REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Equations Différentielles

Par :

Mme DIB Fatima

Sur le thème

Méthodes Variationnelles pour Equations Différentielles

Soutenue publiquement le 13/05/2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mme Djamila Hadj-Slimane	Professeur	Université de Tlemcen	Présidente
Mr Mustapha Yebdri	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mme Naima Daoudi-Merzagui	Professeur	Université de Tlemcen	Co-Directeur de thèse
Mr Sidi Mohammed Bouguima	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur
Mr Abdelkader Lakmeche	Professeur	Université de S.B.Abbes	Examinateur
Mr Rachid Regbaoui	M. C. A	Université de Brest	Examinateur
Mr Abdelkader Boucherif	Professeur		Invité
Mr. Mohammed Hellal	M. C. A	Université de S.B.Abbes	Invité

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (LSDA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Département de Mathématiques
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen.
fatimadib1967@yahoo.fr

A la mémoire de mon cher père
Mohammed et mes trois chères
soeurs Zahra, Houria et Nadia.

A ma chère mère Hadja Fatma.

A la prunelle de mes yeux
ma chère petite fille Lina.

Remerciements

.

Tout d'abord, je remercie Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et la force afin de parfaire ce travail et le mener à terme.

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse, Mr le Professeur Mustapha Yebdri, de m'avoir proposé ce sujet intéressant. Je lui exprime ma gratitude pour sa patience et pour le temps qu il m'a consacré. Je le remercie pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide scientifique ou autre, car il n'a jamais hésité pour répondre à mes sollicitations.

Ma gratitude va aussi à mon co-directeur de thèse, M^{me} la Professeure Naima Merzagui, qui par sa compétence, son regard critique et ses conseils, m'a apporté un grand appui dans l'avancement de mes travaux de recherche. J'ai beaucoup appris à son contact. Je la remercie aussi pour ses encouragements et son soutien moral. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier M^{me} la Professeure **D. Hadj-Slimane**, pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Mr. le Professeur **A. Boucherif** d'avoir accepté mon invitation pour faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie Mr. le Professeur **A. Lakmeche**, d'avoir accepté de commenter et d'évaluer ce manuscrit.

A mon Professeur **S. M. Bouguima**, j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude pour avoir accepté de se pencher sur l'évaluation de ce travail.

J'adresse à Monsieur **R. Regbaoui**, l'expression de mes sincères remerciements pour le temps qu'il m'a consacré et l'excellence de ses conseils, ceci ne se mesure pas. Je vous en suis très reconnaissante de m'avoir accueillie dans votre laboratoire. Je vous remercie aussi pour faire partie du jury.

Je remercie également Monsieur **M. Hellal** pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **B. Mebkhout** pour son soutien le long de mon parcours, et tous les enseignants du département de Mathématiques qui m'ont donné une partie de leur savoir en particulier le Professeur **H. Dib**.

J'exprime ma profonde reconnaissance à ma grande famille **Mouslim-Dib** de m'avoir supporté durant ces années d'étude ; en particulier à ma mère, mes beaux parents, mon mari et mes enfants, pour leur soutien constant et leur amour inconditionnel qui m'ont aidée à affronter les moments difficiles de ce parcours.

Je remercie tous mes collegues du Département de Mathématiques de l'école supérieure en sciences appliquées qui m'ont soutenue et particulièrement lors de mes déplacements pour les stages et les congrès scientifiques et pour les moments agréables que nous avons passés ensemble.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail, en particulier mes amies Nacéra Bouizem, Meryem Hellal et Fatima Bensidhoum.

Fatima Dib

Table des matières

0.1 Introduction 5
0.2 Présentation 8

1 Préliminaires **11**
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle 11
1.1.1 Les espaces de Sobolev 11
1.1.2 Théorèmes d'injection 13
1.1.3 Espaces de Sobolev avec conditions aux limites périodiques 14
1.2 Méthodes variationnelles 16
1.2.1 Aperçu général 16
1.2.2 Approche variationnelle d'un problème 21
1.3 Rappel sur les équations différentielles à retard 24
1.3.1 Définition et propriétés 24
1.3.2 Classification 26
1.3.3 Exemples de modèles à retard 27

2 Problèmes aux Limites Réguliers **30**
2.1 Approche Variationnelle pour Equations Différentielles à Retard . 30
2.1.1 Introduction 30
2.1.2 Résultats préliminaires 32
2.1.3 Résultat principal 32
2.2 Solutions Multiples pour Equations différentielles Impulsives à Retard 37
2.2.1 Introduction 37
2.2.2 Résultats préliminaires 40
2.2.3 Résultat principal 45

3 Problèmes aux Limites Singuliers **52**
3.1 Solutions Périodiques Positives pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard 53
3.1.1 Introduction 53
3.1.2 Résultats préliminaires 54
3.1.3 Résultat principal 55

3.2 Solutions Périodiques pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard avec Terme Amorti. 64
3.2.1 Introduction 64
3.2.2 Résultats préliminaires 65
3.2.3 Résultat principal 66

4 Conclusion et Perspectives 77
4.1 Conclusion 77
4.2 Etude numérique 77
4.2.1 Discritisation du problème 78
4.2.2 Programme et simulation sur MATLAB 78
4.3 Perspectives 80

Bibliographie 81

Abreviations

EDO :	Equation différentielle ordinaire
EDR	Equation différentielle à retard
$p.p.$	presque par tout

Notations

$\mathbb{R}$:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ n fois.
$\mathbb{R}^+$:	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{Z}$:	Ensemble des nombres relatifs
$\mathbb{N}$:	Ensemble des nombres naturels
Ω :	Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\vec{0}_V$:	Le vecteur nul de l'espace vectoriel V.
δF :	L'accroissement de la fonction F.
δu :	L'accroissement de la variable u.
$x' = \frac{dx}{dt}$:	La dérivée de la variable x par rapport au temps t.
$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$:	La dérivée seconde de la variable x par rapport au temps t.
$essinf$	borne inférieure essentielle

Introduction Générale

"The unified character of mathematics lies
in its very nature; indeed, mathematics
is the foundation of all exact
natural sciences.."

David Hilbert (1862-1943).

0.1 Introduction

Les équations différentielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, elles apparaissent souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels. Elles sont omniprésentes dans les différentes sciences, Physique, Chimie, Biologie (voir [29, 36, 74, 96]).

L'inclusion de termes de retard dans les équations différentielles a donné naissance aux équations différentielles à retard (EDRs) qui surviennent dans la formalisation de nombreux phénomènes dynamiques où certains effets ne sont pas instantanés, autrement dit lorsque l'état évolue en fonction d'une ou plusieurs valeurs prises dans son passé. Il peut s'agir de valeurs ponctuelles, on parlera alors de retard discret (qu'il y ait un ou plusieurs retards), ou d'un ensemble de valeurs prises dans un intervalle, borné ou non, on parlera alors de retard continu.

Considérons par exemple le système à retard suivant:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)).$$

La variable x dépend du temps. C'est une variable d'état car elle caractérise l'état du système à un moment donné. Le système évolue. Sa vitesse d'évolution x' au temps t dépend à la fois de l'état de système au temps t (explicitement en t et à travers $x(t)$) mais également de l'état du système à un temps antérieur $t-r$, $r > 0$, à travers $x(t-r)$.

C'est donc un système à mémoire car à l'instant t l'état du système dépend de l'état dans lequel il était à l'instant $t-r$ et donc ce "souvenir" influence son

évolution.
Les EDRs ont des applications dans plusieurs domaines, notamment en économie (évolution des marchés financiers), physique (propagations physiques), médecine (description de plusieurs aspects de la dynamique de maladies infectieuses, la pharmacothérapie et la réponse immunitaire), biologie (dynamique des populations), écologie (écologie de population : relation de concurrence et de prédateur-proie), voir [2, 17, 24, 25, 54, 58, 68, 103, 104]. La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente : ces retards peuvent représenter des périodes de gestation, des périodes d'incubation, des retards de transport, ou peuvent simplement exprimer l'interaction de processus biologiques compliqués, ne tenant compte que du temps nécessaire à ces processus.

Le premier exemple traitant une classe générale d'équations à retard linéaires est dû à Polossuchin (1910) [75] et Schmidt (1911) [89]. V. Volterra en (1928) [105], et (1931) [106] a initialement introduit les EDRs non linéaires pour étudier respectivement le modèle prédateur-proie et le modèle de viscoélaticité. A partir des années 1940, la théorie des EDRs a connu un grand développement. Notamment, avec les travaux de Bellman et Cooke (1963) [11], El'sgol'ts et Norkin (1973) [37], Hale (1977) [46], Hale et Verduyn Lunel (1993) [47], Diekmann, Van Gils Lunel et Walther (1995) [33],....

Les EDRs sont de dimension infinie, contrairement aux équations différentielles ordinaires sans retard. La condition initiale d'une équation à retard est définie sur un intervalle, de longueur égale au retard (ou égale au retard maximum dans le cas de plusieurs retards). Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence et les propriétés qualitatives des solutions des EDRs:

- les méthodes topologiques (degré topologique, point fixe, transversalité topologique), (voir [60, 116]),
- les méthodes numériques (voir [10, 119]),
- les méthodes variationnelles (voir [7, 86, 108]),
- la théorie du genre combinée avec les méthodes variationnelles (voir [43, 44]).

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire qui remonte à Pierre Fermat (1657) et Christian Huygens (1690) pour l'étude de la propagation de la lumière (principe de Fermat et principe de Huygens-Fresnel). Néanmoins, le calcul des variations est né publiquement en 1696, avec le problème de la courbe brachistochrone, posé par Jean Bernoulli (à la suite de Galilée dans son dialogue sur les deux grands systèmes du monde paru en 1632), et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli [12]. Le développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle (avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue et beaucoup d'autres techniques) a permis de développer la théorie du calcul variationnel [6].

Depuis les travaux d'Elsgolc dans les années 60, [38], il existe un calcul des variations pour les systèmes à retard, et par ailleurs une théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles à retard. Les solutions faibles des équations à retard sont les points critiques de fonctionnelles d'Euler-Lagrange associées. Les espaces où ces fonctionnelles sont étudiées dépendent des conditions aux bords associées aux équations différentielles. Un tel travail a été developpé en 1968 par Hughes, [51], et en 1969 par Sabbagh, [81]. Plus précisement ils considèrent le problème variationnel de la forme

$$\text{Minimiser } \int_a^b F(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r))dt. \tag{1}$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée à (1) est divisée en deux parties:

$$\begin{aligned} &F_{x(t)}(t, x(t-r), x(t), x'(t-r), x'(t)) + F_{x(t)}(t+r, x(t+r), x(t), x'(t+r), x'(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[F_{x'(t)}(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)) \\ &\qquad + F_{x'(t)}(t+r, x(t+r), x(t), x'(t+r), x'(t))], \quad a \leq t \leq b-r \\ &F_{x(t)}(t-r, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r)) = \\ &\qquad \frac{d}{dt}[F_{x'(t)}(t, x(t-r), x(t), x'(t-r), x'(t))], \quad b-r \leq t \leq b. \end{aligned}$$

En 1974, Kaplan et Yorke [53] ont étudié l'existence de solutions périodiques de l'équation suivante :

$$x'(t) = -f(x(t-1)) - f(x(t-2)) - ... - f(x(t-n)). \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et impaire, verifiant $xf(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
Ils ont introduit une technique qui transforme l'équation (2) en un système différentiel ordinaire dont les points critiques sont les solutions périodiques de (2). En utilisant cette méthode, ils ont prouvé que (2) a une solution périodique avec une période minimale 4 (respectivement, 6) quand l'équation (2) a un retard (respectivement, deux retards).

En 2005, Guo et Yu [44] ont considéré le problème suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -f(x(t-r)) \\ x(0) = x(4r). \end{cases} \tag{3}$$

Par le changement de variable

$$t \to \frac{\pi}{2r}t = \lambda^{-1}t,$$

ils ont transformé le problème (3) au suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda f\left(x(t-\frac{\pi}{2})\right) \\ x(0) = x(2\pi). \end{cases} \tag{4}$$

Puis, ils ont ramené l'étude de la solvabilité de (4) à la recherche des points critiques de la fonctionnelle J définie sur l'espace de Hilbert $H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^n)$ [1] par

$$J(x) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{x}(t + \frac{\pi}{2}), x(t) \right) + \lambda F(x(t)) \right] dt,$$

où $\dot{x}$ est la dérivée faible de x, $\nabla_x F = f$ et S^1denote la $1-$sphère [65].

Par certaines de ses applications, la recherche de solutions périodiques de systèmes différentiels à retard est importante, [73, 85, 120]. Plusieurs approches ont été utilisées pour les étudier : la méthode de Lyapunov, la méthode d'analyse de Fourier, la théorie du point fixe et la théorie du degré de coïncidence [60, 99, 112, 116] et récemment, les méthodes variationnelles [113, 42, 87].

La modélisation de l'évolution de processus subissant des changements soudains dans leurs états, fait intervenir des équations différentielles impulsives. Les processus avec un tel caractère apparaissent naturellement et souvent, en particulier dans l'ingénierie et la physique, la chimie-biochimie, la théorie du contrôle, la dynamique de population, et la medecine [23, 40, 41, 52, 69]. Pour cette raison, la théorie des équations différentielles impulsives est devenue un domaine d'investigation important ces dernières années, (voir [5, 20, 71, 93]). En particulier les problèmes aux limites périodiques associés aux équations differentielles impulsives, impliqués dans divers domaines des mathématiques appliquées, ([70, 92]). Pour une application de la théorie fondamentale des équations differentielles impulsives, voir [9, 59, 84] et les références qui s'y trouvent. Différentes approches ont été appliquées pour étudier l'existence de solutions pour les équations différentielles impulsives: les théorèmes des points fixes [22], la théorie du degré topologique [77], La méthode des sous et sur-solutions avec une technique itérative monotone [21] et les méthodes variationnelles, [20, 71, 93, 97, 98, 121].

Il est intéressant de considérer le cas des effets combinés : impulsions et retards. Cela nous a motivé à étudier des systèmes différentiels fonctionnels impulsifs.

0.2 Présentation

Dans cette thèse, nous discutons l'existence de solutions T-périodiques pour une classe d'équations différentielles du second ordre du type;

$$x''(t)+q(t)x'(t)+\mathcal{F}(t,\lambda(t),x(t-r),x(t),x(t+r)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{t_j, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (5)$$

soumises aux conditions impulsives suivantes

$$-\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

où r et T sont des constantes positives données, $\mathcal{F}$(régulière ou singulière) est de type Carathéodory et périodique en t ; $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-)$ avec $x'(t_j^{\pm}) = \lim_{t\to t_j^{\pm}} x'(t)$; t_j, $(j \in \mathbb{Z})$ sont les instants où les impulsions se produisent; il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $t_{j+p+1} =$

$t_j + T$; I_j, $(j \in \mathbb{Z})$ sont continues et $I_{j+p+1} \equiv I_j$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}$ prend une forme particulière dans chaque problème étudié, les fonctions q, $\mathcal{F}$et I_j satisfont certaines hypothèses, spécifiées dans la suite.

Cette thèse est constituée de trois chapitres répartis comme suit:

Chapitre 1: intitulé **"Préliminaires"**, comprend un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle, un premier aperçu sur les méthodes variationnelles et leur applications, puis un autre sur les équations différentielles à retard et leurs propriétés.

Chapitre 2: intitulé **"Problèmes aux Limites Réguliers"** où, nous étudions l'existence de solutions périodiques de problèmes associés à des EDRs du second ordre où la nonlinéarité est régulière. Le chapitre se divise en deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude du problème aux limites suivant associé à une équation différentielle fonctionnelle non autonome du second ordre suivant

$$\begin{cases} x''(t-r) + f(t, x(t), x(t-r), x(t-2r)) = 0, \quad t \in I, \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

sous la condition supplémentaire:

$$\int_0^{2r} x(t)dt = 0, \tag{8}$$

où $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est r-périodique vérifiant des hypothèses supplémentaires qui seront présentées dans le chapitre.

Remarque 0.2.1 *Utilisant la r-périodicité de f le problème (7) est équivalent au suivant*

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t+r), x(t), x(t-r)) = 0, \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0 \end{cases}$$

qui est un cas particulier du problème $(5) - (6)$ où les fonctions q et I_j, $j \in \mathbb{Z}$ sont nulles, $T = 2r$.

L'approche utilisée pour l'étude de la solvabilité de $(7)-(8)$ est variationnelle, elle est basée sur une minimisation directe sous contraintes.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'un deuxième cas particulier du problème $(5)-(6)$ où la fonction q est nulle et $T = 2r$, avec les I_j sont non nulles : nous considérons le problème périodique suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash \{t_j, j \in \mathbb{Z}\}, \\ -\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ x(t) - x(t+2r) = x'(t) - x'(t+2r) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

où

$$f(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^y g'_x(t, x, \omega)d\omega.$$

Les fonctions f et g satisfont des hypothèses spécifiées dans la deuxième partie du chapitre.
Nous nous basons dans ce cas, sur l'application d'une variante du théorème du col appelée Théorème de Clark, nous obtenons alors l'existence et la multiplicité de solutions périodiques non constantes du problème (9), en considérant la condition (8) .
Chapitre 3 : intitulé **"Problèmes aux Limites Singuliers"**, est divisé aussi en deux parties. Nous établissons par approche variationnelle l'existence de solutions périodiques, sous effet d'impulsions, pour des EDRs du second ordre où la nonlinéarité est singulière.
La première partie est consacrée à un cas particulier du problème $(5)-(6)$ où la fonction q est nulle, $T=2r$, avec les I_j sont non nulles. Le problème considéré est :

$$\begin{cases} -x''(t)+\lambda(t)x(t)=f(t,x(t-r)),\ p.p\ t\in\mathbb{R}, \\ \Delta x'(t_j)=I_j(x(t_j)),\quad j\in\mathbb{Z}, \\ x(t)-x(t+2r)=x'(t)-x'(t+2r)=0 \end{cases} \tag{10}$$

sous des hypothèses suffisantes.
Se basant sur le théorème du col, nous obtenons l'existence d'au moins une solution $2r$-périodique positive pour le problème (10) .
Dans la seconde partie, utilisant toujours le théorème du col nous établissons l'existence d'au moins une solution T-périodique positive pour un autre cas particulier du problème $(5)-(6)$ où T est arbitraire et la fonction q est non nulle, continue et $T-$périodique, avec les I_j sont non nulles. Le problème étudié est le suivant

$$\begin{cases} x''(t)+q(t)x'(t)+f(t,x(t-r))=0,\ t\neq t_j\ ,\ 0<t<T, \\ \Delta x'(t_j)=I_j(x(t_j)),\quad j\in\mathbb{Z}, \\ x(0)-x(T)=x'(0)-x'(T)=0 \end{cases} \tag{11}$$

sous un certain nombre d'hypothèses.

Nous achevons par une **conclusion et perspéctives** où nous présentons une synthèse des travaux effectuées et les possibilités de continuation de ces travaux.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle 11

1.1.1 Les espaces de Sobolev 11

1.1.2 Théorèmes d'injection 13

1.1.3 Espaces de Sobolev avec conditions aux limites périodiques 14

1.2 Méthodes variationnelles 16

1.2.1 Aperçu général 16

1.2.2 Approche variationnelle d'un problème 21

1.3 Rappel sur les équations différentielles à retard . . . 24

1.3.1 Définition et propriétés 24

1.3.2 Classification 26

1.3.3 Exemples de modèles à retard 27

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques outils de l'analyse fonctionnelle, nous donnerons un aperçu sur les méthodes variationnelles. Nous terminons ce chapitre par une introduction aux EDRs.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Pour plus de détails sur les notions rappelées dans ce paragraphe voir [15, 55].

1.1.1 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans le calcul variationnel. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev (1908

-1989) [90]. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder les méthodes variationnelles. Nous commençons par donner quelques définitions et notations nécéssaires pour l'introduction de ces espaces. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [1].

Espaces C^k

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
$C^k(I)$ est l'espace des fonctions x de classe C^k sur I, muni de la norme suivante

$$\|x\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t\in I} \left|x^{(i)}(t)\right|.$$

Si $k = 0$, $C^0(I) = C(I)$, l'espace des fonctions continues sur I. La norme est définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in I} |x(t)|.$$

$C_c^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I, infiniment dérivables à support compact.

Espaces de Lebesgue

$L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables x définies sur I telles que la norme

$$\|x\|_{L^p} = \left(\int_I |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

est finie.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables x bornées sur I. La norme est définie par

$$\|x\|_{L^\infty} = ess\sup_{t\in I} |x(t)|.$$

$L^p(I)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.1 (Fonction de Carathéodory) *$f : I \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction L^p-Carathéodory, $1 \leq p \leq \infty$, si:*
– l'application $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable pour chaque $x \in (0, +\infty)$;
– l'application $x \longmapsto f(t,x)$ est continue pour presque chaque $t \in I$;
– pour chaque $\rho > 0$ il existe une fonction $l_\rho \in L^p(I)$ telle que, pour presque chaque $t \in I$.

$$\sup_{|x|\leq\rho} |f(t,x)| \leq l_\rho(t).$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder) *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et p' le conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, si $f \in L^p(I)$ et $g \in L^{p'}(I)$, alors $f.g \in L^1$ et*

$$\int_I |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} . \tag{1.1}$$

Espaces de Sobolev

Définition 1.1.2 *$W^{k,p}(I)$, $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{Z}^+$ est l'espace de toutes les fonctions $x \in L^p(I)$ telles que $x^{(i)} \in L^p(I)$ pour $i = 1, ..., k$; où les dérivées $x^{(i)}$ sont au sens des distributions.*

$W^{k,p}(I)$ est muni de la norme

$$\|x\|_{W^{k,p}(I)} = \left(\int_I \sum_{i=0}^{k} \left| x^{(i)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.1 *1)- La norme $\sum_{i=0}^{k} \left\| x^{(i)} \right\|_{L^p}$ est équivalente à $\|x\|_{W^{k,p}(I)}$ pour tout $x \in W^{k,p}(I)$.*
2)- $W^{0,p}(I) = L^p(I)$.

Proposition 1.1.1 *$W^{k,p}(I)$ est un espace de Banach.*

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(I)$ est souvent noté $H^k(I)$.

Proposition 1.1.2 *$H^k(I)$ muni du produit scalaire réel*

$$(x, y)_{W^{k,2}} = \int_I \sum_{i=0}^{k} x^{(i)}(t) y^{(i)}(t) dt,$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Théorèmes d'injection

Les thèorèmes d'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.1.3 *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. On dit que E_1 est injecté dans E_2 et on écrit $E_1 \hookrightarrow E_2$, si pour tout $x \in E_1$ on a $x \in E_2$ et $\|x\|_{E_2} \leq c \|x\|_{E_1}$, où la constante c ne dépend pas de $x \in E_1$. On définit l'opérateur d'injection $J : E_1 \to E_2$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in E_1$ comme un élément de E_2.*
$E_1 \hookrightarrow E_2$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $J : E_1 \to E_2$ est un opérateur linéaire continu.
Si $\|x\|_{E_2} \leq c \|x\|_{E_1}$, pour tout $x \in E_1$, alors $\|J\|_{E_1 \to E_2} \leq c$.

Définition 1.1.4 *Si $E_1 \hookrightarrow E_2$ et l'opérateur d'injection $J : E_1 \to E_2$ est un opérateur compact, alors on dit que E_1 est injecté de manière compacte dans E_2, et on écrit: $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$.*
La compacité de l'opérateur $J : E_1 \to E_2$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de E_1 est un sous-ensemble compact de E_2.

Théorème 1.1.2 *(**Rellich-Kondrachov**) Soit Ω un domaine ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$. On a :*
si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$, où $p^* = \frac{N.p}{N-p}$,
si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$.
si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.
En particulier, on a toujours :$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Remarque 1.1.2 ***a)** La condition sur le domaine Ω est nécessaire, si Ω n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général.*

Inégalitè de Poincaré L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.

Soient p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction x de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|x\|_p \leq C \|\nabla x\|_p .$$

Remarque 1.1.3 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ entre la norme (1.2) et celle définie par*

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla^k x\right\|_p . \tag{1.3}$$

Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée à $W^{m,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).

1.1.3 Espaces de Sobolev avec conditions aux limites périodiques

Prenons $I = [0, T]$, pour $1 < p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}$ est l'espace des fonctions $x \in L^p(I, \mathbb{R})$ ayant une dérivée faible $x' \in L^p(I, \mathbb{R})$ avec $x(0) = x(T)$.

$W_T^{1,p}$ muni de la norme

$$\|x\|_{W_T^{1,p}} = \left(\int_0^T \left[|x(t)|^p + |x'(t)|^p \right] dt \right)^{\frac{1}{P}}, \tag{1.4}$$

est un espace de Banach réflexif.

Proposition 1.1.3 *Si $x \in W_T^{1,p}$, alors il existe une constante c telle que*

$$\|x\|_\infty \leq c \|x\|_{W_T^{1,p}}, \tag{1.5}$$

de plus si $\int_0^T x(t)dt = 0$, alors

$$\|x\|_\infty \leq c \|x'\|_{L^p}.$$

H_T^1 est l'espace de Hilbert $W_T^{1,2}$muni du produit scalaire

$$(x, y) = \int_0^T [x(t)y(t) + x'(t)y'(t)]\, dt$$

et de la norme correspondante $\|x\| = \|x\|_{W_T^{1,2}}$.

De plus, $x \in H_T^1$ peut être exprimé comme suit;

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right). \tag{1.6}$$

Décomposition orthogonale de H_T^1

H_T^1 se décompose en somme directe $H_T^1 = H^+ \oplus H^-$, où H^+ dénote le sous-espace de H_T^1 de fonctions à valeur moyenne nulle et H^- le sous-espace de H_T^1 de fonctions constantes. H^+ et H^-sont orthogonaux.

Dans ce cas, nous obtenons les estimations suivantes.

Proposition 1.1.4 *Si $x \in H^+$, alors*

$$\int_0^T |x(t)|^2\, dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |x'(t)|^2\, dt, \tag{1.7}$$

(Inégalité de Wirtinger) et

$$\|x\|_\infty^2 \leq \frac{T}{12} \int_0^T |x'(t)|^2\, dt,$$

(Inégalité de Sobolev).

1.2 Méthodes variationnelles

Les méthodes variationnelles constituent une technique puissante dans l'analyse non linéaire. Elles sont utilisées dans différentes disciplines des mathématiques pures et appliquées (telles que: la physique mathématique, la théorie de jauge [95] et l'analyse géométrique), faisant intervenir les problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles avec ou sans retard.

1.2.1 Aperçu général

1- Quelles sont les conditions pour qu'un problème aux limites associé à un système d'équations différentielles, admette une formulation variationnelle?

2- Si ces conditions ne sont pas satisfaites, est-il possible de transformer le système en un autre système équivalent qui admet une formulation variationnelle?

Dans cette partie, se basant sur l'article de Tonti [101], nous allons essayer de répondre à ces deux questions.

Nous commençons par préciser que la formulation variationnelle n'est opérée que pour un problème aux limites, mais non pas pour une équation : les conditions initiales et aux bords sont les ingrédients essentiels.

Une réponse à la première question est donnée dans [39], où il est précisé qu'en 1887, V. Volterra a formulé un test précis pour savoir si un problème donné a une formulation variationnelle ou non. Ce test consiste à vérifier la symétrie de l'opérateur, s'il est linéaire, ou bien la symétrie de sa dérivée au sens de Gateaux, s'il est non linéaire. Le point essentiel, est que la symétrie de l'opérateur linéaire, comme celle d'une matrice, n'est pas une notion absolue, elle est relative à une forme bilinéaire. Si le problème donné ne satisfait pas la condition de symétrie, il faudra essayer de le transformer en un autre problème satisfaisant cette condition. Pour cela il est possible d'utiliser les méthodes suivantes :

1) Transformer le problème donné en un autre ayant les mêmes solutions.

2) Changer la forme bilinéaire (qui est une formulation variationnelle implicite).

3) Changer la fonction inconnue.

Les deux premières méthodes sont équivalentes de sorte que chaque transformation du problème original correspond à une forme bilinéaire et vice versa.

Il existe des équations, qui ont longuement résisté à la formulation variationnelle, c'est le cas de l'équation de Fourier (équation de la chaleur) et l'équation de Fick (diffusion), qui ont donné une formulation variationnelle réelle vers 1964. Ce résultat est obtenu par Gurtin [45] qui a montré comment donner une formulation variationnelle à un problème à valeurs initiales associé à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

L'idée de Gurtin était de faire une transformation préliminaire d'une équation en une autre qui est intégro-différentielle avec l'introduction du produit de convolution de deux fonctions. Cette méthode a été simplifiée en 1972 par Tonti [100] qui a montré qu'on peut intoduire une forme bilinéaire convolutive pour donner une formulation variationnelle à un problème à valeurs initiales associé à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
L'idée d'adapter la forme bilinéaire au problème donné a été perfectionnée par Magri [64] en 1974, en donnant une méthode explicite pour obtenir une fonctionnelle.
En 1978, Reiss et Haug [80], en utilisant le résultat de Magri, ont exploré la possibilité de trouver parmi les fonctionnelles associées aux problèmes précédents celles qui donnent un principe d'extremum.
Pour les problèmes nonlinéaires, une première tentative pour étendre le résultat de Magri a été faite par Telega en 1979 [94].

L'idée de trouver une procédure générale pour transformer le problème donné en un autre admettant une formulation variationnelle et ayant la même solution, a évolué à partir de la théorie du facteur intégrant. Le facteur intégrant doit être inversible pour s'assurer qu'aucune nouvelle solution n'est ajoutée au problème donné. Par exemple, considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} mu'' + hu' + f(t,u) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u(T) = 0, & u \in C^2(0,T). \end{cases}$$

Puisque l'opérateur n'est pas symétrique, le problème n'admet pas une formulation variationnelle. Si nous multiplions l'équation par le facteur intégrant

$$p(t) = \exp(\frac{ht}{m}),$$

le problème devient

$$m\left[\exp(\frac{ht}{m})u'\right]' + \exp(\frac{ht}{m})f(t,u) = 0,$$

où l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}\left[\exp(\frac{ht}{m})\frac{d}{dt}\right]$ est symétrique. Maintenant, une formulation variationnelle est possible. La fonctionnelle est

$$\varphi(u) = \int_0^T \exp(\frac{ht}{m})\left[\frac{1}{2}m\,(u')^2 + \int_0^u f(t,s)ds\right]dt.$$

Cette technique a été appliquée au chapitre 3 de cette thèse.
En général le problème d'existence du facteur intégrant pour l'équation

$$f(t,u,u',u'') = 0$$

est posé sous la forme suivante:
Existe-t-il une fonction $r(t, u, u')$ non identiquement nulle vérifiant

$$r(t, u, u')f(t, u, u', u'') = 0, \tag{1.8}$$

telle que (1.8) est l'équation d'Euler-Lagrange d'une certaine fonctionnelle?
Une solution explicite de l'équation (1.8) est en général impossible. Des solutions particulières peuvent être trouvées par la méthode d'essai et d'erreur.

Pour ne pas se limiter à la recherche d'un facteur intégrant, il est possible de considérer un opérateur intégrant, en dérivant les deux menbres de l'équation ou en effectuant une transformation de Laplace ou en multipliant un système différentiel par une matrice. Dans ce cas, l'opérateur intégrant cherché R est tel que l'équation

$$R(u, f(t, u, u', u'')) = 0,$$

admet la même solution que l'équation d'origine. Pour le problème ainsi posé, non seulement il existe toujours un opérateur intégrant mais il existe un nombre infini de tels opérateurs. Ces opérateurs intégrants peuvent être déterminés explicitement, tout comme les fonctionnelles. Il s'avère que la nouvelle équation a la forme

$$\int_0^T r(t, u(t), u'(t), \tau, u(\tau), u'(\tau))f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d = 0,$$

i.e. l'équation transformée devient une équation intégro-différentielle.

Si l'opérateur ne satisfait pas la condition de symétrie et avec la fonctionnelle bilinéaire usuelle, le problème aux limites n'admet pas une formulation variationnelle, alors au lieu de rechercher un opérateur intégrant, une deuxième solution se présente: changer la fonctionnelle bilinéaire.

Soient U et V deux espaces vectoriels, on définit la fonctionnelle bilinéaire notée $\langle ., . \rangle$, par: $\langle ., . \rangle : V \times U \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

1)- Elle doit être à valeurs réelles (même si U et V sont des espaces vectoriels sur le champ des nombres complexes).

2)- Elle doit être bilinéaire sur le champ des nombres réels.

3)- Elle doit être non dégénérée, i.e.

$$\begin{array}{lcll} si \quad \langle v, u_0 \rangle & = & 0 \ \ pour\ tout\ v \in V & alors \ \ u_0 = \vec{0}_U \\ si \quad \langle v_0, u \rangle & = & 0 \ \ pour\ tout\ u \in U & alors \ \ v_0 = \vec{0}_V, \end{array}$$

où le nombre réel $s = \langle v, u \rangle$ est le produit scalaire des deux éléments $v \in V$ et $u \in U$; et l'espace V est le dual de l'espace U i.e. $V = U^*$.

Exemple:

L'opérateur D donné par: $Du = \frac{du}{dt}$, avec $u(0) = 0$ et $u \in C^1(0, T)$, qui n'est pas symétrique par rapport à la fonctionnelle bilinéaire usuelle

$$\langle v, u \rangle = \int_0^T v(t)u(t)dt$$

mais symétrique par rapport à la fonctionnelle bilinéaire convolutive

$$\langle v, u \rangle_c = \int_0^T v(T-t)u(t)dt = \int_0^T v(t)u(T-t)dt$$

comme il est montré dans [100]. Si $\mathbf{C}$ denote l'opérateur de convolution défini par

$$\mathbf{C}v(t) = v(T-t),$$

puisque $\mathbf{C}$ est un opérateur symétrique, nous pouvons écrire

$$\langle v, u \rangle_c = \langle \mathbf{C}v, u \rangle = \langle v, \mathbf{C}u \rangle .$$

La symétrie de l'opérateur D par rapport à la fonctionnelle bilinéaire convolutive, i.e.

$$\langle Du, \omega \rangle_c = \langle D\omega, u \rangle_c$$

est équivalent à dire que l'opérateur $\mathbf{C}D$ est symétrique par rapport à la fonctionnelle bilinéaire usuelle

$$\langle \mathbf{C}Du, \omega \rangle = \langle Du, \omega \rangle_c = \langle D\omega, u \rangle_c = \langle \mathbf{C}D\omega, u \rangle .$$

A ce stade là, nous pouvons dire que le changement de la fonctionnelle bilinéaire est équivalent à la pré-multiplication par un opérateur. Ceci implique que dire que la symétrie de l'opérateur est reliée à une fonctionnelle bilinéaire est équivalent à dire que l'opérateur peut devenir symétrique par application d'un opérateur intégrant. Il est clair que dans cette équivalence, l'exigence que la nouvelle fonctionnelle bilinéairee soit non-dégénérée est équivalente à l'exigence que l'opérateur intégrant soit inversible. Pour les opérateurs linéaires, la question de choisir entre les deux solutions ne se pose pas, mais pour les opérateurs non-linéaires, il est plus simple d'utiliser la fonctionnelle bilinéaire usuelle (canonique) et appliquer un opérateur intégrant.

Le problème de trouver qu'un opérateur donné est le gradient d'une certaine fonctionnelle et de trouver cette fonctionnelle, est connu comme le problème inverse du calcul variationnel. Inversement, le problème simple de trouver le gradient d'une fonctionnelle donnée peut être appelé le problème direct. Nous distinguons deux types de formulation variationnelle:

1)-**Formulation variationnelle dans le sens restreint:**

Soit le problème $N(u) = \vec{0}_V$ avec $N : D(N) \subset U \to V = U^*$, trouver une fonctionnelle F telle que l'opérateur N est le gradient de F, i.e. tel que

$$\delta F = \langle N(u), \delta u \rangle .$$

Ceci implique que les solutions du problème donné sont les points critiques de la fonctionnelle F et vice versa. Cette forme du problème inverse est donnée en 1897 par Hirsch [48]. L'existence de la formulation variationnelle dans le sens restreint pour un problème donné est basée sur le thèorème fondamental suivant:

Théorème 1.2.1 (Volterra, 1913) *Pour qu'un opérateur $N : D(N) \subset U \to R(N) \subset V = U^*$ soit le gradient d'une fonctionnelle, il est nécessaire que la circulation de l'élément $v = N(u)$ le long de toute ligne réductible fermée contenue dans $D(N)$ disparaît. En prenant un parallélogramme infinitésimal, la disparition de la circulation s'exprime par*

$$\langle N'_u\phi, \psi\rangle = \langle N'_u\psi, \phi\rangle \,,$$

i.e. l'opérateur $N'_u(u;.)$ doit être symétrique. Si le domaine $D(N)$ est simplement connexe, la condition devient suffisante. Dans ce cas, si $\eta(\lambda)$ dénote une famille à un paramètre d'éléments (une ligne de u_0 à u) avec $\eta(0) = u_0$ et $\eta(1) = u$, la fonctionnelle est donnée par

$$F(u) = F(u_0) + \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \left\langle N\left(\eta(\lambda)\right), \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right\rangle d\lambda.$$

2)-**Formulation variationnelle dans le sens étendu:**

Soit le problème $N(u) = \vec{0}_V$ avec $N : D(N) \subset U \to V = U^*$, trouver une fonctionnelle $\bar{F}$ dont les points critiques sont les solutions du problème donné et vice versa. Ceci imlique que pour un opérateur donné N un opérateur $\bar{N}$ existe tel que

$$\delta\bar{F} = \left\langle \bar{N}(u), \delta u\right\rangle$$

et les problèmes $N(u) = \vec{0}_V$ et $\bar{N}(u) = \vec{0}_V$ ont les mêmes solutions.

Cette forme du problème inverse a été donnée en 1928 par Davis [26] et a été utilisée en 1941 par Douglas [27]. Cette formulation est moins exigeante que la première, car les points critiques doivent coincider avec les solutions du problème donné, sans que N soit nécessairement le gradient de la fonctionnelle F. Le gradient de la fonctionnelle $\bar{F}$ est un autre opérateur, dit $\bar{N}$, qui sera lié d'une certaine façon à l'opérateur N.

La formulation variationnelle dans le sens étendu pour les problèmes non-linéaires, a été montrée par le théorème suivant:

Théorème 1.2.2 *(voir [101]) Considérons le problème*

$$N(u) = \vec{0}_V \tag{1.9}$$

où N est un opérateur non-linéaire défini par $N : D(N) \subset U \to R(N) \subset V = U^*$, tel que
(1) la solution du problème existe et elle est unique;
(2) $D(N)$ est simplement connexe;
(3) la dérivée au sens de Gateaux $N'_u(u;.)$ existe;
(4) $D(N'_u)$ est dense dans U;
(5) l'adjoint de l'opérateur $N'_u(u;.)$ noté $N'^*_u(u;.)$ est inversible pour tout $u \in D(N)$.

Alors pour tout opérateur K qui satisfait les conditions suivantes:
(6) $D(K) \supset R(N)$; et $R(K) \subset D(N'^*_u)$;
(7) K est linéaire, inversible et symétrique,
l'opérateur $\bar{N}$ défini par

$$\bar{N}(u) = N'^*_u(u; KN(u))$$

a les propriétés suivantes:
(a) son domaine coincide avec celui de N;
(b) les problèmes $N(u) = \vec{0}_V$ et $\bar{N}(u) = \vec{0}_V$ ont la même solution;
(c) il est un opérateur potentiel.
Des propriétés (b) et (c), il suit que la solution du problème (1.9) est le point critique de la fonctionnelle

$$\bar{F}(u) = \frac{1}{2}\langle N(u), KN(u)\rangle$$

dont le gradient est l'opérateur $\bar{N}$. De plus si K est définie positive, alors
(d) $\bar{F}(u)$ a un minimum au point critique.

La figure 1 montre la relation entre les deux formulations. Pour plus de détails consulter [101].

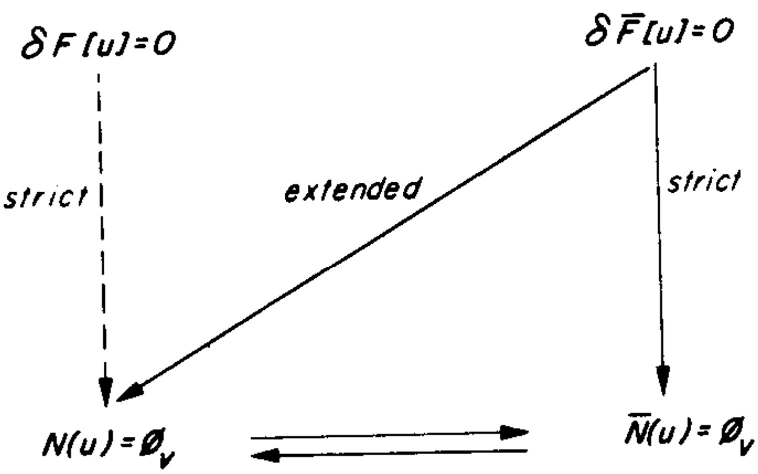


fig1 : Formulation variationnelle dans le sens restreint et dans le sens étendu.

1.2.2 Approche variationnelle d'un problème

Le but principal de cette section est de présenter une brève introduction à la théorie des points critiques des fonctionnelles de classe C^1 sur un espace de

Banach. Un certain nombre de problèmes dans la théorie des équations différentielles peuvent être exprimés sous la forme d'une équation

$$Ax = 0, \tag{1.10}$$

où $A : X \to Y$, X et Y sont des espaces de Banach. Cette équation a une structure variationnelle, s'il existe une fonctionnelle $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$(A(x), y) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t},$$

où $Y = X^*$, le dual de X, $(.,.)$ est le couple de dualité entre X et X^*. Dans ce cas, nous pouvons écrire $A = \varphi'$ et l'équation (1.10) devient

$$(\varphi'(x), y) = 0, \text{ pour tout } y \in X. \tag{1.11}$$

L'équation (1.11) signifie que les solutions de (1.10) sont des points critiques de la fonctionnelle φ. En écrivant l'équation (1.11), nous avons exprimé l'équation (1.10) sous une forme faible. Le problème que nous devons résoudre se transforme alors, en la recherche des points critiques de φ. Si $X = \mathbb{R}^N$, les candidats évidents pour les points critiques sont les maximums et minimums locaux de φ. La situation est plus compliquée si φ est une fonction définie sur un espace de dimension infinie.
Dans la suite, nous discuterons des arguments pour prouver l'existence de points stationnaires des fonctionnelles réelles φ définies sur un espace de Banach X. Nous introduisons les définitions nécessaires pour l'énoncé des théorèmes d'existence de ces points.

Définition 1.2.1 (Point critique d'une fonction) *Un "point critique" de $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ est un point $x \in X$ pour lequel $\varphi(x) = 0$.*

Définition 1.2.2 (valeur critique d'une fontion) *Une "valeur critique" de φ est un nombre c tel que $\varphi(x) = c$ où x est un point critique de φ.*

- **Semi-continuité inférieure**

Soit X un espace normé.

Définition 1.2.3 *Une suite minimisante pour une fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_k) telle que*

$$\varphi(x_k) \to \inf \varphi \text{ quand } k \to \infty.$$

Une fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement (respectivement faiblement semi-continue inférieurement) si

$$\begin{aligned} x_k &\to x \Rightarrow \liminf \varphi(x_k) \geq \varphi(x) \\ (\text{resp. } x_k &\rightharpoonup x \Rightarrow \liminf \varphi(x_k) \geq \varphi(x)). \end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 *(voir [Th. 1.1 dans [67]]) Soit X un espace de Banach refléxif, E un sous enemble faiblement fermé de X, et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est faiblement semi-continue inférieurement, alors φ a un minimun sur E si et seulement si elle admet une suite minimisante bornée sur E.*

Remarque 1.2.1 *L'existence d'une suite minimisante bornée est assurée quand φ est coercive, i.e., φ est telle que*

$$\varphi(x) \to +\infty \text{ si } \|x\|_X \to +\infty.$$

Dans le cas où la fonction φ est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.
Pour les fonctionnelles convexes, un résultat classique est donné par le théorème (voir [15] page 46).

Si φ n'est pas convexe, elle n'a pas besoin d'atteindre son infimum. Toute fois, le résultat d'Ekeland (voir [91] page 51) montre l'existence de points qui sont presque des minimum.

Une condition de compacité qui est habituellement employée pour prouver l'existence de points stationnaires est la condition de Palais-Smale (PS), pour une fonction $\varphi \in C^1$:

Définition 1.2.4 (Condition (PS)) *Toute suite $\{x_j\} \in X$ telle que: $|\varphi(x_j)| < M$ et $\varphi'(x_j) \to 0$ en norme dans X^* (l'espace dual de X) admet une sous-suite fortement convergence, où $\varphi'(x)$ représente la dérivée de φ en x, et est un élément du dual X^*l'espace des fonctions linéaires continues sur X. Une telle fonction atteint toujours son infimum.*

Lemme 1.2.1 *Soit φ une fonction réelle de classe C^1 définie sur un espace de Banach X satisfaisant la condition (PS) et bornée inférieurement. Alors φ atteint un minimum en un certain point x_0 de X .*

Pour une fonction qui n'est pas bornée, chercher ses points critiques revient à chercher des points selles de la fonctionnelle associée au problème étudié. Ces points sont déterminés par des arguments de type minimax. Ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col et ses variantes.

Théorème 1.2.4 (Theorème du col) *[Th. 4.10 dans [67]] Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $x_0 \in X, x_1 \in X$, et un voisinage ouvert borné I de x_0 tel que $x_1 \in X/I$ et*

$$\inf_{\partial I} \varphi > \max(\varphi(x_0), \varphi(x_1)).$$

Soit

$$\Gamma = \{g \in C([0,1]; X);\ g(0) = x_0,\ g(1) = x_1\},$$

et

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq s \leq 1} \varphi(g(s)).$$

Si φ satisfait la condition de Palais-Smale, alors c est une valeure critique de φ et

$$c > \max\left(\varphi\left(x_0\right), \varphi\left(x_1\right)\right).$$

Théorème 1.2.5 *([Th. 9.1 dans [78]]) Soit E un espace de Banach réel, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ est une fonctionnelle paire qui satisfait la condition de Palais-Smale, φ est bornée inférieurement et $\varphi(0) = 0$; supposons qu'il existe un ensemble $K \subset E$ tel que K est homéomorphe à S^{n-1} (la sphère unité $(n-1)$-dimensionnelle) par une application impaire et $\sup_{x \in K} \varphi(x) < 0$, alors φ a au moins n paires de points critiques non triviaux distincts .*

1.3 Rappel sur les équations différentielles à retard

Bien que ressemblant en apparence aux équations différentielles ordinaires, les équations différentielles à retard ont plusieurs caractéristiques qui compliquent leur analyse. Dans la suite, nous présentons quelques informations utiles au sujet de ces équations (voir [16, 46]...).

1.3.1 Définition et propriétés

Etant donné un nombre $r > 0$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni de la norme euclidienne $|.|$, $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Si $[a,b] = [-r, 0]$, on désigne la norme d'un élément $\varphi \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ par $\|\varphi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ et $x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t \in [t_0, t_0 + A]$, on définit $x_t \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ par $x_t(s) = x(s+t)$ pour tout $s \in [-r, 0]$.

Définition 1.3.1 *Si D est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times C([-r,0], \mathbb{R}^n)$, et $f : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée, la relation*

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1.12}$$

où

$$x_t(s) = x(s+t) \ , \ s \in [-r, 0];$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur D notée parfois EDR(f). Le nombre r est appelé le retard.

Les termes de retard sont généralement des constantes positives ou des variables dépendant continûment du temps ou de l'état du système. Dans le cadre de cette étude, seul le cas d'un retard constant est considéré.

Un problème à valeur initiale nécessite plus d'informations qu'un problème analogue pour un système sans retard. Pour un système différentiel ordinaire, une unique solution est déterminée par un point initial dans l'espace euclidien à un temps initial t_0: Pour un système différentiel à retard, on a besoin d'informations sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$. De toute évidence, pour connaître le taux de variation à t_0, on a besoin de $x(t_0)$ et $x(t_0 - r)$, et pour $x'(t_0 + \varepsilon)$, on a besoin de connaître $x(t_0 + \varepsilon)$ et $x(t_0 + \varepsilon - r)$. Il faut donner une fonction initiale, la valeur de $x(t)$ pour l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$. Chacune de ces fonctions initiales donne naissance à une solution unique de l'équation différentielle à retard. Si nous exigeons que les fonctions initiales soient continues alors l'espace des solutions a la même dimension que $C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R})$. En d'autres termes, il est de dimension infinie. Cette dimension infinie est apparue dans l'étude des systèmes linéaires. Tout comme pour les équations différentielles ordinaires, on cherche des solutions exponentielles, pour cela on détermine une équation caractéristique. Plutôt qu'une équation polynômiale, on arrive à une équation transcendante de la forme

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

où P_0 et P_1 sont des polynômes en λ. Généralement, cette équation a une infinité de solutions correspondant à une famille infinie de solutions indépendantes de l'équation différentielle à retard [37]. Bien que les méthodes standard pour déterminer l'emplacement des racines d'un polynôme (les critères de Routh-Hurwitz, voir [35]) ne sont pas applicables ici, il existe d'autres méthodes qui sont disponibles (voir [11, 18, 34]). L'analyse de stabilité linéaire est donc plus difficile pour ces équations différentielles. Deux mathématiciens ont permis de généraliser l'idée de Lyapunov au cas des équations différentielles fonctionnelles et ont aussi rattaché leurs noms à la théorie, il s'agit de Krasovskii et de Razumikhin [57, 79], De nombreuses avancées furent ajoutées par la suite à cette base.

Alors qu'en règle générale, le comportement des équations différentielles à retard est plus complexe que celui des équations différentielles ordinaires, il existe tout de même certaines exceptions. Un excellent exemple est fourni dans [16]. Il est bien connu que les solutions de $x'(t) = (x(t))^2$ divergent vers l'infini en temps fini. Les solutions de l'équation différentielle à retard $x'(t) = [x(t - r(t))]^2$, cependant, sont continues pour tout t si $r(t)$ est positif pour tout t.
Dans le cas d'équations differentielles présentant un retard constant, cela peut être vu par la méthode des pas dite "pas à pas", c'est-à-dire l'intégration directe sur des intervalles de longueur r, de type $[kr, (k + 1)r]$ où k représente un entier naturel non nul. Cette méthode fut présentée dans [11]. D'autres ont montré

qu'elle restait aussi valable pour les retards variables à condition que le retard ne s'annule jamais [37].

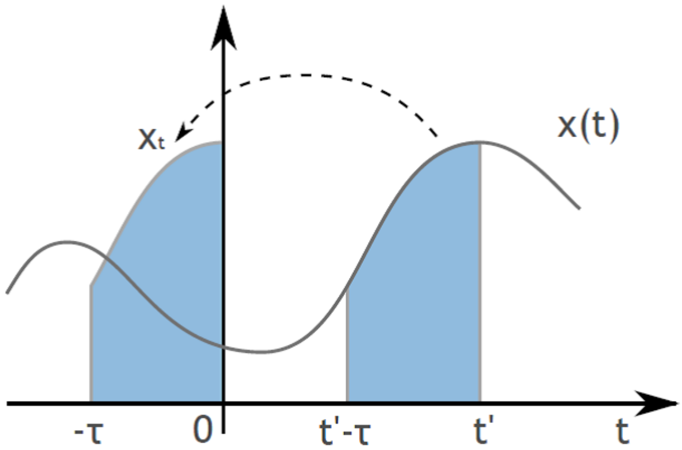


Fig 2 : Chaque segment de longueur r est vu sur l'intervalle $[-r, 0]$.

1.3.2 Classification

Voici les différents types d'équations à retard que l'on peut rencontrer dans la littérature [58].

1.Equation différentielle fonctionnelle à retard:

L'équation (1.12) est de type général, elle inclut:

- les équations différentielles ordinaires (le cas où $r = 0$).

- Equations au différences différentielles

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t))),$$

où $F(t, x_t) = f(t, x(t), x(t-r_1(t)), ..., x(t-r_p(t)))$, où $0 \leq r_i(t) \leq r, i = 1, 2, ..., p$.

- Les équations intégro-différentielles avec retard

$$\frac{dx}{dt}(t) = G(t, \int_{t-r}^{t} k(s)x(s)ds)$$

où $F(t, x_t) = G(t, \int_{t-r}^{t} k(s)x(s)ds)$.

2. Equations différentielles à retard de type neutre

$$\frac{d}{dt}F(t, x_t) = G(t, x_t),$$

i.e. le retard intervient aussi sur la dérivée.

Par exemple,

$$\frac{d}{dt}(x(t) - cx(t - 1)) = f(x(t), x(t - 1)),$$

ici

$$F(t, x_t) = x(t) - cx(t-1),$$

en fait, nous ne pouvons pas écrire $\frac{d}{dt}x(t) - c\frac{d}{dt}x(t-1)$ car nous ne savons pas si x est dérivable.

3. Equations différentielles à retard dépendant de l'état

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t - r(x(t))),$$

$x(t) \in \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ et $r : \mathbb{R}^N \to R^+$.

4. Equations à retard aux dérivées partielles

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + F(x(t-r))$$

où A est un opérateur aux dérivées partielles par rapport à la variable spaciale défini sur une partie d'un espace de Banach X (généralement un espace fonctionnel, par exemple Δ sur H_0^1), F étant définie sur X à valeurs dans X.

exemple: $\frac{\partial u}{dt}(t, x) = \Delta_x u(t, x) + f(u(t-1), x))$, où Δ_x est le laplacien par rapport à x.

5. Equation Différentielle Avancée

Nous citons l'exemple suivant

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t+r)); r > 0 \tag{1.13}$$

En posant $\omega = -t$, (1.13) devient un cas particulier de l'équation à retard (1.12) .

6. Equation Différentielle à Retard de type Mixte

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t-r), x(t+r)); r > 0. \tag{1.14}$$

Cette dernière équation a une caractéristique, c'est qu'on ne sait pas sous quelles conditions l'équation (1.14) définit une fonction pour $t > 0$ car sa dérivée dépend à la fois du passé et du futur.

1.3.3 Exemples de modèles à retard

Beaucoup de phénomènes naturels ont trouvé dans la théorie des EDRs un bon moyen de modélisation, un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires.

Nous donnons ici des exemples de modèles où interviennent des EDRs du second ordre, l'objet d'étude de cette thèse.

Contrôle d'un Bateau de Minorsky En 1962 Minorsky (voir [16]) a conçu un dispositif pour le contrôle automatique de la direction pour un bateau. De toute évidence il y a un décalage (retard) de magnitude $h > 0$ en temps entre le moment ou le moteur électrique exerce la force pour redresser le bateau et le moment ou le bateau réagit pour se réorienter. Minorsky décrit cela par l'équation suivante donnée sur $x(t)$, une position angulaire (à l'instant t) fixée du gouvernail de direction du bateau en supposant qu'il existe une force de frottement proportionnelle à la vitesse $-cx'(t)$,

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0,$$

où il considère que $xg(x) > 0$, si $x \neq 0$ et c une constante positive. L'objectif du problème est de chercher des conditions qui assurent le maintien de x près de zéro de sorte que le bateau suivra étroitement son cours approprié pour arriver à sa destination fixée.

Le modèle de tournesol de Somolinos La fleur de la plante de tournesol tourne d'un coté vers l'autre d'une façon périodique. Ceci est dû à une hormone qui réagit au contact de rayon solaire. En 1978, Somolinos [16] modélisa ce mouvement par l'équation

$$x''(t) + \frac{a}{r}x'(t) + \frac{b}{r}\sin x(t-r) = 0,$$

dite l'équation de tournesol. Il obtient des résultats intéressants sur l'existence de solutions périodiques.

Le modèle d'enlèvement de matériau abradable L'exemple suivant est utilisé pour modéliser l'enlèvement de matériau abradable lors de contacts aube/carter dans des turbomachines aéronautiques.
Un revêtement abradable, lorsqu'il est mis en contact avec un corps mobile, s'use préférentiellement à ce corps mobile. De tels revêtements servent là où des pièces mobiles doivent être au plus près de pièces fixes : compresseur, turbines, rotors, etc.
L'application première qui a permis la création de ces revêtements, à la fin des années 1960, est le joint à revêtement abradable de compresseur ou de turbine d'un turboréacteur d'avion. En effet, en réduisant au minimum le jeu entre les ailettes mobiles et le carter de la conduite gazeuse, on augmente l'efficacité et le rendement du turboréacteur. Le revêtement abradable garantit la fiabilité du dispositif en cas de contact avec l'aube : il sera creusé par l'aube et celle-ci ne subira quasiment aucune usure. Sans ce matériau, le choc serait trop violent et casserait l'ailette.
Ces revêtements abradables sont usuellement disposés sur le carter afin de minimiser le jeu de fonctionnement avec les sommets d'aubes tout en réduisant les

efforts de contact en cas d'interaction.
Il s'agit notamment de supposer qu'une seule aube entre en contact avec l'abradable et qu'aucune séparation n'est possible. L'axe de rotation de l'arbre est parfaitement rigide et le contact est la conséquence de la vibration des aubes ou de la déformation du carter uniquement et l'équation du mouvement s'écrit :

$$Mx''(t) + Cx'(t) + Kx(t) = f(t, x(t), x(t-r))$$

où M, C et K sont respectivement les matrices masse, amortissement et raideur de l'aube étudiée, et f est le vecteur des efforts extérieurs dépendant de l'état du système aux temps t et $t - r$. Ce terme de retard provient de la rotation de l'aube et du fait que sa pénétration dans l'abradable à un temps t dépend du même événement au tour précédent (voir [83]).

Chapitre 2

Problèmes aux Limites Réguliers

Sommaire

2.1 Approche Variationnelle pour Equations Différentielles à Retard 30

2.1.1 Introduction 30

2.1.2 Résultats préliminaires 32

2.1.3 Résultat principal 32

2.2 Solutions Multiples pour Equations différentielles Impulsives à Retard 37

2.2.1 Introduction 37

2.2.2 Résultats préliminaires 40

2.2.3 Résultat principal 45

2.1 Approche Variationnelle pour Equations Différentielles à Retard

2.1.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'équation différentielle fonctionnelle non autonome du second ordre suivante

$$x''(t-r) + f(t, x(t), x(t-r), x(t-2r)) = 0, \quad t \in I, \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites intégrales:

$$x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \quad \int_0^{2r} x(t)dt = 0, \tag{2.2}$$

où $r > 0$ est une constante donnée, $I = [0, 2r]$ et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses de base suivantes:

$(H1)$ $f(t, u_1, u_2, u_3)$ est une fonction de type L^∞-Carathéodory, $r-$périodique en t.

$(H2)$ Il existe une fonction $F(t, v_1, v_2)$, $r-$périodique en t, de type L^∞-Carathéodory, $F'_{v_1} = \frac{\partial F}{\partial v_1}$ et $F'_{v_2} = \frac{\partial F}{\partial v_2}$ existent et sont de type L^∞-Carathéodory telles que

$$F'_{v_1}(t, u_2, u_3) + F'_{v_2}(t, u_1, u_2) = f(t, u_1, u_2, u_3).$$

Les problèmes aux limites avec les conditions intégrales ont fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années [14, 56, 107, 110]. En particulier, pour les problèmes aux limites de second ordre sans retard avec les conditions périodique-intégrales (voir [49, 50]).

Dans la littérature, certains outils classiques ont été utilisés pour étudier ces problèmes: les théorèmes du point fixe [14], la méthode des sur et sous solutions [107], la théorie des opérateurs monotones mixtes [56], la méthode d'estimation à priori avec le théorème du point fixe de Leray-Schauder [118] et les méthodes variationnelles [62]. D'un autre côté, l'utilisation des méthodes variationnelles pour étudier l'existence de solutions périodiques pour les équations différentielles fonctionnelles est plus difficile en raison de la structure de ces équations [43, 86].

En 2005, Shu et Xu [86] ont étudié l'équation (2.1) où $f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, est $r-$périodique en t et impaire par rapport à ses trois derniers arguments. Sous des conditions additives, ils ont prouvé l'existence de solutions $2\gamma r-$périodiques pour (2.1) , où γ est un entier positif, par moyen d'une structure variationnelle combinée avec la théorie du genre.

En 2014, Ayachi et Lassoued [8] ont montré l'existence d'une solution presque-périodique au sens de Besicovitch de (2.1) en appliquant une approche variationnelle basée sur une minimisation directe. La nonlinéarité $F : \mathbb{R} \times H \times H \to \mathbb{R}$ où H est un espace de Hilbert, est différentiable, bornée sur $\mathbb{R} \times S \times S$, S étant un sous ensemble fermé borné et convexe de H, concave et lipschitzienne par rapport aux deux derniers arguments.

Motivés par les travaux cités ci-dessus, notre but est de montrer l'existence des solutions pour le problème (2.1) − (2.2) avec des hypothèses suffisantes moins fortes que celles considérées dans [86], en utilisant une approche variationnelle basée sur une minimisation directe.

2.1.2 Résultats préliminaires

Nous nous intéressons à l'existence des solutions $2r-$périodiques avec valeur moyenne nulle, nous considérons donc le sous-espace faiblement fermé E de H^1_{2r} défini par:

$$E = H^+ = \left\{ x \in H^1_{2r}, \int_0^{2r} x(t)dt = 0 \right\},$$

équipé de la norme

$$\|x\| = \left(\int_0^{2r} |x'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

équivalente à la norme $\|.\|_{H^1_{2r}}$ (1.4) , à l'aide de l'inégalité de Wirtinger (1.7).

La périodicité de f en t , implique l'équivalence de l'équation (2.1) à

$$x''(t) + f(t, x(t+r), x(t), x(t-r)) = 0. \tag{2.3}$$

Soit $y \in E$, multiplions les deux membres de l'égalité (2.3) par y et intégrons entre 0 et $2r$, nous obtenons

$$\int_0^{2r} \left[x''(t) + f(t, x(t+r), x(t), x(t-r)) \right] y(t)dt = 0.$$

De plus, puisque $y(0) = y(2r)$, nous avons

$$\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - f(t, x(t+r), x(t), x(t-r))y(t)dt = 0.$$

Définition 2.1.1 *Une solution faible de* (2.1) − (2.2) *est une fonction* $x \in E$ *telle que*

$$\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2r} f(t, x(t+r), x(t), x(t-r))y(t)dt = 0,$$

pour tout $y \in E$.

2.1.3 Résultat principal

Dans la suite, nous énnonçons un résultat principal ainsi que deux corollaires.

Théorème 2.1.1 *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites et supposons, en outre, que:*
$(H3)$ $\lim_{|v|_1 \to \infty} \frac{F(t,v_1,v_2)}{|v|_1^2} = l < \frac{\pi^2}{4r^2}$, *pour* $t \in [0, r]$, *où* $|v|_1 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, *et* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors le problème (2.1) − (2.2) *admet au moins une solution faible.*

Preuve: Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \int_0^{2r} \frac{1}{2} |x'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2r} F(t, x(t), x(t-r))dt, \tag{2.4}$$

pour tout $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(x+\varepsilon y) &= \int_0^{2r} \frac{1}{2} \left|(x+\varepsilon y)'(t)\right|^2 dt - \int_0^{2r} F(t, (x+\varepsilon y)(t), (x+\varepsilon y)(t-r))dt \\
&= \int_0^{2r} [\frac{1}{2}x'(t)^2 dt + \varepsilon x'(t)y'(t)dt + \frac{\varepsilon^2}{2}(y'(t))^2]dt - \int_0^{2r} F(t, x(t), x(t-r))dt \\
&\quad -\varepsilon \int_0^{2r} [F'_{v_1}(t, x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t), x(t-r)+\varepsilon\theta(t)y(t-r))y(t) \\
&\quad +F'_{v_2}(t, x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t), x(t-r)+\varepsilon\theta(t)y(t-r))y(t-r)]dt \\
&= \phi(x) + \varepsilon[\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \\
&\quad \int_0^{2r} F'_{v_1}(t, x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t), x(t-r)+\varepsilon\theta(t)y(t-r))x(t)dt \\
&\quad - \int_0^{2r} F'_{v_2}(t, x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t), x(t-r)+\varepsilon\theta(t)y(t-r))y(t-r)dt] \\
&\quad +\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{2r} (y'(t))^2 \, dt,
\end{aligned}$$

où $0 < \theta(t) < 1$. Alors d'après (H1) et (H2) $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ et il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
\phi'(x)y &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\phi(x+\varepsilon y) - \phi(x)) \\
&= \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2r} F'_{v_1}(t, x(t), x(t-r))y(t)dt \\
&\quad - \int_0^{2r} F'_{v_2}(t, x(t), x(t-r))y(t-r)dt.
\end{aligned}$$

D'après la périodicité de $x(t)$ de $F(t, x(t), x(t-r))$ en t, nous avons,

$$\phi'(x)y = \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2r} F'_{v_1}(t, x(t), x(t-r))y(t)dt - \int_0^{2r} F'_{v_2}(t, x(t+r), x(t))y(t)dt.$$

D'après $(H2)$, nous obtenons

$$\phi'(x)y = \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2r} f(t, x(t+r), x(t), x(t-r))y(t)dt$$

Par conséquent, les solutions faibles du problème (2.1) – (2.2) correspondent aux points critiques de ϕ. De plus, E est faiblement fermé dans H^1_{2r}, il en résulte que ϕ est faiblement semicontinue inférieurement. En effet, si $(x_n) \subset E$, $x \in E$, et $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) converge uniformément vers x sur I et $x_n \to x$ dans $L^2(I)$, et en combinant le fait que $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$, nous avons,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_0^{2r} \frac{1}{2} |x_n'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2r} F(t, x_n(t), x_n(t-r))dt \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \|x_n\|^2 - \int_0^{2r} F(t, x_n(t), x_n(t-r))dt \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - \int_0^{2r} F(t, x(t), x(t-r))dt \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

D'après $(H3)$, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{F(t,x(t),x(t-r))}{(x(t))^2+(x(t-r))^2} - l \right| < \varepsilon$, i.e.

$$F(t, x(t), x(t-r))) < (\varepsilon + l) \left[(x(t))^2 + (x(t-r))^2 \right]$$

soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{\pi^2}{4r^2} - l$, en utilisant l'inégalité de Wirtinger (1.7) et la périodicité de x, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_0^{2r} \frac{1}{2} |x'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2r} F(t, x(t), x(t-r))dt \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - (l+\varepsilon) \int_0^{2r} \left(x^2(t) + x^2(t-r) \right) dt \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - (l+\varepsilon) \left(\int_0^{2r} x^2(t)dt + \int_{-r}^{r} x^2(t)dt \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - 2(l+\varepsilon) \int_0^{2r} x^2(t)dt \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2r^2}{\pi^2} (l+\varepsilon) \right) \|x\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui montre que ϕ est coercive sur E, qui est faiblement fermé dans H^1_{2r}. D'après le théorème 1.2.3, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x^* \in E$. Alors, le problème (2.1) – (2.2) admet au moins une solution faible. Ce qui complète la preuve. ■

Exemple 2.1.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$x''(t-r)+x(t-r) \left[\sin t \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2(t-r)+x^2(t-2r)}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2(t)+x^2(t-r)}} \right) + 8 \right] = 0, \tag{2.5}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \quad \int_0^{2r} x(t)dt = 0,$$

avec $r = \frac{\pi}{3}$ *et*

$$\begin{aligned} f(t, u_1, u_2, u_3) &= u_2 \left[\sin t \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u_2^2 + u_3^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}} \right) + 8 \right] \\ &= F'_{v_1}(t, u_2, u_3) + F'_{v_2}(t, u_1, u_2), \end{aligned}$$

où

$$F(t, v_1, v_2) = \left(\sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2} \right) \sin t + 2(v_1^2 + v_2^2).$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{|v|_1 \to \infty} \frac{F(t, v_1, v_2)}{|v|_1^2} = 2 < \frac{\pi^2}{4r^2} = \frac{9}{4}.$$

En appliquant le théorème 2.1.1, le problème (2.5) − (2.2) admet au moins une solution faible.

Remarque 2.1.1 *Si F satisfait la condition suivante*

$(H3)'$ F est bornée supérieurement c-à-d. $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $F(t, v_1, v_2) \leq k$, $\forall (t, v_1, v_2) \in [0, r] \times \mathbb{R}^2$.

Alors, ϕ est coercive sur E.

Nous pouvons donc énnoncer le résultat suivant.

Corollaire Supposons (H1), (H2) et $(H3)'$ sont satisfaites, alors le problème (2.1) − (2.2) admet au moins une solution faible.

Preuve: D'après $(H3)'$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{2r} \frac{1}{2} |x'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2r} F(t, x(t), x(t - r)) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - 2r |k| . \end{aligned}$$

Alors, ϕ est coercive sur E, un sous-espace faiblement fermé de H^1_{2r}, et puisque, ϕ est semicontinue inférieurement, alors en appliquant le théorème 1.2.3, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x_0 \in E$, et par conséquent le problème (2.1)−(2.2) admet au moins une solution faible. Ce qui achève la preuve. ■

Exemple 2.1.2 *Considérons l'équation*

$$x''(t-r)-2x(t-r)\cos 2t\left(\frac{1}{\left(1+x^2(t-r)+x^2(t-2r)\right)^2}+\frac{1}{\left(1+x^2(t)+x^2(t-r)\right)^2}\right)=0, \tag{2.6}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0)-x(2r)=x'(0)-x'(2r)=0,\quad \int_0^{2r}x(t)dt=0,$$

avec $r=\pi$, *et*

$$\begin{aligned} f(t,u_1,u_2,u_3) &= -2u_2\cos 2t\left(\frac{1}{\left(1+u_2^2+u_3^2\right)^2}+\frac{1}{\left(1+u_1^2+u_2^2\right)^2}\right) \\ &= F'_{v_1}(t,u_2,u_3)+F'_{v_2}(t,u_1,u_2), \end{aligned}$$

où

$$F(t,v_1,v_2)=\frac{\cos 2t}{1+v_1^2+v_2^2}.$$

Il est facile de voir que

$$F(t,v_1,v_2)\leq 1,\ \text{pour tout } (t,v_1,v_2)\in[0,r]\times\mathbb{R}^2.$$

En appliquant le corollaire 2.1.3 le problème (2.6) − (2.2) admet au moins une solution faible.

Remarque 2.1.2 *Si* F *satisfait la condition suivante:*

$(H3)''$ $F(t,v_1,v_2)\leq av_1^2+bv_2^2+cv_1+dv_2+e$ pour tout $(t,v_1,v_2)\in[0,r]\times\mathbb{R}^2$, où $a+b<\frac{\pi^2}{2r^2}$; c, d et e sont des constantes réelles, alors ϕ est coercive sur E.

Par suite, nous pouvons énnoncer le corollaire suivant.

Corollaire Supposons (H1), (H2) et (H3)" sont satisfaites, alors le problème (2.1) − (2.2) admet au moins une solution faible.

Preuve: D'après $(H3)''$, nous avons:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{2r}\frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2dt-\int_0^{2r}F(t,x(t),x(t-r))dt \\ &\geq \frac{1}{2}\|x\|^2-\int_0^{2r}\left(ax^2(t)+bx^2(t-r)\right)dt-\int_0^{2r}\left(cx(t)+dx(t-r)\right)dt-2re \\ &\geq \frac{1}{2}\|x\|^2-(a+b)\int_0^{2r}x^2(t)dt-2re \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{\pi^2}(a+b)\right)\|x\|^2-2re \end{aligned}$$

Alors, $\phi(x)$ est coercive sur E, un sous-espace faiblement fermé de H^1_{2r}, et puisque, ϕ est semicontinue inférieurement, alors, d'après le théorème 1.2.3, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x_1 \in E$, et le problème (2.1) − (2.2) admet au moins une solution faible. Ce qui achève la preuve. ■

Exemple 2.1.3 *Considérons l'équation*

$$x''(t-r) + x(t) + x(t-r)\sin^2(4t) + x(t-2r) = 0, \tag{2.7}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \quad \int_0^{2r} x(t)dt = 0,$$

avec

$$r = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned} f(t, u_1, u_2, u_3) &= u_1 + u_2 \sin^2(4t) + u_3 \\ &= F'_{v_1}(t, u_2, u_3) + F'_{v_2}(t, u_1, u_2) \end{aligned}$$

où

$$F(t, v_1, v_2) = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2)\sin^2(4t) + v_1 v_2.$$

Il est clair que F vérifie $(H3)''$, en effet

$$F(t, v_1, v_2) \leq \frac{3}{4}(v_1^2 + v_2^2) \text{ pour tout } t \in [0, r] \times \mathbb{R}^2, \text{ et } \frac{3}{2} < \frac{\pi^2}{2r^2} = 2.$$

En appliquant le corollaire 2.1.3 le problème (2.7) − (2.2) admet au moins une solution faible.

2.2 Solutions Multiples pour Equations différentielles Impulsives à Retard

2.2.1 Introduction

Cette partie du chapitre est consacrée à l'étude de l'existence et de la multiplicité de solutions du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) = 0, & t \in \mathbb{R} \backslash \{t_j, j \in \mathbb{Z}\}, \\ -\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), & j \in \mathbb{Z}, \\ x(t) - x(t+2r) = x'(t) - x'(t+2r) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $r > 0$ et $\lambda > 0$ sont des constantes données. $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-)$ avec $x'(t_j^{\pm}) = \lim_{t \to t_j^{\pm}} x'(t)$; t_j, $(j \in \mathbb{Z})$, les instants où les impulsions se produisent sont tels que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = 2r$, $t_{j+p+1} = t_j + 2r$, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé et les fonctions f et I_j, $(j \in \mathbb{Z})$ satisfont certaines conditions données par la suite.

L'étude de l'existence et de la multiplicité de solutions pour les problèmes aux limites associées à des équations différentielles ordinaires ou fonctionnelles en présence ou bien en absence des impulsions a fait l'objet de plusieurs travaux [44, 63, 87, 88, 109, 115]. D'un autre côté, les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques ont été appliquées avec succés, pour des problèmes aux limites périodiques avec retard voir [43, 86, 112, 113].

Dans [20], H. Chen and J. Lile ont étudié l'existence de n distinctes paires de solutions nontriviales pour le problème de Dirichlet impulsif suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f(t, x(t)) = 0, \quad t \neq t_j \quad p.p.\ t \in [0, T], \\ -\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p, \\ x(t) = x(T) = 0, \end{cases}$$

où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $\lambda > 0$, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $j = 1, 2, ..., p$, $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-)$ avec $x'(t_j^{\pm}) = \lim_{t \to t_j^{\pm}} x'(t)$ pour $j = 1, 2, ..., p$.
Dans le but de généraliser [20], nous étudions dans cette partie, l'existence et la multiplicité de solutions non constantes du problème (2.8) en utilisant le Théorème 1.2.5.

Remarque 2.2.1 *Si x est une fonction $2r$-périodique connue pour $t \in [0, 2r]$, alors $x(t - r)$ est bien définie sur $[0, 2r]$. En effet, si nous posons $s := t - r$, alors $s \in [-r, r]$, donc pour $s \in [-r, 0]$, la périodicité de x implique que, $x(s) = x(s + 2r)$ avec $s + 2r \in [r, 2r]$.*
C'est pourquoi, le problème (2.8) est réduit au suivant,

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t - r)) = 0, \qquad t \in I \backslash \{t_j, j = 1, 2, ..., p\}, \\ -\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \ j = 1, 2, ..., p, \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $I = [0, 2r]$.

Pour établir notre résultat principal, nous considérons les hypothèses suivantes:

$A_1)$ (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est $r-$périodique par rapport à son premier argument t, telle que $f|_{[0,r] \times \mathbb{R}^2}$ est une fonction L^∞Carathéodory.

(ii) Il existe une fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $r-$périodique par rapport à son premier argument t, telle que $g|_{[0,r] \times \mathbb{R}^2}$ est une fonction L^∞ Carathéodory, impaire par rapport aux derniers arguments et $g'_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ existe, est L^∞ Carathéodory sur $[0,r] \times \mathbb{R}^2$ telle que,

$$f(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^y g'_x(t,x,\omega)d\omega.$$

(iii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que:

$$g(t,x,\alpha) \leq 0, \text{ si } (t,x) \in [0,r] \times (\mathbb{R} \backslash [-\alpha,\alpha]),$$

et,

$$\begin{cases} \int_0^y g'_x(t,x,\omega)d\omega \leq 0, \text{ si } x > \alpha, \ y \in \mathbb{R}. \\ \int_0^y g'_x(t,x,\omega)d\omega \geq 0, \text{ si } x < -\alpha, \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$iv)$ $\lim\limits_{|(x,y)|_2 \to 0} y^{-2} \int_0^y g(t,x,\omega)d\omega = 1$, où $|(x,y)|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme Euclidienne de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$A_2)$ $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1,...,p$, sont des fonctions continues vérifiant:

$(i) I_{j+p+1} \equiv I_j$, pour tout $j = 1,...,p$,

$(ii) I_j(-s) = -I_j(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$,

(iii) Il existe $a_j, b_j > 0$, et $\gamma_j \in [0,1)$ tels que

$$|I_j(s)| \leq a_j + b_j |s|^{\gamma_j} \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.2.2 *1. (2.8) est un problème impulsif, donc les fonctions (I_j), $j = 1,...,p$ sont non nulles.*

2. Si g est impaire par rapport à ses deux derniers arguments, alors f est *aussi impaire par rapport à ses deux derniers arguments, en effet,*

$$\begin{aligned} g'_x(t,-x,-y) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t,-x+h,-y)-g(t,-x,-y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-g(t,x-h,y)+g(t,x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-g(t,x+h,y)+g(t,x,y)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t,x+h,y)-g(t,x,y)}{h} \\ &= g'_x(t,x,y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

alors, d'après (2.10) *nous avons*

$$\begin{aligned} f(t,-x,-y) &= g(t,-x,-y)+\int_0^{-y} g'_x(t,-x,\omega)d\omega \\ &= -g(t,x,y)-\int_0^{y} g'_x(t,-x,-\sigma)d\sigma \\ &= -\left(g(t,x,y)+\int_0^{y} g'_x(t,x,\sigma)d\sigma\right) = -f(t,x,y). \end{aligned}$$

2.2.2 Résultats préliminaires

Pour étudier l'existence des solutions du problème (2.9) , nous utilisons une approche variationnelle basée sur une minimisation avec contraintes et une application du théorème 1.2.5.

Considérons H^1_{2r} l'espace de Sobolev classique muni de la norme,

$$\|x\|_{H^1_{2r}} = \left(\int_0^{2r} |x(t)|^2\,dt + \int_0^{2r} |x'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.2.3 *Si E dénote le sous-espace faiblement fermé de H^1_{2r} défini par*

$$E := H^+ = \left\{ x \in H^1_{2r},\ \int_0^{2r} x(t)dt = 0 \right\},$$

alors, une solution du problème (2.9) *appartenant à E, est une solution $2r-$périodique non constante du problème* (2.8) .

L'inégalité de Wirtinger (1.7) conduit à:

$$\|x\| = \left(\int_0^{2r} |x'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

est équivalente à la norme $\|.\|_{H^1_{2r}}$ sur E.

L'inégalité de Hölder (1.1) implique que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_\infty \leq \sqrt{2r}\, \|x\|, \tag{2.12}$$

où, $\|x\|_\infty = \max_{t \in I} |x(t)|$ est la norme dans $C(I, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues.

Si nous notons $x_{-r}(t) := x(t-r)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors, d'après la périodicité de x, nous avons

$$\|x\|_\infty = \|x_{-r}\|_\infty \text{ et } \|x\| = \|x_r\| \ . \tag{2.13}$$

Maintenant, en s'inspirant du travail [121], nous définissons le concept de la solution pour le problème (2.9).

Pour $x \in H^2(I)$, nous avons x et x' sont absolument continues et $x'' \in L^2(I, \mathbb{R})$, alors $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-) = 0$ pour tout $t \in I$. Si $x \in H^1_{2r}$, alors x est absolument continue et $x' \in L^2(I, \mathbb{R})$. Dans ce cas, les dérivées à gauche et à droite $x'(t_j^+)$, $x'(t_j^-)$ en t_j peuvent ne pas exister, par conséquent nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.2.1 *$x \in H^1_{2r}$, est une solution classique de (2.9) si $x \in C(I, \mathbb{R})$, satisfait l'équation différentielle du problème (2.9) pour $t \neq t_j, t \in I$, $x_j := x|_{(t_j, t_{j+1})} \in H^2(t_j, t_{j+1})$ pour tout $j = 1, 2, ..., p$, les limites $x'(t_j^-)$, $x'(t_j^+)$, $j = 1, 2, ..., p$ existent, les conditions d'impulsion et les conditions aux limites $2r$-périodiques de (2.9) sont vérifiées.*

Supposons que $x \in C(I, \mathbb{R})$ satisfait les conditions périodiques du problème (2.9), et pour tout $j = 1, 2, ..., p$, t_j est tel que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = 2r$ et $x_j = x|_{(t_j, t_{j+1})} \in H^2(t_j, t_{j+1})$.

Multiplions l'équation $x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) = 0$ par $y \in H^1_{2r}$ et intégrons sur I,

$$\int_0^{2r} \left[x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) \right] y(t) dt = 0, \tag{2.14}$$

de plus, puisque $x(0)=x(2r)$, $x'(0)=x'(2r)$ et $y\in H^1_{2r}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} x''(t)y(t)dt &= \sum_{j=0}^{p}\int_{t_j}^{t_{j+1}} x''(t)y(t)dt \\
&= \sum_{j=0}^{p} x'(t)y(t)\Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt \\
&= -\sum_{j=1}^{p}\Delta x'(t_j)y(t_j) - x'(0)y(0) + x'(2r)y(2r) - \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt \\
&= -\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \sum_{j=1}^{p}\Delta x'(t_j)y(t_j) \\
&= -\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt + \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j).
\end{aligned}$$

En combinant cela avec (2.14), nous obtenons

$$\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt - \lambda\int_0^{2r} f(t,x(t),x(t-r))y(t)dt - \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j) = 0. \quad (2.15)$$

Définition 2.2.2 *Une solution faible de* (2.9) *est une fonction $x\in H^1_{2r}$ telle que* (2.15) *est satisfaite pour tout $y\in H^1_{2r}$.*

Considérons la fonctionnelle $\varphi : H^1_{2r}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2r} |x'(t)|^2\,dt - \lambda\int_0^{2r} G(t,x(t),x(t-r))dt - \sum_{j=1}^{p}\int_0^{x(t_j)} I_j(s)ds,$$

où, $G(t,x(t),x(t-r)) = \int_0^{x(t-r)} g(t,x(t),\omega)d\omega.$

φ est bien définie, continue et différentiable, en effet, pour tout $x,y\in H^1_{2r}$ et

$\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(x+\varepsilon y) - \varphi(x) &= \varepsilon \int_0^{2r} x'(t) y'(t) dt \\
&\quad -\lambda[\varepsilon \int_0^{2r} \left(\int_0^{x(t-r)+\varepsilon y(t-r)} g'_x(t, x(t) + \theta(t)\varepsilon y(t), \omega) d\omega y(t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^{2r} \left(\int_{x(t-r)}^{x(t-r)+\varepsilon y(t-r)} g(t, x(t), \omega) d\omega y(t) \right) dt] + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{2r} (y'(t))^2 dt \\
&\quad - \sum_{j=1}^{p} \left(\int_{x(t_j)}^{x(t_j)+\varepsilon y(t)} I_j(s) ds \right), \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

où $0 \leq \theta(t) \leq 1$.
D'après la périodicité de g, x et y, et en utilisant un théorème très connu d'analyse, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x(t-r)}^{x(t-r)+\varepsilon y(t-r)} g(t, x(t), \omega) d\omega &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x(t+r)}^{x(t+r)+\varepsilon y(t+r)} g(t+r, x(t), \omega) d\omega \\
&= g(t+r, x(t), x(t+r)) y(t+r),
\end{aligned}$$

et,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x(t_j)}^{x(t_j)+\varepsilon y(t_j)} I_j(s) ds = I_j(x(t_j)) y(t_j).$$

D'après la périodicité de g, x et y nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} g(t+r, x(t), x(t+r)) y(t+r) dt &= \int_r^{3r} g(t, x(t-r), x(t)) y(t) dt \\
&= \int_0^{2r} g(t, x(t-r), x(t)) y(t) dt \\
&= \int_0^{2r} g(t, x(t), x(t-r)) y(t) dt.
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)(y) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi(x+\varepsilon y)-\varphi(x)\right)\\
&= \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt-\sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j)\\
&\quad -\lambda\int_0^{2r}\left(\int_0^{x(t-r)} g'_x(t,x(t),\omega)d\omega+g(t,x(t),x(t-r))\right)y(t)dt\\
&= \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt-\lambda\int_0^{2r} f(t,x(t),x(t-r))y(t)dt\\
&\quad -\sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j). \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

L'intégration par parties implique,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt &= x'(2r)y(2r)-x'(0)y(0)-\sum_{j=1}^{p}\Delta x'(t_j)y(t_j)-\int_0^{2r} x''(t)y(t)dt\\
&= -\int_0^{2r} x''(t)y(t)dt+\sum_{j=1}^{p} I_j\left(x(t_j)\right)y(t_j),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\varphi'(x)(y)=\int_0^{2r}\left[-x''(t)-\lambda f(t,x(t),x(t-r))\right]y(t)dt. \qquad (2.18)$$

Ainsi, nous pouvons avoir les solutions faibles de (2.9), en cherchant les points critiques de la fonctionnelle φ.

Lemme 2.2.1 *Si $x\in H^1_{2r}$ est une solution faible du problème (2.9) alors x est une solution classique du problème (2.9).*

Preuve: Considérons $x\in H^1_{2r}$ une solution faible du problème (2.9), nous avons $x(0)=x(2r)$. D'après la définition 2.2.2, pour tout $y\in H^1_{2r}$, nous avons pour $j\in\{1,2,3,...,p\}$

$$\int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt-\lambda\int_0^{2r} f(t,x(t),x(t-r))y(t)dt-\sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j)=0. \qquad (2.19)$$

Choisissons $y\in H^1_{2r}$ tel que $y(t)=0$ pour tout $t\in[0,t_j]\cup[t_{j+1},2r]$. Alors

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} x'(t)y'(t)dt-\lambda\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t,x(t),x(t-r))y(t)dt=0. \qquad (2.20)$$

D'après la définition de la dérivée faible,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} x'(t)y'(t)dt = -\int_{t_j}^{t_{j+1}} x''(t)y(t)dt,$$

(2.20) implique que

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} x''(t)y(t)dt + \lambda \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x(t), x(t-r))y(t)dt = 0,$$

ainsi,

$$x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) = 0, \text{ pour persque tout } t \in (t_j, t_{j+1}). \tag{2.21}$$

Par conséquent, $x_j = x|_{(t_j, t_{j+1})} \in H^2(t_j, t_{j+1})$ et x satisfait l'équation du problème (2.9) pour persque tout t dans I. En intégrant (2.19), nous obtenons,

$$-\sum_{j=1}^{p} \Delta x'(t_j)y(t_j) - \int_0^{2r} \left[x''(t) - \lambda f(t, x(t), x(t-r))\right] y(t)dt - \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j) = 0. \tag{2.22}$$

Combinons (2.22) avec(2.21), nous avons pour tout $y \in H^1_{2r}$,

$$-\sum_{j=1}^{p} \Delta x'(t_j)y(t_j) = \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j),$$

alors, $\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j))$ pour tout $j = 1, 2, 3, ..., p$, et les conditions impulsives du problème (2.9) sont satisfaites. Ceci complète la preuve. ■

2.2.3 Résultat principal

Nous proposons le résultat suivant:

Théorème 2.2.1 *Si les hypothèses (A_1) et (A_2) sont satisfaites, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe λ_n tel que pour $\lambda > \lambda_n$, le problème (2.9) a au moins n distinctes paires de solutions 2r-périodiques non constantes.*

Preuve: Nous procédons en cinq étapes.
Etape 1: Modification du problème.
Considérons la fonction modifiée $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par,

$$h(t, x, y) = \begin{cases} g(t, x, \alpha), & \text{si } y > \alpha \\ g(t, x, y), & \text{si } |y| \leq \alpha \\ g(t, x, -\alpha), & \text{si } y < -\alpha \end{cases}. \tag{2.23}$$

La fonction $h(t,x,y)$ a les propriétés suivantes:
1- $r-$périodique par rapport à son premier argument t,
2- sa restriction à $[0,r]\times\mathbb{R}^2$ notée $h|_{[0,r]\times\mathbb{R}^2}$ est une fonction L^∞-Carathéodory, impaire par rapport à ses deux derniers arguments,
3- $h'_x=\frac{\partial h}{\partial x}$ existe, est une fonction L^∞-Carathéodory sur $[0,r]\times\mathbb{R}^2$.
Maintenant, définissons $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, par

$$F(t,x,y)=h(t,x,y)+\int_0^y h'_x(t,x,\omega)d\omega, \tag{2.24}$$

et considérons le problème modifié

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda F(t,x(t),x(t-r))=0, \ t\neq t_j, \ t\in I, \\ -\Delta x'(t_j)=I_j(x(t_j)), \ j=1,2,...,p, \\ x(0)-x(2r)=x'(0)-x'(2r)=0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Etape 2: les solutions du problème (2.25) sont solutions du problème (2.9).
En effet, soit x_0 une solution du problème (2.25), nous devons montrer que c'est une solution du problème (2.9). D'après (2.24), il suffit de montrer que $|x_0(t)|\leq\alpha$ pour tout $t\in I$, $t\neq t_j$.
Premièrement, si $\max\limits_{0\leq t\leq 2r}x_0(t)>\alpha$, alors il existe un intervalle $[a,b]\subset I$, tel que

$$x_0(a)=x_0(b)=\alpha, \text{ et } x_0(t)>\alpha \text{ pour tout } t\in(a,b), t\neq t_j \tag{2.26}$$

d'après la $r-$périodicité de g et h, la $2r-$périodicité de x_0, et $(A_1)(iii)$ nous avons, pour presque tout $t\in[a,b]$,

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= -\lambda F(t,x_0(t),x_0(t-r)) \\ &= -\lambda\left[h(t,x_0(t),x_0(t-r))+\int_0^{x_0(t-r)} h'_x(t,x_0(t),\omega)d\omega\right] \\ &= -\lambda\left[h(t,x_0(t-r),x_0(t))+\int_0^{x_0(t-r)} h'_x(t,x_0(t),\omega)d\omega\right] \\ &= -\lambda\left[g(t,x_0(t-r),\alpha)+\int_0^{x_0(t-r)} h'_x(t,x_0(t),\omega)d\omega\right] \\ &= -\lambda\left[g(t,x_0(t),\alpha)+\int_0^{x_0(t-r)} h'_x(t,x_0(t),\omega)d\omega\right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Alors, $x_0'(t)$ est croissante pour presque tout $t \in [a,b]$. D'après $x_0'(a) \geq 0$ et $x_0'(b) \leq 0$,nous avons

$$0 \leq x_0'(a) \leq x_0'(t) \leq x_0'(b) \leq 0, \text{ pour presque tout } t \in [a,b]. \tag{2.27}$$

Cela veut dire que, $x_0'(t) = 0$ pour presque tout $t \in [a,b]$. Donc, x_0 est constante pour presque tout $t \in [a,b]$, ce qui contredit (2.26) .Alors $\max\limits_{0 \leq t \leq 2r} x_0(t) \leq \alpha$, pour presque tout $t \in I$. D'une façon similaire, nous pouvons prouver que $\min\limits_{0 \leq t \leq 2r} x_0(t) \geq -\alpha$, pour presque tout $t \in I$. Alors, $x_0(t)$ est solution du problème (2.9).
Considérons la fonctionnelle $\psi : H^1_{2r} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2r} |x'(t)|^2 \, dt - \lambda \int_0^{2r} H(t, x(t), x(t-r))dt - \sum_{j=1}^{p} \int_0^{x(t_j)} I_j(s)ds, \tag{2.28}$$

où $H(t, x(t), x(t-r)) = \int\limits_0^{x(t-r)} h(t, x(t), \omega)d\omega.$
D'après (2.18), ψ est bien définie, différentiable et,

$$\psi'(x)(y) = \int_0^{2r} \left[-x''(t) - \lambda F(t, x(t), x(t-r))\right] y(t)dt. \tag{2.29}$$

Par conséquent, l'équation d'Euler correspondante à la fonctionnelle ψ est

$$x''(t) + \lambda F(t, x(t), x(t-r)) = 0. \tag{2.30}$$

Alors, nous pouvons avoir les solutions $2r-$périodiques nontriviales du problème (2.25), en cherchant les points critiques de la fonctionnelle ψ. Intéressés par des solutions non constantes du problème (2.9), nous allons minimiser la fonction ψ sur le sous-espace E de H^1_{2r}.
Il est clair que d'après (2.28), $(A_1)(ii)$ et $(A_2)(i)$, $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ est une fonctionnelle paire vérifiant $\psi(0) = 0$.
Etape 3: ψ est bornée inférieurement.
En effet, d'après la périodicité de $x(t)$ et $x(t-r)$, nous obtenons $\max\limits_{t \in I} |x(t)| = \max\limits_{t \in I} |x(t-r)|$, alors, nous avons

$$\max_{t \in I} |x(t)| \leq \alpha \Longleftrightarrow \max_{t \in I} |x(t-r)| \leq \alpha. \tag{2.31}$$

D'après $(A_1)(iii)$ et (2.31), si $x(t-r) > \alpha$ alors $x(t) > \alpha$, $h(t, x(t), x(t-r)) = g(t, x(t), \alpha) \leq 0$ et $x(t-r)h(t, x(t), x(t-r)) \leq 0$, de même, si $x(t-r) < -\alpha$ alors $x(t) < -\alpha$, $h(t, x(t), x(t-r)) = g(t, x(t), -\alpha) = -g(t, -x(t), \alpha) \geq 0$ et $x(t-r)h(t, x(t), x(t-r)) \leq 0$. Donc, nous obtenons pour $|x(t-r)| > \alpha$,

$$x(t-r)h(t, x(t), x(t-r)) \leq 0. \tag{2.32}$$

D'un autre côté, d'après (2.23), h est intégrable par rapport au premier argument, continue par rapport au second et au troisième argument, ceci implique pour tout $x \in H^1_{2r}$, $\int_0^{2r} \left(\left| \int_0^{\alpha} h(t,x(t),\omega)d\omega \right| \right) dt$ est bornée.
Soit $e := \int_0^{2r} \left(\left| \int_0^{\alpha} h(t,x(t),\omega)d\omega \right| \right) dt$, alors d'après (2.32),

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} H(t,x(t),x(t-r))dt &= \int_0^{2r} \left(\int_0^{x(t-r)} h(t,x(t),\omega)d\omega \right) dt \\
&= \int_0^{2r} \left(\int_0^{\alpha} h(t,x(t),\omega)d\omega + \int_{\alpha}^{x(t-r)} h(t,x(t),\omega)d\omega \right) dt \\
&\leq \int_0^{2r} \left(\left| \int_0^{\alpha} h(t,x(t),\omega)d\omega \right| \right) dt = e. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Soient $M_1 = \max\{a_1, a_2, ..., a_p\}$, $M_2 = \max\{b_1, b_2, ..., b_p\}$, d'après $(A_2)\,(ii)$, (2.12) et (2.33) nous avons, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2r} |x'(t)|^2\, dt - \lambda \int_0^{2r} H(t,x(t),x(t-r))dt - \sum_{j=1}^{p} \int_0^{x(t_j)} I_j(s)ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \lambda e - pM_1\sqrt{2r}\,\|x\| - M_2 \sum_{j=1}^{p} (2r)^{\frac{\gamma_j+1}{2}} \|x\|^{\gamma_j+1} \\
&> -\infty, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

alors, ψ est bornée inférieurement.

Etape 4: ψ satisfait la condition de Palais-Smale .
En effet, soit $\{x_k\} \subset E$ telle que $\{\psi(x_k)\}$ est une suite bornée et $\lim_{k\to\infty} \psi'(x_k) = 0$.
Alors, il existe $C > 0$ telle que

$$|\psi(x_k)| \leq C.$$

D'après (2.34) nous avons

$$\frac{1}{2}\|x_k\|^2 \leq C + \lambda e + pM_1\sqrt{2r}\,\|x_k\| + M_2 \sum_{j=1}^{p} (2r)^{\frac{\gamma_j+1}{2}} \|x_k\|^{\gamma_j+1}.$$

Il s'en suit que $\{x_k\}$ est bornée dans E, puisque H^1_{2r} est réflexif, nous pouvons extraire une sous-suite faiblement convergente qu'on notera aussi $\{x_k\}$, or E est un sous-espace de H^1_{2r} faiblement fermé, donc, $x_k \rightharpoonup x$ dans E.

Maintenant, nous allons vérifié que $\{x_k\}$ converge fortement vers x dans E. D'après (2.28) nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(\psi'\left(x_k\right)-\psi'\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)=\int_0^{2r}\left|x_k'-x'\right|^2 dt \\
&-\lambda\int_0^{2r}\left[F(t,x_k(t),x_k(t-r))-F(t,x(t),x(t-r))\right]\left(x_k(t)-x(t)\right)dt \\
&-\sum_{j=1}^{p}\left[I_j(x_k(t_j))-I_j(x(t_j))\right]\left(x_k(t_j)-x(t_j)\right), \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème 1.1.2, la faible convergence de (x_k) vers x dans E, (c-à-d. $x_k \rightharpoonup x$), implique $x_k \to x$ dans $C(I)$ et $x_k \to x$ dans $L^2(I)$. D'après la continuité de F par rapport à ses deux derniers arguments et la continuité de I_j, $j = 1, 2, ...p$, nous avons,

$$\begin{cases}
\lambda\int_0^{2r}\left[F(t,x_k(t),x_k(t-r))-F(t,x(t),x(t-r))\right]\left(x_k(t)-x(t)\right)dt\to 0, \\
\sum_{j=1}^{p}\left[I_j(x_k(t_j))-I_j(x(t_j))\right]\left(x_k(t_j)-x(t_j)\right)\to 0,\ \text{quand } k\to\infty.
\end{cases} \qquad (2.36)$$

Daprès $\lim_{k\to\infty}\psi'\left(x_k\right)=0$ et $x_k \rightharpoonup x$, nous obtenons

$$\left(\psi'\left(x_k\right)-\psi'\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)\to 0,\ \text{quand } k\to\infty. \qquad (2.37)$$

(2.35) , (2.36) , (2.37) et $x_k \to x$ dans $L^2(I)$ impliquent que $\|x_k - x\| \to 0$, quand $k \to \infty$; cela veut dire que, $\{x_k\}$ est fortement convergente vers x dans E, ce qui montre que ψ satisfait la condition de Palais-Smale.

Etape 5: On montre qu'il existe un ensemble $K \subset E$ tel que K est homéomorphe à S^{n-1} (la sphère unité $(n-1)$-dimensionnelle) par une application impaire et $\sup_{x\in K}\psi(x) < 0$.

Soit $\nu_m = \frac{\sqrt{r}}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{r}t$, $m = 1, 2, ..., n$, alors,

$$\|\nu_m\|^2=\int_0^{2r}\left|\nu_m'(t)\right|^2 dt=\frac{1}{r}\int_0^{2r}\sin^2\frac{m\pi}{r}tdt=1,\ \ m=1,2,...,n.$$

Pour tout $\rho > 0$, définissons

$$K_n(\rho)=\left\{\sum_{m=1}^{n}c_m\nu_m;\sum_{m=1}^{n}c_m^2=\rho^2\right\}\subset E, \qquad (2.38)$$

alors, il existe un homéomorphisme impaire $J : K_n(\rho) \to S^{n-1}$, où S^{n-1} est la sphère unité $(n-1)$-dimensionnelle. D'après $(A_1)\,(iv)$, nous avons, pour tout

$0 < \varepsilon < 1$, il existe $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, $\|x\|_\infty^2 + \|x_r\|_\infty^2 \leq \delta_\varepsilon$, c-à-d. $\|x\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\delta_\varepsilon}{2}} := \delta$ implique

$$H(t, x(t), x(t-r)) = \int_0^{x(t-r)} h(t, x(t), \omega) d\omega \geq (1-\varepsilon)\, x^2(t-r).$$

Considérons ρ tel que $0 < \rho < \min\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{2r}}, \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right\}$, alors $\|x\|_\infty \leq \sqrt{2r}\,\|x\| = \sqrt{2r}\rho < \min\{\alpha, \delta\}$ pour tout $x \in K_n(\rho)$.
Ainsi, pour tout $x \in K_n(\rho)$

$$\int_0^{2r} H(t, x(t), x(t-r)) dt \geq (1-\varepsilon) \int_0^{2r} x^2(t-r) dt = (1-\varepsilon) \int_0^{2r} x^2(t) dt > 0.$$

Soit β_n et σ_n définis par

$$\beta_n = \inf_{x \in K_n(\rho)} \int_0^{2r} H(t, x(t), x(t-r)) dt; \;\; \sigma_n = \inf_{x \in K_n(\rho)} \sum_{j=1}^{p} \int_0^{x(t_j)} I_j(s) ds,$$

d'où, $\beta_n > 0$. Si $\lambda_n = \max\left\{\left(\frac{\rho^2}{2} - \sigma_n\right)(\beta_n)^{-1}, 0\right\}$, alors, pour tout $x \in K_n(\rho)$, nous avons

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \frac{\rho^2}{2} - \lambda\beta_n - \sigma_n \\ &< \frac{\rho^2}{2} - \lambda_n\beta_n - \sigma_n \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème 1.2.5 sont satisfaites ainsi, ψ possède au moins n distinctes paires de points critiques. Alors, le problème (2.25) admet au moins n distinctes paires de solutions $2r-$ périodiques non constantes, nous concluons que le problème (2.9) admet au moins n distinctes paires de solutions $2r-$ périodiques non constantes.

■

Exemple 2.2.1 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-r)) = 0, & t \neq t_j, \; t \in [0, 2r], \\ -\Delta x'(t_j) = \sqrt[3]{x(t_j)}, & j = 1, 2, \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \end{cases} \tag{2.39}$$

où,

$$f(t, x(t), x(t-r)) = 2x(t-r)\left[1 - 2(1 + \sin^2(\frac{\pi t}{r}))\left((x^2(t) + x^2(t-r)) + 2x(t)x(t-r)\right)\right],$$

et

$$I_j(x(t_j)) = \sqrt[3]{x(t_j)}, \qquad j = 1, 2.$$

Nous avons

$$g(t, x(t), x(t-r)) = 2x(t-r) - 4\left[1 + \sin^2(\frac{\pi t}{r})\right]\left[x^2(t) + x^2(t-r)\right]x(t-r),$$

donc

$$g(t, x_1, x_2) = 2x_2 - 4\left[1 + \sin^2(\frac{\pi t}{r})\right]\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_2,$$

et

$$I_j(s) = s^{\frac{1}{3}}, \ j = 1, 2.$$

Pour éviter les détails du calcul, nous donnerons les principales étapes de vérification des hypothèses (A_1) et (A_2) du théorème2.2.1.

Pour $r = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 1$, les conditions (A_1) et (A_2) du théorème 2.2.1 sont vérifiées.
En effet,

$$I_j(-s) = (-s)^{\frac{1}{3}} = -s^{\frac{1}{3}}, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

et

$$|I_j(s)| = \left|s^{\frac{1}{3}}\right| \leq 1 + |s|^{\frac{1}{3}}.$$

Soit $\rho = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$, d'après la définition (2.38) de $K_n(\rho)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \inf_{x\in K_n(\rho)} \int_0^{\pi} \int_0^{x(t-\frac{\pi}{2})} 2\omega - 4\left[1 + \sin^2(2t)\right]\left(x^2(t) + \omega^2\right)\omega d\omega \\
&= \inf_{x\in K_n(\rho)} \int_0^{\pi} x^2(t - \frac{\pi}{2}) - \left[1 + \sin^2(2t)\right]\left[2x^2(t)x^2(t - \frac{\pi}{2}) + x^4(t - \frac{\pi}{2})\right] dt \\
&> \inf_{x\in K_n(\rho)} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(t - \frac{\pi}{2})dt \\
&= \inf_{x\in K_n(\rho)} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(t)dt > \frac{\rho^2}{2n^2},
\end{aligned}$$

et

$$\sigma_n = \inf_{x\in K_n(\rho)} -\sum_{j=1}^{2}\int_0^{x(t_j)} s^{\frac{1}{3}}ds = \inf_{x\in K_n(\rho)} -\sum_{j=1}^{2}\frac{3}{4}|x(t_j)|^{\frac{4}{3}} > -\frac{3}{2},$$

alors,

$$\lambda_n = \left(\frac{\rho^2}{2} - \sigma_n\right)(\beta_n)^{-1} < (1 + 48\pi)\,n^2.$$

Appliquons le théorème 2.2.1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, quand $\lambda > (1 + 48\pi)\,n^2$, le problème (2.39) a au moins n distinctes paires de solutions $2r-$ périodiques non constantes.

Chapitre 3

Problèmes aux Limites Singuliers

Sommaire

3.1 Solutions Périodiques Positives pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard . . . 53

3.1.1 Introduction 53

3.1.2 Résultats préliminaires 54

3.1.3 Résultat principal 55

3.2 Solutions Périodiques pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard avec Terme Amorti. 64

3.2.1 Introduction 64

3.2.2 Résultats préliminaires 65

3.2.3 Résultat principal 66

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour des problèmes aux limites périodiques associés à des équations différentielles non linéaires à retard sous l'effet des impulsions et dont la nonlinéarité présente une singularité. Nous adopterons une approche variationnelle basée sur le théorème du col 1.2.4.

3.1 Solutions Périodiques Positives pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard .

3.1.1 Introduction

Dans cette première partie du chapitre 3, nous nous intéressons à l'existence de solutions positives périodiques pour une EDR où la nonlinéarité $\mathcal{F}(t, \lambda(t), x(t-r), x(t), x(t+r)) = \lambda(t)x(t) - f(t, x(t-r))$ avec f présentant une singularité par rapport à sa deuxième variable, nous developpons l'article [31].

Les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques ont été utilisées avec succès pour étudier les équations différentielles impulsives lorsque la non-linéarité est régulière. Le travail de pionnier dans cette direction est dû à Nieto et O'Regan [71], qui en utilisant la minimisation et le théorème du col, ont prouvé la solvabilité du problème impulsif du second ordre (sans retard et sans singularité), suivant

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda x(t) = f(t, x(t)), \ t \neq t_j, t \in [0, T], \\ x(0) = x(T) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p, \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues.

Toujours en utilisant le théorème du col, dans [19] les auteurs ont prouvé l'existence d'au moins une solution $2\pi-$périodique pour le système différentiel à retard impulsif (sans singularité) suivant,

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) = -f(t, x(t-\pi)), \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \\ x(t) - x(t+2\pi) = x'(t) - x'(t+2\pi) = 0 \\ \Delta x'(t_j) = g_j(x(t_j - \pi)). \end{cases},$$

où, $j \in \mathbb{Z}$, f :$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\pi-$périodique en t et satisfaisant certaines conditions techniques. t_j, $j \in \mathbb{Z}$ sont les instants où les impulsions se produisent; il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = \pi$, $t_{j+p+1} = t_j + \pi$; g_j, $j \in \mathbb{Z}$, sont continues; et $g_{j+p+1} \equiv g_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Les problèmes aux limites singuliers sans impulsions ont fait l'objet des travaux [3, 4, 13, 66], cependant, peu de documents ont abordé le cas des problèmes aux limites impulsifs avec une non-linéarité singulière [30, 92, 93]. En fait, il semble que le travail [93] soit le premier article de cette ligne.

Motivés par ce qui précède, nous nous intéressons dans ce chapitre, à l'étude du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda(t)x(t) = f(t, x(t-r)), \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{t_j, j \in \mathbb{Z}\}, \\ x(t) - x(t+2r) = x'(t) - x'(t+2r) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est une constante donnée, $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-)$ avec $x'(t_j^\pm) = \lim_{t \to t_j^\pm} x'(t)$; t_j, $j \in \mathbb{Z}$ sont les instants où les impulsions se produisent; il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1} = 2r$, $t_{j+p+1} = t_j + 2r$; et les fonctions f, λ et I_j, $j \in \mathbb{Z}$ vérifient des conditions spécifiées par la suite.
Dans ce travail, nous déterminons des conditions suffisantes simples garantissant l'existence d'au moins une solution 2r-périodique positive pour le problème (3.1) lorsque la non-linéarité f est singulière en 0 et les impulsions sont indépendantes du retard, contrairement au travail de D. Chen et B. Dai [19] dans lequel, les impulsions dépendent du retard.

3.1.2 Résultats préliminaires

La recherche des solutions $2r-$périodiques du problème (3.1) est alors réduite à la recherche des solutions du problème suivant:

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda(t)x(t) = f(t, x(t-r)), \ t \in I \backslash \{t_j, j = 1, 2, ..., p\} \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $I = [0, 2r]$.

Pour $x, y \in H^1_{2r}$ nous définissons le produit scalaire $(.,.)$ et la norme $\|.\|$ par

$$(x, y) = \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt + \int_0^{2r} \lambda(t)x(t)y(t)dt,$$

et

$$\|x\| = \left(\|x'\|^2_{L^2} + \left\| \sqrt{\lambda} x \right\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

H^1_{2r} muni de la norme $\|.\|$ est un espace de Hilbert réflexif.

En comparant la norme $\|x\|$ avec la norme $\|x\|_{L^2}$, nous trouvons

$$\|x\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \|x\| \quad \text{où, } \alpha = \underset{t}{essinf} \lambda(t). \tag{3.3}$$

Pour tout $x \in H^1_{2r}$, si nous notons par $x_{-r}(t) := x(t-r)$ pour $t \in \mathbb{R}$, d'après un résultat élémentaire d'analyse, nous avons que si x est une fonction T-périodique, alors $\int_0^T x(t)dt = \int_a^{T+a} x(t)dt$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $x \in H^1_{2r}$,

$$\|x_{-r}\| = \|x\|. \tag{3.4}$$

Pour tout $x \in H^1_{2r}$, nous avons (voir [15])

$$\|x\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|x'\|_{L^2}. \tag{3.5}$$

Maintenant, nous introduisons le concept de solution pour le problème (3.2). Soit $H^2(a,b) = \{x : (a,b) \to \mathbb{R};\ x,\ x' \text{ sont absolument continues},\ x'' \in L^2(a,b)\}$. Pour $x \in H^2(0,2r)$, x et sa dérivée x' sont absolument continues et $x'' \in L^2(0,2r)$. Par conséquent $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-) = 0$ pour chaque $t \in I$. Si $x \in H^1_{2r}$, alors x est absolument continue et $x' \in L^2(0,2r)$. Dans ce cas, les dérivées à droite et à gauche $x'(t_j^+)$, $x'(t_j^-)$ peuvent ne pas exister. Pour cela, nous devons introduire un concept différent de solution.

Définition 3.1.1 *$x \in H^1_{2r}$ est une solution de (3.2), si $x \in C(I)$, pour chaque $j = 1, 2, ..., p$, $x_j := x|_{(t_j,t_{j+1})} \in H^2(t_j, t_{j+1})$ et satisfait l'équation différentielle du (3.2), pour $t \neq t_j$, les limites $x'(t_j^-)$, $x'(t_j^+)$ $j = 1, 2, ..., p$ existent, les conditions impulsives et les conditions aux limites 2r-périodiques de (3.2) sont vérifiées.*

3.1.3 Résultat principal

Dans cette section, en utilisant une méthode variationnelle nous montrons l'existence d'au moins une solution positive pour le problème (3.2) qui est considéré sous les hypothèses suivantes,

(H_1) (i) $f : I \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est $2r-$périodique par rapport au permier argument t, et est une fonction L^1-Carathéodory,

(ii) $\lim_{s\to 0^+} f(t,s) = -\infty$, uniformément pour presque tout t dans I,

(iii) $K := \sup\limits_{s\in]0,+\infty[} f(.,s)$ est une fonction appartenant à $L^1(I,\mathbb{R})$,

(iv) $\lim_{s\to+\infty} F(t,s) = +\infty$, pour presque tout t dans I, où $F(t,s) := \int_1^s f(t,\xi)d\xi$, la primitive de f,

(v) $D_1F(t,s) := \frac{\partial F}{\partial t}(t,s)$ existe et est minorée par $-c$, pour presque tout t dans I, où c est une constante positive.

(H_2) (i) I_j, $j = 1, 2, ..., p$, sont continues, $I_{j+p+1} \equiv I_j$, pour tout $j = 1, ..., p$ et il existe deux constantes $m, M \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$m \leq I_j(s) \leq M < 0, \text{ pour tout } j = 1, 2, ..., p,$$

(ii) $\lambda \in L^\infty(I)$, $2r-$périodique avec $\alpha := \underset{t\in I}{infess}\lambda(t) > 0$.

Théorème 3.1.1 *Supposons que les hypothèses (H_1), et (H_2) sont satisfaites. Alors, pour $\frac{\sqrt{r}(\alpha+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\alpha^2}\|\lambda\|_{L^\infty} < 1$, le problème (3.2) a au moins une solution positive.*

Preuve: Nous utiliserons une approche variationnelle basée sur le théorème du col 1.2.4 pour prouver ce résultat et nous procédons en cinq étapes.

Etape 1: Modification du problème.

Pour éviter le point de singularité 0, nous introduisons la fonction de troncature f_β définie pour $\beta \in (0,1)$, par $f_\beta : [0,2r] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_\beta(t,s) = \begin{cases} f(t,s) & si \quad s \geq \beta \\ f(t,\beta) & si \quad s < \beta \end{cases}, \tag{3.6}$$

et nous considérons le problème modifié suivant,

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda(t)x(t) = f_\beta(t, x(t-r)), \; t \in I \backslash \{t_j, j = 1,2,...,p\} \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1,2,...,p, \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit $F_\beta(t,s) = \int_1^s f_\beta(t,\xi)d\xi$, la primitive de f_β, nous définissons la fonctionnelle $\Phi_\beta : \; H^1_{2r} \to \mathbb{R}$ par,

$$\Phi_\beta(x) = \frac{1}{2} \; \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{p} \int_0^{x(t_j)} I_j(s)ds - \int_0^{2r} F_\beta(t, x(t-r))dt. \tag{3.8}$$

(H_1) et (H_2), impliquent que Φ_β est bien définie, faiblement semi-continue inférieurement sur H^1_{2r} et est continument différentiable, dont la fonctionnelle dérivée $\Phi'_\beta(x)$ est donnée par,

$$\begin{aligned} \Phi'_\beta(x).y \quad = & \int_0^{2r} x'(t)y'(t)dt + \int_0^{2r} \lambda(t)x(t)y(t)dt + \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))y(t_j) \\ & - \int_0^{2r} f_\beta(t, x(t-r))y(t)dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

les points critiques de Φ_β sont les solutions faibles de (3.7). Donc, pour prouver l'existence des solutions du problème (3.2), nous montrons l'existence des points critiques de Φ_β qui sont plus grands qu'un certain β.

Etape 2: La fonctionnelle Φ_β satisfait la condition de Palais-Smale.

En effet, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H^1_{2r} telle que $\{\Phi_\beta(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\Phi'_\beta(x_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$; c-à-d, il existe une constante $c_1 > 0$ et une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ telles que pour tout n assez large,

$$\left| \frac{1}{2} \; \|x_n\|^2 - \int_0^{2r} F_\beta(t, x_n(t-r))dt + \sum_{j=1}^{p} \int_0^{x_n(t_j)} I_j(s)ds \right| \leq c_1,$$

et pour tout $y \in \; H^1_{2r}$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} \int_0^{2r} x'_n(t)y'(t)dt + \\ \int_0^{2r} \lambda(t)x_n(t)y(t)dt + \sum_{j=1}^{p} I_j(x_n(t_j))y(t_j) - \int_0^{2r} f_\beta(t, x_n(t-r))y(t)dt \end{array} \right| \\ \leq \; & \varepsilon_n \|y\| \, . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Maintenant, nous montrons que $\{x_n\}$ est bornée dans H^1_{2r}. Prenons $y \equiv 1$ dans (3.10), nous obtenons, pour tout n assez large,

$$\left| \int_0^{2r} [f_\beta(t, x_n(t-r)) - \lambda(t)x_n(t)]\, dt - \sum_{j=1}^{p} I_j(y_n(t_j)) \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{2r}.$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{2r} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \right| &\leq \varepsilon_n \sqrt{2r} + \int_0^{2r} |\lambda(t)x_n(t)|\, dt + \sum_{j=1}^{p} |I_j(x_n(t_j))| \\
&\leq \varepsilon_n \sqrt{2r} + \|\lambda x_n\|_{L^1} + p\,|m| \\
&\leq c_2 + \|\lambda x_n\|_{L^1}, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

où $c_2 := \varepsilon_n \sqrt{2r} + p\,|m|$.
Soit

$$I_{1,n} := \{t \in [0, 2r]\,;\ f_\beta(t, x_n(t-r)) \geq 0\},$$

et

$$I_{2,n} := \{t \in [0, 2r]\,;\ f_\beta(t, x_n(t-r)) < 0\}.$$

Il résulte de (3.11) que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{I_{2,n}} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \right| &\leq c_2 + \|\lambda x_n\|_{L^1} + \int_{I_{1,n}} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \\
&\leq c_2 + \|\lambda x_n\|_{L^1} + \|K\|_{L^1}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Alors, d'après (3.12) nous avons pour tout n:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} |f_\beta(t, x_n(t-r))|\, dt &= \left| \int_{I_{2,n}} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \right| + \int_{I_{1,n}} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \\
&\leq c_2 + \|\lambda x_n\|_{L^1} + 2 \int_{I_{1,n}} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \\
&\leq c_2 + \|\lambda x_n\|_{L^1} + 2\,\|K\|_{L^1} \\
&\leq c_3 + \|\lambda x_n\|_{L^1}, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

où $c_3 := c_2 + 2\,\|K\|_{L^1}$.
D'un autre côté, si nous prenons, dans (3.10), $y(t) = x_n(t)$, en tenant compte de $(H_2)(ii)$, (3.13), (3.5) et $\frac{\sqrt{r}(\alpha+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\alpha^2}\,\|\lambda\|_{L^\infty} < 1$, nous trouvons pour tout n assez

large,

$$
\begin{aligned}
c_4 \|x_n\| &\geq \|x_n\|^2 - \int_0^{2r} f_\beta(t, x_n(t-r)) x_n(t) dt + \sum_{j=1}^{p} I_j(x_n(t_j)) x_n(t_j) \\
&\geq \|x_n\|^2 - (c_3 + \|\lambda x_n\|_{L^1}) \|x_n\|_{L^\infty} + pm \|x_n\|_{L^\infty} \\
&\geq \|x_n\|^2 - \sqrt{2r} \|\lambda\|_{L^\infty} \|x_n\|_{L^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|x_n\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|x_n'\|_{L^2} \right) + (c_3 - pm) \|x_n\|_{L^\infty} \\
&= \|x_n\|^2 - \sqrt{r} \|\lambda\|_{L^\infty} \|x_n\|_{L^2}^2 - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \|\lambda\|_{L^\infty} \|x_n\|_{L^2} \|x_n'\|_{L^2} + (c_3 - pm) \|x_n\|_{L^\infty} \\
&\geq \|x_n\|^2 - \frac{\sqrt{r}(\alpha + \sqrt{2})}{\sqrt{2}\alpha^2} \|\lambda\|_{L^\infty} \|x_n\|^2 + (c_3 - pm) \|x_n\|_{L^\infty} \\
&\geq \left(1 - \frac{\sqrt{r}(\alpha + \sqrt{2})}{\sqrt{2}\alpha^2} \|\lambda\|_{L^\infty} \right) \|x_n\|^2 - c_4 \|x_n\|,
\end{aligned}
$$

pour une certaine constante $c_4 > 0$. Il s'en suit que $\{x_k\}$ est bornée dans H_{2r}^1. Ce dernier étant un espace réflexif, nous pouvons extraire une sous-suite faiblement convergente qu'on notera aussi $\{x_k\}$, donc il existe u dans H_{2r}^1, telle que $x_k \rightharpoonup x$. Ensuite, nous allons vérifier que $\{x_k\}$ est fortement convergente vers x dans H_{2r}^1. D'après (3.9) nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left(\Phi_\beta' (x_k) - \Phi_\beta' (x) \right) (x_k - x) \qquad (3.14) \\
= \ & \|x_k - x\|^2 - \int_0^{2r} \left[f_\beta(t, x_k(t-r)) - f_\beta(t, x(t-r)) \right] (x_k(t) - x(t)) \, dt \\
&+ \sum_{j=1}^{p} \left[I_j(x_k(t_j)) - I_j(x(t_j)) \right] (x_k(t_j) - x(t_j)),
\end{aligned}
$$

puisque $x_k \rightharpoonup x$ dans H_{2r}^1, et d'après le théorème des inclusions de Sobolev 1.1.2, nous avons $x_k \to x$ dans $C(I)$ et $x_k \to x$ dans $L^2(I)$. Ainsi,

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^{2r} \left[f_\beta(t, x_k(t-r)) - f_\beta(t, x(t-r)) \right] (x_k(t) - x(t)) \, dt \to 0, \\
\sum_{j=1}^{p} \left[I_j(x_k(t_j)) - I_j(x(t_j)) \right] (x_k(t_j) - x(t_j)) \to 0, \text{ quand } k \to \infty.
\end{cases} \qquad (3.15)
$$

De $\lim_{k\to\infty} \Phi_\beta(x_k) = 0$ et $x_k \rightharpoonup x$, nous déduisons que

$$
\left(\Phi_\beta' (x_k) - \Phi_\beta' (x) \right) (x_k - x) \to 0, \text{ quand } k \to \infty. \qquad (3.16)
$$

D'après (3.14), (3.15), (3.16), et $x_k \to x$ dans $L^2(I)$ nous obtenons $\|x_k - x\| \to 0$, quand $k \to \infty$. Alors, $\{x_k\}$ est fortement convergente vers x dans H_{2r}^1, ce qui signifie que Φ_β satisfait la condition de Palais-Smale.

Maintenant, nous procédons à montrer que Φ_β a une géométrie de passe-montagne.
Soit

$$\Lambda := \left\{ x \in H^1_{2r}; \min x > 1 \right\},$$

et,

$$\partial\Lambda = \left\{ x \in H^1_{2r}; x(t) \geq 1 \text{ pour tout } t \in (0, 2r)\,, \exists t_x \in (0, 2r) : x(t_x) = 1 \right\}.$$

Etape 3: Il existe $d > 0$ tel que $\inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x) \geq -d$.
En effet, pour $x \in \partial\Lambda$, il existe $t_x \in (0, 2r)$ tel que $\inf_{t\in I} x(t) = x(t_x) = 1$, alors $t_x \in]t_{i-1}, t_i[$ pour un certain i, $1 \leq i \leq p$. D'après la $2r$-périodicité de x, x', F_β et I_j, en tenant compte de (3.4) nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(x) &= \frac{1}{2}\int_{t_x}^{t_x+2r} \left[(x'(t))^2 + \lambda(t)(x(t))^2\right] dt - \int_{t_x}^{t_x+2r} F_\beta(t, x(t-r))dt \\
&\quad + \sum_{j=i}^{p+i-1} \int_0^{x(t_j)} I_j(s)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_x}^{t_x+2r} \left[(x'(t))^2 + \lambda(t)(x(t))^2\right] dt - \int_{t_x}^{t_x+2r} F_\beta(t, x(t-r))dt \\
&\quad + \sum_{j=i}^{p+i-1} \int_0^{1} I_j(s)ds + \sum_{j=i}^{p+i-1} \int_1^{x(t_j)} I_j(s)ds \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|K_\beta\|_{L^2} \|x_{-r} - 1\|_{L^2} + pm + pm\|x - 1\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{\alpha}\|K_\beta\|_{L^2} \|x_{-r} - 1\| + pm + c_6 pm\|x - 1\| \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\|K_\beta\|_{L^2} - c_6 pm\right)\|x - 1\| + pm,
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_6 > 0$. Ainsi, l'application de l'inégalité triangulaire à $\|x - 1\|$ nous donne,

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(x) &\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\|K_\beta\|_{L^2} - c_6 pm\right)\left(\|x\| + \sqrt{2r}\right) + pm \\
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\|K_\beta\|_{L^2} - c_6 pm\right)\|x\| + pm\left(c_6 - \sqrt{2r}\right) - \frac{\sqrt{2r}}{\alpha}\|K_\beta\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus montre que

$$\Phi_\beta(x) \to +\infty \; quand \; \|x\| \to +\infty, \; x \in \partial\Lambda.$$

Nous en déduisons que Φ_β est coercive, et ainsi, elle admet une suite minimisante, la faible semicontinuité inférieure de Φ_β donne

$$\inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x) > -\infty,$$

par suite il existe $d > 0$ tel que $\inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x) \geq -d$.

Etape 4: Il existe $\beta_0 \in (0,1)$ tel que pour tout $\beta \in (0,\beta_0)$, toute solution x de (3.7) vérifiant $\Phi_\beta(x) \geq -d$ satisfait $\min x \geq \beta_0$.
Supposons par contradiction, qu'il y a des suites $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
(a) $\beta_n \leq \frac{1}{n}$,
(b) x_n est une solution de (3.7) avec $\beta = \beta_n$,
(c) $\Phi_{\beta_n}(x_n) \geq -d$,
(d) $\min x_n < \frac{1}{n}$.
D'après (H_1) (iii), et

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} \left[f_{\beta_n}(t, x_n(t-r)) - \lambda(t)x_n(t)\right] dt &= -\int_0^{2r} x_n''(t)dt \\
&= -\sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} x_n''(t)dt \\
&= -\sum_{j=0}^{p} \left(x_n'(t_{j+1}^-) - x_n'(t_j^+)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \Delta x_n'(t_j) + x_n'(0) - x_n'(2r) \\
&= \sum_{j=1}^{p} I_j(x_n(t_j)).
\end{aligned}$$

Alors, si h dénote la fonction

$$h(t) = f_{\beta_n}(t, x_n(t-r)),$$

(H_2) implique l'existence d'une constante $c_7 > 0$, telle que

$$\|h\|_{L^1} \leq c_7.$$

Par conséquent,

$$\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8, \text{ pour une certaine constante } c_8 > 0.$$

Maintenant, puisque $\Phi_{\beta_n}(x_n) \geq -d$ il en résulte qu'il doit exister deux constantes R_1 and R_2, avec $0 < R_1 < R_2$ telles que,

$$\max\{x_n(t);\quad t \in I\} \in [R_1, R_2].$$

Dans le cas contraire, par l'hypothèse (b), x_n est une solution périodique de (3.7) avec $\beta = \beta_n$, alors, x_n tendrait uniformément vers 0, et dans ce cas, en tenant compte de (H_1) (iv) et $\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8$, $\Phi_{\beta_n}(x_n)$ tendrait vers $-\infty$, ce qui contredit

$\Phi_{\beta_n}(x_n) \geq -d.$
Pour n assez large, la continuité de x_n implique qu'il existe $\tau_n^1, \tau_n^2 \in I$ tels que,

$$x_n\left(\tau_n^1 - r\right) = \frac{1}{n} < R_1 = x_n\left(\tau_n^2 - r\right).$$

Multiplions l'équation $x_n''(t) + f_{\beta_n}(t, x_n(t-r)) = \lambda(t)x_n(t)$, par $x_n'(t-r)$ et intégrons l'équation résultante sur $[\tau_n^1, \tau_n^2]$, où sur $[\tau_n^2, \tau_n^1]$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} J \quad : \quad &= \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r)dt \\ &= \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} \lambda(t)x_n(t)x_n'(t-r)dt. \end{aligned}$$

Puisque x_n, $x_n' \in L^2(I;\mathbb{R})$, et $\lambda \in L^\infty(I;\mathbb{R})$, J est bornée.
Ecrivons J comme suit,

$$J = J_1 + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt,$$

où

$$J_1 = \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r)dt,$$

puisque, $\tau_n^1, \tau_n^2 \in I$, alors il existe $1 \leq k, l \leq p$ tels que $\tau_n^1 \in]t_{k-1}, t_k[$ et $\tau_n^2 \in]t_{l-1}, t_l[$, alors, $\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8$ implique

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt \quad &\leq \quad c_8 \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)dt \\ &= \quad c_8[x_n'(\tau_n^2) - x_n'(\tau_n^1) - \sum_{j=k}^{l-1} \Delta x_n'(t_j)] \end{aligned}$$

par conséquent J_1 est bornée.
D'un autre côté, pour presque tout $t \in I$, nous avons

$$f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r) = \frac{d}{dt}F_{\beta_n}(t, x_n(t-r)) - D_1F_{\beta_n}(t, x_n(t-r)).$$

Alors,

$$J_1 = F_{\beta_n}(\tau_n^2, R_1) - F_{\beta_n}(\tau_n^1, \frac{1}{n}) - \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} D_1F_{\beta_n}(t, x_n(t-r)).$$

l'hypothèse $(H_1)\,(v)$ implique que,

$$J_1 \leq F_{\beta_n}(\tau_n^2, R_1) - F_{\beta_n}(\tau_n^1, \frac{1}{n}) + c2r.$$

Il résulte de $(H_1)\,(iv)$ que J_1 est non bornée. Ceci est une contradiction.
Par conséquent, il existe $\beta_0 \in (0,1)$ tel que pour tout $\beta \in (0,\beta_0)$, toute solution x de (3.7) vérifiant $\Phi_\beta(x) \geq -d$ satisfait $\min x \geq \beta_0$, alors d'après (3.6), x est solution de (3.2) .

Etape 5: Φ_β a une géometrie de passe-montagne pour tout $\beta \leq \beta_0$, où β_0 est défini dans l'étape4.
En effet**,** l'hypothèse $(H_1)\,(ii)$ nous permet de choisir $\beta \in (0,\beta_0]$ tel que $f(t,\beta) < 0$, uniformément pour presque tout $t \in I$.

$$\begin{aligned}
F_\beta(t,0) &= \int_1^0 f_\beta(t,s)ds = -\int_0^1 f_\beta(t,s)ds \\
&= -\int_0^\beta f_\beta(t,s)ds - \int_\beta^1 f_\beta(t,s)ds \\
&= -\int_0^\beta f(t,\beta)ds - \int_\beta^1 f_\beta(t,s)ds \\
&= -\beta f(t,\beta) - \int_\beta^1 f_\beta(t,s)ds.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$F_\beta(t,0) > -\int_\beta^1 f_\beta(t,s)ds = \int_1^\beta f_\beta(t,s)ds = F_\beta(t,\beta),$$

donc

$$\Phi_\beta(0) = -\int_0^{2r} F_\beta(t,0)dt < -\int_0^{2r} F_\beta(t,\beta)dt.$$

D'après $(H_1)\,(ii)$, nous pouvons considérer $\beta \in (0,\beta_0]$ tel que

$$F_\beta(t,\beta) > \frac{d}{2r} \text{ pour presque tout } t \in I,$$

il s'en suit que $\Phi_\beta(0) < -d$.
Aussi, en utilisant (H_1) (iv) nous pouvons trouver δ, suffisamment grand ($\delta > 1$), tel que pour presque tout $t \in I$,

$$F_\beta(t,\delta) > \frac{d + \|\lambda\|_{L^\infty} r\delta^2}{2r}.$$

D'après $(H_2)\,(i)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(\delta) &= -\int_0^{2r} F_\beta(t,\delta)dt + \sum_{j=1}^{p}\int_0^\delta I_j(s)ds + \int_0^{2r}\frac{\lambda(t)\delta^2}{2}dt \\
&\leq -\int_0^{2r} F_\beta(t,\delta)dt + \|\lambda\|_{L^\infty} r\delta^2,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\Phi_\beta(\delta) < -d.$$

Puisque Λ est un voisinage de δ, $0 \notin \Lambda$ et

$$\max\{\Phi_\beta(0), \Phi_\beta(\delta)\} < \inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x).$$

Donc, nous sommes dans la situation du théorème du col 1.2.4. L'étape 2 et l'étape 5 impliquent que Φ_β admet un point critique x_β tel que

$$\Phi_\beta(u_\beta) = \inf_{\eta\in\Gamma} \max_{0\le s\le 1} \Phi_\beta(\eta(s)) \ge \inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x),$$

où

$$\Gamma := \left\{\eta \in C\left([0,1]\,; H^1_{2r}\right);\ \eta(0) = 0,\ \eta(1) = R\right\}.$$

Maintenant, puisque d'après l'étape 3, $\inf_{x\in\partial\Lambda} \Phi_\beta(x) \ge -d$, l'étape 4 implique que x_β est une solution de (3.2).
Ceci achève la preuve du résultat principal. ■

Exemple 3.1.1 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda(t)x(t) = f(t,,x(t-r)),\ t \ne t_j,\ \ 0 < t < 2r, \\ x(0) - x(2r) = x'(0) - x'(2r) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2. \end{cases} \tag{3.17}$$

où $r = \frac{1}{3}$,

$$f(t, x(t-r)) := \mu(t)\frac{\ln x(t-r)}{x(t-r)},\ 0 \le t < 2r,\ \textit{avec}\ \mu(t) = \begin{cases} t & si\ \ 0 \le t \le r \\ 1 & si\ \ r < t < 2r \end{cases},$$

$$\begin{aligned} I_1(x(t_1)) \ &:= \cos(x(t_1)) - 2, \\ I_2(x(t_2)) \ &:= \frac{x(t_2)}{(x(t_2))^2 + 1} - 1, \end{aligned}$$

et,

$$\lambda(t) := \begin{cases} t + 2 & si\ 0 \le t \le r \\ 2 + \sin t & si\ r < t < 2r \end{cases}.$$

Les conditions (H_1) *et* (H_2) *du théorème 3.1.1 sont satisfaites, en effet,*
$(H_1)(i)$ $f : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; *donnée par* $f(t, s) = \mu(t)\frac{\ln s}{s}$ *est une fonction de Carathéodory,* $2r-$*périodique en* t.

(ii) $\lim_{s\to 0^+} f(t, s) = -\infty$, pour presque chaque t dans I,
(iii) Il est facile de voir que la fonction $s \mapsto \frac{\ln s}{s}$ admet un maximum au point $s = e$ et

$$\max_{s\in]0,+\infty[} \frac{\ln s}{s} = e^{-1}.$$

D'où par positivité de $\mu(t)$,

$$K(t)=\sup_{s\in]0,+\infty[} f(t,s)=\mu(t)e^{-1}$$

est une fonction dans $L^1(I,\mathbb{R})$.

(iv) Puisque $\mu(t)$ est $2r-$périodique , alors elle est bornée, donc nous avons

$$\lim_{s\to+\infty} F(t,s)=\lim_{s\to+\infty}\mu(t)\frac{(\ln s)^2}{2}=+\infty,$$

pour presque chaque t dans I.

(v) Pour tout $(t,s)\in(0,2r)\times(0,+\infty)$,

$$D_1F(t,s):=\frac{\partial F}{\partial t}(t,s)=\begin{cases}\frac{(\ln s)^2}{2} & si\ \ 0\le t\le r\\ 0 & si\ \ r<t<2r\end{cases},$$

Alors, $D_1F(t,s)\geq 0$ pour tout $s\in(0,+\infty)$ et pour presque chaque t dans I, donc il existe une constante réelle positive c telle que $D_1F(t,s)$ est minorée par $-c$.

(H_2) (i) Pour $m=-3$ et $M=-\frac{1}{2}$, nous avons

$$m\le I_j(s)\le M<0,\ \text{pour tout}\ s\in\mathbb{R},\text{et}\ \ j=1,2.$$

$(ii)\lambda\in L^\infty(I)$ avec $\alpha:=\underset{t\in I}{essinf}\,\lambda(t)=2>0$, $\|\lambda\|_{L^\infty}=2+\sin\frac{2}{3}$.

Alors, puisque $\frac{\sqrt{r}(\alpha+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\alpha^2}\|\lambda\|_{L^\infty}=0,912<1$, le problème (3.17) admet au moins une solution $\frac{2}{3}$-périodique positive.

3.2 Solutions Périodiques pour une Classe d'Equations Différentielles Impulsives à Retard avec Terme Amorti.

3.2.1 Introduction

Nombreux sont les auteurs qui ont utilisé les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques pour étudier l'existence et la multiplicité de solutions pour des problèmes aux limites amortis avec ou sans singularité [111, 63, 61]. Mais, cette méthode a rarement été utilisée pour les problèmes périodiques amortis associés à des EDRs.

En 2010, Nieto [72] a introduit le concept d'une solution faible pour une équation linéaire amortie avec des conditions aux limites de Dirichlet et des impulsions. Il a utilisé le théorème classique de Lax-Milgram pour révéler la structure variationnelle du problème et obtenir l'existence et l'unicité de solution faible. Cela, a permis par la suite de traiter les problèmes non linéaires amortis et de rechercher des solutions en tant que points critiques de fonctionnelles d'énergie associées.

Dans cette seconde partie, nous développons l'article [32] en étudiant l'existence de solutions T-périodiques positives de l'équation différentielle nonlinéaire à retard du second ordre avec un terme amorti,

$$x''(t) + q(t)x'(t) + f(t, x(t-r)) = 0, \ t \neq t_j \ , \ 0 < t < T, \tag{3.18}$$

avec les conditions impulsives,

$$\Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p, \tag{3.19}$$

où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est une constante donnée, $f : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est $T-$périodique en t, avec T une constante positive arbitraire et $f(t, .)$ est singulière en 0; $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-)$ avec $x'(t_j^\pm) = \lim_{t \to t_j^\pm} x'(t)$; t_j, $j = 1, 2, ..., p$ sont les instants où les impulsions se produisent; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = 2r$, $t_{j+p+1} = t_j + 2r$; I_j, $(j = 1, 2, ..., p)$ sont continues et $I_{j+p+1} \equiv I_j$, les fonctions q, f et I_j satisfont certaines hypothèses spécifiées ci-dessous.

Nous devons faire la remarque que Li et al.[61] ont étudié un cas particulier du problème T-périodique (3.18) − (3.19),

$$x''(t) + q(t)x'(t) + f(x(t)) = g(t), \ , \ 0 < t < T,$$

où $r = 0$, I_j, $(j = 1, 2, ..., p)$ sont nulles. En utilisant une approche variationnelle, ils ont établi l'existence d'une solution dans le cas où $f \in C((0, +\infty), \mathbb{R})$ est singulière en 0 et les fonctions q et g sont continues, vérifiant des conditions supplémentaires.
Dans le but d'améliorer le résultat [61]; nous avons introduit les effets combinés: impulsions et retard. Sous des conditions suffisantes, nous allons prouvé l'existence d'au moins une solution T-périodique positive du problème (3.18) − (3.19) en se basant sur le théorème du col.

3.2.2 Résultats préliminaires

Pour obtenir l'existence des solutions T-périodiques du problème (3.18) − (3.19), nous utilisons une approche variationelle basée sur la version du théorème du col 1.2.4.
Tout au long de cette partie, nous considérons H_T^1 l'espace de Sobolev classique muni de la norme,

$$\|x\|_{H_T^1} = \left(\int_0^T |x(t)|^2 \, dt + \int_0^T |x'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La présence d'impulsions nécessite une précision de la notion de solution pour (3.18) − (3.19) .

Remarque 3.2.1 *Pour* $x \in H^2(I)$, *x et* x' *sont absolument continues et* $x'' \in L^2(I)$, *alors* $\Delta x'(t_j) = x'(t_j^+) - x'(t_j^-) = 0$ *pour tout* $t \in I$. *Si* $x \in H_T^1$, *alors x est absolument continue et* $x' \in L^2(I)$. *Dans ce cas, les dérivées à gauche et à droite en* t_j $x'(t_j^+)$, $x'(t_j^-)$ *peuvent ne pas exister, par conséquent nous introduisons la définition suivante.*

Définition 3.2.1 $x \in H_T^1$, *est une solution de* (3.18) − (3.19) , *si* $x \in C(I)$ *satisfait l'équation* (3.18), *pour chaque* $j = 1, 2, ..., p$, $x_j := x|_{(t_j, t_{j+1})} \in H^2(t_j, t_{j+1})$, *pour* $t \neq t_j$, *les limites* $x'(t_j^-), x'(t_j^+)$ $j = 1, 2, ..., p$ *existent, les conditions impulsives de* (3.19) *et les conditions aux limites T-périodiques sont vérifiées.*

3.2.3 Résultat principal

Nous considérons (3.18) − (3.19) sous les conditions suivantes:

$(C1)$ (i) $f : I \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, est une fonction de type Carathéodory, $T-$périodique en t,

(ii) $\lim_{s \to 0^+} f(t, s) = -\infty$ et $\lim_{s \to +\infty} F(t, s) = +\infty$, pour presque tout t dans I, où $F(t, s) := \int_1^s f(t, \xi) d\xi$, la primitive de f,

(iii) $K := \sup\limits_{\zeta \in]0, +\infty[} f(., \zeta)$ est une fonction de $L^1(I, \mathbb{R})$,

$(iv) D_1 F(t, \zeta) := \frac{\partial F}{\partial t}(t, \zeta)$ existe et minorée par $-c$, pour presque tout t dans I, où c est une constante positive.

$(C2)$ (i) q est une fonction continue $T-$périodique dont la valeur moyenne sur I est nulle,

(ii) I_j est une fonction continue bornée telle que, $\max\limits_{\zeta} I_j(\zeta) < 0$, vérifiant $I_{j+p+1} \equiv I_j$, pour tout $j = 1, ..., p$.

Remarque 3.2.2 *D'après* $(C2)(i)$, *il est évident que,* $e^{-\|q\|_{L^1}} \leq e^{Q(t)} \leq e^{\|q\|_{L^1}}$*,où,* $Q(t) := \int\limits_0^t q(\sigma) d\sigma$, *et d'après* $(C2)(ii)$, *il existe deux constantes* m, M *telles que, pour tout* $\zeta \in \mathbb{R}$, $m < I_j(\zeta) \leq M < 0$, *pour chaque* $j = 1, 2, ..., p$.

Théorème 3.2.1 *Supposons que (C1) et (C2) sont satisfaites, alors, le problème* (3.18) − (3.19) *a au moins une solution T-périodique positive.*

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous utilisons une approche variationnelle basée sur le théorème du col 1.2.4 et nous procédons en cinq étapes.

Etape 1: Modification du problème.
Pour éviter le point de singularité 0, nous introduisons la fonction $f_\beta : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour $\beta \in (0,1)$

$$f_\beta(t,\zeta) = \begin{cases} f(t,\zeta) & si \quad \zeta \geq \beta \\ f(t,\beta) & si \quad \zeta < \beta \end{cases}, \tag{3.20}$$

et le problème modifié correspondant

$$\begin{cases} x''(t) + q(t)x'(t) + f_\beta(t, x(t-r)) = 0, t \neq t_j \quad 0 < t < T, \\ x(0) - x(T) = x'(0) - x'(T) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p. \end{cases} \tag{3.21}$$

Multiplions $x''(t) + q(t)x'(t) + f_\beta(t, x(t-r)) = 0$ par $e^{Q(t)}$ pour arriver à,

$$\left(e^{Q(t)} x'(t)\right)' = -e^{Q(t)} f_\beta(t, x(t-r)). \tag{3.22}$$

Intégrons le produit de (3.22) par $y \in H_T^1$ sur I, et nous obtenons

$$\int_0^T e^{Q(t)} x'(t) y'(t) dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x(t_j)) y(t_j) = \int_0^T e^{Q(t)} f_\beta(t, x(t-r)) y(t) dt. \tag{3.23}$$

Ainsi, à partir de (3.23) , nous pouvons définir la fonctionnelle d'énergie associée à (3.21) , $\Psi_\beta : H_T^1 \to \mathbb{R}$ par,

$$\Psi_\beta(x) = \int_0^T e^{Q(t)} \left[\frac{1}{2}(x'(t))^2 - F_\beta(t, x(t-r))\right] dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} \int_0^{x(t_j)} I_j(\omega) d\omega, \tag{3.24}$$

où, $F_\beta(t,\zeta) = \int_1^\zeta f_\beta(t,\omega) d\omega$ est la prémitive de f_β.
D'après $(C1)$, et $(C2)$, Ψ_β est bien définie sur H_T^1, continue et différentiable, dont la dérivée est la fonctionnelle $\Psi'_\beta(x)$, donnée par,

$$\Psi'_\beta(x).y = \int_0^T e^{Q(t)} \left[x'(t)y'(t) - f_\beta(t, x(t-r)) y(t)\right] dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x(t_j)) y(t_j), \tag{3.25}$$

de plus, les points critiques de Ψ_β sont les solutions faibles de (3.21).
Pour trouver les points critiques de Ψ_β, nous appliquons le théorème du col (voir 1.2.4).

Etape 2: La fonctionnelle Ψ_β satisfait la condition de Palais-Smale.
En effet, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H_T^1 telle que $\{\Psi_\beta(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\Psi'_\beta(x_n)$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$; c-à-d. il existe une constante $c_1 > 0$ et une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ telle que, pour n assez

large et pour tout $y \in H_T^1$,

$$\left|\int_0^T e^{Q(t)}\left[\frac{1}{2}(x_n'(t))^2 - F_\beta(t, x_n(t-r))\right]dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)}\int_0^{x_n(t_j)} I_j(\omega)d\omega\right| \leq c_1, \tag{3.26}$$

et,

$$\left|\int_0^T e^{Q(t)}\left[x_n'(t)y'(t) - f_\beta(t, x_n(t-r))y(t)\right]dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x_n(t_j))y(t_j)\right| \leq \varepsilon_n \|y\|. \tag{3.27}$$

Nous allons montrer que $\{x_n\}$ est bornée dans H_T^1.
Prenons $y \equiv 1$ dans (3.27), nous obtenons, pour n assez large ,

$$\left|\int_0^T e^{Q(t)} f_\beta(t, x_n(t-r))dt - \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x_n(t_j))\right| \leq \varepsilon_n\sqrt{T}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T e^{Q(t)} f_\beta(t, x_n(t-r))dt\right| &\leq \varepsilon_n\sqrt{T} + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)}\left|I_j(x_n(t_j))\right| \\ &\leq \varepsilon_n\sqrt{T} + e^{\|q\|_{L^1}}\sum_{j=1}^{p}\left|I_j(x_n(t_j))\right| \\ &\leq \varepsilon_n\sqrt{T} + p\,|m|\, e^{\|q\|_{L^1}} := c_2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Soit

$$I_{1,n} := \{t \in I;\ f_\beta(t, x_n(t-r)) \geq 0\},$$

et

$$I_{2,n} := \{t \in I;\ f_\beta(t, x_n(t-r)) < 0\}.$$

Il résulte de (3.28) que pour n assez large,

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_{2,n}} e^{Q(t)} f_\beta(t, x_n(t-r))dt\right| &\leq c_2 + \int_{I_{1,n}} e^{Q(t)} f_\beta(t, x_n(t-r))dt \\ &\leq c_2 + Te^{\|q\|_{L^1}}\,\|K\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Alors, il existe $c_3 > 0$ tel que:

$$\int_0^T e^{Q(t)}\left|f_\beta(t, x_n(t-r))\right|dt \leq c_3. \tag{3.29}$$

D'un autre côté, si nous prenons dans (3.27), $y(t) = w_n(t) := x_n(t) - \overline{x}_n$, où $\overline{x}_n$ est la valeur moyenne de x_n sur l'intervale I, nous trouvons (en tenant compte de (3.29)),

$$\begin{aligned} c_4 \|w_n\| &\geq \int_0^T e^{Q(t)} \left[(w_n'(t))^2 - f_\beta(t, x_n(t-r)) w_n(t) \right] dt + \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x_n(t_j)) w_n(t_j) \\ &\geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2} \|w_n'\|_{L^2}^2 - \left(c_3 + e^{\|q\|_{L^1}} pm \right) \|w_n\|_{L^\infty} \\ &\geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2} \|w_n'\|_{L^2}^2 - (c_3 - e^{\|q\|_{L^1}} pm) \|w_n\|_{L^\infty} \\ &\geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2} \|w_n'\|_{L^2}^2 - c_4 \|w_n\|, \end{aligned}$$

où c_4 est une constante positive. Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Wirtinger (1.7) pour les fonctions à valeur moyenne nulle dans l'espace H_T^1, nous affirmons l'existence de $c_5 > 0$ telle que

$$\|x_n'\|_{L^2} \leq \|w_n\| \leq c_5. \tag{3.30}$$

Supposons, maintenant, que

$$\|x_n\| \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

Puisque (3.30) est vérifiée, nous avons, en passant à la sous-suite si c'est nécessaire,

$$\begin{aligned} M_n &: = \max x_n \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty, \; ou \\ m_n &: = \min x_n \to -\infty \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

1) Supposons que la première possibilité est vraie c-à-d $M_n := \max x_n \to +\infty$

quand $n \to +\infty$. D'après $(C2)$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, x_n(t-r))dt - \sum_{j=1}^p e^{Q(t_j)} \int_0^{x_n(t_j)} I_j(\omega)d\omega \\
= & \int_0^T e^{Q(t)} \left(\int_1^{M_n} f_\beta(t,\omega)d\omega - \int_{x_n(t-r)}^{M_n} f_\beta(t,\omega)d\omega \right) dt \\
& - \sum_{j=1}^p e^{Q(t_j)} \int_0^{M_n} I_j(\omega)d\omega - \sum_{j=1}^p e^{Q(jt)} \int_{M_n}^{x_n(t_j)} I_j(\omega)d\omega \\
\geq & \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, M_n)dt - e^{\|q\|_{L^1}} pMM_n - e^{\|q\|_{L^1}} \|K_\beta\|_{L^1} |M_n - x_n(t-r)| \\
& + e^{\|q\|_{L^1}} pm |M_n - x_n(t_j)| \\
\geq & \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, M_n)dt - e^{\|q\|_{L^1}} pMM_n - e^{\|q\|_{L^1}} \left(\|K_\beta\|_{L^1} - pm \right) |M_n - m_n| \\
\geq & \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, M_n)dt - e^{\|q\|_{L^1}} pMM_n - e^{\|q\|_{L^1}} \left(\|K_\beta\|_{L^1} - pm \right) \left| \int_{t_1}^{t_2} x_n'(t)dt \right| \\
\geq & \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, M_n)dt - e^{\|q\|_{L^1}} pMM_n - e^{\|q\|_{L^1}} \left(\|K_\beta\|_{L^1} - pm \right) \int_0^T |x_n'(t)| \, dt,
\end{aligned}$$

où $K_\beta(t) := \sup \{f_\beta(t, \zeta); 0 < \zeta < +\infty\}$ et t_1, t_2 sont tels que $x_n(t_1) = m_n,\ x_n(t_2) = M_n$.

Soit $\chi := \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, M_n)dt - e^{\|q\|_{L^1}} pMM_n$, alors d'après $(C1)(ii)$ nous avons

$$\chi \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty. \tag{3.31}$$

D'un autre côté, en utilisant l'inégalité de Hölder ,

$$\begin{aligned}
\chi \leq & \int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t, x_n(t-r))dt - \sum_{j=1}^p e^{Q(t_j)} \int_0^{x_n(t_j)} I_j(\omega)d\omega + \qquad (3.32) \\
& + \sqrt{T} \left(\|K_\beta\|_{L^1} - pm \right) e^{\|q\|_{L^1}} \|x_n'\|_{L^2} .
\end{aligned}$$

De (3.26) et (3.30), nous déduisons que χ est bornée, ceci contredit (3.31) .
2) Supposons que la seconde possibilité est vraie, c-à-d. $m_n \to -\infty$ quand $n \to +\infty$. Nous remplaçons M_n par $-m_n$ dans les arguments précédents, et nous arrivons aussi à une contradiction. Nous concluons que Ψ_β satisfait la condition de Palais-Smale.

Maintenant, nous procédons à montrer que Ψ_β a une géométrie de passe-montagne. Définissons l'ensemble Λ_1 par,

$$\Lambda_1 := \left\{ x \in H_T^1; \ \min x > 1 \right\},$$

et $\partial \Lambda_1 := \{x \in H_T^1; \ x(t) \geq 1 \text{ pour tout } t \in (0,T) \, , \ \exists t_x \in (0,T) : x(t_x) = 1\}$.

Etape 3: Il existe $d > 0$ tel que $\inf_{x\in\partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x) \geq -d$.
En effet, pour $x \in \partial\Lambda_1$, $\exists t_x \in (0,T)$ tel que $\inf_{t\in I} x(t) = x(t_x) = 1$ donc, il existe $1 \leq i \leq p$ tel que $t_i \leq t_x < t_{i+1}$.Le x considéré est supposé donc non constant, d'après la T-périodicité de x, x', F_β et I_j, nous avons

$$\begin{aligned}
\Psi_\beta(x) &= \frac{1}{2}\int_{t_x}^{t_x+T} e^{Q(t)}(x'(t))^2dt - \int_{t_x}^{t_x+T} e^{Q(t)}F_\beta(t, x(t-r))dt \\
&\quad + \sum_{j=i}^{p+i-1} e^{Q(t_j)}\int_0^{x(t_j)} I_j(\omega)d\omega \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{t_x}^{t_x+T} e^{Q(t)}(x'(t))^2dt - \int_{t_x}^{t_x+T} e^{Q(t)}K_\beta(t)(x(t-r)-1)dt \\
&\quad + \sum_{j=i}^{p+i-1} e^{Q(t_j)}\int_0^{x(t_j)} I_j(\omega)d\omega \\
&\geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|x'\|_{L^2}^2 - e^{\|q\|_{L^1}}\|K_\beta\|_{L^2}\|x_{-r}-1\|_{L^2} + pme^{\|q\|_{L^1}}\|x\|_\infty,
\end{aligned}$$

ainsi en appliquant l'inégalité triangulaire à $\|x_{-r}-1\|_{L^2}$, et d'après (3.4) nous avons,

$$\begin{aligned}
\Psi_\beta(x) &\geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|x'\|_{L^2}^2 - e^{\|q\|_{L^1}}\|K_\beta\|_{L^2}\left(\|x_{-r}\|_{L^2} + \sqrt{T}\right) + e^{\|q\|_{L^1}}pmc_6\|x\| \\
&= \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|x'\|_{L^2}^2 - e^{\|q\|_{L^1}}\left(\|K_\beta\|_{L^2} - pmc_6\right)\|x\|_{L^2} - \sqrt{T}e^{\|q\|_{L^1}}\|K_\beta\|_{L^2},
\end{aligned}$$

et l'inégalité de Poincaré implique,

$$\Psi_\beta(x) \geq \frac{e^{-\|q\|_{L^1}}}{2}\|x'\|_{L^2}^2 - T^{\frac{3}{2}}e^{\|q\|_{L^1}}\left(\|K_\beta\|_{L^2} - pmc_6\right)\|x'\|_{L^2} - \sqrt{T}e^{\|q\|_{L^1}}\|K_\beta\|_{L^2}.$$

ceci montre que

$$\Psi_\beta(x) \to +\infty \text{ quand } \|x'\|_{L^2} \to +\infty,\ x \in \partial\Lambda_1.$$

Pour $x \in \partial\Lambda_1$, vérifions que $\|x\| \to +\infty$ est équivalent à $\|x'\|_{L^2} \to +\infty$. En effet, quand $x \in \partial\Lambda_1$, $\inf_{t\in I} x(t) = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left(\|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left(T + \|x'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

il est clair que, $\|x'\|_{L^2} \to +\infty$ implique que $\|x\| \to +\infty$. Maintenant, supposons que $\|x\| \to +\infty$ et $\|x'\|_{L^2}$ est bornée; alors $\|x\|_{L^2} \to +\infty$. Puisque $\inf_{t\in I} x(t) = 1$,

$$x(t) - 1 = \int_{t_u}^{t} x'(\sigma)d\sigma \leq \int_0^T |x'(\sigma)|\, d\sigma \leq \sqrt{T}\left(\int_0^T |x'(\sigma)|^2\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, x est bornée dans $L^2(I)$, qui est une contradiction. Donc,

$$\Psi_\beta(x) \to +\infty \text{ } quand \text{ } \|x\| \to +\infty, \ x \in \partial I.$$

Nous déduisons que Ψ_β est coercive et donc elle admet une suite minimisante, la faible semicontinuité inférieure de Ψ_β donne

$$\inf_{x\in\partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x) > -\infty.$$

Par suite il existe $d > 0$, tel que $\inf_{x\in\partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x) \geq -d$.

Etape 4: Il existe $\beta_0 \in (0,1)$ tel que pour tout $\beta \in (0,\beta_0)$, toute solution x de (3.21), vérifiant $\Psi_\beta(x) \geq -d$ satisfait $\min x \geq \beta_0$.
Supposons par contradiction qu'il existe deux suites $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

(a) $\beta_n \leq \frac{1}{n}$,
(b) x_n est une solution de (3.21) avec $\beta = \beta_n$,
(c) $\Psi_{\beta_n}(x_n) \geq -d$,
(d) $\min x_n < \frac{1}{n}$.

Premièrement, d'après (3.21),

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{Q(t)} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))dt &= -\int_0^T \left(e^{Q(t)}x_n'\right)'(t)dt \\
&= -\sum_{j=0}^{p+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{Q(t)}x_n'\right)'(t)dt \\
&= -\sum_{j=0}^{p+1} e^{Q(t_j)}\left(x_n'(t_{j+1}^-) - x_n'(t_j^+)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)}\Delta x_n'(t_j) + e^{Q(0)}x_n'(0) - e^{Q(T)}x_n'(T) \\
&= \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x_n(t_j)).
\end{aligned}$$

Alors, si nous notons par $h_{\beta_n}(t) := e^{Q(t)} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r)$,nous avons

$$\int_0^T h_{\beta_n}(t)dt = \sum_{j=1}^{p} e^{Q(t_j)} I_j(x_n(t_j)), \tag{3.33}$$

ainsi, d'après $(C2)$,

$$\left\|h_{\beta_n}\right\|_{L^1} \leq c_7, \text{ où } c_7 \text{ est une constante positive.}$$

Par suite

$$\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8, \text{ où } c_8 \text{ est une constante positive.} \tag{3.34}$$

Puisque $\Psi_{\beta_n}(x_n) \geq -d$, il existe deux constantes R_1 et R_2, avec $0 < R_1 < R_2$ telles que

$$\max\{x_n(t);\quad t \in I\} \in [R_1, R_2],$$

autrement, x_n tendra uniformément vers 0 ou $+\infty$ et dans ce cas $\Psi_{\beta_n}(x_n)$ va tendre vers $-\infty$, (d'après $(C2)\,(ii)$ et $\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8$), ce qui contredit $\Psi_{\beta_n}(x_n) \geq -d$.

Soient τ_n^1, τ_n^2 tels que, pour n assez large

$$x_n\left(\tau_n^1 - r\right) = \frac{1}{n} < R_1 = x_n\left(\tau_n^2 - r\right).$$

Multiplions l'équation différentielle $x_n''(t) + q(t)x'(t) + f_{\beta_n}(t, x_n(t-r)) = 0$ par $x_n'(t-r)$ et intégrons l'équation résultante sur $[\tau_n^1, \tau_n^2]$, ou sur $[\tau_n^2, \tau_n^1]$, nous trouvons,

$$\begin{aligned} J \quad : \quad &= \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r)dt \\ &= -\int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} q(t)x_n'(t)x_n'(t-r)dt. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$J = J_1 + \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt,$$

où

$$J_1 = \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r)dt,$$

puisque q est bornée et $\|x_n'\|_{L^\infty} \leq c_8$, alors J est bornée. De plus, nous avons

$$\int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)x_n'(t-r)dt \leq c_8 \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} x_n''(t)dt = c_8[x_n'(\tau_n^2) - x_n'(\tau_n^1)].$$

Par conséquent J_1 est bornée.

D'un autre côté, nous avons

$$f_{\beta_n}(t, x_n(t-r))x_n'(t-r) = \frac{d}{dt}F_{\beta_n}(t, x_n(t-r)) - D_1F_{\beta_n}(t, x_n(t-r)),$$

alors,

$$J_1 = F_{\beta_n}(\tau_n^2, R_1) - F_{\beta_n}(\tau_n^1, \frac{1}{n}) - \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} D_1F_{\beta_n}(t, x_n(t-r))dt.$$

L'hypothèse $(C1)\,(iv)$ implique que

$$J_1 \leq F_{\beta_n}(\tau_n^2, R_1) - F_{\beta_n}(\tau_n^1, \frac{1}{n}) + c2r.$$

Il résulte de $(C1)\,(ii)$ que J_1 n'est pas bornée. Ceci est une contradiction.
Par conséquent, il existe $\beta_0 \in (0,1)$ tel que pour tout $\beta \in (0, \beta_0)$, toute solution x de (3.21) vérifiant $\Psi_\beta(x) \geq -d$ satisfait $\min x \geq \beta_{0,}$ ainsi d'après (3.20), x est solution de (3.18) $-$ (3.19) .

Etape 5: Ψ_β a une géométrie de passe-montagne, pour tout $\beta \leq \beta_0$, où β_0 est défini dans l'étape 4.
En effet, d'après $(C1)\,(ii)$, nous pouvons choisir $\beta \in (0, \beta_0]$ tel que $f(t, \beta) < 0$, uniformément pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} F_\beta(t,0) &= \int_1^0 f_\beta(t,\omega)d\omega = -\int_0^1 f_\beta(t,\omega)d\omega \\ &= -\int_0^\beta f_\beta(t,\omega)d\omega - \int_\beta^1 f_\beta(t,\omega)d\omega \\ &= -\int_0^\beta f(t,\beta)d\omega - \int_\beta^1 f_\beta(t,\omega)d\omega \\ &= -\beta f(t,\beta) - \int_\beta^1 f_\beta(t,\omega)d\omega. \end{aligned}$$

Ceci implique que,

$$F_\beta(t,0) > -\int_\beta^1 f_\beta(t,\omega)d\omega = \int_1^\beta f_\beta(t,\omega)d\omega = F_\beta(t,\beta).$$

Alors

$$\Phi_\beta(0) = -\int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t,0)dt < -\int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t,\beta)dt.$$

D'après $(C1)\,(ii)$, il existe $\beta \in (0, \beta_0]$ tel que,

$$F_\beta(t,\beta) > \frac{d}{T} e^{\|q\|_{L^1}} \text{ pour tout } t \in I,$$

qui implique que $\Psi_\beta(0) < -d$.
Aussi, en utilisant $(C1)$ (iv) et $(C2)$ nous pouvons trouver R, suffisamment large tel que $R > 1$ et,

$$\Psi_\beta(R) = -\int_0^T e^{Q(t)} F_\beta(t,R)dt + \sum_{j=1}^p e^{Q(t_j)} \int_0^R I_j(\omega)d\omega < -d.$$

Puisque Λ_1 est un voisinage de R, $0 \notin \Lambda_1$ et,

$$\max\{\Psi_\beta(0), \Psi_\beta(R)\} < \inf_{x \in \partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x),$$

nous sommes en situation du théorème du col (voir théorème 1.2.4). L'étape 2 et l'étape 5 impliquent que Ψ_β a un point critique x_β vérifiant

$$\Psi_\beta(x_\beta) = \inf_{\eta\in\Gamma} \max_{0\leq\sigma\leq1} \Psi_\beta(\eta(\sigma)) \geq \inf_{x\in\partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x),$$

où $\Gamma := \{\eta \in C([0,1]; H^1_T);\ \eta(0) = 0,\ \eta(1) = R\}$. Maintenant, puisque d'après l'étape 3 $\inf_{x\in\partial\Lambda_1} \Psi_\beta(x) \geq -d$, l'étape 4 implique que x_β est une solution de (3.18) − (3.19). Ceci achève la preuve du résultat principal. ■

Exemple 3.2.1 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} x''(t) + q(t)x'(t) + f(t, x(t-r)) = 0, \ t \neq t_j, \ \ 0 < t < 2\pi \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \\ \Delta x'(t_j) = I_j(x(t_j)), \quad j = 1, 2; \end{cases} \tag{3.35}$$

où $r \in \mathbb{R}^*_+$ est une constante donnée,

$$\begin{aligned} f(t, x(t-r)) \quad &: \ = \alpha(t)\frac{\ln x(t-r)}{x(t-r)}, \ 0 \leq t < 2\pi, \\ \textit{avec } \alpha(t) \quad &= \begin{cases} t & si \ \ 0 \leq t \leq \pi \\ 1 & si \ \ \pi < t < 2\pi \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1(x(t_1)) \quad &: \ = \sin(x(t_1)) - 2, \\ I_2(x(t_2)) \quad &: \ = \frac{x(t_2)}{(x(t_2))^2 + 1} - 1, \end{aligned}$$

et

$$q(t) = \cos t.$$

Les hypothèses (C_1) et (C_2) du théorème 3.2.1 sont satisfaites, en effet,

$(H_1)(i)$ $f : [0, 2\pi] \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; donnée par $f(t, \zeta) = \alpha(t)\frac{\ln\zeta}{\zeta}$ est une fonction de type Carathéodory, 2π-périodique en t.

(ii) $\lim_{\zeta\to0^+} f(t, \zeta) = -\infty$, pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$,

(iii) $K(t) = \sup\limits_{\zeta\in]0,+\infty[} f(t, \zeta) = \alpha(t)e^{-1}$ est une fonction de $L^1(I, \mathbb{R})$, où $e^{-1} = \max\limits_{\zeta\in]0,+\infty[}\frac{\ln\zeta}{\zeta}$.

(iv) Puisque $\alpha(t)$ est 2π-périodique, alors elle est bornée, donc, nous avons

$$\lim_{\zeta\to+\infty} F(t, \zeta) = \lim_{\zeta\to+\infty} \alpha(t)\frac{(\ln\zeta)^2}{2} = +\infty,$$

pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

(v) Pour tout $(t, \zeta) \in (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$,

$$D_1F(t, \zeta) := \frac{\partial F}{\partial t}(t, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\ln\zeta)^2}{2} & si \ \ 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & si \ \ \pi < t < 2\pi \end{cases},$$

alors, $D_1F(t,\zeta) \geq 0$ pour tout $\xi \in (0,+\infty)$ et pour presque tout $t \in [0,2\pi]$.
(H_2) (i) Pour $m=-3$ et $M=-\frac{1}{2}$, nous avons

$$m \leq I_j(\zeta) \leq M < 0, \text{ pour tout } \zeta \in \mathbb{R}, \text{ et } \ j=1,2.$$

Alors, le problème (3.35) admet au moins une solution 2π-périodique positive.

Chapitre 4

Conclusion et Perspectives

4.1 Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux questions d'existence et de multiplicité de solutions périodiques pour des problèmes associés à des équations différentielles fonctionnelles à retard non linéaires et non autonomes du second ordre, sous l'effet d'impulsions. Deux types de problèmes ont été étudiés. Le premier est associé à des nonlinéarités régulières tandis que le second traite le cas de non linéarité singulière.

L'approche utilisée est variationnelle basée sur une minimisation directe (dans chapitre 2) et l'application des variantes du thèorème du col (chapitres 2 et 3).

L'étude a été couronnée par la publication de deux articles :

1. N. Daoudi-Merzagui and F. Dib, Positive periodic solutions to impulsive delay differential equations, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, (2017), 969-982.
2. F. Dib and N. Daoudi-Merzagui, Periodic solutions to singular damped delay differential equations with impulses, *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 8(1-2), (2018), 33-47.

4.2 Etude numérique

Nous avons établi dans notre étude l'existence et la multiplicité de solutions positives sans les déterminer explicitement. Dans le but de donner une étude numérique (solutions explicites) aux problèmes de type

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t), u(t-r)) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{t_j, j \in \mathbb{Z}\} \\ u(t) - u(t+2r) = u'(t) - u'(t+2r) = 0, \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

j'ai éffectué un stage fort intéressant au Laboratoire des Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA) à l'université de Brest sous la direction du Professeur

M. Sadkane.
Dans un premier pas, nous avons commencé par l'étude du problème suivant

$$\begin{aligned} u''(t) &= -f(t, u(t), u(t-r)), \quad t \in \mathbb{R}. \\ u(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \\ \varphi(t) &= \varphi(t+2r), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous avons réalisé :
- une discritisation du problème (4.1) .
- un programme sur MATLAB en considérant deux exemples du problème (4.1) .
- une simulation numérique d'un exemple de (4.1) .

4.2.1 Discritisation du problème

Nous allons restreindre notre étude sur $[0, r]$ et pour obtenir la solution de (4.1) sur $\mathbb{R}$ tout entier il suffit de répéter le même travail sur des intervalles de la forme $[ir, (i+1)r]$, $i \in \mathbb{Z}$.

Soit le réseau régulier défini sur $[0, r]$ par

$$W = \{t_k, k = 1, ..., N; \quad t_0 = 0, \ t_1 = h, \ t_2 = 2h, ..., t_N = r\},$$

où $h = \frac{r}{N}$ est le pas de cette subdivision.

Sur l'intervalle $[0, r]$, l'équation $u''(t) = -f(t, u(t), u(t-r))$ devient

$$u''(t) = -f(t, u(t), \varphi(t-r)). \tag{4.2}$$

- **Discritisation de l'équation** (4.2)

Posons $U_k = u(t_k), k = 1, ..., N$, on obtient le shéma suivant

$$\frac{U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}}{h^2} = f(t_k, U_k, \varphi(t_k - r)),$$

qui s'écrit

$$U_{k+1} = 2U_k - U_{k-1} - h^2 f(t_k, U_k, \varphi(t_k - r)).$$

4.2.2 Programme et simulation sur MATLAB

Considérons sur $[-r, 0]$ le changement de variable suivant

$$\begin{cases} v(k) = u(-r + t(k)), \quad k = 1, ..., N+1 \\ t(k) = (k-1)h \end{cases}$$

plus précisement

$$\begin{array}{cccc} u(-r), & u(-r+h),... & u(-h), & u(0), \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v(1), & v(2),... & v(N), & v(N+1), \end{array}$$

alors sur $[0,r]$, nous avons

$$v(N+k+1) = 2v(N+k) - v(N+k-1) - h^2 f((k-1)h, v(N+k), v(k)).$$

Considérons les exemples suivants :

Exemple 1:

Soit le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} u''(t) = -\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t-\pi),\ t \in [0,\pi] \\ u(t) = 1 - \sin t, \quad t \in [-\pi, 0] \end{array} \right. , \tag{4.3}$$

qui admet pour solution exacte

$$u(t) = 1 - \sin t.$$

Exemple 2:

Soit le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} u''(t) = u(t-\pi),\ t \in [0,\pi] \\ u(t) = \cos t, \quad t \in [-\pi, 0] \end{array} \right. , \tag{4.4}$$

qui admet pour solution exacte

$$u(t) = \cos t.$$

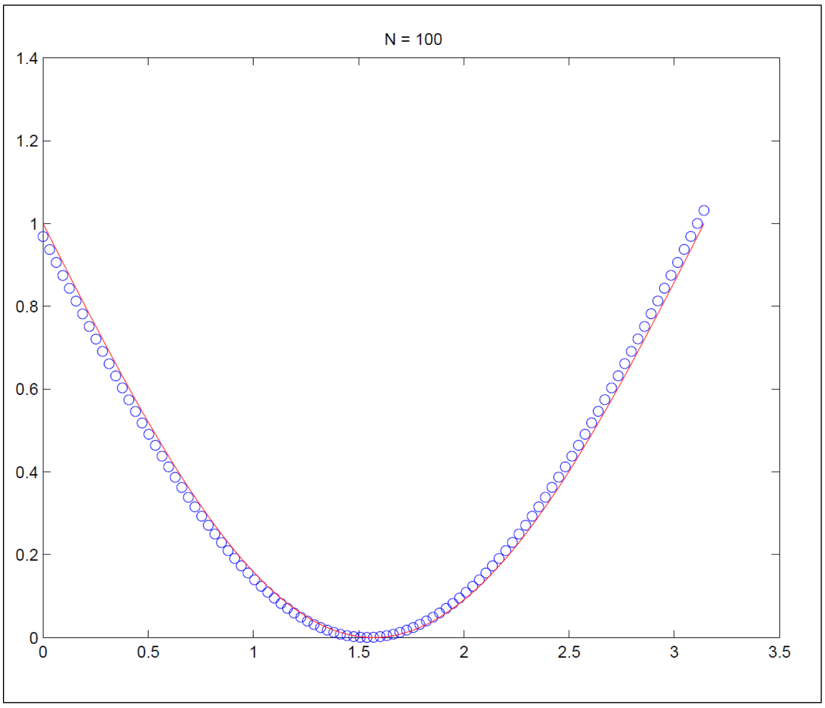
Le programme pour le problème (4.1) et la simulation du problème (4.3) sont obtenus comme suit.

```
%  Exemple de programme : Euler explicite
% pour l'équation u''(t) = f(t,u(t),u(t-r))%
%
% r : période
    r = input(' r ? : ');
% N: nombre de points de l'intervalle [0 , h]
    N = input(' N ? : ') ;
% h = pas de discrétisation
    h = r/N;
% initialisation
    t = zeros(1, N+1);
    sol = zeros(1,N+1);
    v = zeros(1, 2*N+2);
%  discrétisation de t : 0,h,2h, ...,r
       for k = 1: N+1
        t(k) = (k-1)*h;
       end
% solution donnée dans [-r , 0]
% on applique la formule v(k) = u(-r+ t(k)), k = 1, ...,N+1
% ci-dessous 2 exemples
    for k = 1:N+1
        v(k) = 1 - sin((k-1)*h)
       % v(k) = cos((k-1*h));
    end
% itération principale
    for k = 1:N+1
        v(N+k+1) = 2*v(N+k) - v(N+k-1) -h^2*f(t(k),v(N+k),v(k));
    end
% tracer la courbe de la solution calculée dans [0,r]
   plot(t(1:N+1),v(N+2:2*N+2),'o');
   title([' N = ', num2str(N)]);
% Afficher la valeur de la solution en t=r
   disp( ' La valeur en t = r est : ');
   format long;
   v(2*N+2)
% courbe de la solution exacte
  for k = 1 : (N+1)
   %   sol(k) = cos((k-1)*h);


     sol(k) = 1 - sin((k-1)*h);
  end
   hold on
   plot(t(1:N+1), sol(1:N+1),'r');

%
%
```

```
function [u2p] = f(t,u,ur)
%
% cela représente u''(t) = f(t,u(t),u(t-r))
% deux exemples sont donnés ci-dessous
%
u2p = -0.5*u + 0.5*ur;
%u2p = ur;
```



4.3 Perspectives

Ces types de problèmes sont largement utilisés pour la modélisation de certains phénomènes de la physique, de la chimie ou de la biologie. Trouver une solution, qui est de plus positive, à ces problèmes se ramène à entrevoir de nombreuses perspectives à notre travail. Des généralisations des résultats obtenus, sont envisagées dans les cas suivants:

1. Projet d'étude de solvabilité de problèmes persque-périodiques associés à des équations différentielles à retard du second ordre soumis à des impulsions.
2. Un autre projet d'étude de l'existence et de la multiplicité des solutions positives pour des problèmes aux limites singuliers associés à des équations différentielles fractionnaires à retard (en cours de réalisation).
3. En plus d'une deuxième partie du travail présenté dans l'étude numérique.

Bibliographie

[1] R. Adams and J. Fournier, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Volume 140, 2nd Edition, Academic Press, (2003).

[2] M. Adimy, F. Crauste and S. Ruan, Periodic Oscillations in Leukopoiesis Models with Two Delays, *Journal of Theoretical Biology*, 242, (2006), 288-299.

[3] R.P. Agarwal and D. O'Regan, Singular differential and integral equations with applications, Kluwer Acad. Publ, Dordrecht: 2003.

[4] R.P. Agarwal, K. Perera and D. O'Regan , Multiple positive solutions of singular problems by variational methods, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134, (2005), 817-824.

[5] B. Ahmad and J. J. Nieto, Existence and approximation of solutions for a class of nonlinear impulsive functional differential equations with anti-periodic boundary conditions, *Nonlinear Analysis*, 69, (2008), 3291-3298.

[6] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *Journal of Functional Analysis*, 14 (1973), 349-381.

[7] M. Ayachi and J. Blot, Variational Methods for Almost Periodic Solutions of a Class of Neutral Delay Equations, *Abstract and Applied Analysis*, (2008), Article ID 153285, 13 pages, 2008.

[8] M. Ayachi and D. Lassoued, On the Existence of Besicovitch Almost Periodic Solutions for a Class of Neutral Ddelay Differential Equations, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* 29(2), (2014), 131-14.

[9] D. Bainov and P. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Stability, Theory and Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1989.

[10] A. Bellen and M. Zennaro, Numerical solution of delay differential equations by uniform corrections to an implicit Runge-Kutta method, *Numerische Mathematik,* 47(2), (1985), 301-316.

[11] R. Bellman and K. L. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press, New York, 1963.

[12] G. A. Bliss, Lectures on the Calculus of Variations, The Mathematical Association of America, 1944.

[13] A. Boucherif and N. Daoudi-Merzagui, Periodic solutions of singular nonautonomous second order differential equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 15, (2008), 147-158.

[14] A. Boucherif, Second-order boundary value problems with integral boundary conditions, *Nonlinear Analysis*, 70, (2009), 364-371.

[15] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[16] T.A. Burton, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, New York, 1985.

[17] S. A. Campbell, R. Edwards and P. Driessche, Delayed coupling between two neural network loops, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(1), (2004), 316-335.

[18] N. G. Chebotarev and N. N. Meiman, The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 26, 1949.

[19] D. Chen and B. Dai, Periodic solution of second-order impulsive delay differential system via generalized mountain pass theorem, *Boundary Value Problems,* 2014, 2014:234, 15 pages.

[20] H.Chen and J. Li, Variational approach to impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Boundary Value Problems,* 2010, (2010),16 pages.

[21] L. Chen and J. Sun, Nonlinear boundary value problem of first order impulsive functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318(2), (2006), 726-741.

[22] J.Chu and J. J. Nieto, Impulsive periodic solutions of first-order singular differential equations, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(1), (2008), 143-150.

[23] M. Choisy, J.F. Gu´egan and P. Rohani, Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination: teasing apart the embedded resonance effects, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 223(1), (2006), 26-35.

[24] M. S. Ciupe, B. L. Bivort, D. M. Bortz and P. W. Nelson, Estimating kinetic parameters from HIV primary infection data through the eyes of three different mathematical models. *Mathematical Biosciences*, 200, (2006), 1-27.

[25] K. L. Cooke , P. Driessche and X. Zou , Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models, *Journal of Mathematical Biology*, 39, (1999), 332–352.

[26] D.R. Davis, The inverse problem of the calculus of variations in higher space, *Transactions of the American Mathematical Society*, 30, (1928), 710-736.

[27] J. Douglas, Solution of the inverse problem of the calculus of variations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 50, (1941), 71-128.

[28] D. Chen and B. Dai, Periodic solution of second order impulsive delay differential systems via variational method, *Applied Mathematics Letters*, 38, (2014), 61-66.

[29] A. C. Kenneth, Chemical Kinetics: The Study of Reaction Rates in Solution, VCH Publishers,1998.

[30] N. Daoudi-Merzagui and A. Boucherif, Variational approach to impulsive differential equations with singular nonlinearities, *Journal of Applied Mathematics* 2013; Article ID 464393, 7 pages.

[31] N. Daoudi-Merzagui and F. Dib, Positive periodic solutions to impulsive delay differential equations, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, (2017), 969-982.

[32] F. Dib and N. Daoudi-Merzagui, Periodic solutions to singular damped delay differential equations with impulses, *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations,* 8(1-2)*,* (2018)*,* 33-47*.*

[33] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H. O. Walther, Delay Equations: Functional, Complex and Nonlinear Analysis, Springer-Verlag, New York, (1995).

[34] R. D. Driver, Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.

[35] L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology, McGraw-Hill, New York, 1988.

[36] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, 354(7), (1916), 769-822.

[37] L.E. El'sgol'ts and S.B. Norkin, An Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments, Math. in Science and Eng., 105, Academic Press, New York, 1973.

[38] L. E. Elsgolc, Qualitative Methods in Mathematical Analysis, Translation of Mathematical Monograph, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964.

[39] G. C. Evans, Functionals and their Applications: Selected Topics, Including Integral Equations, *American Mathematical Society*, Colloquium Lectures, vol. 5, The Cambridge Colloquium, (1918), 136 pages, (Reprinted by Dover, New York in 1964).

[40] S. Gao, L. Chen, J. J. Nieto and A. Torres, Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, *Vaccine*, 24(35-36), (2006), 6037-6045.

[41] R. K. George, A. K. Nandakumaran and A. Arapostathis, A note on controllability of impulsive systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 241(2), (2000), 276-283.

[42] Z. M. Guo and Y. T. Xu, Existence of periodic solutions to a class of second-order neutral differential difference equations, *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 5(1), (2003), 13-19.

[43] Z. Guo and J. Yu, Multiplicity Results for Periodic Solutions to Delay Differential Equations via Critical Point Theory, *Journal of Differential Equations*, 218, (2005), 15-35.

[44] C. Guo and Z. Guo, Existence of multiple periodic solutions for a class of second-order delay differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, (2009), 3285-3297.

[45] M. E. Gurtin, Variational Principles for Linear Initial-Value Problems, *Quarterly of Applied Mathematics*, 22(3), (1964) 252-256.

[46] J. K. Hale, Theory of functionnal differential equations, New-York : Springer-Verlag (1977).

[47] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to functional Differential equations. Springer-Verlag, New-York, (1993).

[48] A. Hirsch, U¨ ber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, *Mathematische Annalen*, 49(1), (1897), 49-72.

[49] H. Hua, F. Cong and Yi. Cheng, Notes on existence and uniqueness of solutions for second order periodic-integrable boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, 25, (2012), 2423-2428.

[50] H. Hua, F. Cong and Y. Cheng, Existence and uniqueness of solutions for periodic-integrable boundary value problem of second order differential equation, *Boundary Value Problems* (2012), 2012, 89.

[51] D. K. Hughes, Variational and Optimal Control Problems with Delayed Argument, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2 (1), (1968), 1-14.

[52] G. Jiang and Q. Lu, Impulsive state feedback control of a predator-prey model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1), (2007), 193-207.

[53] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 48, (1974), 317-324.

[54] N. Kalechi, A macrodynamic theory of the business cycle, *Econometrica*, 3, (1935), 327-344.

[55] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[56] L. Kong, Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(5), (2010), 2628-2638.

[57] N. N. Krasovskii, On the second Lyapunov method application to the equations with delay, *Prikladnaya Matematikai Mekhanika*, 20, (1956), 315–327.

[58] Y. Kuang, Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Mathematics in Science and Engineering, tome 191, New-York : Academic Press (1993).

[59] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, (1989).

[60] X. M. Li and X. P. Yuan, Quasi-periodic solutions for perturbed autonomous delay differential equations, *Journal of Differential Equations*, 252(6), (2012), 3752-3796.

[61] J. Li, S. Li and Z. Zhang, Periodic Solutions for a Singular Damped Differential Equation, *Boundary Value Problems*, 2015(5), (2015), 11 pages.

[62] X. L. Liu, X. Y. Shi, Existence of solutions for second-order periodic-integrable boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, (37), (2014), 91-94.

[63] J. Liu and L. Yan, Multiple Solutions of Second-Order Damped Impulsive Differential Equations with Mixed Boundary Conditions, *Abstract and Applied Analysis*, 2014(2014), Article ID 356745, 8 pages.

[64] F. Magri, Variational Formulation for Every Linear Equation, *International Journal of Engineering Science*, 12, (1974), 537-549.

[65] G. Marsaglia, Choosing a Point from the Surface of a Sphere, *Annals of Mathematical Statistics*, 43(2), (1972), 645-646.

[66] R.F. Martins, Existence of periodic solutions for second-order differential equations with singularities and the strong force condition, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317, (2006), 1-13.

[67] J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, vol.74, Springer, NewYork, NY, USA, 1989.

[68] P. W. Nelson, J. D. Murray and A. S. Perelson. A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay, *Mathematical Biosciences*, 163, (2000), 201-215.

[69] S. I. Nenov, Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 36, (1999), 881-890.

[70] J. J. Nieto and R. Rodriguez-Lopez, Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318(2), (2006), 593-610.

[71] J. J. Nieto and D. O'Regan, Variational Approach to Impulsive Differential Equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(2), (2009), 680-690.

[72] J. J. Nieto, Variational formulation of a damped Dirichlet impulsive problem, *Applied Mathematics Letters,* 23(8), (2010), 940-942.

[73] R. Olach, Positive periodic solutions of delay differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 26(12), (2013), 1141-1145.

[74] A. D. Pierce, Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications, Acoustical Society of America, 1989.

[75] O. Polossuchin, Über eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen, Inaugural Dissertation, Zürich, (1910).

[76] A.F.B.A. Prado, Bi-impulsive control to build a satellite constellation, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 5(2), (2005), 169-175.

[77] D. Qian and X. Li, Periodic solutions for ordinary differential equations with sublinear impulsive effects, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 303(1), (2005), 288-303.

[78] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Application to Differential Equations; conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics number 65.

[79] B. S. Razumikhin, On the stability of time-delay systems, *Prikladnaya Matematikai Mekhanika*, 20, (1956), 500–512.

[80] R. Reiss and E. J. Haug, Extremun principles for linear initial-value problems of mathematical physics, *International Journal of Engineering Science*, 16, (1978), 231-251.

[81] L. D. Sabbagh, Variational Problems with Lags, *Journal of Optimization Theory and Applications,* 3(1), (1969), 34-51.

[82] S.H. Saker and J.O. Alzabut, 'Periodic solutions, global attractivity and oscillation of an impulsive delay host-macroparasite model', *Mathematical and Computer Modelling*, 45(5), (2007), 531-543.

[83] N. Salvat, A. Batailly and M. Legrand, Modélisation de l'enlèvement de matériau abradable à l'aide d'équations différentielles à retard, CSMA 2013, 1e Colloque National en Calcul des Structures, 13-17 Mai 2013.

[84] A. M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, Impulsive differential equation, World Scientific, Singapore, 1995.

[85] E. Serra, Periodic solutions for some nonlinear differential equations of neutral type, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 17(2), (1991), 139-151.

[86] X. B. Shu and Y. T. Xu, Multiple periodic solutions to a class of second-order nonlinear mixed-type functional differential equations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(17), (2005), 2689-2702.

[87] X. B. Shu, Y.T. Xu and L. H. Huang, Infinite periodic solutions to a class of second-order Sturm-Liouville neutral differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 68(4), (2008), 905-911.

[88] X. B. Shu, Y. Lai and F. Xu, Existence of Infinitely Many Periodic Subharmonic Solutions for Nonlinear Non-Autonomous Neutral Differential Equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(150), (2013), 1-21.

[89] E. Schmidt, Über eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen, *Mathematische Annalen,* 70 (1911), 499-524.

[90] S. L. Sobolev, Some applications of functional analysis in mathematical physics, *American Mathematical Society,* (1963).

[91] M. Struwe, Variational Methods: Application to nonlinear partial Differential Equations and Hamiltonian systems, 3. ed., Berlin, Spinger, 2000.

[92] J. Sun, J. Chu and H. Chen, Periodic Solutions Generated by Impulses of Singular Differential Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 404(2), (2013), 562-569.

[93] J. Sun and D. O'Regan, Impulsive periodic solutions for singular problems via variational methods, *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* 86, (2012), 193-204.

[94] J. J. Telega, On variational formulations for non-linear, non- potential operators, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 24, (1979), 175-195.

[95] A. Teleman, Introduction à la théorie de jauge, Société Mathématique de France, 2012.

[96] G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, Providence: American Mathematical Society, 2012.

[97] Y. Tian and W. Ge, Applications of variational methods to boundary-value problem for impulsive differential equations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Series II*, 51, (2008), 509-527.

[98] Y. Tian, W. Ge and D. Yang, Existence results for second-order system with impulse effects via variational methods, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 31(1-2), (2009), 255-265.

[99] C. C. Tisdell, Existence of solutions to first-order periodic boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2), (2006), 1325-1332.

[100] E. Tonti, On the variational formulation for linear initial value problems , *Annali di Matematica pura ed applicata* (IV), Vol. XCV,(1972), 331-360.

[101] E. Tonti, Variational Formulation for Every Nonlinear problem, *International Journal of Engineering Science*, 22(11-12), (1984), 1343-1371.

[102] P. Turchin, Rarity of density dependence or population regulation with lags, *Nature*, 344, (1990), 660-663.

[103] P. Turchin and A. D. Taylor, Complex dynamics in ecological time series, *Ecology*, 73, (1992) 289-305.

[104] B. Vielle and G. Chauvet, Delay equation analysis of human respiratory stability, *Mathematical Biosciences,* 152(2), (1998), 105-122.

[105] V. Volterra, Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires, *Journal de Mathématiques*, 7 (1928), 249-298.

[106] V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie, GauthierVillars, Paris (1931).

[107] Y. Wang, G. Liu and Y. Hu, Existence and uniqueness of solutions for a second order differential equation with integral boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 216(9), (2010), 2718-2727.

[108] G. Q.Wang and J. R. Yan, Existence of Periodic Solutions for Second-order Nonlinear Neutral Delay Equations, *Acta Mathematica Sinica,* 47(2), (2004), 379-384.

[109] W. Wang and X. Yang, Multiple solutions of boundary-value problems for impulsive differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2011, (34), 1649-1657.

[110] J. R. L Webb and G. Infante, Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions, *Nonlinear Differential Equations and Applications,* 15, (2008), 45-67.

[111] X. S. Wu, X. Chen and K. M. Teng, On variational methods for a class of damped vibration problems, *Nonlinear Analysis:Theory, Methods & Applications*, 68(6), (2008), 1432-1441.

[112] J. Wu and Z. Wang, Two periodic solutions of second-order neutral functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 329(1), (2007), 677-689.

[113] H. Xiao and Z. Guo, Multiplicity and minimality of periodic solutions to delay differential system, *Electronic Journal of Differential Equations*, 39(115), (2014), 1-12.

[114] J. Xiao and J. J. Nieto, Variational approach to some damped Dirichlet nonlinear impulsive differential equations, *Journal of the Franklin Institute,* 2011, (348), 369-377.

[115] J. Xiao, J. J. Nieto and Z. Luo, Multiplicity of solutions for nonlinear second order impulsive differential equations with linear derivative dependence via variational methods, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(1), (2012), 426-432.

[116] B. Yang, R. Ma and C. Gao, Positive periodic solutions of delayed differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), (2011), 4538-4545.

[117] Z. Yang, Positive solutions of a second-order integral boundary value problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 321, (2006), 751-765.

[118] Z. Yang, Existence and uniquess of positive solutions for an integral boundary value problem, *Nonlinear Analysis,* 69, (2008), 3910-3918.

[119] H. Y. Seong, Z. A. Majid and F. Ismail, Solving Second-Order Delay Differential Equations by Direct Adams-Moulton Method, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. (2013), Article ID 261240, 7 pages.

[120] J. Yu and H. Xiao, Multiple periodic solutions with minimal period 4 of the delay differential equation x'(t)=-f(t,x(t-1)), *Journal of Differential Equations*, 254(5), (2013), 2158-2172.

[121] Z. Zhang and R. Yuan, An application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses, *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* 11, (2010), 155-162.

Résumé

Cette thèse traite des questions d'existence et de multiplicité de solutions pour des problèmes aux limites périodiques associés à des équations différentielles fonctionnelles à retard du second ordre, sous effets impulsifs. Deux types de problèmes ont été étudiés. Le premier est associé à des nonlinéarités régulières tandis que le second traite le cas de nonlinéarités singulières. L'approche utilisée est variationnelle, avec ou sans contraintes avec application de certaines variantes du théorème du col.

Mots clés: Equation différentielle à retard, solution périodique, problème impulsif, singularité, méthode variationnelle.

Abstract

In this thesis, we study the existence and multiplicity of solutions for periodic boundary problems associated to second-order delay functional differential equations, under impulsive effects. Two types of problems have been studied. The first one is associated to regular nonlinearities while the second one deals with singular nonlinearities. We use variational approach, with or without constraints. Some variants of Mountain-Pass theorem are used.

Key words: Delay functional differential equation, periodic solution, impulsive problem, singularity, variational method.

ملخص

ناقشنا في هذه الأطروحة اشكالية وجود وتعدد الحلول لصنف من المسائل الحدية الدورية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية ذات تاخرمن الدرجة الثانية، الخاضعة لنبضات. وقد تم دراسة نوعين من المسائل، ويرتبط الأول بالدالة اللاخطية النظامية في حين أن الثاني يتناول حالة اللاخطية الغيرنظامية، وذلك باستخدام أساليب التغيرات مع او بدون قيود

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية ذات تاخر، حل دوري، مسالة ذات نبضات، أساليب التغيرات

.