

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté des SCIENCES



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Mathématiques

**Spécialité** : Mathématiques Appliquées/ Analyse numérique

### **Sujet**

Observabilité des systèmes non linéaires

**Présenté par** : BERRAHO RAHMOUNA

Soutenu publiquement, le 29 / 06 / 2016, devant le jury composé de :

Mr Senouci Bereksi Ghouti	Enseignant	Univ. Tlemcen	Président
Mr Benchaib Abdellatif	Enseignant	Univ. Tlemcen	Encadreur
Mr Bensalah Hamid	Enseignant	Univ. Tlemcen	Examineur

---

## Remerciements

*Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce travail. Qui m'a ouvert les portes du savoir.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur BENCHAIIB et à Monsieur BENSALAH d'avoir accepté de rédiger ce travail et qui m'ont faits bénéficiaire de leurs expériences et de leurs connaissances. Qu'ils trouvent ici, mes respects et mes gratitudes pour leurs conseils, leurs encouragements, leurs disponibilités, leurs qualités humaines et surtout la confiance qu'ils m'ont témoignés pour réaliser ce mémoire.*

*Mes remerciements s'adressent aussi aux membres de jury qui m'ont fait le grand honneur d'évaluer ce travail. Donc je remercie Monsieur Bereksi d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

*Je tiens à remercier Melle Zaoui Sara Imane pour leurs aides et leurs soutiens.*

*Je tiens aussi à remercier toute l'équipe pédagogique pour m'avoir transmis leur savoir tout le long de mon cycle d'étude.*

Enfin, je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Je dédie ce travail à :  
Mes chers parents qui m'ont toujours soutenue,  
Mon frère Abd El Karim et mes sœurs Safia, Fatima et Meryem,  
Mes amis d'étude et mes collègues,  
Et à tout ceux qui m'ont encouragée durant ma carrière d'étude.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Contrôlabilité et Observabilité</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Contrôlabilité	3
1.2.1 Système contrôlé	3
1.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires	4
1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	8
1.3 Observabilité	11
1.3.1 Système commandé-observé	11
1.3.2 Observabilité des systèmes linéaires	13
1.3.3 Observabilité des systèmes non linéaires	17
1.4 Conclusion	19
<b>2 Observateurs</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	21
2.2 Cas des systèmes linéaires autonomes : observateur asymptotique de Luenberger	22
2.2.1 Observateur d'ordre complet	22
2.2.2 Observateur d'ordre réduit	25
2.3 Observateurs des systèmes non linéaires	28
2.4 Observateurs des systèmes non linéaires, un état de l'art	29
2.4.1 Méthode de transformations non linéaires	30
2.4.2 Approche de Thau et ses généralisations	32
2.5 Conclusion	34
<b>3 Exemples de simulation</b>	<b>35</b>
3.1 Introduction	35
3.2 Exemples	35
3.2.1 Exemple 1 : Observateur de Luenberger d'ordre complet	35

3.2.2	Exemple 2 : Observateur de Luenberger d'ordre réduit . . . . .	40
3.2.3	Exemple 3 : Observateur de Thau - Approche LMI . . . . .	42
3.3	Conclusion . . . . .	46
	<b>Conclusion générale</b>	<b>49</b>

# Introduction générale

Le comportement dynamique d'un procédé peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Pour la commande et la supervision d'un système dynamique, la connaissance de ces variables est capitale. Or ces variables ne sont pas en général, accessibles par des mesures. Ce problème peut être résolu, sous certaines conditions, en introduisant un observateur d'état ou un estimateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé).

Les premiers observateurs, dédiés à l'estimation de l'état des systèmes linéaires, ont été développés par Luenberger dans un cadre déterministe et par Kalman dans un cadre stochastique. Ce dernier a eu un impact considérable dans la pratique et a été appliqué à de nombreux problèmes tels la poursuite des cibles, le démographique, etc. Ces deux observateurs, de Luenberger et Kalman sont largement utilisés de nos jours, mais les systèmes linéaires ne couvrent qu'un faible pourcentage des procédés industriels, des solutions spécifiquement non linéaires ont rapidement été envisagées. Cependant, le problème d'estimation d'état des systèmes non linéaires reste sans solution dans un grand nombre de cas et cela, malgré les nombreuses méthodes proposées dans ce sens. En effet, les systèmes non linéaires ont des représentations d'état très variées, qui exploitent la structure et les propriétés de la fonction non linéaire qui intervient dans le modèle du système. Il semble donc difficile a priori, étant donné l'état des travaux actuels, de trouver une théorie générale sur l'estimation d'état non linéaire, qui unifierait les approches déjà établies. Parmi les méthodes utilisées dans l'observation des systèmes non linéaires, La méthode de transformation non linéaire qui fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non-linéaire à un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc pour obtenir l'observateur de l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse, et on a l'observateur de Thau qui s'applique sur une classe spécifique pour les systèmes non linéaires qui sont Lipschitz.

L'objectif de ce mémoire est de développer les divers points évoqués ci-dessus. Ce manuscrit s'organise de la façon suivante :

- ★ Le premier chapitre est consacré essentiellement à une présentation de quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. On donne de courtes définitions de la contrôlabilité, après nous étudions en détail les systèmes linéaires autonomes. Leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile, nous aborderons que l'étude de la contrôlabilité locale de tels systèmes. Après On donne quelques définitions sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires.
- ★ Le deuxième chapitre est consacré aux différentes approches de construction des observateurs. Dans le cas linéaire, on donne la synthèse de l'observateur de Luenberger, puis pour les systèmes non linéaires on aborde la méthode de transformation non linéaire et l'observateur de Thau pour une classe spécifique qui sont Lipschitz.
- ★ Dans le troisième chapitre, on présente quelques résultats de simulation élaborés sous le logiciel Matlab, en particulier Simulink et LMI contrôl toolbox.

Nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

# Contrôlabilité et Observabilité

## 1.1 Introduction

La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classer, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires.

La première partie de ce chapitre aborde la contrôlabilité, après de courtes définitions, nous étudions en détail les systèmes linéaires autonomes. Leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de Kalman.

Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile, nous aborderons que l'étude de la contrôlabilité locale de tels systèmes.

La propriété d'observabilité consiste à garantir que les mesures faites sur un système sont suffisamment informatives pour pouvoir en déduire toutes les variables non mesurées du système. Ainsi, il est important de faire l'étude de cette propriété lorsqu'il s'agit de construire un observateur permettant l'estimation de l'état d'un système.

La deuxième partie de ce chapitre aborde la notion de l'observabilité. On donne quelques définitions sur l'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires.

## 1.2 Contrôlabilité

### 1.2.1 Système contrôlé

Un système contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme ;

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t) \in M, u(\cdot) \in U. \quad (1.1)$$

En générale, le vecteur des états  $x(t)$  appartient à une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$  (on supposera ici que  $M$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ ), et les contrôles  $u(\cdot)$  appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles  $U$ , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur  $[0, +\infty)$  à valeurs dans  $U \subset \mathbb{R}^m$ . On suppose le champ de vecteur  $f$  suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale  $x_0 \in M$  et tout contrôle admissible  $u(\cdot) \in U$ , le système (1.1) admet une unique solution  $x(t)$  telle que  $x(0) = x_0$ , et que cette solution soit définie sur  $[0, +\infty)$ . On notera cette solution par  $x^f(t, x_0, u(\cdot))$ , quand il n'y a pas de risque de confusion, on pourra omettre dans cette notation le champ  $f$ , la condition initiale  $x_0$ , ou bien le contrôle  $u(\cdot)$ .

Le système (1.1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant (voir figure (1.1)) :

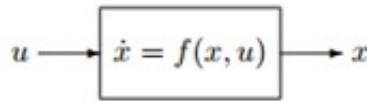


FIGURE 1.1 – Système contrôlé

Le problème de contrôlabilité est le suivant, étant donnés deux états  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , existe-il un temps  $T$  et un contrôle admissible  $u$  tel que la trajectoire  $x_u(t)$  associée à ce contrôle joigne  $x_0 = x(0)$  à  $x_1 = x(T)$  ? C'est le problème de contrôlabilité.

L'objet de cette section est de caractériser la contrôlabilité des systèmes linéaires, on verra qu'il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

## 1.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le problème général étudié dans cette partie est le suivant : soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soient  $A$  et  $B$  deux applications  $L^\infty$  sur  $I$ , à valeurs respectivement dans  $M_n(\mathbb{R})$  et  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ . Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$ , et soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \forall t \in I, & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ & x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où l'ensemble des contrôles  $u$  considérés est l'ensemble des applications mesurables, et localement bornées sur  $I$ , à valeurs dans le sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Avant de développer la notion de la contrôlabilité, on donne une définition sur l'ensemble accessible ;

**Définition 1.2.1.** : ([31]) L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est

défini par :

$$\text{Acc}(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0; T], \Omega)\}$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (1.2) associée au contrôle  $u$ .

Autrement dit  $\text{Acc}(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps  $T$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ . Pour la cohérence on pose  $\text{Acc}(x_0, 0) = \{x_0\}$ .

**Définition 1.2.2.** : ([31]) Le système contrôlé  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  est dit contrôlable en temps  $T$  si  $\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ , i.e. , pour tout  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$  (voir Figure 1.2).



FIGURE 1.2 – Contrôlabilité

### 1.2.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où  $A$  et  $B$  ne dépend pas de  $t$ , elle est dite condition de *Kalman* ;

**Théorème 1.2.3.** : ([31]) Le système  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$  est dit contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice

$$C = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$$

est de rang égal à  $n$ .

La matrice  $C$  est appelée matrice de Kalman. La condition  $\text{rg}C = n$  est appelée condition de Kalman.

**Remarque 1.2.4.** La condition de Kalman ne dépend ni de  $T$  ni de  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

**Démonstration :** L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

**Lemme 1.2.5.** : ([31]) La matrice  $C$  est de rang  $n$  si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi : L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

**Preuve de lemme :** Supposons tout d'abord que  $\text{rg}C < n$ , et montrons qu'alors  $\phi$  n'est pas surjective. L'application  $C$  étant non surjective, il existe un vecteur  $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que  $\psi C = 0$ . Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème de Cayley – Hamilton, il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier  $k$ ,

$$\psi A^k B = 0;$$

et donc, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle  $u$ , on a

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0$$

i.e.  $\psi \phi(u) = 0$ , ce qui montre que  $\phi$  n'est pas surjective.

Réciproquement, si  $\phi$  n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne  $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  tel que pour tout contrôle  $u$  on ait

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\psi e^{(T-t)A} B = 0.$$

En  $t = T$  on obtient  $\psi B = 0$ . Ensuite, en dérivant par rapport à  $t$ , puis en posant  $t = T$ , on obtient  $\psi AB = 0$ .

Ainsi par dérivations successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc  $\psi C = 0$ , et donc  $\text{rg}C < n$ .

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème.

Si la matrice  $C$  est de rang  $n$ , alors d'après le lemme l'application  $\phi$  est surjective, i.e.  $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$ .

Or, pour tout contrôle  $u$ , l'extrémité au temps  $T$  de la trajectoire associée à  $u$  est donnée par

$$x(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt,$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps  $T$  depuis  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est :

$$\text{Acc}(T, x_0) = e^{TA}x_0 + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis  $x_0$ , et l'ensemble accessible en temps  $T$  s'écrit :

$$\text{Acc}(T, x_0) = \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

Ce qui prouve que  $\phi$  est surjective, et donc, d'après le lemme, la matrice  $C$  est de rang  $n$ .

**Exemple 1.2.6.** On considère le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^3 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \omega \neq 0$$

Ce système de contrôle est-il contrôlable dans  $\mathbb{R}^4$  ?

Pour cela calculons la matrice  $C = (B \ AB \ A^2B \ A^3B)$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & -2\omega & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc  $\text{rang } C = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ . D'où le système (1) est contrôlable.

**Exemple 1.2.7.** On considère le même système (1) mais avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^3 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega^3 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}, \det C = 0$$

donc le rang  $C < 4$ .

**Conclusion :** le système n'est pas contrôlable.

**Commentaire :** si on change  $B$ , les résultats changent aussi avec le même contrôle  $u$ .  $B$  représente la manière d'utiliser le contrôle  $u$ .

### 1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Le problème de la caractérisation de la contrôlabilité locale et globale des systèmes non-linéaires est difficile et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non-linéaires. (voir ([21]) pour une présentation lucide des travaux dans ce domaine). Un résultat fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point est contrôlable alors le système non-linéaire est lui-même localement contrôlable ([21]). L'étude de la contrôlabilité d'un système non-linéaire conduit à des calculs plus lourds, qui pour être présentée de façon compacte, nécessite le langage de la géométrie différentielle et les crochets de Lie ([12]).

Considérons le système de contrôle non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

On dispose de la définition mathématique de la contrôlabilité (ou de commandabilité) :

**Définition 1.2.8.** Comme dans le cas linéaire, on dit que le système (1.3) est contrôlable (ou commandable) si pour tout  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$  i.e. :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p sur } [0, T]$$

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1.$$

**Remarque 1.2.9.** en général, la commande  $u$  n'est pas unique, il en existe une infinité. Cette étape s'appelle planification de la trajectoire : calculer  $t \mapsto u(t)$  à partir de la connaissance de  $f, x_0, x_1$  constitue l'une des questions majeures de l'automatique. Cette question est très loin d'être résolue actuellement.

**Exemple 1.2.10.** Considérons l'équation de pendule pesant

$$ml^2\ddot{\theta} + mlg \sin \theta = u \quad (*)$$

où

$u$  : représente la somme des moments des forces autres que le poids.

$m$  : la masse de pendule,

$l$  : Longueur du pendule " distance entre l'axe et le centre de gravité du pendule ",

$g$  : l'accélération de la pesanteur,

$\theta$  : l'angle que fait le pendule avec la verticale.

En posant  $\omega = \dot{\theta}$ , l'équation (\*) devient :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{u}{ml^2} \end{cases} \quad (2).$$

On notera alors  $x = (\theta, \omega)^T$  l'état du système. Le champ de vecteurs est :

$$F(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{u}{ml^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}$$

Etudions maintenant la contrôlabilité du système (2). Considérons deux états du pendule pesant :

$$x_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \text{ et } x_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , qui vérifie :

$$\varphi(0) = \theta_1, \varphi(T) = \theta_2$$

$$\dot{\varphi}(0) = \omega_1, \dot{\varphi}(T) = \omega_2$$

On pose :

$$v(t) = ml^2 \left( \frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) + \ddot{\varphi}(t) \right)$$

et on a alors :

$$-\frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) + \frac{1}{ml^2} v(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

autrement dit  $\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$  est solution de l'équation du pendule pour l'entrée  $v(\cdot)$  sur  $[0, T]$ . Il est clair que son état initial est  $x_1$  et son état final est  $x_2$ . Par conséquent étant donnés deux états quelconques, et pour tout temps  $T > 0$ , il existe un contrôle défini sur  $[0, T]$  qui permet d'aller d'un état à autre. Le pendule pesant est contrôlable en temps  $T$  pour tout  $T > 0$ .

### 1.2.3.1 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Considérons le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$ , sachant que ce système est généralement obtenu par linéarisation d'un système non-linéaire de type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

autour d'une trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

Soit  $(x, u)$  une trajectoire proche de  $(\bar{x}, \bar{u})$ , on écrit  $x = \bar{x} + \varepsilon y$ ,  $u = \bar{u} + \varepsilon v$  avec  $\varepsilon$  petit, où  $y$  et  $v$  sont deux nouvelles variables.

On a, avec un développement à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\bar{x}} + \varepsilon \dot{y} = f(t, \bar{x} + \varepsilon y, \bar{u} + \varepsilon v) \\ &\approx f(t, \bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}, \bar{u}) y + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}, \bar{u}) v \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v,$$

avec :

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

où  $L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$  désigne l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ . On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation.

On donne la définition de la contrôlabilité locale :

**Définition 1.2.11.** Le système de contrôle  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), t \in I$  est localement contrôlable le long de la trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  et tout  $b \in \mathbb{R}^n$  avec

$|x(0) - a| < \eta$  et  $|x(T) - b| < \eta$ , il existe un contrôle  $u \in L_{loc}^{\infty}([0, T], \mathbb{R}^m)$  tel que :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p et } x(0) = a \Rightarrow (x(T) = b), |u(t) - \bar{u}(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0, T].$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 1.2.12.** : ([32]) *Si le linéarisé autour de la trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$  est contrôlable, alors le système de contrôle  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$  est localement contrôlable le long de la trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$ .*

La réciproque de ce théorème est fautive, par exemple, si  $n = m = 1, f(t, x(t), u(t)) = u^3, T_0 = 0, T_1 = 1$  et  $\bar{x} = \bar{u} = 0$ .

## 1.3 Observabilité

### 1.3.1 Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

où le vecteur  $x$  est le vecteur des états du système, le vecteur  $u$  celui des contrôles (entrées) et le vecteur  $y$  celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure (1.3).

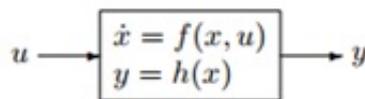


FIGURE 1.3 – Système commandé-observé

D'après ce qui précède, deux définitions de base peuvent être énoncées :

**Définition 1.3.1.** *On appelle mesurabilité d'une grandeur physique la propriété d'effectuer la mesure de celle-ci.*

**Définition 1.3.2.** *On appelle observabilité d'un système la possibilité d'évaluer l'ensemble des grandeurs constitutives du vecteur d'état à partir des mesures effectuées sur le système.*

Donnons-nous maintenant une définition plus précise des notions citées précédemment.

Les systèmes concernés dans toute la suite de ce mémoire sont les systèmes commandés-observés ( $S$ ) de la forme :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x, u), \end{cases}$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  deux fonctions supposées suffisamment régulières.

Le vecteur  $x$  est celui des états du système, le vecteur  $u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$  celui des contrôles (entrées, consignes) supposé connu, et le vecteur  $y$  celui des variables observées (sorties, mesures).

Notons  $x(t, x_0, u(\cdot))$  la solution (trajectoire) du système (S) de condition initiale  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $y(t, x_0, u(\cdot))$  la sortie correspondante pour  $t \in [0, T]$ .

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. Il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indiscernabilité (ou d'indistinguabilité) des états, une définition très fréquente a été établie dans ([16]).

**Définition 1.3.3.** Fixons une entrée  $t \mapsto u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Cette entrée sépare, ou distingue, les états initiaux  $x_0$  et  $x_1$  du système (S) s'il existe  $t \in [0, T]$ ,

$$y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot)).$$

Autrement dit,  $x_0$  et  $x_1$  sont distinguables s'il existe un contrôle  $u$  tel que les trajectoires observées sont différents.

**Définition 1.3.4.** Le système (S) est observable en temps  $T$ , si pour toute paire d'états initiaux  $x_0$  et  $x_1$ , avec  $x_0 \neq x_1$ , il existe une entrée  $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$  qui distingue  $x_0$  et  $x_1$ . Autrement dit :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq x_1 \Rightarrow \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \text{ tel que } y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot)).$$

De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m), y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_1, u(\cdot)) \Rightarrow x_0 = x_1.$$

Le problème de l'observabilité est donc d'établir l'injection  $x_0 \rightarrow y(t, x_0, u(\cdot))$ . Si cette application est injective pour une certaine entrée  $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ , le système (S) est dit observable, et si de plus elle est injective pour toutes les entrées  $u$ , le système (S) est dit uniformément observable.

**Exemple 1.3.5.** Munissons le pendule pesant de l'exemple 1.2.14 de la sortie

$$h(\theta, \omega) = \theta$$

d'où le système contrôlé et observé est :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{u}{ml^2} \\ y = \theta \end{cases}$$

Supposons que pour une certaine entrée qu'on ne précise pas, les deux états  $(\theta_1, \omega_1)$  et  $(\theta_2, \omega_2)$  induisent la même sortie :  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ , pour tout  $t$ . En dérivant cette égalité on obtient  $\omega_1(t) = \omega_2(t)$ , pour tout  $t$ , donc en particulier ces égalités prises à  $t = 0$  donnent

$$(\theta_1, \omega_1) = (\theta_2, \omega_2).$$

On voit que toute entrée sépare toute paire d'états initiaux distincts, et ceci sur un intervalle de temps arbitrairement petit. Donc le système est uniformément observable.

### 1.3.2 Observabilité des systèmes linéaires

Les critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références ([2]), ([31]) et ([32]).

Considérons le système dynamique linéaire stationnaire SLS :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ . Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont de dimensions appropriées.

**Définition 1.3.6.** : ([5]) SLS est complètement observable si, quel que soit l'instant initial  $t_0$ , l'état initial  $x_0$  à  $t_0$ , et l'instant final  $T$  différent de  $t_0$ , la seule connaissance de sa sortie  $y(t)$  et de son entrée  $u(t)$  sur l'intervalle  $t_0 \leq t \leq T$  permet de connaître l'état initial  $x_0$ .

**Définition 1.3.7.** : ([5]) Un SLS est complètement observable si et seulement si, en régime autonome ( $u \equiv 0$ ), l'observation d'une sortie  $y(t)$  uniformément nulle pour  $t_0 \leq t \leq T$  n'est possible que pour un état  $x_0$  (à  $t_0$ ) nul.

Pour un SLS parfaitement connu, et puisqu'on suppose l'entrée  $u(t)$  est connue et que la matrice  $B$  n'intervient pas dans les critères d'observabilité, on peut donc ramener l'étude de l'observabilité à l'étude de la paire  $(A, C)$ . On dira donc indifféremment que "la paire  $(A, C)$  est complètement observable", ou que "le SLS est complètement observable".

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman :

**Théorème 1.3.8.** : ([32]) Le système linéaire commandé-observé (1.5) est observable (en temps  $T$  quelconque) si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman :

$$\Theta(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang  $n$ . On dit alors que la paire  $(A, C)$  est observable.

**Preuve :** Dérivons  $y$  et utilisons l'équation d'état. Une première dérivation donne :

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu.$$

Donc  $x$  est nécessairement solution du système (les fonctions  $y$  et  $u$  sont connues).

$$Cx = y$$

$$CAx = \dot{y} - CBu.$$

A ce niveau, tout se passe comme si la quantité  $\bar{y}_1 = \dot{y} - CBu$  était une nouvelle sortie. En la dérivant de nouveau, nous avons  $CA^2x = \dot{\bar{y}}_1 - CABu$ . Maintenant,  $x$  est nécessairement solution du système étendu

$$Cx = \bar{y}_0 = y$$

$$CAx = \bar{y}_1 = \dot{y} - CBu$$

$$CA^2x = \bar{y}_2 = \dot{\bar{y}}_1 - CABu.$$

Il est alors facile de voir que  $x$  sera nécessairement solution des équations :

$$CA^kx = \bar{y}_k$$

où les quantités connues  $CA^kx = \bar{y}_k$  sont définies par la récurrence  $\bar{y}_k = \dot{\bar{y}}_{k-1} - CA^{k-1}Bu$  pour  $k \geq 1$  et  $\bar{y}_0 = y$ .

Si le rang de la matrice d'observabilité est maximal et égal à  $n$ , elle admet un inverse à gauche (non nécessairement unique),  $P$  matrice  $n \times pn$  vérifiant :

$$P \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

Ainsi

$$x = P \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{pmatrix}$$

La condition de rang est donc suffisante.

Réciproquement, si le rang de cette matrice est strictement inférieur à  $n$ , alors il existe  $x_0 \neq 0$  tel que :

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0.$$

et donc par le théorème de Cayley – Hamilton :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Ce^{tA}x_0 = 0,$$

et par conséquent le système n'est pas observable.

**Propositions 1.3.9.** ([27]) *Le système (1.5) est complètement observable si :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

pour tout  $s$  complexe.

**Remarque 1.3.10.** :

1. Pour un système linéaire autonome, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps  $T$ .
2. La notion d'observabilité pour un système linéaire autonome ne dépend pas de la matrice  $B$ .

3. On a  $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^{n-1})^T C^T) = n$ , et par conséquent, le système (1.5) est observable si et seulement si le système  $\dot{x} = A^T x + C^T u$  est contrôlable. C'est la dualité contrôlabilité / observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

Comme conséquence directe du théorème précédent et de la remarque sur la dualité contrôlabilité/observabilité, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.11.** *Le système (1.5) est observable en temps  $T$  si et seulement si la matrice*

$$O(T) = \int_0^T e^{-sA^T} C^T C e^{-sA} ds$$

est inversible.

**Exemple 1.3.12.** *Soit un système linéaire décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = Cx(t) \\ t \geq 0 \end{cases}$$

On a :

$$\Theta(C, A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où,  $\text{rang } \Theta(C, A) = 2$ , donc la paire  $(A, C)$  est observable.

### 1.3.2.1 Notion de détectabilité

Lorsque la paire  $(A, C)$  n'est pas complètement observable, il faut étudier la détectabilité de cette même paire  $(A, C)$ .

**Définition 1.3.13.** :([27]) *Le SLS est détectable si et seulement si les états non observables sont stables (les valeurs propres à parties réelles négatives).*

### 1.3.2.2 Simplification de l'équation de sortie

Certaines études peuvent être simplifiées en exploitant une propriété sur la matrice  $C$  qui, dans la majorité des cas, est vérifiée. Cette propriété est issue du constat que dans la plupart des systèmes réels les mesures sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la matrice  $C$  est de rang plein en ligne.

Soit le système (1.5) on pose les partitionnements suivants pour la matrice  $C$  et le vecteur d'état  $x(t)$  :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , le  $\text{rang}(C_1) = p$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et  $x_1 \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ .

Ainsi si  $\text{rang}(C_1) = p$ , et en définissant le changement de variables  $\bar{x}(t) = Px(t)$ , avec :

$$P = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

le système (1.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \end{bmatrix} \bar{x}(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

avec :

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}.$$

De plus, si  $\text{rang}(C_1) \neq p$ , mais que les  $p$  mesures sont linéairement indépendantes entre elles, il est parfois nécessaire de définir une matrice de permutation des variables d'état afin d'obtenir  $\text{rang}(C_1) = p$ .

D'après cette dernière remarque sur cette matrice  $C$ , on pose, afin de simplifier la présentation de certaines études menées par la suite, qu'un SLS dont les mesures sont linéairement indépendantes

peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.3.3 Observabilité des systèmes non linéaires

Ce paragraphe consiste à une introduction au problème d'observation de l'état des systèmes non linéaires.

Rappelons que l'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie.

La seule façon effective de tester l'observabilité d'un système est de considérer l'application qui à  $x$  associe  $y$  et ses dérivées en temps. Nous supposons dans cette section que  $y$  et  $u$  sont des fonctions régulières du temps connues. Nous supposons également que les rangs en  $x$  des fonctions de  $(x, u, \dot{u}, \dots)$  qui apparaissent ci-dessous sont constants.

Comme  $u$  et  $y$  sont connues, les dérivées de  $u$  et  $y$  peuvent être évaluées, dans ce cas, le concept d'observabilité peut être interpréter de manière clair. Pour un système *SISO* " Single Input Single Output " (i.e. une entrée et une sortie), nous définissons :

$$y' = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \ddot{y} & \dots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$$

et

$$u' = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \ddot{u} & \dots & u^{(n-1)} \end{bmatrix}^T.$$

Chaque dérivée  $y^{(i)}$  est une fonction de  $x$  et  $u, \dot{u}, \dots, u^{(i)}, \dots$  et donc aussi une fonction de  $x$  et  $u'$  si  $i \leq n-1$ .

Soit  $\psi_i$  une fonction définie par

$$y^{(i)} = \psi_i(x, u').$$

La dérivée de  $y^{(i)}$  est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \left[ \frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[ \frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

Ce qui est, par définition,  $\psi_{i+1}(x, u')$  si  $i+1 \leq n-1$ . En définissant l'opérateur linéaire  $M_f$  est :

$$(M_f \psi)(x, u') = \left[ \frac{\partial \psi(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[ \frac{\partial \psi(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

alors  $y'$  s'écrit

$$y' = \omega(x, u')$$

où

$$\omega(x, u') = \begin{pmatrix} h(x, u) \\ (M_f h)(x, u) \\ \vdots \\ (M_f^{n-1} h)(x, u) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

est la matrice d'observabilité.

Si la matrice d'observabilité (1.9) est inversible, i.e : il existe  $\omega^{-1}$  telle que :

$$x = \omega^{-1}(y', u')$$

alors le système correspondant est observable. En outre, si la jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$\Omega(x, u') = \frac{\partial \omega(x, u')}{\partial x}$$

est inversible en  $x^0$ , alors il existe un voisinage  $V_{x^0}$  de  $x^0$  sur lequel  $\omega$  est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que  $x^0$  est distinguable de tous les points de  $V_{x^0}$ .

Pour les systèmes multi-sorties, c'est-à-dire  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , la notion d'observabilité peut être investiguée d'une manière similaire.

Soit

$$N = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_p \end{bmatrix}^T$$

un vecteur d'entiers positifs, avec  $\sum_{i=1}^p n_i = n$ .

Définissons

$$= \text{left} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{bmatrix}^T,$$

et

$$h(x, u) = \begin{bmatrix} h_1(x, u) & h_2(x, u) & \dots & h_p(x, u) \end{bmatrix}^T$$

En posant

$$\omega_j(x, u') = \begin{pmatrix} h_j(x, u) \\ (M_f h_j)(x, u) \\ \vdots \\ (M_f^{n_j-1} h_j)(x, u) \end{pmatrix}$$

Les dérivées de  $y^j$  jusqu'à l'ordre  $n_j$  sont

$$\begin{bmatrix} y_j & \dot{y}_j & \dots & y_j^{(n_j)} \end{bmatrix}^T = \omega_j(x, u').$$

La matrice d'observabilité pour les systèmes multi-sorties est alors définie par :

$$\omega_N(x, u') = \begin{pmatrix} \omega_1(x, u') \\ \omega_2(x, u') \\ \vdots \\ \omega_q(x, u') \end{pmatrix}$$

S'il existe  $N$  tel que  $\omega_N(x, u')$  soit inversible, alors l'état  $x$  peut être déterminé à partir de  $u'$ ,  $y$ , et les dérivées de chaque  $y_j$  jusqu'à l'ordre  $n_j$ . De ce fait, le système correspondant est observable.

**Remarque :** Le concept d'observabilité cité précédemment peut être étendu directement à la classe des systèmes à temps discret. Différents types de définition ont été abordés dans ([26]).

## 1.4 Conclusion

Durant les années soixante Kalman a introduit les concepts de contrôlabilité et observabilité. Et depuis les années soixante-dix ces questions ne cessent d'attirer l'attention des chercheurs, en vue d'étendre ces notions aux systèmes non linéaires. Notons qu'il reste beaucoup de choses à découvrir dans ce domaine.



# Observateurs

## 2.1 Introduction

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une bonne information sur ce procédé. Les variables directement mesurées ne couvrant généralement pas la totalité des grandeurs susceptibles de décrire le comportement du procédé (les états), a sans doute initié les premiers travaux sur les observateurs. Ces derniers permettent l'élaboration d'un modèle d'estimation d'état utilisant les grandeurs accessibles du système, ses entrées et ses sorties. Dans le cas déterministe, ce modèle est appelé observateur d'état ([24]) et ([34]). Cette estimation d'état utilise les sorties mesurées du système, ses entrées et son modèle. Lorsqu'un système est complètement observable, la reconstruction d'état peut être effectuée soit par un observateur d'ordre complet (l'ordre de l'observateur et le même que celui du système), soit par un observateur d'ordre réduit (l'ordre de l'observateur et plus petit que celui du système).

D'où ce second chapitre est consacré à quelques approches de construction des observateurs.

Soit la définition classique d'un observateur :

**Définition 2.1.1.** ([35]) *On appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique :*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

*un système dynamique auxiliaire (O) dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé :*

$$(O) : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases}$$

telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  tende asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Le schéma d'un tel observateur est donné par la figure (2.1).

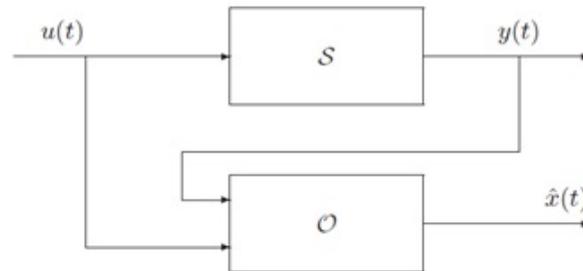


FIGURE 2.1 – Diagramme structurel d'un observateur

## 2.2 Cas des systèmes linéaires autonomes : observateur asymptotique de Luenberger

### 2.2.1 Observateur d'ordre complet

*Motivation* : supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.1)$$

soit observable. On note par  $\hat{x}$  une estimation de la quantité  $x$ . Nous cherchons à obtenir une estimation de l'état sans utiliser les dérivées de  $y$  et  $u$ . La première idée qui vient à l'esprit est de copier la dynamique du système. On intègre directement :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t).$$

à partir d'une condition initiale  $x_0$ . Si la matrice  $A$  est stable, alors  $\hat{x}$  peut être pris comme estimation de  $x$  car l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  tend vers zéro puisque  $\dot{e} = Ae$ . Si  $A$  est instable cette méthode ne marchera pas. En effet, une petite erreur initiale  $e_0 = e(0)$  sera amplifiée exponentiellement. Intuitivement, si l'erreur  $x - \hat{x}$  devient grande, alors, le système étant observable, l'erreur sur les sorties  $y - \hat{y}$  devient grande également. Comme  $y$  est connu, il est alors tentant de modifier  $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$  par ajout d'un terme du type  $(y - \hat{y})$  qu'on connaît et qui correspond à l'erreur de l'observation. Ainsi, se pose le problème suivant : peut-on choisir la matrice  $L$  de façon à ce que la solution  $\hat{x}$  du

systeme

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

converge vers  $x$  ? Puisque  $y = Cx$ , la question qui se pose ainsi : peut-on ajuster la matrice  $L$  de façon à obtenir une équation différentielle d'erreur stable :  $\dot{e} = (A - LC)e$  ? En d'autres termes, pour un choix judicieux de  $L$ , peut-on imposer à  $A - LC$  d'avoir toutes ces valeurs propres à parties réelles strictement négatives ?

On donne maintenant la définition de l'observateur de Luenberger :

**Définition 2.2.1.** Un observateur de Luenberger  $\hat{x}(\cdot)$  de  $x(\cdot)$  est une solution d'un système du type

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_{(1)} + \underbrace{L(y(t) - C\hat{x}(t))}_{(2)} \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

La partie (1) est celle correspondante à la dynamique du système et la partie (2) est le correctif. Par définition d'un observateur, la matrice  $L \in M_{n,p}$  (dite matrice de gain) est telle que :

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Compte tenu des équations d'états et de sortie de l'observateur (2.2) et du système (2.1), nous en déduisons le diagramme structurel de l'observateur de Luenberger présenté à la figure (2.2) ci-dessous :

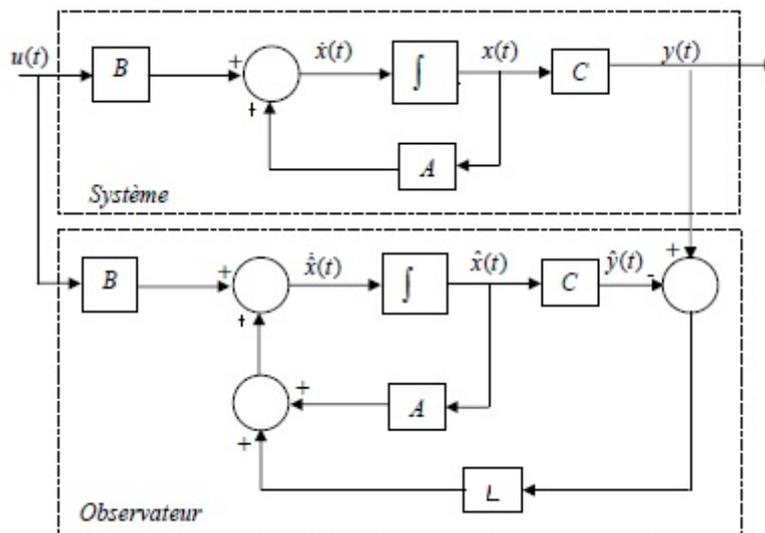


FIGURE 2.2 – Diagramme structurel de l'observateur de Luenberger

**Remarque :** La dynamique de l'erreur  $e(\cdot)$  vérifie l'équation différentielle

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

et donc  $e(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , pour toute valeur initiale  $e(0)$  si et seulement si la matrice  $A - LC$  est de Hurwitz (la partie réelle des valeurs propres soit négative). Construire donc un observateur de Luenberger revient à déterminer une matrice de gain  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  soit de Hurwitz.

### 2.2.1.1. Dimensionnement du gain $L$ de l'observateur :

La détermination de matrice  $L$  va permettre de fixer arbitrairement les pôles de l'observateur, i.e. choisir les valeurs propres de la matrice  $A - LC$  de façon à ce que la matrice  $A - LC$  soit de Hurwitz. On notera par la suite par :

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A + LC) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \quad (2.3)$$

et par :

$$\hat{a}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i \lambda^i \quad (2.4)$$

où  $\hat{a}(\lambda)$  est le polynôme représentant les dynamiques désirées de l'observateur et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres désirées pour  $A - LC$ .

**Exemple 2.2.2.** Considérons le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

définie par le triplet  $\{A, B, C\}$  avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'observateur de Luenberger est définie par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

La dynamique de l'erreur  $e(\cdot)$  vérifie l'équation différentielle

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

et donc  $e(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , pour toute valeur initiale  $e(0)$  si et seulement si la matrice  $A - LC$  est de Hurwitz.

On souhaite construire un observateur de Luenberger ayant pour pôle  $-2$  et  $-5$ .

D'après l'étude précédente, on a :

$$P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 10$$

Calculons la matrice  $(A - LC)$  ; en posant  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 1 \\ 2-l_2 & -2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit alors en fonction de  $l_1$  et  $l_2$  ;

$$P_{A-LC}(\lambda) = \lambda^2 + (l_1 + 3)\lambda + 2l_1 + l_2$$

En égalisant  $P_{A-LC}(\lambda) = P_{des}(\lambda)$ , on obtient les valeurs de  $L$  et  $(A - LC)$  ;

$$L = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, (A - LC) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 2.2.2 Observateur d'ordre réduit

L'observateur d'ordre réduit introduit par Luenberger ([22]) et ([23]) consiste à estimer les états non mesurables. Ainsi pour un système défini par (2.1) l'observateur réduit sera d'ordre  $n - p$ , où  $p$  est le rang de la matrice  $C$ .

Cet observateur se base sur l'hypothèse que la matrice  $C$  est de rang plein en ligne, ce qui permet d'utiliser le changement de variable défini par (1.6) afin d'écrire le système (2.1) sous la forme (1.8). Les matrices  $A, B, C$  et le vecteur d'état  $x(t)$  sont partitionnés comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

L'équation d'état de la forme (1.8) peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Les  $p$  premières composantes de l'état sont directement mesurées ( $y(t) = x_1(t)$ ).  $x_1(t)$  ne doit donc pas être estimé par l'observateur. L'équation qui régit l'évolution de  $x_1(t)$  (première équation de (2.5)) peut alors être considérée comme une mesure, que l'on note  $\xi(t)$ , dépendante de  $x_2(t)$  et de  $u(t)$  :

$$\xi(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) = A_{12}x_2(t) + B_1u(t). \quad (2.6)$$

Pour estimer  $x_2(t)$ , la variable  $v(t)$  est introduite et on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}v(t) + B_2u(t) + L[\xi(t) - \hat{\xi}(t)] \\ x_1(t) &= y(t) \\ \hat{\xi}(t) &= A_{12}v(t) + B_1u(t) \end{aligned}$$

Afin de construire  $\hat{\xi}(t)$ , on doit exprimer la dérivée de la sortie  $y(t)$ , ce qui constitue un inconvénient. Afin d'éviter de calculer directement cette dérivée, la variable  $z(t)$  définie par :

$$z(t) = v(t) - Ly(t), \quad (2.7)$$

est introduite. En dérivant  $z(t)$  on obtient donc :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{v}(t) - L\dot{x}_1(t) \\ &= A_{21}x_1(t) + A_{22}v(t) + B_2u(t) - L[A_{11}x_1(t) + A_{12}v(t) + B_1u(t)] \end{aligned}$$

Étant donné que  $z(t) = v(t) - Ly(t)$  et que  $y(t) = x_1(t)$ , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Qu(t) + L_1y(t), \quad (2.8)$$

avec :

$$N = A_{22} - LA_{12}, \quad (2.9)$$

$$Q = B_2 - LB_1, \quad (2.10)$$

$$L_1 = A_{21} + A_{22}L - LA_{11} - LA_{12}L. \quad (2.11)$$

Ainsi (2.8) est le système dynamique appelé observateur réduit d'ordre  $q = n - p$  pour le système (2.5). La reconstruction de l'état non mesurée  $x_2(t)$  étant estimée par  $v(t)$  :

$$v(t) = z(t) + Ly(t).$$

L'erreur d'observation  $e(t)$  est définie par  $e(t) = x_2(t) - v(t)$ . De plus  $e(t)$  est régie par :

$$\dot{e}(t) = Ne(t),$$

or  $N = A_{22} - LA_{12}$ . Nous nous retrouvons ici, pour le placement pôle de  $N$ , dans le même cas d'étude que pour le placement de pôle de la matrice  $A - LC$  pour un observateur d'ordre plein. Ainsi, lorsque la paire  $(A_{22}, A_{12})$  est observable les valeurs propres de  $N$  et donc les dynamiques de l'observateur peuvent être fixées arbitrairement grâce à un choix adéquat de  $L$  en utilisant une TSAVP (Technique standard d'affectation des valeurs propres).

**Exemple 2.2.3.** Considérons le système linéaire autonome observable suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Cherchons l'observateur de Luenberger réduit. Le système observé s'écrit comme suit :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Qu(t) + L_1y(t)$$

où

$$\begin{aligned}N &= A_{22} - LA_{12}, \\ Q &= B_2 - LB_1, \\ L_1 &= A_{21} + A_{22}L - LA_{11} - LA_{12}L.\end{aligned}$$

Comme le rang  $C = 1$  donc  $p = 1$  et l'observateur et de rang  $n - p = 1$ . On a :

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = 2, \quad A_{22} = -2 \quad \text{et} \quad B_1 = B_2 = 1.$$

Calculons maintenant  $N, Q$  et  $L_1$  ;

On pose  $L = l_1$  on obtient :

$$N = -2 - l_1.$$

Si on prend  $N = -3$ , on aura :

$$l_1 = 1$$

. D'où :

$$L = 1$$

Et on a :

$$Q = 0.$$

et

$$L_1 = 0,$$

Donc l'observateur s'écrit :

$$\dot{z}(t) = -3z(t).$$

La reconstruction de l'état non mesurée  $x_2(t)$  étant estimée par  $v(t)$  :

$$v(t) = z(t) + y(t).$$

**Théorème 2.2.4.** ([3]) Si  $(A, C)$  est observable alors  $(A_{22}, A_{12})$  est observable.

**Démonstration :** Le but est de démontrer que si  $(A, C)$  est observable alors  $(A_{22}, A_{12})$  l'est également. Si  $(A, C)$  est observable on a :

$$\forall s, \text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sI_p - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI_{n-p} - A_{22} \\ I_p & 0 \end{bmatrix} = n$$

ce qui équivaut à :

$$\forall s, \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} \\ sI_{n-p} - \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = n - p,$$

donc  $(A_{22}, A_{12})$  est une paire observable.

L'observateur réduit du système (2.7) a finalement la structure suivante :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Qu(t) + L_1y(t)$$

où  $N, Q$  et  $L_1$  sont définies par les relations (2.9) (2.10) et (2.11). En notant  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  les estimations des vecteurs  $x_1$  et  $x_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= C_1^{-1}[(I - C_2L)y(t) - C_2z(t)] \\ \hat{x}_2(t) &= z(t) + Ly(t) \end{aligned}$$

## 2.3 Observateurs des systèmes non linéaires

La synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires est aussi complexe que l'étude d'observabilité ; souvent on se contente d'une étude locale.

**Définition 2.3.1.** ([36]) Le système dynamique (O) décrit par les équations

$$\begin{cases} \dot{z} = \phi(z, u, y) \\ \hat{x} = \psi(z, u, y) \end{cases} \quad (2.12)$$

est un observateur asymptotique locale pour le système (S) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i)

$$x(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t), \forall t \geq 0,$$

(ii) *il existe un voisinage ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  de l'origine tel que*

$$x(0), \hat{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

*Si l'erreur  $e(t)$  entre le vecteur d'état  $x(t)$  et son estimé  $\hat{x}(t)$  tend exponentiellement vers zéro, le système (O) est dit observateur exponentiel de (S).*

*Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , le système (O) est dit observateur global de (S).*

*L'observateur est d'ordre plein si  $p = n$ , et d'ordre réduit si  $p < n$ . La condition (ii) signifie que l'erreur d'estimation doit être asymptotiquement stable.*

*Quant à la condition (i), elle signifie que si l'observateur (O) et le système (S) possèdent tous les deux le même état initial, alors l'état estimé de (O) devrait être égal à l'état réel du système (S) à tout instant.*

## 2.4 Observateurs des systèmes non linéaires, un état de l'art

*Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de variance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger a été utilisé pour les systèmes linéaires déterministes.*

*Dans le cas de systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet (voir ([25]), ([33])) ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Nous présenterons quelques algorithmes dans la suite de ce chapitre.*

- 1. Méthodes de transformation non linéaires : Cette technique fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non-linéaire à un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse.*
- 2. Observateurs étendu : Dans ce cas, le calcul du gain de l'observateur se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu.*
- 3. Observateurs à grand gain : Ce type d'observateurs est utilisé en général pour les systèmes Lipchitziens. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand*

pour compenser la non-linéarité du système.

4. *Observateurs de Luenberger généralisés (O.L.G) : C'est un nouveau type d'observateurs qui a été proposé récemment pour la classe des systèmes monotones. Cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain à l'intérieur de la partie non-linéaire du système.*
5. *Observateurs basés sur la théorie de la contraction : Ce type d'observateurs, comme son nom l'indique, est basé sur la théorie de la contraction utilisée comme outil d'analyse de la convergence. Cette technique mène à de nouvelles conditions de synthèse différentes de celles fournies par les techniques précédentes.*

Ci-après, nous présentons un peu plus en détail la méthode de transformations non linéaires et l'observateur de Thau.

### 2.4.1 Méthode de transformations non linéaires

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse.

L'un des premiers travaux réalisés dans ce domaine est posé dans ([19]), où le système autonome de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) & (a) \\ y = h(x) & (b) \end{cases} \quad (2.13)$$

avec

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

est transformé, par un changement de coordonnées non linéaire  $z = \phi(x)$ , en un système linéaire sous la forme canonique observable suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \lambda(y) & (a) \\ y = C_c z & (b) \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $A_c$  et  $C_c$  sont sous forme duale de Brunovski, i.e. :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}.$$

L'observateur de Luenberger correspondant à (2.14) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}),$$

dont la dynamique de l'erreur  $e = z - \hat{z}$  est linéaire et s'écrit :

$$\dot{e} = (A_c - KC_c)e. \quad (2.15)$$

Le calcul du gain  $K$  se fait par un placement de pôles.

Ce travail été étendu dans ([20]) au cas des systèmes à sorties multiples et la transformation non linéaire a été généralisée comme suit :

$$\begin{aligned} z &= \phi(x), \\ v &= \psi(y). \end{aligned}$$

où  $v$  est la transformation de la sortie  $y$  à l'aide du changement de coordonnées non linéaire  $\psi(\cdot)$ . Les conditions sous lesquelles une telle transformation existe ont été établies. Cependant, trois problèmes sont liés à cette approche :

1. La classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est très restreinte,
2. La procédure d'obtention d'une telle transformation est très compliquée,
3. Dans le cas des systèmes avec entrées (systèmes commandés), le système transformé contient toutes les dérivées des entrées.

Dans ([18]), le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

a été considéré, avec  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Dans ce cas, le système transformé sous la forme canonique généralisée est défini par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \lambda(y, u') & (a) \\ v = C_c z & (b) \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $u' = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \dots & u^{(n)} \end{bmatrix}^T$ . La transformation non linéaire utilisée est

$$\begin{aligned} z &= \phi(x, u'), \\ v &= \psi(x, u'). \end{aligned}$$

En supposant que les dérivées de l'entrée  $u$  sont disponibles, la structure de l'observateur suggéré est :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A_c \hat{z} + \lambda(y, u') + K(v - \hat{v}) \\ \hat{v} &= C_c \hat{z}. \end{aligned}$$

La dynamique de l'erreur est donnée par (2.15).

Une des raisons pour laquelle la classe des systèmes qui peuvent être transformés sous forme linéaire observable est restreinte est due au fait que la sortie doit être linéaire comme dans (2.14) (b) et (2.16) (b). Cette condition est relaxée dans ([17]) pour la classe des systèmes autonomes mono-sortie. L'idée est de transformer le système (2.13), en utilisant le changement de variable  $z = \phi(x)$ , en

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Ly \\ y &= \eta(z)\end{aligned}$$

où  $\eta(z) = h(x) |_{x=\phi^{-1}(z)}$ . L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Ly,$$

et la dynamique de l'erreur  $e = z - \hat{z}$  est

$$\dot{e} = Ae.$$

La transformation  $\phi$  est choisie de façon à obtenir une matrice  $A$  avec des propriétés souhaitables.

## 2.4.2 Approche de Thau et ses généralisations

Ce type d'observateur est relativement classique en observation des systèmes non linéaires. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non linéarité du système.

Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans ([30]), s'applique sur la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x, u) & (a) \\ y = Cx & (b) \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire  $(A, C)$  est détectable et la non-linéarité,  $\phi$  satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à  $x$  :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\|, \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^m \quad (2.18)$$

où  $\gamma_\phi$  est la constante de Lipschitz de la fonction  $\phi$ . L'observateur de type Luenberger correspondant à (2.17) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (2.19)$$

où  $K$  est une matrice gain.

La dynamique de l'erreur d'estimation  $\varepsilon = x - \hat{x}$  est donnée par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = (A - KC)\varepsilon + \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \quad (2.20)$$

L'objet est de déterminer sous quelles conditions le gain  $K$  peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation  $\varepsilon$  en zéro.

La méthode de Thau ([30]) fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (2.20). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.4.1.** ([30]) *Considérons le système (2.17) et l'observateur (2.19). Si le gain d'observation  $K$  est choisi tel que :*

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (2.21)$$

où  $\lambda_{\min}(S)$  et  $\lambda_{\max}(S)$  désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée  $S$ , les matrices  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0 \quad (2.22)$$

alors l'erreur d'estimation (2.20) est exponentiellement stable.

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard

$$V = V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

Pour plus de détail sur la preuve du théorème 2.4.1, nous invitons le lecteur à consulter ([30]). Il a été démontré dans ([28]) que le rapport  $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$  est maximal si  $Q = I_n$ . Le problème est donc réduit à choisir un gain  $K$  qui satisfait

$$\gamma_\phi < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (2.23)$$

où

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -I_n. \quad (2.24)$$

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (2.19), a posteriori. En effet, le choix des matrices  $P$ ,  $Q$  et  $K$  qui satisfont l'inégalité (2.21) n'est pas directe. Par exemple, le placement des valeurs propres de  $(A - KC)$  dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (2.24) est satisfaite. Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de  $(A - KC)$  et  $\lambda_{\max}(P)$ , ceci a été prouvé dans ([29]) par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateur a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs spécialiste dans le domaine de l'observation d'état. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans ([29]), où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.4.2.** ([29]) *Considérons le système (2.17) et l'observateur (2.19). S'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'équation de Riccati*

$$AP + PA^T + P \left( \gamma_\phi^2 I_n - \frac{1}{\varepsilon} C^T C \right) P + I_n + \varepsilon I_n = 0 \quad (2.25)$$

*admette une solution  $P$  symétrique définie positive, alors le gain*

$$K = \frac{1}{2\varepsilon} PC^T \quad (2.26)$$

*stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (2.20).*

*Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires  $(A, C)$  observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice  $(A - KC)$  afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Nous avons vu que le placement des valeurs propres de  $(A - KC)$  dans le demi plan gauche est certainement insuffisant.*

## 2.5 Conclusion

*Dans ce chapitre, nous avons présenté l'observateur de Luenberger pour les systèmes linéaires et un état de l'art qui regroupe la plupart des techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Pour cette classe générale de systèmes, nous avons vu qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches développées à ce jour sont soit une approximation des algorithmes linéaires (linéarisation autour d'un point de fonctionnement), soit des algorithmes non linéaires spécifiques pour certaines classes de systèmes.*

## Exemples de simulation

### 3.1 Introduction

*Dans ce chapitre-là, on présente quelques résultats de simulation élaborés sous le logiciel Matlab, en particulier Simulink et LMI contrôl toolbox.*

*On a traité trois exemples didactiques, les deux premiers exemples sur le pendule et le troisième sur un système non linéaire Lipschitz.*

### 3.2 Exemples

#### 3.2.1 Exemple 1 : Observateur de Luenberger d'ordre complet

**Modèle du pendule :**

*Soit un pendule de longueur  $l$  avec une masse de  $m$  à son extrémité, défini par la figure (3.1) ;*

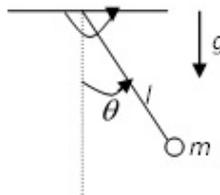


FIGURE 3.1 – Modèle du pendule

*Où  $g$  est l'accélération (gravité) et  $\theta$  est l'angle qui fait le pendule avec la verticale.*

**Equation de mouvement de Lagrange :**

L'énergie cinétique du système est :

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,$$

où, on a utilisé le fait que  $I = ml^2$ . L'énergie potentielle est :

$$P = -mgl \cos \theta,$$

où le Lagrangien est donné par :

$$L = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

Selon l'équation de mouvement de Lagrange, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau,$$

avec  $\tau$  l'entrée appliquée au point pivot.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta, \end{aligned}$$

d'où l'équation de mouvement de Lagrange devient :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau,$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{\tau}{ml^2},$$

avec  $\frac{\tau}{ml^2}$  une entrée normalisée.

**Equation d'état non linéaire :**

Définissons l'état du système comme

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

Donc on a :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = f(x, u, t)$$

avec

$$u = \frac{\tau}{ml^2}$$

C'est l'équation d'état non linéaire.

### Linéarisation :

Pour  $\theta$  assez petit on a l'approximation  $\sin \theta \approx \theta$ .

D'où,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{-g}{l}\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu,$$

c'est le modèle d'état du pendule pour assez petit.

### Détermination de l'observateur de Luenberger d'ordre complet :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \\ y = Cx \\ x_0 = x(0) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Vérifions si le système (3.1) est observable ;

Calculons la matrice d'observabilité ;

$$\Theta(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a  $\det \Theta(A, C) = 1 \neq 0$  d'où  $\text{rang } \Theta(A, C) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ , donc le système (3.1) est observable.

L'observateur de Luenberger d'ordre complet du système (3.1) est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ \hat{x}_0 = \hat{x}(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $L$  est une matrice gain.

L'erreur est donné par :  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .

La dynamique de l'erreur  $e(.)$  vérifie l'équation différentielle

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

et donc  $e(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , pour toute valeur  $e(0)$  si et seulement si la matrice  $A - LC$  est de Hurwitz.

Construire donc un observateur de Luenberger revient à déterminer une matrice de gain  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  est de Hurwitz.

Si on prend :

$$u = 1, \quad g = 9.81 \quad \text{et} \quad l = 3.$$

On retrouve le système réel et le système d'observateur de Luenberger comme suit :

Le système réel est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3.27x_1 + 1 \\ x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système d'observateur de Luenberger complet est donné par :

$$\begin{cases} L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -3.27\hat{x}_1 + l_2(x_1 - \hat{x}_1) + 1 \\ \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} & \hat{x}_{20} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.4)$$

La figure (3.2) représente le schéma structurel de l'observateur de Luenberger d'ordre complet pour les systèmes (3.3) et (3.4) ;

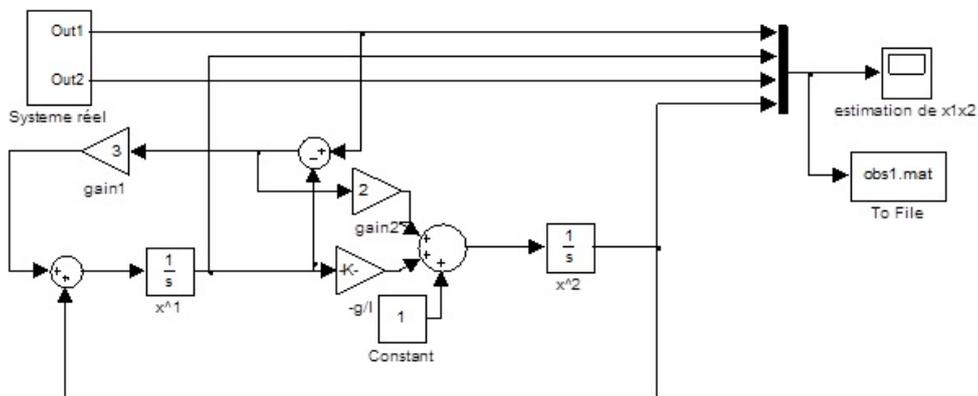


FIGURE 3.2 – Schéma bloc de la simulation d'observateur Luenberger complet

**Simulations :****1<sup>er</sup> cas : avec conditions initiales égales :**

La solution réelle et son estimée des systèmes (3.3) et (3.4) est donnée par la figure (3.3).

Si on prend :

$$x(0) = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Si on prend comme pôles de l'observateur  $-1$  et  $-2$ , alors la matrice gain est :

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1.27 \end{bmatrix}^T$$

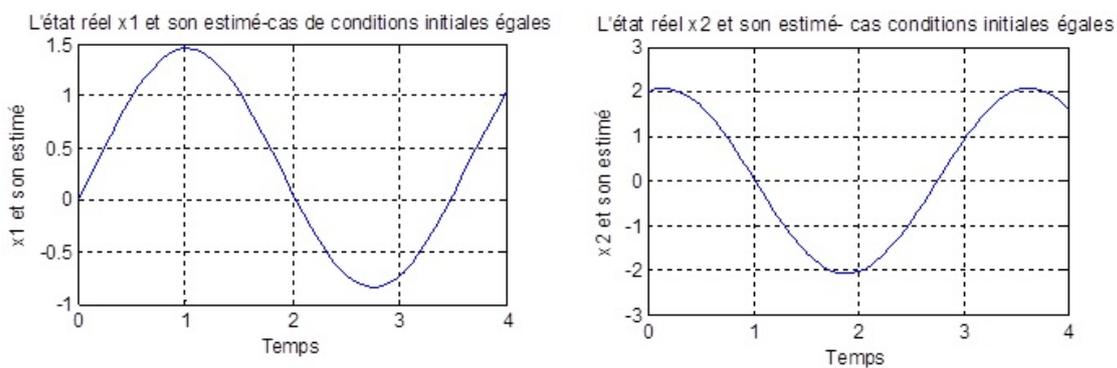


FIGURE 3.3 – Simulation de l'état réel et son estimé avec  $x(0) = \hat{x}(0)$

Sur ces deux courbes, on remarque que la variable d'état estimée  $\hat{x}_1$  est complètement confondue avec la variable d'état réelle  $x_1$ , même pour la variable d'état estimée  $\hat{x}_2$  est complètement confondue avec la variable d'état réelle  $x_2$ , ce qui signifie que l'observateur de Luenberger complet converge et l'erreur est nul.

**2<sup>eme</sup> cas : avec conditions initiales différentes :**

• Si on prend :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}^T$$

Si on prend comme pôles pour l'observateur  $-1$  et  $-2$ , alors la matrice gain est :

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1.27 \end{bmatrix}^T$$

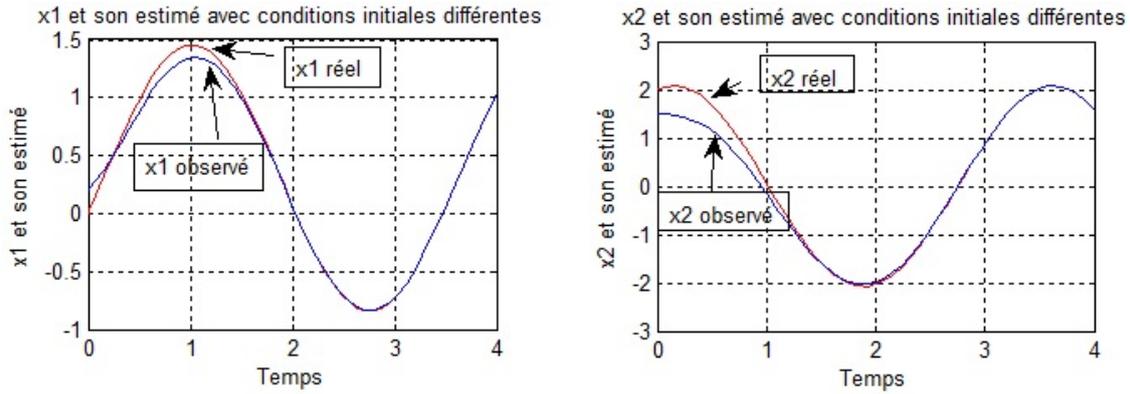


FIGURE 3.4 – Simulation de l'état réel et son estimé avec  $x(0) \neq \hat{x}(0)$

- Si on prend :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}^T$$

Si on prend comme pôles pour l'observateur  $-12$  et  $-20$ , alors la matrice gain est :

$$L = \begin{bmatrix} 32 & 236.73 \end{bmatrix}^T$$

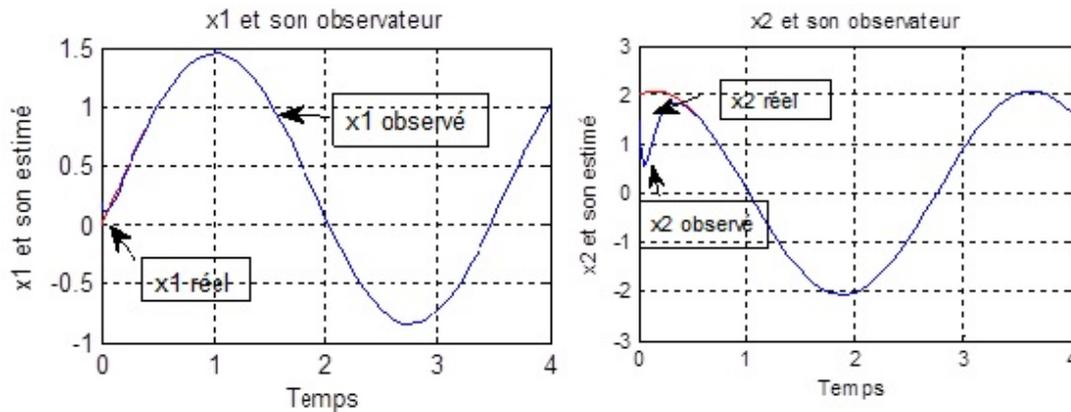


FIGURE 3.5 – Simulation de l'état réel et son estimé avec  $x(0) \neq \hat{x}(0)$  et à grand gain

Dans les figure (3.4) et (3.5), on remarque que les variables d'état estimées  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  sont complètement confondues avec les variables d'état réelles  $x_1$  et  $x_2$ , ce qui signifie que l'observateur de Luenberger complet converge et l'observateur converge plus vite si le gain  $L$  est grand. Si le gain est très grand l'observateur  $\hat{x}$  diverge.

### 3.2.2 Exemple 2 : Observateur de Luenberger d'ordre réduit

Reprenons l'exemple de pendule.

Comme  $y = x_1$ , il suffit d'estimer  $x_2$  en utilisant un observateur de Luenberger réduit.

On prend :

$$u = 1, \quad g = 9.81 \quad \text{et} \quad l = 3.$$

L'observateur de Luenberger réduit s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = -Lz - (3.27 + L^2)y + 1 \\ \hat{x}_2 = z + Ly \end{cases} \quad (3.5)$$

La figure (3.6) représente le schéma structurel de l'observateur de Luenberger d'ordre réduit ;

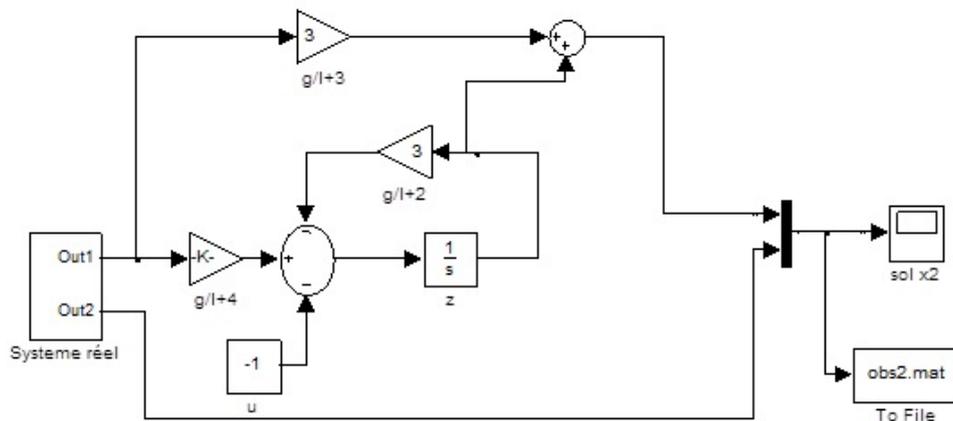


FIGURE 3.6 – Schéma bloc de la simulation d'observateur de Luenberger d'ordre réduit.

**Simulation :**

La solution réelle et son estimée des systèmes (3.3) et (3.5) est donnée par la figure (3.7).

• Si on prend :

$$L = 1$$

$$x(0) = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}^T$$

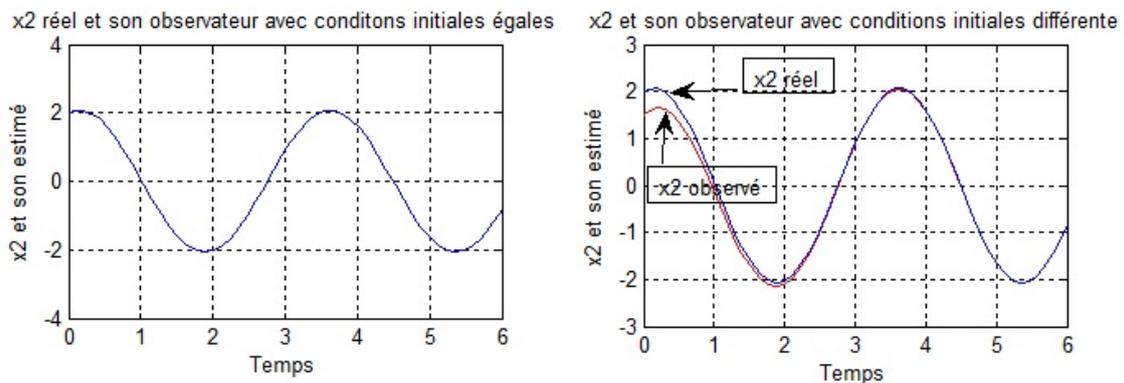


FIGURE 3.7 – Simulation de l'état réel et son estimé avec changement de conditions

- Si on prend :

$$L = 20$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}^T$$

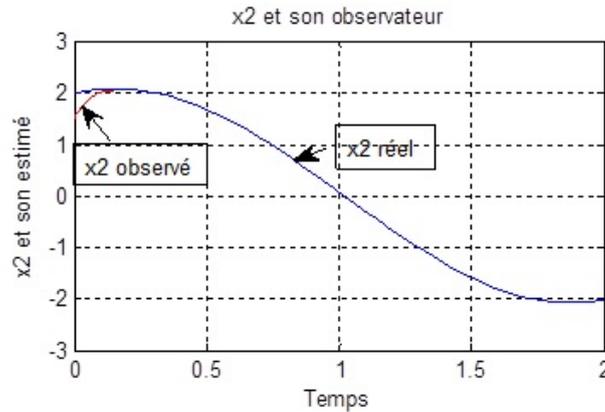


FIGURE 3.8 – Simulation de l'état  $x_2$  réel et son estimé avec  $x(0) \neq \hat{x}(0)$  et à grand gain

Dans la figure (3.7) et (3.8), on remarque que la variable d'état estimée  $\hat{x}_2$  est complètement confondue avec la variable d'état réelle  $x_2$ , ce qui signifie que l'observateur de Luenberger d'ordre réduit converge, et la vitesse de convergence augmente lorsque le gain  $L$  est grand.

### 3.2.3 Exemple 3 : Observateur de Thau - Approche LMI

LMI "Linear Matrix Inequalities" (i.e. inégalités matricielles linéaires).

Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'automatique, (problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système, ...) qui sont généralement difficiles à résoudre de façons analytique.

**Définition 3.2.1.** : (inégalité matricielle linéaire LMI) ([14])

On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques :  $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  telles que :

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i < 0 \quad (3.6)$$

L'inégalité (3.6) implique que :  $A(x)$  est une matrice définie négative c'est-à-dire :

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad z \neq 0 : z^T A(x) z < 0.$$

Les matrices symétriques  $A_i$  sont fixées (connues) et  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$  est un vecteur de valeurs inconnues (variables).

Pour résoudre un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, on se ramène à un des trois problèmes suivants ([14]) :

- **Problème faisabilité :**

Le problème de faisabilité d'une LMI est le problème de trouver l'ensemble des points :  $x \in C$  où  $C = \{x \in \mathbb{R}^n / A(x) < 0\}$ , alors le problème  $A(x) < 0$  est dit faisable (ou réalisable).

**Note :** Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **feasp**.

- **La minimisation d'une fonction de coût linéaire :**

On cherche à minimiser on objectif linéaire sous contrainte LMI

$$\min C^T x, x \in \mathbb{R}^n, A(x) < 0$$

où  $C^T$  est un vecteur ligne donné.

**Note :** Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **mincx**.

- **Minimisation de valeur propre généralisée :**

Le problème est le suivant :

Minimiser  $\lambda$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$  contraint par :

$$\begin{cases} A(x) < \lambda B(x) \\ B(x) > 0 \\ C(x) < 0 \end{cases}$$

**Note :** Sous Matlab, la recherche d'une solution globale est assurée par la fonction **gevp**.

**Exemple :**

Dans cet exemple, on va utiliser la fonction de toolbox "mincx" pour la détermination de la matrice gain.

Soit le modèle d'écrit par ([1]) :

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x^3 \\ -6x_1^5 - 6x_1^2 x_2 - 2x_1^4 - 2x_1^2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Le programme Matlab qui nous permet de calculer la matrice gain est le suivant :

*% Détermination de la matrice gain, approche LMI*

*% entrées du système*

*A=[0 1;-1 -1];*

```

C1=[1 0];
% Début du programme LMI
setlmiis([]);
% Déclaration des variables matrices LMI
P = lmivar(1,[20]);
F=lmivar(2, [length(A) 1]);
epsI=lmivar(1, [1 0]);
ksi=lmivar(1, [1 0]);
% Déclaration des inégalités matricielles
% Première contrainte :  $A'P+PA-C'F'-FC+I+epsI < 0$ 
L1lmi=newlmi;
lmiterm([L1lmi 1 1 1],1,A,'S');      %  $A'P+PA$ 
lmiterm([L1lmi 1 1 2],-1,C1,'S');    %  $-C'F'-FC$ 
lmiterm([L1lmi 1 1 3],1,1);          %  $epsI$ 
lmiterm([L1lmi 1 1 0],1);            %  $I$ 
% Deuxième contrainte :  $[0.5ksiI P; P 0.5ksiI] > 0$ 
L2lmi=newlmi;
lmiterm([-L2lmi 1 1 4],0.5,eye(2));   %  $-0.5ksiI$ 
lmiterm([-L2lmi 1 2 1],1,1);          %  $-P$ 
lmiterm([-L2lmi 2 2 4],0.5,1);        %  $-0.5ksiI$ 
% Troisième contrainte :  $P > 0$ 
L3lmi=newlmi;
lmiterm([-L3lmi 1 1 1],1,1);          %  $-P < 0$ 
% Quatrième contrainte :  $eps > 0$ 
L4lmi=newlmi;
lmiterm([-L4lmi 1 1 3],1,1);          %  $-eps < 0$ 
% Cinquième contrainte :  $ksi > 0$ 
L5lmi=newlmi;
lmiterm([-L5lmi 1 1 4],1,1);          %  $-ksi < 0$ 
% Création du système LMI
lmiisys=getlmiis;
% Définition de la fonction objective
n=decnbr(lmiisys);
obj=zeros(n,1);
for j=1 :n
obj(j)=defcx(lmiisys,j,ksi);
end
% Résolution des LMIs
[copt xopt] = mincx(lmiisys,obj)

```

```

%Résultats
Popt=dec2mat(lmisys,xopt,P);
Fopt=dec2mat(lmisys,xopt,F);
epsopt=dec2mat(lmisys,xopt,eps1);
ksiopt=dec2mat(lmisys,xopt,ksi);
%Calcul de la matrice gain
K=inv(Popt)*Fopt
%———— fin de programme —————

```

### Résultats de simulations :

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \min \gamma = 1.001 \\ K &= \begin{bmatrix} 152.5944 & 0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Le système réel est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 6x_1^5 - 6x_1^2x_2 - 2x_1^4 - 2x_1^2 \\ x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système observé est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}).$$

D'où on obtient le système observé suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \hat{x}_1^3 + 152.5944(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 6\hat{x}_1^5 - 6\hat{x}_1^2\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1^4 - 2\hat{x}_1^2 \\ \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} & \hat{x}_{20} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.8)$$

La figure (3.9) représente le schéma structurel de l'observateur de Thau correspondant aux systèmes (3.7) et (3.8);

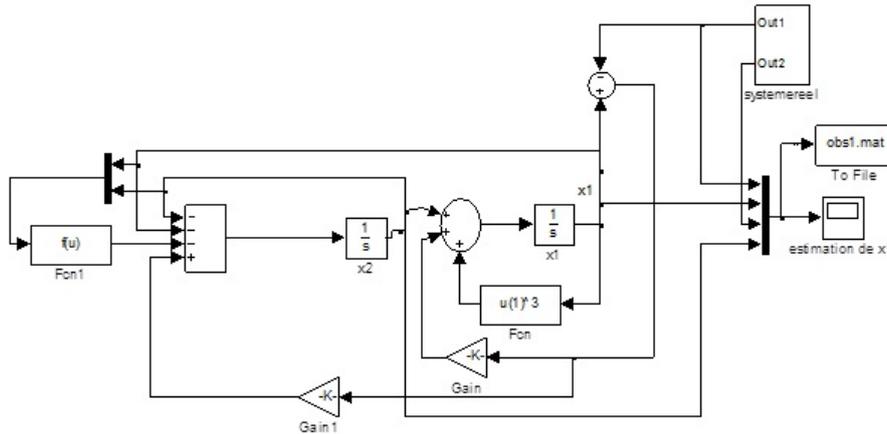


FIGURE 3.9 – Schéma bloc de la simulation d’observateur de Thau

**Simulation :**

La solution réelle et son estimée des systèmes (3.7) et (3.8) est donnée par la figure (3.10).

- Si on prend :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.45 \end{bmatrix}^T, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}^T$$

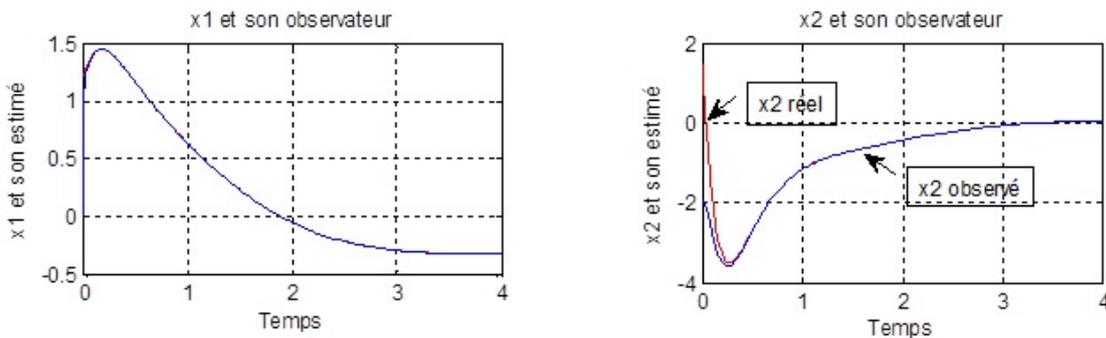


FIGURE 3.10 – Simulation de l’état réel et son estimé

Sur cette courbe, on remarque que les variables d’état estimées  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  sont complètement confondues avec les variables d’état réelles  $x_1$  et  $x_2$ , ce qui signifie que l’observateur de Thau converge plus vite si le gain  $K$  est grand.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques résultats de simulations élaboré sous Matlab/ Simulink.

On a traité trois exemples, dans les deux premiers on a utilisé l’observateur de Luenberger. On a vu que l’observateur converge mais si le gain  $L$  est très grand on remarque que l’état observé  $\hat{x}$

*diverge. Et dans le troisième exemple qui est sur une classe spéciale des systèmes non linéaires qui est Lipschitz traité dans ([1]), on a utilisé la technique LMI pour la détermination de la matrice gain, et on a trouvé que l'observateur de Thau converge.*



# Conclusion générale

*Durant tout le long de ce mémoire, nous avons cité plusieurs problèmes de contrôle : la contrôlabilité, l'observabilité et l'observation de l'état ou observateur. Où, on a présenté quelques rappels sur la contrôlabilité des systèmes linéaires qui est caractérisée par le critère de Kalman. Pour les systèmes non linéaires nous avons abordé la contrôlabilité locale. Après on a abordé le problème d'observabilité, comme souvent on ne peut pas mesurer tout l'état  $x$ , mais une partie  $y$  de  $x$ . On peut se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstruire l'état complet, c'est le problème d'observabilité. Après quand l'observabilité du système étudié est assuré, on cherche à estimer l'état  $x$ . Estimer  $x$  revient à construire un observateur asymptotique  $\hat{x}$  de  $x$ , i.e. une fonction dynamique de l'observable  $y$  tel que  $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous avons présenté l'observateur de Luenberger pour les systèmes linéaires et un état de l'art qui regroupe la plupart des techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Pour cette classe générale de systèmes, nous avons vu qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches développées à ce jour sont soit une approximation des algorithmes linéaires (linéarisation autour d'un point de fonctionnement), soit des algorithmes non linéaires spécifiques pour certaines classes de systèmes. Puis, on a présenté quelques résultats de simulation élaborés sous le logiciel Matlab, en particulier Simulink et LMI contrôl toolbox qui affirme la convergence de l'observateur de Luenberger et l'observateur de Thau.*



# Bibliographie

- [1] M. Abbaszadeh and J. Horacio, *A Robust Observer Design Method for Continuous-Time Lipschitz Nonlinear Systems*. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision Control Manchester Grand Hyatt Hotel San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006*.
- [2] A. Akhenak, *Conception d'observateurs non linéaire par approche multi-modèle : application au diagnostic*. Univ.-Nancy, 16 décembre 2004.
- [3] L. Benoît, *Observateurs de systèmes linéaires. Application à la détection et localisation de fautes*, Thèse présentée pour obtenir le titre de Docteur de l'Université de Toulouse, 2008.
- [4] G. Bornard and H. Hammouri, *A high gain observer for a class of uniformly observable systems*. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Broughton, England, 1991.
- [5] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, *Modélisation et identification des processus Tome I*. Editions Technip, (1992).
- [6] M. Boutayeb and D. Aubry, *A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems*. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 44(8) : 393-399, 2004.
- [7] M. Boutayeb, D. Aubry and M. Darouach, *Robust observers design for a class of nonlinear discrete-time systems*. In *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [8] E. Brower, *Tracking and Kalman filtering made easy*. John Wiley Sons, 1998.
- [9] R. Brown and P. Hwang, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with Matlab exercises and solutions*. John Wiley Sons, Third Edition, 1997.
- [10] G. Chen, *Approximate Kalman filtering*. World Scientific series in approximations and decompositions, 1993.
- [11] E. Cherrier, *Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de système non linéaire*. PhD Thesis, National Polytechnic Institute of Lorraine, 2006.
- [12] J. M. Coron, *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires*, cours donné dans " les journées mathématiques X-UPS en 1999 ". <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf>.

- [13] A. J. Fossard, et D. Normand-Cyrot, *Système non linéaire, tome 1 : modélisation- estimation*. Masson, Paris, 1993.
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Lamb and M. Chilali, *LMI control toolbox*. MathWorks, Natick, Massachusetts (1995).
- [15] M. Grewal and A. Andrews, *Kalman filtering : Theory and practice*. Prentice Hall, 1993.
- [16] R. Hermann and J. Krener, *Nonlinear controllability and observability*. *IEEE Trons. Automatic control*.22(5) : 728,740. 1977.
- [17] N. Kazantzis and C. Kravaris, *Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem*. *Systems Control Letters*, 34(5) : 241-247, 1998.
- [18] H. Keller, *Nonlinear observer design by transformation into a generalized canonical form*. *International. Journal of Control*, 46(6) : 1915-1930, 1987.
- [19] A. J. Krener et A. Isodori, *Linearization by output injection and nonlinear observers*. *Systems and Control Letters*, 3(1) : 47-52, 1983.
- [20] A. J. Krener and W. Respondek, *Nonlinear observer with linearizable error dynamics*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) : 197-216, 1985.
- [21] E.B. Lee and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley Sons, New-York (1967).
- [22] D. Luenberger, *An introduction to observers*. *IEEE Trans. Automatic Control*,16 :596-602, 1971.
- [23] D. Luenberger, *Observers for multivariable systems*. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11 :190-197, 1966.
- [24] D. Luenberger, *Observing the state of a linear system*, *IEEE Trans. Mil. Electron. ME-8*, pp. 74, 1964.
- [25] E. A. Misawa and J. K. Hedrick, *Nonlinear observers-a state of the art survey*. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111 : 344-352, 1989.
- [26] H. Nijmeijer, *Observability of autonomous discret-time nonlinear systems : a geometric approach*. *Int. J. of Control*, 36 : 862-874, 1982.
- [27] J. O'Reilly, *Observer for linear system*, Richard Bellman, *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 140, Academic Press, New York, 1983.
- [28] R. V. Patel and M. Toda, *Quantitative measures of robustness in multivariable systems*. In *American Control Conference, San-Francisco, USA, 1980*.
- [29] S. Raghavan and J. K. Hedrick, *Observer design for a class of nonlinear systems*. *Int. J. of Control*, 59(2) : 515-528, 1994.
- [30] F. E. Thau, *Observing the state of nonlinear dynamic systems*. *Int. J. of Control*, 17(3) : 471-479, 1973.

- [31] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et application*, Vuibert, collection " Mathématiques concrètes " (2005).
- [32] E. Trélat et T. Haberkorn, *Cours d'automatique*, Master de Mathématiques, Université d'Oréans, Premier trimestre.
- [33] B. L. Walcott, M. J. Corless and S. H. Zak, *Comparative study of nonlinear state observation techniques*. *Int. J. of Control*, 45(6) : 2109-2132, 1987.
- [34] H. F. Williams, *A solution of the multivariable observer for linear time varying discrete systems*, *Rec. 2nd Asilomar Conf. Circuit and systems*, pp. 124-129, 1968.
- [35] M. Zeitz, *Comments on 'comparative study of nonlinear state observation techniques'*. *Int. J. of Control*, 46(5) : 1861-1863, 1987.
- [36] A. Zemouche, *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. Univ-Louis Pasteur Strasbourg. 2007.

## Résumé

*Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système appelé la sortie ou la variable observée est mesurée, l'objectif de ce mémoire est de vérifier la possibilité d'évaluer l'ensemble des grandeurs constitutives du vecteur d'état à partir des mesures effectuées sur le système, ce qui est appelé observabilité du système. Quand le système étudié est observable, on peut récupérer les grandeurs non mesurées à l'aide d'un observateur.*

## Abstract

*There are many situation in the practice when only a part of the state system witch called the output or the observed variable is measured. The objective of this memory, is to check the observability of the system in order to evaluate all of variables of the state vector from measurement performed on the system, witch called observability of the system. when the system is observable, we can recover the quantities not measured using an observer.*