الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid — جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie — تلمسان الجزائر

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER
EN MATHEMATIQUES

Option : Équations différentielles

Sujet :

Problèmes aux limites pour les systèmes différentiels avec impulsions et application aux réseaux nerveux artificiels de type Hopfield

Candidat(e) : **Mrabet Lokman**
Date : 02/07/2017

Membres du Jury :

Président :	Bouguima Sidi Mohammed,	Professeur, Université de Tlemcen
Examinateur :	Hadj Slimane Djamila,	Professeur, Université de Tlemcen
Examinateur :	M. Houbad Mekki,	M.C.A, Université de Tlemcen
Encadreur :	Nedjraoui Zehour,	M.C.A, Université de Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017

DEDICACES

Avec l'aide de **DIEU Le tout-puissant** et **les personnes qui m'ont aidé**, j'ai pu achever ce modeste travail, que je dédie à **mes très chers parents et en particulier ma mère** qui m'a fait comprendre que la vie n'est pas faite que de problèmes qu'on pourrait résoudre grâce à des formules mathématiques et des algorithmes... Tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien être. Vos prières m'ont été d'un grand secours.
Je vous rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance éternelle et de mon infini amour.
Que Dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie pour que vous demeuriez le flambeau illuminant le chemin de vos enfants et petits enfants.

A **mes grands parents**, puisse Dieu tout puissant vous accorder sa clémence, sa miséricorde et vous accueillir dans son saint paradis.

A **toute ma famille**, frères et soeur, je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour et mon attachement.

Enfin, je dédie ce travail à **tous mes amis**, **mes enseignants** depuis le primaire jusqu'aux études supérieurs.

REMERCIEMENTS

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers
par qui nos âmes sont fleuries.
Marcel Proust

Le temps met tout
en lumière.
Thalès

Le seul moyen de se délivrer d' une tentation, c' est d' ycéder paraît-il ! Alors j' y cède en disant un grand "MERCI" aux personnes qui ont cru en moi et qui m' ont permis d' arriver au bout de ce mémoire.

Je témoigne ici ma profonde gratitude à **Madame Nedjraoui Zehour** promotrice et directrice de ce mémoire, qui m'a aidé de sa profonde expérience scientifique. Ses conseils pertinents et les nombreuses discussions qu'elle m'a si aimablement accordées malgré ses nombreuses charges ont été un constant encouragement et nul doute qu'ils ont beaucoup contribué à la réalisation de ce modeste travail. Qu'elle veuille trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Qu'il me soit permis ici de présenter mes vifs remercîements et mon profond respect à **Monsieur Sidi Mohammed Bouguima**, Professeur à l'université Aboubakr Belkaid qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse aussi mes remerciements les plus sincères **à Madame Djamila Hadj Slimane**, Professeur à l'université Abou Bakr Belkaid et Monsieur **Mekki Houbad** Maitre de Conférence à l'université Abou Bakr Belkaid qui ont accepté d'examiner ce travail.

Je ne terminerai pas mes remerciements à cette occasion sans remercier **mes parents** sans lesquels mon travail n'aurait pas vu le jour.

Mes remerciements finaux et non les moindres vont à **toute ma famille**, en particulier à mes frères **Amine et Youcef** et ma **soeur** qui m'ont toujours encouragé dans mes études.

Je ne les citerai pas, mais ils se reconnaitront, tous **mes amis et camarades**, qui m'ont soutenu, même de loin. Je leurs en suis reconnaissant.

Table des Matières

Introduction

Depuis plus d'un siècle, les équations différentielles ont été utilisées dans la modélisation de la dynamique des processus changeants. Une grande partie du développement de la modélisation a été accompagnée d'une théorie riche pour les équations différentielles.

La dynamique de nombreux processus évolutifs est soumise à des changements brusques et rapides, comme des chocs, des récoltes et des catastrophes naturelles. Ces phénomènes impliquent à court terme des perturbations de la dynamique continue et discrète, dont la durée est négligeable par rapport à la durée d'une évolution complète. Dans les modèles impliquant ces perturbations, il est naturel d'assumer ces impulsions qui agissent instantanément ou sous la forme de "impulsions".

Dans la modélisation mathématique de ces processus, le changement de l'état prend place momentanément et il est représenté par des sauts de discontinuité dans l'état du système modélisé. Par conséquent, les équations différentielles impulsives ont été développées dans la modélisation des problèmes impulsifs en physique, en dynamique de population, l'écologie, les systèmes biologiques, la biotechnologie, la robotique industrielle, pharmcocinétique, contrôle optimal...etc.

Ainsi, associée à ce développement, une théorie des équations différentielles impulsives a été étendue.

Dans ce travail, on s'est restreint à l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes aux limites non linéaires associés aux systèmes différentiels avec impulsions qui est appliquée par la suite dans la recherche des solutions périodiques pour un problème de réseaux nerveux artificiels.

Ce travail est donc divisé en trois chapitres organisés de la manière suivante:

Le chapitre I, consitué de généralités, est essentiellement consacré à rappeler quelques notions d'Analyse mathématique et de Topologie générale auxquelles nous aurons recours fréquemment. Deux théorèmes seront aussi abordés qui permettront de déduire l'existence et la localisation de la solution d'un problème sous certaines conditions. Voir [4, 16, 18, 20].

Dans le chapitre II, intitulé «Problèmes aux limites non linéaires pour les systèmes des équations différentielles avec impulsions», on se donne un problème aux limites non linéaires avec impulsions, sous certaines conditions, avec l'implication d'une paire de sous- et sur-solutions bien ordonnées on montre l'existence et la localisation de la solution. Pour plus de détails concernant ce genre de problèmes, le lecteur est renvoyé aux références [2, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 15].

Dans le chapitre III, intitulé «Solution périodique pour les réseaux nerveux artificiels de type Hopfield avec impulsions», on voit de près une application donnée par un système d'équations différentielles non linéaires soumis à une infinité d'impulsions avec une valeur initiale modélisant les réseaux nerveux artificiels de type Hopfield. On se met dans les conditions du chapitre II pour obtenir une solution périodique. Ces conditions sont moins restrictives comparées à celles dans la littérature. Voir [6, 7, 8, 9, 14].

.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous allons introduire des notions, des définitions et des théorèmes qui nous seront utiles dans les différents chapitres de ce mémoire.

1.1 Généralités:

Voir [4,15,17,20]

Définition 1.1 *On dit que* $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *satisfait les conditions de Carathéodory sur* $J \times \mathbb{R}^n$ *si et seulement si:*

i) Pour presque tout $t \in J$*,la fonction* $f(t,.)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^n$*.*

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*, la fonction* $f(.,x)$ *est mesurable sur* J*.*

iii) Pour tout ensemble compact $K \in \mathbb{R}^n$*, il existe une fonction* $m_k : J \to \mathbb{R}$ *intégrable au sens de Lebesgue telle que* $|f(t,x)| \leq m_k(t)$ *pour presque tout* $t \in J$ *et tout* $x \in K$*.*

Définition 1.2 *Une fonction définie sur un intervalle* $J \in \mathbb{R}$ *et à valeurs dans un espace normé est dite absolument continue si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$ *telle que pour toute famille finie d'intervalles ouverts disjoints deux a deux* $I(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,..,n\}}$*, nous avons :*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \eta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \parallel f(b_i) - f(a_i) \parallel \leq \varepsilon$$

Définition 1.3 (Partie équicontinu) *Soit* (E,d) *un espace métrique compact,* (F,δ) *un espace métrique complet.*

A une partie de $C(E,F)$*.*

A est dite équicontinue, si et seulement si:

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \mu_\varepsilon / \forall f \in A, \forall y \in E, (d(x,y) \leq \mu_\varepsilon) \implies (\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$

Théorème 1.1 (Ascoli-Arzela) *Voir* [20] *(page 346).*

Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique complet.

une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si:

i) A est équicontinue.

ii) Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact..

Remarque 1.1 **Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.*

Remarque 1.2 **Dans un espace vectoriel topologique séparé, les parties relativement compactes restent bornées, mais la réciproque est fausse.*

Remarque 1.3 **Le théorème d'Ascoli traite du cas de l'espace des fonctions continues.*

Corollaire 1.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique compact.*

Toute suite bornée équicontinue dans $C(E)$ *admet une sous-suite convergente dans* $C(E)$*.*

Définition 1.4 (opérateur compact ou complètement continu) *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces de Banach.*

Un opérateur $T : E \mapsto F$ *est dit compact ou complètement continu si et seulement si* $\forall B \subset E$ *avec* B *un sous ensemble borné,* $\overline{T(B)}^F$ *est compact.*

Autrement dit $T : E \mapsto F$ *est dit compact si* $T(\bar{B}_E)$ *est relativement compact pour la topologie forte.*

Cela dit en terme de suites:

Si T *est compact alors* $\forall (x_n) \in E$ *une suite bornée,* $\exists (x_{n_k})$ *une sous suite tel que* (Tx_{n_k}) *converge.*

Théorème 1.2 (Point fixe de Schauder) *Voir* [18, 20].

Soit K *un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach* E *et supposons* $T : K \to K$ *un opérateur complètement continu.*

Alors T *admet un point fixe* $(\exists z \in K$ *tel que* $Tz = z)$*.*

Le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. il est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Chapitre 2

Problèmes aux limites non linéaires pour les systèmes des équations différentielles avec impulsions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème aux limites pour le système d'équations différentielles avec impulsions suivant:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in J = [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

$$x(t_{j+}) = I_j(x(t_j)) \ ; \ j = 1, ..., p \tag{2}$$

Quand $f \in Car(J \times \mathbb{R}^n)$, $I_j \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $j = 1, ..., p$.

Avec $Car(J \times \mathbb{R}^n)$: l'ensemble de fonctions satisfaisant les conditions de Charathéodory sur $J \times \mathbb{R}^n$.

$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: l'ensemble de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Les problèmes aux limites avec impulsions ont reçu ces dernières années beaucoup d'attention mais la plupart traitent le cas scalaire. Dans [14] les auteurs proposent un cas vectoriel où ils étudient le problème (1)-(2) avec des conditions aux limites non linéaires de la forme $h(x(a), x(b)) = 0$.

En s'inspirant de ce dernier travail, on étudie le même problème avec les conditions aux limites:

$$x(a) = x(b) \tag{3}$$

On utilise la méthode des sous-et sur-solutions, notées respectivement α et β pour montrer l'existence d'une solution.

La preuve est basée sur le théorème du point fixe de Schauder.

Considérons l'intervalle $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = b, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $| \, . \, |: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ la norme Euclidienne.

On considère des espaces de Banach $X_j = C_n[t_j, t_{j+1}]$:

l'espace des fonctions $x_j : [t_j, t_{j+1}] \mapsto \mathbb{R}^n$ continues sur $[t_j, t_{j+1}]$ muni de la norme

$\| x_j \|_C = \max\limits_{t \in [t_j, t_{j+1}]} | x_{(j)}(t) |$pour $j = 0, ..., p$.

De plus, on considère l'espace de Banach X : espace des fonctions x de la forme suivante :

$$x(t) = \begin{cases} x_{(0)}(t) & \text{pour } t \in [a, t_1] \\ x_{(1)}(t) & \text{pour } t \in (t_1, t_2] \\ & . \\ & . \\ & . \\ x_{(p)}(t) & \text{pour } t \in (t_p, b] \end{cases}$$

quand $x_{(j)} \in X_j$ pour $j = 0, ..., p$. Ici on écrit $x = [x_{(0)}, ..., x_{(p)}]_X$

X est muni de la norme $\| x \| = \max\limits_{j=0,...,p} \| x_{(j)} \|_C$.

De même, on considère l'espace de Banach Y :

espace des fonctions y de la forme suivante :

$$y(t) = \begin{cases} x_{(0)}(t) & \text{pour } t \in [a, t_1) \\ x_{(1)}(t) & \text{pour } t \in [t_1, t_2) \\ & . \\ & . \\ & . \\ x_{(p)}(t) & \text{pour } t \in [t_p, b] \end{cases}$$

quand $x_{(j)} \in X_j$ pour $j = 0, ..., p$ muni de la norme $\| y \| = \max\limits_{j=0,...,p} \| x_{(j)} \|_C$.

On écrit $y = [x_{(0)}, ..., x_{(p)}]_Y$.

Pour un sous ensemble Ω d'un espace de Banach, $cl(\Omega)$ et $\partial\Omega$ représentent la fermeture et la frontière de Ω respéctivement.

2.2 Résultats d'existence dans le cas $\alpha \leq \beta$

Voir [15].

Définition 2.1 *Dans l'espace de Banach X, on définit la relation d'ordre telle que:*

$\forall \;\; x, y \in X,\; x = (x_1, ..., x_n) \leq y = (y_1, ..., y_n) \iff x_1 \leq y_1, ..., x_n \leq y_n.$

la même définition est utlisée dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2 *Une fonction $F(Z, x) : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, D \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$.*

$F = (F_1, ..., F_n)$ est dite quasi-croissante (quasi-décroissante) en x si pour tout $i = 1, ..., n$ et pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels $x \leq y$ et $x_i = y_i$, l'inégalité $F_i(Z, x) \leq F_i(Z, y)$ $(F_i(Z, x) \geq F_i(Z, y))$ est valable pour tout $Z \in D$.

Définition 2.3 *Par AC_n^-, on entend un ensemble de fonctions $x : J \to \mathbb{R}^n$ qui sont absolument continues sur (t_j, t_{j+1}), $j = 0, ..., p$, $x(t_j) = x(t_{j^-})$, $j = 1, ..., p+1$, $x(a) = x(a^+)$.*

Une fonction $x \in AC_n^-$ qui satisfait les conditions (1)-(3) est appelée une solution du problème (1)-(3).

Définition 2.4 *Une fonction $\alpha \in AC_n^-$ est appelée une sous solution du problème (1)-(3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J \tag{4}$$

$$\alpha(t_{j^+}) \leq I_j(\alpha(t_j)) \;, j = 1, ..., p \tag{5}$$

$$\alpha(a) \leq \alpha(b) \tag{6}$$

Définition 2.5 *Une fonction $\beta \in AC_n^-$ est appelée une sous solution du problème (1)-(3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J \tag{7}$$

$$\beta(t_{j^+}) \geq I_j(\beta(t_j)) \;, j = 1, ..., p \tag{8}$$

$$\beta(a) \geq \beta(b) \tag{9}$$

Soient α, β, la sous-et sur- solution du problème (1)-(3) respectivement telles que:

$$\alpha \leq \beta \text{ sur } J. \tag{10}$$

Pour presque tout $t \in J$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, on définit une fonction $\gamma : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ par :

$$\gamma_i(t, x) = \begin{cases} \alpha_i(t) & \text{pour } x_i < \alpha_i(t) \\ x_i & \text{pour } \alpha_i(t) \leq x_i \leq \beta_i(t) \\ \beta_i(t) & \text{pour } \beta_i(t) < x_i \end{cases} \quad i = 1, ..., n \tag{11}$$

Et la fonction modifiée $\widetilde{f} : J \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ par :

$$\widetilde{f}(t, x) = f(t, \gamma(t, x)), \quad f \in Car(J \times \mathbb{R}^n) \quad . \tag{12}$$

Sous les conditions suivantes:

$$I_{ji} \text{ sont croissantes par rapport à chacune des variables pour } \begin{array}{c} j = 1, ..., p \text{ et } i = 1, ..., n \\ I_j = (I_{j1}, ..., I_{jn}) \end{array} \tag{13}$$

$$f(t, x) \text{ est quasi-croissante en } x \tag{14}$$

On considère le problème :

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) \text{ pour tout } t \in (t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, ..., p \tag{15}$$

$$x(t_{j+}) - x(t_j) = I_j(\gamma(t_j, x(t_j))) - \gamma(t_j, x(t_j)), \quad j = 1, ..., p \tag{16}$$

$$x(a) = \gamma(a, \gamma(b, x(b))) \tag{17}$$

Proposition 2.1 *Soit x une solution du problème (15)-(17) et soient α, β, une sous-et- sur solution du problème (1)-(3) respectivement.*

Supposons que les conditions (10)-(14) sont satisfaites. Alors,

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ sur } J \tag{18}$$

Par conséquent, x est une solution du problème (1)-(3).

Preuve: Posons $Z(t) = \alpha(t) - x(t)$ pour tout $t \in J$ (on écrit $Z = (Z_1, ..., Z_n)$).

Maintenant, on prend arbitrairement $i \in \{1, ..., n\}$.

De (17), on a $x_i(a) \in [\alpha_i(a), \beta_i(a)]$, cela signifie que $Z_i(a) \leq 0$.

Supposons qu'il existe $q_1 \in (a, t_1)$ tel que :

$$Z_i(q_1) > 0. \tag{19}$$

Puisque Z_i sont continues sur $[a, t_1)$, on peut trouver $q_0 \in [a, q_1)$ tel que :

$$Z_i(q_0) = 0 \text{ et } Z_i > 0 \text{ sur } (q_0, q_1] \tag{20}$$

En vue de (14),(15) et le fait que $\gamma_k(t, x(t)) \geq \alpha_k(t)$ pour $t \in J$ et pour $k = 1, ..., n$; $k \neq i$. On a :

$$x_i'(t) = \widetilde{f}_i(t, x(t)) = f_i(t, \gamma_1(t, x(t)), ..., \alpha_i(t), ..., \gamma_n(t, x(t))) \geq f_i(t, \alpha(t))$$

pour tout $t \in (q_0, q_1)$. Selon (4) et (7), on a :

$$Z_i'(t) = \alpha_i'(t) - x_i'(t) \leq f_i(t, \alpha(t)) - \widetilde{f}_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ pour tout } t \in (q_0, q_1). \tag{21}$$

De plus,

$$0 \geq \int_{q_0}^{q_1} Z_i'(t)dt = Z_i(q_1) - Z_i(q_0) = Z_i(q_1)$$

Ce qui contredit (19).

Ainsi on obtient:

$$\alpha_i \leq x_i \text{ sur } [a, t_1] \text{ pour } i = 1, ..., n.$$

Par ce fait, (13) et (16), les inégalités

$$\alpha_i(t_1+) \leq I_{1i}(\alpha(t_1)) \leq I_{1i}(x(t_1)) = x_i(t_1+)$$

sont vraies pour $i = 1, ..., n$, donc $Z_i(t_1+) \leq 0$ pour $i = 1, ..., n$.

Maintenant, on prend arbitrairement $i \in \{1, ..., n\}$.

Supposons qu'il existe $q_1 \in [t_1, t_2]$ telle que (19) est vraie. Alors on peut trouver $q_0 \in [t_1, q_1)$ tel que :

$$Z_i(q_0+) = 0 \text{ et } Z_i > 0 \text{ sur } (q_0, q_1] \tag{22}$$

Alors , par (21), il est clair que :

$$0 \geq \int_{q_0}^{q_1} Z_i'(t)dt = Z_i(q_1) - Z_i(q_0+) = Z_i(q_1)$$

D'où la contradiction avec (19).

On peut prouver l'inégalité $Z_i \leq 0$ sur $(t_1, t_2]$ de la même manière que le paragraphe précédent.

De cette façon, on le prouve pour tout intervalle $(t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, ..., p$. Et on a $Z_i \leq 0$ sur J pour chaque $i = 1, ..., n$. Cela signifie que

$$\alpha \leq x \text{ sur } J.$$

La deuxième inégalité dans (18) peut être démontrée de la même manière en posant $Z = x - \beta$ sur J.

En raison de (18), on a :

$$x'(t) = \widetilde{f}(t, x(t)) = f(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in J,$$

Enfin, on vérifie la condition (3).

En effet,

D'après (18), on a : $\begin{cases} \alpha(a) \leq x(a) \leq \beta(a) \\ \alpha(b) \leq x(b) \leq \beta(b) \end{cases} \Longrightarrow \gamma(b, x(b)) = x(b)$

alors $x(a) = \gamma(a, \gamma(b, x(b))) = \gamma(a, x(b))$

D'après (6) et (9) $\alpha(a) \leq \alpha(b) \leq x(a) \leq \beta(b) \leq \beta(a)$

alors $\gamma(a, x(b)) = x(b)$ d'où $x(a) = x(b)$. ■

Théorème 2.1 *Voir* [15].

Soient α, β respectivement les sous-et sur-solutions du problème (1)-(3) telles que $\alpha \leq \beta$ sur J. Si les conditions (12)-(14) sont vérifiées,

Alors il existe une solution x du problème (1)-(3) telle que :

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ sur } J \tag{23}$$

Preuve: On considère l'équation intégrale:

$$x(t) = \gamma(a, \gamma(b, x(b))) + \int_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + \omega(t, x) \text{ pour tout } t \in J \tag{24}$$

■

où

$$\omega(t,x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \in [a, t_1] \\ I_1(\gamma(t_1, x(t_1)) - \gamma(t_1, x(t_1)) \text{ pour } (t_1, t_2] \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{p} [I_j(\gamma(t_j, x(t_j)) - \gamma(t_j, x(t_j)) \text{ pour } t \in (t_p, b] \end{cases} \tag{25}$$

On aura besoin dans la suite de la démonstration du lemme suivant :

Lemme 2.1 *l'équation intégrale (24) est équivalente au problème (15)-(17).*

Preuve: Soit x une solution du problème (15)-(17) ■

Alors

$x'(t) = \widetilde{f}(t, x(t))$ en l'intégrant de a à t,

Si $a < t < t_1$,alors on obtient : $\int\limits_a^t x'(s)ds = \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds$

$x(t) = x(a) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + \omega$ avec $\omega = 0$.

Si $t_1 < t < t_2$: $\int\limits_a^t x'(s)ds = \int\limits_a^{t_1} x'(s)ds + \int\limits_{t_1}^t x'(s)ds = \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds$

alors $x(t) = x(a) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + x(t_1+) - x(t_1-) = x(a) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + \omega$

et ainsi de suite,

Si $t_p < t < b$:

$\int\limits_a^t x'(s)ds = \int\limits_a^{t_1} x'(s)ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} x'(s)ds + ... + \int\limits_{t_p}^t x'(s)ds = \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds$

d'où $\quad x(t) = x(a) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + x(t_1+) - x(t_1-) + ...+ x(t_p+) - x(t_p-)$

$x(t) = x(a) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + I_1(\gamma(t_1, x(t_1)) - \gamma(t_1, x(t_1)) + ... + I_p(\gamma(t_p, x(t_p)) - \gamma(t_p, x(t_p))$

alors $x(t) = \gamma(a, \gamma(b, x(b))) + \int\limits_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + \omega$.CQFD (la preuve du lemme est terminée).

On définit le nombre:

$$M = \int_J \lambda(s)ds + (p+1)(\| \alpha \| + \| \beta \|) + \sum_{j=1}^{p} \max\{\| I_J(u) \| : \alpha(t_j) \leq u \leq \beta(t_j)\} \qquad (26)$$

quand $\lambda(t) = \sup\{\| f(t, x) \| : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$ pour tout $t \in J$ et l'ensemble

$$\Omega = \{x \in X : \| x \| \leq M\}$$

Ω est un sous-ensemble de X non vide, convexe, fermé et borné.

On considère l'opérateur $T : \Omega \to X$ donné par :

$$Tx(t) = \gamma(a, \gamma(b, x(b))) + \int_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds + \omega(t, x)$$

Où ω est définie par (25).

et T applique Ω sur lui même. Il suffit de vérifier que $\| Tx \| \leq M$.

En effet,

On a par définition de la fonction γ :

$\| \gamma(a, \gamma(b, x(b))) \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$ et $\| \gamma(t_j, x(t_j)) \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|, j = 1, ..., p$.

Par ailleurs,

$\| \int_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds \| \leq \int_J \lambda(s)ds$, $\lambda(t) = \sup\{\| f(t, x) \| : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$pour tout $t \in J$.

Alors,

$\| Tx(t) \| \leq \int_J \lambda(s)ds + (p+1)(\| \alpha \| + \| \beta \|) + \sum_{j=1}^{p} \max\{\| I_J(u) \| : \alpha(t_j) \leq u \leq \beta(t_j)\}$.

quand $\lambda(t) = \sup\{\| f(t, x) \| : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$ pour tout $t \in J$.

Maintenant, on démontre que T est continu.

On prend une suite $\{x_m\} \subset \Omega$ et $x \in \Omega$ telle que x_m converge vers x dans X.

Alors $\widetilde{f}(t, x_m(t))$ converge vers $\widetilde{f}(t, x(t))$ pour presque tout $t \in J$.

Puisque $\{x_m\}$ est convergente dans X, il suit qu'on peut trouver un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$ telle que $\{x_m(t)\} \subset K$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in J$.

Donc il existe une fonction $m_K(t)$ qui est intégrable au sens de Lebesgue sur J avec la propriété:

$$\widetilde{f}(t, x_m(t)) \leq m_k(t) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et presque tout } t \in J.$$

Du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir [4]), il suit que:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^t \widetilde{f}(s, x_m(s))ds = \int_a^t \widetilde{f}(s, x(s))ds \text{ pour tout } t \in J. \tag{27}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \| \quad Tx_m - Tx \| &\leq \int_a^b \mid \widetilde{f}(s, x_m(s)) - \widetilde{f}(s, x(s)) \mid ds \\ + \quad \mid \quad & \gamma(b, x_m(b)) - \gamma(b, x(b)) \mid + \max_{j=0,...,p} \max_{t\in[t_j,t_{j+1}]} \mid \omega(t, x_m) - \omega(t, x) \mid \end{aligned} \tag{28}$$

De (27) et de la continuité des fonctions γ et $I_j \quad (j = 1, ..., p)$, il suit que le côté droit de l'inégalité (28) tend vers 0 quand $m \to \infty$.

Donc Tx_m converge vers Tx dans X.

On vérifie que $cl(T(\Omega))$ est un ensemble compact:

a) On définit $\Gamma_j \subset X_j$ pour $j = 0, ..., p$ par :

$\Gamma_j = \left\{(Tx)_{(j)} : x \in X, \| x \|_C \leq M\right\}$,

Où M est défini par (26).

En effet, si $y = \left[y_{(0)}, ..., y_{(p)}\right]_X \in T(\Omega)$, alors $y_{(j)} \in \Gamma_j$ pour tout $j = 0, ..., p$.

On peut voir ue les fonctions de l'ensemble Γ_j sont équicontinues et uniformément bornées sur $[t_j, t_{j+1}]$ pour tout $j = 0, ..., p$.

On prend arbitrairement une suite $\{Tx_m\} \subset T(\Omega)$ et on écrit:

$$Tx_m = \left[y_{m(0)}, ..., y_{m(p)}\right]_X \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Du théorème d'Ascoli-Arzelà (Voir [20] (page 346)), il suit qu'il existe une sous-suite de $\{y_{m(0)}\} \subset \Gamma_0$ (on écrit $\{y_{k_m(0)}\}$), qui converge en X_0 à $y_{(0)} \in X_0$.

En outre, on applique ce théorème pour la suite $\{y_{k_m(1)}\} \subset \Gamma_1$,

on a $\{y_{l_m(1)}\}$ qui converge vers $y_{(1)} \in X_1$ dans X_1.

Alors

$$\{y_{l_m(0)}\} \to y_{(0)} \text{ dans } X_0 \text{ et } \{y_{l_m(1)}\} \to y_{(1)} \text{ dans } X_1.$$

b) Exactement de la même façon, on procède jusqu'au $p - \grave{e}me$ ordre, ainsi il existe une sous-suite de $\{Tx_m\}$ qui converge dans X vers $[y_{(0)}, ..., y_{(p)}]_X \in cl(T(\Omega))$.

c) Du théorème du point fixe de Schauder (Voir $[18, 20]$), il existe un point x tel que :

$$Tx = x$$

x est une solution de (24) et par conséquent une solution de (15)-(17).

Donc la proposition (2.1) implique que x est une solution de (1)-(3) et elle satisfait (23).

2.3 Résultats d'existence dans le cas $\alpha \geq \beta$

Voir [15]

Maintenant, on va étudier le problème impulsif (1),

$$x(t_{j-}) = I_j(x(t_j)); j = 1, ..., p \tag{29}$$

Et (3), quand $f \in Car(J \times \mathbb{R}^n)$, $I_j \in C_n(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, ..., p$.

Définition 2.6 *Par AC_n^+, on entend un ensemble de fonctions $x : J \to \mathbb{R}^n$ qui sont absolument continues sur (t_j, t_{j+1}), $j = 0, ..., p$, $x(t_j) = x(t_{j^-})$, $j = 1, ..., p+1$, $x(b) = x(b-)$.*

une fonction $x \in AC_n^+$ qui satisfait les conditions (1),(29),(3) est appelée une solution du problème (1),(29),(3).

Définition 2.7 *Une fonction $\alpha \in AC_n^+$ est appelée une sous solution du problème (1),(29),(3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J$$

$$\alpha(t_{j-}) \geq I_j(\alpha(t_j)) \ , j = 1, ..., p \tag{30}$$

$$\alpha(a) \leq \alpha(b)$$

Définition 2.8 *Une fonction $\beta \in AC_n^+$ est appelée une sous solution du problème (1),(29),(3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J$$

$$\beta(t_{j^-}) \leq I_j(\beta(t_j)) \ , j = 1, ..., p \tag{31}$$

$$\beta(a) \geq \beta(b)$$

Soient α, β respectivement la sous-solution et sur-solution du problème (1),(29),(3) telles que:

$$\beta \leq \alpha \text{ sur } J. \tag{32}$$

Pour presque tout $t \in J$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$,

On définit une fonction $\gamma : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ par :

$$\gamma_i(t,x) = \begin{cases} \beta_i(t) & \text{pour } x_i < \beta_i(t) \\ x_i & \text{pour } \beta_i(t) \leq x_i \leq \alpha_i(t) \\ \alpha_i(t) & \text{pour } \alpha_i(t) < x_i \end{cases} \quad i = 1, ..., n \tag{33}$$

et la fonction modifiée $\widetilde{f} : J \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ par :

$$\widetilde{f}(t,x) = f(t, \gamma(t,x)), \qquad f \in Car(J \times \mathbb{R}^n).$$

Sous les conditions:

$$f(t,x) \text{ est quasi-décroissante en } x \tag{34}$$

I_{ji} sont croissantes par rapport à chacune des variables pour $\begin{array}{c} j = 1, ..., p \text{ et } i = 1, ..., n \\ I_j = (I_{j1}, ..., I_{jn}) \end{array}$

Et le problème auxiliaire :

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) \text{ pour tout } t \in (t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, ..., p$$

$$x(t_{j-}) - x(t_j) = I_j(\gamma(t_j, x(t_j))) - \gamma(t_j, x(t_j)), \quad j = 1, ..., p \tag{35}$$

$$x(b)=\gamma(b,\gamma(a,x(a))) \tag{36}$$

Proposition 2.2 *Soit x une solution du problème (15),(35),(36) et soient α, β respectivement une sous et sur solution du problème (1),(29),(3).*

Supposons (32)-(34),(12) et (13) sont vérifiées alors,

$$\beta \leq x \leq \alpha \text{ sur } J \tag{37}$$

Par conséquent x est une solution du problème (1),(29),(3).

Preuve: Posons $Z(t)=x(t)-\alpha(t)$ pour tout $t\in J$ (on écrit $Z=(Z_1,...,Z_n)$).

Maintenant, on prend arbitrairement $i\in\{1,...,n\}$.

De (36), on a $x_i(b)\in[\beta_i(b),\alpha_i(b)]$, cela signifie que $Z_i(b)\leq 0$.

Supposons qu'il existe $q_1\in[t_p,b)$ tel que :

$$Z_i(q_1)>0. \tag{38}$$

Puisque Z_i est continue sur $(t_p,b]$, on peut trouver $q_0\in(q_1,b]$ tel que :

$$Z_i(q_0)=0 \text{ et } Z_i>0 \text{ sur } [q_1,q_0) \tag{39}$$

En vue de (34),(15) et le fait que $\gamma_k(t,x(t))\leq\alpha_k(t)$ pour $t\in J$ et pour $k=1,...,n,\ k\neq i$. On a :

$$x_i^{'}(t)=\widetilde{f}_i(t,x(t))=f_i(t,\gamma_1(t,x(t)),...,\alpha_i(t),...,\gamma_n(t,x(t)))\geq f_i(t,\alpha(t))$$

pour tout $t\in(q_1,q_0)$. Selon la définition d'une sous-solution on a :

$$Z_i^{'}(t)=x_i^{'}(t)-\alpha_i^{'}(t)\geq f_i(t,x(t))-\widetilde{f}_i(t,\alpha(t))\geq 0 \text{ pour tout } t\in(q_1,q_0). \tag{40}$$

De plus,

$$0 \leq \int_{q_1}^{q_0} Z_i'(t)dt = Z_i(q_0) - Z_i(q_1) = -Z_i(q_1)$$

Ce qui contredit (38).

Ainsi on obtient:

$$x_i \leq \alpha_i \text{ sur } [t_p, b] \text{ pour } i = 1, ..., n.$$

Par ce fait, (13) et (35), les inégalités

$$\alpha_i(t_p-) \geq I_{pi}(\alpha(t_p)) \geq I_{pi}(x(t_p)) = x_i(t_p-)$$

sont vraies pour $i = 1, ..., n$, donc $Z_i(t_p-) \leq 0$ pour $i = 1, ..., n$.

Maintenant, on prend arbitrairement $i \in \{1, ..., n\}$.

Supposons qu'il existe $q_1 \in [t_{p-1}, t_p]$ telle que (38) est vraie, alors on peut trouver $q_0 \in (q_1, t_p]$ tel que :

$$Z_i(q_0-) = 0 \text{ et } Z_i > 0 \text{ sur } [q_1, q_0) \tag{41}$$

Alors , par (40), il est clair que :

$$0 \leq \int_{q_1}^{q_0} Z_i^{'}(t)dt = Z_i(q_0) - Z_i(q_1-) = -Z_i(q_1)$$

D'où la contradiction avec (38).

On peut prouver l'inégalité $Z_i \leq 0$ sur $[t_{p-1}, t_p)$ de la même manière que le paragraphe précédent.

De cette façon, on prouve que sur tout intervalle $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, ..., p-1$,

Et on a $Z_i \leq 0$ sur J pour chaque $i = 1, ..., n$. Cela signifie que:

$$x \leq \alpha \text{ sur } J.$$

La deuxième inégalité dans (37) peut être démontrée de la même manière en posant $Z = \beta - x$ sur J.

En raison de (37), on a :

$$x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) = f(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in J,$$

et (29) est vraie par définition de la fonction γ.

Enfin, on vérifie la condition (3).

En effet,

D'après (37), on a :

$$\begin{cases} \beta(a) \leq x(a) \leq \alpha(a) \\ \beta(b) \leq x(b) \leq \alpha(b) \end{cases} \Longrightarrow \gamma(a, x(a)) = x(a)$$

d'où $x(b) = \gamma(b, \gamma(a, x(a))) = \gamma(b, x(a))$

D'après (30) et (31),$\beta(b) \leq \beta(a) \leq x(a) \leq \alpha(a) \leq \alpha(b)$

alors $\gamma(a, x(a)) = x(a)$

D'où $x(b) = x(a)$. ■

Théorème 2.2 *Voir* [15].

Soient α, β respectivement les sous et sur solutions du problème (1),(29),(3). De plus, on suppose que $\beta \leq \alpha$ sur J et les conditions (13),(34) sont vraies.

Alors il existe une solution x du problème (1),(29),(3) telle que :

$$\beta \leq x \leq \alpha \text{ sur } J \tag{42}$$

Preuve: On considère l'équation intégrale

$$x(t) = \gamma(b, \gamma(a, x(a))) + \int_b^t \tilde{f}(s, x(s))ds + \tau(t, x) \text{ pour tout } t \in J \tag{43}$$

■

Quand

$$\tau(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{p}[I_j(\gamma(t_j,x(t_j))-\gamma(t_j,x(t_j)) \text{ pour } t\in[a,t_1)\\ \displaystyle\sum_{j=2}^{p}[I_j(\gamma(t_j,x(t_j))-\gamma(t_j,x(t_j)) \text{ pour } t\in[t_1,t_2)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ I_p(\gamma(t_p,x(t_p))-\gamma(t_p,x(t_p)) \text{ pour } [t_{p-1},t_p)\\ 0 \text{ pour } t\in[t_p,b]\end{cases}\tag{44}$$

Pour la suite de la démonstration du théorème, on utilise le fait que l'équation intégrale (43) est équivalente au problème (15),(35),(36).

Il est facile de le prouver, il suffit juste de procéder d'une façon similaire que dans le premier cas.

De plus, on définit le nombre

$$M = \int_J \lambda(s)ds + (p+1)(\| \alpha \| + \| \beta \|) + \sum_{j=1}^{p} \max\{\| I_J(u) \| : \beta(t_j) \leq u \leq \alpha(t_j)\} \qquad (45)$$

quand $\lambda(t) = \sup\{\| f(t,x) \| : \beta(t) \leq x \leq \alpha(t)\}$ pour tout $t \in J$ et l'ensemble

$$\Omega = \{x \in Y : \| x \| \leq M\}$$

Ω est un sous-ensemble de Y non vide, convexe, fermé et borné.

On considère l'opérateur $T : \Omega \to Y$ donné par :

$$Tx(t) = \gamma(b, \gamma(a, x(a))) + \int_b^t \tilde{f}(s, x(s))ds + \tau(t, x)$$

Où τ est définie par (44).

T applique Ω sur lui même.

On démontre que T est continu et $cl(T(\Omega))$ est un ensemble compact comme dans la preuve du théorème 2.1.

D'après le théorème du point fixe de Schauder (Voir [18, 20]), il existe un point x tel que :

$$Tx = x$$

x est une solution de (43) et par conséquent une solution de (15),(35),(36). Donc la proposition 2.2 implique que x est une solution de (1),(29),(3) et elle satisfait (42).

2.4 Exemples

Exemple 1:

On considère le problème (1)-(3), quand $n = 2, f = \{f_1, f_2\}, t \in [0,1]$.

$$f_1(t, x_1, x_2) = -x_1^5 + x_2 + 1/2 + t$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = x_1 - x_2^3 + 2/3$$

Avec les fonctions impulsives I_1 et I_2

$$\left.\begin{aligned} I_1(x) = k_1 x, \quad k_1 \in (0,1), \\ I_2(x) = k_2 x, \quad k_2 \in (0,1), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Et les conditions aux limites périodiques:

$$x(0) = x(1) \tag{47}$$

Nous voyons que I_1, I_2 et f remplissent les conditions (12) - (14). Nous pouvons prendre des fonctions infèrieures et des fonctions supérieures :

$$\alpha = (1,1), \beta = (2,2) \tag{48}$$

Les conditions du théorème (2.1) sont satisfaites, ainsi on peut avoir au moins une solution pour le problème (l) - (3).

Exemple 2:

On considère le problème (1),(29),(3), quand $n = 2, f = \{f_1, f_2\}$,

$$f_1(t, x_1, x_2) = x_1^3 - x_2 + \sin(t)$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = -x_1 + x_2^3 - 10$$

Avec les fonctions impulsives (46) et les conditions aux limites périodiques (47), avec les conditions (13), (34) qui sont valides, on peut toujours prendre la sous- et sur- solution de la forme (48) tels que $\alpha = (5, 5), \beta = (1/2, 2)$. On a $\beta \leq \alpha$ et les conditions (4),(6),(7),(9),(30) et (31) sont satisfaites. Ainsi, on peut utiliser le théorème (2.2) et avoir au moins une solution pour le problème (l),(29), (3).

Chapitre 3

Solutions périodiques pour les réseaux nerveux artificiels de type Hopfield avec impulsions

3.1 Introduction

Un réseau de neurones artificiel est une structure composée d'entités capable de calculs et intéragissant entre eux, les neurones. Il permet de traiter, par le biais de l'informatique, des problèmes de différentes natures que les outils classiques ont du mal à résoudre. En effet, son fonctionnement s'inspire de celui des cellules neuronales animales et est donc différent des méthodes de calcul analytiques que l'on utilise ordinairement. Il s'avère très puissant dans des problèmes de reconnaissance, classification, approximation ou prévision.

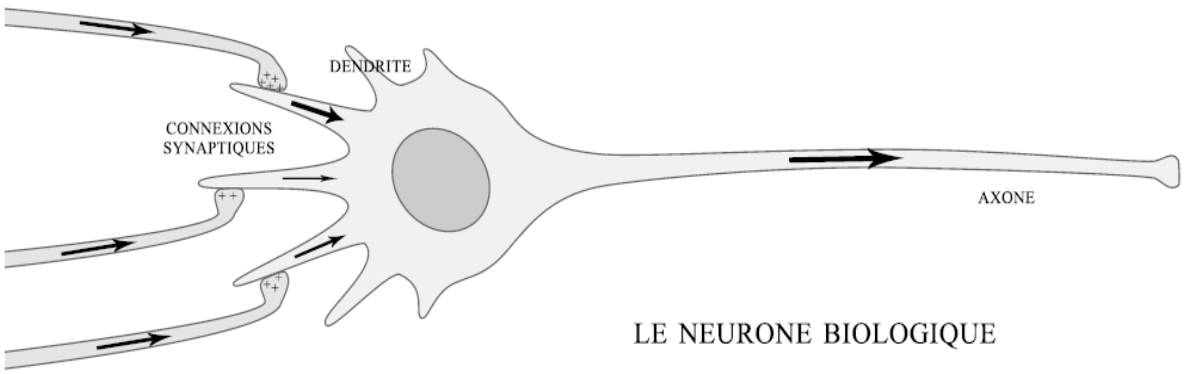
Étudions de plus près le fonctionnement d'un réseau neuronal classique.

3.1.1 Le modèle du neurone

Neurone biologique

En biologie, un neurone est une cellule nerveuse dont la fonction est de transmettre un signal électrique dans certaines conditions. Il agit comme un relai entre une couche de neurones et celle qui la suit. Les caractéristiques des neurones sont encore mal connues (et font l'objet de recherches) mais on connait leur principe d'action.

Le corps d'un neurone est relié d'une part à un ensemble de dendrites (entrées du neurones) et d'autre part à un axone, partie étirée de la cellule, qui représente sa sortie. Le neurone étudié est connecté aux neurones qui l'environnent : il reçoit au niveau de ses dendrites les signaux électriques des neurones "en amont", propagés par les axones de ces derniers. Les charges électriques s'accumulent dans le neurone jusqu'à dépasser un certain seuil : à ce moment la transmission du signal électrique se déclenche via son axone vers d'autres neurones "en aval".



Neurone formel

Pour reproduire le neurone biologique, on se sert d'un modèle mathématique : le neurone formel. Il doit être capable de :

Recevoir en entrée différentes informations provenant des neurones environnants.

Analyser ces informations de manière à envoyer en sortie une réponse.

Ajuster cette réponse avant de l'envoyer aux neurones suivants.

Il est donc tout naturel d'assimiler un neurone à un triplet (poids , biais , fonction d'activation f) :

On multiplie chaque valeur d'entrée par la composante des poids correspondante, ce qui revient à faire le produit scalaire $entrées \cdot poids$.

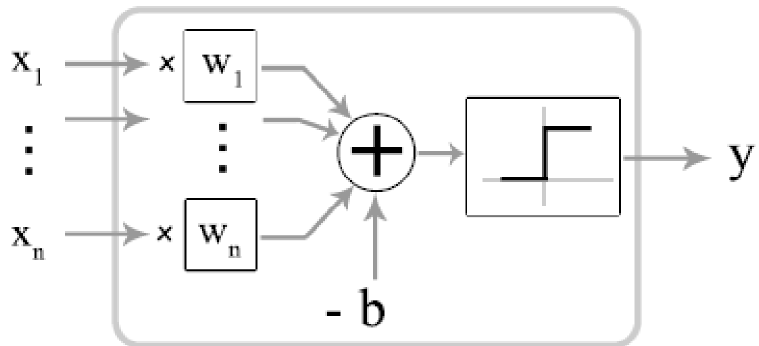
On compare la valeur obtenue à une valeur de référence : le biais, ce qui revient à soustraire le scalaire biais.

Enfin on applique la fonction d'activation à cette différence; la fonction d'activation est souvent de façon à avoir une sortie comprise entre 0 et 1. Par exemple dans le cas d'une fonction d'activation

de type seuil, la sortie sera :

0 si $entrées \cdot poids - biais \leq 0$

1 si $entrées \cdot poids - biais \geq 0$



LE NEURONE FORMEL

Un réseau neuronal (ou plus formellement réseau nerveux artificiel) est un modèle mathématique ou un modèle de calcul inspiré de la structure et des aspects fonctionnels des réseaux neuronaux biologiques. Il se compose d'un groupe interconnecté de neurones artificiels.

Le premier modèle d'un neurone a été présenté en 1943 par W. Mc Culloch et W. Pitts et en 1958, Rossenblatt a conçu le Perceptron. John Hop a été convaincu du pouvoir du réseau des neurones et il a conçu son modèle en 1982 et stimule la recherche dans ce domaine. Les réseaux de Hopfield sont un cas particulier des réseaux nerveux artificiels. .

Le sujet des réseaux de neurones artificiels est devenu l'un des plus importants outils techniques pour résoudre une variété de problèmes dans diverses disciplines scientifiques.

L'architecture de ces réseaux se compose de tableaux simples et des dispositifs de traitement élémentaires présentant des caractéristiques similaires à celles de la biologie neurones qui traitent plusieurs signaux d'entrée et produisent un signal à sortie unique qui est ensuite reçu par beaucoup d'autres qui y sont liés, y compris lui-même.

D'un point de vue mathématique, un réseau neuronal artificiel correspond à une transformation non linéaire de certaines entrées en certaines sorties. Pour plus de détails, voir [21].

3.2 Réseaux nerveux artificiels de type Hopfield

Parmi les nombreux types de réseaux de neurones proposés et étudiés dans la littérature (RNCG, RNR, RNMAB...etc). Voir $[1,22]$, le réseau de type Hopfield $[8,9]$ est devenu important en raison de son potentiel d'application dans la mémoire associative, la reconnaissance de formes, l'optimisation, identification du modèle, traitement du signal ...etc., il est exprimé par le système différentiel suivant:

$$\left.\begin{array}{c} \mu_i \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{x_i(t)}{R_i} + \sum\limits_{j-1}^{n} T_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \qquad t > t_0 \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dans lequel n représente le nombre de neurones dans le réseau ; $x_i(t)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ désigne le potentiel moyen du membrane du $i - ème$ neurone en temps t; T_{ij}, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ désigne la matrice des nombres représentant les forces de connexion synaptique parmi les neurones; μ_i désigne la capacité dans le $i - ème$ sous-circuit; I_i désigne un courant d'entrée externe constant au $i - ème$ neurone; R_i désigne la résistance définie par :

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_i} + \sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid$$

Dans lequel r_i désigne la résistance représentant l'impédance de la membrane cellulaire.

Les fonctions $f_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ représentent la réponse du $j - ème$ neurone à son potentiel de membrane et sont connues comme des fonctions d'activation.

Les systèmes dynamiques sont souvent classés en deux catégories: temps continu ou temps discret.

Récemment, il y a eu une nouvelle catégorie de systèmes dynamiques, qui n'est ni un temps purement continu ni purement discret; On les appelle systèmes dynamiques avec des impulsions (Voir par exemple $[2, 6, 7, 8, 11, 14]$).

Dans ce qui suit, on considère que le système (1) est soumis à certains impulsions lors des déplacements d'état à des moments fixes du temps. Après un simple changement de variables, le système (1) peut être mis sous une forme plus pratique. En particulier, on considère la dynamique du système impulsif suivant :

$$\left.\begin{array}{c}\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t)) + c_i, \quad t > t_0, t \neq t_k, \quad i = 1, 2, ..., n \\ x_i(t_0+) = x_{i0} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, ..., n \\ x_i(t_k+) = I_{ik}(x_i(t_k-)), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2, 3... \\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_k \to \infty \text{ quand } k \to \infty \end{array}\right\} \quad (2)$$

Par une solution de (2), on entend $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}^T \in \mathbb{R}^n$ à l'instant dans laquelle $x_i(.)$ est continue par morceaux sur (t_0, s) pour certains $s > t_0$ telle que $x(t_k+)$ et $x(t_k-)$ existent et $x(.)$ est différentiable sur un intervalle de la forme $(t_{k-1}, t_k) \subset (t_0, s)$ et satisfait (2), Les fonctions $I_k(.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont supposées continues et les a_i, b_{ij}, c_i sont des réels.

3.3 Resultats d'existence

Dans ce qui suit, on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

(H1): $a_i,\, b_{ij}, c_i \in \mathbb{R}; \qquad i,j = 1,2,...,n.$

(H2): $f_j \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $b_{ij} \cdot f_j(.)$ sont croissantes.

(H3): $I_k \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \quad I_k = (I_{k1},...,I_{kn})$ avec I_{ki} sont croissantes par rapport à chacune des variables $x_j, \quad j = 1,...,n.$

(H4): $\exists p \in \mathbb{N}^* : t_{k+p} = t_k + \omega, \quad k = 1,2,....$

On définit la fonction $F \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ avec $F(t,X) = (F_i(t,X))_{i=1,...,n}$, (qui est en fait seulement en fonction de X).

$$F_i(X) = F_i(t,X) = a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t)) + c_i, \qquad t > t_0, t \neq t_k, \quad i = 1,2,...,n.$$

Le système (2) peut être écrit sous la forme :

$$X'(t) = F(t,X)$$

D'après (H4), les impulsions forment une suite $\omega-$périodique d'où l'idée de la recherche des solutions périodiques pour le système (2) soumis aux impulsions qui sont les solutions du problèmes aux limites suivant:

$$\left\{\begin{array}{c} X'(t) = F(t,X) \qquad \text{pour presque tout } t \in J = [0,\omega] \\ X(t_k+) = I_k(X(t_k-)), \qquad k = 1,2,...,p, \\ X(0) = X(\omega) \end{array}\right. \tag{3}$$

Définition 3.1 *Par AC_n^-, on entend un ensemble de fonctions $x : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ qui sont absolument continues sur (t_k,t_{k+1}), $k = 0,...,p$, $x(t_k) = x(t_{k^-})$, $k = 1,...,p+1$, $x(0) = x(0^+)$.*

Une fonction $x \in AC_n^-$ qui satisfait les conditions du problème (3) est appelée une solution du problème (3).

Définition 3.2 *Une fonction* $\alpha \in AC_n^-$ *est appelée une sous solution du problème (3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\alpha'(t) \leq F(t, \alpha(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J$$

$$\alpha(t_{k^+}) \leq I_k(\alpha(t_k)) \ , k = 1, ..., p$$

$$\alpha(0) \leq \alpha(\omega)$$

Définition 3.3 *Une fonction* $\beta \in AC_n^-$ *est appelée une sur solution du problème (3) si elle satisfait les conditions suivantes :*

$$\beta'(t) \geq F(t, \beta(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in J$$

$$\beta(t_{j^+}) \geq I_k(\beta(t_k)) \ , k = 1, ..., p$$

$$\beta(0) \geq \beta(\omega)$$

Nous sommes en mesure de donner le resultat principal de cette partie.

Théorème 3.1 *Sous les conditions (H1)-(H4) , si* α *est une sous-solution et* β *une sur-solution de (3) telles que* $\alpha \leq \beta$ *avec* $\alpha(0) = \beta(0) = X_0$*, alors le problème (3) admet une solution* X *vérifiant* $\alpha \leq X \leq \beta$.

Preuve: On remarque que ce problème est similaire au problème étudié dans le chapitre 2.

Soient α une sous-solution et β une sur-solution de (3) telle que $\alpha \leq \beta$ avec $\alpha(0) = \beta(0) = X_0 = (x_{i0}), i = 1, ..., n$.

vérifions les hypothèses du théorème 2.1.

En effet,

$F(t, X)$ es bien continue et quasi-croissante d'après (H2) et (H1).

Les fonctions I_k sont croissantes d'après (H3).

D'après le théorème (2.1), il existe une solution X de (3) vérifiant $\alpha \leq X \leq \beta$, avec $X(0) = X_0$. ■

Conclusion 1 *La solution du problème (3) est evidement la solution $\omega-$périodique recherchée du problème (2).*

Remarque 3.1 *Le cas $\alpha \geq \beta$ est similaire à celui donné par le théorème 2.2 dans le chapitre II.*

Exemple 3.1 *On considère le problème (2) avec $n = 3$, $k = 2$ et $\omega = 3$.*

Les points d'impulsions sont: $t_1 = 1, t_2 = 2$.

Les fonctions d'activations : f_i sont données par $\begin{cases} f_i(x) = 0 & \text{si x} \leq 0 \\ f_i(x) = 1 & \text{si x} \succ 0 \end{cases}$ $i = 1, 2, 3.$

Les constantes $a_i = -1, b_{ij} = \frac{1}{3}, c_i = 1$ pour $i, j = 1, 2, 3$.

$I_1(x) = \frac{x}{2}$, $I_2(x) = 2$.

On obtient le problème :

$$\begin{cases} x_i' = -x_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} f_i\left(x_i\right) + 1, i = 1,2,3 \\ x_0 = 2 \\ x(t_k+) = I_k(x(t_k-)), \quad k = 1,2. \end{cases}$$

On vérifie facilement que les conditions du théorème3.1 sont satifaites avec

la sous-solution: $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,2,3}$ où $\alpha_i\left(t\right) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \prec t \prec 1 \\ 0 & \text{si } 1 \prec t \prec 2 \\ 2 & \text{si } 2 \prec t \prec 3 \end{cases}$ $\forall i = 1,2,3$

Et

la sur-solution: $\beta = (\beta_i)_{i=1,2,3}$ où $\beta_i\left(t\right) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \prec t \prec 1 \\ 3 & \text{si } 1 \prec t \prec 2 \\ 2 & \text{si } 2 \prec t \prec 3 \end{cases}$ $\forall i = 1,2,3$

Ainsi le problème donné admet une solution x de période 3 telle que $\alpha \leq x \leq \beta$ sur $[0,3]$.

Conclusions et perspectives

La méthode de sous- et sur-solutions a été appliquée avec succès dans l'étude d'existence et localisation de solutions pour différents types de problèmes, en particulier pour les problèmes aux limites décrits par des systèmes d'équations différentielles avec impulsions comme dans le cadre de notre travail. Associée à certaines hypothèses de type monotonicité, cette méthode génère des solutions situées entre un couple de fonctions bien ordonnées (sous– et sur-solutions).

Par ailleurs, dans ce travail on a donné une application intéressante aux réseaux nerveux artificiels de type Hopfield, on a pu obtenir des solutions périodiques avec des conditions suffisantes moins restrectives que dans la littérature [6, 7, 8, 9, 14].

Il est intéressant d'appliquer ces résultats aux autres types de réseaux nerveux artificiels (Cohen-Grossberg, RNN, BAMNN,...etc) et d'étudier aussi la stabilité de ces solutions, qui est l'une des caractéristiques désirables pour l'implantaion de ces derniers.

Bibliographie

[1] H.Akça and V. Covachev, **Impulsive Cohen-Grossberg neural networks with S-type distrbuted Delays**, Tatra Mountains Publications, 48(2011) 1-13.

[2] D.D. Bainov, P.S. Simeonov, **Stability Thoery of Differential Equations with Impulse Effects: Theory and Applications**, Ellis Horwood, Chichester, 1989.

[3] I. Bajo and E. Liz, **Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times**, Journal of Mathematical Analysis and Applications 204 (1996), no.1,65–73.

[4] H. Brezis. **Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)**, Edition Masson-Paris, 1983.

[5] P. W. Eloe, J. Henderson, **A boundary value problem for a system of ordinary differential equations with impulse effects**, Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), 785-799.

[6] Z.H. Guan, G. Chen, **On delayed impulsive Hopfield neural networks**, Neural Networks 12 (1999) 273–280.

[7] Z.H. Guan, L. James, G. Chen, **On impulsive auto-associative neural networks**, Neural Networks 13 (2000) 63–69.

[8] J.J. Hopfield, **Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities**, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 79 (1982) 2554–2558.

[9] J.J. Hopfield, **Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons**, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 81 (1984) 3088–3092.

[10] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov and P.S. Simeonov, **Theory of Impulsive Differential Equations**, World Scientific, Singapore, 1989.

[11] V. Lakshmikantham, D.D. Baiınov and P.S. Simeonov, **Theory of Impulsive Differential Equations, Series in Modern Applied Mathematics, vol. 6**,World Scientific, New Jersy, 1989.

[12] J.-L. Lions. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[13] E. Liz, **Existence and approximation of solutions for impulsive first order problems with nonlinear boundary conditions**, Nonlin. Anal. TMA 25 (1995), 1191-1198.

[14] S.G. Pandit, S.G. Deo, **Differential Systems Involving Impulses**, Springer, New York, 1982.

[15] I. Rachunkova, J. Tomecek, **On Nonlinear Boundary Value Problem for Systems of Differential Equations with Impulses**, Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 2002.

[16] K. Rider et C .MINAZZO, mémoire de Master 1 de Mathématiques, **Théorèmes du Point Fixe et applications aux Equations Di érentielles**, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2006-2007.

[17] N. Rouche et J. Mawhin, **Équations différentielles ordinaires Tome Premier, Théorie générale,** Edition Masson-Paris, 1973.

[18] J. Saint Raymond, **Topologie, calcul différentiel et variable complexe**, Calvage et Mounet, Paris (2007)

[19] A.M. Samoilenko, Prestyuk, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995.

[20] L. Schwartz, **Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie,** Editions Hermann (21 octobre 1997).

[21] A. Vergé, **Réseaux de neurones artificiels,** lycée Michelet, TIPE 2009.

[22] W.Zhao, **Dynamics of Coken-Grossberg neural networks with coefficients and time-varying delays, Nonlinear anlyses**, Real World application,9,(2008),1024-1037.

Abstract :

This work deals with nonlinear boundary value problems for systems of differential equations with impulses. Using the lower and upper functions method we prove the existence of a solution of such a problem. We consider both problems having upper functions greater than lower ones and problems with opposite ordered upper and lower functions.

We also consider the mathematical model associated to a system of impulsive differential equations describes a Hopefield artificial neural network, and we establish sufficient conditions, less restrictive than those in literature to obtain periodic solutions.

Key words : first order nonlinear ordinary differential equations, impulses, lower and upper functions.

Résumé :

Ce travail traite des problèmes aux limites non linéaires pour les systèmes d'équations différentielles avec des impulsions. En utilisant la méthode des sous- et sur-solutions, nous prouvons l'existence d'une solution à de tels problèmes. Nous considérons à la fois les problèmes ayant des sur-solutions supérieures aux sous-solutions et des problèmes dans l'ordre opposé.

Nous considérons également le modèle mathématique associé à un système d'équations différentielles impulsives modélisant un réseau neuronal artificiel de type Hopefield et nous établissons des conditions suffisantes, moins restrictives que celles utilisées dans la littérature pour obtenir des solutions périodiques.

Mots clés: équations différentielles ordinaires non linéaires de premier ordre, impulsions, sous- et sur-solutions.

الملخص :

يتناول هذا العمل مشاكل الحدود غير الخطية لنظم المعادلات التفاضلية مع الإندفاعات. باستخدام طريقة والحل الأدنى والأعلى، نثبت وجود حل لهذه المشاكل. ونعتبر كل من المشاكل مع الحلول الأدنى أكبر من الحلول العليا و المشاكل بالترتيب العكسي.

ونرى أيضا النماذج الرياضية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية مع اندفاعات على غرار شبكة اصطناعية عصبية من نوع هوبفيلد ونضع شروطا كافية أقل تقييدا من تلك المعتادة وذلك للحصول على حلول دورية.

كلمات البحث: المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية من الدرجة الأولى، الإندفاعات ,الحل الأعلى والحل الأدنى.