

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

جامعة أبو بكر بلقايد

UNIVERSITÉ DE TLEMCE



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER
Spécialité : Biomathématiques et Modélisation

présenté par

NACERI Mohammed El-Bahi

Soutenu le : 12-06-2018

L'étude d'un modèle SIS avec diffusion

Soutenu devant le jury composé de :

M. TOUAOULA MOHAMED TARIK	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. MOUSSAOUI ALI	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. MIRI SOFIANE ELHADI	MCA, Université de Tlemcen	Examinateur
M. ATTAR AHMED	MCB, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2017-2018

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et
Mathématiques Appliquées
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen

Email : elbahi_93@hotmail.fr
nacrieldbahi@gmail.com

*Je dédié ce modeste travaille
A mes chères parents qui m'ont beaucoup aidé dans
mon parcours scolaire, qu' ALLAH les protège
A mes amis et collègues qui m'ont soutenu durant
toutes ces années
A une personne très chère a moi "K.M"*

*"(···)les débutants ne sont pas
préparés à la véritable rigueur
mathématique; ils n'y verraient que de
vaines et fastidieuses subtilités; on
perdrait son temps à vouloir trop tôt
les rendre plus exigeants; il faut qu'ils
refassent rapidement, mais sans brûler
d'étapes, le chemin qu'on parcouru
lentement les fondateurs de la science."*

Henri Poincaré

-La science et l'hypothèse-(1902)

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le bon DIEU qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Pour le soutien d'accompagnement qu'il m'a accordé, je remercie chaleureusement Mr.ATTAR Ahmed qu'il m'a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce mémoire. Il était très généreux à travers son soutien, sa disponibilité, et ses conseils et orientations qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mr.TOUAOULA Mohammed Tarik pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens aussi à remercier, également Mr.MOUSSAOUI Ali et Mr.MIRI Sofiane El-Hadi pour l'honneur d'avoir en acceptant d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens aussi, à remercier tous les professeurs qui ont contribué à notre formation, et ne nous ont pas épargné l'aide et les encouragements.

Mon respect et mes remerciements vont, ensuite, à mes chères parents, mon frère, et à Mme N.M pour leurs sacrifices et conseils, sans eux, je ne serais jamais arrivé à ce niveau. qu'ALLAH les garde.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue	5
1.2 Quelques outils dans les espaces de Sobolev	7
1.3 Principe de comparaison parabolique [11]	9
1.4 Quelques notions de stabilité	10
1.5 Théorème de Krein-Ruthmann	11
2 État d'équilibre sans maladie (DFE)	13
2.1 Introduction	13
2.2 Problème d'équilibre	16
2.3 État d'équilibre sans maladie (DFE)	17
2.4 Le calcul de R_0	19
3 État d'équilibre endémique (EE)	35
3.1 Introduction	35
3.2 Problème d'équilibre	36
3.3 Existence et unicité de EE	39
3.4 Stabilité globale de l'état d'équilibre endémique (EE)	43
Bibliographie	49

Introduction

Ce mémoire de Master a pour but, de faire une étude d'un système de réaction-diffusion SIS, et de présenter des résultats obtenus ces dernières années par différents auteurs [1, 10].

L'étude de ce genre de modèle a été initié depuis plusieurs années, un de ces simple modèles est le modèle SIS de Kermack et McKendrick (1932).

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \gamma I \\ I' = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce modèle, la population considérée est divisée en deux compartiments :

- S : les individus susceptibles d'être infectés.
- I : les individus infectés.

Les paramètres utilisés en épidémiologie sont :

- $\gamma > 0$: le taux de guérison.
- $\beta > 0$: le taux de transmission.

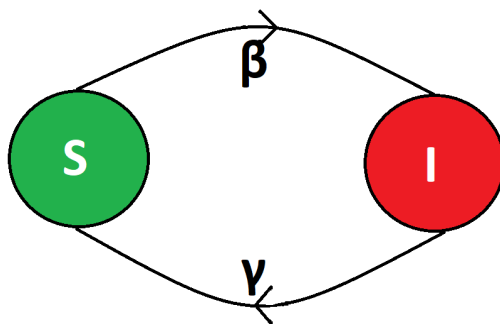


FIGURE 1

La population totale $S + I$ est supposée constante, puisque $(S + I)' = 0$, notons cette constante N . Nous pouvons réduire le modèle à une seule équation différentielle en remplaçant S par $N - I$, ce qui donne la nouvelle équation différentielle dite "logistique" qui est de la forme :

$$I' = f(I) = rI\left(1 - \frac{I}{K}\right)$$

avec $r = \beta N - \gamma$ et $K = N - \frac{\gamma}{\beta}$.

Une analyse du comportement des solutions de ce système nous conduit à introduire un nouveau paramètre, appelé taux de reproduction de base, noté R_0 , l'étude de la maladie infectieuse nous ramène à déterminer ce taux qui est un pas essentiel qui définit un seuil à partir duquel, le comportement de la maladie change entre la persistance et la disparition, plus précisément, on définit R_0 comme le nombre moyen d'individus infectés engendré par un individu infecté durant sa période d'infection, donc il vient intuitivement que si $R_0 > 1$, la maladie persiste dans la population et si $R_0 < 1$ la maladie va disparaître avec le temps.

La présence de diffusion qui est un facteur régularisant dans (1), nous amène à étudier le système (2). En dehors des dynamiques de croissance modélisées par le terme de réaction f .

$$\begin{cases} S_t - \Delta S = -\beta SI + \gamma I & t \geq 0; \quad x \in \Omega \\ I_t - \Delta I = \beta SI - \gamma I & t \geq 0; \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

Pour voir l'impact de la diffusion, et pour que le modèle soit plus réaliste on suppose que les paramètres sont non homogènes par rapport à l'espace :

- $\gamma(x) > 0$: pour tout $x \in \Omega$ le taux de guérison.
- $\beta(x) > 0$: pour tout $x \in \Omega$ le taux de transmission.

sont des fonctions positives.

La différence entre les deux modèles (1) et (2) consiste à prendre en considé-

ration le déplacement des individus.

Dans ce mémoire, on propose d'étudier le modèle SIS suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \frac{\beta SI}{S+I} + \gamma I \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \frac{\beta SI}{S+I} - \gamma I \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \\ N = \int_{\Omega} S(x, 0) + I(x, 0) dx \quad \Omega, \end{array} \right.$$

$\int_{\Omega} I(x, 0) dx > 0$ avec $S(x, 0) \geq 0$ et $I(x, 0) \geq 0$ pour $x \in \Omega$.

– d_S et d_I : sont des constantes positives représentent les taux de diffusion.

– β et γ sont des fonctions Holdériennes positives sur $\bar{\Omega}$ qui représentent le taux de transmission de la maladie et le taux de guérison à la position x .

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le **premier chapitre**, on présente les outils de base à utiliser pour traiter notre modèle, ainsi que les définitions des espaces de Sobolev, les notions d'épidémiologie comme la stabilité, locale et global, la stabilité de Lyapouov, et aussi le théorème de Krein Ruthman.

Le chapitre 2 : a pour objectif de présenter le modèle principal : une analyse de l'existence, les états d'équilibre et le calcul du taux de reproduction de base R_0 et son comportement, ; une analyse générale de DFE (l'équilibre sans maladie) y compris sa stabilité globale.

Le chapitre 3 : est dédié à l'étude de l'équilibre endémique EE, une analyse qualitative générale de cet équilibre est présentée.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire pour les espaces de Lebesgue, les espace de Sobolev.

Puis nous énonçons le principe de comparaison.

Ensuite nous donnons des définitions de base sur les états stationnaires et la stabilité.

Enfin nous énonçons le théorème de Krein-Ruthman qui sera très utile dans notre étude.

1.1 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$

– Si $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

– Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

On note par

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Définition 1.2.

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Notation : On désigne par $C_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de C^k sur Ω à support compact, $\forall k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$C_0^k(\Omega) = \left\{ f \in C^k; f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ où } K \subset \Omega \text{ est un compact et } \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Théorème 1.1. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int f u = 0 \quad \forall u \in C_0(\Omega).$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω

Théorème 1.2. (Inégalité de Hölder)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Théorème 1.3. L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.4. (Fischer-Riesz)

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.5. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

1.2 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Définition 1.3.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1 \dots N \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou bien de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (\text{si } 1 \leq p < +\infty).$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,2} = H^1$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{pour tout } u, v \in H^1(\Omega).$$

Et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

On prend $\Omega = \mathbb{R}^N$ pour le théorème suivant :

Théorème 1.6. (Inégalité de Sobolev) : Soit $1 \leq p < \infty$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{où } p^* \text{ est donné par } \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Définition 1.4.

Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Remarque 1.1. Une fonction $v \in L_{loc}^p(\Omega)$ alors $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, si pour tout $K \subset\subset \Omega$ (compact), $v \in W^{1,p}(K)$.

Lemme 1.1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, avec **Supp u compact** inclus dans Ω , alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollaire 1.1. (Inégalité de Poincaré) : on suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (1 \leq p < \infty).$$

L'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Remarque 1.2. L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une direction.

1.3 Principe de comparaison parabolique [11]

Théorème 1.7. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n et $f = f(x, t, u)$, $\frac{\partial f}{\partial u} \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$

$u \in C(0, T; C^2(\Omega))$ est une solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x, t, u) & \Omega, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

et soient \bar{v} et \underline{v} deux sous-sur solutions respectivement, vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \geq D\Delta \bar{v} + f(x, t, \bar{v}) & \Omega, t \in [0, T] \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \leq D\Delta \underline{v} + f(x, t, \underline{v}) & \Omega, t \in [0, T] \\ \underline{v}(x, 0) \leq \bar{v}(x, 0) & \Omega \end{cases}$$

On suppose également que $\frac{\partial \underline{v}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}$ pour $x \in \partial\Omega$. Alors :

$$\underline{v} \leq u \leq \bar{v} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega.$$

De plus, si $\exists(x_0, t_0) \in \Omega \times [0, T]$ tel que $\bar{v}(x_0, t_0) = \underline{v}(x_0, t_0)$, alors

$$\bar{v} = \underline{v} \quad \text{dans } [0, t_0] \times \bar{\Omega}.$$

Nous présentons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire

1.4 Quelques notions de stabilité

On considère le système autonome suivant :

$$x'(t) = f(x(t))$$

avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne sur Ω , pour assurer l'existence et l'unicité locale. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibres satisfaisant $f(x^*) = 0$.

En pratique, on s'intéresse aux points d'équilibres qui possèdent certaines propriétés de stabilité.

Définition 1.5. (Stabilité au sens de Lyapunov)

On dit qu'un point d'équilibre x^* est stable au sens de Lyapunov pour le système précédent si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel positif δ , tel que pour tout $x_0 \in \Omega$ avec $\|x^* - x_0\| < \delta$, alors la solution x ayant pour condition initiale $x(t_0) = x_0$ vérifie :

$$\forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| \leq \epsilon$$

Le point d'équilibre est dit instable s'il n'est pas stable.

Définition 1.6. (Stabilité asymptotique locale)

On dit qu'un point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable si et seulement si x^* est stable et s'il existe un nombre réel positif δ , tel que pour tout $x_0 \in \Omega$ avec $\|x(t) - x_0\| < \delta$ alors la solution x ayant pour condition initiale $x(t_0) = x_0$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0.$$

Définition 1.7. (Stabilité globale)

On dit que x^* est globalement asymptotiquement stable sur $\mathbb{V} \subset \Omega$ si pour tout $x_0 \in \mathbb{V}$ la solution x ayant pour condition initiale $x(t_0) = x_0$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

Nous présentons maintenant une version de Théorème de Krein Ruthmann.

1.5 Théorème de Krein-Ruthmann

Soit l'opérateur linéaire suivant

$$\mathbb{L} : \phi \longmapsto -D\Delta\phi - r(x)\phi$$

Théorème 1.8. Soit r est une fonction lipschitzienne sur $\bar{\Omega}$, alors il existe un unique couple (λ_1, ϕ) tel que : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (valeur propre principale de \mathbb{L}), et $\phi \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ (fonction propre principale de \mathbb{L}) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -D\Delta\phi - r(x)\phi = \lambda_1\phi & \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0 & \partial\Omega \\ \phi > 0 & \Omega \\ \max_{x \in \bar{\Omega}} \phi(x) = 1 & \end{array} \right.$$

De plus, on a la formule de Rayleigh :

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} [D|\nabla\phi|^2 - r(x)\phi^2(x)] dx}{\int_{\Omega} \phi^2(x) dx}$$

L'opérateur \mathbb{L} admet une infinité dénombrable de valeurs propres réelles $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow \infty)$ les fonction propres associées (ϕ_k) forme une base orthonormée de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Chapitre 2

État d'équilibre sans maladie (DFE)

2.1 Introduction

Pour comprendre l'impact de mouvement des individus dans un environnement hétérogène sur la persistance ou l'extinction d'une maladie, on considère dans ce chapitre un modèle de réaction-diffusion SIS (Susceptible-Infecté-Susceptible).

On présente le modèle d'étude suivant :

Le modèle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, ($m \geq 1$) un domaine borné de \mathbb{R}^m avec un bord $\partial\Omega$ régulier (quand $m > 1$).

Soit le système de réaction diffusion SIS suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \frac{\beta SI}{S+I} + \gamma I \quad \Omega; \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \frac{\beta SI}{S+I} - \gamma I \quad \Omega; \quad t > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \quad \partial \Omega \quad t > 0 \\ N = \int_{\Omega} S(x,0) + I(x,0) dx \quad \Omega \quad ; t > 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où $S(x, t)$ et $I(x, t)$ représentent la densité des individus susceptibles et infectés à la position x et à l'instant t , d_S et d_I sont des constantes positives représentant les taux de diffusion des susceptibles et des infectés; et β et γ sont des fonctions Holdériennes positives sur $\bar{\Omega}$ qui représentent les taux de transmission de la maladie et le taux de guérison à la position x , respectivement. On suppose qu'on a pas de flux sur le bord.

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \quad x \in \partial \Omega, \quad t > 0$$

Et que les données initiales sont positives, i.e

$$(A1) : \int_{\Omega} I(x, 0) dx > 0 \text{ avec } S(x, 0) \geq 0 \text{ et } I(x, 0) \geq 0 \text{ pour } x \in \Omega.$$

Sommons les deux premières équations de (2.1) puis intégrons le résultat sur Ω , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (S + I) = \int_{\Omega} \Delta(d_S S + d_I I) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta} (d_S S + d_I I) = 0; \quad t > 0$$

De cela, on conclut que la population totale est constante, i.e :

$$\int_{\Omega} (S + I) = N; \quad t \geq 0$$

Définition 2.1.

On dit que x est un site à faible risque "low-risk site" si le taux de transmission de la maladie $\beta(x)$ est inférieure au taux de guérison $\gamma(x)$.

Un site à haut risque "high-risk site" est définie d'une manière similaire.

Soit :

$$\mathbb{H}^- = \{x \in \Omega : \beta(x) < \gamma(x)\}, \quad \mathbb{H}^+ = \{x \in \Omega : \beta(x) > \gamma(x)\}$$

dénotent les ensembles de ces sites à faible et à haut risque, respectivement.

On dit que Ω est un domaine à faible risque "low-risk domain" si

$$\int_{\Omega} \beta(x) dx < \int_{\Omega} \gamma(x) dx,$$

Un domaine à haut risque "high-risk domain" si

$$\int_{\Omega} \beta(x) dx > \int_{\Omega} \gamma(x) dx$$

Et par continuité, l'ensemble

$$\mathbb{H}^0 = \{x \in \Omega : \beta(x) = \gamma(x)\}$$

est aussi non vide.

(A2) : \mathbb{H}^- et \mathbb{H}^+ sont non vides.

(A3) : \mathbb{H}^0 consiste en un nombre fini de surface C^1 disjointe (ou d'un nombre fini de points dans le cas où $m = 1$).

2.1.1 Existence de solution :

Dans cette sous section on s'intéresse à l'existence d'une solution de notre modèle, le résultat suivant montre l'existence d'une solution pour un modèle de réaction-diffusion général : on considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u = F(x, t, u) & \Omega, t > 0. \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0. & \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Où $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ et $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, et soit F une fonction Lipschitzienne

Théorème 2.1. Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, et soit F une fonction Lipschitzienne, alors le problème (2.2) admet une unique solution globale.

Démonstration. Pour la démonstration de ce Théorème, il suffit de voir [12, 7], le principe de la démonstration consiste à utiliser la théorie des semi groupe ou bien on peut utiliser le théorème de point fixe. ■

Pour faire une étude globale de notre modèle, la section suivante est dédiée à l'étude de l'équilibre de notre modèle.

2.2 Problème d'équilibre

La recherche des états stationnaire de (2.1) nous amène à trouver les solutions de système elliptique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_S \Delta S &= -\frac{\beta SI}{S+I} + \gamma I & \Omega \\ -d_I \Delta I &= \frac{\beta SI}{S+I} - \gamma I & \Omega \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \\ N &= \int_{\Omega} S(x, t) + I(x, t) dx. & \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Les conditions de Neumann nous conduit à chercher des solutions constantes de (2.3).

2.2.1 Existence du DFE

Définition 2.2.

On désigne par équilibre sans maladie (disease-free equilibrium) une solution dans laquelle $I(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. On la note par DFE.

La seconde équation de (2.3) admet $I^* = 0$ comme solution, en injectant cette solution dans la première équation de (2.3) on trouve que $d_S \Delta S^* = 0$, de plus de la quatrième équation de (2.3) on trouve que $S^* \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\Omega} S^* dx = N \implies S^* = \frac{N}{|\Omega|}$$

Alors $(S^*, I^*) = (\frac{N}{|\Omega|}, 0)$ est une solution de (2.3). Cette solution est l'état stationnaire de (2.1)

On appelle (S^*, I^*) l'état d'équilibre sans maladie noté par DFE (the disease free equilibrium).

2.3 État d'équilibre sans maladie (DFE)

Dans cette section on s'intéresse à la stabilité de DFE .

2.3.1 Stabilité locale du DFE

Pour étudier la stabilité du DFE on linéarise le problème (2.1) autour de (S^*, I^*) , et pour cela on pose $\xi = S - S^*$; $\mu = I - I^*$. En remplaçant dans le système (2.1) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = d_S \Delta \xi - \frac{\beta(\xi + S^*)\mu}{\xi + S^* + \mu} + \gamma \mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = d_I \Delta \mu + \frac{\beta(\xi + S^*)\mu}{\xi + S^* + \mu} - \gamma \mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.4)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = d_S \Delta \xi - \frac{\beta(\xi + S^* + \mu)\mu}{\xi + S^* + \mu} - \frac{\beta \mu^2}{\xi + S^* + \mu} + \gamma \mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = d_I \Delta \mu + \frac{\beta(\xi + S^* + \mu)\mu}{\xi + S^* + \mu} - \frac{\beta \mu^2}{\xi + S^* + \mu} - \gamma \mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.5)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = d_S \Delta \xi + (\gamma - \beta)\mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = d_I \Delta \mu + (\beta - \gamma)\mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0 & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.6)$$

On remarque du système (2.6) que la seconde équation est découplée de la première ce qui nous ramène à étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} = d_I \Delta \mu + (\beta - \gamma)\mu & \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0 & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour cela on définit l'opérateur \mathbb{L} par :

$$\mathbb{L} : \psi \longrightarrow -d_I \Delta \psi - [\beta(x) - \gamma(x)]\psi$$

En appliquant le théorème de Krein-Ruthman sur cet opérateur, alors on peut écrire $\mu(x, t)$ dans la base formée par les fonctions propres de \mathbb{L}

$$\mu(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \psi_k(x)$$

Pour chaque k fixé on a :

$$a'_k(t) \psi_k(x) = a_k(t) \left[d_I \Delta \psi_k + (\beta(x) - \gamma(x)) \psi_k(x) \right]$$

Or :

$$-d_I \Delta \psi_k - (\beta(x) - \gamma(x)) \psi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x)$$

Ce qui implique que : $a'_k(t) \psi_k(x) = -\lambda_k a_k(t) \psi_k(x)$. Alors

$$a_k(t) = a_k(0) e^{-\lambda_k t}$$

Donc $\mu(x, t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mu(x, t) = a_1(0)e^{-\lambda_1 t}\psi_1(x) + \dots + a_k(0)e^{-\lambda_k t}\psi_k(x) + \dots$$

D'après le Théorème de Krein-Ruthman on définit la valeur propre principale λ_1 par :

$$\lambda_1 = \inf_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \Phi(\psi)$$

Où

$$\Phi(\psi) = \frac{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x))\psi^2(x) dx}{\int_{\Omega} \psi^2(x) dx}$$

Remarque 2.1.

- Le cas où $\lambda_1 > 0$ indique une décroissance exponentielle des individus infectés d'où la disparition de la maladie.
- Le cas où $\lambda_1 < 0$ indique une croissance exponentielle des individus infectés d'où la persistance de la maladie.

2.4 Le calcul de R_0

Notons par R_0 le taux de reproduction de base et on le définit pour notre modèle comme suit :

$$R_0 = \sup_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \beta(x)\psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + \int_{\Omega} \gamma(x)\psi^2(x) dx}$$

Il est également intéressant de noter que R_0 ne dépend pas de la valeur du coefficient de diffusion d_S pour les susceptibles.

Méthode de calcul de R_0 :

Supposons que $\lambda_1 > 0$ (i.e la disparition de la maladie) on sait que :

$$0 < \lambda_1 \leq \frac{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x))\psi^2(x) dx}{\int_{\Omega} \psi^2(x) dx}$$

Ce qui implique que :

$$0 < \lambda_1 \int_{\Omega} \psi^2(x) dx \leq d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \psi^2(x) dx$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx < \lambda_1 \int_{\Omega} \psi^2(x) dx + \int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx \leq d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + \int_{\Omega} \gamma(x) \psi^2(x) dx$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + \int_{\Omega} \gamma(x) \psi^2(x) dx} < \frac{\lambda_1 \int_{\Omega} \psi^2(x) dx + \int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma(x) \psi^2(x) dx} \leq 1$$

De cela on conclut que :

$$\frac{\int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma(x) \psi^2(x) dx} < 1.$$

Alors,

$$R_0 = \sup_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \beta(x) \psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma(x) \psi^2(x) dx} \leq 1.$$

Dans le cas ou $R_0 = 1$, alors il existe une fonction $\xi_0 \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \beta(x) \xi_0^2(x) dx = \int_{\Omega} d_I |\nabla \xi_0|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma(x) \xi_0^2(x) dx$$

Alors

$$\int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \xi_0^2(x) dx = \int_{\Omega} d_I |\nabla \xi_0|^2 dx. \quad (2.8)$$

Calculons

$$\Phi(\xi_0) = \frac{d_I \int_{\Omega} |\nabla \xi_0|^2 dx - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \xi_0^2(x) dx}{\int_{\Omega} \xi_0^2(x) dx}$$

Utilisons (2.8), on obtient

$$\Phi(\xi_0) = \frac{\int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \xi_0^2(x) dx - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \xi_0^2(x) dx}{\int_{\Omega} \xi_0^2(x) dx} = 0.$$

Alors, il existe $\xi_0 \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\inf_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \Phi(\psi) = \Phi(\xi_0) = 0$$

Donc

$$\lambda_1 = \inf_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \Phi(\psi) \geq 0.$$

Donc $\lambda_1 \geq 0$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\lambda_1 > 0$; et par suite :

$$R_0 = \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} \Phi(\psi) < 1.$$

On procède de la même manière dans le cas où $\lambda_1 < 0$ (i.e la persistance de la maladie) et on trouve que $R_0 > 1$.

Remarque 2.2.

- Dans le cas où $R_0 < 1$ on aura la disparition de la maladie.
- Dans le cas où $R_0 > 1$ on aura la persistance de la maladie.

2.4.1 Caractérisation de R_0

Dans le but de démontrer la relation directe entre la valeur propre principale et R_0 et dans le même contexte de la 2ème méthode de calcul de R_0 , on présente le résultat suivant :

Lemme 2.1.

- • Si $\lambda_1 < 0$ alors $R_0 > 1$.
- • Si $\lambda_1 = 0$ alors $R_0 = 1$.
- • Si $\lambda_1 > 0$ alors $R_0 < 1$.

Démonstration. [1]

Il est bien connu qu'il existe une fonction positive $\phi \in \mathbb{C}^2(\bar{\Omega})$ tel que :

$$-d_I \Delta \phi + \gamma \phi = \frac{\beta}{R_0} \phi \quad \text{pour } x \in \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{pour } x \in \partial \Omega$$

Considérons les deux équations suivante :

$$-d_I \Delta \psi_1 = (\beta - \gamma) \psi_1 + \lambda_1 \psi_1 \quad x \in \Omega \quad (2.9)$$

$$-d_I \Delta \phi = \frac{\beta}{R_0} \phi - \gamma \phi \quad x \in \Omega \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = 0 \quad x \in \partial \Omega. \quad (2.11)$$

Rappelons que ϕ et ψ_1 sont positives sur Ω . Utilisons ϕ comme fonction test dans (2.9) et ψ_1 comme fonction test dans (2.10) alors, on obtient :

$$d_I \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \phi = \int_{\Omega} \beta \psi_1 \phi - \int_{\Omega} \gamma(x) \psi_1 \phi + \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_1 \phi dx \quad (2.12)$$

Et

$$d_I \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \phi dx = \int_{\Omega} \frac{\beta}{R_0} \psi_1 \phi - \int_{\Omega} \gamma \psi_1 \phi dx \quad (2.13)$$

On combine les deux équations (2.12) et (2.13), on obtient alors :

$$\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \int_{\Omega} \beta \psi_1 \phi + \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_1 \phi = 0$$

Puisque $\int_{\Omega} \beta \psi_1 \phi$ et $\int_{\Omega} \psi_1 \phi$ sont positives, on conclut que $\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$ et λ_1 ont un signe opposé. Alors :

$R_0 > 1$ quand $\lambda_1 < 0$, $R_0 = 1$ quand $\lambda_1 = 0$, et $R_0 < 1$ quand $\lambda_1 > 0$. ■

Lemme 2.2. Soit le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\delta \Delta \psi = \mu \psi - m_{\delta}(x) \psi & \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 & \partial \Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $\delta > 0$ et $m_{\delta}(x)$ est une fonction Holderienne sur $\bar{\Omega}$, et soit μ_1 la valeur

propre principale du problème (2.14). Supposons que

$$m_\delta(x) \rightarrow m(x) \text{ uniformément par rapport à } x \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Alors :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_1^\delta = \min_{x \in \bar{\Omega}} m(x) \equiv m^*$$

Démonstration. Pour la preuve il suffit de voir [9]. ■

Théorème 2.2.

Soit $\Omega \subset R^n$, et λ_1 est la valeur propre principale de l'opérateur \mathbb{L} défini comme suit

$$\lambda_1 = \inf_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \Phi(\psi) = \inf_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \int_{\Omega} (\beta(x) - \gamma(x)) \psi^2(x) dx}{\int_{\Omega} \psi^2(x) dx} \right\} \quad (2.15)$$

Alors :

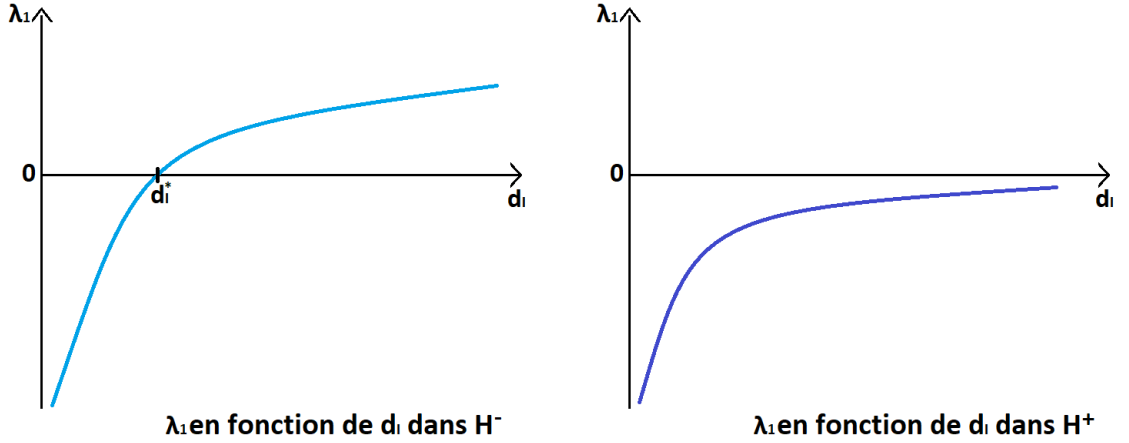
- (a) λ_1 est une fonction monotone strictement croissante en $d_I > 0$.
- (b) $\lambda_1 \rightarrow \min\{\gamma(x) - \beta(x) : x \in \bar{\Omega}\} < 0$; quand $d_I \rightarrow 0$.
- (c) $\lambda_1 \rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\gamma - \beta)$; quand $d_I \rightarrow \infty$.
- (d) Si $\int_{\Omega} \beta(x) \geq \int_{\Omega} \gamma(x)$ alors $\lambda_1 < 0$ pour tout $d_I > 0$.
- (e) Si $\int_{\Omega} \beta(x) < \int_{\Omega} \gamma(x)$ alors l'équation $\lambda_1(d_I) = 0$ a une unique racine positive notée par d_I^* , de plus, si $d_I < d_I^*$ alors $\lambda_1 < 0$ et si $d_I > d_I^*$ alors $\lambda_1 > 0$.

Remarque 2.3.

Si $\int_{\Omega} \beta < \int_{\Omega} \gamma$

$$d_I^* = \sup \left\{ \frac{\int_{\Omega} (\beta - \gamma) \psi^2}{\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2} : \psi \in H^1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} (\beta - \gamma) \psi^2 > 0 \right\}$$

Démonstration. Théorème 2.2



(a)

$$-d_I \Delta \psi_1 = (\beta - \gamma) \psi_1 + \lambda_1 \psi_1 \quad x \in \Omega \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = 0 \quad x \in \partial \Omega \quad (2.16)$$

Il est clair par définition de λ_1 (2.15) que λ_1 est une fonction monotone croissante en $d_I > 0$. Il reste à montrer que cette croissance est stricte, pour cela on dérive (2.16) par rapport à d_I pour obtenir :

$$\Delta \psi_1 + d_I \Delta (\psi_1)' + (\beta - \gamma) (\psi_1)' + (\lambda_1)' \psi_1 + \lambda_1 (\psi_1)' = 0 \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial (\psi_1)'}{\partial \eta} = 0 \quad x \in \partial \Omega. \quad (2.17)$$

Utilisons ψ_1' comme fonction test dans (2.16), on trouve alors

$$d_I \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \psi_1' dx = \int_{\Omega} (\beta - \gamma) \psi_1 \psi_1' + \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_1 \psi_1' dx \quad (2.18)$$

Puis testons par ψ_1 dans (2.17), on obtient :

$$d_I \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \psi_1' dx = - \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^2 dx + \int_{\Omega} (\beta - \gamma) \psi_1 \psi_1' + \lambda_1' \int_{\Omega} \psi_1^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_1 \psi_1' dx \quad (2.19)$$

On combine les deux équations (2.18) et (2.19), on obtient alors :

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^2 = \int_{\Omega} (\lambda_1)' \psi_1^2$$

Puisque $\psi_1 > 0$ alors $(\lambda_1)' \geq 0$.

Supposons que $(\lambda_1)' = 0$ dans ce cas ψ_1 est une constante positive, donc (2.16) implique

$$\beta(x) - \gamma(x) + \lambda_1 = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que la fonction $(\beta(x) - \gamma(x))$ change de signe. On conclut donc que $(\lambda_1)' > 0$.

(b) Ce résultat est une conclusion direct de l'application du Lemme 2.2, et aussi avec la condition a).

(c) Posons $\psi^2 = \frac{1}{|\Omega|}$ dans la formule (2.15), on peut voir que $\lambda_1 \leq \max\{\gamma(x) - \beta(x) : x \in \bar{\Omega}\}$ pour tout $d_I > 0$. Par (a) λ_1 est uniformément bornée pour $d_I \geq 1$, ainsi qu'elle a une limite finie $\hat{\lambda}$ quand $d_I \rightarrow \infty$.

L'équation (2.16) nous donne :

$$\Delta\psi_1 + \frac{\beta - \gamma + \lambda_1}{d_I} = 0 \quad x \in \Omega$$

Par la régularité elliptique, il existe une constante positive $\bar{\psi}$ tel que $\psi_1 \rightarrow \bar{\psi}$ dans $C^1(\Omega)$ quand $d_I \rightarrow \infty$.

Intégrons (2.16) par partie sur Ω pour qu'on obtient :

$$\int_{\Omega} (\beta - \gamma)\psi_1 + \lambda_1 \int_{\Omega} \psi_1 = 0,$$

puis faisons tendre d_I vers l'infini, on tombe sur la relation :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\gamma - \beta)$$

(d) On sait de (a) que λ_1 est strictement croissante en $d_I > 0$, de plus, de (b) et (c)

$$\lim_{d_I \rightarrow 0} \lambda_1 = \min\{\gamma - \beta : x \in \Omega\} < 0.$$

Et

$$\lim_{d_I \rightarrow \infty} \lambda_1 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\gamma - \beta) \leq 0.$$

Car par hypothèse : $\int_{\Omega} \gamma \leq \int_{\Omega} \beta$. Ce qui implique que $\lambda_1 < 0$ pour tout $d_I > 0$.

(e) On sait de (a) que λ_1 est strictement croissante en $d_I > 0$, de plus

$$\lim_{d_I \rightarrow 0} \lambda_1 = \min\{(\gamma - \beta) : x \in \Omega\} < 0$$

et par hypothèse on a $\int_{\Omega} \beta < \int_{\Omega} \gamma$ alors

$$\lim_{d_I \rightarrow \infty} \lambda_1 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\gamma - \beta) \geq 0$$

Alors l'équation $\lambda_1(d_I) = 0$ a une unique racine notée par d_I^* , de plus $\lambda_1(d_I)$ change de signe en traversant la valeur d_I^* .

■

Pour montrer la relation directe entre le coefficient de diffusion d_I et le taux de reproduction de base R_0 , on énonce le résultat suivant :

Théorème 2.3. Supposons que les conditions (A1) et (A2) sont vérifiées, alors :

1. R_0 est positive et monotone décroissante en $d_I > 0$.
2. Si $d_I \rightarrow 0$ alors $R_0 \rightarrow \max\{\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} : x \in \bar{\Omega}\}$.
3. Si $d_I \rightarrow \infty$ alors $R_0 \rightarrow \frac{\int_{\Omega} \beta(x)}{\int_{\Omega} \gamma(x)}$.

Démonstration. Théorème 2.3

1. Par le structure de R_0 : c'est une fonction monotone décroissante en d_I .
- 2.

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} \beta \phi^2}{\int_{\Omega} d_I |\nabla \phi|^2 + \int_{\Omega} \gamma \phi^2} \right\} \quad (2.20)$$

La preuve rassemble a celui de Lemme 2.2.

3. Soit le problème vérifié par R_0

$$d_I \Delta \phi - \gamma \phi + \frac{\beta}{R_0} \phi = 0 \quad (2.21)$$

Divisons (2.21) par d_I , et intégrons par partie sur Ω , puis faisons tendre d_I vers l'infini. Il existe $\bar{\phi}$ vérifiant $-\Delta\phi = 0$ tel que $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ dans $C^1(\Omega)$. Et

$$\lim_{d_I \rightarrow \infty} R_0 = \frac{\int_{\Omega} \beta \phi^2}{\int_{\Omega} \gamma \phi^2} = \frac{\int_{\Omega} \beta}{\int_{\Omega} \gamma}.$$

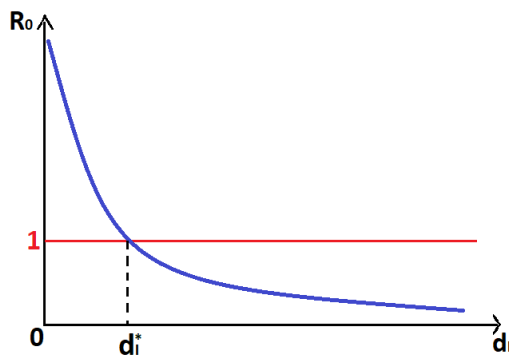
En conclusion on trouve que

$$R_0 \rightarrow \frac{\int_{\Omega} \beta}{\int_{\Omega} \gamma}$$

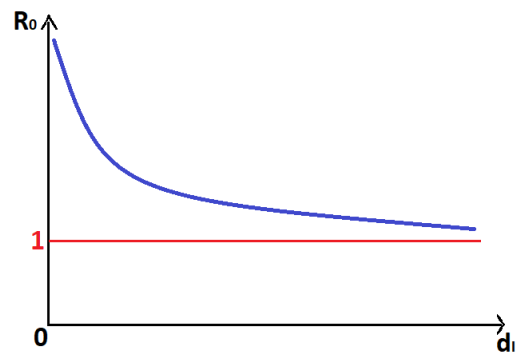
■

Remarque 2.4. Suivant la même philosophie de Théorème 2.2, alors on aura les résultats suivant :

1. Si Ω est un domaine à faible risque ($\int_{\Omega} \beta < \int_{\Omega} \gamma$), alors il existe une unique valeur $d_I^* > 0$ tel que :
 - Si $d_I < d_I^*$ alors $R_0 > 1$.
 - Si $d_I > d_I^*$ alors $R_0 < 1$.



R_0 en fonction de d_I dans H^-



R_0 en fonction de d_I dans H^+

2. Dans un domaine à haut risque ($\int_{\Omega} \beta \geq \int_{\Omega} \gamma$), on a $R_0 > 1$ pour tout $d_I > 0$.

2.4.2 Stabilité globale du DFE :

Théorème 2.4.

Si $R_0 < 1$ alors $(S, I) \rightarrow (S^*, 0)$ dans $(C(\bar{\Omega}))^2$ quand $t \rightarrow \infty$.

Démonstration.

– **I)** On observe du système (2.1) que :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \frac{\beta SI}{S + I} - \gamma I \quad x \in \Omega; \quad t > 0.$$

Puisque $\frac{S}{S + I} \leq 1$, on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial t} \leq d_I \Delta I + (\beta - \gamma)I \quad x \in \Omega; \quad t > 0$$

Soit $U(x, t) = Me^{-\lambda_1 t} \psi_1(x)$ avec $(\lambda_1 > 0)$, on sait aussi que $\psi_1 > 0$ sur Ω , et M est une constante positive choisit assez grande de tel sorte qu'on aura $I(x, 0) \leq U(x, 0)$.

Dérivons $U(x, t)$ par rapport à t

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda_1 Me^{-\lambda_1 t} \psi_1.$$

On a aussi :

$$-\lambda_1 \psi_1 = d_I \Delta \psi_1 + (\beta - \gamma) \psi_1$$

Donc

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Me^{-\lambda_1 t} (d_I \Delta \psi_1 + (\beta - \gamma) \psi_1)$$

Calculons maintenant ΔU :

$$\Delta U = Me^{-\lambda_1 t} \Delta \psi_1.$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = d_I \Delta U + (\beta - \gamma)U, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = 0.$$

Par le principe de comparaison parabolique on conclut que $I(x, t) \leq U(x, t)$ pour $x \in \Omega$ et $t \geq 0$.

Or on sait que $U(x, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in \Omega$, alors $I(x, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in \Omega$.

– **II**) On observe du système (2.1) que :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \frac{\beta SI}{S + I} + \gamma I \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

Le résultat précédent et la continuité de β et γ implique qu'il existe une constante positive $C_1 > 0$ tel que :

$$\left| \frac{\partial S}{\partial t} - d_S \Delta S \right| \leq C_1 e^{-\lambda_1 t} \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (2.22)$$

(puisque $\frac{S}{S + I} \leq 1$), et $\max_{x \in \bar{\Omega}} \psi(x) = 1$, et par continuité de β et la bornitude de Ω il existe $C > 0$ tel que $(\gamma - \beta) < C$.

On sait que $C_1 e^{-\lambda_1 t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, ce qui implique que

$$S(x, t) \rightarrow C > 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Pour voir ça, écrivons S sous cette forme :

$$S(x, t) = S_1(t) + S_2(x, t),$$

avec

$$S_1(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S(x, t) dx,$$

et $S_2(x, t)$ vérifie :

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = d_S \Delta S_2 + f(x, t), \quad \frac{\partial S_2}{\partial \eta} = 0,$$

avec $|f(x, t)| \leq C_3 e^{-\lambda_1 t}$. Alors (2.22) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left| \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial t} - d_S \Delta S_2 \right| \leq C_1 e^{-\lambda_1 t} \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Ce qui implique que :

$$\left| \frac{\partial S_1}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial S_2}{\partial t} - d_S \Delta S_2 \right| \leq C_1 e^{-\lambda_1 t} \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Or $\frac{\partial S_2}{\partial t} - d_S \Delta S_2 = f(x, t)$, alors :

$$\left| \frac{\partial S_1}{\partial t} \right| \leq C_1 e^{-\lambda_1 t} + |f(x, t)| \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Donc il existe C_2 tel que :

$$\left| \frac{\partial S_1}{\partial t} \right| \leq C_2 e^{-\lambda_1 t}.$$

On a aussi $S_1(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_1(t) dx + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_2(x, t) dx$, et puisque que $S_1(t)$ ne dépend pas de x alors $S_1(t) = S_1(t) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_2(x, t) dx$, ce qui implique que

$$\int_{\Omega} S_2(x, t) dx = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

On sait par hypothèse que :

$$\int_{\Omega} (S + I) dx = N.$$

Et de la première partie de cette démonstration que $I \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, donc $\int_{\Omega} [S_1(t) + S_2(x, t)] dx = N$, quand $t \rightarrow \infty$ et alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} S_1(t) dx = N.$$

Ce qui nous donne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = \frac{N}{|\Omega|}.$$

Soit $0 = \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 \leq \bar{\lambda}_3 \dots$ les valeurs propres de $-\Delta$ avec condition de Neumann, et $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ les fonctions propres normalisées associées .

Écrivons $S_2(x, t)$ dans la base formée par les fonctions propres $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$S_2(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\varphi_k(x), \text{ et } f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\varphi_k(x)$$

Notons que $a_0 = f_0 = 0$ avec $\int_{\Omega} S_2(x, t)dx \equiv 0$, il existe une constante positive C_4 tel que

$$|f_k(t)| \leq C_4 e^{-\bar{\lambda}_1 t} \quad k \geq 1.$$

On peut voir que $|f_k(t)| \leq C_5 e^{-\lambda^{**} t}$ pour tout $k \geq 1$, avec C_5 une constante positive et $\lambda^{**} = \min\{\lambda_1; \bar{\lambda}_1\}$.

On conclut donc que $S_2(x, t) \rightarrow 0$ pour $x \in \Omega$ quand $t \rightarrow \infty$, et par suite

$$S(x, t) \rightarrow S^* \text{ quand } t \rightarrow \infty \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

■

Remarque 2.5. D'après le théorème précédent 2.4 $(S^*, 0)$ est un attracteur global, et puisque on a déjà démontré auparavant la stabilité locale, alors $(S^*, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 2.5.

Supposons que $\beta(x) = r\gamma(x); r > 0$, alors si $r \leq 1$, donc DFE est globalement attractif.

Démonstration.

On divise ce cas en deux sous-cas $r < 1$ et $r = 1$.

a) Cas où $(r < 1)$

$r < 1 \implies R_0 < 1$, on a déjà démontré dans ce cas que DFE est globalement asymptotiquement stable Théorème 2.4.

b) Cas où $(r = 1)$

Commençons par montrer que $I(x, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Soient β_1 et β_2 deux constantes positives telles que $\beta_1 \leq \beta(x) \leq \beta_2$.

Dans ce cas le système (2.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} - d_S \Delta S = \frac{\beta(x)I^2}{S+I} \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} - d_I \Delta I = -\frac{\beta(x)I^2}{S+I} \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Il existe une constante positive M dépend que de d_S , d_I , Ω et N tel que :

$$\|S(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|I(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.24)$$

Considérons le système EDO suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{\beta_2 I^2}{S+I} \quad t > 0 \\ \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\beta_2 I^2}{S+I} \quad t > 0 \\ S(0) = \max_{x \in \Omega} S(x, 0) \geq 0 \\ I(0) = \max_{x \in \Omega} I(x, 0) > 0 \\ S(t) + I(t) \leq M \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Notons par $(S(t), I(t))$ par l'unique solution positive de (2.25). On remarque du système que $S(t)$ croit, et $I(t)$ décroît, et que les deux sont bornées, par une simple analyse on déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0.$$

Puisque $S(t) + I(t) \leq M$, alors la possibilité que $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \infty$ tant que $I(t) \rightarrow I_0$ (I_0 une constante positive) est exclue.

Rappelons aussi que le système (2.23) est un système quasi-monotone croissant, et $(S(t), I(t))$ est une sur-solution de (2.23), ce qui nous donne : $S(x, t) \leq S(t)$ et $I(x, t) \leq I(t)$ pour tout $t \geq 0$. Et de cela on conclut donc que :

$$I(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

de plus, on sait que $\int_{\Omega} (S(x, t) + I(x, t)) dx = N$, alors :

$$\int_{\Omega} S(x, t) dx \longrightarrow N, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

D'autre part, par (2.24) et par la régularité parabolique de l'équation de $S(x, t)$ dans (2.23) il s'en suit qu'il existe une constante

$$M_0 > 0, \text{ tel que } \|S(x, t)\|_{C^1(\Omega)} \leq M_0 \text{ pour } t \geq 0.$$

Donc, en passant à une suite $\{t_n\}_n$ avec $t_n \rightarrow \infty$ (quand $n \rightarrow \infty$), cette dernière estimation et (2.26) nous permettent de conclure que :

$$S(x, t_n) \rightarrow \frac{N}{|\Omega|} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

De cela il est clair que

$$S(x, t) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Alors, DFE est globalement attractif. ■

Remarque 2.6.

- (a) Pour donner une explication de la présence de diffusion, supposons que les paramètres $d_I = 0$ et aussi, β, γ des constantes, notre modèle réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \frac{\beta SI}{S+I} + \gamma I \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\beta SI}{S+I} - \gamma I \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \\ N = \int_{\Omega} S(x, 0) + I(x, 0) dx \quad \Omega, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

Le taux de reproduction de base est donné par :

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

- (b) La présence de diffusion avec les paramètres β, γ sont des constantes, nous donne

$$R_0 = \sup_{\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\beta \int_{\Omega} \psi^2(x) dx}{d_I \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + \gamma \int_{\Omega} \psi^2(x) dx}.$$

Il existe une fonction $\psi \in H^1(\Omega)$, telle que $\psi = C$. Alors

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

- (c) L'absence de diffusion avec β, γ sont des fonctions, il existe une fonction $\psi \in H^1(\Omega)$ telle que $\psi = C$. Alors

$$R_0 = \frac{\int_{\Omega} \beta(x) dx}{\int_{\Omega} \gamma(x) dx}.$$

Chapitre 3

État d'équilibre endémique (EE)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on démontre l'existence de l'état d'équilibre, et on prouve la stabilité dans des cas particuliers.

Définition 3.1.

On désigne par l'état d'équilibre endémique (endemic equilibrium) une solution dans laquelle $I(x) > 0$ pour certains $x \in \Omega$, on la note par EE.

Définition 3.2.

Un point $u \in V$ est dit équilibre pour un semiflow local (voir [13]) Φ si :

$$\Phi(t)u = u.$$

Pour tout $t \in [0, \infty)$. Un point $u \in V$ est dit sous-équilibre (ou sur-équilibre) si :

$$\Phi(t)u \geq u \quad (\text{ou} \quad \Phi(t)u \leq u)$$

Définition 3.3.

Un point fixe $u \in V$ est dit stable ordonné (order stable) s'il existe une suite de sous-équilibre strictement croissante $u_n \nearrow u$ dans V .

3.2 Problème d'équilibre

Rappelons, le modèle de l'équilibre,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_S \Delta S &= -\frac{\beta SI}{S+I} + \gamma I & \Omega \\ -d_I \Delta I &= \frac{\beta SI}{S+I} - \gamma I & \Omega \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \\ N &= \int_{\Omega} S(x,t) + I(x,t) dx; \quad \forall t > 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Pour pouvoir traiter l'existence de l'équilibre endémique, en simplifiant le système d'équilibre, on présente maintenant quelques systèmes équivalents

3.2.1 Problèmes équivalents :

On considère plusieurs alternatifs du problème d'équilibre,

Lemme 3.1. (\tilde{S}, \tilde{I}) est une solution de (3.1) si et seulement si (\tilde{S}, \tilde{I}) est une solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_S \tilde{S} &= d_I \tilde{I} - k & \Omega \\ -d_I \Delta \tilde{I} &= \tilde{I} \left(\beta - \gamma - \frac{\beta \tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}} \right) & \Omega \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \\ N &= \int_{\Omega} \tilde{S}(x,t) + \tilde{I}(x,t) dx; \quad \forall t > 0. \end{array} \right.$$

Démonstration. Commençons par sommer les deux premières équations du système (3.1), on obtient

$$\Delta(d_S S + d_I I) = 0 \quad x \in \Omega.$$

En appliquant le principe de maximum fort on aura

$$\text{Soit } d_S S + d_I I = 0, \text{ ou } d_S S + d_I I > 0.$$

Mais puisque $d_S S + d_I I = 0$ pour tout $x \in \Omega$, (une contradiction), alors $d_S S + d_I I > 0, \forall x \in \Omega$. Ce qui implique qu'il existe une constante positive k telle que

$$d_S S + d_I I = k.$$

La deuxième équation de (3.1)

$$-d_I \Delta I = \frac{\beta S I}{S + I} - \gamma I,$$

est équivalente à

$$-d_I \Delta I = \frac{\beta S I + \beta I^2 - \beta I^2}{S + I} - \gamma I.$$

On obtient alors,

$$-d_I \Delta I = \beta I - \frac{\beta I^2}{S + I} - \gamma I.$$

Donc

$$-d_I \Delta I = I(\beta - \gamma - \frac{\beta I}{S + I}).$$

Et donc obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_S \tilde{S} = d_I \tilde{I} - k & \Omega \\ -d_I \Delta \tilde{I} = \tilde{I}(\beta - \gamma - \frac{\beta \tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}}) & \Omega \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0. & \partial \Omega \\ N = \int_{\Omega} \tilde{S}(x, t) + \tilde{I}(x, t) dx; & \forall t > 0. \end{array} \right.$$

■

Lemme 3.2. Soit (\tilde{S}, \tilde{I}) est solution de (3.1) si et seulement si (\tilde{S}, \tilde{I}) est une solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_S S + I = 1 & x \in \Omega \\ -d_I \Delta I = I f(x, I) & x \in \Omega \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0. & x \in \partial \Omega \\ k = \frac{d_I N}{\int_{\Omega} (d_I S + I)} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Démonstration. Par un simple changement de variables de normalisation suivant :

$$S = \frac{\tilde{S}}{k}, \quad I = \frac{d_I \tilde{I}}{k}$$

La première équation nous donne :

$$d_S S + I = 1.$$

Et de la seconde équation :

$$-d_I \Delta \tilde{I} = \tilde{I} \left(\beta - \gamma - \frac{\beta \tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}} \right).$$

Remplaçons \tilde{I} par $\frac{kI}{d_I}$

$$-k \Delta I = \frac{kI}{d_I} \left(\beta - \gamma - \frac{\beta \left(\frac{kI}{d_I} \right)}{k \left(S + \frac{I}{d_I} \right)} \right).$$

Ce qui est équivalent à :

$$-d_I \Delta I = \beta I - \frac{\beta I^2}{I + d_I \left(\frac{1-I}{d_S} \right)} - \gamma I.$$

Alors

$$-d_I \Delta I = \beta I \left(1 - \frac{d_S I}{d_S I + d_I - d_I I} \right) - \gamma I.$$

Posons $f(x, I) = \beta(x)(1 - \frac{d_S I}{d_I + I(d_S - d_I)}) - \gamma(x)$, on obtient alors

$$-d_I \Delta I = I f(x, I).$$

On a aussi de la quatrième équation du système précédent :

$$N = \int_{\Omega} \tilde{S} + \tilde{I} = \int_{\Omega} (kS + \frac{kI}{d_I}) = k \int_{\Omega} (S + \frac{I}{d_I})$$

Donc

$$k = \frac{d_I N}{\int_{\Omega} (d_I S + I)}.$$

On obtient alors le système normalisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_S S + I = 1 & x \in \Omega \\ -d_I \Delta I = I f(x, I) & x \in \Omega \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0. & x \in \partial \Omega \\ k = \frac{d_I N}{\int_{\Omega} (d_I S + I)} \end{array} \right.$$

■

3.3 Existence et unicité de EE

Lemme 3.3. Supposons que $R_0 > 1$, alors (3.2) possède une unique solution positive $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$, avec $\tilde{S}, \tilde{I} \in C^2(\bar{\Omega})$ et $\tilde{I}(x)$ non identiquement nulle dans Ω . De plus cette solution avec $I \neq 0$ est unique, $S(x) > 0$, et $0 < I(x) < 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Démonstration.

– **Existence :**

Le système (3.2) est un système de deux équations séparées, donc on peut traiter les problèmes séparément on commence par l'équation de I

puis l'injecter dans la première équation pour tirer S .

$$\begin{cases} -d_I \Delta I &= If(x, I) & \Omega \\ \frac{\partial I}{\partial \eta} &= 0. & \partial \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Soit

$$\underline{I} = \varepsilon \psi_1 \quad , \varepsilon \in R^*,$$

où ψ_1 est la fonction propre associée au système suivant :

$$\begin{cases} -d_I \Delta \psi_1 &= (\beta - \gamma) \psi_1 + \lambda_1 \psi_1 & \Omega \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} &= 0 & \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec λ_1 la valeur propre principale de l'opérateur

$$\mathbb{L} : \psi \longrightarrow -d_I \Delta \psi - [\beta(x) - \gamma(x)] \psi.$$

On cherche à avoir $-d_I \Delta \underline{I} \leq \underline{I} f(x, \underline{I})$ pour cela, on définit la fonction g comme suit

$$g(U) = \frac{d_S U}{d_I + (d_S - d_I) U}.$$

On remarque que la fonction g est croissante de 0 à 1, en U lorsque $U \in [0, 1]$. Posons

$$G(\underline{I}) = d_I \Delta \underline{I} + \underline{I} f(x, \underline{I}) = G(\varepsilon \psi_1) = \varepsilon [d_I \Delta \psi_1 + (\beta - \gamma) \psi_1 - \beta \psi_1 g(\varepsilon \psi_1)].$$

Alors

$$G(\varepsilon \psi_1) = \varepsilon \psi_1 [-\lambda_1 - \beta g(\varepsilon \psi_1)]$$

Supposons que ($R_0 > 1 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0$) et que ($\varepsilon \ll 1$ choisit suffisamment petit), ce qui implique que :

$$G(\underline{I}) \geq 0.$$

Donc $\underline{I} = \varepsilon \psi_1$ et une sous solution de (3.3) si ($R_0 > 1$) et (ε suffisamment

petit).

Choisissons $\bar{I} = 1 \implies -d_I \Delta \bar{I} = 0$, donc $\bar{I} f(x, \bar{I}) = -\gamma(x) \leq 0$.

On conclut donc que $\bar{I} = 1$ est une sur-solution de (3.3).

On sait que $\max_{x \in \bar{\Omega}} \psi_1 = 1 \implies \varepsilon \psi_1 \leq 1$ si $\varepsilon \ll 1$. Donc

$\exists I \in [\underline{I}, \bar{I}]$ telle que I est une solution de (3.3). C'est à dire, il existe $I \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaisant (3.3) avec $0 < I(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

– **Bornitude stricte de $I(x) < 1$:**

On démontre par contradiction que $I(x) < 1$ dans Ω .

Supposons que $\exists x \in \Omega$ tel que $I(x) = 1$. Comme I atteint son maximum dans un point x de Ω , il faut que $\Delta I(x) \leq 0$, mais

$$G(I(x)) = d_I \Delta I(x) - \gamma(x) < 0,$$

ce qui est une contradiction.

On conclut donc que $0 < I(x) < 1$ pour tout $x \in \Omega$. On sait que $1 = d_S S + I$. Alors $S \in C^2(\bar{\Omega})$ et $S > 0$ dans Ω . Donc, (S, I) est une solution positive du système (3.2) avec $S, I \in C^2(\bar{\Omega})$ et $I < 1$ pour $x \in \Omega$.

– **Unicité :**

Pour démontrer l'unicité, on procède par contradiction.

Supposons que (3.2) admet deux solutions positives (S_1, I_1) et (S_2, I_2) avec I_1, I_2 non identiquement nulles, et $I_1 \neq I_2, \forall x \in \Omega$. Il s'en suit de la première équation de (3.2) que $0 \leq I_1, I_2 \leq 1$ dans Ω . Par le principe de maximum on obtient $0 < I_1, I_2 \leq 1$ dans $\bar{\Omega}$. On doit choisir un ε assez petit pour que $\underline{I} \leq I_1, I_2 \leq \bar{I}$ dans $\bar{\Omega}$.

Soit I_n et I^n notons la solution minimale et maximale de (3.3), respectivement, dans l'ensemble $[\underline{I}, \bar{I}]$. Comme $I_1 \neq I_2$, on a $I_n \leq I^n$ et $I_n \neq I^n$. Par le principe de maximum on en déduit que $I_n < I^n$ dans $\bar{\Omega}$.

Soit

$$-d_I \Delta I_n = I_n f(x, I_n) \quad \Omega. \quad (3.5)$$

Et

$$-d_I \Delta I^n = I^n f(x, I^n) \quad \Omega \quad (3.6)$$

Utilisons I^n comme fonction test dans (3.5) et I_n comme fonction test dans (3.6), puis combinons les deux résultats, on obtient que :

$$\int_{\Omega} I_n I^n [f(x, I_n) - f(x, I^n)] dx = 0 \quad (3.7)$$

Il est clair que $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} < 0$ pour $x \in \Omega$ et $u \in [0, 1]$. Donc f est strictement décroissante, et par suite $f(x, I_n) - f(x, I^n) > 0$ dans Ω . Ce qui est contradictoire avec l'équation (3.7) car I_n et I^n sont des fonctions positives. On conclut donc que (3.2) admet une unique solution positive (S, I) , avec I non identiquement nulle dans Ω .

■

Comme conclusion, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.

Supposons que $R_0 > 1$. alors (3.1) a une unique solution positive $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$, avec $\tilde{S}, \tilde{I} \in C^2(\bar{\Omega})$ et \tilde{I} non identiquement nulle dans Ω . De plus cette solution est donnée par $(\tilde{S}, \tilde{I}) = (kS, \frac{kI}{d_I})$ où k est définie dans (3.2).

Démonstration. : Il suffit regrouper les Lemmes 3.3 et 3.1 ; prenons en compte le changement de variables

$$S = \frac{\tilde{S}}{k}, \quad I = \frac{d_I \tilde{I}}{k}.$$

■

Donc on a démontré qu'il existe une unique solution de (3.3) strictement positive, d'où l'existence de l'équilibre endémique EE pour (2.1).

Dans ce qui suit on démontre la stabilité globale de EE.

3.4 Stabilité globale de l'état d'équilibre endémique (EE)

Dans le but de démontrer la stabilité globale de EE, on est obligé de supposer des conditions supplémentaires.

3.4.1 Cas : $d_S = d_I$

Dans ce cas on suppose que l'épidémie étudiée n'influe pas sur le mouvement des individus (i.e les individus infectés et les susceptibles ont la même vitesse de diffusion).

Pour démontrer la stabilité globale, on a besoin du Lemme technique suivant :

Lemme 3.4. Supposons que d est une constante positive, et que a et b sont des fonctions continues sur Ω avec $b(x) > 0$ sur Ω , alors

$$d\Delta u = [a(x) - b(x)u]u \quad \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \partial\Omega.$$

Admet une solution unique v si et seulement si :

$$\int_{\Omega} a(x) > 0.$$

De plus, si v existe alors, v est globalement asymptotiquement stable pour l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$u_t - d\Delta u = [a(x) - b(x)u]u \quad \Omega \times (0, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Démonstration.

Pour la démonstration voir [10]. ■

Le résultat principal dans cette partie est le suivant :

Théorème 3.2. Supposons que $d_S = d_I$, si Ω est un domaine à haut risque (i.e $\int_{\Omega} \beta(x)dx > \int_{\Omega} \gamma(x)dx$), alors EE est globalement asymptotiquement stable, et si Ω est un domaine à faible risque (i.e $\int_{\Omega} \beta(x)dx \leq \int_{\Omega} \gamma(x)dx$), alors DFE est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. Posons $d = d_S = d_I$ et $\omega(x, t) = S(x, t) + I(x, t)$ et donc ω vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - d\Delta \omega = 0 & \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0 & \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \int_{\Omega} \omega(x, t)dx = N & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

et $I(x, t)$ vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} - d\Delta I = I[\beta(x) - \gamma(x)] - \frac{\beta(x)}{\omega} I^2 & \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0 & \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \int_{\Omega} I(x, 0)dx > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Il est clair de (3.8) que $\omega \rightarrow \frac{N}{|\Omega|}$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ quand $t \rightarrow \infty$, alors

$\exists T > 0$ tel que $(\frac{N}{|\Omega|}) - \varepsilon < \omega < (\frac{N}{|\Omega|}) + \varepsilon$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $t \geq T$.

Considérons les deux problèmes auxiliaires suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} - d\Delta \bar{I} = \bar{I}[\beta(x) - \gamma(x)] - \frac{\beta(x)}{(\frac{N}{|\Omega|}) - \varepsilon} \bar{I}^2 & \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0 & \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \bar{I}(x, T) = I(x, T) > 0 & \Omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{I}}{\partial t} - d\Delta \underline{I} = \underline{I}[\beta(x) - \gamma(x)] - \frac{\beta(x)}{\left(\frac{N}{|\Omega|}\right) + \varepsilon} \underline{I}^2 \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial \underline{I}}{\partial \eta} = 0 \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \underline{I}(x, T) = I(x, T) > 0 \quad \Omega. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Il est clair que \bar{I} et \underline{I} sont des sur et sous solutions de (3.9). Par le principe de comparaison parabolique on a :

$$\underline{I}(x, t) \leq I(x, t) \leq \bar{I}(x, t), \quad x \in \bar{\Omega} \quad ; t > T$$

(a) Dans \mathbb{H}^- (i.e $\int \beta \leq \int \gamma$) :

Dans ce cas et comme résultat du lemme 3.4 $I(x, t) \leq \bar{I}(x, t) \rightarrow 0$ uniformément dans $\bar{\Omega}$, par conséquence

$$S(x, t) \rightarrow \frac{N}{|\Omega|} \text{ uniformément dans } \bar{\Omega}.$$

(b) Dans \mathbb{H}^+ (i.e $\int \beta \geq \int \gamma$) :

Par le lemme précédent avec $a(x) = \beta(x) - \gamma(x)$ on sait que :

$\bar{I}(x, t) \rightarrow \bar{I}_\varepsilon^*(x)$ et $\underline{I}(x, t) \rightarrow \underline{I}_\varepsilon^*(x)$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ quand $t \rightarrow \infty$, tel que $\bar{I}_\varepsilon^*(x)$ et $\underline{I}_\varepsilon^*(x)$ sont les états stationnaires unique

correspondant à (3.10) et (3.11), respectivement. Par un simple argument de sous et sur solutions et par l'unicité de la solution, alors

$\bar{I}_\varepsilon^*(x)$ et $\underline{I}_\varepsilon^*(x)$ converge vers $\hat{I}(x)$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

où $\hat{I}(x)$ est la solution du problème définie dans le lemme 3.4 avec

$a(x) = \beta(x) - \gamma(x)$ et $b(x) = \beta(x) \frac{|\Omega|}{N}$. Ainsi notre analyse montre

que $I(x, t) \rightarrow \hat{I}(x)$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ et par suite $S(x, t) = [\omega(x, t) - I(x, t)] \rightarrow \left(\frac{N}{|\Omega|}\right) - \hat{I}(x)$ quand $t \rightarrow \infty$, et par unicité de EE, on obtient que :

$$(S(x, t), I(x, t)) \rightarrow (\tilde{S}, \tilde{I}), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Par conséquence $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$ est un attracteur global de (2.1).

■

3.4.2 Cas : $\beta(x) = r\gamma(x)$

Dans ce cas on suppose que le taux de transmission de la maladie $\beta(x)$ est proportionnel à celui de guérison $\gamma(x)$ (i.e $\beta(x) = r\gamma(x)$) avec r est une constante positive.

Recherche de l'équilibre Endémique :

Dans ce qui précède, on a démontré l'existence d'un unique équilibre endémique, on prend en considération l'unicité pour chercher des solutions constante; alors $(\tilde{S}, \tilde{I}) \in \mathbb{R}_+^2$ qui vérifié (3.1), donc, on trouve l'équation suivante :

$$\frac{\beta\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}} - \gamma\tilde{I} = 0.$$

Supposons que $\tilde{I} \neq 0$

$$\frac{\beta\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}} = \gamma\tilde{I}.$$

Donc

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{S} + \tilde{I}} \implies \frac{1}{r} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{S} + \tilde{I}},$$

ce qui implique que : $r\tilde{S} = \tilde{S} + \tilde{I}$. Alors

$$\tilde{S} = \frac{1}{r}(\tilde{S} + \tilde{I}) \text{ et } \tilde{I} = (r - 1)\tilde{S}.$$

Or, on sait que quand $t \rightarrow \infty$

$$\omega = S + I \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} = \tilde{S} + \tilde{I}.$$

Donc

$$(\tilde{S}, \tilde{I}) = \left(\frac{1}{r}(\tilde{S} + \tilde{I}), (r - 1)\tilde{S}\right) = \left(\frac{1}{r} \frac{N}{|\Omega|}, \frac{r - 1}{r} \frac{N}{|\Omega|}\right).$$

Si $r > 1$, alors l'unique EE est donnée par :

$$(\tilde{S}, \tilde{I}) = \left(\frac{1}{r} \frac{N}{|\Omega|}, \frac{r - 1}{r} \frac{N}{|\Omega|}\right). \quad (3.12)$$

Théorème 3.3. Supposons que $\beta(x) = r\gamma(x)$, alors si $r > 1$ EE est glo-

balement attractif.

Démonstration.

Dans ce cas, on a besoin d'une fonction de Lyapounov. Soit la fonction candidate suivante :

$$E(t) = \int_{\Omega} W(S(x, t), I(x, t)) dx,$$

avec

$$W(S, I) = \int \frac{S^2 - \tilde{S}^2}{S^2} dS + \int \frac{I^2 - \tilde{I}^2}{I^2} dI,$$

et

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int \left[\frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial S} + \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial I} \right] dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int \left[\frac{S^2 - \tilde{S}^2}{S^2} (d_S \Delta S) + \frac{I^2 - \tilde{I}^2}{I^2} (d_I \Delta I) \right] dx \\ &+ \int_{\Omega} \left[\frac{S^2 - \tilde{S}^2}{S^2} \left(-\frac{\beta SI}{S+I} + \frac{\beta I}{r} \right) + \frac{I^2 - \tilde{I}^2}{I^2} \left(\frac{\beta SI}{S+I} - \frac{\beta I}{r} \right) \right] dx \\ &= - \int \left[d_S \frac{2\tilde{S}^2}{S^3} |\nabla S|^2 + d_I \frac{2\tilde{I}^2}{I^3} |\nabla I|^2 \right] dx + \int \left\{ \beta I \left(\frac{1}{r} - \frac{S}{S+I} \right) \left(\frac{\tilde{I}^2}{I^2} - \frac{\tilde{S}^2}{S^2} \right) \right\} dx \\ &= - \int \left[d_S \frac{2\tilde{S}^2}{S^3} |\nabla S|^2 + d_I \frac{2\tilde{I}^2}{I^3} |\nabla I|^2 \right] dx + \int \left\{ \beta I \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{S} + \tilde{I}} - \frac{S}{S+I} \right) \left(\frac{\tilde{I}^2}{I^2} - \frac{\tilde{S}^2}{S^2} \right) \right\} dx \\ &= - \int \left[d_S \frac{2\tilde{S}^2}{S^3} |\nabla S|^2 + d_I \frac{2\tilde{I}^2}{I^3} |\nabla I|^2 \right] dx \\ &\quad - \int \left[\frac{\beta SI^2}{(S+I)(\tilde{S} + \tilde{I})} \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{S}} + \frac{\tilde{I}}{\tilde{I}} \right) \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{S}} - \frac{\tilde{I}}{\tilde{I}} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Utilisons la formule (3.12), alors $\frac{1}{r} = \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{S} + \tilde{I}}$.

Par conséquence, pour tout $t > 0$, E est une fonction de Lyapounov pour le système (2.1) avec $\beta(x) = r\gamma(x)$, c'est à dire, pour $t > 0$, $E'(t) < 0$, le long des trajectoires sauf au point (\tilde{S}, \tilde{I}) où $E(t) = 0$. Donc :

$$(S(x, t), I(x, t)) \longrightarrow (\tilde{S}, \tilde{I}) \text{ dans } [L^\infty(\Omega)]^2, \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

De plus, on sait que $\|S(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|I(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ sont bornées dans $[0, \infty)$. Alors comme conclusion (\tilde{S}, \tilde{I}) attire toutes les solutions de (2.1). ■

Remarque 3.1.

On peut démontrer la stabilité de EE par le lemme suivant :

Lemme 3.5.

Soit u un point fixe stable ordonné "order stable" (Definition 3.3) dans V , alors u est stable

Démonstration. Voir [8], [10] où on considère la suite de sous équilibre $\{u\}_\varepsilon$ qui vérifie (3.11).

Donc L'existence d'un attracteur global et la stabilité de l'équilibre, nous donne la stabilité asymptotique globale de EE. ■

Bibliographie

- [1] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, and A.L. Nevai, *Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model. Discrete Contin. Dyn. Syst. A*21 (1) (2008) 1-20.
- [2] P. Auger, C. Lett, J. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie. Dunod, Paris.* 2010.
- [3] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer.* 2012.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris,* 1983.
- [5] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, and J.A.J. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogenous population . Journal of Math.Biol.* 1990.
- [6] P. van den Driessche and J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. . Math. Biosci.* Vol. 180, (2002) 29-48.
- [7] D. Henry, *Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag, Berlin-New York.* Vol.840. 1993.

-
- [8] P. Hess ,*Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity. Pitam Res, Notes in Mathematics, Vol. 247, Longman Sci. Tech, Harlaw.* 1991.
- [9] Y. Lou, T. Nagylaki,*Evolution of a semilinear parabolic system for migration and selection without dominance. Journal of Differential Equations.* 2006.
- [10] R. Peng, S. Liu ,*Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction-diffusion model. J. Nonlinear Analysis.* 2009.
- [11] L. Roques,*Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale .Quae.* 2013.
- [12] F. Rothe, *Global solutions of reaction diffusion systems. Springer Verlag. Berlin Heidelberg. New York-Tokyo.* 1984.
- [13] H.L. Smith, H.R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence. Graduate Studies in mathematics.* AMS, Providence. 2011.