



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTÉ DES SCIENCES - DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Systèmes Dynamiques

Par :

Mr MENOUEER Mohammed Amine

Sur le thème

Solutions périodiques et presque-périodiques de quelques modèles de dynamiques des populations

Soutenue publiquement le 21 juin 2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Bouguima Sidi Mohamed	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr Amir Abdessamed	Professeur	Université de Mostaganem	Examineur
Mr Belhamiti Omar	Professeur	Université de Mostaganem	Examineur
Mr Touaoula Mohamed Tarik	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr Miri Sofiane El Hadi	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examineur
Mr Moussaoui Ali	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire & Mathématiques Appliquées

mohammedamine.menouer@mail.univ-tlemcen.dz

Département de mathématiques

Faculté des sciences

Université Abou Bekr BELKAÏD - Tlemcen

22, rue Abi Ayad ALBDELKRIM, B.P. 119 Tlemcen, ALGERIE

Remerciements

Louange à **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de m'avoir donné le courage, la force, et la volonté pour me permettre d'achever ce travail.

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse M. Ali Moussaoui. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ma thèse ; je le remercie pour ses conseils avisés, ses indications fructueuses, sa patience et la relation amicale qu'il m'a concédé. Je salut en lui le mathématicien qui maîtrise son domaine et le chercheur expérimenté et judicieux. Je lui réitère mes remerciements pour tous les efforts qu'il a fournis pour mener cette thèse à terme.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Sidi Mohamed Bouguima, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je prie M. le Professeur Abdessamed Amir, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Omar Belhamiti, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury.

Je renouvelle mes remerciements à M. le Professeur Mohamed Tarik Touaoula, pour faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, M. Sofiane El Hadi Miri, d'avoir accepter de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Je présente tous mes respects et mes remerciements au Professeur El Hadi Aït Dads de l'université Cadi Ayyad de Marrakesh, Maroc, pour son apport fructueux à ce travail.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Modèles de base en dynamique de population	3
1.1 Modèle de Malthus	3
1.2 Modèle de Verhulst (Modèle logistique)	4
1.3 Modèle de croissance avec effet "Allee"	6
1.4 Modèle d'une population exploitée	7
1.4.1 Exploitation à effort constant	7
1.4.2 Exploitation à prélèvement constant	8
1.5 Modèles à deux populations en interaction	10
1.6 Modèle de Lotka-Volterra	10
1.7 Modèle de Holling	14
1.8 Conclusion	21
2 Notions théoriques utilisées dans cette thèse	22
2.1 Equations différentielles ordinaires	22
2.2 Théorème de continuation de la théorie du degré de coïncidence	26
2.2.1 Opérateur de Fredholm	27
2.2.2 Projecteurs	27
2.2.3 Homotopie	27
2.2.4 Degré topologique de Brouwer	28
2.2.5 Théorème de continuation	28
2.3 Fonctions presque-périodiques et équations différentielles	29
3 Existence de solution presque-périodique pour un modèle proie-prédateur	33
3.1 Introduction	33
3.2 Cas général	36
3.2.1 Invariance positive et permanence	37
3.3 Existence de solution presque-périodique	43
3.4 Simulations numériques	50
3.5 Conclusion	51

4	Existence de solutions périodiques pour un modèle proie-prédateur non-autonome	52
4.1	Introduction	52
4.2	Multiplicité des solutions positives périodiques	53
4.3	Simulations numériques	65
4.4	Conclusions	66
	Conclusion générale et perspectives	68

Table des figures

1.1	Croissance de la population $x(t)$, suivant un modèle de Malthus, avec $x_0 = 15$ et $r = 0.5 > 0$, $r = -0.5 < 0$	4
1.2	Croissance de la population $x(t)$, suivant un modèle de Verhulst, avec $r = 0.5$, $K = 100$ et trois conditions initiales : $x_0 = 10$, $x_0 = 50$, $x_0 = 125$	5
1.3	Croissance de la population $x(t)$, présentant un effet Allee, avec $r = 0.1$, $K = 15$, $M = 10$ et trois conditions initiales : $x_0 = 9$, $x_0 = 12$, $x_0 = 17$	6
1.4	Croissance de $x(t)$, avec exploitation à effort constant, où $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$ et $E = 2$, $E = 0.1$, $E = 0$	8
1.5	Croissance de la population $x(t)$, subissant une exploitation à prélèvement constant, avec $r = 1$, $K = 50$ et trois conditions initiales $x_0 = 5$, $x_0 = 10$, $x_0 = 60$	9
1.6	Solution du système <i>Lotka-Volterra</i> avec $r = 1.5$, $a = 1.3$, $m = 1.2$ et $b = 1$	13
1.7	Portrait de phase du système <i>Lotka-Volterra</i> dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial $(x^*, y^*) = (\frac{m}{b}, \frac{r}{a})$	14
1.8	<i>Fonctions réponse de Types I, II et III</i> avec pour paramètres $a = 1$ et $D = 0.5$	15
1.9	Solutions du système (1.9) lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est stable.	17
1.10	Portrait de phase du système (1.9) lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est stable.	18
1.11	Portraits de phase du système (1.9) pour deux conditions initiales A et B lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est instable.	19
1.12	Solution du système (1.9) pour deux conditions initiales A et B et lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est instable.	19
1.13	Solution du système (1.9) avec $(x_0, y_0) = (6, 3)$: cas où l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.	20
1.14	Portrait de phase du système (1.9) avec $(x_0, y_0) = (6, 3)$: cas où l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.	20
2.1	Représentation de la fonction presque-périodique $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$	31
3.1	Solution du système (3.16) avec trois conditions initiales $(G_0, B_0)^T = (3.5, 1)^T$, $(G_0, B_0)^T = (3.7, 1.5)^T$, $(G_0, B_0)^T = (3.3, 0.2)^T$	51

4.1 Solutions avec différentes conditions initiales dans les ensembles correspondants $\Omega'_i, i = 1, 2, 3, 4$ 66

Notations

$G(t)$	La densité de la proie, <i>Le Gardon</i> , au temps t .
$B(t)$	La densité du prédateur, <i>Le Brochet</i> , au temps t .
$r(t)$	La fonction d'accessibilité, ou taux de prédation.
\bar{r}	La valeur moyenne du taux de prédation.
r_2	Le taux de prédation maximal.
r_1	Le taux de prédation minimal.
γ_G	Le taux de consommation maximal de la ressource par la proie.
γ_B	Le taux de consommation maximal de la ressource par le prédateur.
m_G	Le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme de la proie.
m_B	Le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme du prédateur.
e_B	Le taux de conversion.
D	Mesure les causes de mortalité autres que la prédation.
$h_1(t)$	L'effort de pêche appliqué à la proie au temps t .
\bar{h}_1	La valeur moyenne de l'effort de pêche appliqué à la proie.
h_1^M	L'effort de pêche maximal appliqué à la proie.
$h_2(t)$	L'effort de pêche appliqué au prédateur au temps t .
\bar{h}_2	La valeur moyenne de l'effort de pêche appliqué au prédateur.
h_2^M	L'effort de pêche maximal appliqué au prédateur.

Introduction

Aujourd'hui, l'écologie ne peut plus se passer de la modélisation mathématique, c'est devenue un élément incontournable dans la recherche. Un modèle pour être utile et intéressant doit être biologiquement pertinent, c'est à dire montrer comment un processus fonctionne et prédire ce qui va suivre.

La dynamique de population est le domaine de la science qui tente d'expliquer de manière mécaniste simple les variations au cours du temps de la taille et de la composition des populations biologiques, telles que les humains, les animaux, les plantes ou micro-organismes.

L'étude de la dynamique d'une population remonte à très longtemps : en 1202 un exercice dans un livre d'arithmétique écrit par *Fibonacci* [48] incluait la construction d'un modèle pour une population de lapins en pleine croissance.

L'écologie, ou l'étude des relations et les interactions entre un organisme vivant et son milieu de vie est un champs très vaste dans lequel on retrouve entre autres : les relations proie-prédateur, les compétitions entre espèces, la gestion des ressources renouvelables, l'évolutions des bactéries résistantes aux antibiotiques ...

La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies a été pour longtemps le sujet dominant en écologie [3, 22, 23, 30–32, 48]. Les auteurs de [18] ont étudié un modèle proie-prédateur pour deux espèces de poissons vivantes dans un lac artificiel ; le *lac de Pareloup* ; dans le sud-est de la France et qui a vu le jour grâce à la construction d'un barrage à son embouchure. Dans ce lac le niveau d'eau varie de façon saisonnière suivant l'intensité du relachement d'eau du barrage. Ceci à ammené les auteur de [18] à inclure un terme périodique dans leur modèle. En utilisant le théorème de continuation de la théorie du degré de coincidence, ils ont établi l'existence d'au moins une solution périodique pour le système d'équations différentielles non-autonomes étudié.

Dans cette thèse, on établira l'unicité et la stabilité asymptotique globale de la solution périodique du système étudié dans [18] en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov [28]. On se propose ensuite de remplacer le terme périodique introduit par les auteurs de [18] par un terme presque-périodique qui est une propriété plus générale et plus réaliste que la périodicité et on établira l'existence d'une unique solution presque-périodique pour ce dernier système en utilisant les propriétés des fonctions presque-périodiques.

Dans le dernier chapitre, on se propose de reprendre le modèle étudié dans [18] et d'y

introduire des termes de pêche, vu que le lac de Pareloup est aussi un lac de plaisance et de pêche (sportive notamment). Dans une première partie, l'analyse du nouveau modèle nous permettra d'assurer l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques pour notre système d'EDO non-autonomes grâce au théorème de continuation de Mawhin.

La thèse est organisée comme suit :

Dans le chapitre 1, on présente certains modèles de base en dynamique de population. On exhibera certaines de leurs propriétés et on donnera quelques courtes biographies de leurs auteurs.

Dans le chapitre 2, on rappelle quelques notions mathématiques essentielles pour l'étude des systèmes introduit par la suite.

Dans le chapitre 3, on établira l'unicité et la stabilité asymptotique globale de la solution périodique obtenue dans [18], on remplacera ensuite le terme périodique par un terme presque-périodique et en utilisant les propriétés des fonctions presque-périodiques on établira l'existence d'une unique solutions positive presque-périodique. On terminera par des simulations numériques et une conclusion.

Dans le chapitre 4, on étudie un modèle stock-exploité non-autonome. On fera un rappel sur l'origine du modèle proposé, l'analyse mathématique qui suivra nous assurera l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques, une simulation numérique pour un exemple nous donnera un résultat visuel, et on clôturera le chapitre par une conclusion.

Une conclusion générale et des perspectives seront données à la fin de cette thèse.

Chapitre 1

Modèles de base en dynamique de population

Les mathématiques sont de plus en plus présente dans les sciences biologiques. On les retrouve notamment dans la modélisation des dynamiques des populations, en particulier la modélisation de la croissance des populations et les différentes interactions entre elles. Notons par $x(t)$ la population d'une espèce donnée à l'instant t . La loi d'évolution de cette population peut se mettre sous la forme de l'équation différentielle [48] :

$$\frac{dx}{dt} = \text{naissances} - \text{décés} + \text{migrations}.$$

La modélisation consiste alors à donner un sens au membre de droite de cette équation. Voyons quelques modèles célèbres :

1.1 Modèle de Malthus

Ce modèle introduit par *Thomas Malthus*¹ en 1798 suppose qu'il n'y a pas de migration et que les naissances et les décès sont proportionnels à la population à l'instant t . L'équation devient alors :

$$\frac{dx}{dt} = bx - dx, \tag{1.1}$$

où b et d sont des constantes positives représentant respectivement, les taux de natalité et de mortalité. La solution à cette équation n'est rien d'autre que :

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

1. Thomas Robert Malthus 1766-1834, contemporain de la révolution industrielle anglaise, est un économiste britannique et un pasteur anglican. Connue pour son ouvrage *An Essay on the Principle of Population* [41], dont une première édition (anonyme) fût en 1798. Il y décrit les relations entre la population et les ressources disponibles sur l'île anglaise, en particulier il affirme que la croissance de la population est géométrique tandis que la croissance des ressources n'est qu'arithmétique.

où $r = b - d$ est le taux de croissance de la population et $x(0) = x_0$ étant la population initiale. Si $r > 0$ la population croît exponentiellement, sinon si $r < 0$ la population disparaît (il y'a extinction). Sur la figure 1.1, on représente la croissance de $x(t)$ pour deux différents taux, l'un positif $r > 0$ et l'autre négatif $r < 0$.

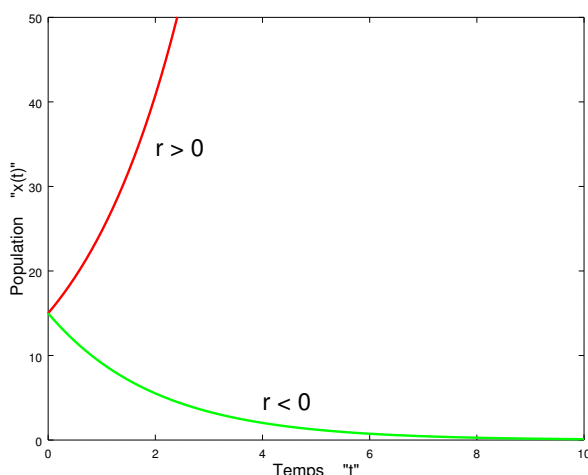


FIGURE 1.1 – Croissance de la population $x(t)$, suivant un modèle de Malthus, avec $x_0 = 15$ et $r = 0.5 > 0$, $r = -0.5 < 0$.

Cette approche dûe à *Malthus* est assez irréaliste vu la présence de différents "freins" à la croissance qui ne sont pas pris en compte dans ce modèle.

1.2 Modèle de Verhulst (Modèle logistique)

Vu le défaut du modèle de *Malthus*, *Verhulst*² proposa, en 1838, un modèle s'inspirant du modèle de *Malthus* et qui prend en compte les ressources du milieu qui, étant limitées, représentent un frein à la croissance de la population, ce qui peut se traduire par une baisse de la natalité et une augmentation de la mortalité. Concrètement, dans le cas le plus simple, on peut définir pour le taux de natalité une fonction linéaire décroissante et pour le taux de mortalité une fonction linéaire croissante [3] :

$$\begin{aligned} b(x) &= \alpha - \beta x, \\ d(x) &= \gamma + \delta x, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes positives.

En substituant ses taux de naissance et de mortalité dans l'équation (1.1), on obtient

2. Pierre François Verhulst 1804-1849, mathématicien belge, inspiré par le modèle de *Malthus*, il publia un article [55] (consultable en ligne) où il proposa une rectification à ce modèle pour palier au défaut de la croissance exponentielle d'une population donnée.

l'équation de croissance :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) = f(x), \quad (1.2)$$

avec $r = \alpha - \gamma$, supposé positif, c'est à dire que $\alpha > \gamma$, est le *taux de croissance intrinsèque* de la population, c'est à dire le taux de croissance d'une population en l'absence de tout obstacle. $K = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} > 0$ est dite *la capacité limite d'accueil du milieu*, c'est à dire que le nombre K représente la population maximale et qu'au dessus de ce nombre la population ne peut continuer à se multiplier.

L'équation différentielle (1.2) est dite *Equation logistique*, en résolvant $f(x) = 0$, on remarque qu'elle possède deux points d'équilibre à savoir l'origine $x = 0$ et le point $x = K$. La dérivée de la fonction $f(x)$ étant donnée par :

$$\frac{df}{dx} = r - 2\frac{r}{K}x,$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= r && \text{(pour } x = 0), \\ \frac{df}{dx} &= -r && \text{(pour } x = K), \end{aligned}$$

et ceci nous permet de déduire que l'origine est un point d'équilibre instable tandis que le point K est point d'équilibre stable. Sur la figure 1.2 sont représentées des solutions de

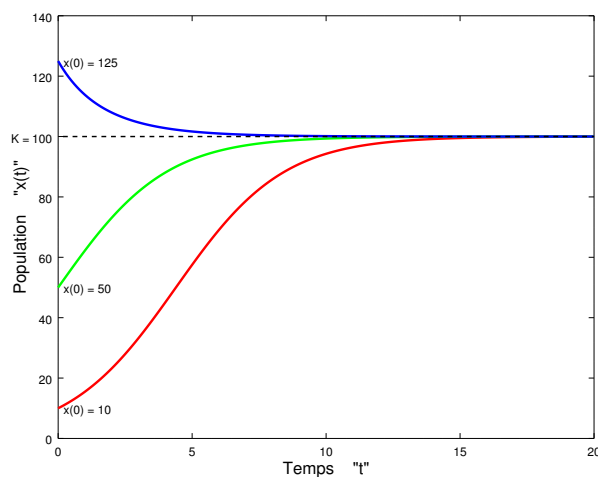


FIGURE 1.2 – Croissance de la population $x(t)$, suivant un modèle de Verhulst, avec $r = 0.5$, $K = 100$ et trois conditions initiales : $x_0 = 10$, $x_0 = 50$, $x_0 = 125$.

l'équation (1.2) pour des conditions initiales différentes. La solution ayant pour condition initiale $x_0 = 10$ possède un point d'inflexion alors que les autres ne l'ont pas. Ceci nous indique que cette solution de l'équation (1.2), tout en étant croissante si $x_0 < K$, a une dérivée positive si $x_0 < \frac{K}{2}$ et négative si $x_0 > \frac{K}{2}$, d'où la présence du point d'inflexion pour la solution dont $x_0 = 10 < K = 100$.

1.3 Modèle de croissance avec effet "Allee"

Soit l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx(x - M)(K - x) = f(x), \quad (1.3)$$

avec $0 < M < K$.

Cette équation admet trois points d'équilibre, l'origine, M et K . La dérivée de $f(x)$ est donnée par :

$$\frac{df}{dx} = r(-3x^2 + 2(M + K)x - MK),$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= -rMK && \text{(pour } x = 0), \\ \frac{df}{dx} &= rM(K - M) && \text{(pour } x = M), \\ \frac{df}{dx} &= rK(M - K) && \text{(pour } x = K), \end{aligned}$$

d'où, l'origine et K sont stables tandis que l'équilibre intermédiaire M est instable.

Sur la figure (1.3), représentant les solutions de l'équation (1.3) pour des conditions initiales différentes, on observe un effet seuil, c'est à dire que pour une condition initiale $0 < x_0 < M$ la population décroît et va à l'extinction, alors que pour une condition initiale au-dessus de ce seuil, $x_0 > M$, la population tend vers la capacité limite K . Cet effet est connu en dynamique des populations sous le nom d'effet "Allee". il correspond à des populations qui ne sont viables qu'à partir d'un certain seuil limite en effectif.

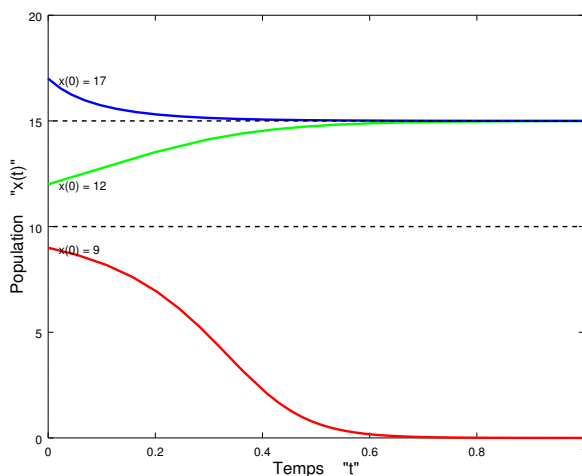


FIGURE 1.3 – Croissance de la population $x(t)$, présentant un effet Allee, avec $r = 0.1$, $K = 15$, $M = 10$ et trois conditions initiales : $x_0 = 9$, $x_0 = 12$, $x_0 = 17$.

1.4 Modèle d'une population exploitée

Il se peut qu'une espèce soit sujette à de l'exploitation par pêche ou par chasse par exemple, ce qui induit une baisse de la population, cela se traduit dans l'équation de croissance par l'ajout d'un terme négatif. Reprenons par exemple l'équation logistique (1.2) en y insérant un terme négatif représentant l'effectif prélevé, par cette exploitation, par unite de temps.

1.4.1 Exploitation à effort constant

Par exploitation à effort constant, on entend le rajout, dans l'équation (1.2) d'un terme négatif proportionnel à la population ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex,$$

où r , K , représentent, le taux de croissance intrinsèque de la population et la capacité limite du milieu, respectivement. Ex représente le rendement de l'exploitaiton par unité de temps et $E > 0$, une constante positive, représente l'effort d'exploitation. En posant :

$$\rho = r - E \quad \text{et} \quad \Psi = K\left(1 - \frac{E}{r}\right),$$

on arrive à l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \rho x \left(1 - \frac{x}{\Psi}\right) = g(x),$$

on retrouve ainsi une équation logistique. Cette fois-ci nous ne ferons pas d'hypothèse sur la positivité du taux de croissance ρ , nous obtenons alors deux cas possible :

$\rho < 0$, c'est à dire $r < E$. Les points d'équilibres sont donc l'origine $x = 0$ et le point $x = \Psi$ que nous n'appellerons pas la capacite limite du milieu vu que ce point est négatif ce qui est un non-sense biologique. On a donc :

$$\frac{dg}{dx} = \rho \quad (\text{pour } x = 0),$$

d'où la stabilité de l'origine. Un effort supérieur au taux de croissance intrinsèque de la popualtion s'interpète par une surexploitation de la population ce qui conduit à sa disparition.

$\rho > 0$, c'est à dire $r > E$. $x = 0$ et $x = \Psi$ sont les points d'équilibre de l'équation. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \rho & (\text{pour } x = 0), \\ \frac{dg}{dx} &= -\rho & (\text{pour } x = \Psi), \end{aligned}$$

ce qui nous amène à conclure que $x = 0$ est instable et $x = \Psi$ est stable. On remarquera que $\Psi < K$ où K est l'équilibre de l'équation logistique en l'absence d'exploitation.

On représente sur la figure 1.4 les courbes de croissance d'une population $x(t)$ subissant des exploitations avec des efforts constants différents pour une même condition initiale et où l'on remarquera qu'on a bien $\Psi < K$ et l'extinction de la population pour $E > r$.

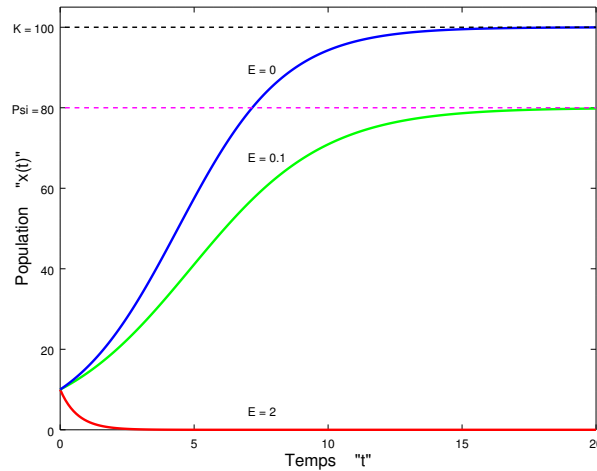


FIGURE 1.4 – Croissance de $x(t)$, avec exploitation à effort constant, où $r = 0.5$, $K = 100$, $x_0 = 10$ et $E = 2$, $E = 0.1$, $E = 0$.

1.4.2 Exploitation à prélèvement constant

Comme stratégie alternative pour l'exploitation, il y a la notion de *quota*, qui consiste à faire un prélèvement constant par unité de temps. On a donc l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Q = h(x),$$

avec $Q > 0$ est le quota prélevé par unité de temps.

Les points d'équilibre de cette équation sont donc les solutions de l'équation du second degré suivante :

$$-rx^2 + rKx - KQ = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = r^2K^2 - 4rKQ.$$

Donc

- Si $Q > \frac{rK}{4}$ alors $\Delta < 0$, il n'y a donc pas de points d'équilibre et le signe du polynôme est strictement négatif d'où $\frac{dx}{dt} < 0$ et la population se dirige vers l'extinction, conséquence de sa surexploitation.

- Si $Q < \frac{rK}{4}$ alors $\Delta > 0$ il y a alors deux points d'équilibre à savoir :

$$x_1 = \frac{rK - \sqrt{rK(rK - 4Q)}}{2r}, \quad x_2 = \frac{rK + \sqrt{rK(rK - 4Q)}}{2r}.$$

Vu que $rK > 4Q$ on a alors $\sqrt{rK} > \sqrt{rK - 4Q}$, d'où $x_2 > x_1 > 0$. On a donc :

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{\frac{r(rK - 4Q)}{K}} \quad (\text{pour } x = x_1),$$

$$\frac{dh}{dx} = -\sqrt{\frac{r(rK - 4Q)}{K}} \quad (\text{pour } x = x_2),$$

ce qui nous permet de conclure que x_1 est instable tandis que x_2 est stable. On déduit donc que si on a une condition initiale $0 < x_0 < x_1$ alors la solution correspondante se dirigera vers 0, c'est à dire qu'il y aura extinction et si $x_1 < x_0 < x_2$ la solution correspondante tendra vers x_2 , c'est à dire ce modèle avec prélèvement constant présente un effet "Allee". Dans la figure 1.5 sont représentées les courbes de croissance d'une population $x(t)$ subissant une exploitation par quota pour différentes conditions initiales, où l'on remarque la valeur de x_2 qui est inférieur à la capacité limite K et l'extinction de la population si la condition initiale x_0 est inférieure à x_1 .

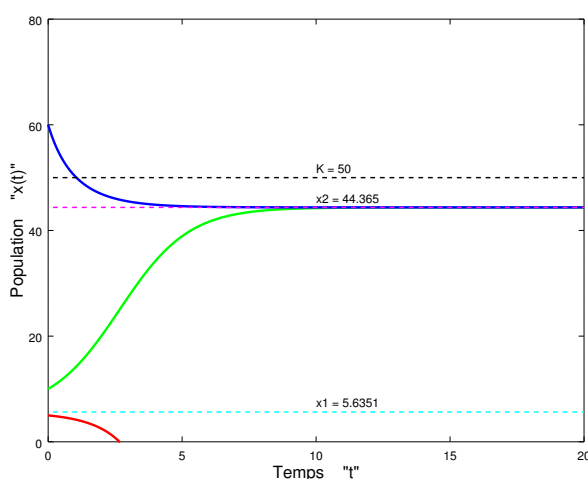


FIGURE 1.5 – Croissance de la population $x(t)$, subissant une exploitation à prélèvement constant, avec $r = 1$, $K = 50$ et trois conditions initiales $x_0 = 5$, $x_0 = 10$, $x_0 = 60$.

1.5 Modèles à deux populations en interaction

Il existe parfois, entre deux populations données, des interactions favorables ou défavorables, et c'est suivant cette qualité d'interaction qu'on classe les modèles à deux (ou plusieurs) populations en interaction :

1. Si le taux de croissance de la première population est favorisé par la présence de la seconde population, alors qu'au contraire le taux de croissance de la seconde population est défavorisé par la première population, on est devant un modèle dit : *Modèle Proie-Prédateur*. La population dont la croissance est favorisée est le Prédateur tandis que celle dont la croissance est défavorisée est la Proie.
2. Si le taux de croissance des deux populations est défavorisé, on est devant un modèle dit : *Modèle de Compétition*.
3. Si le taux de croissance des deux populations est favorisé, on est devant un modèle dit : *Modèle Mutualiste* ou *Modèle de Symbiose*.

On s'intéressera ici uniquement au premier modèle *Proie-Prédateur*.

Notons par $x(t)$ et $y(t)$ les effectifs de deux populations en interaction (les proies et les prédateurs respectivement), le modèle représentant la dynamique de ces deux populations est alors un système de deux équations différentielles ordinaires couplées :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) + k(x, y), \end{cases}$$

où $f(x)$ représente la croissance de la population des proies $x(t)$ en l'absence des prédateurs et $g(y)$ représente la croissance de la population des prédateurs $y(t)$ en l'absence des proies, et ne sont donc dépendant que des effectifs correspondants. $h(x, y)$ et $k(x, y)$ représentent quand à eux les interactions entre les deux populations et sont dépendant des deux effectifs.

1.6 Modèle de Lotka-Volterra

Afin d'expliquer les variations dans les prises de poissons dans la mer Adriatique [4], Volterra³ proposa, en 1926, le modèle *Proie-Prédateur* suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy, & (1.4) \\ \frac{dy}{dt} = -my + bxy, & (1.5) \end{cases}$$

3. *Vito Volterra* 1860-1940, est un mathématicien et physicien italien. Un de ses domaines d'intérêt été la dynamique des populations sur lequel il publia en 1926 un article [56], où il présenta les équations qui portent, en partie, son nom.

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent la densité des proies et celle des prédateurs, respectivement. r, m, a, b sont des constantes positive. *Volterra* remarquera que ce système pouvait osciller de façon périodique avec une période T qui dépend des conditions initiales (x_0, y_0) . Ces équations furent présentées en 1925 par *Lotka*⁴ où il prit l'exemple d'une population d'herbivores se nourrissant sur des plantes. Pour poser ses équations il fit l'analogie avec le comportement de certaines réactions chimique de laboratoire. De même, *Lotka* fera la même remarque que celle de *Volterra* sur l'oscillation permanente du système qu'il a posé. On peut réécrire le modèle précédent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r - ay), & (1.6) \\ \frac{dy}{dt} = y(-m + bx), & (1.7) \end{cases}$$

où l'on pourra remarquer que si l'effectif $x(t)$ augmente le terme $-m + bx$ dans l'équation (1.7) augmentera et la croissance de la population $y(t)$ est favorisé, ce qui correspond bien au prédateur, cette équation est l'*équation du prédateur*, et si l'effectif $y(t)$ augmente le terme $r - ay$ dans l'équation (1.6) diminuera et la croissance de la population $x(t)$ est défavorisé, ce qui correspond bien à la proie, cette équation est l'*équation de la proie*.

On a défini, dans l'équation (1.4), l'*équation de la proie*, la fonction représentant la croissance de la proie par $f(x) = rx$, et la fonction représentant la croissance du prédateur, dans l'équation (1.5), l'*équation du prédateur*, par $g(y) = -my$. Le signe négatif de cette dernière signifie qu'on a défini en réalité la mortalité du prédateur.

Pour les interactions entre les deux populations, on les a défini dans l'équation (1.4) par $h(x, y) = -axy$ et dans l'équation (1.5) par $k(x, y) = bxy$.

Les interactions dans ce modèle n'ont lieu que s'il y a rencontre entre les deux populations et par conséquent la consommation de la proie par le prédateur. L'hypothèse qui est usuellement faite est que les proies et les prédateurs se déplacent en explorant leur milieu au hasard et ceci conduit à un modèle de type *action de masse*⁵ où le nombre moyen de rencontres entre les deux populations est proportionnel au produit des effectifs [3].

Le paramètre a dans $h(x, y)$ est un paramètre positif qui rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques. Bien sûr la prédation implique une diminution des proies, ce qui justifie le signe négatif. Une telle fonction de prédation $h(x, y)$ est dite *fonction de Lotka-Volterra*.

Le paramètre b dans $k(x, y)$ est aussi un paramètre positif et puisque la prédation va favoriser le prédateur il n'y a donc pas de signe négatif, plus précisément, la quantité de proies ayant subi les attaques du prédateur, et donné par $h(x, y)$, se retrouvera consommé par le prédateur, mais avec une certaine efficacité qu'on notera par e . Nous avons donc

4. *Alfred James Lotka* 1880-1949, est un mathématicien et statisticien américain, il publia en 1920 un papier [40] où il exhiba les équations Proie-Prédateur qui portent aujourd'hui, en partie, son nom.

5. Il existe, en chimie, une loi analogue qui porte le même nom et qui dit : *La vitesse d'une réaction est proportionnelle aux concentrations de chacune des substances réactantes.*

$k(x, y) = -eh(x, y) = eaxy = bxy$. Le paramètre e est dit *le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur*⁶.

La solution $(x(t), y(t))$ du système (1.6)-(1.7) pour une condition initiale $(x(0), y(0))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \exp\left(\int_0^t (r - ay(s)) ds\right), \\ y(t) &= y(0) \exp\left\{\int_0^t (-m + bx(s)) ds\right\}. \end{aligned}$$

On déduit alors que \mathbb{R}_+ est positivement invariant, et donc, avec une condition initiale acceptable, c'est à dire des effectifs de départ strictement positifs $x(0) > 0, y(0) > 0$, les effectifs suivant vont rester toujours positifs $x(t) > 0, y(t) > 0, \forall t \geq 0$. Ceci a un intérêt majeur dans la modélisation car des effectifs négatifs n'ont aucun sens biologique.

En posant $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$, on trouve que les points d'équilibre du système (1.4)-(1.5) sont : $(0, 0)$ et un point non trivial $(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$. Le premier point signifie que les deux populations se dirigent vers l'extinction, alors que pour le second c'est vers la coexistence qu'elles se dirigent.

Cherchons les propriétés de stabilité locale de ces deux points. La linéarisation du système (1.4)-(1.5) nous conduit à la matrice jacobienne suivante :

$$Jac = \begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}.$$

Cette matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre $(0, 0)$ donne :

$$Jac_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres sont $\lambda_1 = r > 0$ et $\lambda_2 = -m < 0$. Ces valeurs propres étant de signes contraires, le point $(0, 0)$ est alors un point selle, donc instable.

La même matrice jacobienne évaluée cette fois-ci au second point d'équilibre $(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$ donne :

$$Jac_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{am}{b} \\ \frac{br}{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Les valeurs propres de cette matrices sont imaginaires pures, à savoir $\lambda_1 = i\sqrt{rm}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{rm}$. Le point d'équilibre (x^*, y^*) est alors un centre pour le système linéarisé, mais pour le système nonlinéaire (1.4)-(1.5), il faut approfondir l'investigation. Considérons pour cela l'intégrale première suivante :

$$H(x, y) = -m \ln x - r \ln y + bx + ay.$$

⁶. La biomasse ici signifie l'effectif.

cette intégrale possède un extremum local au point (x^*, y^*) . En effet le développement limité au second ordre de la fonction $H(x, y)$ au voisinage de (x^*, y^*) donne :

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{1}{2} \frac{b^2}{m} (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} (y - y^*)^2,$$

vu que $\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial H}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$ et que $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*) = \frac{b^2}{m}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*) = \frac{a^2}{r}$.

Donc le signe de $H(x, y) - H(x^*, y^*)$ est toujours positif au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*) , d'où l'existence d'un minimum locale pour l'intégrale première $H(x, y)$ au voisinage de (x^*, y^*) . Les trajectoires autour de cet équilibre sont les courbes de niveau de l'intégrale première et donc se referment au voisinage de ce point. Nous avons donc bien un centre pour le système non linéaire de *Lotka-Volterra* (1.4)-(1.5). La solution du système (1.4)-(1.5) est représentée dans la figure 1.6, avec la condition initiale $(x_0, y_0) = (5, 1)$. On

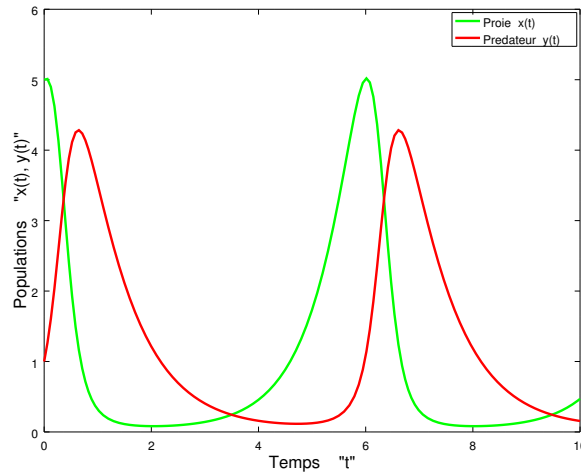


FIGURE 1.6 – Solution du système *Lotka-Volterra* avec $r = 1.5$, $a = 1.3$, $m = 1.2$ et $b = 1$.

remarquera sur cette figure l'aspect périodique des courbes dont la période T est donnée par la partie imaginaire des valeurs propres λ_1, λ_2 de (1.8), à savoir $T = \frac{2\pi}{\sqrt{rm}}$.

Le portrait de phase du système *Lotka-Volterra* dans la figure 1.7, présente bien la courbe fermée autour du point d'équilibre non trivial $(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$.

Des lacunes, cependant, subsistent dans ce modèle à savoir les centres qui sont structurellement instables ainsi que la croissance exponentielle des proies, ce qui est irréaliste. L'insertion d'une loi de *croissance logistique* au lieu de la croissance exponentielle arrangera bien ces lacunes [3] [48].

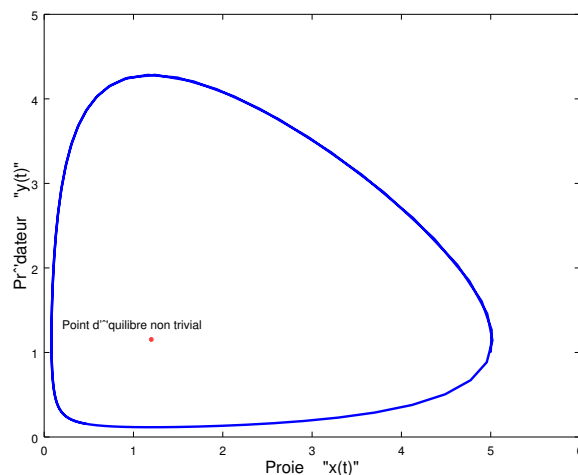


FIGURE 1.7 – Portrait de phase du système *Lotka-Volterra* dont la courbe entoure le point d'équilibre non trivial $(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$.

1.7 Modèle de Holling

*Holling*⁷ s'intéressa à la fonction de prédation dans le modèle de *Lotka-Volterra*, c'est à dire : axy . Ce terme représentant le nombre de proies $ax(t)$ tuées par un seul prédateur par unité de temps, a le défaut d'être irréaliste du fait que si le nombre de proies $x(t)$ est assez grand, un seul prédateur ne pourra pas tuer un nombre proportionnel de proies, vu que le paramètre a est constant. Il y aura plutôt un effet de saturation dans la prédation. Le nombre de proies tuées par un seul prédateur par unité de temps est appelé *la fonction réponse* du modèle proie-prédateur ou *la réponse fonctionnelle* du prédateur à la variation de densité de la proie. Dans le modèle de *Lotka-Volterra*, elle est donc donné par :

$$\Phi_I(x, y) = \frac{axy}{y} = ax,$$

appelée *fonction réponse de Type I*.

Holling introduisit en 1959, une nouvelle *fonction réponse* permettant d'avoir cet effet de saturation dans la prédation, il proposa la fonction :

$$\Phi_{II}(x, y) = \frac{ax}{D + x},$$

appelé *fonction de Holling* ou *de Type II*, par opposition à la fonction *de Type I* du modèle de *Lotka-Volterra*, et où D est une constante positive.

La *fonction réponse de Type III*, introduite aussi par *Holling*, est donnée par :

$$\Phi_{III}(x, y) = \frac{ax^2}{D + x^2}.$$

7. Crawford Stanley Holling, né en 1930 à New York et d'origine canadienne, est un spécialiste en entomologie qui est une branche de la zoologie dont l'objet est l'étude des insectes. Il développa, en 1959, ce qu'il a appelé *la réponse fonctionnelle* de Type II qui coïncidait avec ses observations sur une expérience de laboratoire. Il proposa aussi une variante de sa *réponse fonctionnelle*, la Type III.

Sur la figure 1.8 sont représentées les fonctions réponses Φ_I , Φ_{II} et Φ_{III} :

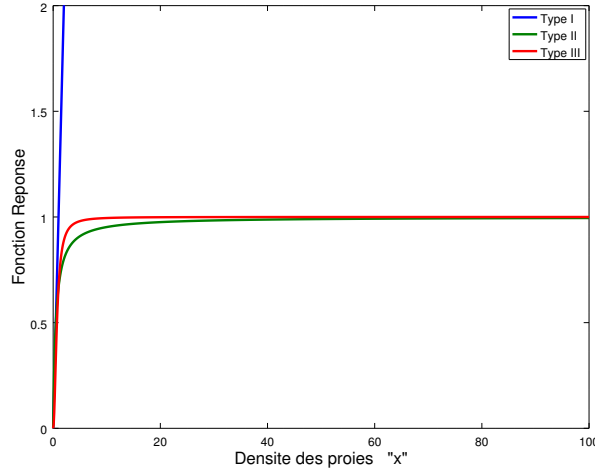


FIGURE 1.8 – Fonctions réponse de Types I, II et III avec pour paramètres $a = 1$ et $D = 0.5$.

En choisissant comme fonction de croissance de la proie une fonction logistique, et comme fonction réponse une *fonction de Holling de Type II*, on obtient le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D}, \\ \frac{dy}{dt} = -my + e \frac{axy}{x + D}, \end{cases} \quad (1.9)$$

on remarquera que pour ce système \mathbb{R}_+ est positivement invariant. Cherchons ses points d'équilibre qui sont les intersections des isoclines du système (1.9) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 0 &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x + D) && \text{isoclines verticales,} \\ \frac{dy}{dt} = 0 &\Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{mD}{ea - m} && \text{isoclines horizontales.} \end{aligned}$$

Nous avons donc les isoclines suivantes : les deux axes $x = 0$ et $y = 0$, la droite verticale d'équation $x = \frac{mD}{ea - m}$ et la parabole d'équation $y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x + D)$. Les intersections de ces isoclines (les verticales avec les horizontales) nous donne les points d'équilibre : $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(-D, 0)$ et (x^*, y^*) avec $x^* = \frac{mD}{ea - m}$ et $y^* = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) (x^* + D)$.

Le point $(-D, 0)$ sera négligé vu qu'il n'a pas de signification biologique. Nous supposons que $ea > m$ pour avoir $x^* > 0$, sinon le point (x^*, y^*) sera négligé aussi. On se retrouve ainsi avec deux cas possibles :

Si $K > x^*$, on a alors trois points d'équilibre $(0, 0)$, $(K, 0)$ et (x^*, y^*) , ce dernier se trouvant dans \mathbb{R}_+^* .

Si $K < x^*$, on a alors seulement deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(K, 0)$ vu que $y^* < 0$.

Pour l'étude de la stabilité des ces points d'équilibre, calculons d'abord la jacobienne :

$$Jac = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x - \frac{ayD}{(x+D)^2} & -\frac{ax}{x+D} \\ \frac{eayD}{(x+D)^2} & -m + \frac{eax}{x+D} \end{pmatrix}.$$

Évaluée à l'origine $(0,0)$, cette matrice vaut :

$$Jac_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres r et $-m$ étant de signes opposées, le point $(0,0)$ est un point selle.

Au point $(K,0)$, on obtient la matrice :

$$Jac_{(K,0)} = \begin{pmatrix} -r & -\frac{aK}{K+D} \\ 0 & -m + \frac{eaK}{K+D} \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -r < 0$ et $\lambda_2 = -m + \frac{eaK}{K+D}$ dont le signe dépend des deux cas précédents, à savoir :

si $K > \frac{mD}{ea-m} = x^*$, alors $\lambda_2 > 0$ et le point $(K,0)$ est un point selle, donc instable.

si $K < \frac{mD}{ea-m} = x^*$, alors $\lambda_2 < 0$ et le point $(K,0)$ est un nœud stable.

Au point (x^*, y^*) , la jacobienne vaut :

$$Jac_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{ay^*D}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{eay^*D}{(x^*+D)^2} & -m + \frac{eax^*}{x^*+D} \end{pmatrix}.$$

(x^*, y^*) est un point d'équilibre pour le système (1.9), il vérifie donc : $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$, d'où :

$$\begin{cases} rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{ax^*y^*}{x^*+D} = 0 \\ -my^* + e\frac{ax^*y^*}{x^*+D} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{ay^*}{x^*+D} = 0, \\ -m + \frac{eax^*}{x^*+D} = 0, \end{cases}$$

la matrice précédente se simplifie en :

$$Jac_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{ay^*D}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{eay^*D}{(x^*+D)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\det \left(Jac_{(x^*, y^*)} \right) = \frac{ea^2 D x^* y^*}{(x^* + D)^3},$$

qui est strictement positif dès que $x^* > 0$ et $y^* > 0$.

La trace de cette même matrice est :

$$tr \left(Jac_{(x^*, y^*)} \right) = r - \frac{2r}{K} x^* - \frac{ay^* D}{(x^* + D)^2}.$$

En remplaçons y^* par sa formule, il vient :

$$tr \left(Jac_{(x^*, y^*)} \right) = r - \frac{2r}{K} x^* - \frac{Dr}{(x^* + D)} + \frac{Dr x^*}{K(x^* + D)} = \frac{r x^* (K - D - 2x^*)}{K(x^* + D)}.$$

Pour s'assurer de la stabilité de l'équilibre (x^*, y^*) , il faut que $tr \left(Jac_{(x^*, y^*)} \right)$ soit négative :

$$tr \left(Jac_{(x^*, y^*)} \right) < 0 \Leftrightarrow x^* > \frac{K - D}{2},$$

si au contraire la trace est positive alors (x^*, y^*) est instable. Notons que le point $\frac{K - D}{2}$ est le sommet de la parabole qui est isocline verticale.

Ci-après dans la figure 1.9 le tracé des courbes solutions du système (1.9), ainsi que son portrait de phase dans la figure 1.10 où l'on a tracé aussi les isoclines et les points d'équilibre. Les paramètres choisis étant : $r = 2$, $K = 10$, $a = 1.5$, $m = 1.2$, $e = 0.9$, $D = 1.1$ et la condition initiale : $(x_0, y_0) = (5, 1)$.

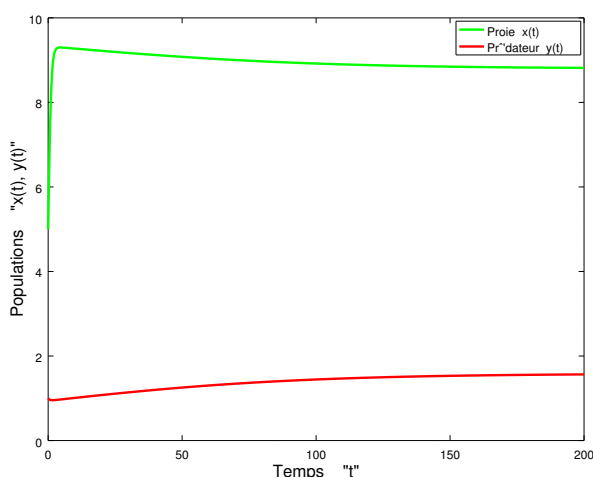


FIGURE 1.9 – Solutions du système (1.9) lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est stable.

Le choix des paramètres précédents nous a permis d'avoir trois points d'équilibre dont l'un (x^*, y^*) est stable, d'où la convergence de la solution vers cet équilibre.

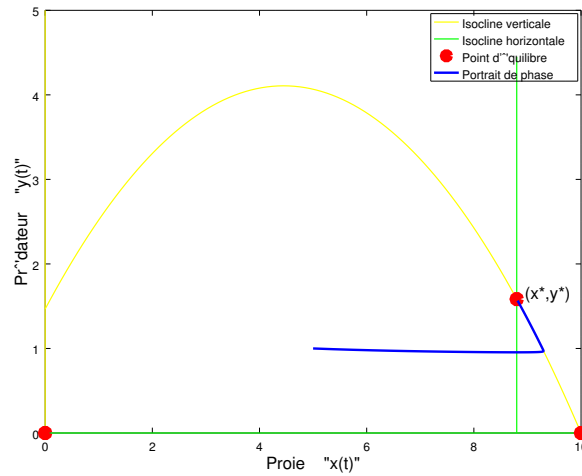


FIGURE 1.10 – Portrait de phase du système (1.9) lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est stable.

Dans le cas où (x^*, y^*) est instable, c'est à dire quand $x^* > \frac{K - D}{2}$, ce point d'équilibre s'entoure d'un cycle limite comme on le voit sur la figure 1.11 où la courbe de couleur magenta et dont le point initial est le point $A(8, 7)$, spirale en s'éloignant du point d'équilibre (x^*, y^*) et en se rapprochant du cycle limite, et la courbe de couleur bleu et dont le point initial est le point $B(10, 5)$, extérieur au cycle limite, spirale en se rapprochant de ce cycle limite. Pour plus de détails voir [3, p.127]. Nous avons gardé les mêmes paramètres que dans le cas précédent où (x^*, y^*) été stable sauf pour le paramètre K pour laquelle on a pris la valeur 19 pour l'instabilité de (x^*, y^*) . On peut aussi remarquer les courbes solutions correspondantes aux point de départ A et B sur la figure 1.12 :

Dans le dernier cas où $K < x^*$, nous avons seulement deux points d'équilibre, l'origine $(0, 0)$ et le nœud stable $(K, 0)$. Nous pouvons remarquer sur la figure 1.13 des courbes solutions du système (1.9) ainsi que sur la figure 1.14 du portrait de phase du dite système, que la population prédatrice tend vers l'extinction alors que la population proie tend vers sa capacité limite $K = 5$.

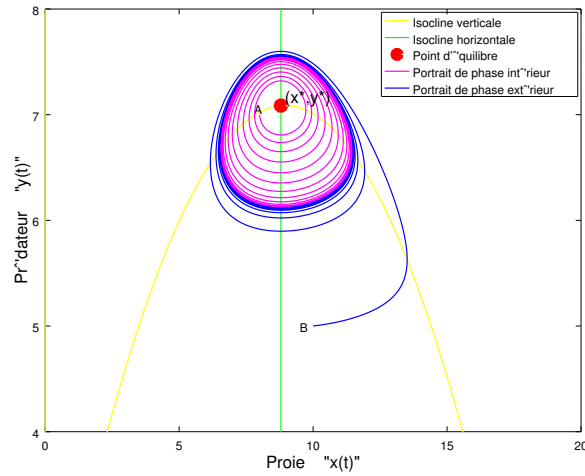


FIGURE 1.11 – Portraits de phase du système (1.9) pour deux conditions initiales A et B lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est instable.

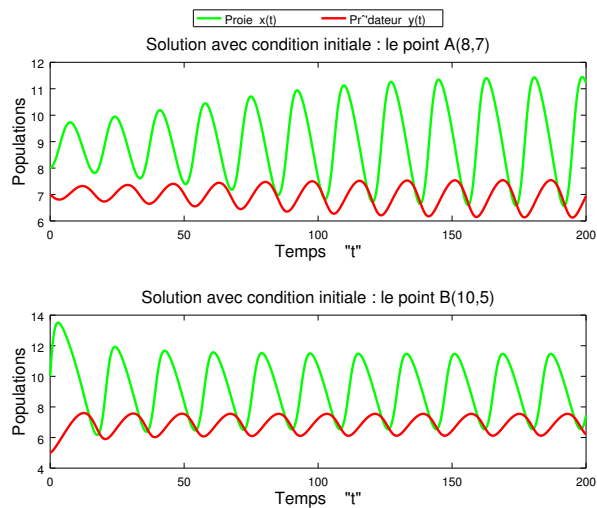


FIGURE 1.12 – Solution du système (1.9) pour deux conditions initiales A et B et lorsque l'équilibre (x^*, y^*) est instable.

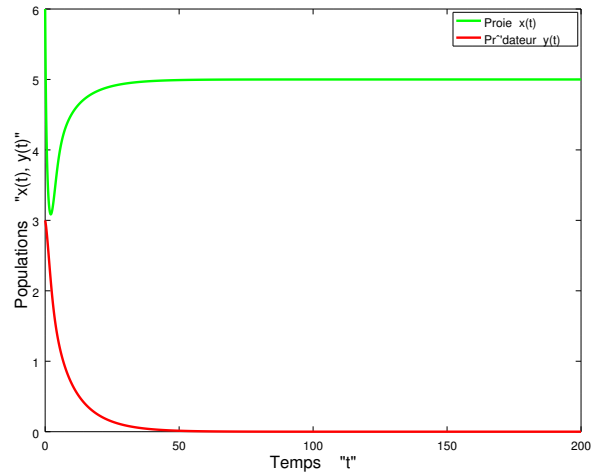


FIGURE 1.13 – Solution du système (1.9) avec $(x_0, y_0) = (6, 3)$: cas où l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.

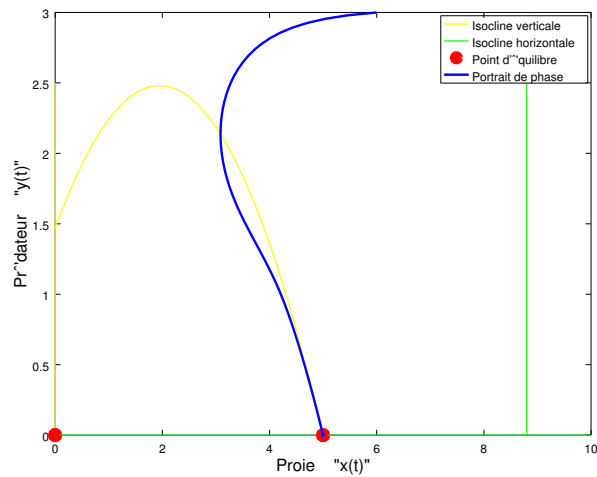


FIGURE 1.14 – Portrait de phase du système (1.9) avec $(x_0, y_0) = (6, 3)$: cas où l'équilibre $(K, 0)$ est un nœud stable.

1.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre certains modèles de base en dynamique de population, nous avons toute fois omis d'autres modèles comme les modèles à retard, les modèles discrets, les modèles stochastiques... qui sont tout aussi important mais un peu éloigné du sujet de notre thèse.

Les modèles biologiques ont bien évolué depuis *Malthus* et continuent d'évoluer dans divers sens grâce au développement des mathématiques, la compréhension de plus en plus précise de la biologie et l'accroissement des rencontres entre les spécialistes de ces deux disciplines. Nous profitons de cette dernière remarque pour faire une transition et passer au chapitre suivant où nous allons présenter les notions mathématiques théoriques nécessaires à l'étude de nos modèles qu'on va présenter dans les chapitres 3 et 4.

Chapitre 2

Notions théoriques utilisées dans cette thèse

Les modèles que nous avons présenté dans le chapitre précédent font intervenir des équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles ordinaires étant à la base de notre travail, il est alors judicieux de rappeler, dans ce chapitre, la définition rigoureuse d'une équation différentielle ainsi que de présenter quelques outils mathématiques nécessaires à l'étude des modèles que nous introduirons par la suite. Les rappels de la première section ci-dessous peuvent être retrouvés dans différents ouvrages tels que [28], [29], [35].

2.1 Equations différentielles ordinaires

Définition 1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et D un domaine ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, les éléments de D sont les couples (t, x) . Soit aussi $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et notons $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Une équation différentielle¹ ordinaire (EDO) du premier ordre est une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{ou brièvement} \quad \dot{x} = f(t, x). \quad (2.1)$$

On appelle solution de cette EDO sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, borné ou non, une fonction

$$\begin{aligned} x : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto x(t), \end{aligned}$$

définie et dérivable sur I et vérifiant :

- a) $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$,
- b) $\forall t \in I \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

On appelle x l'état du système et f le champ de vecteur sur D . Si f ne dépend pas explicitement de t , on appelle l'EDO (2.1) équation autonome, sinon on l'appelle équation non autonome.

1. On dit aussi : système d'équations différentielles si $n > 1$.

Définition 2. La trajectoire de la solution de l'équation (2.1) est l'ensemble $\{(t, x(t)), t \in I\}$ (le graphe ou la courbe de la fonction x). La projection de cette trajectoire sur \mathbb{R}^n (l'ensemble d'arrivée de l'application f ainsi que de la solution x) est appelé l'orbite de la solution. L'ensemble de toutes les orbites des solutions de l'équation (2.1) est appelé le portrait de phase (\mathbb{R}^n étant l'espace des phases).

Définition 3 (Problème de Cauchy). Soit $(t_0, x_0) \in D$. On dit que x est une solution au problème de Cauchy relatif à (t_0, x_0) , si x est une solution de (2.1) sur I telle que $x(t_0) = x_0$. On appelle (t_0, x_0) la condition initiale au problème de Cauchy. On écrit symboliquement le problème de Cauchy sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 4. [28] Une application

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

est dite k -lipschitzienne en x si $\forall (t, x), (t, y) \in D$ on a :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\| \quad (k \text{ ne dépend pas de } t),$$

$\|\cdot\|$ désignant une norme de \mathbb{R}^n .

f est dite localement lipschitzienne si $\forall (t, x) \in D$ il existe un voisinage $V_{(t,x)}$ de (t, x) dans lequel f est $k_{(t,x)}$ -lipschitzienne.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz, solution locale). [28] Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable x , sur D , alors il existe un plus grand intervalle $I_{\max}(t_0, x_0)$ (ouvert) sur lequel est définie une unique solution x au problème de Cauchy (2.2). $I_{\max}(t_0, x_0)$ s'appelle l'intervalle maximal et x la solution maximale de (2.2).

Définition 5. [28] Soit I_0 un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U_0 un ouvert de \mathbb{R}^n ; soit une fonction $f : I_0 \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Une solution $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sur un intervalle I , de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est globale si $I = I_0$.

Définition 6. [28] Soient un ouvert U de \mathbb{R}^n , un réel $T > 0$ et une fonction continue $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ localement lipschitzienne en la variable x . L'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est dite périodique, de période T , si $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times U, f(t+T, x) = f(t, x)$. Une solution $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de cette équation est T -périodique si et seulement si $x(T) = x(0)$.

Soit toujours l'équation (2.1), avec $f : [0, +\infty[\times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une application continue en t et localement lipschitzienne en x , sur $[0, +\infty[\times U$, où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contenant l'origine $x = 0$.

Définition 7. [35] *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre pour (2.1) à $t = 0$ si :*

$$f(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Un équilibre à l'origine peut-être une translation d'une solution non identiquement nulle de l'équation. Pour le vérifier, supposons que $\bar{y}(\tau)$ est une solution de l'équation :

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y),$$

définie pour tout $\tau \geq a$. Le changement de variables :

$$x = y - \bar{y}(\tau); \quad t = \tau - a,$$

transforme l'équation sous la forme suivante :

$$\dot{x} = g(\tau, y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \dot{\bar{y}}(t + a) \stackrel{\text{déf}}{=} f(t, x),$$

avec l'origine 0 comme point d'équilibre pour cette dernière équation à $t = 0$, vu que :

$$\dot{\bar{y}}(t + a) = g(t + a, \bar{y}(t + a)).$$

Il s'en suit qu'en étudiant la stabilité de l'origine, comme étant un point d'équilibre de l'équation transformée, on peut déterminer la stabilité de la solution $\bar{y}(\tau)$ de l'équation originale.

Définition 8. [35] *Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est :*

— *stable si, pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque $t_0 \geq 0$, il existe un $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tel que :*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

— *instable s'il n'est pas stable.*

— *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe une constante positive $c = c(t_0)$ tel que :*

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty, \text{ pour tout } \|x(t_0)\| < c.$$

Si l'équilibre $x = 0$ de (2.1) est asymptotiquement stable quelque soit la condition initiale $x(t_0)$, alors l'équilibre est dit globalement asymptotiquement stable.

Définition 9. [35] *Soit la fonction $W : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. W est dite définie positive si :*

— $W(0) = 0$,

— $W(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

Théorème 2. [35] Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour (2.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : [0, \infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable telle que :

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -W_3(x), \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où $W_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ sont des fonctions continues définies positives sur D . Alors, $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

La fonction V définie dans le théorème précédent est dite *fonction de Lyapunov*.

Lemme 1 (Lemme de comparaison). [35] Soit l'équation différentielle scalaire suivante :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

où $f(t, x)$ est continue en t et localement lipschitzienne en x , pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in U \subset \mathbb{R}$. Soit $[t_0, T)$ (T pouvant être infini) l'intervalle d'existence maximal de la solution $x(t)$, et supposons que $x(t) \in U$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Soit $y(t)$ une fonction continue dont la dérivée satisfait l'inégalité différentielle :

$$\dot{y}(t) \leq f(t, y(t)), \quad y(t_0) \leq x_0,$$

avec $y(t) \in U$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Alors $y(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in [t_0, T)$.

Théorème 3 (Théorème de la moyenne). [35] Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable en chaque point x d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Soient x et y deux points de U tel que le segment de droite $L(x, y) \subset U$. Alors il existe un point z de $L(x, y)$ tel que :

$$f(x) - f(y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} (y - x).$$

Définition 10. [28] Un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est dit positivement invariant pour (2.1) si pour tout point $a \in M$ la solution x de (2.1) telle que $x(0) = a$ vérifie $x(t) \in M \quad \forall t \geq 0$.

Définition 11. [29] Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable au point x^* , alors on appelle Matrice Jacobienne de f au point x^* la matrice suivante :

$$J_f(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x^*) \end{pmatrix}$$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx . On désigne par $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (ou simplement \mathcal{L}^1) l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} et on pose $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$.

Définition 12. [57] *Dans un espace séparé, une partie est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Théorème 4 (Ascoli). [7] *Soit \mathbf{K} un espace métrique compact et soit \mathcal{H} un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.*

On suppose que \mathcal{H} est uniformément équicontinu i.e. :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x_1, x_2) < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Alors \mathcal{H} est relativement compact dans $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). [7] *Soit f_n une suite de fonctions de \mathcal{L}^1 . On suppose que :*

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω ,

b) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$.

Définition 13. [35] *Soit $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On définit la dérivée à droite supérieure de v au point t ; $D^+v(t)$; par :*

$$D^+v(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

où $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ (la limite supérieure) d'une suite de réels $\{x_n\}$, est un réel y satisfaisant deux conditions :

- pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que : $n > N$ implique $x_n < y + \epsilon$,
- étant donné $\epsilon > 0$ et $m > 0$, il existe un entiers $n > m$ tel que $x_n > y - \epsilon$.

Si v est dérivable au point t_0 , alors $D^+v(t_0) = v'(t_0)$ (la dérivée usuelle).

2.2 Théorème de continuation de la théorie du degré de coïncidence

L'objectif de cette théorie de *degré de coïncidence* est l'étude d'équations opérationnelles du type :

$$Lx = Nx,$$

avec L (resp. N) un opérateur linéaire (resp. non-linéaire) entre deux espaces vectoriels normés \mathbb{X}, \mathbb{Y} , et L non-inversible.

Cette théorie fût développé par *Jean. L. Mawhin (1942)* dans les années 1970, qui imposa des conditions au couple d'opérateurs (L, N) , des conditions semblables à celles de la théorie de *degré de Leray-Schauder* (voir [36]), pour la résolution du problème et qui lui permirent d'énoncer un certain nombre de théorèmes dont le *théorème de continuation*.

2.2.1 Opérateur de Fredholm

Définition 14. [49] Soient \mathbb{X}, \mathbb{Y} deux espaces normés. Une application linéaire $L : \text{Dom } L \subset \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ est dite de Fredholm si :

1. $\ker L$ est de dimension finie.
2. $\text{Im } L$ est fermé et de codimension finie.

La codimension de $\text{Im } L$ est la dimension de $\text{coker } L = \mathbb{Y}/\text{Im } L$. L'indice d'un opérateur de Fredholm est donné par :

$$\text{ind } L = \dim \ker L - \dim \text{coker } L = \dim \ker L - \text{codimIm } L.$$

2.2.2 Projecteurs

Définition 15. [51] Soient \mathbb{X} un espace vectoriel et \mathbb{E}, \mathbb{F} deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{X} tel que $\mathbb{X} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$. L'opérateur linéaire $P : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ défini par :

$$P(e + f) = e, \quad (\text{resp. } f)$$

où $e \in \mathbb{E}$ et $f \in \mathbb{F}$, est dit projecteur sur \mathbb{E} (resp. \mathbb{F}) parallèlement à \mathbb{F} (resp. \mathbb{E}).

A chaque fois qu'on parle d'un projecteur P sur \mathbb{E} parallèlement à \mathbb{F} , on sous-entend que $\mathbb{X} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.

Définition 16. [51] Un opérateur linéaire $P \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ est idempotent si $P^2 = P$.

Théorème 6. [51] Un opérateur linéaire $P \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ est un projecteur si et seulement s'il est idempotent.

Définition 17. [9] Soient \mathbb{E}, \mathbb{F} deux espaces normés, $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une application linéaire. T est dit opérateur compact si :

$$\forall M \subseteq \mathbb{E}, \quad M \text{ borné, } T(M) \text{ est relativement compact (adhérence compacte) dans } \mathbb{F}.$$

2.2.3 Homotopie

Définition 18. [24] Deux applications continues, f et g , d'un espace \mathbb{X} vers un espace \mathbb{Y} , sont homotopes s'il existe une application continue $F : \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$, telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$. L'application F est appelée homotopie de f vers g .

Une homotopie F est donc une déformation continue de l'application f vers l'application g .

2.2.4 Degré topologique de Brouwer

Définition 19. [49] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in C^1(\bar{\Omega})$. si $p \notin f(\partial\Omega)$ et $\det(J_f(p)) \neq 0$, alors on définit le degré de Brouwer par :

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det(J_f(x)),$$

avec $\deg(f, \Omega, p) = 0$ si $f^{-1}(p) = \emptyset$.

Théorème 7. [49] Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Si $p \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe un entier $\deg(f, \Omega, p)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. (Normalisation) $\deg(I, \Omega, p) = 1$ si et seulement si $p \in \Omega$, où I est l'application identité ;
2. (Solvabilité) Si $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, alors $f(x) = p$ a une solution dans Ω ;
3. (Homotopie) Si $f_t(x) : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $p \notin \cup_{t \in [0, 1]} f_t(\partial\Omega)$, alors : $\deg(f_t, \Omega, p)$ ne dépend pas de $t \in [0, 1]$;
4. (Additivité) Supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints de Ω et $p \notin f(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Alors $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$;
5. $\deg(f, \Omega, p)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

2.2.5 Théorème de continuation

Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux espaces de Banach, $L : \operatorname{Dom} L \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ une application linéaire et $N : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ une application continue. L est dite une *application de Fredholm d'indice zéro* si $\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L < +\infty$ et $\operatorname{Im} L$ est fermé dans \mathbb{Y} .

Si L est une application de Fredholm d'indice zéro, alors il existe des projecteurs continus $P : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ et $Q : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ tel que $\operatorname{Im} P = \ker L$, $\operatorname{Im} L = \ker Q = \operatorname{Im} (I - Q)$. Il s'en suit que la restriction L_P de L à $\operatorname{Dom} L \cap \ker P$, c'est à dire : $L_P : \operatorname{Dom} L \cap \ker P \rightarrow \operatorname{Im} L$, est inversible, on notera alors son inverse par K_P .

Si Ω est un sous-ensemble ouvert borné de \mathbb{X} , l'application N est dite *L -compacte* sur $\bar{\Omega}$ si $QN(\bar{\Omega})$ est borné et $K_P(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{X}$ est compacte.

$\operatorname{Im} Q$ étant isomorphe à $\ker L$, il existe alors un isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \rightarrow \ker L$.

Les définitions ci-dessus ainsi établie, nous présentons le *théorème de continuation de Mawhin* :

Théorème 8 (Théorème de continuation). [25] Soit L une application de Fredholm d'indice zéro et soit N L -compacte sur $\bar{\Omega}$. Supposons que :

1. pour tout $\lambda \in (0, 1)$, toute solution u de $Lu = \lambda Nu$, est telle que $u \notin \partial\Omega \cap \ker L$,
2. pour tout $u \in \partial\Omega \cap \ker L$, $QNu \neq 0$,

3. le degré de Brouwer $\deg \{JQN, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0$.

Alors l'équation $Lu = Nu$ a au moins une solution dans $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$.

2.3 Fonctions presque-périodiques et équations différentielles

La théorie des fonctions presque-périodiques à commencé entre 1923 et 1925 par le mathématicien Danois *Harald Bohr (1887-1951)*. *Bohr* s'appuya sur certaines méthodes élaborées par ses prédécesseurs, pour la généralisation de la notion de *fonction périodique*, pour construire sa théorie. On ne peut donc parler de presque périodicité sans faire le parallèle avec la périodicité, en fait la presque périodicité est la généralisation de la périodicité. Commençons par le théorème d'approximation suivant :

Théorème 9 (Théorème de Weierstrass). [12] *Si f est une fonction continue et périodique de période 2ω , alors pour $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique (de degré n) :*

$$T_\epsilon(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega_k t},$$

avec $\omega_k = \frac{k\pi}{\omega}$ et $c_k \in \mathbb{C}$, tel que :

$$|f(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \quad -\infty < t < \infty.$$

On dis alors que le polynôme T_ϵ est une approximation uniforme de le fonction f . La généralisation de cette définition nous donne la définition d'une fonction presque-périodique suivante :

Définition 20. [12] *Une fonction f définie sur $] -\infty, \infty[$ à valeurs complexes est dite presque-périodique, si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un polynome trigonométrique :*

$$T_\epsilon(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k t},$$

avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \in \mathbb{C}$, tel que :

$$|f(t) - T_\epsilon(t)| < \epsilon, \quad -\infty < t < \infty.$$

Il s'en suit directement que les *fonctions périodiques* sont aussi *presque-périodiques*, d'où la généralisation. Par contre il y'a des fonctions presque-périodique qui ne sont pas périodique.

Exemple 1. *Soit la fonction :*

$$f(t) = e^{it} + e^{i\pi t},$$

elle est presque périodique d'après la définition précédente. Supposons maintenant qu'il existe un réel $\omega \neq 0$, tel que $f(t + \omega) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On obtient donc l'équation :

$$(e^{i\omega} - 1)e^{it} + (e^{i\pi\omega} - 1)e^{i\pi t} = 0,$$

or les fonctions e^{it} et $e^{i\pi t}$ sont linéairement indépendante. D'où, ω doit vérifier les conditions $e^{i\omega} = e^{i\pi\omega} = 1$. Donc $\omega = 2k\pi$ et $\pi\omega = 2h\pi$, avec $k, h \in \mathbb{Z}$. Or ces deux équations sont incompatibles d'où la non-périodicité de f .

Définition 21. [6] Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Un réel τ vérifiant :

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

est dit une ϵ -presque-période de f . On la note $\tau(\epsilon)$ ou bien seulement τ s'il n'y a pas de confusion.

Remarque 1. Concernant les presque-périodes, on a les remarques suivantes :

- Si τ est une ϵ -presque-période de f , alors elle est aussi une ϵ_1 -presque-période de f pour tout $\epsilon_1 > \epsilon$.
- Si τ est une ϵ -presque-période de f , alors $-\tau$ l'est aussi.
- $\tau(\epsilon_1) + \tau(\epsilon_2) = \tau(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ et $\tau(\epsilon_1) - \tau(\epsilon_2) = \tau(\epsilon_1 + \epsilon_2)$.

La définition d'une fonction presque-périodique au sens de Bohr est la suivante :

Définition 22. [6] Une fonction f continue sur \mathbb{R} est dite presque-périodique si, étant donné un $\epsilon > 0$ quelconque, il existe un ensemble relativement dense d' ϵ -presque-périodes de f .

En d'autres termes, pour chaque ϵ , il existe une longueur $L = L(\epsilon)$, telle que tout intervalle de longueur $L(\epsilon)$ contient au moins une ϵ -presque-période $\tau = \tau(\epsilon)$ de f .

Exemple 2. [15] Soit la fonction :

$$f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t).$$

La période de $\sin(t)$ est 2π et celle de $\sin(\sqrt{2}t)$ est $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, il n'y a donc aucun multiple commun à ces deux périodes donc f n'est pas périodique. Montrons qu'elle est presque-périodique.

$$\begin{aligned} |f(t + \tau) - f(t)| &= |\sin(t + \tau) + \sin(\sqrt{2}(t + \tau)) - \sin(t) - \sin(\sqrt{2}t)| \\ &\leq |1 - \cos(\tau)| + |1 - \cos(\sqrt{2}\tau)| + |\sin(\tau)| + |\sin(\sqrt{2}\tau)|. \end{aligned}$$

Soit ϵ donné, il existe alors m et n deux entiers naturels tels que : $|m - \sqrt{2}n| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$. Si on pose $\tau = 2n\pi$ alors $\cos(\tau) = 1$ et $\sin(\tau) = 0$. D'où :

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq |1 - \cos(\sqrt{2}\tau)| + |\sin(\sqrt{2}\tau)|.$$

Or

$$\sqrt{2}\tau = (\sqrt{2}n)2\pi = (m + \alpha)2\pi,$$

où α est un réel vérifiant $|\alpha| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$. Ainsi

$$\cos(\sqrt{2}\tau) = \cos(2\alpha\pi) \text{ et } \sin(\sqrt{2}\tau) = \sin(2\alpha\pi).$$

Soit

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq 2\pi|\alpha| + 2\pi|\alpha| = 4\pi|\alpha| \leq \epsilon,$$

car

$$|1 - \cos(\theta)| \leq |\theta| \text{ et } |\sin(\theta)| \leq \theta \quad \forall \theta$$

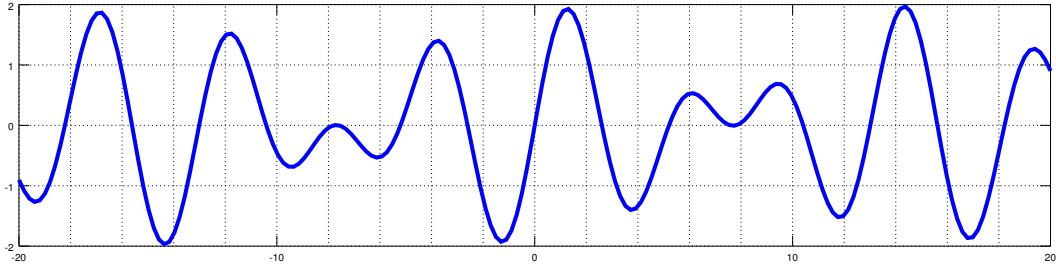


FIGURE 2.1 – Représentation de la fonction presque-périodique $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$.

En 1933, *Salomon Bochner (1899-1982)* définit les fonctions presque-périodiques à valeurs dans des espaces de Banach et donna les caractérisations suivantes :

Théorème 10 (Caractérisation de Bochner). [1] *Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans un espace de Banach \mathbb{X} . f est presque-périodique si et seulement si, étant donné une suite de réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque, il existe une sous-suite $(\tau_n) \subset (\alpha_n)$ telle que la suite $(f(t + \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément (sur \mathbb{R}).*

Théorème 11 (Deuxième caractérisation de Bochner). [15] *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ une fonction continue. Alors, f est presque-périodique si pour toute suite de réels $((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}})$, il existe une sous-suite $((\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}})$ telle que $(f(t + \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction $g(t)$ et $(f(t + \tau_n + \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g(t + \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers la même fonction $h(t)$.*

Voici quelques propriétés des fonctions presque-périodiques :

- Une fonction presque-périodique est bornée sur \mathbb{R} .
- Une fonction presque-périodique est uniformément continue sur \mathbb{R} , c-à-d :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) \text{ tel que } |f(t_1) - f(t_2)| \leq \epsilon \text{ pour } |t_1 - t_2| \leq \delta.$$

- Si $f(t)$ est presque-périodique, $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\bar{f}(t)$, $cf(t)$, $f(t + a)$ et $f(at)$ sont presque-périodiques.
- Si $f(t), g(t)$ sont deux fonctions presque-périodiques, alors $f(t) + g(t)$, $f(t) \cdot g(t)$, $\frac{1}{g(t)}$ (pour $|g(t)| \geq m > 0$) ainsi que $(f \circ g)(t)$ sont presque-périodiques.
- Si $f(t)$ est une fonction presque-périodique et $g(t)$ une fonction uniformément continue alors $(g \circ f)(t)$ est une fonction presque-périodique.
- La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions presque-périodiques est presque-périodique.
- L'image d'une fonction presque-périodique à valeur dans un espace de dimension quelconque est relativement compacte.
- Soit $f(t)$ une fonction presque-périodique. Si $g(t)$ est une translatée limite de $f(t)$, alors $f(t)$ est aussi une translatée limite de $g(t)$. ($g(t)$ est une translatée limite de $f(t)$, s'il existe une suite réelle $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \sigma_k)$).

Proposition 1 (Principe de reconstitution à ∞ et $-\infty$). [15] *Il existe des suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $t_n \rightarrow \infty$ et $t'_n \rightarrow -\infty$ telles que $(f(t + t_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(t + t'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur \mathbb{R} vers $f(t)$.*

Nous allons considérer à présent des fonctions presque-périodiques avec un paramètre.

Définition 23 (Fonction presque-périodique). [63] *soit $f(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n . $f(t, x)$ est dite presque-périodique en t uniformément par rapport à $x \in D$, si pour tout $\epsilon > 0$ et tout compact F dans D , il existe un nombre positif $l(\epsilon, F)$ tel que tout interval de longueur $l(\epsilon, F)$ contient un τ pour lequel*

$$\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| \leq \epsilon, \quad (2.3)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in F$.

Un tel nombre τ dans (2.3) est dit ϵ -presque-période de $f(t, x)$.

Théorème 12. [63] *Soit $f(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$ une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à $x \in D$. Alors, pour toute suite de réels $(h'_k)_{k \in \mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(h'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une fonction continue $g(t, x)$ tel que :*

$$f(t + h_k, x) \rightarrow g(t, x),$$

uniformément sur $\mathbb{R} \times K$ quand $k \rightarrow \infty$, où K est un compact quelconque de D . De plus, $g(t, x)$ est aussi presque-périodique en t uniformément par rapport à $x \in D$.

Théorème 13. [63] *Soit $f(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$ une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à $x \in D$ et $\xi(t)$ une fonction presque-périodique telle que $\xi(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où K est un compact de D . Alors $f(t, \xi(t))$ est presque-périodique en t .*

Chapitre 3

Existence de solution presque-périodique pour un modèle proie-prédateur

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [43] parue dans le journal *Chaos, Solitons and Fractals* 2017.

3.1 Introduction

La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies a été pour longtemps le sujet dominant en écologie [3, 22, 23, 30–32, 48]. Au Chapitre 1 on a vu quelques modèles à deux populations en interactions et on s'est focalisé sur des exemples de *modèles proies-prédateurs*. De façon générale, tous les modèles proie-prédateur sont tirés du modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - g(x, y)y, \\ \dot{y} = eg(x, y) - dy. \end{cases} \quad (3.1)$$

où x et y représentent les densités des proies et des prédateurs à l'instant t , respectivement, $f(x)$ représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs, $g(x, y)$ le taux moyen de proies tuées par un prédateur (c-à-d la fonction réponse des prédateurs à la densité des proies). Le paramètre e représente l'efficacité des prédateurs à convertir les proies consommées en nouvelles progénitures. Le paramètre d représente le taux de mortalité du prédateur.

La fonction réponse $g(x, y)$ est supposée usuellement croissante avec la densité des proies, et décroissante (ou ne changeant pas) avec la densité des prédateurs, ceci peut-être classé comme suit :

- a) *proie-dépendant*, quand la densité des proies à elle seule détermine la réponse, on peut citer comme exemple les modèles de *Holling Type I, II et III* vu au Chapitre 1,

- b) *prédateur-dépendant*, quand les populations de la proie et du prédateur affectent la réponse. Un célèbre modèle de cette classe est celui de *DeAngelis et Beddington* où la fonction réponse peut accueillir les interférences (accrochages) entre les prédateurs [53] :

$$g(x, y) = \frac{ax}{bx + cy + 1},$$

- c) *ratio-dépendant*, quand le taux d'alimentation est déterminé par le rapport entre la densité des proies et la densité des prédateurs, comme exemple on citera le modèle de *Arditi et Ginzberg* [53] où la fonction réponse est donnée par :

$$g(x, y) = \frac{A(\frac{x}{y})}{1 + hA(\frac{x}{y})} = \frac{ax}{by + x}.$$

Un compte rendu historique de la pertinence biologique de la fonction réponse est disponible dans [48].

Naturellement, la périodicité de l'environnement et ses fluctuations ont une grande influence sur l'interaction entre les espèces de la proie et du prédateur, cette caractéristique conduit à proposer un changement dans le modèle proie-prédateur (3.1) visant l'inclusion de la fluctuation environnementale dans ce système d'équations différentielles. La littérature est abondante où les auteurs considèrent les modèles d'équations différentielles non-autonomes pour étudier les modèles avec des paramètres à variation saisonnière, voir par exemple [8, 13, 14, 16, 20, 26, 47, 52, 61, 62] et les références qui y figurent.

Récemment, dans [18], les auteurs ont proposé une nouvelle fonction réponse afin d'expliquer l'influence du changement des fluctuations des niveaux d'eau dans un lac artificiel sur les interactions proie-prédateur. En effet, les changements dans les niveaux des eaux des lacs, qu'ils soient naturels ou artificiels, sont des perturbations environnementales importantes pour les communautés de poissons [10, 11, 34, 59]. Dans [18], les auteurs examinent comment les variations saisonnières dans les niveaux des eaux affectent l'issue des interactions proie-prédateur dans le lac de Pareloup (1260 ha) dans le sud de la France. Le niveau d'eau du lac de Pareloup est régulé, principalement dans le but de générer de l'électricité. Le niveau d'eau est abaissé par l'augmentation de la libération d'eau du barrage en hiver, quand la consommation d'électricité est au plus haut. Au printemps la fonte des neiges remplit à nouveau le lac avec l'aide de la libération d'eau du barrage diminuée et le niveau d'eau est généralement gardé quasiment constant pendant tout l'été. La gestion de ce lac est d'une importance écologique considérable. Des variations significatives du niveau d'eau peuvent avoir un impact très fort sur la persistance de certaines espèces [34, 59].

Effectivement, quand le niveau d'eau est bas, pendant l'hiver, le contact entre le prédateur et la proie est plus fréquent, et la prédation croît. Inversement, quand le niveau d'eau est haut, pendant le printemps, il est plus difficile pour le prédateur de trouver une proie et

la prédation décroît. Dans le modèle proposé, les auteurs ont utilisé comme proie la population d'une espèce de poissons nommé le *Gardon* et comme prédateur une population d'espèce nommé le *Brochet*. Le Gardon et le Brochet sont les espèces les plus importantes dans ce lac. Il est supposé que la fonction d'accessibilité (ou taux de prédation) $r(t)$ pour la proie est continue et 1-périodique, c-à-d $r(t+1) = r(t)$, la valeur minimale r_1 est atteinte pendant le printemps et la valeur maximale r_2 est atteinte pendant l'hiver.

Un prédateur a besoin d'une quantité γ_B comme nourriture, mais il n'a accès qu'à une quantité qui dépend du niveau d'eau :

$$g(x, y) = \frac{r(t)x}{y + D},$$

où D représente les causes de mortalité autres que la prédation et le métabolisme. Si :

$$g(x, y) = \frac{r(t)x}{y + D} \geq \gamma_B,$$

alors le prédateur sera satisfait avec la quantité γ_B pour sa nourriture. Sinon, c-à-d, si :

$$g(x, y) = \frac{r(t)x}{y + D} \leq \gamma_B,$$

le prédateur se contentera de :

$$g(x, y) = \frac{r(t)x}{y + D}.$$

Par conséquent, la quantité de nourriture reçu par un prédateur est :

$$\min \left(\frac{r(t)x}{y + D}, \gamma_B \right).$$

Le modèle proie-prédateur non-autonome étudié par les auteurs de [18] est alors :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \min \left(\frac{r(t)G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B \right) B(t), \\ \dot{B}(t) = e_B \min \left(\frac{r(t)G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B \right) B(t) - m_B B(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

où $G(t)$ et $B(t)$ sont respectivement les densités de la proie et du prédateur, au temps t . γ_G et γ_B sont, respectivement, le taux de consommation maximal de la ressource par la proie et le prédateur. e_B est le taux de conversion, m_G , m_B sont respectivement, le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme de la proie et du prédateur. Par l'application du *théorème de continuation de Mawhin* de la *théorie du degré de coïncidence* ([25], voir aussi le chapitre 2), les auteurs ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence de solutions positives périodiques pour le système (3.2). Une telle solution décrit une situation d'équilibre cohérente avec la variabilité des conditions environnementales et telle que les deux populations survivent. Les trajectoires dans le plan de phases de

ces solutions du système non-autonome jouent le rôle des points d'équilibres du système autonome (voir [18, 44, 46] pour plus de détails).

L'existence de solutions périodiques et leurs stabilités pour une version à retard du système (3.2) est étudié dans [45]. Dans [46] les auteurs ont examiné une interaction plus complexe entre trois espèces vivantes dans le lac de Pareloup sous une succession saisonnière, les auteurs ont montré que le système est permanent sous des conditions appropriées et ont obtenu des conditions suffisantes qui assurent l'existence d'une solution positive 1-périodique. Plus récemment, dans [44], l'auteur a proposé un modèle proie-prédateur avec diffusion pour prédire l'influence de la variation du niveau d'eau et de la diffusion des espèces sur la persistance de solutions positives périodiques. Par les modèles proposés, il est possible de vérifier que le changement dans le niveau d'eau est directement associé avec le nombre d'espèces de poissons présentes dans le lac.

Dans le modèle (3.2) les auteurs de [18] ont supposé que la fonction d'accessibilité $r(t)$ est 1-périodique ce qui est une hypothèse raisonnable vu le caractère cyclique de l'environnement dans lequel se situe le système (3.2). Dans un cas plus général, quand on considère l'effet de facteurs environnementaux, la presque périodicité est parfois plus réaliste et plus générale que la périodicité. On suppose dans ce travail que le taux de prédation $r(t)$ est une fonction presque-périodique. On obtient des conditions suffisantes pour l'existence d'une unique solution positive globalement attractive presque-périodique pour le système (3.2).

Le contenu de ce chapitre est comme suit : Dans la section 3.2, on étudie en détail les dynamiques du cas non-autonome général du système (3.2), et on établit des conditions suffisantes pour la bornitude, la permanence, l'extinction du prédateur, et la stabilité asymptotique globale. Sous des conditions supplémentaires, on conclut que la solution périodique obtenue dans [18] est unique et est globalement asymptotiquement stable. La section 3.3 est pour le cas où le taux de prédation est presque-périodique. On fournit des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité asymptotique globale d'une unique solution positive presque-périodique pour le système (3.2). On termine par des simulations à la section 3.4 et des conclusions à la section 3.5.

3.2 Cas général

Dans cette section, on suppose que $r(t)$ est une fonction continue et bornée inférieurement et supérieurement par des constantes positive r_1 et r_2 respectivement. On va explorer les dynamiques du système proie-prédateur non-autonome (3.2) et présenter quelques résultats incluant l'invariance positive, la permanence, l'extinction du prédateur et la stabilité asymptotique globale.

3.2.1 Invariance positive et permanence

Pour plusieurs systèmes biologiques, la bornitude des solutions et la permanence sont importants. Ils donnent le sens biologique du système. On montre d'abord que le système (3.2) est bien posé dans le sens que pour n'importe quelle condition initiale (G_0, B_0) , il existe une unique solution pour le système (3.2), qui reste positive et bornée et donc existe globalement. Pour ceci on établit le résultat suivant :

Soit $h : (t, G, B) \longrightarrow \min(f(t, G, B), \gamma_B)$.

Lemme 2. *Si f est localement lipschitzienne, alors la fonction h est localement lipschitzienne.*

Démonstration. Il est facile de voir que :

$$\min(f(t, G, B), \gamma_B) = \frac{f(t, G, B) + \gamma_B - |f(t, G, B) - \gamma_B|}{2}.$$

La forme de h par rapport à f montre de toute évidence que si f est localement lipschitzienne, alors h est localement lipschitzienne. Ainsi, les propriétés d'existence locale et d'unicité sont obtenues pour le problème de Cauchy correspondant [29]. \square

L'espace des états de (3.2) reste dans l'octant positif :

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(G(t), B(t)) : G(t) \geq 0, B(t) \geq 0\}.$$

En effet l'ensemble \mathbb{R}_+^2 est positivement invariant vu que le champ de vecteur de (3.2) est dirigé vers l'intérieur sur la frontière $\partial\mathbb{R}_+^2$.

Maintenant, on va montrer la permanence du système (3.2). Tout d'abord on va réécrire le système (3.2) en une forme plus simple. On suppose que :

$$r_2 < \min\left(\frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0}, \frac{4m_G\gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2}\right), \quad (H_1)$$

Proposition 2. *Sous l'hypothèse (H_1) , on a : pour tout $t \geq 0$ $r_2 G(t) < \gamma_B(B(t) + D)$.*

Pour la preuve nous avons besoin seulement de l'hypothèse (H_1) .

Démonstration. Soit

$$\xi(t) = r_2 G(t) - \gamma_B(B(t) + D).$$

Par l'hypothèse (H_1) on a $\xi(0) < 0$. On va montrer, par contradiction, que $\xi(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$.

Supposons qu'il existe un t_0 tel que : $\xi(t_0) = 0$ et $\frac{d\xi}{dt}(t_0) \geq 0$.

$$\xi(t_0) = 0 \implies B(t_0) = \frac{r_2 G(t_0)}{\gamma_B} - D,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dt}(t_0) &= r_2 \frac{dG}{dt}(t_0) - \gamma_B \frac{dB}{dt}(t_0) \\
 &= -r(t_0)(r_2 + e_B \gamma_B) \frac{B(t_0)}{B(t_0) + D} G(t_0) + r_2(\gamma_G + m_B)G(t_0) - \gamma_B m_B D \\
 &\quad - r_2 m_G G^2(t_0) \\
 &\leq -r_2 m_G G^2(t_0) + r_2(\gamma_G + m_B)G(t_0) - \gamma_B m_B D.
 \end{aligned}$$

Ceci est un polynôme quadratique dont le discriminant est

$$\Delta = (r_2(\gamma_G + m_B))^2 - 4r_2 m_G \gamma_B m_B D.$$

L'hypothèse (H_1) implique que

$$\frac{d\xi}{dt}(t_0) < 0,$$

ce qui est une contradiction. Donc $\xi(t) < 0, \quad \forall t \geq 0$. □

Remarque 2. *L'hypothèse (H_1) signifie qu'il existe un seuil pour les niveaux d'eau bas qui dépend des paramètres biologiques du système (3.2). Au dessus de ce seuil, le nombre moyen de proies consommées par un prédateur par unité de temps est $\frac{r(t)G(t)}{B(t)+D}$.*

Par conséquent, le système (3.2) se réduit à la forme plus simple suivante :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \frac{r(t)G(t)}{B(t) + D} B(t), \\ \dot{B}(t) = e_B \frac{r(t)G(t)}{B(t) + D} B(t) - m_B B(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

Définition 24. *Le système (3.3) est dit permanent s'il existe des constantes positives $\delta_i > 0$ ($i = 1, 2$) telles que :*

$$\begin{aligned}
 \min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} G(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} B(t) \right\} &\geq \delta_1, \\
 \max \left\{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} G(t), \limsup_{t \rightarrow +\infty} B(t) \right\} &\leq \delta_2.
 \end{aligned}$$

Soit $\epsilon \geq 0$ suffisamment petit. Posons :

$$\begin{aligned}
 M_1^\epsilon &:= \frac{\gamma_G}{m_G} + \epsilon, & M_2^\epsilon &:= \frac{e_B r_2 M_1^\epsilon - m_B D}{m_B}, \\
 m_1^\epsilon &:= \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} - \epsilon, & m_2^\epsilon &:= \frac{e_B r_1 m_1^\epsilon - m_B D}{m_B},
 \end{aligned}$$

alors $M_i^\epsilon > m_i^\epsilon$ ($i = 1, 2$).

Théorème 14. *En plus de l'hypothèse (H_1) , supposons que le système (3.3) satisfait la condition suivante :*

$$\frac{m_B D}{e_B m_1^0} < r_1 < r_2 < \gamma_G. \quad (H_2)$$

Alors pour $\epsilon \geq 0$ suffisamment petit, tel que $m_i^\epsilon > 0$ ($i = 1, 2$), un ensemble $\Gamma\epsilon$ définit par :

$$\Gamma\epsilon = \{(G(t), B(t)) \mid m_1^\epsilon \leq G(t) \leq M_1^\epsilon, m_2^\epsilon \leq B(t) \leq M_2^\epsilon\}$$

est positivement invariant pour le système (3.3).

Démonstration. A travers cette démonstration, on utilise le fait que la solution de l'équation :

$$\dot{X}(t) = F(t, X)X(t)[A - X(t)], \quad A \neq 0$$

et donnée par :

$$X(t) = \frac{AX_0 \exp \left\{ \int_0^t AF(s, X(s)) ds \right\}}{X_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t AF(s, X(s)) ds \right\} - 1 \right] + A},$$

où $X_0 = X(0)$. Considérons la solution du système (3.3) avec $(G_0, B_0) \in \Gamma\epsilon$. De la première équation du système (3.3) et vu la positivité de la solution de (3.3), il vient que :

$$\dot{G}(t) \leq G(t) \left(\gamma_G - m_G G(t) \right) = m_G G(t) \left(M_1^0 - G(t) \right).$$

Un argument de comparaison standard [35] nous donne :

$$G(t) \leq \frac{M_1^0 G_0 \exp\{\gamma_G t\}}{G_0 [\exp\{\gamma_G t\} - 1] + M_1^0} \leq \frac{M_1^\epsilon G_0 \exp\{\gamma_G t\}}{G_0 [\exp\{\gamma_G t\} - 1] + M_1^\epsilon} \leq M_1^\epsilon, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

De la seconde équation du système (3.3) on a :

$$\dot{B}(t) \leq \frac{B(t)}{B(t) + D} \left(e_B r_2 M_1^\epsilon - m_B D - m_B B(t) \right) = \frac{m_B}{B(t) + D} B(t) \left(M_2^\epsilon - B(t) \right).$$

Toujours avec l'argument de comparaison standard, on obtient :

$$B(t) \leq \frac{M_2^\epsilon B_0 \exp \left\{ \int_0^t M_2^\epsilon \frac{m_B}{B(s) + D} ds \right\}}{B_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t M_2^\epsilon \frac{m_B}{B(s) + D} ds \right\} - 1 \right] + M_2^\epsilon} \leq M_2^\epsilon, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

De la première équation du système (3.3) on a :

$$\dot{G}(t) \geq G(t) \left(\gamma_G - r_2 - m_G G(t) \right) = m_G G(t) \left(m_1^0 - G(t) \right).$$

Puisque $G_0 \geq m_1^0$, de l'argument de comparaison standard, on a :

$$G(t) \geq \frac{m_1^0 G_0 \exp\{(\gamma_G - r_2)t\}}{G_0 [\exp\{(\gamma_G - r_2)t\} - 1] + m_1^0} \geq m_1^\epsilon, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

De la seconde équation du système (3.3) il vient que :

$$\dot{B}(t) \geq \frac{B(t)}{B(t) + D} \left(e_B r_1 m_1^\epsilon - m_B D - m_B B(t) \right) = \frac{m_B}{B(t) + D} B(t) \left(m_2^\epsilon - B(t) \right).$$

L'argument de comparaison standard nous donne :

$$B(t) \geq \frac{m_2^\epsilon B_0 \exp \left\{ \int_0^t m_2^\epsilon \frac{m_B}{B(s) + D} ds \right\}}{B_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t m_2^\epsilon \frac{m_B}{B(s) + D} ds \right\} - 1 \right] + m_2^\epsilon} \geq m_2^\epsilon, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

des équations (3.4)-(3.7), Γ_ϵ est positivement invariant pour le système (3.3) □

Avec des arguments similaires et le fait que ϵ est arbitraire on a le résultat suivant :

Corollaire 1. *Sous l'hypothèse (H_2) , le système (3.3) est permanent.*

Soit les notations suivantes : $m_i := m_i^0$, $M_i := M_i^0$ pour $i = 1, 2$ et $\Gamma := \Gamma_0$. Le théorème suivant donne une condition sous laquelle le système (3.3) est non-persistent.

Théorème 15. *Si $r_2 < \frac{m_B D}{e_B M_1}$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$, c'est à dire que le prédateur se dirige vers l'extinction.*

Démonstration. Si $r_2 < \frac{m_B D}{e_B M_1}$, alors par l'équation du prédateur dans le système (3.3), il est facile de voir que :

$$\dot{B}(t) \leq \left(\frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right) B(t),$$

donc :

$$B(t) \leq B_0 e^{\left(\frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right) t},$$

ce qui implique que : $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$. □

Remarque 3. *Le résultat au dessus montre que si le niveau d'eau est élevé durant l'année les prédateurs peuvent disparaître.*

Définition 25. *Le système (3.3) est dit globalement asymptotiquement stable si deux solutions quelconques $(G_1(t), B_1(t))^T$, $(G_2(t), B_2(t))^T$ de (3.3) avec des valeurs initiales positives, ont la propriété suivante :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|G_1(t) - G_2(t)| + |B_1(t) - B_2(t)|) = 0.$$

Pour étudier la stabilité asymptotique globale, on rappelle un lemme dû à Barbalat [5], qui est utilisé pour démontrer la stabilité asymptotique globale du système (3.3).

Lemme 3. *Soit h un réel et f une fonction non-négative définie sur $[h, +\infty)$ telle que f est intégrable sur $[h, +\infty)$ et est uniformément continue sur $[h, +\infty)$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Théorème 16. *En plus des hypothèses du théorème (14), supposons que :*

$$\mu_1 = m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} > 0, \quad (H_3)$$

$$\mu_2 = \frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} > 0, \quad (H_4)$$

alors le système (3.3) est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit $H_1(t) = (G_1(t), B_1(t))^T$ et $H_2(t) = (G_2(t), B_2(t))^T$ deux solutions quelconques du système (3.3). On obtient alors du corollaire (1), qu'il existe un $T > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} m_1 &\leq G_1(t) \leq M_1, & m_2 &\leq B_1(t) \leq M_2, \\ m_1 &\leq G_2(t) \leq M_1, & m_2 &\leq B_2(t) \leq M_2, \end{aligned}$$

pour tout $t \geq T$. On définit :

$$V_1(t) = |\ln G_1(t) - \ln G_2(t)|.$$

Le calcul de la dérivée supérieure de $V_1(t)$ le long des solutions de (3.3), nous donne :

$$\begin{aligned} D^+ V_1(t) &= \operatorname{sgn}(G_1(t) - G_2(t)) \left(\frac{\dot{G}_1(t)}{G_1(t)} - \frac{\dot{G}_2(t)}{G_2(t)} \right) \\ &= \operatorname{sgn}(G_1(t) - G_2(t)) \left(-m_G(G_1(t) - G_2(t)) - r(t) \left(\frac{B_1(t)}{B_1(t) + D} - \frac{B_2(t)}{B_2(t) + D} \right) \right) \\ &= -m_G |G_1(t) - G_2(t)| - r(t) D \operatorname{sgn}(G_1(t) - G_2(t)) \frac{B_1(t) - B_2(t)}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} \\ &\leq -m_G |G_1(t) - G_2(t)| + r(t) D \frac{|B_1(t) - B_2(t)|}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} \\ &\leq -m_G |G_1(t) - G_2(t)| + \frac{r_2}{D} |B_1(t) - B_2(t)|. \end{aligned}$$

De façon similaire, on définit :

$$V_2(t) = |\ln B_1(t) - \ln B_2(t)|.$$

Le calcul de la dérivée supérieure de $V_2(t)$ le long des solutions de (3.3), nous donne :

$$\begin{aligned}
 D^+V_2(t) &= \operatorname{sgn}(B_1(t) - B_2(t)) \left(\frac{\dot{B}_1(t)}{B_1(t)} - \frac{\dot{B}_2(t)}{B_2(t)} \right) \\
 &= \operatorname{sgn}(B_1(t) - B_2(t)) e_{Br}(t) \left(\frac{G_1(t)}{B_1(t) + D} - \frac{G_2(t)}{B_2(t) + D} \right) \\
 &= \operatorname{sgn}(B_1(t) - B_2(t)) e_{Br}(t) \left(\frac{D(G_1(t) - G_2(t))}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G_1(t)(B_1(t) - B_2(t))}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} + \frac{B_1(t)(G_1(t) - G_2(t))}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} \right) \\
 &\leq e_{Br}(t)((B_1(t) + D)) \frac{|G_1(t) - G_2(t)|}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} \\
 &\quad - e_{Br}(t) \frac{G_1(t)}{(B_1(t) + D)(B_2(t) + D)} |B_1(t) - B_2(t)| \\
 &\leq \frac{e_{Br}r_2(M_2 + D)}{D^2} |G_1(t) - G_2(t)| - \frac{e_{Br}r_1m_1}{(M_2 + D)^2} |B_1(t) - B_2(t)|.
 \end{aligned}$$

On définit maintenant une fonction de lyapunov $V(t)$ comme suit :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t).$$

Donc, pour $t \geq T$, on a, des calculs fait au dessus, que :

$$D^+V(t) \leq -\mu_1|G_1(t) - G_2(t)| - \mu_2|B_1(t) - B_2(t)|,$$

où μ_i , $i = 1, 2$ sont définit au théorème (16).

En intégrant l'inégalité précédente sur l'intervalle $[T, t]$, on obtient :

$$V(t) + \mu_1 \int_T^t |G_1(s) - G_2(s)| ds + \mu_2 \int_T^t |B_1(s) - B_2(s)| ds \leq V(T) < +\infty,$$

puisque V est une fonction positive on déduit que :

$$\mu_1 \int_T^t |G_1(s) - G_2(s)| ds + \mu_2 \int_T^t |B_1(s) - B_2(s)| ds \leq V(T) < +\infty \quad \forall t \geq T,$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 \int_T^t |G_1(s) - G_2(s)| ds &< +\infty, \\
 \int_T^t |B_1(s) - B_2(s)| ds &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $|G_1(t) - G_2(t)| \in \mathcal{L}^1([T, +\infty))$ et $|B_1(t) - B_2(t)| \in \mathcal{L}^1([T, +\infty))$. Par le système (3.3) et le corollaire (1), on a que $G_i, B_i, i = 1, 2$ et leurs dérivées sont bornées sur $[T, +\infty)$, ce qui implique que $|G_1(t) - G_2(t)|$ et $|B_1(t) - B_2(t)|$ sont uniformément continu sur $[T, +\infty)$. Par le lemme (3), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |G_1(t) - G_2(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |B_1(t) - B_2(t)| = 0.$$

Et ceci termine la démonstration. □

Corollaire 2. *Quand le taux de prédation dans le système (3.3) est périodique, alors, sous les conditions du théorème (1) dans [18]¹ et les hypothèses (H₂)–(H₄), on obtient l'unicité et la stabilité asymptotique globale de la solution positive périodique pour (3.3) prouvé dans [18].*

3.3 Existence de solution presque-périodique

Pour un rappel sur les fonctions presque-périodiques voir la Section 3 du Chapitre 2 ou bien les références suivantes [1, 12, 20, 27, 38, 39, 61–63].

On suppose à présent que le taux de prédation $r(t)$ est une fonction presque-périodique.

Théorème 17. *Supposons que toutes les conditions du Théorème (16) sont satisfaites, alors il existe une unique solution presque-périodique pour le système (3.3).*

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, on a besoin de la proposition suivante :

Notons par S l'ensemble de toutes les solutions $H(t) = (G(t), B(t))^T$ du système (3.3) sur \mathbb{R} satisfaisant $m_1 \leq G(t) \leq M_1$, $m_2 \leq B(t) \leq M_2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 3. $S \neq \emptyset$.

Démonstration. Des propriétés des fonctions presque-périodiques, il existe une suite $\{t_n\}$, $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ telle que

$$r(t + t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} r(t),$$

uniformément sur \mathbb{R} .

Soit $H(t)$ une solution de (3.3) satisfaisant $m_1 \leq G(t) \leq M_1$, $m_2 \leq B(t) \leq M_2$ for $t > T$. Il est clair que la suite $H(t + t_n)$ est uniformément bornée et équicontinue sur chaque sous-ensemble compacte de \mathbb{R} . Par conséquent par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-séquence $H(t + t_k)$ qui converge vers une fonction continue $p(t) = (p_1(t), p_2(t))^T$ quand $k \rightarrow \infty$ uniformément sur chaque sous-ensemble compacte de \mathbb{R} . Soit donné $T_1 \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $t_k + T_1 \geq T$ pour tout k . Pour $t \geq 0$, une intégration de (3.3) sur $[t_k + T_1, t + t_k + T_1]$ nous donne :

$$\begin{aligned} G(t + t_k + T_1) - G(t_k + T_1) &= \int_{t_k + T_1}^{t + t_k + T_1} \left(\gamma_G G(s) - m_G G^2(s) - \frac{r(s)G(s)}{B(s) + D} B(s) \right) ds \\ &= \int_{T_1}^{t + T_1} \left(\gamma_G G(s + t_k) - m_G G^2(s + t_k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r(s + t_k)G(s + t_k)}{B(s + t_k) + D} B(s + t_k) \right) ds, \end{aligned}$$

1. Les conditions du théorème (1) dans [18] sont (en utilisant nos notations) :

1) $r_2 < \frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0}$, 2) $r_2 < \frac{4m_B m_G D \gamma_B}{(\gamma_G + m_B)^2}$, 3) $0 < D < \frac{(\gamma_G - r_2)m_B r_1}{m_G e_B}$, avec $G_0 > 0, B_0 > 0$.

$$\begin{aligned}
 B(t + t_k + T_1) - B(t_k + T_1) &= \int_{t_k + T_1}^{t + t_k + T_1} \left(e_B \frac{r(s)G(s)}{B(s) + D} B(s) - m_B B(s) \right) ds \\
 &= \int_{T_1}^{t + T_1} \left(e_B \frac{r(s + t_k)G(s + t_k)}{B(s + t_k) + D} B(s + t_k) \right. \\
 &\quad \left. - m_B B(s + t_k) \right) ds,
 \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient :

$$\begin{aligned}
 p_1(t + T_1) - p_1(T_1) &= \int_{T_1}^{t + T_1} \left(\gamma_G p_1(s) - m_G p_1^2(s) - \frac{r(s)p_1(s)}{p_2(s) + D} p_2(s) \right) ds, \\
 p_2(t + T_1) - p_2(T_1) &= \int_{T_1}^{t + T_1} \left(e_B \frac{r(s)p_1(s)}{p_2(s) + D} p_2(s) - m_B p_2(s) \right) ds,
 \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$. Puisque $T_1 \in \mathbb{R}$ est arbitrairement donné, $p(t) = (p_1(t), p_2(t))^T$ est une solution du système (3.3) sur \mathbb{R} . Il est clair que $m_1 \leq p_1(t) \leq M_1$, $m_2 \leq p_2(t) \leq M_2$ pour $t \in \mathbb{R}$. Ainsi $p(t) \in S$. \square

Preuve du Théorème (17). de la Proposition (3), pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une solution positive bornée $(G^*(t), B^*(t))^T$ du système (3.3). Soit :

$$\begin{aligned}
 f_1(t, G, B) &= \gamma_G G - m_G G^2 - \frac{r(t)G}{B + D} B, \\
 f_2(t, G, B) &= e_B \frac{r(t)G}{B + D} B - m_B B.
 \end{aligned}$$

Remarquons que $f_i(t, G, B)$, $i = 1, 2$ sont presque-périodiques en t uniformément par rapport à $(G, B) \in \Gamma$. Soit $\{\alpha_k\}$ une suite réelle quelconque, alors il existe une sous-suite $\{\tau_k\} \subset \{\alpha_k\}$ telle que $\{f_1(t + \tau_k, G, B), f_2(t + \tau_k, G, B)\}$ converge uniformément sur $\mathbb{R} \times F$, où F est un compact quelconque de Γ . Si on peut montrer que la suite $\{G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k)\}$ converge uniformément sur \mathbb{R} , avec τ_k tendant vers un nombre fini ou $\pm\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$ alors $(G^*(t), B^*(t))^T$ est une solution presque-périodique.

Dans le cas où $\tau_k \rightarrow \tau \neq \pm\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$, notons que par le théorème de la moyenne on obtient :

$$\begin{aligned}
 |G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau)| &\leq |\dot{G}^*(t + \tau + \theta_k(\tau_k - \tau))| |\tau_k - \tau| \\
 &\leq \lambda |\tau_k - \tau|, \\
 |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau)| &\leq |\dot{B}^*(t + \tau + \tilde{\theta}_k(\tau_k - \tau))| |\tau_k - \tau| \\
 &\leq \lambda |\tau_k - \tau|,
 \end{aligned}$$

où $\theta_k, \tilde{\theta}_k \in (0, 1)$ et λ est une constante positive, ainsi $\{G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k)\}$ converge uniformément vers $\{G^*(t + \tau), B^*(t + \tau)\}$ sur \mathbb{R} .

Supposons $\tau_k \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow \infty$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $n_0(\epsilon)$ tel que si $n \geq k \geq n_0(\epsilon)$ alors :

$$|r(s + \tau_k) - r(s + \tau_n)| < \mu \frac{D^2}{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)} \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)},$$

et

$$\left(\frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(-\mu \tau_k) < \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)}, \quad (3.8)$$

avec

$$\mu = \min \left(m_1 \left(m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} \right), m_2 \left(\frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} \right) \right) > 0,$$

grâce aux conditions (H_3) – (H_4) .

Considérons une fonction $V(s)$ pour $s \in [t, t + \tau_k]$ définie par :

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s),$$

avec $V_1(s) = |\ln G^*(s) - \ln G^*(s + \tau_n - \tau_k)|$, $V_2(s) = |\ln B^*(s) - \ln B^*(s + \tau_n - \tau_k)|$.

Le théorème de la moyenne avec le fait que $(G^*(s), B^*(s))$ est bornée pour tout $s \in \mathbb{R}$ donne :

$$\frac{1}{M_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \leq V_1(s) \leq \frac{1}{m_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)|, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{M_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \leq V_2(s) \leq \frac{1}{m_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)|. \quad (3.10)$$

Calculons la dérivée supérieure de $V_1(s)$ le long de la solution du système (3.3), on a alors :

$$\begin{aligned} D^+ V_1(s) &= \operatorname{sgn}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left(\frac{\dot{G}^*(s)}{G^*(s)} - \frac{\dot{G}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{G^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right) \\ &= \operatorname{sgn}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left(-m_{G^*}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) - \frac{r(s)B^*(s)}{B^*(s) + D} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D} \right) \\ &\leq -m_G |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &\quad + \left| \frac{-(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))B^*(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k) - r(s)B^*(s)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D + r(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D - r(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -m_G |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\quad + \left| \frac{-(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))B^*(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k) - r(s)D(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))B^*(s + \tau_n - \tau_k)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right| \\
&= -m_{G^*} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \left| \frac{-r(s)D(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{B^*(s + \tau_n - \tau_k)(B^*(s) + D)(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right| \\
&\leq -m_G |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\quad + \frac{r(s)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\quad \quad + \frac{B^*(s + \tau_n - \tau_k)(B^*(s) + D)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} |r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\leq -m_{G^*} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \frac{r_2}{D} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\quad \quad + \frac{M_2(M_2 + D)}{D^2} |r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)|.
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée supérieure de $V_2(s)$ le long de la solution du système (3.3), on a alors :

$$\begin{aligned}
D^+V_2(s) &= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left(\frac{\dot{B}^*(s)}{B^*(s)} - \frac{\dot{B}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right) \\
&= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) e_B \left(\frac{r(s)G^*(s)}{B^*(s) + D} - \frac{r(s + \tau_n - \tau_k)G^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D} \right) \\
&= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) e_B \left(\frac{r(s)G^*(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k) + r(s)G^*(s)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad + \frac{-B^*(s)r(s + \tau_n - \tau_k)G^*(s + \tau_n - \tau_k) - Dr(s + \tau_n - \tau_k)G^*(s + \tau_n - \tau_k)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad \quad + \frac{-r(s)G^*(s)B^*(s) + r(s)G^*(s)B^*(s) - r(s)G^*(s + \tau_n - \tau_k)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad \quad \left. + \frac{+r(s)G^*(s + \tau_n - \tau_k)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) e_B \left(\frac{-r(s)G^*(s)(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad + \frac{r(s)D(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) - B^*(s)r(s + \tau_n - \tau_k)G^*(s + \tau_n - \tau_k)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad + \frac{DG^*(s + \tau_n - \tau_k)(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)) + r(s)G^*(s)B^*(s)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad \left. + \frac{+r(s)G^*(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s) - r(s)G^*(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right) \\
&= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) e_B \left(\frac{-r(s)G^*(s)(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad + \frac{r(s)B^*(s)(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) + r(s)D(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad + \frac{B^*(s)G^*(s + \tau_n - \tau_k)(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad \left. + \frac{DG^*(s + \tau_n - \tau_k)(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right) \\
&= \operatorname{sgn}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) e_B \left(\frac{-r(s)G^*(s)(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right. \\
&\quad + \frac{r(s)(B^*(s) + D)(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\
&\quad \left. + \frac{(B^*(s) + D)G^*(s + \tau_n - \tau_k)(r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k))}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right) \\
&\leq -\frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
&\quad + \frac{e_B M_1 (M_2 + D)}{D^2} |r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)|.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 D^+V(s) &= D^+V_1(s) + D^+V_2(s) \\
 &\leq - \left(m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} \right) |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &\quad - \left(\frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} \right) |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &\quad + \left(\frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} \right) |r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)|,
 \end{aligned}$$

si on pose $\sigma = s - \tau_k$ alors

$$|r(s) - r(s + \tau_n - \tau_k)| = |r(\sigma + \tau_k) - r(\sigma + \tau_n)| < \mu \frac{D^2}{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)} \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)},$$

pour tout $n \geq k \geq n_0(\epsilon)$,

ainsi, on obtient :

$$D^+V(s) \leq -\mu V(s) + \mu \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)}, \quad (3.11)$$

En intégrant (3.11) sur l'intervalle $[t, t + \tau_k]$ et en utilisant (3.8)–(3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 V(t + \tau_k) &\leq V(t) \exp(-\mu \tau_k) + \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)} \\
 &\leq \left(\frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(-\mu \tau_k) + \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)} < \frac{\epsilon}{\max(M_1, M_2)}.
 \end{aligned}$$

De (3.9) et (3.10) on a :

$$V(t + \tau_k) \geq \frac{1}{\max(M_1, M_2)} (|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)|),$$

ainsi

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \epsilon,$$

ce qui montre que que la suite $\{G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k)\}$ converge uniformément sur \mathbb{R} quand $\tau_k \rightarrow +\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$.

Quand $\tau_k \rightarrow -\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $n_1(\epsilon)$ tel que si $n \geq k \geq n_1(\epsilon)$ alors :

$$|r(s + \tau_k) - r(s + \tau_n)| < \mu \frac{D^2}{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)} \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)},$$

et

$$\left(\frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(\mu \tau_k) < \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)}, \quad (3.12)$$

avec μ définie comme avant. On peut supposer que $\tau_k < 0 \forall k$ et définissons $V(s)$ pour $s \in [t, t - \tau_k]$ par

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s),$$

avec $V_1(s) = |\ln G^*(s + 2\tau_k) - \ln G^*(s + \tau_n + \tau_k)|$, $V_2(s) = |\ln B^*(s + 2\tau_k) - \ln B^*(s + \tau_n + \tau_k)|$.

Le théorème de la moyenne avec le fait que $(G^*(s), B^*(s))$ est bornée pour tout $s \in \mathbb{R}$ donne :

$$\frac{1}{M_1} |G^*(s + 2\tau_k) - G^*(s + \tau_n + \tau_k)| \leq V_1(s) \leq \frac{1}{m_1} |G^*(s + 2\tau_k) - G^*(s + \tau_n + \tau_k)|, \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{M_2} |B^*(s + 2\tau_k) - B^*(s + \tau_n + \tau_k)| \leq V_2(s) \leq \frac{1}{m_2} |B^*(s + 2\tau_k) - B^*(s + \tau_n + \tau_k)|. \quad (3.14)$$

De façon similaire aux caculs au dessus, la dérivée supérieure de $V(s)$ le long de la solution du système (3.3) est donnée par :

$$\begin{aligned} D^+V(s) &= D^+V_1(s) + D^+V_2(s) \\ &\leq - \left(m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} \right) |G^*(s + 2\tau_k) - G^*(s + \tau_n + \tau_k)| \\ &\quad - \left(\frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} \right) |B^*(s + 2\tau_k) - B^*(s + \tau_n + \tau_k)| \\ &\quad + \left(\frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} \right) |r(s + 2\tau_k) - r(s + \tau_n + \tau_k)|, \end{aligned}$$

si on pose $\sigma = s + \tau_k$ alors

$$\begin{aligned} |r(s + 2\tau_k) - r(s + \tau_n + \tau_k)| &= |r(\sigma + \tau_k) - r(\sigma + \tau_n)| \\ &< \mu \frac{D^2}{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)} \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)}, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq k \geq n_1(\epsilon)$,

ainsi on obtient :

$$D^+V(s) \leq -\mu V(s) + \mu \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)}, \quad (3.15)$$

En intégrant (3.15) sur l'intervalle $[t, t - \tau_k]$ et en utilisant (3.12)–(3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} V(t - \tau_k) &\leq V(t) \exp(\mu \tau_k) + \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)} \\ &\leq \left(\frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(\mu \tau_k) + \frac{\epsilon}{2 \max(M_1, M_2)} < \frac{\epsilon}{\max(M_1, M_2)}. \end{aligned}$$

De (3.13) et (3.14) on a :

$$V(t - \tau_k) \geq \frac{1}{\max(M_1, M_2)} (|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)|),$$

ainsi :

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \epsilon,$$

ce qui montre que la suite $\{G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k)\}$ converge uniformément sur \mathbb{R} quand $\tau_k \rightarrow -\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$.

Ainsi la convergence uniforme de la suite $\{G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k)\}$ sur \mathbb{R} est déduite, donc la solution $(G^*(t), B^*(t))$ du système (3.3) est presque-périodique. \square

3.4 Simulations numériques

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = 25G(t) - 7G^2(t) - \min\left(\frac{(2 + 0.2(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))G(t)}{B(t) + 2}, 10\right)B(t), \\ \dot{B}(t) = 3.2 \min\left(\frac{(2 + 0.2(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))G(t)}{B(t) + 2}, 10\right)B(t) - 8B(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

avec trois conditions initiales différentes : $(G_0, B_0)^T = (3.5, 1)^T$, $(G_0, B_0)^T = (3.7, 1.5)^T$ and $(G_0, B_0)^T = (3.3, 0.2)^T$. Dans cet exemple on a : $r_1 = 1.6$, $r_2 = 2.4$, $m_1 = 3.229$, $M_1 = 3.571$, $m_2 = 0.066$, $M_2 = 1.429$.

On vérifie donc que :

$$\frac{4m_G\gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2} = 4.113,$$

et que :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0} &= 8.571 \text{ pour } (G_0, B_0)^T = (3.5, 1)^T, \\ \frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0} &= 9.459 \text{ pour } (G_0, B_0)^T = (3.7, 1.5)^T, \\ \frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0} &= 6.667 \text{ pour } (G_0, B_0)^T = (3.3, 0.2)^T, \end{aligned}$$

donc :

$$r_2 = 2.4 < \min\left(\frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0}, \frac{4m_G\gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2}\right) = 4.113,$$

d'où l'hypothèse (H_1) est vérifiée pour les trois conditions initiales.

$\gamma_G = 25 > r_2 = 2.4 > r_1 = 1.6 > \frac{m_B D}{e_B m_1} = 1.548$, d'où l'hypothèse (H_2) est vérifiée.

Enfin les hypothèses (H_3) – (H_4) sont réalisées : $\mu_1 = m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} = 0.583 > 0$,
 $\mu_2 = \frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} = 0.206 > 0$.

Par conséquent le système (3.16) admet une solution positive presque-périodique qui est globalement asymptotiquement stable.

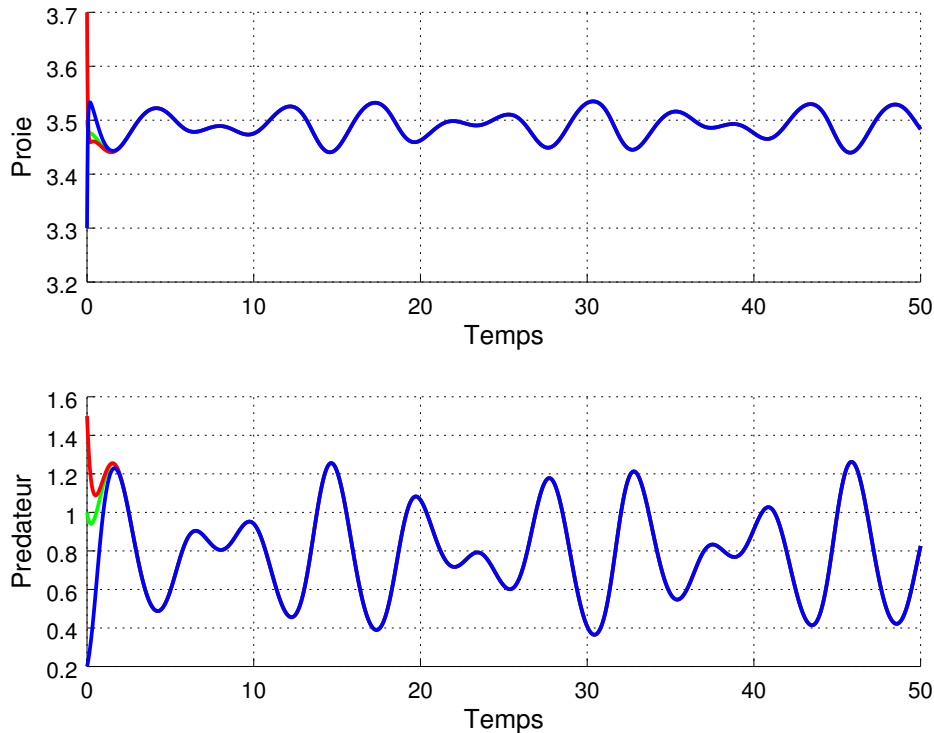


FIGURE 3.1 – Solution du système (3.16) avec trois conditions initiales $(G_0, B_0)^T = (3.5, 1)^T$, $(G_0, B_0)^T = (3.7, 1.5)^T$, $(G_0, B_0)^T = (3.3, 0.2)^T$

3.5 Conclusion

En conclusion, ce travail apporte quelques résultats à propos du comportement asymptotique d'un modèle incorporant des proies et des prédateurs dans un lac artificiel. L'analyse mathématique présentée dans ce travail montre que, selon les valeurs des coefficients, on peut faire des prédictions convenables à propos du comportement asymptotique de tout système proie-prédateur, y compris la permanence, la presque périodicité, la stabilité asymptotique globale et l'extinction des espèces. Notre étude a montré que la dynamique du système dépend fortement des fluctuations des niveaux de l'eau. Ces conclusions nous avertissent pour prendre des décisions opportunes pour protéger les espèces dans ce lac artificiel.

Chapitre 4

Existence de solutions périodiques pour un modèle proie-prédateur non-autonome

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [42] parue dans *Chaos, Solitons and Fractals* 2018.

4.1 Introduction

Dans notre travail qui suit, on revient à l'hypothèse : $r(t)$ périodique et on suppose aussi que les deux espèces sont sujettes à la pêche et on discute les effets du niveau d'eau et la pêche sur la survie des deux espèces. Ce facteur de pêche affecte le comportement de ces espèces et en particulier le *Brochet*. Ce prédateur est vulnérable [21, 50] et a besoin d'attention, c'est pourquoi les autorités française ont légiféré pour sa protection [2].

Par conséquent, on reformule le système proie-prédateur avec des termes de pêche multiples comme suit :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B\right) B(t) - h_1(t), \\ \dot{B}(t) = e_B \min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t) + D}, \gamma_B\right) B(t) - m_B B(t) - h_2(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont deux fonctions positives, continues et 1-périodiques et elles sont introduites en tant que termes de pêche. Tous les paramètres sont positifs. On peut voir que si $G(t) = 0, B(t) = 0$, alors $\dot{G}(t) < 0, \dot{B}(t) < 0$ (croissance négative), par conséquent on restreint l'étude du système (4.1) à la région $\Omega = \{(G(t), B(t)) : G(t) > 0, B(t) > 0\}$. Il est raisonnable de supposer que la pêche ne peut excéder un certain maximum :

$$0 \leq h_i(t) \leq h_i^M \quad i = 1, 2,$$

à tout moment, c'est une hypothèse qui est faite pour une convenance mathématique. Notre objectif principale dans ce chapitre est d'établir l'existence de solutions multiples

positives et 1-périodiques pour le système (4.1) en utilisant la méthode de la théorie du degré de coïncidence. Pour les travaux concernant l'existence de solutions périodiques multiples aux modèles de populations périodiques effectués en utilisant la théorie du degré de coïncidence, on fait référence à [17, 19, 33, 37, 38, 54, 58, 60, 64–67]. Notre étude montre que les conditions qui garantissent des solutions multiples positives et périodiques, dépendent du niveau d'eau du lac et des termes de pêche. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 4.2, en utilisant le théorème de continuation de Mawhin, on établit l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques pour le système (4.1). Dans la section 4.3, on illustre notre résultat avec un exemple. On termine ce chapitre avec une conclusion.

4.2 Multiplicité des solutions positives périodiques

Par commodité, on introduit quelques notations :

$$f^l = \min_{t \in [0,1]} f(t), \quad f^M = \max_{t \in [0,1]} f(t), \quad \bar{f} = \int_0^1 f(t) dt,$$

où f est une fonction continue 1-périodique.

On introduit trois hypothèses :

$$0 < r_2 < \min \left(\frac{\gamma_B(B_0 + D)}{G_0}, \frac{4m_G\gamma_B(m_B D - h_2^M)}{(\gamma_G + m_B)^2} \right), \quad (H_1^*)$$

$$0 < 2\sqrt{m_G h_1^M} < \gamma_G - r_2, \quad (H_2^*)$$

$$0 < m_B D + h_2^M + 2\sqrt{m_B h_2^M D} < e_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G}. \quad (H_3^*)$$

On introduit aussi les quatre nombres positives suivants :

$$l_{\pm} = \frac{1}{2m_G} \left(\gamma_G - r_2 \pm \sqrt{(\gamma_G - r_2)^2 - 4m_G h_1^M} \right),$$

$$w_{\pm} =$$

$$\frac{1}{2m_B} \left(e_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} - m_B D - h_2^M \pm \sqrt{\left(e_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} - m_B D - h_2^M \right)^2 - 4m_B h_2^M D} \right).$$

Notre objectif est d'établir des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins quatre solutions positive 1-périodique pour le système (4.1) en appliquant le théorème de continuation de Mawhin [25].

Théorème 18. *Sous les conditions (H_1^*) - (H_3^*) , le système (4.1) a au moins quatre solutions positives 1(annuelle)-périodiques*

Avant de démontrer le théorème (18), on réécrit le système (4.1) sous une forme plus simple :

Proposition 4. *Pout tout $t \geq 0$ on a $r_2 G(t) < \gamma_B(B(t) + D)$.*

Démonstration. Identique à celle donnée pour démontrer la proposition *Proposition1* du Chapitre 3 □

La conséquence de cette proposition est que le système (4.1) est réduit à la forme plus simple suivante :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \frac{r(t)G(t)}{B(t) + D} B(t) - h_1(t), \\ \dot{B}(t) = e_B \frac{r(t)G(t)}{B(t) + D} B(t) - m_B B(t) - h_2(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème (18). Il nous faut tout d'abord, adapter notre problème au cadre du théorème (8), chapitre 2.

Soit $G(t) = \exp\{u(t)\}$ et $B(t) = \exp\{v(t)\}$, alors le système (4.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \gamma_G - m_G e^{u(t)} - \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} - h_1(t) e^{-u(t)}, \\ \dot{v}(t) = e_B \frac{r(t) e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} - m_B - h_2(t) e^{-v(t)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Il est clair que si le système (4.3) a au moins quatre solutions 1-périodiques alors le système (4.2) a au moins quatre solutions positives 1-périodiques. Donc il suffit de montrer que le système (4.3) a au moins quatre solutions 1-périodiques.

Soit :

$$\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \left\{ (u(t), v(t))^T \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : (u(t+1), v(t+1))^T = (u(t), v(t))^T \right\},$$

et définissons

$$\left\| (u(t), v(t))^T \right\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)| + \max_{t \in [0,1]} |v(t)|.$$

Du coup \mathbb{X} et \mathbb{Y} munis tous les deux de cette norme qu'on vient de définir, sont des espaces de Banach.

Soit :

$$\begin{aligned} L : \text{Dom}L \cap \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{Y} \\ (u(t), v(t))^T &\mapsto L(u(t), v(t))^T = (\dot{u}(t), \dot{v}(t))^T, \end{aligned}$$

où $\text{Dom}L = \left\{ (u(t), v(t))^T \in \mathbb{X} : (u(t), v(t))^T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \right\}$,

et

$$N : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \mapsto N \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_G - m_G e^{u(t)} - \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} - h_1(t) e^{-u(t)} \\ e_B \frac{r(t) e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} - m_B - h_2(t) e^{-v(t)} \end{pmatrix}.$$

Définissons les deux projecteurs P et Q tels que :

$$\begin{aligned} P(u(t), v(t))^T &= (\bar{u}, \bar{v})^T, & (u(t), v(t))^T &\in \mathbb{X}, \\ Q(u(t), v(t))^T &= (\bar{u}, \bar{v})^T, & (u(t), v(t))^T &\in \mathbb{Y}. \end{aligned}$$

Il est claire que :

$$\text{Ker}L = \mathbb{R}^2, \quad \text{Im}L = \left\{ (u(t), v(t))^T \in \mathbb{Y} : (\bar{u}, \bar{v})^T = (0, 0)^T \right\},$$

et que $\dim \text{Ker}L = \text{codim} \text{Im}L = 2$.

Du moment que $\text{Im}L$ est fermé dans \mathbb{Y} , L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Il n'est pas difficile de montrer que les projecteurs P et Q sont continus tel que :

$$\text{Im}P = \text{Ker}L, \quad \text{Im}L = \text{Ker}Q = \text{Im}(I - Q).$$

En outre, l'inverse généralisé de L existe et est donné par :

$$\begin{aligned} K_P : \text{Im}L &\rightarrow \text{Dom}L \cap \text{Ker}P \\ K_P(u(t), v(t))^T &= \begin{pmatrix} \int_0^t u(s)ds - \int_0^1 \int_0^t u(s)dsdt \\ \int_0^t v(s)ds - \int_0^1 \int_0^t v(s)dsdt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$QN(u(t), v(t))^T = \begin{pmatrix} \int_0^1 N_1(t)dt \\ \int_0^1 N_2(t)dt \end{pmatrix},$$

et

$$K_P(I - Q)N(u(t), v(t))^T = \begin{pmatrix} \int_0^t N_1(s)ds - \int_0^1 \int_0^t N_1(s)dsdt - \left(t - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 N_1(t)dt \\ \int_0^t N_2(s)ds - \int_0^1 \int_0^t N_2(s)dsdt - \left(t - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 N_2(t)dt \end{pmatrix}.$$

Manifestement, QN et $K_P(I - Q)N$ sont continus. Pour tout ensemble borné $\Omega \subset \mathbb{X}$, il n'est pas difficile de montrer que $\overline{K_P(I - Q)N(\Omega)}$ est compact en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli. De plus, $QN(\overline{\Omega})$ est clairement borné. Ainsi, N est L -compact sur $\overline{\Omega}$ pour tout ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{X}$.

Maintenant pour l'application du théorème de continuation, nous devons trouver au moins quatre sous-ensembles ouverts bornés appropriés Ω_i , $i = 1, 2$ dans \mathbb{X} .

Considérons l'équation opérationnelle $L(u(t), v(t))^T = \lambda N(u(t), v(t))^T$, $\lambda \in (0, 1)$, on a donc :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \lambda \left(\gamma_G - m_G e^{u(t)} - \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} - h_1(t) e^{-u(t)} \right), \\ \dot{v}(t) = \lambda \left(e_B \frac{r(t) e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} - m_B - h_2(t) e^{-v(t)} \right). \end{cases} \quad (4.4)$$

Supposons que $(u(t), v(t))^T$ est une solution 1-périodique quelconque du système (4.4) pour un certain $\lambda \in (0, 1)$. En intégrant (4.4) des deux cotés sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient :

$$\gamma_G = \int_0^1 \left(m_G e^{u(t)} + \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} + h_1(t) e^{-u(t)} \right) dt, \quad (4.5)$$

$$m_B = \int_0^1 \left(e_B \frac{r(t) e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} - h_2(t) e^{-v(t)} \right) dt. \quad (4.6)$$

De (4.4)-(4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{u}(t)| dt &\leq \lambda \left(\int_0^1 \gamma_G dt + \int_0^1 \left(m_G e^{u(t)} + \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} + h_1(t) e^{-u(t)} \right) dt \right) \\ &< 2\gamma_G, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{v}(t)| dt &\leq \lambda \left(\int_0^1 \left| e_B \frac{r(t) e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} - h_2(t) e^{-v(t)} \right| dt + \int_0^1 m_B dt \right) \\ &< 2m_B. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vu que $(u, v)^T \in \mathbb{X}$, il existe $t_i, s_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, tels que

$$u(t_1) = \min_{t \in [0, 1]} u(t), \quad u(s_1) = \max_{t \in [0, 1]} u(t), \quad (4.9)$$

$$v(t_2) = \min_{t \in [0, 1]} v(t), \quad v(s_2) = \max_{t \in [0, 1]} v(t) \quad (4.10)$$

On obtient la relation suivante à partir de (4.5) en utilisant (4.9),

$$\begin{aligned} \gamma_G &= \int_0^1 \left(m_G e^{u(t)} + \frac{r(t)}{e^{v(t)} + D} e^{v(t)} + h_1(t) e^{-u(t)} \right) dt \\ &> \int_0^1 m_G e^{u(t)} dt \geq \int_0^1 m_G e^{u(t_1)} dt = m_G e^{u(t_1)}, \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$u(t_1) < \ln \left(\frac{\gamma_G}{m_G} \right), \quad (4.11)$$

et avec (4.7), on obtient :

$$u(t) \leq u(t_1) + \int_0^1 |\dot{u}(t)| dt < \ln \left(\frac{\gamma_G}{m_G} \right) + 2\gamma_G := \delta_1. \quad (4.12)$$

Toujours de (4.5) et (4.9), on a :

$$\int_0^1 h_1(t) e^{-u(t)} dt = \gamma_G - \int_0^1 m_G e^{u(t)} dt - \int_0^1 \frac{r(t) e^{v(t)}}{e^{v(t)} + D} dt < \gamma_G,$$

ainsi :

$$u(s_1) > \ln \left(\frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} \right),$$

ceci, avec (4.7), nous donne

$$u(t) \geq u(s_1) - \int_0^1 |\dot{u}(t)| dt > \ln \left(\frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} \right) - 2\gamma_G := \delta_2. \quad (4.13)$$

En multipliant la seconde équation de (4.4) par $e^{v(t)}$ et en l'intégrant sur $[0, 1]$ on obtient :

$$0 = \int_0^1 e_B \frac{r(t)e^{v(t)}}{e^{v(t)} + D} e^{u(t)} dt - \int_0^1 m_B e^{v(t)} dt - \int_0^1 h_2(t) dt, \quad (4.14)$$

alors :

$$\int_0^1 m_B e^{v(t)} dt < \int_0^1 e_B r(t) e^{u(t)} dt \leq e_B \bar{r} e^{\delta_1},$$

il s'en suit que :

$$m_B e^{v(t_2)} < e_B \bar{r} e^{\delta_1} = e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G} e^{2\gamma_G},$$

qui se réduit à :

$$v(t_2) < \ln \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G} \right). \quad (4.15)$$

Ceci, avec (4.8), donne :

$$v(t) \leq v(t_2) + \int_0^1 |\dot{v}(t)| dt < \ln \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G} \right) + 2m_B := \eta_1. \quad (4.16)$$

En intégrant la seconde équation du système (4.4) sur $[0, 1]$, on obtient :

$$0 = \int_0^1 e_B \frac{r(t)e^{u(t)}}{e^{v(t)} + D} dt - \int_0^1 m_B dt - \int_0^1 h_2(t) e^{-v(t)} dt,$$

ainsi :

$$\int_0^1 h_2(t) e^{-v(t)} dt < \frac{e_B}{D} \int_0^1 r(t) e^{u(t)} dt < \frac{e_B}{D} \int_0^1 r(t) e^{\delta_1} dt < \frac{e_B \gamma_G \bar{r}}{m_G D} e^{2\gamma_G},$$

et donc :

$$v(s_2) > \ln \left(\frac{\bar{h}_2 m_G D}{e_B \gamma_G \bar{r}} e^{-2\gamma_G} \right),$$

et avec (4.8), on obtient :

$$v(t) \geq v(s_2) - \int_0^1 |\dot{v}(t)| dt > \ln \left(\frac{\bar{h}_2 m_G D}{e_B \gamma_G \bar{r}} e^{-2\gamma_G} \right) - 2m_B := \eta_2. \quad (4.17)$$

La première équation du système (4.4) implique que :

$$m_G e^{2u(t_1)} - \gamma_G e^{u(t_1)} + r(t_1) \frac{e^{v(t_1)}}{e^{v(t_1)} + D} e^{u(t_1)} + h_1(t_1) = 0,$$

ce qui implique :

$$m_G e^{2u(t_1)} + (r_2 - \gamma_G) e^{u(t_1)} + h_1^M > 0,$$

ensuite, en utilisant la condition (H_2^*) , on obtient :

$$u(t_1) < \ln(l_-) \quad \text{ou} \quad u(t_1) > \ln(l_+). \quad (4.18)$$

De (4.4), un argument parallèle à (4.18) donne :

$$u(s_1) < \ln(l_-) \quad \text{ou} \quad u(s_1) > \ln(l_+). \quad (4.19)$$

En évaluant la seconde équation du système (4.4) à l'instant $t = t_2$ et en la multipliant par $-(e^{v(t_2)} + D)e^{v(t_2)}$ donne :

$$-e_B r(t_2) e^{u(t_2)} e^{v(t_2)} + m_B (e^{v(t_2)} + D) e^{v(t_2)} + h_2(t_2) (e^{v(t_2)} + D) = 0,$$

ce qui implique :

$$m_B e^{2v(t_2)} + \left(-e_B r(t_2) e^{u(t_2)} + m_B D + h_2^M \right) e^{v(t_2)} + h_2^M D \geq 0,$$

et donc :

$$m_B e^{2v(t_2)} + \left(-e_B r_1 e^{\delta_2} + m_B D + h_2^M \right) e^{v(t_2)} + h_2^M D > 0,$$

on obtient :

$$m_B e^{2v(t_2)} - \left(e_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} - m_B D - h_2^M \right) e^{v(t_2)} + h_2^M D > 0,$$

ensuite, en utilisant la condition (H_3^*) , on obtient

$$v(t_2) < \ln(w_-) \quad \text{ou} \quad v(t_2) > \ln(w_+). \quad (4.20)$$

de (4.4), par un argument parallèle à (4.20) on obtient :

$$v(s_2) < \ln(w_-) \quad \text{or} \quad v(s_2) > \ln(w_+). \quad (4.21)$$

De (4.12)–(4.19), on obtient pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\delta_2 < u(t) < \ln(l_-), \quad (4.22)$$

ou

$$\ln(l_+) < u(t) < \delta_1. \quad (4.23)$$

De (4.16)–(4.21), on obtient pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\eta_2 < v(t) < \ln(w_-), \quad (4.24)$$

ou

$$\ln(w_+) < v(t) < \eta_1. \quad (4.25)$$

Il est clair que $\delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2, \ln(l_{\pm}), \ln(w_{\pm})$ sont indépendants de λ . On définit :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ (u(t), v(t))^T \in X : u(t) \in (\delta_2, \ln(l_-)), v(t) \in (\eta_2, \ln(w_-)) \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ (u(t), v(t))^T \in X : u(t) \in (\delta_2, \ln(l_-)), v(t) \in (\ln(w_+), \eta_1) \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ (u(t), v(t))^T \in X : u(t) \in (\ln(l_+), \delta_1), v(t) \in (\eta_2, \ln(w_-)) \right\}, \\ \Omega_4 &= \left\{ (u(t), v(t))^T \in X : u(t) \in (\ln(l_+), \delta_1), v(t) \in (\ln(w_+), \eta_1) \right\}.\end{aligned}$$

Alors $\Omega_i, i = 1, 2, 3, 4$, sont des sous-ensembles ouverts et bornés de \mathbb{X} , $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$. Par conséquent la partie (1) du théorème (8) est satisfaite.

D'un autre côté, quand $(u, v)^T \in \partial\Omega_i \cap \text{Ker}L = \partial\Omega_i \cap \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3, 4$, alors $(u, v)^T$ est un vecteur constant de \mathbb{R}^2 , donc $QN(u, v)^T = (0, 0)^T$ implique :

$$\begin{cases} \gamma_G - m_G e^u - \frac{\bar{r}}{e^v + D} e^v - \bar{h}_1 e^{-u} = 0, \\ e_B \frac{\bar{r} e^u}{e^v + D} - m_B - \bar{h}_2 e^{-v} = 0. \end{cases}$$

De ceci et suivant les arguments de (4.22)–(4.25), on a

$$\delta_2 < u < \ln(l_-) \quad \text{or} \quad \ln(l_+) < u < \delta_1,$$

$$\eta_2 < v < \ln(w_-) \quad \text{or} \quad \ln(w_+) < v < \eta_1.$$

Ainsi $(u, v)^T \in \Omega_1 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_2 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_3 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_4 \cap \mathbb{R}^2$. Ceci est une contradiction avec le fait que $(u, v)^T \in \partial\Omega_i \cap \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3, 4$. D'où la condition 2 du théorème (8) est satisfaite.

Montrons à présent le dernier point du théorème (8). Pour cela, on définit l'application $\Phi : \text{Dom}L \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ telle que :

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, \mu) &= \\ &\mu \begin{pmatrix} \gamma_G - m_G e^u - \frac{\bar{r}}{e^v + D} e^v - \bar{h}_1 e^{-u} \\ e_B \frac{\bar{r} e^u}{e^v + D} - m_B - \bar{h}_2 e^{-v} \end{pmatrix} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_G - \tilde{m}_G e^u - \bar{h}_1 e^{-u} \\ \tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \tilde{m}_B e^{2v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où $\mu \in [0, 1]$ est un paramètre et $\tilde{\gamma}_G, \tilde{m}_G, \tilde{\tau}_B, \tilde{m}_B, \tilde{D}$ sont des constantes positives telles

que :

$$\begin{aligned}
 D &< \widetilde{D}, \quad m_B < \widetilde{m}_B, \quad m_G < \widetilde{m}_G, \quad \widetilde{\gamma}_G < \gamma_G, \quad \widetilde{\tau}_B < e_B, \\
 l_- &> \frac{\widetilde{\gamma}_G - \sqrt{\widetilde{\gamma}_G^2 - 4\widetilde{m}_G h_1^M}}{2\widetilde{m}_G}, \quad l_+ < \frac{\widetilde{\gamma}_G + \sqrt{\widetilde{\gamma}_G^2 - 4\widetilde{m}_G h_1^M}}{2\widetilde{m}_G}, \\
 w_- &> \frac{\widetilde{\tau}_B r_1 \frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} - \sqrt{\left(\widetilde{\tau}_B r_1 \frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G}\right)^2 - 4\widetilde{m}_B h_2^M \widetilde{D}}}{2\widetilde{m}_B}, \\
 w_+ &< \frac{\widetilde{\tau}_B r_1 \frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} + \sqrt{\left(\widetilde{\tau}_B r_1 \frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G}\right)^2 - 4\widetilde{m}_B h_2^M \widetilde{D}}}{2\widetilde{m}_B}.
 \end{aligned}$$

On va montrer que chaque solution $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$, du système algébrique suivant :

$$\begin{cases}
 \mu \left(\gamma_G - m_G e^u - \frac{\overline{r}}{e^v + D} e^v - \overline{h}_1 e^{-u} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\gamma}_G - \widetilde{m}_G e^u - \overline{h}_1 e^{-u} \right) = 0, \\
 \mu \left(e_B \frac{\overline{r} e^u}{e^v + D} - m_B - \overline{h}_2 e^{-v} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\tau}_B \overline{r} e^u e^v - \widetilde{m}_B e^{2v} - \overline{h}_2 \widetilde{D} \right) = 0,
 \end{cases} \quad (4.26)$$

satisfait : $(u, v)^T \in \Omega_1 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_2 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_3 \cap \mathbb{R}^2$ ou $(u, v)^T \in \Omega_4 \cap \mathbb{R}^2$.

De la première équation du système algébrique (4.26) on a :

Affirmation 1 $u < \ln \left(\frac{\gamma_G}{m_G} \right)$.

Sinon, si $u \geq \ln \left(\frac{\gamma_G}{m_G} \right)$, on a :

$$\begin{aligned}
 &\mu \left(\gamma_G - m_G e^u - \frac{\overline{r}}{e^v + D} e^v - \overline{h}_1 e^{-u} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\gamma}_G - \widetilde{m}_G e^u - \overline{h}_1 e^{-u} \right) \\
 &< \mu (\gamma_G - m_G e^u) + (1 - \mu) (\widetilde{\gamma}_G - \widetilde{m}_G e^u) \\
 &\leq \mu \left(\gamma_G - m_G \frac{\gamma_G}{m_G} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\gamma}_G - \widetilde{m}_G \frac{\gamma_G}{m_G} \right) < 0,
 \end{aligned}$$

et ceci est une contradiction, d'où $u < \ln \left(\frac{\gamma_G}{m_G} \right) \leq \delta_1$.

Affirmation 2 $u > \ln \left(\frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} \right)$.

Sinon, si $u \leq \ln \left(\frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} \right)$, on a :

$$\begin{aligned}
 &\mu \left(\gamma_G - m_G e^u - \frac{\overline{r}}{e^v + D} e^v - \overline{h}_1 e^{-u} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\gamma}_G - \widetilde{m}_G e^u - \overline{h}_1 e^{-u} \right) \\
 &< \mu (\gamma_G - \overline{h}_1 e^{-u}) + (1 - \mu) (\widetilde{\gamma}_G - \overline{h}_1 e^{-u}) \\
 &\leq \mu \left(\gamma_G - \overline{h}_1 \frac{\gamma_G}{\overline{h}_1} \right) + (1 - \mu) \left(\widetilde{\gamma}_G - \overline{h}_1 \frac{\gamma_G}{\overline{h}_1} \right) < 0,
 \end{aligned}$$

et ceci est une contradiction, d'où $u > \ln \left(\frac{\overline{h}_1}{\gamma_G} \right) \geq \delta_2$.

Affirmation 3 $u < \ln(l_-)$ ou $u > \ln(l_+)$.

Sinon, si $\ln(l_-) \leq u \leq \ln(l_+)$, on a alors, avec la condition (H_2^*) :

$$\begin{aligned} & \mu \left(\gamma_G - m_G e^u - \frac{\bar{r}}{e^v + D} e^v - \bar{h}_1 e^{-u} \right) + (1 - \mu) \left(\tilde{\gamma}_G - \tilde{m}_G e^u - \bar{h}_1 e^{-u} \right) \\ & > \mu \left(\gamma_G - m_G e^u - \bar{r} - \bar{h}_1 e^{-u} \right) + (1 - \mu) \left(\tilde{\gamma}_G - \tilde{m}_G e^u - \bar{h}_1 e^{-u} \right) \\ & \geq \mu e^{-u} \left(-m_G e^{2u} + (\gamma_G - r_2) e^u - h_1^M \right) + (1 - \mu) e^{-u} \left(-\tilde{m}_G e^{2u} + \tilde{\gamma}_G e^u - h_1^M \right) \\ & > (1 - \mu) e^{-u} \left(-\tilde{m}_G e^{2u} + \tilde{\gamma}_G e^u - h_1^M \right) > 0, \end{aligned}$$

et ceci est une contradiction, d'où $u < \ln(l_-)$ ou $u > \ln(l_+)$. Ainsi on a :

$$\delta_2 < u < \ln(l_-) \quad \text{ou} \quad \ln(l_+) < u < \delta_1.$$

Affirmation 4 $v < \ln \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G} \right)$.

Sinon, si $v \geq \ln \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G} \right)$, alors de la seconde équation du système algébrique (4.26), on a :

$$\begin{aligned} & \mu \left(e_B \frac{\bar{r} e^u}{e^v + D} - m_B - \bar{h}_2 e^{-v} \right) + (1 - \mu) \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \tilde{m}_B e^{2v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \right) \\ & < \mu \left(e_B \bar{r} \frac{e^{\delta_1}}{e^v} - m_B \right) + (1 - \mu) e^{2v} \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} \frac{e^{\delta_1}}{e^v} - \tilde{m}_B \right) \\ & \leq \mu \left(\frac{e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G} e^{2\gamma_G}}{e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G}} - m_B \right) + (1 - \mu) e^{2v} \left(\frac{\tilde{\tau}_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G} e^{2\gamma_G}}{e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G}} - \tilde{m}_B \right) < 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde, d'où $v < \ln \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G m_B} e^{2\gamma_G} \right) \leq \eta_1$.

Affirmation 5 $v > \ln \left(\frac{\bar{h}_2 m_G D}{e_B \gamma_G \bar{r}} e^{-2\gamma_G} \right)$.

Sinon, si $v \leq \ln \left(\frac{\bar{h}_2 m_G D}{e_B \gamma_G \bar{r}} e^{-2\gamma_G} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} & \mu \left(e_B \frac{\bar{r} e^u}{e^v + D} - m_B - \bar{h}_2 e^{-v} \right) + (1 - \mu) \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} e^u e^v - \tilde{m}_B e^{2v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \right) \\ & < \mu \left(e_B \bar{r} \frac{e^{\delta_1}}{D} - \bar{h}_2 e^{-v} \right) + (1 - \mu) \tilde{D} e^v \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} \frac{e^{\delta_1}}{D} - \bar{h}_2 e^{-v} \right) \\ & \leq \mu \left(e_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G D} e^{2\gamma_G} - \bar{h}_2 \frac{e_B \gamma_G \bar{r}}{\bar{h}_2 m_G D} e^{2\gamma_G} \right) \\ & \quad + (1 - \mu) \tilde{D} e^v \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} \frac{\gamma_G}{m_G \tilde{D}} e^{2\gamma_G} - \bar{h}_2 \frac{e_B \gamma_G \bar{r}}{\bar{h}_2 m_G D} e^{2\gamma_G} \right) < 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde, d'où $v > \ln \left(\frac{\bar{h}_2 m_G D}{e_B \gamma_G \bar{r}} e^{-2\gamma_G} \right) \geq \eta_2$.

Affirmation 6 $v < \ln(w_-)$ ou $v > \ln(w_+)$.

Sinon, si $\ln(w_-) \leq v \leq \ln(w_+)$, on a alors, avec la condition (H_3^*) :

$$\begin{aligned}
 & \mu \left(e_B \frac{\bar{r}e^u}{e^v + D} - m_B - \bar{h}_2 e^{-v} \right) + (1 - \mu) \left(\tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \tilde{m}_B e^{2v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \right) \\
 &= \frac{\mu e^{-v}}{(e^v + D)} \left(e_B \bar{r} e^{u+v} - m_B e^v (e^v + D) - \bar{h}_2 (e^v + D) \right) \\
 & \quad + (1 - \mu) \left(-\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \right) \\
 &= \frac{\mu e^{-v}}{(e^v + D)} \left(-m_B e^{2v} + (-m_B D + e_B \bar{r} e^u - \bar{h}_2) e^v - \bar{h}_2 D \right) \\
 & \quad + (1 - \mu) \left(-\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \bar{h}_2 \tilde{D} \right) \\
 &> \frac{\mu e^{-v}}{(e^v + D)} \left(-m_B e^{2v} + (-m_B D + e_B \bar{r} e^{\delta_2} - h_2^M) e^v - h_2^M D \right) \\
 & \quad + (1 - \mu) \left(-\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B r_1 e^{u+v} - h_2^M \tilde{D} \right) \\
 &= \frac{\mu e^{-v}}{(e^v + D)} \left(-m_B e^{2v} + (-m_B D + e_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} - h_2^M) e^v - h_2^M D \right) \\
 & \quad + (1 - \mu) \left(-\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B r_1 e^{u+v} - h_2^M \tilde{D} \right) \\
 &\geq (1 - \mu) \left(-\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B r_1 \frac{\bar{h}_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} e^v - h_2^M \tilde{D} \right) > 0,
 \end{aligned}$$

ce qui est absurde, d'où $v < \ln(w_-)$ ou $v > \ln(w_+)$. Ainsi on a :

$$\eta_2 < v < \ln(w_-) \quad \text{ou} \quad \ln(w_+) < v < \eta_1.$$

On notera que les équations du système suivant :

$$\begin{cases} -\tilde{m}_G e^{2u} + \tilde{\gamma}_G e^u - \bar{h}_1 = 0, \\ -\tilde{m}_B e^{2v} + \tilde{\tau}_B \bar{r} e^{u+v} - \bar{h}_2 \tilde{D} = 0, \end{cases} \tag{4.27}$$

ont quatre solutions distinctes :

$$\begin{aligned}
 (x_1^*, y_1^*) &= \left(\ln(x_+), \ln \left(\frac{\tilde{\tau}_B \bar{r} x_+ + \sqrt{(\tilde{\tau}_B \bar{r} x_+)^2 - 4\tilde{m}_B \bar{h}_2 \tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right) \right), \\
 (x_2^*, y_2^*) &= \left(\ln(x_+), \ln \left(\frac{\tilde{\tau}_B \bar{r} x_+ - \sqrt{(\tilde{\tau}_B \bar{r} x_+)^2 - 4\tilde{m}_B \bar{h}_2 \tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right) \right), \\
 (x_3^*, y_3^*) &= \left(\ln(x_-), \ln \left(\frac{\tilde{\tau}_B \bar{r} x_- + \sqrt{(\tilde{\tau}_B \bar{r} x_-)^2 - 4\tilde{m}_B \bar{h}_2 \tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right) \right), \\
 (x_4^*, y_4^*) &= \left(\ln(x_-), \ln \left(\frac{\tilde{\tau}_B \bar{r} x_- - \sqrt{(\tilde{\tau}_B \bar{r} x_-)^2 - 4\tilde{m}_B \bar{h}_2 \tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right) \right),
 \end{aligned}$$

où :

$$x_{\pm} = \frac{\tilde{\gamma}_G \pm \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1}}{2\tilde{m}_G}.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\delta_2 < \ln(x_-) < \ln(l_-),$$

$$\ln(l_+) < \ln(x_+) < \delta_1,$$

$$\eta_2 < \ln \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ - \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\bar{D}}}{2\tilde{m}_B} < \ln \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- - \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\bar{D}}}{2\tilde{m}_B} < \ln w_-,$$

$$\ln w_+ < \ln \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- + \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\bar{D}}}{2\tilde{m}_B} < \ln \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ + \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\bar{D}}}{2\tilde{m}_B} < \eta_1.$$

Par conséquent, $(x_1^*, y_1^*) \in \Omega_4$, $(x_2^*, y_2^*) \in \Omega_3$, $(x_3^*, y_3^*) \in \Omega_2$, $(x_4^*, y_4^*) \in \Omega_1$.

Le déterminant de la matrice jacobienne de la fonction $\Phi(u, v, 0)$ en une solution $(x^*, y^*) = (e^{x_i^*}, e^{y_i^*})$, $i = 1, 2, 3, 4$ est :

$$\begin{aligned} \det(J_{\Phi}(x^*, y^*)) &= \begin{vmatrix} -\tilde{m}_G x^* + \frac{\bar{h}_1}{x^*} & 0 \\ \tilde{\tau}_B\bar{r}x^*y^* & \tilde{\tau}_B\bar{r}x^*y^* - 2\tilde{m}_B(y^*)^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(-\tilde{m}_G x^* + \frac{\bar{h}_1}{x^*}\right) (\tilde{\tau}_B\bar{r}x^*y^* - 2\tilde{m}_B(y^*)^2) \\ &= \frac{y^*}{x^*} (\bar{h}_1 - \tilde{m}_G(x^*)^2) (\tilde{\tau}_B\bar{r}x^* - 2\tilde{m}_B y^*). \end{aligned}$$

De la première équation de (4.27) on a :

$$\tilde{m}_G(x^*)^2 = \tilde{\gamma}_G x^* - \bar{h}_1,$$

d'où :

$$\det(J_{\Phi}(x^*, y^*)) = \frac{y^*}{x^*} (2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G x^*) (\tilde{\tau}_B\bar{r}x^* - 2\tilde{m}_B y^*),$$

ainsi pour $i = 1, 2, 3, 4$, on a :

$$\begin{aligned} \deg\{JQN(u, v), \Omega_i \cap KerL, (0, 0)\} &= \deg\{QN(u, v), \Omega_i \cap KerL, (0, 0)\} \\ &= \deg\{\Phi(u, v, 1), \Omega_i \cap KerL, (0, 0)\} \\ &= \deg\{\Phi(u, v, 0), \Omega_i \cap KerL, (0, 0)\} \\ &= \text{sgn}(\det(J_{\Phi}(x^*, y^*))) \\ &= \text{sgn}(2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G x^*) (\tilde{\tau}_B\bar{r}x^* - 2\tilde{m}_B y^*). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 & \deg\{JQN(u, v), \Omega_4 \cap KerL, (0, 0)\} \\
 &= sgn \left[2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G \frac{\tilde{\gamma}_G + \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1}}{2\tilde{m}_G} \right] \left[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ - 2\tilde{m}_B \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ + \sqrt{[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+]^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right] \\
 &= sgn \left[4\bar{h}_1\tilde{m}_G - \tilde{\gamma}_G^2 - \tilde{\gamma}_G\sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \right] \left[-\sqrt{[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+]^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}} \right] \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \deg\{JQN(u, v), \Omega_3 \cap KerL, (0, 0)\} \\
 &= sgn \left[2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G \frac{\tilde{\gamma}_G + \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1}}{2\tilde{m}_G} \right] \left[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ - 2\tilde{m}_B \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+ - \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right] \\
 &= sgn \left[4\bar{h}_1\tilde{m}_G - \tilde{\gamma}_G^2 - \tilde{\gamma}_G\sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \right] \left[\sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_+)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}} \right] \\
 &= -1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \deg\{JQN(u, v), \Omega_2 \cap KerL, (0, 0)\} \\
 &= sgn \left[2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G \frac{\tilde{\gamma}_G - \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1}}{2\tilde{m}_G} \right] \left[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- - 2\tilde{m}_B \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- + \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right] \\
 &= sgn \left[4\bar{h}_1\tilde{m}_G - \tilde{\gamma}_G^2 + \tilde{\gamma}_G\sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \right] \left[-\sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}} \right] \\
 &= sgn\sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \left[\tilde{\gamma}_G - \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \right] \left[-\sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}} \right] \\
 &= -1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \deg\{JQN(u, v), \Omega_1 \cap KerL, (0, 0)\} \\
 &= sgn \left[2\bar{h}_1 - \tilde{\gamma}_G \frac{\tilde{\gamma}_G - \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1}}{2\tilde{m}_G} \right] \left[\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- - 2\tilde{m}_B \frac{\tilde{\tau}_B\bar{r}x_- - \sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}}}{2\tilde{m}_B} \right] \\
 &= sgn\sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \left[\tilde{\gamma}_G - \sqrt{\tilde{\gamma}_G^2 - 4\tilde{m}_G\bar{h}_1} \right] \left[\sqrt{(\tilde{\tau}_B\bar{r}x_-)^2 - 4\tilde{m}_B\bar{h}_2\tilde{D}} \right] \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Donc la condition 3 du théorème (8) est satisfaite. Pour résumer la discussion au dessus, on a montré que chaque $\Omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ satisfait les exigences du théorème (8). Ainsi le système (4.2) a au moins une solution positive 1-périodique dans chaque Ω_i . Ainsi, la preuve du théorème (18) est terminée. \square

4.3 Simulations numériques

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = 1.3G(t) - 0.02G^2(t) - \min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t)+3}, 170\right) B(t) - h_1(t), \\ \dot{B}(t) = 77 \min\left(\frac{r(t)G(t)}{B(t)+3}, 170\right) B(t) - 0.2B(t) - h_2(t), \end{cases} \quad (4.28)$$

avec $r(t) = 0.35 + 0.25 \cos(2\pi t)$, $h_1(t) = 5 + \cos(2\pi t)$ et $h_2(t) = 0.45 + 0.05 \cos(2\pi t)$.

On rappelle que : $G(t) = \exp\{u(t)\}$ et $B(t) = \exp\{v(t)\}$, on définit donc les ensembles $\Omega'_i, i = 1 \dots 4$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= \left\{ (G(t), B(t))^T ; G(t) \in (e^{\delta_2}, l_-), B(t) \in (e^{\eta_2}, w_-) \right\} \\ &=]0.28567, 15[\times]2.2382e-05, 2.5092[, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega'_2 &= \left\{ (G(t), B(t))^T ; G(t) \in (e^{\delta_2}, l_-), B(t) \in (w_+, e^{\eta_1}) \right\} \\ &=]0.28567, 15[\times]2.989, 175924.1965[, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega'_3 &= \left\{ (G(t), B(t))^T ; G(t) \in (l_+, e^{\delta_1}), B(t) \in (e^{\eta_2}, w_-) \right\} \\ &=]20, 875.143[\times]2.2382e-05, 2.5092[, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega'_4 &= \left\{ (G(t), B(t))^T ; G(t) \in (l_+, e^{\delta_1}), B(t) \in (w_+, e^{\eta_1}) \right\} \\ &=]20, 875.143[\times]2.989, 175924.1965[. \end{aligned}$$

On va utiliser les quatre conditions initiales suivantes : $(G(0), B(0)) = (4, 0.00016) \in \Omega'_1$, $(G(0), B(0)) = (20, 2365) \in \Omega'_2$, $(G(0), B(0)) = (50, 0.02) \in \Omega'_3$ et $(G(0), B(0)) = (95, 2365) \in \Omega'_4$.

Pour toutes ces conditions initiales on a :

$$\min\left(\frac{\gamma_B(B_0+D)}{G_0}, \frac{4m_G\gamma_B(m_B D - h_2^M)}{(\gamma_G + m_B)^2}\right) = 0.604,$$

et

$$r_2 = 0.6,$$

donc (H_1^*) est vérifiée pour les quatre conditions initiales.

Puisque :

$$\gamma_G - r_2 = 1.3 - 0.6 = 0.7,$$

$$\text{et } 2\sqrt{m_G h_1^M} = 2\sqrt{0.02 \cdot 6} = 0.692,$$

alors (H_2^*) est vérifiée aussi.

Enfin, vu que :

$$e_{Br_1} \frac{h_1}{\gamma_G} e^{-2\gamma_G} = 77 \cdot 0.1 \cdot \frac{5}{1.3} e^{-2 \cdot 1.3} = 2.199,$$

$$\text{et } m_B D + h_2^M + 2\sqrt{m_B h_2^M D} = 0.2 \cdot 3 + 0.5 + 2 \cdot \sqrt{0.2 \cdot 0.5 \cdot 3} = 2.195,$$

l'hypothèse (H_3^*) est bien vérifiée.

Ainsi par le *Théorème* (18), le système (4.28) a au moins quatre solutions positives 1-périodiques.

La simulation numérique, voir figure (4.1), nous permet de bien visualiser les quatre solutions périodiques dans chaque ensemble Ω'_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

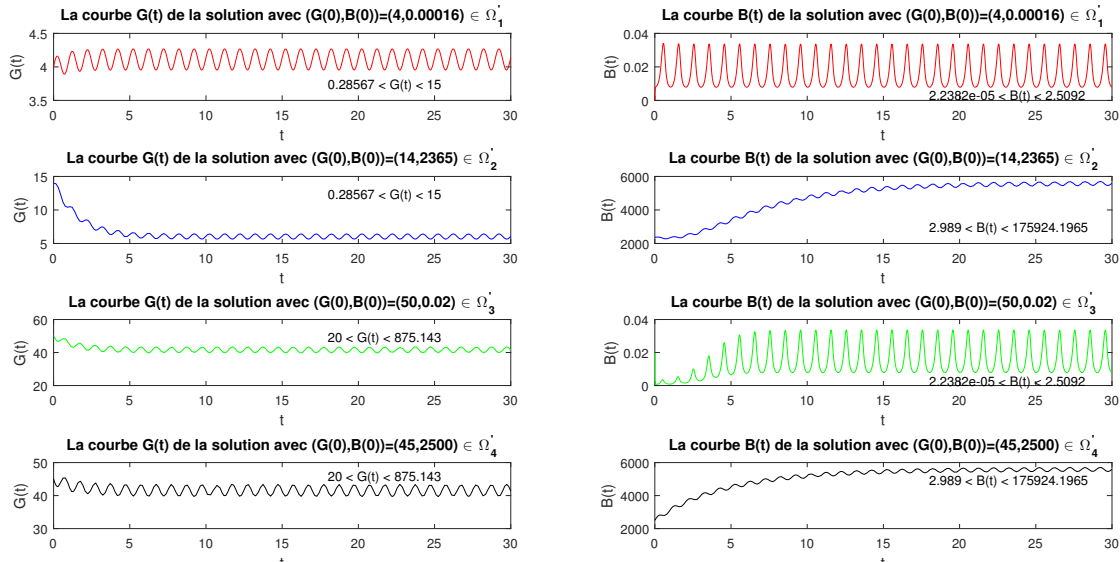


FIGURE 4.1 – Solutions avec différentes conditions initiales dans les ensembles correspondants Ω'_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

4.4 Conclusions

Beaucoup de modèles mathématiques ont été développés cette dernière décennie pour fournir des informations sur les interactions trophiques. L'objectif de ce chapitre est de se poser la question si le niveau d'eau dans un lac peut affecter les dynamiques d'un système proie-prédateur avec des termes de pêche. En utilisant le théorème de continuation de Gaines et Mawhin de la théorie de coïncidence, on donne des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques pour le système (4.1), ce qui signifie, d'un point de vue écologique, que la survie des deux espèces est dans quatre états possibles. Nos résultats confirment en outre le point de vue biologique : la pêche joue toujours un rôle important dans le comportement écologique des fluctuations des populations, en effet, quand les termes de pêches n'existent pas, le théorème 1 dans [18] n'assure l'existence d'au moins qu'une solution positive périodique. Ainsi nous pouvons conclure que les solutions positives périodiques supplémentaires sont attribuées aux termes de pêche.

La contribution majeur dans ce chapitre est comme suit : La survie des espèces dépend de deux facteurs. Le premier est biologique et concerne le taux de prédation r , effectivement, nous avons montré que si le taux de prédation est entre deux niveaux (c-à-d, si le niveau d'eau est entre deux seuils donnés par $(H_1^*)-(H_3^*)$), alors les deux populations de la proie et du prédateur, coexistent. Aussi, en utilisant le volume d'eau comme contrôle, il

est possible de garder les niveaux des populations à un état requis en utilisant le contrôle cité avant. Le second est lié à la pêche et les mécanismes pour la réduction de l'effort de pêche. Ce dernier peut être réduit en limitant le temps de pêche.

La stabilité locale est un problème incontournable. La discussion de la stabilité des solutions périodiques multiples en détail est laissée pour un travail ultérieur.

Conclusion générale et perspectives

On a présenté et étudié dans cette thèse deux modèles proie-prédateur non-autonomes (i) un modèle avec un taux de prédation variant de façon presque-périodique (ii) un modèle avec des termes de pêche sur la proie et le prédateur et avec un taux de prédation variant périodiquement

On a présenté quelques modèles de base en dynamique de populations allant du modèle de *Malthus* pour une population jusqu'aux modèles de *Holling I, II, III* pour deux populations. On a aussi rappelé des notions essentielles à l'analyse des modèles présentés dans les chapitres suivants.

Les contributions de cette thèse est comme suit :

Grâce à la théorie de Lyapunov on a montré la stabilité asymptotique globale de la solution périodique prouvée dans [18]. Dans une deuxième étape on a remplacé la périodicité du taux de prédation par la presque périodicité et on a établi grâce aux propriétés des fonctions presque-périodiques l'existence d'une unique solution presque-périodique pour le nouveau système (3.2).

Pour le deuxième modèle proie-prédateur avec des termes de pêche, l'analyse mathématique basée sur le théorème de continuation de Mawhin, nous a permis de déduire l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques pour le système (4.1). Une simulation numérique a été faite pour illustrer le résultat. Dans cette étude on a pu montrer que la survie des deux espèces dépend non seulement du taux de prédation, qui dépend du niveau d'eau du lac mais aussi des termes de pêche.

Dans le chapitre 4, on a montré l'existence, sous les conditions $H_1^* - H_3^*$, d'au moins quatre solutions périodiques pour le système (4.1). On a aussi émit la conjecture, d'après les remarques sur les simulations numériques, sur la stabilité d'une seule solution et l'instabilité des autres solutions, il serait alors intéressant de confirmer cette conjecture.

Il serait aussi très intéressant de considérer le cas du système avec des termes de pêche (4.1) et où le taux de prédation serait presque-périodique.

Bibliographie

- [1] L. AMERIO et G. PROUSE – *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*, Springer Science+Business Media, New York, 1971.
- [2] ARTICLE R436-7 DU CODE DE L'ENVIRONNEMENT – « Décret numéro 2010-243 du 10 mars 2010 amendant les dates d'ouverture et de fermeture de la pêche dans les eaux de 1^{ère} catégorie et la pêche du Brochet dans les eaux de 2^{ème} catégorie. », Journal Officiel de la République Française.
- [3] P. AUGER, C. LETT et J. C. PGGIALE – *Modélisation Mathématique en Écologie, cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2015.
- [4] N. BACAËR – *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, London, 2011.
- [5] I. BARBALAT – « Systèmes d'équations différentielles d'oscillations nonlinéaires », *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.* (1959), p. 267–270.
- [6] H. BOHR – *Almost Periodic Functions*, Chelsea publishing company, New York, 1947.
- [7] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle ; Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [8] G. J. BUTLER et H. I. FREEDMAN – « Periodic solutions of a predator-prey system with periodic coefficients », *Math. Biosci.* (1981), no. 55, p. 27–38.
- [9] J. CHARLES, M. MBEKHTA et H. QUEFFÉLEC – *Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs, Exercices Corrigés*, Dunod, Paris, 2010.
- [10] H. COOPS, M. BEKLIOGLU et T. L. CRISMAN – « The role of water-level fluctuations in shallow lake ecosystems workshop conclusions », *Hydrobiologia* (2003), no. 506, p. 23–27.
- [11] H. COOPS et S. H. HOSPER – « Water-level management as a tool for the restoration of shallow lakes in the netherlands », *Lake and Reservoir Management* (2002), no. 18, p. 293–298.
- [12] C. CORDUNEANU – *Almost Periodic Functions*, Chelsea publishing company, New York, 1989.
- [13] J. CUI – « Permanence of predator-prey system with periodic coefficients », *Math. Comput. Model.* (2005), no. 42, p. 87–98.

-
- [14] J. M. CUSHING – « Periodic time-dependent predator-prey systems », *SIAM J. Appl. Math.* (1977), no. 32, p. 82–95.
- [15] E. A. DADS – « Contribution à l'existence de solutions pseudo presque périodiques de certaines classes d'équations fonctionnelles », Thèse, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Morocco, 1984.
- [16] M. FAN, Q. WANG et X. ZOU – « Dynamics of non-autonomous ratio-dependent predator-prey system », *Proceedings of the royal society of Edinburgh*, vol. 133A, 2003, p. 97–118.
- [17] H. FANG – « Multiple positive periodic solutions for a food-limited two-species ratio-dependent predator-prey patch system with delay and harvesting », *Electron J. Different. Eq.* (2012), no. 150, p. 1–13.
- [18] N. C. FELLAH, S. BOUGUIMA et A. MOUSSAOUI – « The effect of water level in a prey-predator interactions : A nonlinear analysis study », *Chaos, Solitons & Fractals* (2012), no. 45, p. 205–212.
- [19] J. FENG et S. CHEN – « Four periodic solutions of a generalized delayed predator-prey system », *Appl. Math. Comput.* (2006), no. 181, p. 932–939.
- [20] A. FINK – *Almost Periodic Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [21] U. FRANCE, MNHN et S. . ONEMA – *La Liste rouge des espèces menacées en France, Chapitre Poissons d'eau douce de France métropolitaine*, Paris, France, 2010.
- [22] H. I. FREEDMAN – *Deterministic mathematical models in population ecology*, Marcel Dekker, New York, 1980.
- [23] H. I. FREEDMAN et G. S. K. WOLKOWICZ – « Predator-prey systems with group defence : the paradox of enrichment revisited », *Bull. Math. Bio.* (1986), no. 27, p. 346–360.
- [24] Y. FÉLIX et D. TANRÉ – *Topologie Algébrique, Cours et Exercices Corrigés*, Dunod, Paris, 2010.
- [25] R. E. GAINES et J. L. MAWHIN – *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1977.
- [26] S. GAKKHAR et B. SINGH – « Dynamics of modified leslie-gower-type prey-predator model with seasonally varying parameters », *Chaos Solitons & Fractals* (2006), no. 27, p. 1239–1255.
- [27] K. GOPALSAMY – « Global asymptotic stability in an almost periodic lotka-volterra system », *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* (1986), no. 27, p. 346–360.
- [28] S. GOURMELEN et H. WADI – *Équations différentielles, Théorie, algorithmes et modèles*, Hermann, Paris, 2009.

-
- [29] J. K. HALE – *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1980.
- [30] A. HASTINGS – « Global stability of two species systems », *J. Math. Biol.* (1978), no. 5, p. 399–403.
- [31] X. Z. HE – « Stability and delays in a predator-prey system », *J. Math. Anal. Appl.* (1996), no. 198, p. 355–370.
- [32] C. S. HOLLING – « The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly », *Can. Entomol.* (1959), no. 91, p. 293–320.
- [33] D. HU et Z. ZHANG – « Four positive periodic solutions to a lotka-volterra cooperative system with harvesting terms », *Nonlinear Anal. RWA* (2010), no. 11, p. 1115–1121.
- [34] U. KAHL, S. HILSMANN, R. J. RADKE et J. BENNDORF – « The impact of water level fluctuations on the year class strength of roach : Implications for fish stock management », *Limnologica* (2008), no. 38, p. 258–268.
- [35] H. K. KHALIL – *Nonlinear Systems, Third Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002.
- [36] J. LERAY et J. SCHAUDER – « Topologie et équations fonctionnelles », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (1934), no. 51, p. 45–78.
- [37] Z. LI, K. ZHAO et Y. LI – « Multiple positive periodic solutions for a non-autonomous stage-structured predator-prey system with harvesting terms », *Commun Nonlinear Sci. Num. Simulat.* (2010), no. 15, p. 2140–2148.
- [38] X. LIN et F. CHEN – « Almost periodic solution for a Volterra model with mutual interference and Beddington-DeAngelis functional response », *Applied Mathematics and Computation* (2009), no. 214, p. 548–556.
- [39] J. LIU, G. N'GUÉRÉKATA et N. V. MINH – *Topics on stability and periodicity in abstract differential equations*, vol. 6, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224, 2008.
- [40] A. J. LOTKA – « Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 6, 1920, p. 410–415.
- [41] T. R. MALTHUS – *An Essay on the Principle of Population*, J. Johnson, St. Paul's Church-yard London, 1798.
- [42] M. A. MENOUEUR et A. MOUSSAOUI – « Effects of consecutive water level fluctuations and harvesting on predator-prey interactions », *Chaos Solitons & Fractals* (2016), no. 91, p. 434–442.

-
- [43] M. A. MENOUEUR, A. MOUSSAOUI et E. AÏT DADS – « Existence and global asymptotic stability of positive almost periodic solution for a predator-prey system in an artificial lake », *Chaos, Solitons and Fractals* (2017), no. 103, p. 271–278.
- [44] A. MOUSSAOUI – « A reaction-diffusion equation modelling the effect of fluctuating water levels on prey-predator interactions », *Appl. Math. Comput.* (2015), no. 268, p. 1110–1121.
- [45] A. MOUSSAOUI, S. BASSAÏD et E. A. DADS – « The impact of water level fluctuations on a delayed prey-predator model », *Nonlinear Analysis : Real World Applications* (2015), no. 21, p. 170–184.
- [46] A. MOUSSAOUI et S. M. BOUGUIMA – « A prey-predator interaction under fluctuating level water », *Math. Methods Appl. Sci.* (2014), no. 38, p. 123–137.
- [47] — , « Seasonal influences on a prey-predator model », *J. Appl. Math. Comput.* (2016), no. 50, p. 39–57.
- [48] J. D. MURRAY – *Mathematical Biology I. An introduction, Third Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [49] D. O'REGAN, Y. J. CHO et Y.-Q. CHEN – *Topological Degree Theory and Applications*, vol. 10, Taylor & Francis Group, LLC, 6000 Broken Sound Parkway NY, Suite 300, 2006.
- [50] C. RICHEUX, J. ARIAS-GONZALEZ et J. TOURENQ – « A study of the diet of roach (*rutilus rutilus* (l.)) in the lake of pareloup (massif central, france) », *Annls Limnol.* (1992), no. 28, p. 245–252.
- [51] S. ROMAN – *Advanced Linear Algebra, Third Edition*, Springer Science+Business Media LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2008.
- [52] M. SCHEFFER, S. RINALDI, S. MORATORI et Y. KUZNETSOV – « Seasonality and chaos in a plankton-fish model », *Theor. Pop. Biol.* (1993), no. 43, p. 159–183.
- [53] G. T. SKALSKI et J. F. GILLIAM – « Functional response with predator interface : Viable alternatives to the holling type ii model », *Ecology* (2001), no. 11, p. 3083–3092.
- [54] D. S. TIAN et X. W. ZENG – « Existence of at least two periodic solutions of a ratio-dependent predator-prey model with exploited term », *Acta Mathematicae Applicatae sinica, English Ser* (2005), no. 21, p. 489–498.
- [55] P. F. VERHULST – « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement », *Correspondance mathématique et physique* (1838), no. 10, p. 113–121.
- [56] V. VOLTERRA – « Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi », *Memorie della R. Accademia dei Lincei* **S.VI** (1926), no. II, p. 31–113.
- [57] C. WAGSCHAL – *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, Paris, 2012.

- [58] L. L. WANG et Y. H. FAN – « Multiple periodic solutions for a non-autonomous delayed predator-prey model with harvesting terms », *Appl. Math. Comput.* (2011), no. 217, p. 9552–9561.
- [59] J. H. WLOSINSKI et E. R. KOLJORD – *Effects of water levels on ecosystems, an annotated bibliography, long term resource monitoring program*, 1996, 96-T007, Technical report.
- [60] Y. XIA, J. CAO et S. CHENG – « Multiple periodic solutions of a delayed stage-structured predator-prey model with non-monotone functional responses », *Appl. Math. Model.* (2007), no. 31, p. 1947–1959.
- [61] Y. XIA, F. CHEN, A. CHEN et J. CAO – « Existence and global attractivity of an almost periodic ecological model », *Appl. Math. Comput.* (2004), no. 157, p. 449–475.
- [62] Y. XIE et X. LIE – « Almost periodic solutions of single population model with hereditary effects », *Appl. Math. Comput.* (2008), no. 203, p. 690–697.
- [63] T. YOSHIZAWA – *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [64] T. T. Z. ZHANG – « Multiple positive periodic solutions fro a generalized predator-prey system with exploited terms », *Nonlinear Anal. Real World Appl.* (2007), no. 9, p. 26–39.
- [65] Z. ZHANG et Z. HOU – « Existence of four positive periodic solutions for a ratio-dependent predator-prey system with multiple exploited (or harvesting) terms », *Nonlinear Anal.* (2010), no. 11, p. 1560–1571.
- [66] K. ZHAO et Y. LI – « Four positive periodic solutions to two species parasitical system with harvesting terms », *Math. Appl.* (2010), no. 59, p. 2703–2710.
- [67] K. ZHAO et Y. YE – « Four positive periodic solutions to a periodic lotka-volterra predator-prey system with harvesting terms », *Nonlinear Anal. RWA* (2010), no. 11, p. 2448–2455.

Résumé

Dans cette thèse on étudie les interactions proie-prédateur pour deux espèces de poissons représentées par un système de deux équations différentielles ordinaires. On étudie deux versions du système : dans la première, un paramètre du système varie de façon presque-périodique. On démontre l'existence d'une solution presque-périodique grâce aux propriétés des fonctions presque-périodiques et aussi sa stabilité globale grâce à la théorie de Lyapunov. Dans la seconde version, le précédent paramètre varie cette fois-ci périodiquement et des termes de pêche sont présent dans les équations. On démontre l'existence d'au moins quatre solutions positives périodiques pour ce deuxième système grâce au théorème de continuation de Mawhin de la théorie du degré de coïncidence.

Mots clés : système proie-prédateur, équations différentielles ordinaires, effort de pêche, solutions périodiques, théorème de continuation, degré de coïncidence, fonctions presque-périodiques, solution globalement stable, Lyapunov.

Abstract

In this thesis we study the predator-prey interactions for two fish species represented by a system of two ordinary differential equations. We study two version of the system : In the first one, a parameter of the system varies almost periodically. We establish the existence of an almost periodic solution using the properties of almost periodic functions and also its global stability with the theory of Lyapunov. In the second one the previous parameter varies this time periodically and fishing terms are present in the equations. We establish the existence of at least four positive periodic solutions for this second system using the continuation theorem of Mawhin of the coincidence degree theory.

Key words : predator-prey system, ordinary differential equations, fishing effort, periodic solutions, continuation theorem, coincidence degree, almost periodic functions, globally stable solution, Lyapunov.

ملخص

في هذه الأطروحة نقوم بدراسة التفاعلات مفترس - فريسة لنوعين من الأسماك ممثلة بنظام معادلتين تفاضليتين عاديتين. نقوم بدراسة نسختين من هذا النظام : في الأولى، يوجد في النظام معامل يتغير بطريقة تقريبا دورية. نبرهن على وجود حل تقريبا دوري لهذه النسخة من النظام باستعمال خصائص الدوال تقريبا الدورية إضافة إلى استقراره الشامل عن طريق نظرية ليابونوف. في النسخة الثانية، المعامل السابق يتغير هذه المرة بطريقة دورية بالإضافة إلى وجود عبارات صيد في المعادلات. نبرهن وجود على الأقل أربع حلول موجبة دورية لهذه النسخة الثانية من النظام باستعمال مبرهنة الإستمرارية لماوهين في نظرية درجة التطابق.

كلمات مفتاحية : نظام مفترس - فريسة، معادلات تفاضلية عادية، جهد صيد، حلول دورية، مبرهنة الإستمرارية، نظرية درجة التطابق، دوال تقريبا دورية، حل مستقر شموليا، ليابونوف.