Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Résolution d'une E.D.P elliptique avec une dépendance en gradient

Mémoire de Master En Mathématiques

(Spécialité Systèmes dynamiques et applications)

Présenté par

TALEB BENDIAB Rima

Composition du jury

Président : M. G. Senouci Bereksi Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
Directeur de thèse : M. B. Abdellaoui Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
Examinateurs : M. T. Touaoula Maitre de conférence à l'université Abou Bekr Belkaid
Examinateurs : M. S.E. Miri Maitre assistant A à l'université Abou Bekr Belkaid

Table des matières

Notations **5**

Introduction **7**

1 Préliminaires **9**

1.1 Quelques résultats sur des problemes de minimisation 9

1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. 11

1.2.1 Définitions 11

1.2.2 Propriétés topologiques des espaces de Sobolev 13

1.2.3 Les injections de Sobolev 14

2 Problèmes elliptiques et méthodes variationnelles **17**

2.1 Quelques outils pratiques 20

3 Existence et unicité pour équation logistique avec une dépendance en gradient **21**

3.1 Cas absorbant $P(-)$ 23

3.1.1 Problème avec croissance critique $q = 2$ 23

3.1.2 Cas général $q < 2$ 25

3.2 Le cas de Réaction : Problème $P(+)$ 29

Notations

Notations générales

Symbole	Signification
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Element de $I\!R^N$
r=$\|x\|$=$\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)}$	Module de x
B (x_0 , r)	La Boule ouverte de $I\!R^N$ centrée en x_0 et de rayon r
$\overline{B}$ (x_0 , r)	La Boule fermée de $I\!R^N$ centrée en x_0 et de rayon r
$\partial\Omega$	Le bord du Ω
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' ouvert de $I\!R^N$ tel que $\overline{\Omega'} \subset\subset \Omega$
$supp(\varphi)$	Support de la fonction φ
$\|A\|$	La mesure de Lebesgue de l'ensemble A
$D_i u = \partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	La dérivée partielle de u par rapport à x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = u_{x_{ij}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$	La dérivée seconde de u par rapport à $x_i\, x_j$
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de u
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N}$	Laplacien de u
$\\|.\\|_X$	La norme dans l'espace de Banach X
$\rightarrow$	La convergence forte dans le Banach X
$\rightharpoonup$	La convergence faible dans X
X'	Le dual de X
$<.,.>$	Produit dans la dualitée X , X' p.p. Presque pa
s.c.i	Semi continuitée inférieure pour la topologie forte
f.s.c.i	Semi continuitée inférieure pour la topologie faible
f^+	Partie positive de f
f^-	Partie négative de f
p'	Le conjugué harmonique de p ; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$L^p(\Omega)$	u :$\Omega \mapsto I\!R$ u mesurable et que $\int_\Omega \|f\|^p < \infty$ si $p \in [1, \infty[$
$L^\infty(\Omega)$	u :$\Omega \mapsto I\!R$ u mesurable et que $\|u(x)\| \leq C$ p.p. sur Ω
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Sous espace de $W^{k,p}(\Omega)$ de Trace nulle
$W^{-k,p}(\Omega)$	Le dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\hookrightarrow$	injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	injection compacte.

Symbole	Signification
f non négative	$f \geq 0 \quad \text{et} \quad f \neq 0$
f non décroissante	f croissante et f non réduite à une constante

Introduction

L'équation logistique classique, sans le terme de gradients, a été intensivement étudié dans la littérature. L'exsistence et l'unicité de la solution d'une telle équation ont bel et bien été démontré si et seulement si $\lambda > \lambda_1$ ou λ_1 est la première valeur propre du laplacien.

L'équation avec le terme gradient, en particulier, l'équation parabolique degénérée de type $u_t = u^p u_{xx} + u^q + k u^r u_x^2$ survient en hydromagnetiques ,ou l'on décrit le processus de diffusion résistive du champs libre de la force magnétique dans un milieu passif de dimension une sous certaines conditions géométriques, et en populations génétiques appelé processus de diffusion conditionnés sont modélisés par de telles équations.Et c'est aussi le cas en géométrie différentielle.

Dans ce travail ,nous présenterons un premier chapitre ou l'on exposera le cadre général de résolution de l' E.D.P ,c'est donc quelques rappels sur les espaces de Sobolev et leurs propriétés élémentaires ,nous rappelerons quelques résultats de minimisation ,outil important dans la résolution d'E.D.P elliptique .Au second chapitre nous donnerons quelques notions sur les méthodes variationnels beaucoup utilisés dans la résolution des E.D.P elliptiques ,au départ on enoncera le théoreme de Lax-Milgram util pour le cas linéaire ensuite un résultat plus général assurant l'existence et l'unicité de la solution basé principalement sur un principe de comparaison.Enfin au troisième chapitre on rentrera dans le vif du sujet c'est à dire la résolution d'une équation E.D.P elliptique avec une dépendance en gradient.En premier lieu nous traiterons du cas absorbant critique ou l'on utilisera les résutats de minimisations rappelés au premier chapitre en considérant le problème semilinéaire.on passera au cas plus général quand $q < 2$,dans ce cas nous serons amenés à résoudre le probléme approximé par résultat de comparaison et à passer la limite pour conclure .En dernier lieu nous nous intéresserons au cas réaction critique , ici aussi on fera appel aux résultats de minimisations.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce Chapitre est de donner de brefs rappels sur quelques notions et outils d'analyse fonctionnelle qui sont en relation avec les problèmes étudiés. Nous donnerons aussi certains résultats de compacité dans des espaces de Sobolev appropriés ainsi que quelques résultats de comparaisons pour des problèmes auxiliaires.

1.1 Quelques résultats sur des problemes de minimisation

Définition 1.1.1 (Fonction semi continue et faiblement semi continue inférieurement)
Soit X un Banach,

1-une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est dite faiblement semi continue inférieure (s.c.i en abrégé) ssi

$$u_n \to u \Rightarrow J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$$

.

2-J est dite faiblement semi continue inférieure (f.s.c.i en abrégé) ssi pour toute suite $\{x_n\}$ de X qui converge faiblement vers $x \in X$, on a

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \quad J(x_n).$$

Définition 1.1.2 (Fonction coercive)
*Une fonctionnelle J définie sur un Banach X est dite coercive **ssi** :*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} J(x) = +\infty.$$

Théorème 1 Soit X réflexif $I : X \to \mathbb{R}$
Si I est convexe et I est SCI alors I est FSCI ■

.

Comme conséquence, on a le premier résultat suivant sur les problème de minimization.

Théorème 2 Soit $I : X \to \mathbb{R}$. Si X est réflexif ; I est SFSCI et I est coercive, alors $\inf_X I > -\infty$, et $\exists \overline{u} \in X$ tel que $I(\overline{u}) = \inf_X I(u)$. ■

✓ **Corollaire**

Soit X un Banach réflexif, I convexe, SCI et coercive, alors $\alpha = \inf_X I < \infty$ et $\exists u_0 \in X$ tel que $I(u_0) = \alpha$. ■

Définition 1.1.3 (Différentiabilité)

Soit X un Banach et $J : X \mapsto \mathbb{R}$, soit
$x \in U$ ouvert de X ,

1-la fonctionnelle J est dite **différentiable au sens de Gateaux** *au point x ssi*

$$(\exists\, L \in X')(\forall h \in X) J(x+h) - J(x) = L(h) + o(\|h\|)$$

Notons que l'élément $L \in X'$ est unique, et il est souvent noté $J'(x)$.

2- J est ***différentiable au sens de Frechet*** *en $x_0 \in U$ ssi*
$\exists L_{x_0} \in L(X,Y)$ tel que

$$\frac{\|J(x_0+h) - J(x_0) - L_{x_0}(h)\|_Y}{\|h\|_X} \to_{\|h\|\to 0} \to 0.$$

✓ **Propriétés**

1. J est différentiable au sens de Frechet alors elle est différentiable au sens de Gateaux
2. Si J est différentiable au sens de Gateaux et J' continue alors J est différentiable au sens de Frechet

Théorème 3

Soit $I : X \to \mathbb{R}$
Si I est telle que $\exists \overline{u} = \inf_X I(u)$
et si de plus I est de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e I différentiable et I' continue)
Alors le minimum est atteint (i.e $I'(\overline{u})v = 0$ point critique au sens faible)

Pour démontrer la compacité des suites dans les espaces de Lebesgue, on a besoin de la définition suivante.

Définition 1.1.4 (Equi intégrabilité dans L^p)
Soit X un ensemble mesurable de $I\!R^N$ et $1 \leq p < \infty$, une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $L^p(X)$, est dite équi intégrable ***ssi*** *: pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $E \subset X$ avec $|E| < \delta$ on a pour tout n :*

$$\int_E |f_n|^p < \varepsilon.$$

Comme consequence, on a le lemme pratique suivant.

Lemme 1.1.1
Soit $\{f_n\}$ une suite bornée de $L^1(X)$ tel que $\{f_n\}$ converge p.p vers $f \in L^p(X)$. On suppose que $\{f_n\}$ est équi intégrable, et si $|X| = \infty$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{A}$ mesurable tel que $|\mathcal{A}| < \infty$ et

$$\int_{\mathcal{A}^c} |f_n|^p dx < \varepsilon \quad \textit{pour tout } n\ .$$

Alors $f_n \to f$ fortement dans $L^1(X)$.

Généralement les techniques variationnelles pour les E.D.P consistent à écrire l'E.D.P sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle J définie sur des espaces fonctionnels convenables - que l'on introduira par la suite - les solutions obtenues dans ce sens-là, sont dites solutions au sens faible ou parfois solutions au sens de dualité.

1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

1.2.1 Définitions

✠ **Les espaces** $W^{1,p}(\Omega)$:

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

✓ L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \textit{tel que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \Big\},$$

on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.

✓ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

où parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{i=N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad si \quad 1 \leq p < \infty.$$

✓ Si $p = \infty$, on muni $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \left(\mathrm{supp}_\Omega |u| + \mathrm{supp}_\Omega |\nabla u|\right).$$

✓ Si $p = 2$

On note $\qquad H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{i=N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.2.1

-L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace :

- *de Banach pour :$1 \leq p \leq \infty$.*
- *réflexif que pour :$1 < p < \infty$.*
- *séparable pour :$1 \leq p < \infty$.*

Pour $p = 2$, l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

✠ **Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$.**

Soit $m > 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$.

✓ On définit

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \forall \alpha \text{ multi-indice} \quad avec \quad |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad tel\ que$$
$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\},$$

un multi-indice α est une suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ avec $\alpha_i \geq 0$ entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \qquad et \qquad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi,$$

et on note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Notons que par récurrence, on a

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, 3, \cdots, N \right\}.$$

✓ L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

✓ On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v \Big)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

✠ **Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$.**

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
i.e $W_c^{1,P}(\Omega) = \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{W^{1,P}}}$

✓ En d'autres termes :
$u \in W^{1,P}(\Omega) \Leftrightarrow \exists$ une suite $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$
tel que :
$\varphi_n \to u$ fortement dans $W^{1,p}(\Omega)$

Théorème 1.2.1
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $u \in W_c^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$

1.2.2 Propriétés topologiques des espaces de Sobolev

✓ **Densité** :
Certaines propriétés des fonctions de classe C^1 restent valables pour les fonctions de $W^{1,p}$.

Il est très commode d'établir ces propriétés "**par densité**".

Théorème 1 : approximation globale
Soient Ω borné et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\exists$ une suite $\{u_n\}$ de $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\{u_n\}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. $\blacksquare$

Dans le cas où le domaine Ω est régulier, on a le résultat de densité suivant.

Théorème 2 : approximation globale
Soit Ω borné régulier de classe C^1 et $\partial\Omega$ de classe C^1, alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$, i.e $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|.\|_{W^{1,p}}} = W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega)$ $\blacksquare$

.

Dans le cas géneral, indépendament de la régularité du domaine, on a le résultat de densité local suivant

Théorème 3 approximation locale
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a :
$\|u_\epsilon - u\|_{W^{1,p}(\Omega')} \to 0$ quand $\epsilon \to 0 \forall \Omega' \subset\subset \Omega$ ou $\Omega' \subset K$ compact de Ω $\blacksquare$

1.2.3 Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes L^p.

Théorème : Inégalité de Poincaré
Soit Ω un domaine borné dans une direction, $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante $C := C(\Omega, p)$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$. $\blacksquare$

Dans le cas ou $u \neq 0$ sur le bord de Ω, on a l'inégalité generale suivante.

Théorème : Inégalité de Poincaré wirtinger
Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ un domaine bornée à frontière lipschitzienne. Alors il existe une constante c dépendant uniquement de Ω et p telle que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

où

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)dy$$

est la valeur moyenne de u sur Ω. Le nombre $|\Omega|$ désignant la mesure de Lebesgue du domaine Ω. ∎

Si $\Omega \equiv I\!R^N$, alors l'inegalité de Poincaré n'est pas valable, par contre on a l'inégalité suivante.

Théorème : Inégalité de Sobolev-Gagliardo-Niremberg

Soit $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante $c := c(p, N)$ telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(I\!R^N)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(I\!R^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I\!R^N)$$

avec $p^* := \dfrac{p\, N}{N-p}$.

Comme conséquence l'éspace $W^{1,p}(I\!R^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$. ∎

Remarque 1.2.1

- *Pour le cas* $p = N$ *,* $W^{1,p}(I\!R^N)$ *s'injecte d'une manière continue dans* $L^q(I\!R^N)$ *pour* $q \in [N, \infty[$.
- *et pour le cas* $p > N$ *,* $W^{1,p}(I\!R^N)$ *s'injecte d'une manière continue dans* $L^q(I\!R^N)$ *pour* $q \in [N, \infty]$ *, et dans ce cas particulier là , les éléments de* $W^{1,p}(I\!R^N)$ *admettent une représentation continue.*
- *Lorsque* Ω *est bornée toutes les injections précédentes (en remplaçant* $I\!R^N$ *par* Ω*) restent valable pour tout* $q \in [1, p*]$ *; notons que dans ce cas-là l'inégalité de Sobolev devient* $\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$ *; remarquant que l'inégalité reste la même dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Un cas général des injections précédentes est fournie par le théorème suivant.

Théorème 1.2.2

Soit Ω *un ouvert régulier de* $I\!R^N$*, Soient* $m \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$*, on a :*

- *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$ *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad$ *pour* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$
- *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$ *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour* $q \in [p, +\infty[$ *(mais pas dans* $L^\infty \quad$ *si* $p > 1$*).*

- *si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$ *; dans ce cas si* $m - \frac{N}{p} > 0$ *n'est pas entier alors* $W^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$ *avec* $k := \left[m - \frac{N}{p}\right]$.

Sans l'hypothèse de régularité de Ω, les injections précédentes sont vraie localement. Elles restent globalement vraie pour $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Un résultat particulièrement important est le théorème de Rellich-Kondrachov , qui concerne l'injection compacte des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.2.3 (Rellich-Kondrachov)
Soit Ω *bornée de classe* $\mathcal{C}^1$ *, on a :*

- *Si* $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ *avec* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- *Si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.
- *Si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Remarque 1.2.2

- *Les injections précédentes sont vraies pour* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *sans condition sur le domaine borné* Ω.
- *Il faut donc retenir la chose suivante très utile pour la suite , si* $\{u_n\}$ *désigne une suite bornée dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *(* $1 \leq p < N$ *) , alors on peut extraire une sous suite* $\{u_{n_k}\}$ *de* $\{u_n\}$ *tel que* $\{u_{n_k}\}$ *converge fortement dans* $L^q(\Omega)\, \forall q \in [1, p^*[$.

Chapitre 2

Problèmes elliptiques et méthodes variationnelles

L'origine des méthodes variationnelles consistent à chercher la solution d'une E.D.P elliptiques comme un point critique d'une fonctionnelle J définie sur des espaces fonctionnels convenablement choisis. Les solutions obtenues dans ce sens-là, sont dites solutions au sens faible ou parfois solutions au sens de dualité. Le premier résultat dans cette direction et sans doute le Théorème de Lax-Milgram ou les applications pour la résolution des EDP elliptiques (linéaires) est notable.

Définition 2.0.1
On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ est :

✓ ***continue*** *s'il existe une constante c telle que*
$\|a(u,v)\| \leq c \|u\| \|v\| \;\; \forall u, v \in \mathbb{H}$

✓ ***coercive*** *s'il existe une constante $a > 0$ telle que*
$a(v,v) \geq a \|v\|^2 \;\; \forall v \in \mathbb{H}$
Comme conséquence on a le Théorème suivant :

Thèorème de Lax Milgram : Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \;\; \forall v \in H \quad (*).$$

De plus si a est symétrique, alors u est caractérisée par la propriètè suivante :
$u \in H$ et $\frac{1}{2}\; a(u,u) - \langle \varphi, v \rangle = Min_{v \in H}\{\frac{1}{2} a(v,v) - < \varphi, v >\}$.(**)

Remarque :
Il est intéressant de noter le lien entre l'équation (*) et le problème (**)

Exemple D'application

1- On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $I\!R^N$ et $f \in L^q(\Omega)$ pour $q \geq \frac{2N}{N+2}$. Soit $X = H_0^1(\Omega)$, X est un espace de Hilbert séparable. On note

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

il est clair que a est une forme bilinéaire continue coercive sur X. On pose $\varphi(v) = \int_\Omega f v dx$. En utilisant des inégalités de Holder et de Sobolev on démontre facilement que

$$|\varphi(v)| \leq C||f||_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} ||v||_X.$$

Donc φ est une forme lineaire continue sur X. Alors d'aprés le Théorème de Lax-Milgran, il existe un unique $u \in X$ solution du problème

$$a(u,v) = \varphi(v) \ \ \forall v \in X$$

de plus u minimise la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v dx.$$

Comme consclusion, u est une solution faible du problème (2.1).

2-On considère maintenant le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q \text{ dans } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où $0 < q < 1$ et Ω est un domaine borné de $I\!R^N$. Il est clair que les solutions faibles de (2.2) sont des points critiques de J definie sur $X = H_0^1(\Omega)$ par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega v_+^{q+1} dx$$

ou $v_+ = \max\{0, v\}$, la partie positive de v.

Comme $q < 1$, alors par les inégalités de Holder et de Poincaré, on a,

$$\int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq C(\Omega) (\int_\Omega v_+^2 dx)^{\frac{q+1}{2}} \leq C||v||^{q+1} 2_X.$$

Donc

$$J(v) \geq \frac{1}{2} ||v||_X^2 - C||v||_X^{\frac{q+1}{2}} \to +\infty \text{ si } ||v|| \to \infty.$$

Comme conclusion on obtient que J est coercive et donc bornée inferierement. On pose $m = \inf_{v \in X} J(v) > \infty$. Notons que J est de classe C^1 sur X. Pour terminer il suffit de montrer que m est atteint.

Soit $\{v_n\}_n$ une suite minimisante de m, alors $J(v_n) \to m$ pour $n \to \infty$. Comme J est coercive, on conclut que $\{v_n\}_n$ est une suite bornée dans X, espace reflexif. Alors, il existe une sous suite, notée $\{v_n\}$ telle que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $X = H_0^1(\Omega)$. D'après les injections compactes de Sobolev, on obtient que $v_n \to v$ fortement dans $L^s(\Omega) \forall s < 2^*$. En particulier, $v_n \to v$ fortement dans $L^{q+1}(\Omega)$. Donc, on conclut que

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq \lim \inf_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (v_n)_+^{q+1} dx\Big) = m.$$

Donc $J(v) = m$ et alors $J'(v) = m$; v solution faible de (2.2).

Plus généralement, on a le résultat d'existence suivant qui se démontre par la même manière.

Théorème 2.0.4
Soit f une fonction positive continue telle que $\frac{f(u)}{u} \downarrow$. Alors le probleme suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \quad u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

admet une solution positive unique. La solution est obtenue comme un point critique de J definie par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(v) dx$$

ou $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

L'unicité de la solution u du problème (2.3) est basée sur le Lemme de comparaison suivant, dont la preuve est donnée dans [1].

Lemme 2.0.1
Soit f une fonction positive continue telle que $\frac{f(u)}{u} \downarrow$. On suppose que $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ sont tels que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(u), \quad u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(v), \quad v > 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors $u \geq v$ dans Ω.

Pour une fonctionnelle J qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points ***selles****. Ces points sont déterminés par un argument de type* ***min-max****, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne, [en Anglais : mountain pass theorem].*

On commence par les définitions suivante.

Définition 2.0.2 (La condition de Palais-Smale)
Soient X un espace de Banach, et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite $(u_n)_n \subset X$ telle que :

$$J(u_n) \to c \ dans \mathbb{R} \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \ dans \ X'.$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_{n_k}$ convergente.

Théorème de Ambrosetti-Rabinowitz
Soient X un espace de Banach, et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais -Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :
- Il existe $R > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\|u\| = R$ alors $J(u) \geq \alpha$.
- Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ alors $J(u) < \alpha$.

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$. De façon plus précise, si on pose
- $P := \{p : p \in C([0,1], X), p(0) = 0, p(1) = u_0\}$
- et $c := \inf_{p \in P} \max_{t \in [0,1]} J\left(p(t)\right)$

Alors c est une valeur critique de J, et $c \geq \alpha$. ■

2.1 Quelques outils pratiques

Théorème : Principe de maximum
Soit $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 \text{ dans} \\ u \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \text{alors} \begin{cases} Soit \ \ u > 0 \ \ dans \ \ \Omega \\ Soit \ \ u = 0 \ \ dans \ \ \Omega \end{cases}$$

■

Si on considère les E.D.P elliptiques de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

et comme f dépend du gradient, on ne peut pas appliquer directement des méthodes variationnelles pour trouver des solutions. Par contre les méthodes topologiques se basant sur le théorème du point fixe (Banach ou Shauder) sont applicables. Le premier résulat dans cette direction est le Théorème de Leray-Lions, [9].
Théorème : Leray lions On considère le problème (2.5) ou f vérifie la condition suivante :

$$|f(x, s, \xi)| \leq M \ \ \forall (x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Alors le problème (2.5) admet une solution distributionnelle bornée définie dans $H_0^1(\Omega)$.

■

Chapitre 3

Existence et unicité pour équation logistique avec une dépendance en gradient

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné et régulier $p, q > 1$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\mathbf{P}\pm) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^p \underline{+} |\nabla u|^q \quad dans \quad \Omega \\ \\ \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$(\mathbf{P}\pm)$: équation logistique avec un terme non linéaire $|\nabla u|^q$

Rq : Quand le terme $|\nabla u|$ n'apparait pas , l'équation devient une équation logistique simple.

Notre but est de prouver l'existence et l'unicité de la solution positive du problème $\mathbf{P}(\pm)$ dans la mesure du possible, en fonction de la valeur λ.
Dans notre étude, nous serons amener à différencier deux cas ,à savoir le cas absorbant $P(-)$ et le cas réaction $P(+)$

✓ **Motivation biologique**
L'équation logistique classique, sans le terme de gradients, a été intensivement étudié dans la littérature. L'exsistence et l'unicité de la solution d'une telle équation ont bel et bien été démontré si et seulement si $\lambda > \lambda_1$ ou λ_1 est la première valeur propre du laplacien.

L'équation avec le terme gradient, en particulier, l'équation parabolique degénérée de type $u_t = u^p u_{xx} + u^q + ku^r u_x^2$ survient en hydromagnetiques ,ou l'on décrit le processus de diffusion résistive du champs libre de la force magnétique dans un milieu passif de dimension une sous certaines conditions géométriques, et en populations génétiques appelé processus de diffusion conditionnés sont modélisés par de telles équations.Et c'est aussi le cas en géométrie différentielle.

Le terme $-\Delta u$ peut etre interprété comme une diffusion et $|\nabla u|^q$ comme un transport ,on peut alors considérer le problème comme une équation diffusion-advection.
Le terme $\lambda u - u^p$ nous amène à penser à un genre d'équation logistique généralisée si $p > 1$ ou λ peut etre vu comme une capacité limite du milieu .
Le but de notre étude est d'analyser le cas stationnaire, qu'on peut voir comme cas limite du problème parabolique quand $t \to \infty$.

3.1 Cas absorbant $P(-)$

On commence par prouver le Théorème suivant qui affirme, en quelque sorte que le comportement du problème $P(-)$ est similaire au probleme logistique (suivant la condition sur le paramètre λ).

Théorème

On suppose que le problème

$$P(-):\begin{cases} -\Delta u+|\nabla u|^q=\lambda u-u^p \quad dans \quad \Omega \quad p,q>1 \\ \\ u_{|\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

admet une solution positive $u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, alors $\lambda>\lambda_1$, la premiere valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet. ■

Démonstration

Soit u une solution de $P(-)$, alors $-\Delta u+|\nabla u|^q=\lambda u-u^p$. On considère φ_1, la première fonction propre positive du laplacien (i.e elle vérifie $-\Delta\varphi_1=\lambda_1\varphi_1, \varphi\in H_0^1(\Omega)$) ; comme fonction test dans $P(-)$, on intégre par partie, il résulte que

$$\int\nabla u\nabla\varphi_1+\int|\nabla u|^q\varphi_1=\lambda\int u\varphi_1-\int u^p\varphi_1.$$

Donc

$$\int\nabla u\nabla\varphi_1-\lambda\int u\varphi_1=\int(-u^p-|\nabla u|^q)\varphi_1$$

et par conséquence,

$$(\lambda_1-\lambda)\int u\varphi_1=\int(-u^p-|\nabla u|^q)\varphi_1\leq 0.$$

Comme $u>0$ dans Ω, alors on conlut que forcement $\Rightarrow\lambda_1<\lambda$. ■

3.1.1 Problème avec croissance critique $q=2$

Dans cette section on considère le cas $q=2$, notre but est de ramener l'étude du problème $P(-)$ à l'étude d'un problème semilinéaire ou on peut utiliser les méthodes variationnelles et les résultats developpés dans la le chapitre précedent. Comme on cherche une solution positive bornée, on pose $v=H(u)$, donc

$$-\Delta v=H'(u)(-\Delta u)-H''(u)|\nabla u|^2.$$

En remplaçant $(-\Delta u)$ par sa valeur, on trouve que

$$-\Delta v=(-H'(u)-H''(u))|\nabla u|^2+H'(u)(\lambda u-u^p).$$

Si $H(s) = 1 - e^{-s}$, alors v est une solution de l'equation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta v = (v-1)\ [\lambda\ log(\frac{1}{1-v}) - (log\frac{1}{1-v})^p] \text{ dans } \Omega, \\ \\ v_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour simplifier la notation, on pose

$$h(s) = \begin{cases} \lambda(s-1)\, log(\frac{1}{1-s}) - (s-1)\,(log\frac{1}{1-s})^p & si\ \ 0 < s < 1 \\ 0 & si\ \ s \geq 1 \end{cases}$$

Alors v résoud

$$\begin{cases} -\Delta v = h(v)\ \chi_{\{0<v<1\}} \text{ dans } \Omega, \\ \\ v_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $H(s) = \int_0^s h(\sigma)d\sigma$, il est clair que H est une fonction bornée. On pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega H(v)\quad dx,$$

les solutions faibles de (3.2), sont, trivialement, les points critiques de J sur $X = W_0^{1,2}(\Omega)$.

On a le Théorème d'existence et d'unicité suivant.

Théorème
Le problème (3.2) admet une solution positive unique v telle que $0 < v < 1$ dans Ω.

■

Démonstration On commence par démontrer que J est Coercive. Comme H est bornée, alors

$$J(v) \geq C||v||_X^2 - M||v||_{L^1}.$$

Par les inégalités de Holder et de Poincaré, on aura,

$$||v||_{L^1} \leq C||v||_{L^2} \leq C||v||_X.$$

Donc

$$J(v) \geq C||v||_X^2 - M||v||_X \to \infty \text{ as } ||v||_X \to \infty$$

est par conséquence, J est coercive.

On affirme que J est **FSCI**.

Soit $\{v\}_n$ une suite bornée de X telle que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans X, on cherche à montrer que

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n).$$

On a d'une part $v_n \rightharpoonup v$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, alors

$$\|v\|^2_{W_0^{1,2}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{W_0^{1,2}}(\Omega).$$

Or, d'aprés les injections compactes de Sobolev, on a $v_n \to v$ fortement dans $L^s(\Omega)$, $\forall s < 2^*$. Comme $H(s) \leq M|s|$, donc en utilisant le Théorème de la convergence dominée generalisée, on obtient que

$$H(v_n) \to H(v) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

En utilisant les estimations précédentes, on conclut que

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n).$$

Donc J Coercive et FSCI.

D'après le théorème de minimisation, il existe $\exists \overline{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $J(\overline{v}) = Inf_{W_0^{1,2}(\Omega)} J(v)$. Il est clair que $\overline{v}$ est une solution faible de (3.2).

Prouvons que la solution est unique et qu'elle vérifie $0 < v < 1$.

Par un calcul simple, on trouve que $\frac{h(s)}{s}$ est décroissante en s pour tout $s \geq 0$. Donc si $u, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta v \leq h(v) \text{ dans } \Omega, \\ v_{|\partial\Omega} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta w \geq h(w) \text{ dans } \Omega, \\ w_{|\partial\Omega} \geq 0 \end{cases}$$

alors $v \leq w$. Donc si w, v sont deux solutions de (3.2), alors forcément $w = v$.

Il reste a prouver que $0 < v < 1$. Notons que $h(s)\, \chi_{\{0<s<1\}} \geq 0$, donc $-\Delta v \geq 0$ dans Ω. D'aprés le principe de Maximum $v > 0$ dans Ω. Pour prouver que $v < 1$, on observe que $w = 1$ vérifie $h(w) = 0$, est donc

$$-\Delta w \geq h(w)\, \chi_{\{0<w<1\}} \text{ dans } \Omega, w_{|\partial\Omega} > 0.$$

Donc d'apres le principe de comparison, on obtient que $v \leq w$ dans Ω. Or, comme $v < w$ sur le bord de Ω, une variation du résultat de comparaison nous permet de conclure que $v < w = 1$ dans Ω.

Soit maintenant $u = \log(\frac{1}{1-v})$, alors u résoud le probleme $P(-)$.

3.1.2 Cas général $q < 2$

On va procéder par approximation, et on passe à la limite en utilisant les résultats de compacité.

$$\begin{cases} -\Delta u + |\nabla u|^q = \lambda u - u^p \\ \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $1 < p < 2^* - 1$.

On considere le problème approximé suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}\,|\nabla u_n|^q} = \lambda u_n - u_n^p \\ u_n \geq 0 \\ (u_n)_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Une variation du théorème de Leray-Lions, nous permet de conclure qu'il existe une solution du problème (3.4). Soit θ la solution unique positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta\theta = \lambda\theta - \theta^p \\ \\ \theta_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Notons que l'existence de θ se déduit facilment par application des arguments de minimisation du chapitre précédent.

Il est clair que

$$-\Delta\theta + \frac{|\nabla\theta|^q}{1+\frac{1}{n}\,|\nabla\theta|^q} \geq \lambda\theta - \theta^p.$$

Donc d'aprés le principe de comparaison de Alaa-Pierre on conclut que $u_n \leq \theta$ pour tout n.

On pose $H(\nabla u_n) = \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}\,|\nabla u_n|^q}$

Considerons u_n comme fonction test dans (3.4) et on intégrant par partie, il découle que

$$\int |\nabla u_n|^2 + \int u_n H(\nabla u_n) = \lambda \int u_n^2 - \int u_n^{p+1}.$$

Donc

$$\int |\nabla u_n|^2 + \int u_n H(\nabla u_n) \leq \lambda \int u_n^2 \leq \lambda \int \theta^2.$$

Par conséquence

$$\int |\nabla u_n|^2 \leq C$$

et

$$\int u_n H(\nabla u_n) \leq C.$$

Alors, il existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $u_n \to \overline{u}$ fortement dans $L^q(\Omega)\ \ \forall q < 2^*$. Il est clair que

$$\lambda u_n - u_n^p \to \lambda\overline{u} - \overline{u}^p \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Pour terminer il suffit de prouver que

$$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}\,|\nabla u_n|^q} \to |\nabla u|^q \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Soit ψ une fonction regulière vérifiant $\psi(0) = 0$ et $\psi' \geq 0$, en utilisant $\psi(u_n - u)$ comme fonction test,

$$\int \nabla u_n \, \nabla(\psi(u_n - u)) + \int H(\nabla u_n) \, \psi(u_n - u) = \lambda \int (\lambda u_n - u_n^p) \, \psi(u_n - u).$$

On a d'une part : $\psi(u_n - u) \to 0$ p.p (car la convergence forte de u_n dans L^1, entraine la convergence p.p) et donc

$$(\lambda u_n - u_n^p) \, \psi(u_n - u) \to (\lambda u - u^p) \, \psi(0) = 0 \quad p.p$$

Comme

$$|\lambda u_n - u_n^p \, \psi(u_n - u)| \leq (\lambda\theta + \theta^p) \, \psi(\theta - u),$$

alors en utilisant le theoreme de la convergence dominée, il découle que

$$\lambda \int (\lambda u_n - u_n^p) \, \psi(u_n - u) \to 0 \quad (1).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int \nabla u_n \, \nabla(\psi(u_n - u)) &= \int \nabla u_n \nabla(u_n - u)\psi'(u_n - u) \\ &= \int (\nabla u_n - \nabla u + \nabla u)(\nabla(u_n - u)\psi'(u_n - u)) \\ &= \int (\nabla(u_n - u)^2 \psi'(u_n - u)) + \int \nabla u \nabla(u_n - u)\psi'(u_n - u). \end{aligned}$$

Notons que par la convergence faible de u_n, on obtient

$$\int \nabla u \nabla(u_n - u)\psi'(u_n - u) \to 0$$

(car $\psi'(u_n - u) \to \psi'(0) \Rightarrow |\psi'(u_n - u)| \leq C$ et $\nabla u \nabla(u_n - u) \to 0$).

Donc on clonclut que

$$\int \nabla u_n \, \nabla(\psi(u_n - u)) = \int |\nabla \, (u_n - u)|^2 \, \psi'(u_n - u)) + o(1) \quad (2).$$

Il reste a estimer le terme

$$\int \frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \; \psi(u_n - u).$$

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \; \psi(u_n - u) &\geq -\int \frac{|\nabla u_n|^q}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \; |\psi(u_n - u)| \\ &\geq - \leq \int |\nabla u_n|^q \; |\psi(u_n - u)| \\ &\geq -(\int |\nabla u_n|^2)^{\frac{q}{2}} \; (\int \psi(u_n - u)^{\frac{2}{2-q}})^{\frac{2-q}{2}} (q < 2) \end{aligned}$$

Notons que $\psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}} \to 0$ p.p et $|\psi(u_n-u)|^{\frac{2}{2-q}} \leq C$, donc par le théorème de la convergence dominée on conclut que

$$\psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}} \to 0 \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

Comme $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, il en résulte que

$$\Rightarrow \int \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \quad |\psi(u_n-u)| = o(1) \quad (3).$$

D'après (1) , (2) et (3) on aura :

$$\int |\nabla(u_n-u)|^2 \; \psi'(u_n-u) + o(1) \leq o(1).$$

On pose $\psi(s) = e^s - 1$, alors ψ verifie les hypotheses précedente, et donc

$$\Rightarrow \int |\nabla(u_n-u)|^2 e^{u_n-u} o(1).$$

Comme $u_n \leq \theta \leq M$, il découle que

$$\lim_{n\to 0} |\nabla(u_n-u)|^2 = 0.$$

<u>*Conclusion*</u> : $u_n \to u$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et donc $\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}\,|\nabla u_n|^q} \to |\nabla u|^q$ dans L^1.

Alors u solution de (3.3). ∎

3.2 Le cas de Réaction : Problème $P(+)$

Dans cette section on considère le problème $P(+)$ avec $p = 2$, plus précisement, nous allons analyser le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + \lambda u - u^p \text{ dans } \Omega, \\ \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Le théorème principal de cette section est le théorème suivant.
Théorème
Le problème (3.6) admet une solution positive unique u telle que $e^u - 1 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.
■

Preuve
On pose formellement $v = e^u - 1 \equiv H(u)$, donc $u = ln(1 + v)$. Si u est une solution de (3.6), alors v résout

$$\begin{cases} -\Delta v = k(v) \text{ dans } \Omega, \\ v_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

ou $k(v) = (v + 1)[\lambda\, log(v + 1) - (log(v + 1))^p]$. Notons que k est une fonction bornée sur $I\!R_+$. Soit

$$J(v) = \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \int D_1(v_+) - \lambda \int D_2(v_+)$$

avec

$$D_1(s) = \int_0^s (\sigma + 1)\, (log(\sigma + 1))^p \; d\sigma$$

et

$$D_2(s) = \int_0^s (\sigma + 1)\, log(\sigma + 1) \; d\sigma.$$

J est bien définie sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ et les points critiques de J sont des solutions faibles de (3.7). Donc pour parachever le résultat, il suffit de montrer que J admet un point critique v bornée.

Rappelons que

$$\lim_{s \to infty} \frac{(log(1 + s))^p}{s^\beta} = 0 \;\forall \beta, p > 0.$$

Montrons que J est corecive.

Comme D est bornée, alors

$$J(v) \geq C||v||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - M||v||_{L^1}.$$

Par les inégalités de Holder et de Poincaré, on aura,

$$||v||_{L^1} \leq C||v||_{L^2} \leq C||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Donc

$$J(v) \geq C||v||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - M||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to \infty \text{ as } ||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to \infty$$

est par conséquence, J est coercive. On note $M = \inf_{W_0^{1,2}(\Omega)} J(v) >_i nfty$.

Soit $\{v_n\}_n$ une suite minimisante de J. Comme J est coercive, alors $\{v_n\}_n$ est bornée et par conséquence, il existe une sous suite, notée v_n telle que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Il suffit de prouver que $J(v) = M$. Notons que par définition de M, on a $J(v) \geq M$.

Comme $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, alors

$$\|v\|^2_{W_0^{1,2}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Or, d'aprés les injections compactes de Sobolev, on a $v_n \to v$ fortement dans $L^s(\Omega)$, $\forall s < 2^*$. Comme $D(s) \leq M|s|$, donc en utilisant le Théorème de la convergence dominée généralisée, on obtient que

$$D(v_n) \to D(v) \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

On conclut alors que

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n) = M.$$

Donc $J(v) = M$, et par conséquence v est une solution faible de (3.7).

Notons que la positivité de v découle du principe de maximum de J. Vazquez donné dans [12]. Comme $\dfrac{D(s)}{s}$ est une fonction strictement décroissante pour $s > 0$, alors en appliquant le principe de comparaison de la section précédente, il découle que le problème (3.7) admet une solution positive unique.

Il reste à prouver que cette solution v est bornée. Comme D est bornée, alors $-\Delta v \leq C$. Soit w la solution unique de probleme

$$\begin{cases} -\Delta w = C \text{ dans } \Omega, \\ \\ w_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Par le principe de Maximum, $v \leq w$. D'après les résultats de régularité des équations elliptiques, voir [8], on obtient que $w \in L^\infty(\Omega)$. Donc $v \in L^\infty(\Omega)$. On pose $u = \log(1+v)$; alors u est une solution bornée de (3.6) avec $e^u - 1 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. ∎

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* J. Funct. Anal. 122 (1994), no. 2, 519–543.

[2] Ambrosetti, A. Rabinowitz, P.H., *variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis **14** (1973), 349-381.

[3] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975.

[4] N.E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures* SIAM J. Math. Anal., **24**, (1993), 23-35.

[5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle théorie et applictions,* Dunod, Belgique, 2005.

[6] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear equations in* $I\!R^N$. Mauscripta Math. **1992**, 74 (1), 87-106.

[7] F. Demengel, G. Demengel, *Espaces fonctionnels Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles,* EDP Sciences \ CNRS E'ditions, 2007.

[8] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[9] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93**, (1965), 97ö107.

[10] M. Struwe, *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltnian Systems,* Springer, Berlin, 1996.

[11] D. Ruiz, S. Suárez, *Existence and uniqueness of positive solution of a logistic equation with nonlinear gradient term.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137 (2007), no. 3, 555-566.

[12] J.L. Vázquez, *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations.* Applied Math. and Optimization **1984**, 12 (3), 191-202.