockage de part et d'autre, en général il y a une machine de stockage et de déstockage par allée et un point d'entrées/sorties, La supervision et le contrôle est fait à l'aide d'un système de contrôle qui assure le bon fonctionnement du système.

#### 1.1.1 Terminologie :

**Tableau 1.1 : terminologies**

<b>Casier</b>	C'est l'espace tridimensionnel dans les racks de stockage utilisés pour stocker une seule unité de charge de matériau.
<b>Baies</b>	C'est la hauteur du rack de stockage du sol au plafond.
<b>Rangée</b>	Ceci est une série de baies placées côte à côte
<b>Etagère</b>	C'est la structure formant une rangée. C'est en général une structure d'acier, conçue pour supporter la totalité des charges placées dans chaque casier. [3]
<b>Allée</b>	L'allée est l'espace apparent entre deux rangées parallèles, nécessaire au déplacement de la machine de stockage/déstockage .
<b>Module de stockage</b>	Ce sont des palettes ou des containers de formes standardisées pouvant être placés dans les casiers, chargés par les machines S/R et déchargés dans les

	stations de dépôt/livraison. Les containers peuvent être des paniers en fil de fer, des plateaux, des bacs, des boîtes de carton ou plastique... [3]
<b>Machine de stockage / déstockage</b>	Elle est utilisée pour déplacer des éléments dans l'AS/RS. Une machine S / R est capable de se déplacer simultanément dans le sens mouvement horizontal et vertical. Un système de rail avec plancher guide la machine et un rail parallèle au sommet de la structure de stockage est utilisé pour maintenir son alignement.
<b>Stations d'entrées et de sorties (Pickup/Deposit station)</b>	Les stations P / D sont les endroits où les stocks sont transférés dans et hors de l'AS / RS. En général, elles sont situées à l'extrémité des allées pour faciliter l'accès aux machines S / R à partir du système externe de manutention des matériaux.

### 1.1.2 Avantages d'un AS/RS :

Les systèmes de stockage et de déstockage automatisés offrent une variété d'avantages :

- **Diminution de l'espace requis** : un AS/RS peut diminuer grandement l'espace nécessaire au stockage. La place ainsi récupérée peut être utilisée pour augmenter la production.
- **Augmentation de la capacité** : pour le même espace, un AS/RS augmente considérablement la capacité de stockage. Une entreprise, dont le système de stockage est saturé, peut, en choisissant un AS/RS, accroître sa capacité de stockage, sans investir dans de nouveaux locaux.
- **Gestion et un contrôle des stocks améliorés** : à n'importe quel instant, le système de contrôle de l'AS/RS peut donner avec précision les quantités types et qualités, des produits, présents en stock, celles délivrées dans l'heure, la journée, la semaine...
- **Ordonnancement de production amélioré** : grâce à une meilleure connaissance et à un contrôle plus précis des en-cours, l'ordonnancement de la production peut être mieux optimisé.

- **Réduction des temps de réponse** : les systèmes AS/RS possèdent des temps de réponse très réduits, pour localiser, stocker ou déstocker des articles, par rapport aux systèmes classiques de stockage.
- **Réduction des stocks** : due à une meilleure gestion et contrôle des stocks, et à des temps de réponse réduits, il est possible de réduire, la quantité de produits en stock.
- **Réduction des risques de rupture de stocks** : grâce à une meilleure gestion des stocks, qui peut se faire en temps réel. Les ruptures de stocks sont pratiquement inexistantes, ou de très faibles durées lorsqu'elles sont inévitables.
- **Réduction de la main d'œuvre** : l'automatisation de la majorité des opérations dans les AS/RS permet de diminuer l'intervention humaine, que ce soit dans l'administration ou l'exécution.
- **Réduction des détériorations** : l'automatisation permet la diminution des risques de casse des produits.
- **Diminution des coûts de fonctionnement** : étant donné le haut degré d'automatisation, les coûts de fonctionnement sont réduits au maximum (réduction du personnel, de la lumière, du chauffage...).
- **Augmentation du rendement dans la production** : grâce à l'augmentation de la productivité des stations de travail, les AS/RS permettent d'augmenter le rendement du système de production.
- **Augmentation de la sécurité** : les AS/RS étant des aires autonomes et fermées, sans intervention humaine, la sécurité est grandement améliorée.
- **Réduction des vols** : les AS/RS étant des aires autonomes et fermées, sans intervention humaine, le vol de produits par le personnel, ou autres, est très réduit.
- **Grande flexibilité de fonctionnement** : les AS/RS peuvent s'accommoder d'une grande variété d'articles à stocker. De plus ils sont facilement intraçables avec des systèmes comme les AGVS, les FMS, les systèmes d'inspection...
- **Production juste à temps (JIT)** : les AS/RS permettent d'avoir le bon produit, outils, palette et support au bon endroit au bon moment grâce aux points cités ci-dessus. Ceci permet de contribuer amplement à la réalisation de la production juste à temps. [3]

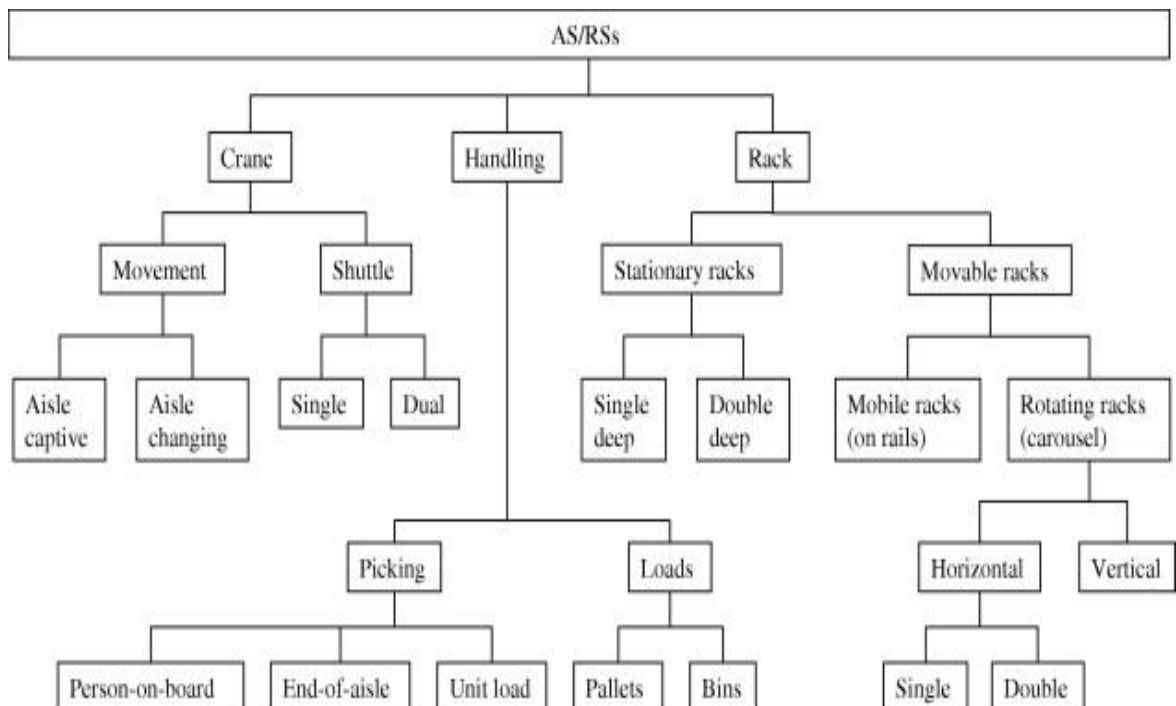
#### 1.2.6 Inconvénients :

- Les systèmes AS / RS nécessitent des connaissances, des compétences et de l'expérience. Ils nécessitent des investissements importants du capital de l'entreprise, en particulier pour la maintenance et la mise à jour des différents sous-systèmes.

- L'investissement initial est très élevé. Par exemple, pour un AS/RS de 10000 casiers, 5 machines S/R et un convoyeur de 60m, l'investissement initial varie entre 2 et 3 millions de Dollars US. [4]

## 1.2 Les types d'un AS/RS :

Il existe de nombreuses catégories importantes d'AS / RS, elles peuvent être distinguées en fonction de certaines caractéristiques et applications. **Figure1.1**



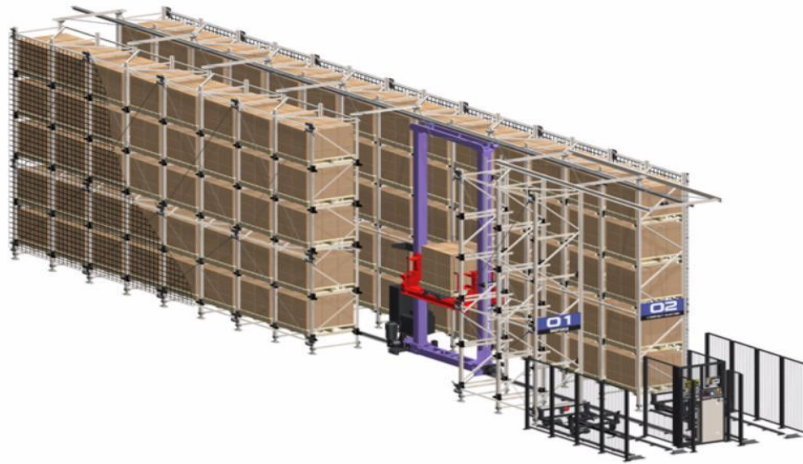
**Figure1.1 : classification des AS/RS [5]**

### 1.2.1 AS/RS à charge unitaire :

Les AS/RS à charge unitaire sont utilisés pour stocker des charges palettisées ou en container standard. Les charges sont en général supérieures à 250 kg par unité. En général, le système est commandé par ordinateur. Il est équipé d'une machine de stockage/déstockage S/R, conçue pour traiter des containers ou palettes à charge unitaire. Chaque machine est placée sur des rails fixés au sol. La machine S/R est composée d'un cadre sur lequel coulisse, verticalement, un plateau, qui sert à transporter les charges. Ce plateau peut se déplacer horizontalement à la perpendiculaire du cadre. De ce fait, il peut charger/décharger les produits dans les casiers, ainsi qu'au niveau de la station de dépôt/livraison. Plusieurs types de mécanismes de support de la charge sont possibles :



- Le système à plateau coulissant : c'est le même principe que le transpalette.
- Le système à ventouse : la charge est accrochée en créant un vide dans des ventouses.
- Le système à aimant : approprié pour les produits en fer et acier. [3]



**Figure 1.2: AS/RS a charge unitaire [6]**

### **1.2.2 AS/RS multi allées :**

L'AS/RS multi allées est une variation de l'AS/RS à charge unitaire. Il est composé d'une seule machine S /R capable de circuler sur deux axes horizontaux, pour servir plusieurs allées à la fois. Sa topologie est identique à celle de l'AS/RS à charge unitaire. Toutefois une allée commune reliant toutes les allées de service est aménagée pour permettre à la machine S/R de circuler. Une description plus détaillée de ce système sera présentée au chapitre 2. [3]

### **1.2.3 AS/RS à racks glissants (racks mobiles) :**

L'AS/RS à racks glissants est une variation de l'AS/RS multi-allées. La particularité de ce système est que les allées de service n'apparaissent que lorsqu'une opération de stockage ou déstockage est prévue dans les racks correspondants. Les racks formant le système glissent latéralement sur des rails de telle sorte que l'on puisse ouvrir une allée entre n'importe quels deux racks mitoyens. Au repos, il existe une seule allée de service, celle-ci pouvant « se déplacer » entre n'importe quel deux racks mitoyens (en vérité ce n'est pas l'allée qui se déplace mais les racks). [3]

### **1.2.4 AS/RS à mini charge**

Les AS/RS à mini charge sont utilisés pour stocker de petites charges, tel que les pièces détachées, les outils, Dans chaque casier, il y a un container où sont stockés un ensemble de produits identiques ou non. En cas de stockage/déstockage, c'est le container en entier qui est déplacé vers un opérateur qui va procéder à la sélection des produits à déstocker ou à stocker (l'opérateur peut être une personne ou un robot). Le système convient très bien aux utilisations où l'espace imparti est faible, et où le volume de stockage/déstockage n'est ni assez élevé pour l'installation d'un AS/RS à charge unitaire, ni assez faible pour l'utilisation d'un stockage manuel. Ce système, nécessitant un investissement relativement faible, et présentant la possibilité de traiter de petites charges, est très utilisé dans l'industrie. [3]



**Figure1.3 : AS/RS a mini charge [7]**

### 1.3.5 AS/RS à carrousel

Un système de carrousel peut être utilisé pour des racks assemblés horizontalement / verticalement avec différentes couches de profondeur. Dans ce type de système, une grue se rend à une station d'entrée unique, où un panier tournant, ou carrousel, tourne et s'arrête ensuite lorsque l'article désiré est présent. La grue se rend alors à la station de sortie requise désignée par le système. Les carrousels peuvent être empilés les uns sur les autres et tourner indépendamment.



**Figure1.4 : AS/RS à carrousel [8]**

### 1.3.6 AS/RS à étagères profondes

Les AS/RS à étagères profondes est une variation de l'AS/RS à charge unitaire. La différence, est que dans les AS/RS à étagère profonde, plusieurs charges unitaires peuvent être stockées dans le même casier l'une après l'autre. Jusqu'à 10 charges peuvent être ainsi stockées dans le même casier, et donc, possédant la même adresse. Ceci permet une grande densité de stockage et une utilisation de l'espace maximum. Au niveau de chaque casier, les produits peuvent se

Déplacer horizontalement. Ils sont stockés d'un côté du casier et déstockés de l'autre côté. Ce déplacement est possible grâce à un plateau mobile qui se déplace de la machine S/R à l'entrée du casier. La machine S/R est identique à celle d'un AS/RS à charge unitaire avec en plus des fonctions spécifiques pour lui permettre le contrôle des plateaux mobiles. [3]

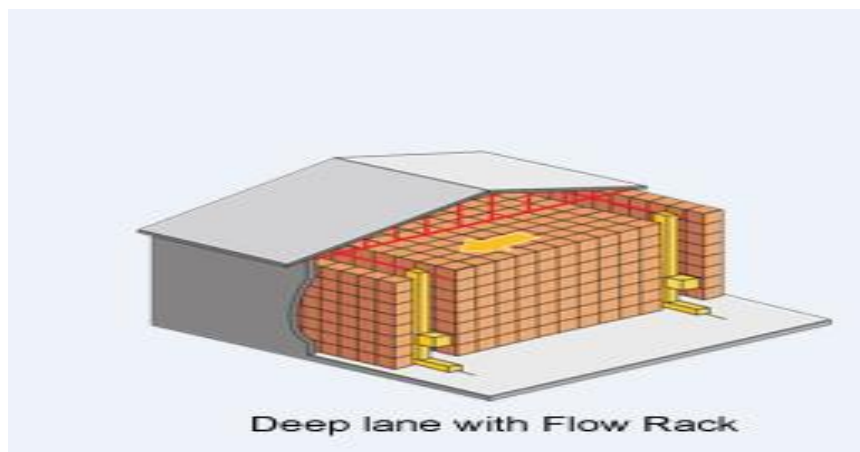


Figure1.5 :AS/RS à étagères profondes [9]

### 1.3.7 AS/RS à navettes :

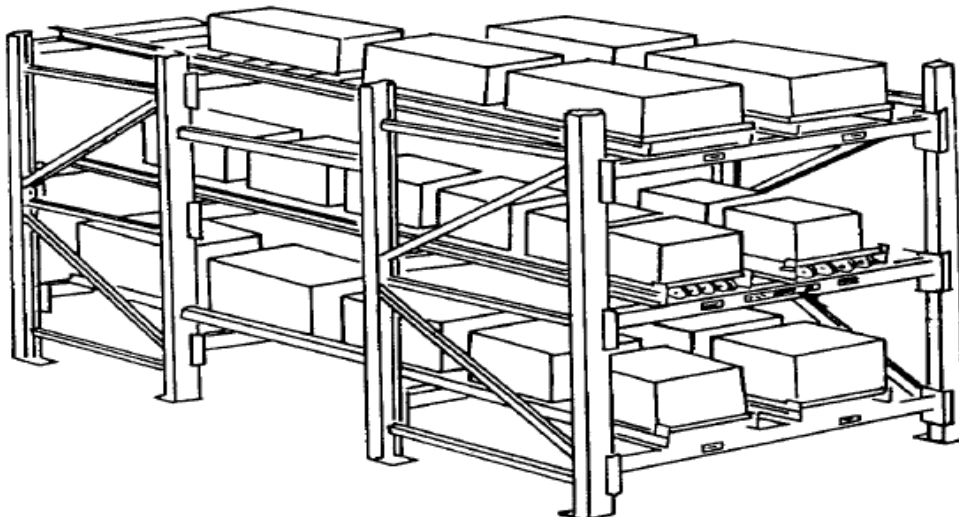
Les navettes AS/RS peuvent fonctionner sur 1 niveau, ou peuvent se déplacer à plusieurs niveaux via des ascenseurs situés à la fin des rangées. Les navettes sont alimentées par batterie et sont assez intelligentes pour savoir quand recharger. Lorsqu'un article est demandé, la navette se rend à l'emplacement du produit et le prend dans le rack. Il faudra ensuite conduire à la fin d'une rangée où un ascenseur sera en attente. L'ascenseur peut soit retirer le produit de la navette, soit transporter la navette elle-même. Une fois que le produit atteint le niveau de base du système de navette, il peut être déplacé vers un convoyeur et livré à la prochaine destination.



**Figure1.6 : AS/RS à navette [10]**

### **1.3.8 AS/RS à convoyeur gravitationnel :**

Ce système est une variation des AS/RS à étagères profondes. Il est conçu pour stocker soit des produits individuels, soit des charges en palettes ou container. Le système consiste en un ensemble de casiers profonds équipés, chacun, d'un convoyeur gravitationnel, aux extrémités desquels se trouvent deux machines S/R. Le stockage se réalise sur un ensemble de convoyeurs gravitationnels accessibles aux deux extrémités. Le chargement se fait sur une face et le déchargement se fait sur l'autre face. Les deux machines S/R sont reliées par un convoyeur gravitationnel de restockage incliné en sens inverse. Ceci permet, lorsqu'on désire déstocker un produit se trouvant au milieu d'un casier, de sortir les produits qui le précèdent, de les mettre sur le convoyeur gravitationnel, puis de les restocker par l'autre face grâce à l'autre machines/R. Dans ce cas et en considérant une seule étagère, une machine S/R sera spécialisée dans le stockage et l'autre dans le déstockage. [3]



**Figure1.7 : AS/RS à convoyeur gravitationnel [3]**

## **1.4 Conception d'un AS/RS :**

Pour la conception d'un AS/RS, un certain nombre de paramètres doivent être pris en compte. Ces paramètres dépendent de l'utilisation de l'AS/RS. Le *Material Handling System Institute* [2] ainsi que Bozer et White [11] dressent une liste de ces paramètres. Nous présentons, ici, les plus importants :

- Dimensions de la charge : largeur, hauteur, profondeur, poids,
- Dimensions du casier : largeur, hauteur, profondeur,
- Nombre total de casiers
- Structure de l'étagère : charge utile, charge admissible, ...
- Rendement : le nombre de stockage/déstockage par unité de temps
- Nombre de machine S/R, d'allée, d'étagères, ...
- Durée de cycle : cycle simple, cycle double, cycle multi-adresses, ...
- Taux d'utilisation des machines.

En concevant un AS/RS, deux principes fondamentaux doivent être considérés [12]. Le premier est l'utilisation d'un facteur de sécurité de 85%. C'est-à-dire que l'AS/RS doit fonctionner, au maximum, à 85% de ses capacités maximales. Le second est qu'il n'existe pas de règles générales pour la conception d'un AS/RS. Il faut considérer chaque cas comme un problème unique. [3]

## 1.5 Méthodologies de stockage :

Le système de stockage peut être soit dédié soit ouvert. Dans le système dédié, chaque produit possède sa propre aire de stockage. Dans le système ouvert, on stocke les produits de manière aléatoire, dans ce cas, un système de commande élaboré doit mémoriser les emplacements des différents produits, pour pouvoir les récupérer, ainsi que les emplacements libres.

### ▪ **Stockage dédié :**

Dans le stockage dédié, l'espace de stockage est partagé en blocs. Chaque produit a sa propre aire de stockage déterminée à l'avance, donc l'espace de stockage est bien partagé en attribuant chaque bloc à un certain type de produits ce qui simplifie le contrôle du système et la gestion des stocks. Mais donner suffisamment d'espace pour les stocks maxima à chaque produit augmente l'espace de stockage nécessaire. Les systèmes qui utilisent le stockage dédié sont difficilement modifiables : l'ajout de nouveaux produits non prévus à l'origine est très complexe.

### ▪ **Stockage aléatoire ouvert**

Contrairement au stockage dédié, dans le stockage aléatoire, n'importe quel produit peut être stocké dans n'importe quel casier. Un système de contrôle très élaboré mémorise les adresses de chaque type de produit. Le stockage aléatoire a pour principal avantage d'utiliser beaucoup moins d'espace que le stockage dédié. L'espace total de stockage devant être équivalent au stock maximum de tous les produits. Ceci permet une réduction importante d'espace. Askin et Standridge [13] présente un exemple de stockage aléatoire où le gain d'espace par rapport au stockage dédié est de l'ordre de 40%. Cependant, le stockage aléatoire nécessite un contrôle très élaboré.

- **Stockage aléatoire par classe**

Le stockage aléatoire permet de réduire l'espace de stockage par rapport au stockage dédié. Le stockage par classe touche particulièrement le temps de cycle. Des réductions du temps de cycle peuvent atteindre 40% [13]. Les produits dans un AS/RS ne restent pas stockés la même durée. Si les produits qui restent stockés peu de temps sont placés près de la station de livraison et les produits qui restent plus longtemps sont placés loin de la station, le rendement du système peut être grandement amélioré. Le stockage par classe : subdivise les casiers en classes par rapport à leurs distances du point de livraison. Les casiers les plus proches forment la première classe, les plus loin forment la dernière classe. Les produits à stocker sont aussi classés suivant le temps qu'ils vont passer dans le système. Ceux qui restent le moins longtemps seront stockés dans la première classe et ceux qui restent le plus longtemps dans la dernière. [2]

## 1.6 Disposition de l'espace de stockage

La disposition de l'aire de stockage est importante dans la minimisation des coûts et temps de stockage/déstockage. Un emplacement mal conçu entraînerait de grandes pertes au niveau de l'investissement et au niveau du fonctionnement.

- **Le bâtiment** : La forme du bâtiment dépend du type de l'AS/RS qui va être utilisé. Pour que l'espace soit utilisé au maximum, une forme parallélépipédique peut être la plus appropriée pour un AS/RS classique.

- **Les allées** : La longueur et la position des allées influent sur le temps de réponse du système de stockage. Des allées plus longues nécessitent des temps moyens de stockage/déstockage plus importants que des allées plus courtes.

- **Les étagères** : La hauteur, la profondeur, le type d'étagères influent sur les performances globales du système. Il existe plusieurs types d'étagères, on peut citer :
  - Les étagères à charges multiples : les casiers sont profonds et peuvent stocker plusieurs produits de même type l'un derrière l'autre, la règle de stockage sera LIFO (dernier entré, premier sorti).
  - Les étagères pour mini et micro charge : dans lesquelles on stocke de petits produits tel que des outils, ...
  - Les étagères à convoyeur gravitationnel : chaque casier d'une profondeur importante est muni d'un convoyeur gravitationnel. Le casier est accessible, des deux côtés, par deux machines S/R l'une pour le stockage et l'autre pour le déstockage. La règle de stockage/déstockage utilisée est FIFO (premier entré, premier sorti). [14]

### 1.7 Quelques paramètres influant sur le coût et le temps de cycle :

- **Dimension de la charge et dimension du casier** :

En général, les produits à stocker ou à déstocker sont de tailles différentes, il serait idéal de concevoir un AS/RS avec des casiers de tailles différentes pour que l'on puisse stocker le plus de matériaux possibles. La taille du casier est identifiée par la taille de la charge (longueur, largeur et hauteur de la charge). Le poids de la charge influe sur la structure des supports du rack.
- **Nombre total de casiers**

Le nombre total de casiers varie suivant la méthodologie de stockage.

  - Pour un stockage dédié le nombre total de casiers est calculé en sommant les espaces maximaux réservés à chaque type de produit.
  - Pour un stockage aléatoire le nombre total de casiers est calculé en traçant la courbe résultante de la somme des courbes représentant l'espace de stockage de chaque produit et en prenant la valeur donnée par le sommet de cette nouvelle courbe.
- **Structure de l'étagère** La structure de l'étagère peut influencer sur le temps de cycle. L'utilisation d'étagères carrées en temps (temps de déplacement horizontal égale au temps de déplacement vertical) optimise le temps de cycle.
- **Nombre d'allées** :

Une machine S/R peut circuler sur une ou plusieurs allées. Le nombre d'allées est calculé en divisant le nombre de racks par deux. Donc plus notre système est grand plus le temps de cycle augmente.

▪ **Opération de la machine S/R :**

La machine S/R peut effectuer soit un stockage soit un déstockage à la fois on dit alors qu'elle opère en simple cycle. Elle peut effectuer un stockage et un déstockage en même temps on dit alors qu'elle opère en double cycle. C'est l'un des plus importants paramètres qui influe sur le temps de cycle.

▪ **Taux d'utilisation de la machine :**

Le taux d'utilisation de la machine S/R est égal au temps pendant lequel la machine est occupée divisé par le temps total. [14]

**1.8 Mesure de performances d'un système de stockage :**

Des mesures utilisées pour l'évaluation des performances sont détaillées dans le tableau suivant (Tableau1.1) [15].

**Tableau1.2** : Mesure de performances d'un système de stockage

Mesure de performance	Description
Capacité de stockage	Défini de deux manières : l'espace volumétrique total disponible et le nombre total d'emplacement de stockage dans le système disponible pour les articles ou les charges. On utilise souvent le principe de la charge unitaire pour normaliser le stockage dans le système de stockage ; le nombre de charges unitaires pouvant être stockées est une mesure pratique qui peut être rapidement saisie. La capacité physique du système de stockage doit être supérieure au nombre maximal de charges pouvant être stockées, afin de répondre à des besoins de stockage supplémentaires, d'urgence, au fur et à mesure des besoins.
Densité de stockage	Défini comme l'espace volumétrique disponible pour le stockage réel par rapport à l'espace volumétrique total dans l'installation de stockage. L'espace allée et l'espace aérien gaspillé sont deux exemples d'espace de stockage inutilisé ; ceux-ci occupent souvent plus d'espace que la



	<p>capacité de stockage réelle utilisable elle-même. Souvent mesurée au moyen de la surface de plancher de l'installation de stockage ; bien que la densité volumétrique soit une métrique plus précise. Les densités élevées devraient être visées.</p>
Débit du système	<p>Défini comme le taux horaire auquel le système de stockage reçoit et met en mémoire des charges et / ou déstocker et délivre des charges à la station de sortie. Le système de stockage doit être conçu pour répondre aux exigences maximales de débit, car des variations dans les niveaux de débit doivent être attendues tout au long de la journée de travail.</p> <p>Le débit de stockage est limité au moment d'effectuer une transaction de stockage ou de déstockage. Le stockage consiste à : prendre une charge à la station d'entrée ; se rendre à un lieu de stockage ; placement de la charge dans l'emplacement de stockage ; et retourner à la station d'entrée. Le déstockage consiste à aller à l'emplacement de stockage ; récupérer l'article stockage et le déplacer à la station de sortie pour le déchargement. La somme de ces deux temps (pour l'une ou l'autre opération) détermine le débit du système de stockage Un cycle à double commande réduit le débit en combinant les fonctions de stockage et de déstockage. La capacité à effectuer un tel cycle dépend de la demande et des problèmes de planification. Il est plus facile de réaliser des doubles cycles par des systèmes de stockage automatisés que par des systèmes manuels.</p>
Utilisation	<p>Défini comme la proportion de temps pendant lequel le système est réellement utilisé pour effectuer des opérations de stockage et de déstockage par rapport au temps disponible. Les profils d'utilisation souhaitables se situent entre 80 et 90%. Si l'utilisation du système est trop faible, il est probablement sur-conçu ; s'il est trop élevé, il n'y aura pas de tolérance pour les périodes de pointe ou les pannes de système.</p>
Disponibilité	<p>Défini comme la proportion de temps que le système est utilisé par rapport aux heures de travail normales. Les pannes du système</p>

	provoquent des temps d'arrêt dans le système. Les raisons de l'indisponibilité comprennent : les pannes d'ordinateurs, les pannes mécaniques, les blocages de charge, une mauvaise maintenance et des procédures d'utilisation incorrectes.
Temps de cycle	Le temps de cycle est le temps moyen pendant lequel le produit reste dans le système de production dans notre travail on utilise ce critère comme mesure de performance

### 1.9 Etat de l'art :

L'un des principaux objectifs des AS/RS est la minimisation de temps du cycle moyen de la machine S/R a fait l'objet de plusieurs études.

Parmi les premiers qui ont développé un modèle analytique de temps de cycle, Hausman et al [16]. Ils ont abordé le problème de l'assignement optimal de stockage. Ils ont modélisé le temps de simple cycle pour un AS/RS à charge unitaire par des expressions analytiques continues pour différentes stratégies de stockage (le stockage aléatoire, le stockage dédié et le stockage par classe). Bozer et White [17] ont établi une expression pour le temps de cycle .Han *et al* [18] ont développé une expression mathématique estimant le temps du double cycle, sous la règle « plus proche voisin » (nearest-neighbor). Sous cette règle, les requêtes de stockage et les requêtes de déstockage les plus proches sont appariées pour minimiser le temps de double cycle. Hwang et al [19] ont proposé une expression mathématique pour les AS/RS multi allées, dans ce travail, chaque rack est considéré comme une face continue et pour chaque rack, ils ont développé une expression analytique du temps de cycle. Chang *et al* [20]., ont proposé un modèle pour le temps de cycle avec plusieurs vitesses et en tenant compte de l'accélération dé-célération de la machine S/R. Ashayeri *et al.*, [21] ont proposé une approche géométrique pour modéliser le temps de cycle dans un AS/RS utilisant les tockage par classe. Ghomri *et al.*, [22] ont proposé une expression analytique du temps moyen de simple cycle d'un AS/RS multi allées en considérant que l'ensemble des racks représentent un espace continue. Dans Sari et al. [3] et Sari [23] un modèle exact et un autre approché du temps de cycle pour un AS/RS à convoyeur gravitationnel ont été développé. Le modèle approché est basé sur une approche continue, où le rack est supposé continu. Le modèle exact est basé sur une approche discrète. Les expressions des deux approches sont comparées via la simulation. S multi allées en considérant que l'ensemble des racks représentent un espace continue. Lerher et al. [24] ont développé un modèle analytique du temps de cycle d'un

AS/RS multi-allées prenant en considération l'accélération et la décélération de la machine S/R. Kouloughli et al. [14] ont utilisé les résultats de Ghomri *et al.*, [22] pour trouver les dimensions optimales du même système pour un temps de simple et double cycle minimal. Dans Kouloughli et al. [23], les auteurs ont fixé l'une des trois dimensions du l'AS/RS multi allées et déterminé les deux dimensions optimales restantes.

Des expressions analytiques discrètes pour les AS/RS multi allées et pour les AS/RS à racks glissants ont été développé par Sari [2].

Guezzen et al [25] les auteurs ont développé deux modèles analytiques continus de temps moyen de simple cycle pour un AS/RS à rack glissants. Dans le premier modèle les auteurs considèrent le cas où le temps de glissement des racks est inférieur au temps de déplacement le long de l'allée principale. Dans le deuxième modèle, ils ont considéré le cas où le temps de glissement des racks est supérieur au temps de déplacement le long de l'allée principale. Dans Sari et al [26], les auteurs se sont intéressés à développer une expression analytique pour le temps de cycle d'un nouveau type d'AS/RS à profondeur multiple composé d'une seule machine S/R et de convoyeurs gravitationnels.

Azouz [27] s'est intéressé à l'optimisation des dimensions du rack d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel pour un temps de cycle minimal, les résultats obtenus ont permis de développer une solution analytique et de définir un optimum sur une large fourchette de configurations.

## **1.10 Conclusion :**

Ce chapitre est consacré à la présentation des systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS et à leurs principaux termes et concepts. Nous avons défini ce jargon particulier en présentant leur fonctionnalité et leurs composants ainsi que leurs avantages et inconvénients. Nous avons exposé en détail les différents genres existants, par la suite nous avons étudié les méthodologies de stockage et les mesures utilisées pour l'évaluation des performances, et nous avons terminé par un l'état de l'art présentant les travaux de recherches réalisés sur ces types des systèmes.

Dans le chapitre qui suit on passera à l'optimisation du temps de déplacement du casier de stockage au casier de déstockage dans un double cycle en montrant les différentes étapes et méthodes utilisés pour le calcul.

## Chapitre II

Optimisation du temps de déplacement entre un casier de stockage et un casier de déstockage (dans un double cycle)

## 2.1 Introduction :

Le temps de cycle moyen est un paramètre important dans les systèmes automatisés de stockage/déstockage, il qui permet l'optimisation des dimensions de ces systèmes.

Des modèles mathématiques ont été développées pour modéliser les temps moyens de simple et double cycle d'un AS/RS multi allées. Les modèles analytiques du simple cycle et double cycle d'un AS/RS multi allées. Ces modèles ont été établies par Ghomri et al [18]

Dans le temps de double cycle la machine S/R réalise une opération de stockage suivie d'une opération de déstockage. Il y a deux temps à considérer dans le temps de double cycle(EDC) : le temps de simple cycle (ESC)et le temps moyen de déplacement entre deux casiers quelconques (ETB) :

$$EDC=ESC+ETB$$

L'optimisation du temps de simple cycle et l'optimisation du double cycle l'orsque l'opération de stockage et l'opération de déstockage se font sur la même allée a été réalisée par Kouloughli[ 14].Dans ce chapitre nous nous somme intéressées à l'optimisations des expressions du temps moyen de déplacement entre deux casiers lorsque l'allée de stockage est différente de l'allée de déstockage.

## 2.2 Description de l'AS/RS multi allées :

Les AS/RS multi allées sont une variation des AS/RS à charge unitaire, ils sont composés d'un ensemble de racks fixes disposés deux à deux en parallèle et séparés par des allées, Chacune de ces allées, appelée allée de desserte donne accès à deux racks. Une allée commune placée perpendiculairement aux racks relie toutes les allées de desserte. La machines S/R est capable de circuler sur deux axes horizontaux qui peuvent servir plusieurs allées à la fois. De ce fait, cette machine S/R se déplace suivant trois axes : verticalement le long des colonnes formant les racks, horizontalement le long des allées de desserte et transversalement le long de l'allée commune dont l'une des extrémités est équipée d'une station de dépôt/livraison. Figure (2.1)

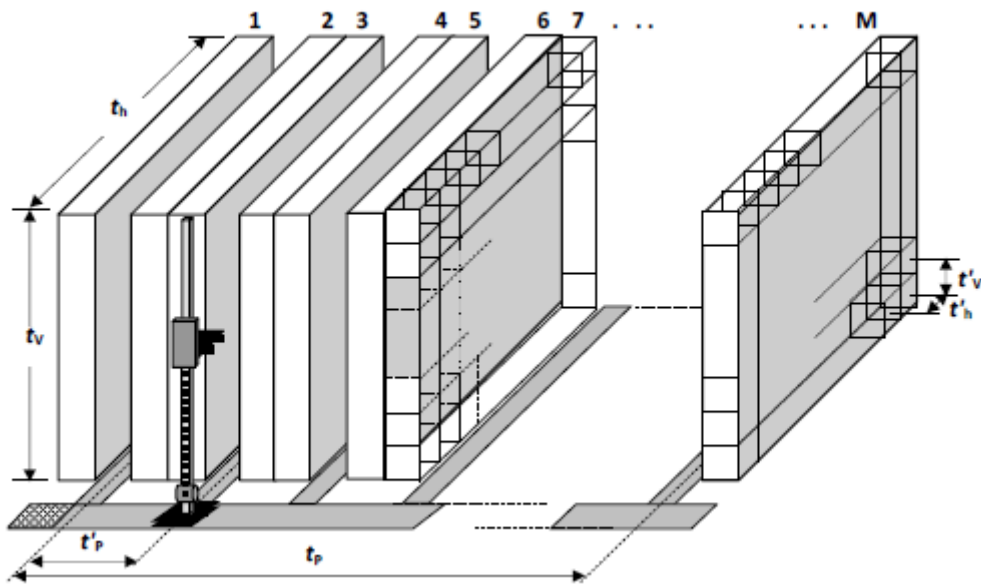


Figure 2.1 AS/RS multi allées [28]

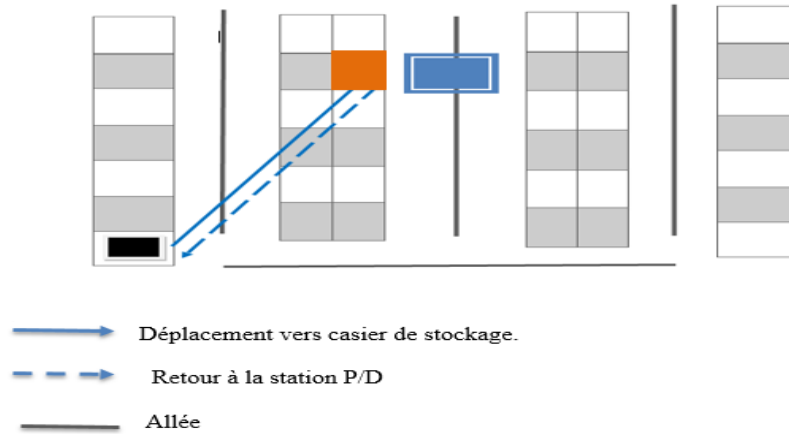
### 2.3 Fonctionnement de l'AS/RS multi allées

A l'état initial la machine S/R se trouve à la station dépôt livraison.

Pour un stockage, la machine S/R se déplace simultanément dans le sens horizontale et verticale jusqu'au casier prédéterminé, elle dépose l'article et revient à la station dépôt/livraison

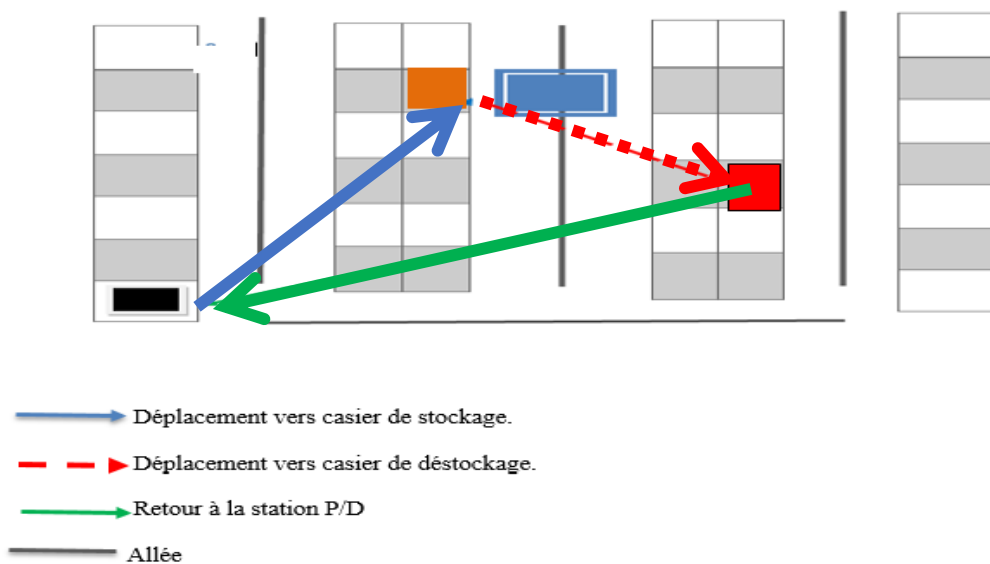
Pour un déstockage, la machine S/R se déplace vers le casier de déstockage, récupère l'article à déstocker et revient à la station de livraison.

- **Simple cycle** : : la machine S/R réalise soit une opération de stockage soit une opération de déstockage. Figure 2.2



**Figure2.2 simple cycle**

- **Double cycle** : la machine S/R réalise les deux opérations en même temps un stockage suivi par un déstockage. Figure 2.3



**Figure 2.3 double cycle**

## 2.4 Expression analytique discrète du temps de cycle pour l'AS/RS multi

### Allées :

La modélisation du temps de cycle de la machine S/R est l'un des plus importants domaines de recherche dans l'étude des AS/RS. L'expression discrète du temps de cycle moyen des AS/RS multi allées a été établi par sari [22].

**Tableau 2.1 : Notation**

<b>M</b>	Nombre de racks dans le système
<b>M/2</b>	Nombre d'allées dans le système.
<b>N</b>	Nombre de casiers total.
<b>NI</b>	Nombre de casiers par ligne
<b>Nh</b>	Nombre de casiers par colonne.
<b>t'h</b>	Temps de déplacement horizontal d'un casier au suivant
<b>t'v</b>	Temps de déplacement vertical d'un casier au suivant .
<b>t'p</b>	Temps de déplacement d'une allée à la suivante.
<b>Th</b>	Temps nécessaire pour parcourir la longueur d'un rack ou d'une allée.
<b>Tv</b>	Temps nécessaire pour parcourir la hauteur d'un rack.
<b>Tp</b>	Temps nécessaire pour parcourir l'allée principale du système.
<b>E(S(C))</b>	Temps moyen simple cycle.
<b>E(DC)</b>	Temps moyen double cycle.
<b>E(TB)</b>	Temps moyen de déplacement entre un casier de stockage et un casier de déstockage.

• **Hypothèses :**

- L'AS/RS est composé de M racks, M/2 allées de dessertes et N casiers.



- La machine S/R se déplacer simultanément dans le sens vertical et horizontal avec une vitesse constante, elle opère en simple ou double cycle.
- Les temps de chargement/déchargement des produits et les accélérations/décélérations de la machine S/R sont négligés.
- Il y a  $N_1$  casiers dans chaque ligne de rack et  $N_h$  casiers dans chaque colonne.
- Le nombre total de casiers  $N = M * N_1 * N_h$  .kouloughli [10]

#### 2.4.1 Expression analytique discrète du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi Allées :

L'idée de cette approche est de calculer la moyenne des temps de déplacements vers tous les casiers du système. Sari[22]

Considérons dans la  $K$ -ème allée le casier de coordonnées  $(i, j)$ . Le déplacement horizontal nécessaire pour atteindre ce casier est :

$$t'h.i + t'p.(k - 1)$$

Le déplacement vertical nécessaire pour atteindre ce même casier :

$$t'v.(j-1)$$

Le temps global que met la machine S/R pour atteindre un casier de coordonnées  $(i, j)$  dans la  $k$ -ème allée est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical, ce déplacement est appelé de Tchebychev.

$$\text{Max}(t'h.i + t'p.(k - 1)), t'v.(j - 1))$$

Par conséquent le temps de cycle moyen que fait la machine pour visiter tous les casiers est donné par l'expression discrète suivante :

$$\overline{E(SC)} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_v} \max [ ( t'_h .i + t'_p .(k - 1) ), t'_p (j - 1)]$$

#### 2.4.2 Expression analytique discrète du temps de double cycle pour l'AS/RS multi allées

Le temps de double cycle et la somme de ces trois temps :

- Le temps de déplacement de la machine S/R vers le casier de stockage (E(SC) 1)
- Le temps de déplacement de la machine S/R du casier de stockage vers le casier de déstockage (E(TB))
- Le temps de retour de la machine S/R depuis le casier de déstockage vers la station de dépôt / livraison (E(SC) 2)

Le temps moyen de simple cycle(ESC) est égal à la somme des deux déplacements(ESC1) et (ESC2).

$$ESC=ESC1+ESC2$$

Il reste alors à évaluer le temps de déplacement entre le casier de stockage et le casier de déstockage. Ce déplacement est noté  $E(TB)$ .

*1ere cas* : Si le stockage et le déstockage se font sur la même allée ( $k_1=k_2$ ), le temps de déplacement entre deux casiers de coordonnées  $(i_1, j_1)$  et  $(i_2, j_2)$  est :

$$E(TB) = \text{Max}(t'_h \cdot |i_2 - i_1|, t'_v \cdot |j_2 - j_1|)$$

Donc, le temps de déplacement moyen entre deux casiers aléatoires dans la même allée peut être estimé par l'équation suivante :

$$\overline{E(TB)} = \frac{M}{NN_H N_V - N} \sum_{i_1=1}^{N_H} \sum_{j_1=1}^{N_V} \sum_{i_2=1}^{N_H} \sum_{j_2=1}^{N_V} \max [ t'_h \cdot |i_2 - i_1|, t'_v \cdot |j_2 - j_1| ]$$

*2eme cas* : Si le stockage et le déstockage se font sur deux allées différentes ( $k_1 \neq k_2$ ), le temps de déplacement entre deux casiers de coordonnées  $(i_1, j_1)$  et  $(i_2, j_2)$  est :

$$E(TB) = \text{Max}[(t'_h |i_2 + i_1| + t'_p \cdot |k_2 - k_1|), t'_v |j_2 - j_1|]$$

Le temps moyen de déplacement entre deux casiers peut donc être estimé par l'expression mathématique discrète suivante :sari[22]

$$\overline{E(TB)} = \frac{4}{N^2 - 2N} \sum_{k_1=1}^{M/2} \sum_{l_1=1}^{N_H} \sum_{k_2=1}^{M/2} \sum_{l_2=1}^{N_H} \sum_{j_1=1}^{N_V} \sum_{j_2=1}^{N_V} \max [ (t'_h |i_2 - i_1| + 2 \min(i_1, i_2)) \cdot \min(|k_2 - k_1|, 1) + |k_2 - k_1| t'_p, t'_v |j_2 - j_1| ]$$

Sachant que :

$$(i_1 + i_2) = |i_1 - i_2| + 2 \min(i_1, i_2)$$

Le temps moyen de double cycle est égal à la somme du temps moyen de simple cycle et du temps moyen de déplacement entre deux casiers aléatoires dans le système

$$E(DC) = E(SC) + E(TB)$$

Donc le temps de double cycle est :

$$\begin{aligned} \overline{E(DC)} = & 4/(N^2 - 2N) \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{Nh} \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{Nh} [\max(|t'_h|0-i_1|+(k_1-1)t'_p), |t'_v|1-j_1|] \\ & + \max(|t'_h|i_2-0|+(k_2-1)t'_p), |t'_v|j_2-1|] + \\ & \max(|t'_h||i_2-i_1|+2\min(i_1, i_2).)\min(|k_2-k_1|, 1) + |k_2-k_1|t'_p, |t'_v|j_2-j_1|] \\ & - \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{Nh} 2\max(|t'_h|0-i_1|+(k-1)t'_p, |t'_v|1-j_1|) \end{aligned}$$

### 2.4.3 Expression analytique continue du temps de simple cycle pour l'AS/RS multi allées

Ghomri et al [22]. Ont formulé l'expression analytique continue qui évalue le temps moyen de simple cycle pour le système multi allées. L'expression contient trois variables  $t_p$ ,  $t_v$ ,  $t_h$  correspondant au la figure suivante :

$$\begin{aligned} \text{ESC1} &:= \frac{t_p + t_h}{2} + \frac{t_v^3}{24 * t_p * t_h} \\ &\quad \text{si } t_v \leq \min(t_p, t_h) \\ \text{ESC2} &:= \frac{t_p + t_h}{2} + \frac{t_v^3}{24 * t_p * t_h} - \frac{[t_v - \min(t_p, t_h)]^4}{24 * t_p * t_h * t_v} \\ &\quad \text{si } \min(t_p, t_h) < t_v \leq \max(t_p, t_h) \\ \text{ESC3} &:= \frac{t_p + t_h}{2} + \frac{t_v^3}{24 * t_p * t_h} - \frac{[t_v - \min(t_p, t_h)]^4 + [t_v - \max(t_p, t_h)]^4}{24 * t_p * t_h * t_v} \\ &\quad \text{si } \max(t_p, t_h) < t_v \leq t_p + t_h \\ \text{ESC4} &:= \frac{t_v}{2} + \frac{2(t_p + t_h)^2 - (t_p * t_h)}{12 * t_v} \\ &\quad \text{si } t_p + t_h < t_v \end{aligned}$$

Ces quatre expressions correspondent à la variation de  $t_v$  par rapport à  $t_h$  et  $t_p$ .

### 2.4.4 Expression analytique continue du temps moyen de déplacement entre deux casiers pour l'AS/RS multi allées

Ghomri et al [1] ont formulé l'expression analytique continue qui évalue le temps moyen de déplacement entre deux casiers quelconques (ETB) lorsque l'allée de stockage est différente de l'allées de déstockage pour un AS/RS multi allées. L'expression contient trois variables réelles  $t_p$ ,  $t_v$ ,  $t_h$  correspondant à des durées de déplacement et s'écrit sous forme de 18 restrictions correspondant à 18 domaines de définitions différents tableau 2.2

**Tableau 2.2: l'expression de ETB**

Les fonctions	Domaines
$E1 := \frac{1}{1260} \frac{420 th^2 tp^3 + 1260 th^3 tp^2 + 7 tv^4 tp - tv^5}{th^2 tp^2}$	$tp \leq th \text{ and } 0 < tv \text{ and } tv \leq tp$
$E2 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tv^2} (21 tv^5 - 35 tv^4 tp + 35 tp^2 tv^3 - 21 tv^2 tp^3 + 1260 tv^2 th^3 + 7 tv tp^4 + 420 th^2 tp tv^2 - tp^5)$	$tp \leq th \text{ and } tp < tv \text{ and } tv \leq th$
$E3 := -\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (tp^7 - 84 tp tv th^5 - 7 tp^6 tv - 84 th tp tv^5 + 14 th tv^6 + 14 tp tv^6 + 14 tp th^6 - 14 tv th^6 - 21 tp^2 tv^5 - 42 th^2 tv^5 + 70 th^3 tv^4 + 35 tp^3 tv^4 - 70 th^4 tv^3 - 35 tp^4 tv^3 + 42 tv^2 th^5 + 21 tv^2 tp^5 + 210 tp th^2 tv^4 - 280 tp th^3 tv^3 + 210 tv^2 tp th^4 - 1260 tv^2 th^3 tp^2 - 420 tv^2 th^2 tp^3 - 2 tv^7 + 2 th^7)$	$tp \leq th \text{ and } th < tv \text{ and } tv \leq tp + th$
$E4 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tv^2} (21 tv^2 tp^3 - 21 tv^5 - 420 th^2 tv^3 - 35 tp^2 tv^3 - 7 tv tp^4 + 35 tv^4 tp + 210 th tv^4 - 210 th^4 tv - 280 tp th^3 tv - 210 tv th^2 tp^2 - 84 tv th tp^3 + 840 th^2 tp tv^2 - 280 th tp tv^3 + 14 th tp^4 + 42 th^5 + 70 tp th^4 + 70 th^3 tp^2 + 42 th^2 tp^3 + 1680 tv^2 th^3 + 210 tv^2 th tp^2 + tp^5)$	$tp \leq th \text{ and } tp + th < tv \text{ and } tv \leq 2 th$
$E5 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (42 th^5 tp^2 + 70 th^4 tp^3 + 70 th^3 tp^4 + 42 th^2 tp^5 + 14 th tp^6 + tp^7 - 1344 tp tv th^5 - 210 tv tp^4 th^2 + 210 tv^2 th tp^4 + 210 tv^4 th tp^2 - 7 tp^6 tv - 84 tp^5 tv th - 420 th^2 tp^2 tv^3 - 280 th tp^3 tv^3 - 84 th tp tv^5 + 14 th tv^6 + 7 tp tv^6 + 448 tp th^6 - 448 tv th^6 - 21 tp^2 tv^5 - 84 th^2 tv^5 + 280 th^3 tv^4 + 35 tp^3 tv^4 - 560 th^4 tv^3 - 35 tp^4 tv^3 + 672 tv^2 th^5 + 21 tv^2 tp^5 - 210 tp^2 th^4 tv - 280 tp^3 th^3 tv + 420 tp th^2 tv^4 - 1120 tp th^3 tv^3 + 1680 tv^2 tp th^4 + 1680 tv^2 th^3 tp^2 + 840 tv^2 th^2 tp^3 - tv^7 + 128 th^7)$	$tp \leq th \text{ and } 2 th < tv \text{ and } tv \leq tp + 2 th$

$E6 := -\frac{1}{90} \frac{1}{tv^2} (-30 tv^3 - 60 th tp tv - 15 tp^2 tv - 105 th^2 tv + 45 th^3 + 35 tp th^2 + 15 th tp^2 + 3 tp^3)$	$tp \leq th \text{ and } tp + 2 th < tv$
$E7 := \frac{1}{1260} \frac{420 th^2 tp^3 + 7 tv^4 tp + 1260 tp^2 th^3 - tv^5}{th^2 tp^2}$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2 th \text{ and } 0 < tv \text{ and } tv \leq th$
$E8 := -\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (-tv^7 + 2 th^7 + 14 tv^6 th + 7 tv^6 tp - 42 th^2 tv^5 + 70 th^3 tv^4 - 70 th^4 tv^3 - 84 th^5 tp tv - 14 th^6 tv + 14 th^6 tp + 42 tv^2 th^5 - 420 th^2 tv^2 tp^3 + 210 th^4 tv^2 tp - 1260 th^3 tv^2 tp^2 - 280 th^3 tv^3 tp - 84 th tv^5 tp + 210 th^2 tv^4 tp)$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2 th \text{ and } th < tv \text{ and } tv \leq tp$
$E9 := -\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (-2 tv^7 + 2 th^7 - 7 tp^6 tv - 21 tp^2 tv^5 + 14 tv^6 th + 14 tv^6 tp - 42 th^2 tv^5 + 70 th^3 tv^4 - 70 th^4 tv^3 - 84 th^5 tp tv + 35 tp^3 tv^4 - 14 th^6 tv + 14 th^6 tp + 42 tv^2 th^5 - 420 th^2 tv^2 tp^3 + 210 th^4 tv^2 tp - 1260 th^3 tv^2 tp^2 - 280 th^3 tv^3 tp - 84 th tv^5 tp + 210 th^2 tv^4 tp + tp^7 - 35 tp^4 tv^3 + 21 tv^2 tp^5)$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2 th \text{ and } tp < tv \text{ and } tv \leq 2 th$
$E10 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (tv^7 + 126 th^7 + 7 tp^6 tv + 21 tp^2 tv^5 - 7 tv^6 tp - 42 th^2 tv^5 + 210 th^3 tv^4 - 490 th^4 tv^3 - 1260 th^5 tp tv - 35 tp^3 tv^4 - 434 th^6 tv + 434 th^6 tp + 630 tv^2 th^5 + 420 th^2 tv^2 tp^3 + 1470 th^4 tv^2 tp + 1260 th^3 tv^2 tp^2 - 840 th^3 tv^3 tp + 210 th^2 tv^4 tp - tp^7 + 35 tp^4 tv^3 - 21 tv^2 tp^5)$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2 th \text{ and } 2 th < tv \text{ and } tv \leq tp + th$
$E11 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (-tv^7 - 280 th tp^3 tv^3 - 420 th^2 tp^2 tv^3 + 128 th^7 - 7 tp^6 tv - 21 tp^2 tv^5 + 14 tv^6 th + 7 tv^6 tp - 84 th^2 tv^5 + 280 th^3 tv^4 - 560 th^4 tv^3 + 210 tv^2 th tp^4 - 1344 th^5 tp tv + 35 tp^3 tv^4 + 14 th tp^6 + 42 th^2 tp^5 + 70 tp^4 th^3 + 70 tp^3 th^4 + 42 tp^2 th^5 - 448 th^6 tv + 448 th^6 tp + 672 tv^2 th^5 + 840 th^2 tv^2 tp^3 + 1680 th^4 tv^2 tp + 1680 th^3 tv^2 tp^2 - 1120 th^3 tv^3 tp - 84 th tv^5 tp + 420 th^2 tv^4 tp + tp^7 - 35 tp^4 tv^3 + 21 tv^2 tp^5 - 84 tp^5 tv th - 210 tp^4 tv th^2 - 280 tp^3 tv th^3 - 210 tp^2 tv th^4 + 210 th tp^2 tv^4)$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2 th \text{ and } tp + th < tv \text{ and } tv \leq tp + 2 th$

$E12 := -\frac{1}{90} \frac{1}{tv^2} (-30tv^3 + 3tp^3 + 15thtp^2 + 35th^2tp + 45th^3 - 15tp^2tv - 60thtpv - 105th^2tv)$	$th < tp \text{ and } tp \leq 2th \text{ and } tp + 2th < tv$
$E13 := \frac{1}{1260} \frac{1260th^3tp^2 + 420th^2tp^3 + 7tv^4tp - tv^5}{th^2tp^2}$	$2th < tp \text{ and } 0 < tv \text{ and } tv < th$
$E14 := -\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2tp^2tv^2} (210tv^2pth^4 - 1260th^3tv^2tp^2 - 420th^2tv^2tp^3 + 70th^3tv^4 + 42tv^2th^5 - 84th^5tpv - 280th^3tpv^3 + 210th^2tpv^4 - 84thtpv^5 - 70th^4tv^3 + 14th^6tp - 14th^6tv - tv^7 + 2th^7 + 7tpv^6 + 14thtv^6 - 42th^2tv^5)$	$th < tp \text{ and } th < tv \text{ and } tv < 2th$
$E15 := \frac{1}{90} \frac{1}{tp^2tv^2} (-3tv^5 + 15thtv^4 - 35th^2tv^3 + 45tv^2th^3 + 15tv^4tp - 60thtpv^3 + 30tv^2tp^3 + 105tv^2th^2tp + 90thtp^2tv - 90th^3tpv + 9th^5 - 31th^4tv + 31tpth^4)$	$2th < tp \text{ and } 2th < tv \text{ and } tv < tp$
$E16 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2tp^2tv^2} (1470tv^2pth^4 + 1260th^3tv^2tp^2 + 420th^2tv^2tp^3 + 210th^3tv^4 - tp^7 + 35tp^4tv^3 + 630tv^2th^5 - 1260th^5tpv - 840th^3tpv^3 + 210th^2tpv^4 - 490th^4tv^3 + 434th^6tp - 434th^6tv + tv^7 + 126th^7 - 35tv^4tp^3 + 7tpv^6 - 7tpv^6 - 42th^2tv^5 + 21tv^5tp^2 - 21tv^2tp^5)$	$2th < tp \text{ and } tp < tv \text{ and } tv < tp + th$
$E17 := \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2tp^2tv^2} (1680tv^2pth^4 + 1680th^3tv^2tp^2 + 840th^2tv^2tp^3 + 280th^3tv^4 + tp^7 - 35tp^4tv^3 + 672tv^2th^5 - 1344th^5tpv - 1120th^3tpv^3 + 420th^2tpv^4 - 84thtpv^5 - 560th^4tv^3 - 280tvth^3tp^3 - 210tvtp^2th^4 - 84tvthtp^5 - 210tvth^2tp^4 - 420th^2tp^2tv^3 - 280thtp^3tv^3 + 448th^6tp - 448th^6tv - tv^7 + 128th^7 + 35tv^4tp^3 - 7tpv^6 + 7tpv^6 + 14thtv^6 - 84th^2tv^5 + 14thtp^6 + 42th^2tp^5 + 70th^3tp^4 + 70tp^3th^4 + 42tp^2th^5 + 210tv^4thtp^2 + 210tv^2thtp^4 - 21tv^5tp^2 + 21tv^2tp^5)$	$2th < tp \text{ and } tp + th < tv \text{ and } tv < tp + 2th$

$E18 := -\frac{1}{90} \frac{1}{tv^2} (-105 th^2 tv - 30 tv^3 - 15 tp^2 tv - 60 th tp tv + 3 tp^3 + 15 th tp^2 + 35 th^2 tp + 45 th^3)$	$2 th < tp \text{ and } tp + 2 th < tv$
--	---

## 2.5 Etude de continuité pour l'expression de temps de déplacement entre deux casiers

### 2.5.1 Continuité de chacune des restrictions dans son domaine Respectif

- L'expression E1 est la somme d'une fonction polynôme et de fractions rationnelle :
  - $420 * tp + th$  Fonction polynôme en (tp, th, tv) continue sur R3 et donc elle est aussi continue sur son domaine de définition (R\*+)
  - $7 * tv^2 \div 1260 * th^2$  fraction rationnelle par rapport à deux variables th et tv donc elle est continue sur son domaine de définition (R\*+)
  - $-\frac{tv^5}{th^2 * tp^2}$  fraction rationnelle par rapport à chacune des trois variables tp, th et tv donc elle est continue sur son domaine de définition (R\*+)

De la même manière Les autres fonctions sont toutes des sommes de fonctions polynômes et fractions rationnelles.

Donc elles sont continuées sur leur domaine de définition.

### 2.5.2 Continuité de la fonction globale ETB sur les frontières de son domaine

Nous avons calculé les limites de chaque restriction au frontière de son domaine de définition, et nous avons constaté que les limites de la fonction ETB dans les frontières de chaque deux domaines successifs sont égaux. Voir le tableau (2.3).

**Tableau 2.3: des limites**

$\lim_{tv \rightarrow tp} E1;$	$\frac{1}{210} \frac{70 th^2 tp + 210 th^3 + tp^3}{th^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp} E2;$	$\frac{1}{210} \frac{70 th^2 tp + 210 th^3 + tp^3}{th^2}$
$\lim_{tv \rightarrow th} E2;$	$\frac{1}{1260} \frac{1}{th^4} (1281 th^5 + 385 tp th^4 - tp^5 + 7 tp^4 th - 21 th^2 tp^3 + 35 th^3 tp^2)$	=	$\lim_{tv \rightarrow th} E3;$	$\frac{1}{1260} \frac{1}{th^4} (1281 th^5 + 385 tp th^4 - tp^5 + 7 tp^4 th - 21 th^2 tp^3 + 35 th^3 tp^2)$

$\lim_{tv \rightarrow th+tp} E3;$	$\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2(th+tp)^2} (2205th^3tp^2 + 504th^2tp^3 + 3010tpth^4 - 6tp^5 + 35tp^4th + 1281th^5)$	=	$\lim_{tv \rightarrow th+tp} E4;$	$\frac{1}{1260} \frac{1}{th^2(th+tp)^2} (2205th^3tp^2 + 504th^2tp^3 + 3010tpth^4 - 6tp^5 + 35tp^4th + 1281th^5)$
$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E4;$	$\frac{1}{5040} \frac{5670th^5 + 1190tpth^4 + tp^5 - 42th^2tp^3 + 210th^3tp^2}{th^4}$	=	$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E5;$	$\frac{1}{5040} \frac{5670th^5 + 1190tpth^4 + tp^5 - 42th^2tp^3 + 210th^3tp^2}{th^4}$
$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th+tp} E5;$	$\frac{1}{90} \frac{405th^3 + 550th^2tp + 255thtp^2 + 42tp^3}{(2th+tp)^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th+tp} E6;$	$\frac{1}{90} \frac{405th^3 + 550th^2tp + 255thtp^2 + 42tp^3}{(2th+tp)^2}$
$\lim_{tv \rightarrow th} E7$	$-\frac{1}{1260} \frac{-1260tp^2th - 420tp^3 - 7th^2tp + th^3}{tp^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow th} E8;$	$-\frac{1}{1260} \frac{-1260tp^2th - 420tp^3 - 7th^2tp + th^3}{tp^2}$
$\lim_{tv \rightarrow tp} E8;$	$-\frac{1}{630} \frac{1}{th^2tp^4} (-126th^2tp^5 - 735tp^4th^3 - 35thtp^6 + 3tp^7 + 70th^4tp^3 - 21tp^2th^5 + th^7)$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp} E9;$	$-\frac{1}{630} \frac{1}{th^2tp^4} (-126th^2tp^5 - 735tp^4th^3 - 35thtp^6 + 3tp^7 + 70th^4tp^3 - 21tp^2th^5 + th^7)$
$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E9;$	$\frac{1}{5040} \frac{1}{th^4tp^2} (-84th^2tp^5 + 280tp^4th^3 + 14thtp^6 - tp^7 + 1120th^4tp^3 + 5712tp^2th^5 + 2th^7 - 14th^6tp)$	=	$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E10;$	$\frac{1}{5040} \frac{1}{th^4tp^2} (-84th^2tp^5 + 280tp^4th^3 + 14thtp^6 - tp^7 + 1120th^4tp^3 + 5712tp^2th^5 + 2th^7 - 14th^6tp)$
$\lim_{tv \rightarrow tp+th} E10;$	$\frac{1}{1260} \frac{588tp^5 + 2100thtp^4 + 3080th^2tp^3 + 1260tp^2th^3 + th^5}{tp^2(tp+th)^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp+th} E11;$	$\frac{1}{1260} \frac{588tp^5 + 2100thtp^4 + 3080th^2tp^3 + 1260tp^2th^3 + th^5}{tp^2(tp+th)^2}$
$\lim_{tv \rightarrow tp+2 \cdot th} E11;$	$\frac{1}{90} \frac{42tp^3 + 255thtp^2 + 550tpth^2 + 405th^3}{(tp+2th)^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp+2 \cdot th} E12;$	$\frac{1}{90} \frac{42tp^3 + 255thtp^2 + 550tpth^2 + 405th^3}{(tp+2th)^2}$
$\lim_{tv \rightarrow th} E13;$	$-\frac{1}{1260} \frac{th^3 - 7th^2tp - 420tp^3 - 1260thtp^2}{tp^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow th} E14;$	$-\frac{1}{1260} \frac{th^3 - 7th^2tp - 420tp^3 - 1260thtp^2}{tp^2}$
$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E14;$	$-\frac{1}{360} \frac{9th^3 - 31th^2tp - 120tp^3 - 360thtp^2}{tp^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow 2 \cdot th} E15;$	$-\frac{1}{360} \frac{9th^3 - 31th^2tp - 120tp^3 - 360thtp^2}{tp^2}$
$\lim_{tv \rightarrow tp} E15;$	$\frac{1}{90} \frac{45thtp^4 + 70th^2tp^3 - 45th^3tp^2 + 42tp^5 + 9th^5}{tp^4}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp} E16;$	$\frac{1}{90} \frac{45thtp^4 + 70th^2tp^3 - 45th^3tp^2 + 42tp^5 + 9th^5}{tp^4}$



$\lim_{tv \rightarrow tp + th} E16;$	$\frac{1}{1260} \frac{588tp^5 + 2100thtp^4 + 3080th^2tp^3 + th^5 + 1260th^3tp^2}{tp^2(tp+th)^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp + th} E17;$	$\frac{1}{1260} \frac{588tp^5 + 2100thtp^4 + 3080th^2tp^3 + th^5 + 1260th^3tp^2}{tp^2(tp+th)^2}$
$\lim_{tv \rightarrow tp + 2 \cdot th} E17;$	$\frac{1}{90} \frac{42tp^3 + 255thtp^2 + 550th^2tp + 405th^3}{(tp + 2th)^2}$	=	$\lim_{tv \rightarrow tp + 2 \cdot th} E18;$	$\frac{1}{90} \frac{42tp^3 + 255thtp^2 + 550th^2tp + 405th^3}{(tp + 2th)^2}$

D'après le tableau nous concluons que la fonction est continue sur les frontières de ses domaines de définition. Donc ETB est une fonction continue dans  $(\mathbb{R}^{*+})^3$ .

## 2.6 Optimisation du temps moyen de déplacement entre le casier de stockage et le casier de déstockage d'un AS/RS multi allées

Dans Le but d'optimiser les trois dimensions de l'AS/RS multi allées, dans un double cycle, nous avons utilisé l'expression analytique de temps moyen de déplacement entre deux casiers quelconques (ETB)d'un AS/RS multi allées. Cette expression possède trois variables réelles. (tp ,th et tv)

En plus des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux, on se voit également confronté à une contrainte liée à la taille du système et à la constance de cette taille ce qui nous ramène à un problème d'optimisation en nombres réels d'une fonction à trois variables avec contraintes.

### 2.6.1 Formulation du problème :

- **Contraintes :**

Dans notre problème d'optimisation, on a deux types de contraintes :

- Des contraintes d'inégalités liées à la positivité des trois temps de déplacement de la machine de stockage/déstockage :  $tp > 0, tv > 0, th > 0$
- Une contrainte d'égalité liée à la constance de la taille du système de stockage :  $th.tv.tp = \text{constante}$ . (Si l'on considère un système avec un nombre total de casiers constant, ceci revient à dire que  $th.tv.tp = \text{constante}$ .)

- **Démonstration :**

Nous déterminons les dimensions des AS/ RS multi allées comme suit :

Nous supposons que le système a un nombre constant de casiers de stockage  $N = \text{constante}$ .

$$N = (Nl * Nh * M)$$

$$\begin{array}{l}
 T_v = t'_v * N_h \longrightarrow N_h = t_v / t'_v \\
 tp = t'_p * \frac{M}{2} \longrightarrow M = \frac{tp}{t'_p} \\
 th = t'_h * N1 \longrightarrow N1 = \frac{th}{t'_h}
 \end{array}$$

Donc :

$$N = 2 \left( \frac{tp}{t'_p} * \frac{th}{t'_h} * \frac{tv}{t'_v} \right)$$

Nous obtenons alors :

$$(N * t'_p * t'_h * t'_v) = tp * th * tv$$

N, t'h, t'v, t'p sont constants donc :  $tp * tv * th = \text{constante}$

Nous avons un problème d'optimisation en nombres réels d'une fonction à trois variables (tp, th, tv) avec des contraintes d'inégalité ( $tp > 0, tv > 0, th > 0$ ) et d'égalité

$tp * tv * th = \text{constante}$ .

La fonction ETB est donc continue sur  $(\mathbb{R}^{*+})^3$ .

### 2.6.1 Optimisation de la fonction ETB

- **Changement de variable :**

Dans le but de relaxer de la contrainte de constance de la taille du système, nous adoptons les nouvelles notations :

$$tp = x, th = y ;$$

Et comme  $th.tv.tp = \text{constante}$ , en prenant arbitrairement cette constante =1, on a :

$$tv = \frac{1}{x} * y$$

Le changement de variable nous ramènés à une fonction à deux variables, de la forme (voir tableau2.4) :

**Tableau 2.4 fonction à deux variables**

Les fonctions	Les domaines
$\frac{1}{1260} \frac{420y^7 x^8 + 1260y^8 x^7 + 7y x^2 - 1}{x^7 y^7}$	$x \leq y$ and $0 < \frac{1}{xy}$ and $\frac{1}{xy} \leq x$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^3 y^5} (-21 + 35y x^2 - 35x^4 y^2 + 21x^6 y^3 - 1260y^6 x^3 - 7x^8 y^4 - 420x^4 y^5 + x^{10} y^5)$	$x \leq y$ and $x < \frac{1}{xy}$ and $\frac{1}{xy} \leq y$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (x^{14} y^7 - 84y^{11} x^7 - 7x^{12} y^6 - 84x^3 y^3 + 14x y^2 + 14x^2 y + 14x^8 y^{13} - 14y^{12} x^6 - 21x^4 y^2 - 42x^2 y^4 + 70x^3 y^6 + 35x^6 y^3 - 70y^8 x^4 - 35x^8 y^4 + 42y^{10} x^5 + 21x^{10} y^5 + 210x^4 y^5 - 280x^5 y^7 + 210y^9 x^6 - 1260x^7 y^8 - 420x^8 y^7 - 2 + 2y^{14} x^7)$	$x \leq y$ and $y < \frac{1}{xy}$ and $\frac{1}{xy} \leq x + y$
$\frac{1}{1260} \frac{1}{x^3 y^5} (21x^6 y^3 - 21 - 420x^2 y^4 - 35x^4 y^2 - 7x^8 y^4 + 35x^2 y + 210x y^2 - 210y^8 x^4 - 280y^7 x^5 - 210x^6 y^6 - 84x^7 y^5 + 840x^4 y^5 - 280x^3 y^3 + 14y^6 x^9 + 42y^{10} x^5 + 70x^6 y^9 + 70y^8 x^7 + 42y^7 x^8 + 1680y^6 x^3 + 210x^5 y^4 + x^{10} y^5)$	$x \leq y$ and $x + y < \frac{1}{xy}$ and $\frac{1}{xy} \leq 2y$
$\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (-1 + 1680y^9 x^6 + 21x^{10} y^5 - 280x^7 y^5 - 35x^8 y^4 + x^{14} y^7 + 128y^{14} x^7 + 1680x^7 y^8 + 70y^{10} x^{11} + 42y^9 x^{12} + 14y^8 x^{13} + 448x^8 y^{13} - 84x^{11} y^7 - 210x^{10} y^8 - 210x^8 y^{10} - 280x^9 y^9 + 840x^8 y^7 - 1344y^{11} x^7 + 70y^{11} x^{10} + 42y^{12} x^9 + 210x^9 y^6 - 448y^{12} x^6 + 672y^{10} x^5 - 7x^{12} y^6 - 1120x^5 y^7 - 560y^8 x^4 + 7x^2 y + 14x y^2 - 84x^3 y^3 - 21x^4 y^2 + 35x^6 y^3 - 84x^2 y^4 + 280x^3 y^6 - 420x^6 y^6 + 210x^5 y^4 + 420x^4 y^5)$	$x \leq y$ and $2y < \frac{1}{xy}$ and $\frac{1}{xy} \leq x + 2y$

$-\frac{1}{90} \frac{1}{xy} (-30 - 60x^3y^3 - 15x^4y^2 - 105y^4x^2 + 45y^6x^3 + 35x^4y^5 + 15y^4x^5 + 3x^6y^3)$	$x \leq y \text{ and } x + 2y < \frac{1}{xy}$
$\frac{1}{1260} \frac{420y^7x^8 + 1260y^8x^7 + 7yx^2 - 1}{x^7y^7}$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } 0 < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} \leq y$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7y^7} (2y^{14}x^7 - 420x^8y^7 + 210y^9x^6 - 1260x^7y^8 + 210x^4y^5 - 280x^5y^7 - 84x^3y^3 - 1 - 84y^{11}x^7 - 70y^8x^4 + 70x^3y^6 - 14y^{12}x^6 + 14y^{13}x^8 - 42x^2y^4 + 14xy^2 + 7x^2y + 42y^{10}x^5)$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} \leq x$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7y^7} (-35x^8y^4 + 21x^{10}y^5 + 2y^{14}x^7 - 420x^8y^7 + 210y^9x^6 - 1260x^7y^8 + 210x^4y^5 - 280x^5y^7 - 84x^3y^3 - 2 - 84y^{11}x^7 - 21x^4y^2 + 35x^6y^3 - 70y^8x^4 + 70x^3y^6 - 14y^{12}x^6 + 14y^{13}x^8 - 42x^2y^4 + 14xy^2 + 14x^2y + 42y^{10}x^5 - 7x^{12}y^6 + x^{14}y^7)$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } x < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} \leq 2y$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7y^7} (-35x^8y^4 + 21x^{10}y^5 - 126y^{14}x^7 - 420x^8y^7 - 1470y^9x^6 - 1260x^7y^8 - 210x^4y^5 + 840x^5y^7 - 1 + 1260y^{11}x^7 - 21x^4y^2 + 35x^6y^3 + 490y^8x^4 - 210x^3y^6 + 434y^{12}x^6 - 434y^{13}x^8 + 42x^2y^4 + 7x^2y - 630y^{10}x^5 - 7x^{12}y^6 + x^{14}y^7)$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } 2y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} \leq x + y$

$\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (-1 - 280y^9 x^9 + 14y^8 x^{13} + 42y^9 x^{12} + 70y^{11} x^{10} - 84x^{11} y^7 - 210y^8 x^{10} + 840x^8 y^7 + 1680x^7 y^8 + 70x^{11} y^{10} + 42x^9 y^{12} - 210y^{10} x^8 - 1344y^{11} x^7 + 448y^{13} x^8 + x^{14} y^7 + 128y^{14} x^7 - 420x^6 y^6 - 21x^4 y^2 + 14x y^2 + 7x^2 y - 84x^2 y^4 + 35x^6 y^3 + 420x^4 y^5 + 280x^3 y^6 - 84x^3 y^3 + 210x^5 y^4 + 210x^9 y^6 - 448y^{12} x^6 + 21x^{10} y^5 + 1680y^9 x^6 + 672y^{10} x^5 - 560y^8 x^4 - 1120x^5 y^7 - 280x^7 y^5 - 35x^8 y^4 - 7x^{12} y^6)$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } x + y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} \leq x + 2y$
$-\frac{1}{90} \frac{1}{xy} (-60x^3 y^3 - 105y^4 x^2 - 30 + 3x^6 y^3 + 15y^4 x^5 + 35y^5 x^4 + 45y^6 x^3 - 15x^4 y^2)$	$y < x \text{ and } x \leq 2y \text{ and } x + 2y < \frac{1}{xy}$
$\frac{1}{1260} \frac{-1 + 7x^2 y + 1260y^8 x^7 + 420y^7 x^8}{x^7 y^7}$	$2y < x \text{ and } 0 < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < y$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (2y^{14} x^7 - 1 + 14x y^2 + 7x^2 y - 70y^8 x^4 + 14y^{13} x^8 - 14y^{12} x^6 - 42x^2 y^4 + 70x^3 y^6 + 42y^{10} x^5 - 84x^3 y^3 - 84y^{11} x^7 + 210x^4 y^5 - 280x^5 y^7 + 210y^9 x^6 - 1260x^7 y^8 - 420x^8 y^7)$	$2y < x \text{ and } y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < 2y$
$\frac{1}{90} \frac{1}{y^3 x^5} (90x^5 y^4 + 45y^6 x^3 - 90y^7 x^5 + 15x^2 y - 60x^3 y^3 + 30x^6 y^3 + 105x^4 y^5 - 35x^2 y^4 - 31y^8 x^4 + 31x^6 y^9 - 3 + 15x y^2 + 9y^{10} x^5)$	$2y < x \text{ and } 2y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < x$
$-\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (21x^{10} y^5 - 21x^4 y^2 + 35x^6 y^3 - 7x^{12} y^6 - 35x^8 y^4 - 1260x^7 y^8 - 1 + 490y^8 x^4 + 434y^{12} x^6 - 434y^{13} x^8 + 7x^2 y + 42x^2 y^4 - 210x^3 y^6 - 210x^4 y^5 + 840x^5 y^7 - 1470y^9 x^6 - 420x^8 y^7 + 1260y^{11} x^7 - 630y^{10} x^5 - 126y^{14} x^7 + x^{14} y^7)$	$2y < x \text{ and } x < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < x + y$

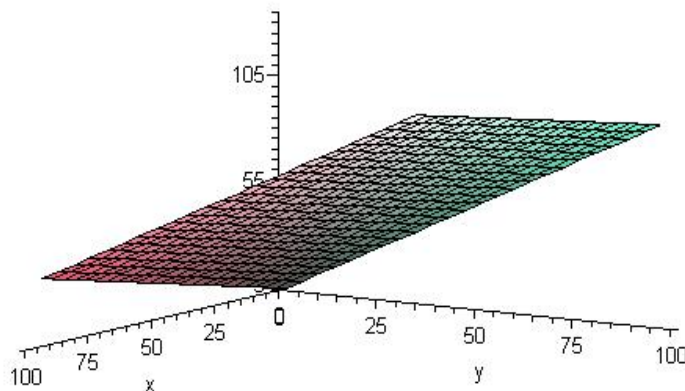
$\frac{1}{1260} \frac{1}{x^7 y^7} (-1 - 7x^{12}y^6 - 448y^{12}x^6 - 210y^{10}x^8 - 210y^8x^{10} + 128y^{14}x^7 + 42y^9x^{12} + 1680x^7y^8 - 1344y^{11}x^7 + 840x^8y^7 - 84x^{11}y^7 - 280y^9x^9 + x^{14}y^7 + 70y^{10}x^{11} + 448y^{13}x^8 + 70x^{10}y^{11} + 14y^8x^{13} + 42x^9y^{12} - 560y^8x^4 + 280x^3y^6 - 280x^7y^5 + 672y^{10}x^5 + 1680y^9x^6 - 1120x^5y^7 + 210x^9y^6 + 21x^{10}y^5 - 35x^8y^4 + 420x^4y^5 + 35x^6y^3 + 7x^2y + 210x^5y^4 - 84x^3y^3 + 14xy^2 - 420x^6y^6 - 21x^4y^2 - 84x^2y^4)$	$2y < x \text{ and } x + y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < x + 2y$
$-\frac{1}{90} \frac{1}{xy} (35y^5x^4 + 3x^6y^3 + 15y^4x^5 + 45y^6x^3 - 30 - 60x^3y^3 - 105y^4x^2 - 15x^4y^2)$	$2y < x \text{ and } x + 2y < \frac{1}{xy}$

• **Domaine de définition :**

Les variables x et y représentent des durées de déplacement, elles sont positives et non nulles donc le domaine d'étude de la nouvelle fonction à deux variables est :

$$D = ] 0, +\infty [*] 0, +\infty [.$$

Nous avons vérifié sous Maple que la fonction f est strictement positive. (Voir figure2.4)



**Figure2.4** graphe de la fonction ETB 3D

### 2.6.1 Optimisation de la fonction à deux variables

#### 2.6.2 Résolution du problème de la détermination des trois dimensions optimales

Soit  $f(x, y)$  une fonction définie sur  $D \in \mathbb{R}^2$

Définition

Un point  $(x_0, y_0) \in D$  est dit point critique pour la fonction  $f$  si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Soit  $(x_0, y_0)$  un point critique.

On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Théorème de Stewart

- 1- Si  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un minimum local.
- 2- Si  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un maximum local.
- 3- Si  $rt - s^2 < 0$  et  $r > 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un point selle ou col.
- 4- Si  $rt - s^2 = 0$  et  $r > 0$  on ne peut rien dire.

La détermination des points critiques des restrictions de ETB dans leurs domaines se fait en appliquant le théorème précédent. Nous détaillons ci-dessous un exemple de calcul (voir tableau 2.5). Le tableau 2.6 résume les résultats de l'optimisation de la fonction ETB.

- **Calcul des dérivées partielles et recherche des points critiques :**

Calcul de première dérivée de la 17 -ème restriction dans **le domaine 1** :

On pose  $ETB=f(x,y)$

- 17ème restriction :

**Tableau 2.5 : les dérivés premiers pour la 17-eme restriction**

$f_{17}(x,y)$	$\frac{1}{180} \frac{1}{x^8 y^7} (1 - 192y^{10} x^5 - 5x^8 y^4 + 9x^{10} y^5 + 60x^9 y^6$ $+ 64y^{12} x^6 - 5x^{12} y^6 + 240y^8 x^4 - 180x^4 y^5 + 320x^5 y^7$ $+ 64y^{13} x^8 + 12x^9 y^{12} + 30x^{10} y^{11} - 80x^9 y^9 - 90x^{10} y^8$ $- 48x^{11} y^7 - 30x^8 y^{10} + 120x^8 y^7 + 40y^{10} x^{11} + 12y^8 x^{13}$ $+ 30y^9 x^{12} + x^{14} y^7 - 240y^9 x^6 - 12x y^2 - 160x^3 y^6 - 5x^2 y$ $+ 48x^3 y^3 - 60x^5 y^4 - 5x^6 y^3 + 60x^6 y^6 + 60x^2 y^4$ $+ 9x^4 y^2)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	$\frac{1}{180} \frac{1}{x^8 y^7} (1 - 192y^{10} x^5 - 5x^8 y^4 + 9x^{10} y^5 + 60x^9 y^6$ $+ 64y^{12} x^6 - 5x^{12} y^6 + 240y^8 x^4 - 180x^4 y^5 + 320x^5 y^7$ $+ 64y^{13} x^8 + 12x^9 y^{12} + 30x^{10} y^{11} - 80x^9 y^9 - 90x^{10} y^8$ $- 48x^{11} y^7 - 30x^8 y^{10} + 120x^8 y^7 + 40y^{10} x^{11} + 12y^8 x^{13}$ $+ 30y^9 x^{12} + x^{14} y^7 - 240y^9 x^6 - 12x y^2 - 160x^3 y^6 - 5x^2 y$ $+ 48x^3 y^3 - 60x^5 y^4 - 5x^6 y^3 + 60x^6 y^6 + 60x^2 y^4$ $+ 9x^4 y^2)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$	$\frac{1}{180} \frac{1}{x^7 y^8} (1 + 288y^{10} x^5 + 80x^7 y^5 + 15x^8 y^4 - 6x^{10} y^5$ $- 30x^9 y^6 - 320y^{12} x^6 + x^{12} y^6 - 80y^8 x^4 - 120x^4 y^5$ $+ 384y^{13} x^8 + 30x^9 y^{12} + 40x^{10} y^{11} + 240x^7 y^8 - 768y^{11} x^7$ $- 80x^9 y^9 - 30x^{10} y^8 - 90x^8 y^{10} + 30y^{10} x^{11} + 2y^8 x^{13}$ $+ 12y^9 x^{12} + 128y^{14} x^7 + 480y^9 x^6 - 10x y^2 - 40x^3 y^6$ $- 6x^2 y + 48x^3 y^3 - 90x^5 y^4 - 20x^6 y^3 + 60x^6 y^6 + 36x^2 y^4$ $+ 15x^4 y^2)$

• Résolution de système

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{180} \frac{1}{x^7 y^8} (1 + 288y^{10} x^5 + 80x^7 y^5 + 15x^8 y^4 - 6x^{10} y^5 \\ & - 30x^9 y^6 - 320y^{12} x^6 + x^{12} y^6 - 80y^8 x^4 - 120x^4 y^5 \\ & + 384y^{13} x^8 + 30x^9 y^{12} + 40x^{10} y^{11} + 240x^7 y^8 - 768y^{11} x^7 \\ & - 80x^9 y^9 - 30x^{10} y^8 - 90x^8 y^{10} + 30y^{10} x^{11} + 2y^8 x^{13} \\ & + 12y^9 x^{12} + 128y^{14} x^7 + 480y^9 x^6 - 10x y^2 - 40x^3 y^6 \\ & - 6x^2 y + 48x^3 y^3 - 90x^5 y^4 - 20x^6 y^3 + 60x^6 y^6 + 36x^2 y^4 \\ & + 15x^4 y^2) \end{aligned} \right\} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{180} \frac{1}{x^8 y^7} (1 - 192y^{10} x^5 - 5x^8 y^4 + 9x^{10} y^5 + 60x^9 y^6 \\ & + 64y^{12} x^6 - 5x^{12} y^6 + 240y^8 x^4 - 180x^4 y^5 + 320x^5 y^7 \\ & + 64y^{13} x^8 + 12x^9 y^{12} + 30x^{10} y^{11} - 80x^9 y^9 - 90x^{10} y^8 \\ & - 48x^{11} y^7 - 30x^8 y^{10} + 120x^8 y^7 + 40y^{10} x^{11} + 12y^8 x^{13} \\ & + 30y^9 x^{12} + x^{14} y^7 - 240y^9 x^6 - 12x y^2 - 160x^3 y^6 - 5x^2 y \\ & + 48x^3 y^3 - 60x^5 y^4 - 5x^6 y^3 + 60x^6 y^6 + 60x^2 y^4 \\ & + 9x^4 y^2) \end{aligned} \right\} = 0$$



La résolution du système avec le logiciel Maple, nous a donnée deux solutions réelles, toutes les autres solutions sont complexes :

- Le domaine qui correspond à ces deux point critique est le 17eme domaine :

$$2y < x \text{ and } x + y < \frac{1}{xy} \text{ and } \frac{1}{xy} < x + 2y$$

- pour le point critique (1.231420217, 0.4474451206):

- $2y < x \rightarrow 0.8948902412 < 1.231420217$

- $y+x < tv \rightarrow tv = 1/x*y \rightarrow tv = \frac{1}{1.231420217 * 0.4474451206}$   
 $\rightarrow tv = 1.814905197$

- Et  $y+x = 1.678865338$ ,  $1.678865338 < 1.814905197$  donc  $y+x < tv$

- Et  $x + 2 * y = 2.126310458$ ,  $1.814905197 < 2.126310458$

- Donc  $1.678865338 < 1.814905197 < 2.126310458$

$$\Leftrightarrow y+x < tv < 2y+x$$

Donc le point critique (1.231420217, 0.4474451206) est le seul dans le domaine 17.

Détermination de la nature de ce point :

On applique le théorème de Stewart pour le point  $(x_0, y_0) = (1.231420217, 0.4474451206)$

**Tableau 2.5 calcul des dérivées secondes.**

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$\frac{1}{90} \frac{1}{y^7 x^9} (-4 + 3x^{14}y^7 - 90y^8x^{10} + 30y^8x^{13} - 120x^3y^3 + 360x^4y^5 - 60x^6y^6 + 90x^5y^4 + 5x^6y^3 + 30x^9y^6 - 480x^5y^7 + 240y^9x^6 - 480y^8x^4 + 9x^{10}y^5 + 288y^{10}x^5 - 72x^{11}y^7 - 40y^9x^9 + 60y^9x^{12} - 18x^4y^2 + 15x^2y - 180x^2y^4 + 400x^3y^6 + 42xy^2 + 6x^9y^{12} + 30x^{10}y^{11} + 60y^{10}x^{11} - 64y^{12}x^6 - 10x^{12}y^6)$	$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$	<p>0.962378988 6</p>
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$	$\frac{1}{180} \frac{1}{y^8 x^8} (-7 - 90y^8x^{10} + 12y^8x^{13} + 15x^8y^4 - 192x^3y^3 + 360x^4y^5 - 60x^6y^6 + 180x^5y^4 + 20x^6y^3 - 60x^9y^6 - 480y^9x^6 + 240y^8x^4 - 18x^{10}y^5 - 576y^{10}x^5 - 160y^9x^9 + 60y^9x^{12} + 384y^{13}x^8 - 45x^4y^2 + 30x^2y - 180x^2y^4 + 160x^3y^6 + 60xy^2 + 60x^9y^{12} + 120x^{10}y^{11} + 120y^{10}x^{11} - 90y^{10}x^8 + 320y^{12}x^6 + 5x^{12}y^6)$	$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$	<p>2.056230578</p>
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) :$	$\frac{1}{90} \frac{1}{y^9 x^7} (-4 - 30x^8y^4 - 120x^3y^3 + 180x^4y^5 - 60x^6y^6 + 180x^5y^4 + 50x^6y^3 + 30x^9y^6 + 240y^9x^6 - 120x^7y^5 + 9x^{10}y^5 + 288y^{10}x^5 - 40y^9x^9 + 6y^9x^{12} + 960y^{13}x^8 - 45x^4y^2 + 21x^2y - 72x^2y^4 + 40x^3y^6 + 30xy^2 + 60x^9y^{12} + 60x^{10}y^{11} - 1152y^{11}x^7 + 30y^{10}x^{11} - 90y^{10}x^8 + 384y^{14}x^7 - 640y^{12}x^6 - x^{12}y^6)$	$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$	<p>7.604942667</p>

On a  $r=0.9623789886 > 0$  et  $rt-s^2=3.090752842 > 0$

Donc le point (1.231420217, 0.4474451206) est un minimum local pour la restriction 17 dans le domaine 17.

**Le tableau 2.6 résume les résultats analytiques de l'optimisation de la fonction du temps de déplacement entre deux casiers.**

Les restrictions	Les Point critique	Domaine	rt-s2	r	Min ou max
E1	$[x = 1.217967267, y = 0.5159128237]$ $[x = 0.5182111070, y = 0.7889914711]$	∉ D1	/	/	/
E2	$[[x = 1.218018136, y = 0.5159021434],$ $[x = 2.880006021, y = 0.3371801210]]$	∉ D2	/	/	/
E3	$[[x = 3.373122213, y = 0.1971332107]]$	∉ D3	/	/	/
E4	/	∉ D4	/	/	/
E5	$[x = 0.8212477464, y = 0.3601895326]$ $[x = 1.231428973, y = 0.4474451206]$	∉ D5	/	/	/
E6	$[[x = 1.231456943, y = 0.4474463383]$ $[x = 1.922025282, y = 0.5127540449]$	∉ D6	/	/	/
E7	$[x = 1.217967267, y = 0.5159128237]$ $[x = 0.5182111070, y = 0.7889914711]$	∉ D7	/	/	/
E8	$[x = 0.5497632190, y = 0.3893169746]$ $[x = 0.1021216346, y = 1.859398792]$ $[x = 0.09063548615, y = 4.487857025]$	∉ D8	/	/	/
E9	$[x = 3.373122224, y = 0.1971332107]$	∉ D9	/	/	/
E10	$[x = 2.924147875, y = 0.3196603476]$ $[x = 1.231472149, y = 0.4474451155]$	∉ D10	/	/	/
E11	$[x = 0.8212477464, y = 0.3601895326]$ $[x = 1.231428973, y = 0.4474451206]$	∉ D11	/	/	/
E12	$[x = 1.231456943, y = 0.4474463383]$ $[x = 1.922025282, y = 0.5127540449]$	∉ D12	/	/	/
E13	$[x = 1.217967267, y = 0.5159128237]$ $[x = 0.5182111070, y = 0.7889914711]$	∉ D13	/	/	/
E14	$[x = 0.5497632185, y = 0.3893169746]$ $[x = 0.05564989760, y = 1.859398792]$ $[x = 0.09063548625, y = 4.487857025]$	∉ D14	/	/	/
E15	$[x = 1.230692849, y = 0.4475302902]$ $[x = 0.7411229983, y = 0.5231675265]$	∉ D15	/	/	/
E16	$[x = 2.924147622, y = 0.3196603476]$ $[x = 1.231453100, y = 0.4474451155]$	∉ D16	/	/	/

E17	$[x = 0.8212477464, y = 0.3601895326]$	$\notin D17$	/	/	/
	$[x = 1.231428973, y = 0.4474451206]$	$\in D17$	<b>3.090752842</b>	<b>0.9623789886</b>	<b>Min</b>
E18	$[x = 1.231456943, y = 0.4474463383]$ $[x = 1.922025282, y = 0.5127540449]$	$\notin D18$	/	/	/

Pour chacune des restrictions de ETB, les points critiques sont à l'extérieurs du domaine d'étude correspondant. Seul le point (1.231420217, 0.4474451206) est à l'intérieur du domaine 17. Et représente donc aussi bien le minimum de la restriction 17 que le minimum global de la fonction ETB.

## 2.7 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons optimisé le temps de déplacement du casier de stockage vers le casier de déstockage ETB, dans un double cycle pour un AS/RS multi allées. La relaxation de la contrainte liée à la taille du système nous a permis de faire un changement de variable, et de réduire la fonction ETB à trois variables à une fonction à deux variables. Nous avons appliqué le théorème de Stewart Pour trouver les point critiques et déterminer leur nature. Enfin nous avons pu trouver le minimum de la fonction ETB

Dans le dernier chapitre, on va réduire la fonction ETB à deux variables à une fonction à une seule variable paramétrée. Dans le but de mieux visualiser le minimum sur le plan et interpréter les résultats obtenus.

## Chapitre III

Représentation graphique, et interprétation des résultats

### 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de représenter graphiquement la fonctions ETB et positionner son minimum global, nous effectuons un changement de variable afin de réduire la fonction ETB(x,y) à une fonctions à une seule variable. Cette réduction de variables permettra la représentation graphique des minima et à la fin nous allons présenter les résultats et les interpréter.

### 3.2 Représentation graphique :

#### 3.2.1 Réduction à une fonction à une variable :

- **Changement de variable :**

On pose :

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha).$$

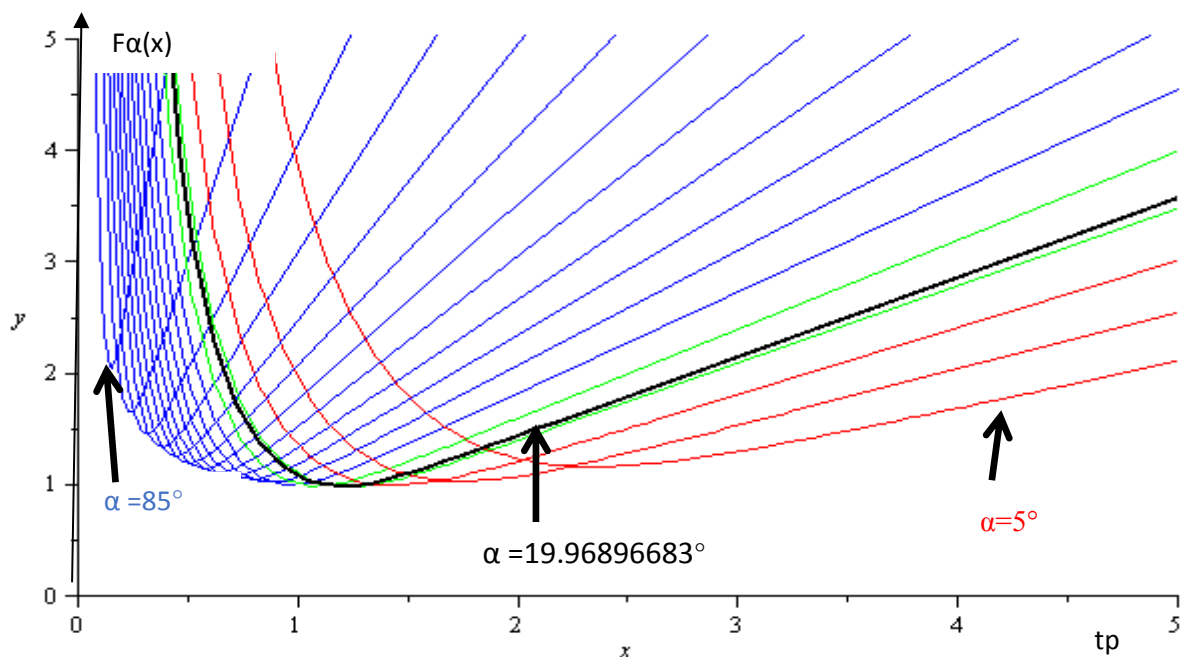
Lorsque  $\alpha$  varie dans] 0,  $\pi/2$  [, y prend toutes les valeurs dans  $\mathbb{R}^{*+}$ .

On obtient une nouvelle fonction  $F\alpha(x)$  à une seule variable, ce qui permet une représentation graphique dans le plan,  $\alpha$  jouant le rôle d'un paramètre. Le changement de variable de la fonction ETB donne des restrictions complexes on montre les deux premières restrictions dans le tableau 3.1 :

**Tableau 3.1 les deux premières restrictions de la fonction  $F\alpha(x)$**

$F1\alpha(x)$	$\frac{1}{1260} \frac{1}{x^4 \tan(\alpha)^2} \left( 420x^5 \tan(\alpha)^2 + 1260x^5 \tan(\alpha)^3 + \frac{7}{x^7 \tan(\alpha)^4} - \frac{1}{x^{10} \tan(\alpha)^5} \right)$	$x \leq x \tan(\alpha) \text{ and } 0 < \frac{1}{x^2 \tan(\alpha)} \text{ and } \frac{1}{x^2 \tan(\alpha)} \leq x$
$F2\alpha(x)$	$\frac{1}{1260} \left( \frac{21}{x^{10} \tan(\alpha)^5} - \frac{35}{x^7 \tan(\alpha)^4} + \frac{35}{x^4 \tan(\alpha)^3} - \frac{21}{x \tan(\alpha)^2} + \frac{1260 \tan(\alpha)}{x} + \frac{7x^2}{\tan(\alpha)} + \frac{420}{x} - x^5 \right) x^2$	$x \leq x \tan(\alpha) \text{ and } x < \frac{1}{x^2 \tan(\alpha)} \text{ and } \frac{1}{x^2 \tan(\alpha)} \leq x \tan(\alpha)$

On considère  $F\alpha(x)=ETB(x,y)$



**Figure3.1 : Tracé de  $F\alpha(x)$  en faisant varier l'angle  $\alpha$  de  $5^\circ$  à  $85^\circ$  avec un pas de  $5^\circ$**

L'étude et le tracé des fonctions  $F\alpha$  donnent une famille de 17 courbes (voir figure 3.1), avec le paramètre  $\alpha$  variant de  $5^\circ$  à  $85^\circ$  avec un pas de  $5^\circ$ . Nous ajoutons à ces courbes la courbe correspondant au min

Nous nous intéressons à la recherche du minimum global de cette famille de fonctions. L'étude de ces courbes nous permet les déductions suivantes :

- Toutes les courbes présentent un seul minimum.
- Toutes les courbes tendent vers l'infini pour  $x = 0$  et pour  $x = \infty$ .

### 3.3 Valeur de minimum global :

Le minimum global de l'expression du temps de déplacement entre deux casiers est donné dans le tableau 3.2

$$(x_0, y_0) = (1.231420217, 0.4474451206)$$

$$\text{On a : } y = x \tan(\alpha) \rightarrow \tan(\alpha) = y/x$$

$$\rightarrow \tan(\alpha) = y_0/x_0 = (0.4474451206/1.231420217) = 0.3633569714$$

$$\rightarrow \alpha = \arctan(0.3633569714) = 0.3485242190 \text{ rad} = 19.96896683^\circ$$

**Tableau3.2 : min globale de la fonction ETB**

$\alpha$	$tp$	$th$	$tv$	<b>E17</b>
19.96896683°	1.231420217	0.4474451206	<b>1.814905197</b>	<b>0.9793822004</b>

Donc pour  $(tp,th,tv)=(1.231420217, 0.4474451206, 1.814905197)$  nous obtenons un temps de déplacement du casier du stockage au casier de déstockage égale à  $E17=0.9793822004$ .

### 3.4 Situation globale des minima :

D'après la figure nous remarquons que les minima qui sont au voisinage du minimum globale sont autour de l'angle  $\alpha$  [15° à 25°].

### 3.5 Expression en $(tp, th, tv)$ relative au domaine D17 :

La valeur de minimum global se trouve dans la fonction 17 qui correspond le domaine D17 :

- La fonction E17 :

$$\begin{aligned}
 E17 := & \frac{1}{1260} \frac{1}{th^2 tp^2 tv^2} (1680 tv^2 tp th^4 + 1680 th^3 tv^2 tp^2 \\
 & + 840 th^2 tv^2 tp^3 + 280 th^3 tv^4 + tp^7 - 35 tp^4 tv^3 + 672 tv^2 th^5 \\
 & - 1344 th^5 tp tv - 1120 th^3 tp tv^3 + 420 th^2 tp tv^4 - 84 th tp tv^5 \\
 & - 560 th^4 tv^3 - 280 tv th^3 tp^3 - 210 tv tp^2 th^4 - 84 tv th tp^5 \\
 & - 210 tv th^2 tp^4 - 420 th^2 tp^2 tv^3 - 280 th tp^3 tv^3 + 448 th^6 tp \\
 & - 448 th^6 tv - tv^7 + 128 th^7 + 35 tv^4 tp^3 - 7 tv tp^6 + 7 tp tv^6 \\
 & + 14 th tv^6 - 84 th^2 tv^5 + 14 th tp^6 + 42 th^2 tp^5 + 70 th^3 tp^4 \\
 & + 70 tp^3 th^4 + 42 tp^2 th^5 + 210 tv^4 th tp^2 + 210 tv^2 th tp^4 \\
 & - 21 tv^5 tp^2 + 21 tv^2 tp^5)
 \end{aligned}$$

- Le domaine D17 :

$$2 th < tp \text{ and } tp + th < tv \text{ and } tv < tp + 2 th$$

### 3.6 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons réalisé un changement de variable de la fonction ETB qui nous a permis de passer à une fonction à une seule variable paramétrée, dans le but de visualiser graphiquement la fonction ETB et son minimum dans le plan ensuite nous avons interprété les résultats obtenus.



## **Conclusion générale**

---

## Conclusion générale

L'étude détaillée des AS/RS a mis en valeur leur importance dans le domaine de l'industrie et de la production et a confirmé leurs performances dans les différents champs d'application, à savoir : une meilleure gestion de stock en minimisant le temps de cycle de la machine S/R et en optimisant la sécurité. Dans ce projet, nous nous sommes intéressés aux systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS/RS). Nous avons étudié en particulier l'AS/RS multi allées. L'AS/RS multi allées se caractérise par l'existence de plusieurs racks séparés par des allées utilisées pour la circulation de la machine de stockage/déstockage.

Ce travail a permis d'optimiser l'expression du temps moyen de déplacement d'un casier de stockage vers un casier de déstockage (ETB dans un double cycle pour l'AS/RS multi allées sur la base de méthodes classiques d'optimisation et analyse fonctionnelle, nous avons utilisé notamment le logiciel Maple lorsque les calculs étaient complexes.

Les résultats de ces investigations ont permis de déterminer un minimum global pour la fonction ETB, ceci sera utile pour calculer aussi le minimum global de la fonction du double cycle lorsque les opérations de stockage et déstockage se font sur des allées différentes.

### **Perspectives :**

Il existe de nombreux d'investigations qu'il faudra explorer comme perspectives au présent travail :

- Optimiser l'expression analytique du temps de double cycle pour le cas où le stockage et le déstockage se font sur deux allées différentes, en nous basons sur les résultats trouvés dans l'optimisation de la fonction ETB, on pourra ainsi proposer les trois dimension optimales de l'AS/RS( $t_p, t_v, t_h$ ) pour le cas où le bâtiment qui abritera ce système reste à construire.
- Déterminer des régions utiles d'utilisation ou les minima sont très voisins du minimum global, ce qui permettra une plus grande flexibilité lors de la conception du système due à la possibilité des variations contingentes réalisables sur les dimensions du système dans une large fourchette sans variation importante du temps de double cycle
- Fixer une des dimensions du système et optimiser les deux dimensions restantes, ce cas est intéressant lors qu'on a des contraintes supplémentaire certaines dimensions par exemple : hauteur fixe



# Références bibliographiques

- [1] Ghomri et al, (2008) d'un système automatisé de stockage/déstockage AS/RS multi allées, mémoire de fin d'étude pour l'obtention de diplôme d'ingénieur en automatique Université de Tlemcen. Algérie
- [2] Material Handling Institute., "Consideration for planning and installing an automated storage/retrieval system", Inc AS/RS document, 100 7M, 1977.
- [3] Sari. Z, "Modélisation, analyse et évaluation des performances d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel". Thèse de doctorat d'état, Université de Tlemcen Algérie, 2003.
- [4] Maleki. R.A, (1991), Flexible Manufacturing Systems: the Technology and Management, Prentice Hall. Malmberg C.J., " Interleaving models for the analysis of twin shuttle automated storage and retrieval systems". International journal of production research, 2000, 38(18), p 4599-4610.
- [5] Kees JanRoodbergen , "A survey of literature on automated storage and retrieval systems", European Journal of Operational Research 16 April 2009. Pages 343-362
- [6] Aaron Jones, <https://www.bastiansolutions.com/blog/index.php/2010/03/05/options-available-with-asrs-technology/>.
- [7] [http://www.trifactor.com/Material-Handling-Systems/Automated-Storage-and-Retrieval-Systems-\(ASRS\)/Mini-Load-ASRS](http://www.trifactor.com/Material-Handling-Systems/Automated-Storage-and-Retrieval-Systems-(ASRS)/Mini-Load-ASRS)
- [8][http://automated-storage-retrieval-systems.wikia.com/wiki/File:Vertical\\_carousel\\_all\\_systems\\_picture.jpg](http://automated-storage-retrieval-systems.wikia.com/wiki/File:Vertical_carousel_all_systems_picture.jpg), Automated Storage Retrieval Systems Wiki ,23:24, March 2, 2015
- [9] <https://www.indiamart.com/spacemagnum/stopick-as-rs.html>.
- [10] <https://www.conveyco.com/solutions/warehouse-automation/asrs-shuttles/>

[11] Bozer Y.A and White J.A., 1984. Travel time for automated storage/ retrieval systems. IIE transactions, vol. 16, n°4, p. 329-338.

[12] White, J.A. and Kinney H.D., (1982) Storage and warehousing. In Handbook of Industrial Engineering, G. Salvendy ed., John Wiley & Sons, New York

[13] Askin, R.G. & Standridge, C.R. (1993). Modeling and Analysis of Manufacturing Systems, (John Wiley & Sons, Ed.)

[14] Kouloughli. S, “Optimisation de systèmes automatisés de stockage/déstockage multi-allées et à racks glissants ”. Thèse de doctorat, Université de Tlemcen Algérie, 2013.

[11][http://www.nuigalway.ie/staffsites/david\\_osullivan/documents/unit\\_9\\_automated\\_storage\\_systems](http://www.nuigalway.ie/staffsites/david_osullivan/documents/unit_9_automated_storage_systems)

.pdf

[15] Hausman, W.H., Schéwarz, L. B., and Graves, S. C., 1976. Optimal storage assignment in automatic warehousing systems. Management Science, 22 (6), 629- 638.

[16] Han, M.H., McGinnis L.F., Shieh J.S., and White J.A., 1987. On sequencing retrievals in an automated storage retrieval system. IEE transactions, vol. 19, p.56-66.

[17] Hwang, H., Ko CS., 1988. A study on multi-aisle system served by a single storage/ retrieval machine.

[18] Chang, D.T., Wen, U.P. et Lin, J.T., 1995. The impact of acceleration/ deceleration on travel time models for automated storage/retrieval systems. IIE Transactions, 27 (6), p. 108-111.

[19] Ashayeri, J., Heuts, R.M., Valkenburg, M.W.T., Veraart, H.C and Wilhelm, M.R., 2002. A geometrical approach to computing expected cycle times for zone based storage layouts in AS/RS. International Journal of Production Research, vol. 40 (17), p. 4467-4483.

- [20] Ghomri, L., Sari, Z., Guezzan, A., Sari, T., 2008. Expression analytique du temps de cycle pour les AS/RS multi allées. 7ème Conférence Internationale de modélisation et simulation MOSIM'08 Paris France.
- [21] Sari Z., C.Saygin, and N.Ghouali, 2005 «Travel-Time Models for Flow-Rack Automated Storage and Retrieval Systems» International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 25, p. 979-987.
- [22] Lerher, T., Matjaz, S., Janez, K., Iztok, P., Matej, B., 2005. Analytical travel time models for multi-aisle automated storage/ retrieval systems. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol 30(3), p. 340-356.
- [23] Kouloughli, S., Sari, Z. 2011« Optimisation de deux dimensions d'un AS/RS multi allées en fixant la troisième pour minimiser le temps de cycle» Acte des 7ème conférence internationale de conception et production intégrée CPI'11. Hammamet
- [24 ] Sari. Z., 1998 « Expressions analytiques discrètes de simple et double cycle d'un AS/RS multi-allées » Rapport interne, LAT, Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen, Algérie..
- [25] Guezzan A.H. Sari Z., Ghomri L. 2011 «Continuous Model for Single Cycle Times of a Mobile Racks Automated Storage and Retrieval System» conference MISC' 11
- [26] Sari Z., Kouloughli S. 2010 « Modélisation des temps de cycle d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel à une seule machine S/R » conférence internationale de modélisation et simulation, Hammamet Tunisie.
- [27] Azzouz, A., (2001) Optimisation des dimensions d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel pour un temps de cycle minimum. Thèse de Magister. Université de Tlemcen. Algérie.
- [28] Amine Hakim GUEZZEN, Modélisation du temps de cycle d'un système automatisé de stockage/déstockage (AS/RS) multi-allées et à racks glissants, décembre 2014.

## **Résumé**

Ce travail vise l'étude des systèmes de stockage et de déstockage (AS/RS), et plus précisément l'optimisation du temps de déplacement du casier de stockage vers le casier de déstockage (ETB), dans un double cycle pour un AS/RS multi allées. Afin d'entreprendre ce travail, nous avons utilisé l'expression analytique du time between ETB établie par Ghomri et al [1]. Cette expression possède trois variables réelles ( $t_p, t_h, t_v$ ). En plus des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux, on se voit également confronté à une contrainte liée à la taille du système et à la constance de cette taille ce qui nous ramène à un problème d'optimisation en nombres réels d'une fonction à trois variables avec contraintes. Pour réaliser son optimisation, des changements de variables ont permis la relaxation de la contrainte liée à la taille du système ainsi que la réduction de la fonction en une fonction à une seule variable paramétrée. Une analyse fonctionnelle du modèle, a permis la détermination d'un minimum global.

## **Abstract**

this work we intend to determine the optimal dimensions of an Automated Storage/Retrieval System: AS/RS, of a multi-aisle type for the minimal time of time between. we have used analytical expression of time between of multi-aisle AS/RS. This expression has three-real variables. Beside the causality constraints of horizontal and vertical transport durations, we face another constraint related to the size of the system and the constancy of that size. The latter leads us to an optimization problem in real numbers of a three-variables function with constraints. In order to carry out its optimization, some variable changes have allowed the relaxation of the constraint related to the system size and the reduction of the function in a parameterized one-variable function. A functional analysis of the problem, made possible the determination of a global minimum.